Nombre del Instituto: Núcleo Universitario "Rafael Rangel"
Dependencia: Departamento de Física y Matemáticas
Asignatura: Física Moderna
Profesor: Juan Terán

Tema: Transmisión y Reflexión de Partículas
Plan de Estudio: Educación Física y Matemática Plan 95
Duración: 120min

PROPÓSITO	CONTENIDO	ACTIVIDADES	PROCESOS TÉCNICOS	RECURSOS DIDÁCTICOS	EVALUACIÓN
Lograr que el estudiante durante el proceso enseñanza aprendizaje, establezca las diferencias entre el modelo clásico y cuántico de una partícula confinada en un pozo de potencial a través de la estrategia denominada "La partícula reclusa"	Aplicación de la Ecuación de Schrödinger, tópico Transmisión y Reflexión de Partículas Cuánticas.	**Inicio:** ▪ Presentación del tema. ▪ Diagnóstico de las concepciones antes del proceso de enseñanza. ▪ Formalización del estudio del Pozo de Potencial. **Desarrollo:** Conformación de equipos. Implementación de la estrategia "La partícula reclusa" para el desarrollo procedimental del contenido: Aplicación de la Ecuación de Schrödinger. Ejecución de Actividades. **Cierre:** Promover el resumen de la clase y construcción de conclusiones	**Método:** Inductivo deductivo **Procedimientos:** Discusión sobre las concepciones sobre la Función de Onda, Operadores, Valores Esperados y Pozo de Potencial. Construcción de conceptos a partir de situaciones planteadas. Resolución de problemas donde se diferencien los modelos clásicos y cuánticos. **Estrategias de Aprendizaje:** – Expositiva – Equipos de trabajo – Pregunta Respuesta – Lluvia de ideas	Cuaderno de Notas. Tabla de Integrales. Calculadora. Lápices. **Bibliografía:** Acosta, V. (1992). Curso de física moderna. México: Harla. Alonso, M. Y Finn, J. (1986). Fundamentos cuánticos y estadísticos. México: Adison Wesley Iberoamericana. Tiplert, P. y Mosca, G. (2012). Física Moderna, Mecánica Cuántica, Relatividad y la estructura de la Materia. Barcelona: Reverte	Evaluar el trabajo práctico por equipos; para determinar la capacidad de los alumnos en el desarrollo de Modelos Ilustrativos a partir de una situación Cuántica **Técnica:** Análisis de producción de los alumnos **Instrumento:** Trabajo de Aplicación y síntesis

Estrategia: “La Partícula Reclusa”**.**

Estrategia para el desarrollo procedimental del contenido:

Aplicación de la Ecuación de Schrödinger.

Integrantes del equipo:

Materiales a utilizar:

- Cuaderno de Notas.
- Tabla de Integrales.
- Calculadora.
- Lápices.

¿Para qué? (Contenidos conceptuales)

Esta actividad propicia la comprensión del Estado de Superposición y los valores discretos de la Energía Total de la partícula.

Acciones a seguir:

- Observar
- Prestar atención
- Seguir instrucciones
- Desarrollar Ilustraciones
- Resolver situaciones problemáticas

¿Cómo lo vas hacer? (Contenidos procedimentales)

Se resolverá una situación problemática sobre una partícula confinada en un Pozo de Potencial, donde se describirá las soluciones de la ecuación de Schrödinger, se graficarán las funciones de probabilidades y se determinarán el valor mínimo de la Energía Total de la partícula.

¿Qué más se puede hacer?

Obtener los valores esperados de la posición, cantidad de movimiento, momento angular, energía cinética de la partícula.

Estrategia: “La Partícula Reclusa”**.**

Estrategia para el desarrollo procedimental del contenido:

Aplicación de la Ecuación de Schrödinger.

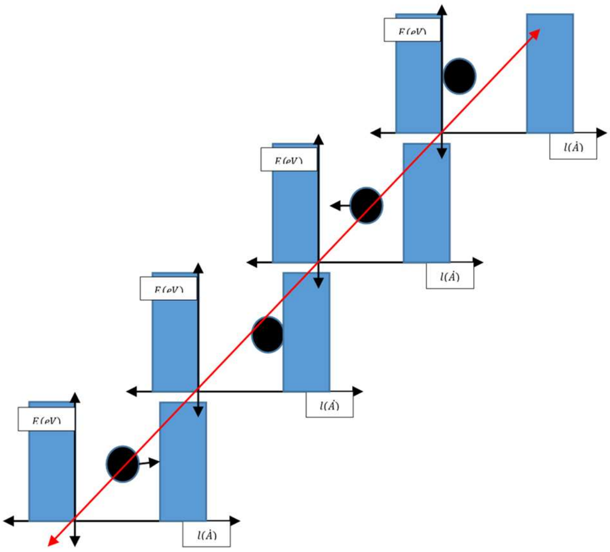
Integrantes del equipo:

Plantea la interrogante, discute y escribe el análisis sobre:

¿Qué consecuencias físicas produciría si la función de posibilidades de una partícula confinada no es estacionaria?

Ejemplo: Consideremos la situación donde un electrón se encuentra confinado (Reflejándose “Onda” y rebotando “partícula” de pared en pared) en una dimensión de $L = 1\dot{A}$, donde aplicaremos la Ec. de Schrödinger independiente del tiempo, debido a que la función de posibilidades está confinada a una pequeña región de una dimensión, por lo que solo se permiten ondas estacionarias que no varían en función del tiempo. Determine la función de posibilidades, grafique la intensidad de la función (Densidad lineal Probabilística) y determine el valor de energía mínimo que puede tener el electrón.

Ilustración. Vista clásica de la partícula donde se conserva el mismo nivel de energía y la línea roja representa el tiempo.



Nota: Terán, J. (2014)

Condiciones
$V = 0$ Para $0 < l < L$
$V = \infty$ Para $l < 0$
$V = \infty$ Para $l > L$
$\psi(0) = 0$ y $\psi(L) = 0$

Solución
Para conocer la función de posibilidades ψ es necesario resolver la Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo que tiene la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + (V - E)\psi = 0 \qquad \text{…(1)}$$

Donde en este caso $\nabla^2 = \frac{d^2}{dl^2}$ por estar confinado en una sola dimensión, además $V = 0$ por lo que la ecuación (1) toma la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dl^2}\psi(l) - E\psi(l) = 0 \qquad \text{…(2)}$$

El cual (2) se puede representar por la forma

$$\frac{d^2}{dl^2}\psi(l) + \frac{2m}{\hbar^2}\psi(l) = 0 \qquad \text{…(3)}$$

El cual (3) es una ecuación diferencial de segundo orden lineal y homogénea del tipo $y'' + ay' + by = 0$ donde en nuestro caso $a = 0$ y $b = \frac{2mE}{\hbar^2}$ este tipo de ecuación tiene por solución

$$y = C_1e^{r_1 l} + C_2e^{r_2 l} \qquad \text{...(4)}$$

Donde r es la raíz solución de la ecuación característica de la ecuación diferencial $r^2 + ar + b = 0$, es necesario consultar el Libro Calculus de Tom Apostol Vol. 2 para profundizar un poco más sobre el tema.
Para nuestro caso la ecuación característica toma la forma $r^2 + b = 0$ por lo que sus raíces serán:

$$r_1 = i\sqrt{b} \qquad \text{y} \qquad r_2 = -i\sqrt{b} \qquad \text{…(5)}$$

De (5) sustituyendo en la ecuación (4) proporciona la siguiente solución

$$\psi(l) = C_1e^{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}l} + C_2e^{-i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}l} \qquad \text{…(6)}$$

Sin embargo es necesario conocer el valor de las constantes C_1 y C_2 para lo que se debe usar las condiciones iniciales comenzando con $\psi(0) = 0$ aplicado en (6)

$$\psi(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = 0$$

$$C_1 = -C_2 \qquad \text{…(7)}$$

Luego sustituyendo (7) en (6)

$$\psi(l) = C_1e^{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}l} - C_1e^{-i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}l} = C_1\left(e^{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}l} - e^{-i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}l}\right) \qquad \text{…(8)}$$

Aplicando la fórmula de Euler a (8)

$$\psi(l) = C_1\left(\cos\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}l + i\sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}l - \cos\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}l + i\sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}l\right)$$

$$\psi(l) = 2C_1 i \sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\, l \qquad \ldots(9)$$

Ahora aplicando la condición $\psi(L) = 0$ en (9)

$$\psi(L) = 2C_1 i \sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\, L = 0 \qquad \ldots(10)$$

Como $C_1 \neq 0$ se deben verificar los valores para cuando $\sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\, L = 0$ entonces $\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\, L = n\pi$ con $n = 1,2,3, \ldots$

La función (10) toma la forma

$$\psi_n(l) = 2C_1 i \sin\frac{n\pi}{L} l \qquad \ldots(11)$$

La n en la función de posibilidades representa la superposición de estados que tiene el electrón en el pozo de potencial, además proporciones los valores de la energía total de forma cuántica.

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Obtenga el valor de la Energía Total de la partícula en los cinco primeros estados cuánticos y realice una ilustración del pozo de potencial con cinco líneas donde cada línea represente la energía de la partícula según su estado cuántico.

Espacio dedicado para el cálculo.

Nota: __________________________ (   )

Para poder graficar la intensidad es necesario normalizar la función de posibilidades

$$\int_0^L \psi_n(l)^* \psi_n(l)\, dl = 1$$

$$\int_0^L \left(-2C_1 i \sin\frac{n\pi}{L} l\right)\left(2C_1 i \sin\frac{n\pi}{L} l\right) dl = 1$$

$$4{C_1}^2 \int_0^L \sin^2\frac{n\pi}{L} l\, dl = 1$$

En la tabla de integrales

$$\int sen^2 mx dx = \frac{1}{2m}(mx\ -\ sen\, mx\, cos\, mx)$$

Aplicando obtenemos

$$2{C_1}^2 \frac{L}{n\pi}\left(\frac{n\pi}{L} l\ -\ sen\ \frac{n\pi}{L} l\, cos\ \frac{n\pi}{L} l\right)\Big|_0^L = 1$$

$$2{C_1}^2 \frac{L}{n\pi}(n\pi\ -\ sen\, n\pi\, cos\, n\pi +\ sen\, 0\, cos\, 0) = 1$$

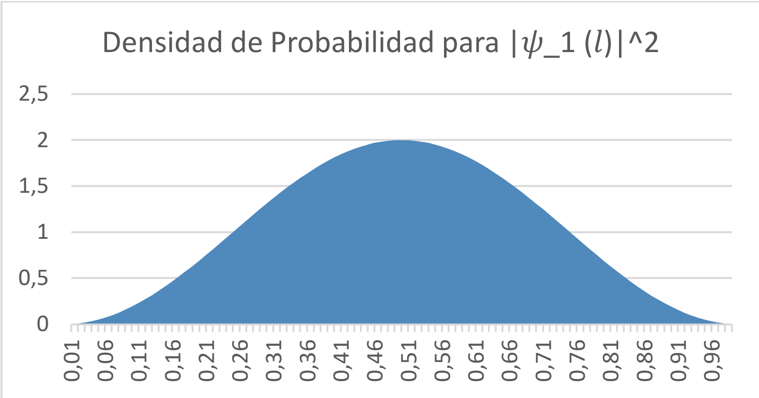
$$2{C_1}^2 \frac{L}{n\pi}(n\pi) = 1$$

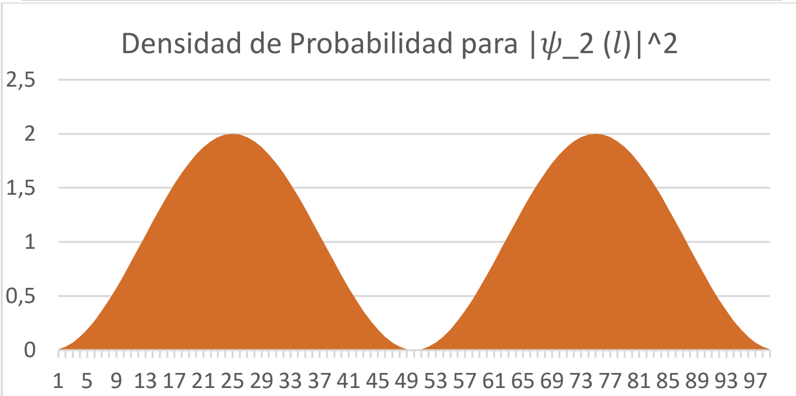
$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{2L}}$$

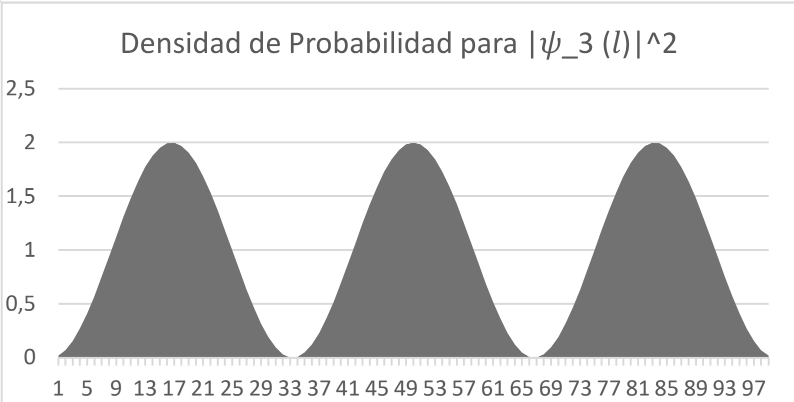
Por lo tanto la función a graficar será

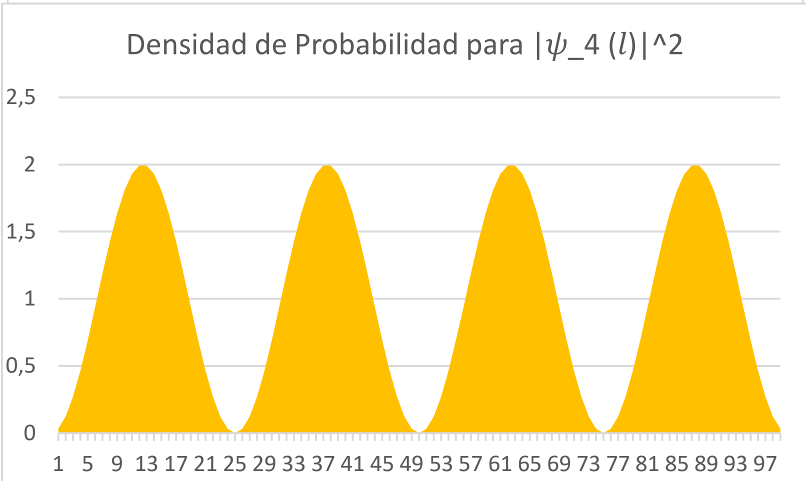
$$|\psi_n(l)|^2 = \frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi}{L} l$$

Graficas de $|\psi_n(l)|^2$ para $n = 1{,}2{,}3{,}4$


Densidad de Probabilidad para |𝜓_1 (𝑙)|^2
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0,01 0,06 0,11 0,16 0,21 0,26 0,31 0,36 0,41 0,46 0,51 0,56 0,61 0,66 0,71 0,76 0,81 0,86 0,91 0,96


Densidad de Probabilidad para |𝜓_2 (𝑙)|^2
2,5
2
1,5
1
0,5
0
1 5 9 13 17 21 25 29 33 37 41 45 49 53 57 61 65 69 73 77 81 85 89 93 97


Densidad de Probabilidad para |𝜓_3 (𝑙)|^2
2,5
2
1,5
1
0,5
0
1 5 9 13 17 21 25 29 33 37 41 45 49 53 57 61 65 69 73 77 81 85 89 93 97


Densidad de Probabilidad para |𝜓_4 (𝑙)|^2
2,5
2
1,5
1
0,5
0
1 5 9 13 17 21 25 29 33 37 41 45 49 53 57 61 65 69 73 77 81 85 89 93 97

La Energía Total mínima que puede tener el electrón es E_1

$$E_1 = \frac{1^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2(1{,}054x10^{-34}J.s)^2}{2(9{,}10x10^{-31}kg)(1x10^{-10}m)^2} = 37{,}6eV$$

Actividades:

a) Realice una ilustración de la Situación vista cuánticamente usando los cuatro primeros estados de la partícula en superposición.

b) Desarrollo un concepto sobre una partícula cuántica confinada en un Pozo de Potencial

c) Realice un esquema donde se represente los diversos conceptos físicos que consideras necesario para resolver la situación de la partícula confinada en un pozo de potencial.

d) Determine los valores esperados de la cantidad de movimiento.

e) En base a la función de onda obtenida determine el valor de energía mínimo que puede tener un grano de arena de masa $1x10^{-8}kg$ confinada en un pozo de potencial de paredes infinitas y de anchura $L = 2mm$.