Clase Teórica 4

Solución del ejercicio dado en clase

Enunciado

Partimos del siguiente ciclo:

```
while(i <= n) {
  res = res + i;
  i = i + 1;
}
```

Tenemos dadas su precondición (P_c) y postcondición (Q_c):

$$P_c \equiv (i = 0) \land (res = 0) \land (n \geq 0)$$
$$Q_c \equiv res = \sum_{j=0}^{n} j$$

Queremos demostrar su corrección parcial y terminación, utilizando el siguiente invariante:

$$\mathcal{I} \equiv \left(res = \sum_{j=0}^{i-1} j \right) \land (0 \leq i \leq n + 1)$$

Corrección parcial

Para demostrar corrección parcial, debemos demostrar 3 cosas:

1. $P_c \implies \mathcal{I}$
2. $\{\mathcal{I} \land B = \texttt{true}\}\ S_c\ \{\mathcal{I}\}$
3. $(\mathcal{I} \land B = \texttt{false}) \implies Q_c$

Demostración $P_c \implies \mathcal{I}$

Queremos demostrar que:

$$(i = 0) \land (res = 0) \land (n \geq 0) \implies \left(res = \sum_{j=0}^{i-1} j \right) \land (0 \leq i \leq n + 1)$$

Si el antecedente fuera falso, la implicación es trivial. Asumamos entonces que el antecedente es verdadero. Luego, sabemos que $i = 0$ y $res = 0$, y queremos ver si se cumple el consecuente. Podemos reemplazar:

$$\left(0 = \sum_{j=0}^{-1} j\right) \wedge (0 \leq 0 \leq n+1)$$

Ambas expresiones son trivialmente verdaderas. Notar que la sumatoria de un conjunto vacío da 0.

Demostración $\{\mathcal{I} \wedge B = \texttt{true}\}\ S_c\ \{\mathcal{I}\}$

Primero, partiendo de $\{\mathcal{I} \wedge B = \texttt{true}\}$ veamos qué podemos inferir sobre el estado simbólico del programa tras cada instrucción del ciclo:

$$\{res = \sum_{j=0}^{i-1} j \wedge (0 \leq i \leq n+1) \wedge (i \leq n)\}$$

`res = res + i`

$$\left\{\left(res = \left(\sum_{j=0}^{i-1} j\right) + i\right) \wedge (0 \leq i \leq n+1) \wedge (i \leq n)\right\}$$

`i = i + 1`

$$\left\{\left(res = \left(\sum_{j=0}^{i-2} j\right) + (i-1)\right) \wedge (1 \leq i \leq n+2) \wedge (i \leq n+1)\right\}$$

De las dos desigualdades en el estado simbólico final obtenemos:

$$0 \leq i \leq n+1$$

Además simplificando la definición de res tenemos:

$$res = \left(\sum_{j=0}^{i-2} j\right) + (i-1) = \sum_{j=0}^{i-1} j$$

Por lo tanto, partiendo sólamente de $\{\mathcal{I} \wedge B = \texttt{true}\}$ llegamos a que al final del cuerpo del ciclo vale:

$$(res = \sum_{j=0}^{i-1} j) \wedge (0 \leq i \leq n+1) \equiv \mathcal{I}$$

Demostración $(\mathcal{I} \wedge B = \texttt{false}) \implies Q_c$

Queremos demostrar:

$$\left(res = \sum_{j=0}^{i-1} j\right) \wedge (0 \leq i \leq n+1) \wedge (i \leq n = false) \implies res = \sum_{j=0}^{n} j$$

Damos por cierto entonces el antecedente. Juntando $0 \leq i \leq n+1$ y $i > n$ sabemos que necesariamente $i = n+1$. Luego, reemplazando en la sumatoria obtenemos:

$$res = \sum_{j=0}^{n+1-1} j = \sum_{j=0}^{n} j$$

Terminación

Trabajamos con el mismo ciclo y tenemos la función variante propuesta:

$$f_v = n + 1 - i$$

Debemos demostrar:

1. $\{\mathcal{I} \land B = \texttt{true} \land f_v = f_{v_0}\}\ S_c\ \{f_v < f_{v_0}\}$
2. $\mathcal{I} \land f_v \leq 0 \implies B = \texttt{false}$

Demostración $\{\mathcal{I} \land B = \texttt{true} \land f_v = f_{v_0}\}\ S_c\ \{f_v < f_{v_0}\}$

Notamos primero que la f_v es estrictamente decreciente con respecto a i. Dado que i se incrementa en cada ejecución de S_c, el valor de f_v decrece.

Demostración $\mathcal{I} \land f_v \leq 0 \implies B = \texttt{false}$

Tenemos que demostrar:

$$\left(res = \sum_{j=0}^{i-1} j\right) \land (0 \leq i \leq n+1) \land (n + 1 - i \leq 0) \implies i \leq n = \texttt{false}$$

De $n + 1 - i \leq 0$ obtenemos que $i \geq n + 1$. Como además $0 \leq i \leq n + 1$, obtenemos $i = n + 1$. Entonces podemos afirmar que $i \leq n = \texttt{false}$.