

TDD: Teoría de Juegos

Guía de Ejercicios 1: Juegos Simultáneos

Profesora: M. Paula Bonel

Auxiliar: Maia Guglielmetti

Materia: Teoría de las Decisiones
UTDT

Agosto, 2024

Idea general de la guía:

- Parte 1:
 - Entender cómo resolver juegos en su forma normal. Entender qué son las estrategias estrictamente y débilmente dominadas. Distintas formas de buscar equilibrios de un juego estático: (i) equilibrio en estrategias dominantes (ii) eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas (iii) equilibrio de Nash. Identificar eficiencia de los resultados de equilibrio.
- Parte 2:
 - Comprender cómo modelar un problema estático cuando no conviene expresarlo en forma normal y encontrar equilibrios de Nash. Incentivos al desvío. Juegos con estrategias continuas.

1. Ejercicios (Parte 1):

1. Considere los siguientes juegos:

(a)

	A	B
X	8, 8	3, 10
Y	10, 3	4, 4

(b)

	A	B
X	5, 2	0, 3
Y	3, 0	1, 1

(c)

	A	B
X	2, 2	0, 2
Y	1, 0	2, 2

- ¿Existe un equilibrio por estrategias estrictamente dominantes en estos juegos (EEED)?
- Encuentre los equilibrios bajo eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas (ES-EEED).
- Encuentre el o los equilibrios de Nash.

2. Dados los siguientes juegos:

(a)

	Left	Center	Rigt
Up	1, 1	0, 0	-1, 0
Center	0, 0	0, 6	10, -1
Down	2, 0	10, -1	-1, -1

(b)

	A	B	C	D
W	5, 2	2, 6	1, 4	0, 4
X	0, 0	3, 2	2, 1	1, 0
Y	7, 0	2, 2	1, 5	5, 1
Z	9, 5	1, 3	0, 2	4, 8

- Determine, si existe, cuál o cuáles son los equilibrios de Nash en estrategias puras.

3. Leandro tira una moneda al aire, cae en su mano y rápidamente la tapa. Ahora le invita a participar en el siguiente juego. Usted (que no vio que salió) tiene que elegir cara o seca, luego él destapa la moneda, si acertó le paga 1, y si perdió 0. Suponga que la moneda no está trucada y que Leandro no hace nada para engañarlo. ¿Existe alguna consideración estratégica? ¿Es esto un juego de acuerdo a lo visto en clase?

4. Considere el siguiente juego entre dos jugadores:

	X	Y
A	α, β	$\delta, 2$
B	1, 1	1, 0
C	3, 2	0, 1

Indique para qué valores de α , β y $\delta \in \mathcal{R}$:

- A es una estrategia estrictamente dominada por B.
 - Y no es una estrategia estrictamente dominada.
 - (A,X) es un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes.
 - (A ,X) es un equilibrio de Nash.
5. Considere una familia de juegos estratégicos de dos jugadores caracterizada por un parámetro $\gamma \in \mathcal{R}$ y con la siguiente matriz de pagos:

	C	D
A	γ, γ	0, 1
B	1, 0	0, 0

- ¿Para qué valores de γ el perfil (A,C) es un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes?
 - ¿Para qué valores de γ el perfil (A,C) es un equilibrio de Nash?
 - ¿Para qué valores de γ el perfil (A,C) es el resultado Pareto óptimo del juego?
 - Discuta: ¿es cierto que todo juego que tiene dos jugadores con un único equilibrio de Nash que, a su vez, es Pareto óptimo, tiene un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes?
6. Recordemos el famoso juego del Dilema del Prisionero:

La policía arresta a dos sospechosos, pero no cuenta con las pruebas suficientes para condenarlos. Por lo tanto, deciden separar a los sospechosos y poner a cada uno en una sala aislada. Luego, un policía visita a cada uno y les ofrece el siguiente trato (que es el mismo para ambos): si uno confiesa, pero su cómplice no, el cómplice es condenado a la pena de 10 años (pena total) y él queda en libertad. En el caso que uno decida no confesar, pero su cómplice sí, la pena es la inversa, el cómplice queda libre y él recibe la pena total.

Sin embargo, si ambos confiesan, cada uno recibe 6 años de prisión; pero si ambos lo niegan, serán encerrados solo por un año por falta de pruebas.

- (a) Defina las estrategias de cada jugador y exprese el juego en su forma normal.
- (b) Encuentre el equilibrio EN en estrategias puras.
- (c) Encuentre el equilibrio utilizado la eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas.
- (d) El (los) equilibrio(s) encontrado(s), ¿es (son) Pareto óptimo?
7. ¿Y a dónde vamos? Los integrantes de un matrimonio tienen que elegir una actividad para el próximo fin de semana. Las actividades disponibles son ir al cine o ir al teatro. La mujer prefiere el teatro, mientras que el hombre prefiere el cine. Ambos prefieren ir juntos antes que ir por separado, a pesar de tener que realizar la actividad que el otro prefiere.
- (a) Formule la situación como un juego estratégico.
- (b) Muestre los equilibrios de Nash.
- (c) ¿Los equilibrios son Pareto óptimos?
8. Dos firmas rivales están considerando sacar un nuevo producto similar al mercado. Si ambas lanzan el producto, cada una obtiene ganancias por 40.000. Si una firma sola lo lanza, podrá ejercer poder de mercado, quedándose completamente con este y ganando 100.000, mientras que la otra obtiene 0. Si ninguna lo lanza, ambas pierden 50.000, derivado de los costos de R&D.
- (a) Represente el juego en forma normal.
- (b) ¿Se puede resolver este caso utilizando el criterio de eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas? ¿y equilibrios por estrategias estrictamente dominantes?
- (c) Encuentre todos los equilibrios de Nash.
9. Considere un juego de dos jugadores en el que cada uno anuncia un monto de 0, 50 o 100. Si sus anuncios suman 100 o menos, entonces el jugador se lleva el monto que eligió. En caso contrario, cada jugador debe pagar 10.
- (a) Plantee el juego en forma normal.
- (b) Determine si hay estrategias estrictamente dominadas.
- (c) Encuentre todas las estrategias racionalizables.
- (d) Encuentre todos los EN.
10. En ejercicios anteriores vimos cómo el método de eliminación sucesiva/iterativa de estrategias estrictamente dominadas permite encontrar todos los equilibrios de Nash. Sin embargo, cuando queremos utilizar este mismo método cuando la dominancia es débil esto deja de ser válido para todos los casos. Muestre la afirmación antes mencionada utilizando el siguiente ejercicio:

	Left	Center	Right
Up	1, 0	-2, -1	0, 1
Down	1, 2	-5, -1	0, 0

11. Conducta egoísta – altruista: Dos personas se suben a un colectivo. Hay dos lugares adyacentes vacíos. Cada persona debe decidir si sentarse o quedarse parada. Sentarse solo es más confortable que sentarse junto a otra persona, aunque esto último es más confortable que quedarse parado.
- (a) Suponga que a cada persona sólo le importa su propio confort. Modele esta situación como un juego estratégico. ¿Es el dilema de los prisioneros? Encuentre los equilibrios de Nash.
- (b) Suponga ahora que cada persona es altruista y rankea los resultados de acuerdo al confort de la otra persona; además, por educación prefiere quedarse parada que sentarse si la otra persona se queda parada. Modele esta situación como un juego estratégico. ¿Es el dilema de los prisioneros? Encuentre los equilibrios de Nash.
- (c) Compare el confort de la gente en ambos casos.

12. Stag-Hunt: Cada integrante de un grupo de cazadores tiene 2 opciones: puede permanecer atento para atrapar una liebre o para atrapar un conejo. Si todos los cazadores persiguen a la liebre, la logran atrapar y se la dividen en partes iguales. Si alguno de los cazadores se dedica a atrapar un conejo, lo logra; pero los otros cazadores no podrán atrapar la liebre. Cada cazador prefiere una parte de la liebre en vez de un conejo. Represente este juego en el caso de 2 jugadores y encuentre los equilibrios de Nash.

2. Ejercicios (Parte 2):

13. La curva: En un curso de Teoría de las Decisiones se anotaron solo dos alumnos. En la primera clase, el profesor les comunica que la evaluación del curso se hará utilizando el método de curva. En particular, el que obtenga la nota más alta cerrará el curso con una A y el otro con una D. Si ambos tienen los mismos puntajes al final del curso, ambos obtienen una D.

El puntaje en el examen se define directamente por el nivel de esfuerzo que haga el alumno: quien más se esfuerce estudiando y resolviendo las guías le irá mejor en el examen y, por ende, obtendrá una mejor nota. El alumno i puede elegir un nivel de esfuerzo $e_i \forall i \in \{1, 2\}$ entre los enteros del 0 al 10. Para cada alumno, el pago de obtener una A es 10 mientras que, si obtiene una D, su pay-off es de 0. Suponga que el costo de hacer esfuerzo es para cualquier alumno es.

- ¿Existen estrategias dominadas?
 - Halle las estrategias que son mejor respuesta para alguna estrategia del rival.
 - ¿Existe algún equilibrio de Nash en estrategias puras?
 - Ahora suponga que el costo del esfuerzo es $\frac{e_i^2}{2}$. Resuelva nuevamente los incisos 1, 2 y 3 previamente pedidos para este nuevo costo.
14. En el juego del millón de pesos dos competidores tienen que elegir simultáneamente cuánto quieren del millón, donde s_i es la porción porcentual del millón que pide para sí mismo el jugador i . Si lo que los jugadores piden para sí mismos excede la unidad, ($s_1 + s_2 > 1$), cada uno recibe cero pesos, sino, ($s_1 + s_2 \leq 1$), ambos reciben lo que piden.
- Encuentre y grafique las correspondencias de mejor respuesta.
 - Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego.
15. Duopolio de Cournot: Considere el modelo de oligopolio de Cournot, donde existen varias firmas en un mercado que eligen simultáneamente las cantidades a producir $q_i > 0$. Suponga que, en dicho mercado, únicamente existen dos firmas.
- La firma i presenta una función de costos $C_i(q_i) = cq_i$ y enfrenta la siguiente demanda $D(P) = \alpha - P$, con $\alpha > 0$ y $c \geq 0$. Suponga que $\alpha > c$.
- Encuentre y grafique las funciones de mejor respuesta y determine el equilibrio de Nash. ¿Cuál es la cantidad y precio de equilibrio de mercado? ¿Qué pasa cuando α y c varían? Interprete.
 - Suponga ahora que las firmas se pueden juntar y llegan a un acuerdo de coludir. Particularmente, lo que hacen es maximizar los beneficios conjuntos y se dividen en partes iguales la producción. ¿Cómo se comparan estos beneficios con los del EN (punto 1)?
16. La Teoría de Juegos se utiliza ampliamente en las Ciencias Sociales y Políticas, especialmente en el estudio de las elecciones. En este juego vamos a tratar de modelar la decisión de un ciudadano de ir a votar o no.
- Hay 2 candidatos, A y B, que compiten en una elección. De los n ciudadanos, k están a favor de A y el resto m a favor de B. Cada ciudadano decide si votar por el candidato preferido o abstenerse de votar. Ir a votar tiene un costo c para el individuo. Un ciudadano que se abstiene recibe un pago de 2 si su candidato preferido gana, 1 si empatan, y 0 si pierde. Un ciudadano que vota recibe un pago de $2 - c$; $1 - c$; y $-c$ en estos tres casos respectivamente, donde $0 < c < 1$.

- (a) Para el caso $k = m = 1$; ¿se parece este juego a alguno que conozca?
- (b) Encuentre los equilibrios de Nash para $k = m$. (¿Constituye el caso en el que todos votan un equilibrio de Nash? ¿Hay algún equilibrio de Nash donde los candidatos empaten y no todos voten? ¿Hay algún equilibrio de Nash en el cual un candidato gane por un voto? ¿Hay algún equilibrio de Nash en el cual un candidato gane por 2 o más votos?)
- (c) ¿Cuáles son los equilibrios de Nash en el caso $k < m$?
17. Considere el caso donde McDonald's y Burger King deciden poner, cada uno, en una ciudad, una franquicia con el objetivo de atraer la mayor cantidad de consumidores posibles. Suponga que se puede representar la locación donde van a poner su franquicia con un número, de manera tal que cada empresa se puede situar en un punto de la recta real. Luego, de que eligen su posición, los consumidores van a la franquicia en forma no estratégica a aquella más cercana a su posición favorita. Además, suponga que lo único que le importa a cada firma es ganar la mayor cantidad de consumidores ya que el perdedor se tendrá que ir de la ciudad (en caso de tener la misma cantidad, el ganador se elige aleatoriamente). Existe un continuo de consumidores, cada uno con una locación única favorita. Esta depende directamente del viaje que tengan que hacer (cuanto más cerca, mejor). La distribución es completamente arbitraria y uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Por último, suponga que, si existe un consumidor indiferente, irá arbitrariamente a cualquiera de las dos franquicias.
- (a) Determine el único equilibrio de Nash.
- (b) Ahora suponga que KFC también decide entrar en esta ciudad y, todo lo previamente mencionado, vale para el caso de las 3 firmas. ¿Hay algún equilibrio de Nash? En caso de haberlo, ¿cuál?
18. Suponga que la firma eToys va a cerrar y debe buscar un comprador para un camión lleno de juguetes en su almacén. Imagine que eToys realiza una subasta en eBay para vender los juguetes y que dos minoristas (jugadores 1 y 2) competirán por ellos. Las reglas de la subasta son las siguientes: los minoristas presentan simultánea e independientemente ofertas a sobre cerrado y luego eToys entrega la mercancía al mejor postor, quien debe pagar su oferta. Es de conocimiento común que el minorista que obtiene el stock de juguetes puede revender la carga por un total de 15.000. Así, si el jugador i gana la subasta con la oferta b_i , entonces el pago del jugador i es $15.000 - b_i$. El minorista perdedor obtiene un pago de 0. Si los minoristas hacen las mismas ofertas ($b_1 = b_2$), entonces eToys declara a cada jugador ganador con probabilidad $1/2$, en cuyo caso el jugador i obtiene un pago esperado de $(1/2)(15.000 - b_i)$. ¿Cuál será la oferta ganadora en el equilibrio de Nash de este juego de subasta? Describa las estrategias de equilibrio y explique brevemente por qué esto es un equilibrio. (Pista: El resultado es similar al juego de Bertrand.)
19. Dos equipos con igual número n de participantes de igual fuerza física sostienen los extremos opuestos de una cuerda muy resistente sobre un charco de barro. Cada uno de los participantes elige tirar con fuerza o ir a menos. Si un equipo tiene menos participantes que tiran con fuerza que el otro, sus miembros son arrastrados al barro. Si ambos equipos tienen igual número de participantes que tiran con fuerza, se declara un empate. Cada individuo prefiere ganar a empatar y empatar a perder, pero a la vez los participantes son bastante vagos y hacer fuerza les genera desutilidad.
- (a) Asuma que prefieren perder no haciendo fuerza antes que empatar haciéndola, aunque prefieren ganar haciendo fuerza antes que empatar no haciéndola. Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.
- (b) Suponga ahora que los números de participantes en cada equipo difieren. Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.
- (c) Con dos equipos de igual n , ahora suponga que empatar haciendo fuerza es preferido a perder no haciéndola al mismo tiempo que continúa siendo preferido ganar haciendo fuerza a empatar no haciéndola. Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras cuando hay igual cantidad de jugadores en cada equipo.
- (d) Suponga que en uno de los equipos se encuentra un participante conocido como Dwayne La Roca Johnson, una mole de 120 kg cuya fuerza equivale a la realizada por dos personas. Asuma para todos los jugadores las preferencias del inciso 3 y encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.