CAPITULO 2

DESCRIPCIÓN DE LA ONDA

INTRODUCCION:

La representación matemática de una onda puede suponerse complicada, dada la diversidad de cantidades físicas que se pueden expresar como la propagación de una perturbación del medio. Sin embargo, como veremos haciendo algunas consideraciones se pueden generalizar la funciones que representan convenientemente el movimiento ondulatorio de una perturbación y, lo que resultará a la postre más importante, su propagación puede describirse con una ecuación de onda igualmente generalizada para una, dos o tres dimensiones.

FUNCION DE ONDA:

Si hacemos una representación gráfica de la intensidad o magnitud de la perturbación, que llamaremos ***función de onda*** ξ, de acuerdo a su variación a medida que se desplaza en una dirección particular del espacio, por ejemplo el eje coordenado z, obtendremos el "***perfil***" de la onda que podrá tener una forma geométrica cualquiera. En general, la función de onda dependerá de las variables de tiempo y espacio. En una dimensión se puede escribir:

$$\xi = f(z, t) \qquad [1]$$

En general la función de la onda dependerá de las variables de tiempo y espacio y, en una dimensión se puede escribir

$$\xi = f(\mathbf{z}, \mathrm{t}) \qquad [1]$$

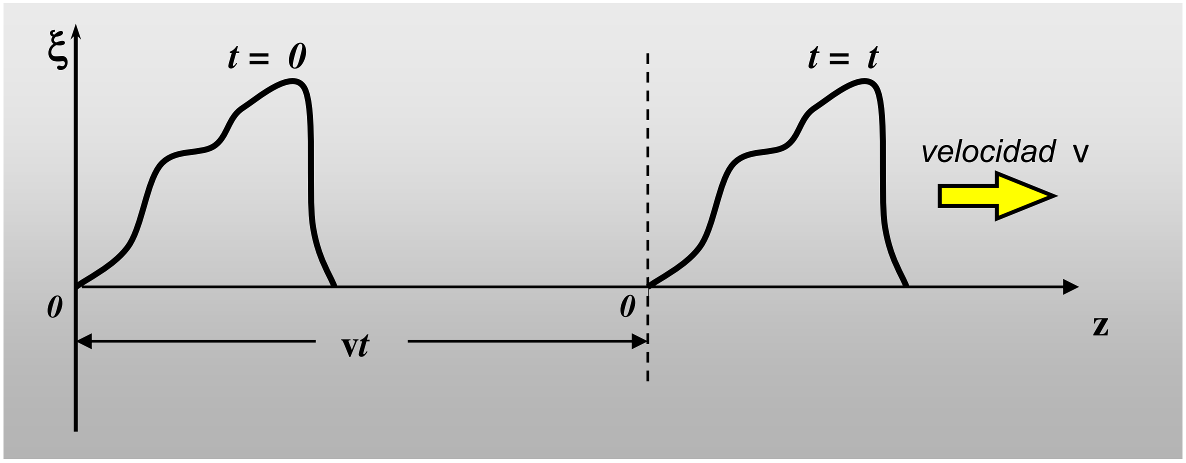


Figura Nº 2: *Pulso viajero*

En la figura Nº 2 tenemos una doble representación temporal (para t = 0 y t = t) de una onda no oscilante conocida como "***pulso***" viajero, el cual generalmente ***se produce cuando la perturbación aparece y desaparece de manera brusca y repentina***. En este caso, la onda viaja en la dirección ***Z*** con forma constante y con velocidad "*v*", conocida como "***velocidad de fase***", de modo que, al transcurrir un tiempo *t*, el pulso se habrá desplazado del origen una distancia ***v****.t.*

La expresión más simple de una onda, de una cantidad variable ξ, que viaja a la derecha en la dirección z con velocidad constante v es:

$$\xi = f\,(\mathrm{z} - \mathrm{v}\ t) \qquad [2]$$

Si queremos verificar la variación de ξ, luego de un aumento Δt en el tiempo y considerando el incremento de $v\Delta t$ en la coordenada ***z***, tendremos:

$$f\left[\left(\mathrm{z} + \mathrm{v}\,\Delta t\right) - \mathrm{v}\left(t + \Delta t\right)\right] =$$

$$f\left[\left(\mathrm{z} + \mathrm{v}\,\Delta t\right) - \mathrm{v}t - \mathrm{v}\,\Delta t\right] = \quad f\,(\,\mathrm{z} - \mathrm{v}\,t\,)$$

que es precisamente la ecuación [2], de modo que, ***el perfil permanece inalterado***.

Si la onda se desplazara en sentido contrario, en este caso a la izquierda, será suficiente invertir el signo de la velocidad en la función de onda, resultando:

$$\xi = f\,(z + v\,t) \qquad [3]$$

Concluimos entonces que una expresión matemática de la forma:

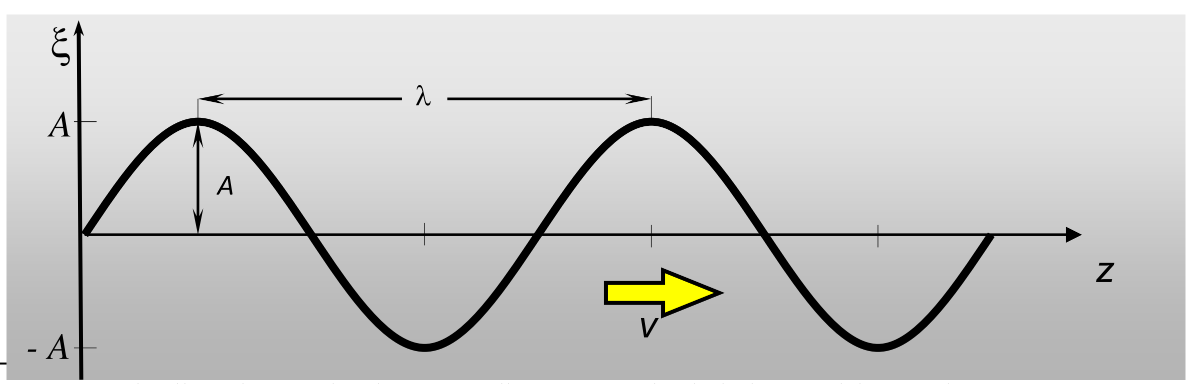
$$\xi\,(z\,,\,t) = f\,(z \mp v\,t) \qquad [4]$$

que llamaremos "***función de onda***" unidimensional, es adecuada para describir una situación física que "viaja" o "se propaga" sin deformación en la dirección del eje **Z**.

La cantidad ξ $(z\,,\,t)$ ***puede representar muy diversas cantidades físicas***, tales como la deformación en un sólido, la presión de un gas, la temperatura de un cuerpo, un campo eléctrico o magnético, e incluso una onda cuántica*.

ELEMENTOS DE UNA ONDA:

Si llamamos "*A*" a la ***amplitud de la onda***, "ω" a la ***frecuencia angular*** (es decir, 2π veces la ***frecuencia*** " f " ó " ν " en ciclos por unidad de tiempo), "T" al ***período*** (unidades de tiempo por onda), "λ" a ***la longitud de onda,*** que es la distancia de una cresta a la siguiente o, más precisamente, la distancia en la dirección de propagación entre dos puntos con el mismo valor de la función de onda, "k" al ***número de propagación*** (definido como $|k\,\lambda| = 2\pi$), $v = f\,\lambda$ a la ***velocidad de fase o propagación,*** $\chi = 1/\lambda$ al ***número de onda*** y "δ" la ***fase inicial o edad del ángulo*** (la cual se origina en el generador de la onda y es independiente de qué tan distante en el espacio y qué tan lejos en el tiempo ha viajado la onda).



* Respecto a las llamadas "Ondas de De Broglie", se recomienda la lectura del Capítulo 6 en "*Naturaleza ondulatoria de las partículas*" (**Young, Huhg,** 1971: 152-163).

Figura Nº 3: *Representación de un tren de ondas*

Podemos describir la perturbación de la figura Nº 3 que se propaga en la dirección positiva del eje ***Z*** en el lenguaje de la geometría analítica de muchas formas equivalentes:

$$\xi = A\,sen\,k(z \mp vt + \delta) \quad [5]$$

$$\xi = A\,sen(kz \mp \omega t + \delta) \quad [8]$$

$$\xi = A\,sen\,2\pi\left(\frac{z}{\lambda} \mp \frac{t}{T} + \delta\right) \quad [6]$$

$$\xi = A\,sen\,2\pi f\left(\frac{z}{v} \mp t + \delta\right) \quad [9]$$

$$\xi = A\,sen\,2\pi(\chi z \mp ft + \delta) \quad [7]$$

$$\xi = A\,sen\left(\frac{2\pi z}{\lambda} \mp \frac{t}{T} + \delta\right) \quad [10]$$

Alternativamente podemos utilizar una representación compleja de la onda; por ejemplo:

$$\xi = Ae^{i(\omega t - \kappa z + \delta)} = Ae^{i\varphi} \quad [11]$$

Y luego, tomar como solución sólo ***la parte real*** de la función compleja:

$$\xi = A\cos(\kappa z - \omega t + \delta) \quad [12]$$

TABLA Nº 1

PARAMETROS DE LAS ONDAS

Nombre	Símbolo	Dimensión	A	ϕ	T	λ	f	ω	v	k	χ
Amplitud	A	**Igual a la cantidad física que represente**	A	-	-	-	-	-	-	-	-
Fase	ϕ	**Adimensional**	-	ϕ	-	-	-	-	-	-	-
Período	T	**Tiempo**	-	-	T	λ/v	$1/f$	$2\pi/\omega$	λ/v	$2\pi/(k\ v)$	$1/(v\chi)$
Longitud de Onda	λ	**Espacio**	-	-	$v\ T$	λ	v/f	$2\pi v\ /\omega$	v/f	$2\pi/k$	$1/k$
Frecuencia	f	**Tiempo^{-1}**	-	-	$1/T$	v/λ	f	$\omega/2\pi$	v/λ	$k\ v/2\pi$	$v\chi$
Frecuencia angular	ω	**Tiempo^{-1}**	-	-	$2\pi/T$	$2\pi v/\lambda$	$2\pi f$	ω	$k\ v$	$k\ v$	$2\pi v\chi$
Velocidad de Onda	v	**Espacio x Tiempo^{-1}**	-	-	λ/T	λf	λf	ω/k	v	ω/k	f/χ
Número de Propagación	k	**Espacio^{-1}**	-	-	$2\pi/(v\ T)$	$2\pi/\lambda$	$2\pi\ f/v$	ω/v	ω/v	k	$2\pi\chi$
Número de onda	χ	**Espacio^{-1}**	-	-	$1/(v\ T)$	$1/\lambda$	f/v	$\omega/2\pi v$	$\omega/2\pi v$	$k/2\pi$	χ

ECUACION DE ONDA:

En cualquier instante la variación de ξ respecto a Z, que representa la pendiente de la gráfica, viene dada por:

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = f'(z - vt) \qquad [13]$$

La segunda derivada de ξ respecto a *z*, que representa la curvatura del perfil se denota por:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = f''(z - vt) \qquad [14]$$

Por otra parte, en cualquier lugar, la cantidad ξ cambia con el tiempo según:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v\, f'(z - vt) \qquad [15]$$

Y la segunda diferencial con respecto al tiempo, es decir la aceleración de ξ, está dada por:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 f''(z - vt) \qquad [16]$$

Combinando los resultados de las ecuaciones [14] y [16], toda onda que se propague con velocidad de fase constante en la dirección de un eje coordenado, en este caso *Z*, y sin modificación de su perfil, está regida por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \qquad [17]$$

Ecuación de Onda Unidimensional

En consecuencia, si un sistema físico queda definido por una ecuación como la [17], entonces soportará ondas que se propagarán sin cambio en la forma.[2]

[2] Se recomienda la lectura de "Ó*ptica"* (**GRAHAM y THOMPSON**, 1979: 23)

Para ondas que se desplazan en diversas direcciones del espacio, es necesario generalizar la ecuación [17] para aplicarla a un movimiento ondulatorio tridimensional:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad [18]$$

La cual representa la ecuación de onda tridimensional en el sistema de coordenadas rectangulares, pero, siendo más generales podemos usar la siguiente expresión que cubre cualquier formulación de coordenadas espaciales, planas o unidimensionales.

$$\nabla^2 \xi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad [19]$$

El operador ∇^2, conocido como "***laplaciano***", toma una forma distinta en cada sistema coordenado y nos permite describir matemáticamente el comportamiento de una onda tridimensional de acuerdo a su forma, de la manera más conveniente y sencilla.[3]

[3] Para conocer sobre las formas que toma el ***laplaciano*** en diversos sistemas de coordenadas revisar: *"Óptica"* (**HETCH y ZAJAC**, 1994: 35-36) o *"Óptica"* (**GRAHAM y THOMPSON**, 1979: 31-32)