Mecânica Quântica I: Lista 3: Spin 1/2

Juan Carlos Teran

4 de setembro de 2024

1. (a) Utilizando as representações para as componentes de um spin 1/2 em termos das matrizes de Pauli, verifique a relação de comutação:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z \tag{1}$$

As componentes do spin $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ para um sistema de spin 1/2 são dadas pelas matrizes de Pauli, multiplicadas por $\frac{\hbar}{2}$:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z,$$

onde σ_x, σ_y e σ_z são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A relação de comutação entre as componentes do spin é dada por:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = \hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x.$$

Substituindo $\hat{S}_x$ e $\hat{S}_y$ pelas suas respectivas expressões:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = \left(\frac{\hbar}{2}\sigma_x\right)\left(\frac{\hbar}{2}\sigma_y\right) - \left(\frac{\hbar}{2}\sigma_y\right)\left(\frac{\hbar}{2}\sigma_x\right).$$

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = \frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x\right).$$

Sabemos que:

$$\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z, \quad \sigma_y\sigma_x = -i\sigma_z.$$

Portanto:

$$\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z.$$

Assim, a relação de comutação se torna:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = \frac{\hbar^2}{4} \cdot 2i\sigma_z = i\hbar\frac{\hbar}{2}\sigma_z = i\hbar\hat{S}_z.$$

Portanto, verificamos que:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z.$$

(b) Utilizando este resultado junto com a desigualdade de Heisenberg geral, prove que, em qualquer estado $|\psi\rangle$ de um spin 1/2,

$\Delta S_x \cdot \Delta S_y \geq \frac{\hbar}{2}|\langle\hat{S}_z\rangle|$

Para provar a desigualdade de Heisenberg, usaremos a relação de incerteza geral:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle|,$$

onde $A = \hat{S}_x$ e $B = \hat{S}_y$. Substituindo a relação de comutação que acabamos de verificar:

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{S}_x, \hat{S}_y]\rangle|.$$

Sabemos que:

$$\langle[\hat{S}_x, \hat{S}_y]\rangle = i\hbar\langle\hat{S}_z\rangle.$$

Portanto:

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y \geq \frac{1}{2}|\langle i\hbar\hat{S}_z\rangle| = \frac{\hbar}{2}|\langle\hat{S}_z\rangle|.$$

Assim, provamos que:

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y \geq \frac{\hbar}{2}|\langle\hat{S}_z\rangle|.$$

Essa é a desigualdade de Heisenberg para um sistema de spin 1/2.

2. Podemos mostrar que para qualquer vetor $|\chi\rangle$ representando o estado de um spin 1/2, existe uma direção $\hat{n}$ tal que $|\chi\rangle = |+\rangle_{\hat{n}}$, onde $|+\rangle_{\hat{n}}$ é o autovetor de $\vec{\hat{S}} \cdot \hat{n}$ com autovalor positivo:

   (a) Obtenha os valores esperados $\langle\hat{S}_x\rangle$, $\langle\hat{S}_y\rangle$ e $\langle\hat{S}_z\rangle$, em função das coordenadas esféricas θ, φ do vetor unitário $\hat{n}$. Interprete os resultados.

   Vamos resolver envolvendo um sistema de spin $\frac{1}{2}$.

Valores Esperados $\langle \hat{S}_x \rangle$, $\langle \hat{S}_y \rangle$ e $\langle \hat{S}_z \rangle$ Considere que o vetor unitário $\hat{n}$ na direção (θ, φ) em coordenadas esféricas pode ser escrito como:

$$\hat{n} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \tag{2}$$

Podemos expressar o operador $\hat{\vec{S}} \cdot \hat{n}$ como:

$$\hat{\vec{S}} \cdot \hat{n} = \hat{S}_x \sin\theta\cos\varphi + \hat{S}_y \sin\theta\sin\varphi + \hat{S}_z \cos\theta. \tag{3}$$

O estado $|+\rangle_{\hat{n}}$ é o autovetor de $\hat{\vec{S}} \cdot \hat{n}$ com autovalor $\frac{\hbar}{2}$. Como $|\chi\rangle = |+\rangle_{\hat{n}}$, o valor esperado de $\hat{\vec{S}} \cdot \hat{n}$ é:

$$\langle \chi | \hat{\vec{S}} \cdot \hat{n} | \chi \rangle = \frac{\hbar}{2} \tag{4}$$

Para obter os valores esperados $\langle \hat{S}_x \rangle$, $\langle \hat{S}_y \rangle$ e $\langle \hat{S}_z \rangle$, podemos igualar os coeficientes correspondentes:

$$\langle \hat{S}_x \rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\varphi \quad \wedge \quad \langle \hat{S}_y \rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin\varphi \quad \wedge \quad \langle \hat{S}_z \rangle = \frac{\hbar}{2}\cos\theta. \tag{5}$$

Esses valores esperados correspondem às projeções do momento angular de spin ao longo das direções x, y e z, respectivamente. Eles dependem diretamente da orientação do vetor $\hat{n}$ em coordenadas esféricas, o que reflete a direção em que o spin está medido.

(b) Obtenha as incertezas quadradas $\Delta S_x \cdot \Delta S_y \geq \frac{\hbar}{2}|\langle S_z \rangle|$ em função das coordenadas esféricas θ, φ do vetor unitário $\hat{n}$.

Para estados $|\chi\rangle = |+\rangle_{\hat{n}}$, os valores esperados $\langle \hat{S}_x \rangle$, $\langle \hat{S}_y \rangle$, e $\langle \hat{S}_z \rangle$ já foram obtidos. Agora, precisamos encontrar as incertezas ΔS_x e ΔS_y.

Como $|\chi\rangle$ é um autovetor de $\hat{\vec{S}} \cdot \hat{n}$ com autovalor $\frac{\hbar}{2}$:

$$\langle \hat{S}_x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}, \quad \langle \hat{S}_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}, \quad \langle \hat{S}_z^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Portanto, as incertezas são:

$$\Delta S_x = \sqrt{\langle \hat{S}_x^2 \rangle - \langle \hat{S}_x \rangle^2} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi},$$
$$\Delta S_y = \sqrt{\langle \hat{S}_y^2 \rangle - \langle \hat{S}_y \rangle^2} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\varphi}.$$

Assim, o produto das incertezas é:

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y = \frac{\hbar^2}{4}\sqrt{(1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi)(1 - \sin^2\theta\sin^2\varphi)}.$$

Usando a desigualdade de Heisenberg, devemos ter:

$$\frac{\hbar^2}{4}\sqrt{(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)} \geq \frac{\hbar}{2}\left|\frac{\hbar}{2}\cos\theta\right|.$$

(c) Verifique que a desigualdade mostrada no item (b) do problema 1 é satisfeita para todos os valores de θ e φ.

A desigualdade de Heisenberg deve ser satisfeita para todos os valores de θ e φ. Precisamos mostrar que:

$$\sqrt{(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)} \geq \cos\theta.$$

Isso pode ser verificado para diferentes valores de θ e φ. De fato, a desigualdade é satisfeita para qualquer θ e φ, uma vez que $\Delta S_x \cdot \Delta S_y$ é uma expressão não negativa, enquanto o lado direito da desigualdade representa o valor absoluto do componente z do momento angular.

(d) Quais os estados (especificados pelos valores de θ e φ) para os quais a desigualdade acima torna-se uma igualdade?

A desigualdade de Heisenberg se torna uma igualdade quando o estado $|\chi\rangle$ é um estado coerente de spin, ou seja, quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Nesses casos, ΔS_x e ΔS_y são minimizadas, e temos:

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y = \frac{\hbar}{2}\left|\frac{\hbar}{2}\cos\theta\right| = \frac{\hbar^2}{4}.$$

(e) Quais são os estados para os quais o produto de incertezas $\Delta S_x \Delta S_y$ é máximo? Pertencem ao conjunto de estados obtidos em (c)?

O produto $\Delta S_x \Delta S_y$ é máximo quando as projeções $\langle \hat{S}_x\rangle$ e $\langle \hat{S}_y\rangle$ são pequenas ou zero. Isso ocorre para $\theta = \frac{\pi}{2}$ (plano equatorial), onde:

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Estes estados são coerentes com a situação onde $\cos\theta = 0$, o que não é o caso de $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Portanto, esses estados pertencem ao conjunto de estados com a desigualdade saturada (se tornam iguais).

(f) Quais são os estados para os quais o produto de incertezas $\Delta S_x \Delta S_y$ é mínimo? Pertencem ao conjunto de estados obtidos em (c)?

Para encontrar os estados em que o produto de incertezas $\Delta S_x \Delta S_y$ é mínimo, vamos analisar as expressões obtidas anteriormente.

A expressão geral para o produto de incertezas é:

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y = \frac{\hbar^2}{4}\sqrt{(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)}.$$

Para minimizar o produto de incertezas, devemos maximizar as projeções $\langle \hat{S}_x \rangle$ e $\langle \hat{S}_y \rangle$. No caso extremo, isso ocorre quando uma das projeções é máxima (isto é, ΔS_x ou ΔS_y é mínima), o que geralmente ocorre para $\varphi = 0 \vee \varphi = \frac{\pi}{2}$.

No entanto, a incerteza será mínima (zero) para o estado em que $\theta = 0 \quad \vee \quad \theta = \pi$, onde o vetor $\hat{n}$ aponta diretamente ao longo do eixo z. Nessas situações, $\hat{S}_x \quad \wedge \quad \hat{S}_y$ têm valor esperado zero, o que leva a:

$$\Delta S_x = \Delta S_y = \frac{\hbar}{2},$$

e, portanto

$$\Delta S_x \Delta S_y = \frac{\hbar^2}{4}.$$

No item (c), vimos que a desigualdade de Heisenberg é satisfeita para todos os valores de θ e φ, mas se torna uma igualdade especificamente para $\theta = 0 \vee \theta = \pi$. Esses estados correspondem àqueles para os quais o produto de incertezas $\Delta S_x \Delta S_y$ é mínimo.