Nombre del Instituto: Núcleo Universitario “Rafael Rangel”
Tema: Transmisión y Reflexión de Partículas
Dependencia: Departamento de Física y Matemáticas
Plan de Estudio: Educación Física y Matemática Plan 95
Asignatura: Física Moderna
Duración: 120min
Profesor: Lic. Juan Terán

PROPÓSITO	CONTENIDO	ACTIVIDADES	PROCESOS TÉCNICOS	RECURSOS DIDÁCTICO	EVALUACIÓN
Lograr que el estudiante durante el proceso enseñanza aprendizaje, reflexione sobre el coeficiente de reflexión y transmisión de la partícula bajo la influencia de un escalón de potencial a través de la estrategia denominada “La Partícula Fantasma”	Aplicación de la Ecuación de Schrödinger, tópico Transmisión y Reflexión de Partículas Cuánticas.	**Inicio:** ▪ Resumen de la clase anterior ▪ Presentación del tema. ▪ Diagnóstico de las concepciones antes del proceso de enseñanza. ▪ Formalización del estudio del Potencial Escalón. **Desarrollo:** Conformación de equipos. Implementación de la estrategia “La Partícula Fantasma” para el desarrollo procedimental del contenido: Aplicación de la Ecuación de Schrödinger. Ejecución de Actividades. **Cierre:** Promover el resumen de la clase y construcción de conclusiones	**Método:** Inductivo deductivo **Procedimientos:** Discusión sobre las concepciones referentes a la penetración de zonas prohibidas, Reflexión de partículas, coeficiente de reflexión y Potencial Escalón. Construcción de conceptos a partir de situaciones planteadas. Resolución de problemas donde E>U. **Estrategias de Aprendizaje** – Expositiva – Equipos de trabajo – Pregunta Respuesta – Lluvia de ideas	Cuaderno de Notas. Tabla de Integrales. Calculadora. Lápices. **Bibliografía:** Acosta, V. (1992). Curso de física moderna. México: Harla. Alonso, M. Y Finn, J. (1986). Fundamentos cuánticos y estadísticos. México: Adison Wesley Iberoamericana. Tiplert, P. y Mosca, G. (2012). Física Moderna, Mecánica Cuántica, Relatividad y la estructura de la Materia. Barcelona: Reverte	Evaluar el trabajo práctico por equipos; para determinar la capacidad de los alumnos en reflexionar sobre la reflexión de una partícula cuántica a través del tiempo. **Técnica:** Análisis de producción de los alumnos **Instrumento:** Trabajo de Aplicación y síntesis

Estrategia: “La Partícula Fantasma”**.**

Estrategia para el desarrollo procedimental del contenido:

Aplicación de la Ecuación de Schrödinger.

Integrantes del equipo:

Materiales a utilizar:

- Cuaderno de Notas.
- Tabla de Integrales.
- Calculadora.
- Lápices.

¿Para qué? (Contenidos conceptuales)

Esta actividad propicia la reflexión sobre cómo se reflejan las partículas cuánticas en función del tiempo y su penetración en zonas clásicamente prohibidas.

Acciones a seguir:

- Observar
- Prestar atención
- Seguir instrucciones
- Desarrollar Ilustraciones
- Resolver situaciones problemáticas

¿Cómo lo vas hacer? (Contenidos procedimentales)

Se resolverá una situación problemática sobre una partícula libre que se encuentra con un escalón de potencial, donde se describirá las soluciones de la ecuación de Schrödinger, se graficará la densidad de probabilidad y se determinará el coeficiente de reflexión de la partícula.

¿Qué más se puede hacer?

Construir un potencial con varios escalones donde el cambio de posición implique un aumento en el potencial para así determinar cómo este potencial influye en el comportamiento de la partícula.

Estrategia: “La Partícula Fantasma”**.**

Estrategia para el desarrollo procedimental del contenido:

Aplicación de la Ecuación de Schrödinger.

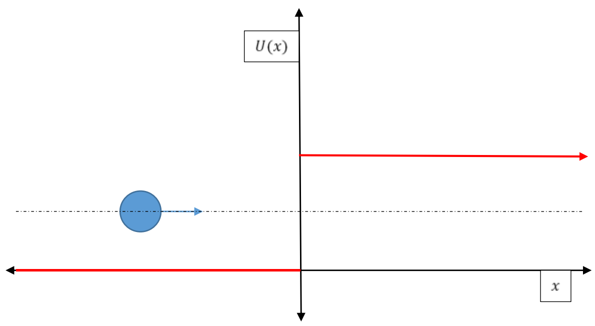
Integrantes del equipo:

Plantea la interrogante, discute y escribe el análisis sobre:

¿Qué se considera como zona clásica prohibida?
Contextualice un ejemplo donde se aprecie una
zona clásica prohibida

Ejemplo: Consideremos la situación de una partícula libre que se desplaza por el eje de las x con una velocidad $v = \frac{\hbar k}{m}$ con el número de onda k constante, justo al cruzar la frontera en $x = 0$ se encuentra con un escalón de potencial (Se presenta $U\ (x)$ discontinua para simplificar el modelo matemático $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U, & x > 0 \end{cases}$ aunque no se presente un potencial de este tipo en la naturaleza es una buena aproximación) donde $U > E$. Aplicando la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo estime la probabilidad de reflexión de la partícula y si es capaz de penetrar la zona donde $U(x) > E$, conocida clásicamente como la zona prohibida, realice una ilustración en función del tiempo sobre la partícula.

Ilustración 1. Partícula clásica desplazándose en una zona de potencial nulo a una zona donde el potencial es mayor que la energía total de la partícula.



Nota: Terán, J. (2014)

Realice dos ilustraciones donde se muestre 1) el evento donde la partícula clásica se encuentra con el escalón y 2) la localización, dirección de la velocidad de la partícula clásica un momento después de encontrarse con el escalón.

Nota: ___________________________ (   )

En función de la situación problemática y la Teoría de la Ec. de Schrondinger se obtienen las siguientes condiciones

Condiciones

$V(x) = 0$ Para $x < 0$

$V(x) = V$ Para $x > O$

$\psi(x)|_{0^-} = \psi(x)|_{0^+}$

$$\frac{d}{dx}\psi(x)\bigg|_{0^-} = \frac{d}{dx}\psi(x)\bigg|_{0^+}$$

Solución

Para conocer la función de posibilidades ψ es necesario resolver la Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en las dos regiones donde la **Región I** corresponde para $U(x) = 0, donde\ x < 0$ y la **Región II** corresponde para $U(x) = U, donde\ x > 0$

Región I	**Región II**
Para la primera región la Ec. de Schrödinger tiene la forma $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - E\psi(x) = 0 \ \ con\ x < 0$ Que puede expresarse de la forma $\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$	Para la segunda región la Ec. de Schrödinger tiene la forma $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + (U-E)\psi(x) = 0 \ \ con\ x > 0$ Que puede expresarse de la forma $\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - \frac{2m(U-E)}{\hbar^2}\psi(x) = 0$

Ambas ecuaciones diferencial son de segundo orden lineal y homogénea del tipo $y'' + ay' + by = 0$ donde $a_1 = a_2 = 0$ y $b_1 = {k_1}^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ y $b_2 = {k_2}^2 = \frac{2m(U-E)}{\hbar^2}$ este tipo de ecuación tiene por solución $y = C_1e^{r_1l} + C_2e^{r_2l}$ donde r es la raíz solución de la ecuación característica de la ecuación diferencial $r^2 + ar + b = 0$, es necesario consultar el Libro Calculus de Tom Apostol Vol. 2 para profundizar un poco más sobre el tema.

Región I	**Región II**
La ecuación característica toma la forma $r^2 + b_1 = 0$ Por lo que sus raíces serán: $r_1 = ik_1$ y $r_2 = -ik_1$ El cual proporciona la siguiente solución $\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$	La ecuación característica toma la forma $r^2 - b_2 = 0$ Por lo que sus raíces serán: $r_1 = k_2$ y $r_2 = -k_2$ El cual proporciona la siguiente solución $\psi(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}$

La Ec. Schrödinger proporciona una familia de soluciones las cuales deben ser evaluadas bajo la Teoría de Schrödinger, en la primera región se obtienen dos funciones que se propagan en direcciones opuestas formando así una función estacionaria tal como ocurre con las ondas estacionarias en una cuerda, dichas funciones son continuas y convergentes. Para la segunda región una función diverge $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} Ce^{k_2x} = +\infty$ por lo que $C = 0$ según la Teoría de Schrödinger, mientras que la segunda función $f(x) = De^{-k_2x}$ converge a cero.

De acuerdo a los resultados discute con tu equipo ¿cómo la partícula puede penetrar la zona prohibida y de qué forma? Desarrolla tu argumento en el recuadro

Se concluye entonces que

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, & x < 0 \\ De^{-k_2x}, & x > 0 \end{cases}$$

Haciendo uso de la tercera y cuarta condición encontramos los valores de las constantes

$$\psi(x)|_{0^-} = \psi(x)|_{0^+}$$

$$Ae^{ik_1(0)} + Be^{-ik_1(0)} = De^{-k_2(0)}$$

$$A + B = D$$

Luego

$$\frac{d}{dx}\psi(x)\bigg|_{x=0^-} = \frac{d}{dx}\psi(x)\bigg|_{x=0^+}$$

$$ik_1Ae^{ik_1x} - ik_1Be^{-ik_1x}\big|_{x=0^-} = -k_2De^{-k_2x})\big|_{x=0^+}$$

$$ik_1A - ik_1B = -k_2D$$

Verifique que la solución del sistema de ecuaciones dejando a D como parámetro es

$$A = \frac{D}{2}\left(1 + \frac{ik_2}{k_1}\right) \qquad \text{y} \qquad B = \frac{D}{2}\left(1 - \frac{ik_2}{k_1}\right)$$

De esta forma obtenemos la función de posibilidades en función de la posición.

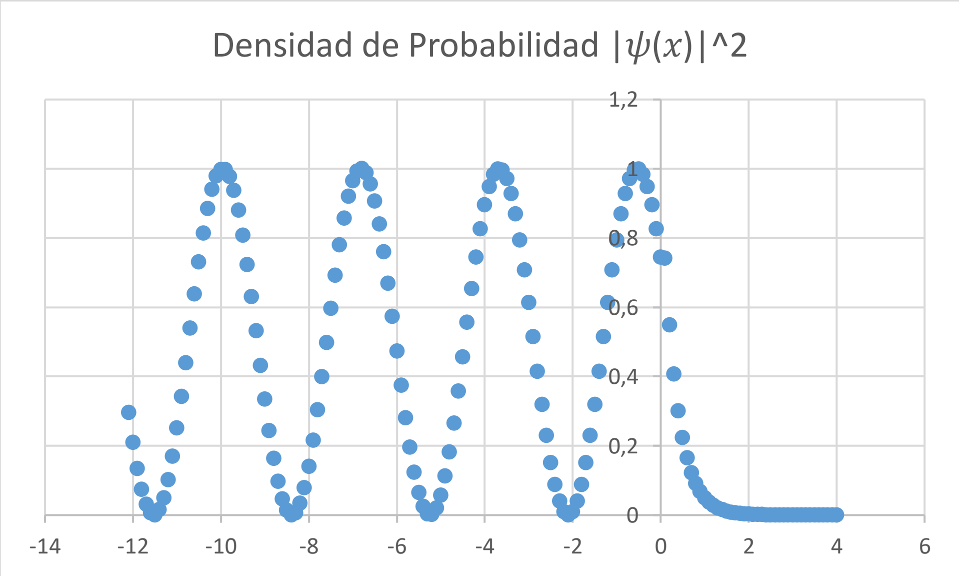
$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{D}{2}\left(1+\frac{ik_2}{k_1}\right)e^{ik_1x} + \frac{D}{2}\left(1-\frac{ik_2}{k_1}\right)e^{-ik_1x}, & x<0 \\ De^{-k_2x}, & x>0 \end{cases}$$

Como la función es lineal se procede a multiplicar toda la función por $1/A$ obteniendo

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_1x} + \dfrac{1-i\sqrt{U/_E - 1}}{1+i\sqrt{U/_E - 1}}e^{-ik_1x}, & x<0 \\ \dfrac{2}{1+i\sqrt{U/_E - 1}}e^{-k_2x}, & x>0 \end{cases}$$

Para graficar la densidad de probabilidad es necesario determinar $|\psi(x)|^2$

Ilustración 2. Densidad de Probabilidad $|\psi(x)|^2$



Nota: Terán, J. (2014)

Para calcular el coeficiente de reflexión se parte del hecho de que $\frac{D}{2}\left(1+\frac{ik_2}{k_1}\right)e^{ik_1x}$ es la onda incidente y $\frac{D}{2}\left(1-\frac{ik_2}{k_1}\right)e^{-ik_1x}$ es la onda reflejada por lo que el coeficiente de reflexión estará designado por la fracción $\frac{B}{A}$ que especifica la amplitud de la parte reflejada de la función de onda con relación a la amplitud de la onda incidente. Pero en mecánica cuántica depende es de las intensidades y no de las amplitudes por lo tanto:

$$R = \frac{B^*B}{A^*A}$$

Entonces

$$R = \frac{\frac{D}{2}\left(1 + \frac{ik_2}{k_1}\right)\frac{D}{2}\left(1 - \frac{ik_2}{k_1}\right)}{\frac{D}{2}\left(1 - \frac{ik_2}{k_1}\right)\frac{D}{2}\left(1 + \frac{ik_2}{k_1}\right)} = 1$$

Por lo que existe la certeza de que la partícula es reflejada.

Por último realice una ilustración en función del tiempo sobre la partícula donde se aprecie el evento de reflexión.

Actividad

1) Verifique que la zona de penetración prohibida es

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U-E)}}$$

2) Consideremos la situación de una partícula libre que se desplaza por el eje de las x con una velocidad $v = \frac{\hbar k}{m}$ con el número de onda k constante, justo al cruzar la frontera en $x = 0$ se encuentra con un escalón de potencial (Se presenta $U\,(x)$ discontinua para simplificar el modelo matemático $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U, & x > 0 \end{cases}$ aunque no se presente un potencial de este tipo en la naturaleza es una buena aproximación) donde $E > U$. Aplicando la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo estime la probabilidad de reflexión y transmisión de la partícula.