Trabajo Práctico 1 - Teoría de Juegos

Juani Elosegui

Diciembre 2024

1 ¿Verdadero o falso? Discuta las siguientes afirmaciones.

- **Falso.** Pueden sobrevivir las estrategias débilmente dominadas, las cuales pueden ser un equilibrio de Nash también. Por lo tanto, no es único.
- **Falso.** Sí pueden ser todas racionalizables, como puede ser el caso en el que no hay estrategias estrictamente dominadas.

2 Subastas

Inciso (a)

	Alto	Medio	Bajo
Alto	5, 5	10, 0	10, 0
Medio	0, 10	15, 15	30, 0
Bajo	0, 10	0, 30	20, 20

Inciso (b)

Los equilibrios de Nash son: EN = {(Alto, Alto); (Medio, Medio)}

	Alto	Medio	Bajo
Alto	5, 5	10, 0	10, 0
Medio	0, 10	15, 15	30, 0
Bajo	0, 10	0, 30	20, 20

Inciso (c)

En caso de empate, gana Luis siempre.

	Alto	Medio	Bajo
Alto	10, 0	10, 0	10, 0
Medio	0, 10	30, 0	30, 0
Bajo	0, 10	0, 30	40, 0

Inciso (d)

El equilibrio de Nash es EN = {(Alto, Alto)}.

	Alto	Medio	Bajo
Alto	10, 0	10, 0	10, 0
Medio	0, 10	30, 0	30, 0
Bajo	0, 10	0, 30	40, 0

Inciso (e)

Usaría el formato del inciso (b), porque van a jugar el equilibrio de Nash. Y el equilibrio de Nash en ese formato (15, 15) hacen que se subaste por más plata que en el segundo formato de la moneda (10, 0).

3 Estrategias continuas

Inciso (a)

Expando y simplifico las funciones de utilidad:
$u_1(s_1, s_2) = (s_1 + s_2) + (8 - s_1) + (8 - s_1)(s_1 + s_2)$
$\implies u_1(s_1, s_2) = (s_1 + s_2) + 8 - s_1 + 8s_1 + 8s_2 - s_1^2 - s_1 s_2$
$\implies u_1(s_1, s_2) = s_2 + 8 + 8s_1 + 8s_2 - s_1^2 - s_1 s_2$

$u_2(s_1, s_2) = (s_1 + s_2) + (8 - s_2) + (8 - s_2)(s_1 + s_2)$
$\implies u_2(s_1, s_2) = s_1 + s_2 + 8 - s_2 + (8 - s_2)(s_1 + s_2)$
$\implies u_2(s_1, s_2) = s_1 + s_2 + 8 - s_2 + 8s_1 + 8s_2 - s_1 s_2 - s_2^2$
$\implies u_2(s_1, s_2) = s_1 + 8 + 8s_1 + 8s_2 - s_2^2 - s_1 s_2$

Derivo una respecto de s_1 y la otra respecto de s_2:
$\frac{\partial}{\partial s_1} u_1(s_1, s_2) = 0 + 0 + 8 + 0 - 2s_1 - s_2$
$\therefore \frac{\partial}{\partial s_1} u_1(s_1, s_2) = 8 - 2s_1 - s_2$

$\frac{\partial}{\partial s_2} u_2(s_1, s_2) = 0 + 0 + 0 + 8 - 2s_2 - s_1$
$\therefore \frac{\partial}{\partial s_2} u_2(s_1, s_2) = 8 - 2s_2 - s_1$

Si igualo las dos expresiones a cero:
$\frac{\partial}{\partial s_1} u_1(s_1, s_2) = 0$
$\frac{\partial}{\partial s_2} u_2(s_1, s_2) = 0$

$\frac{\partial}{\partial s_1} u_1(s_1, s_2) = 0$
$\implies 8 - 2s_1 - s_2 = 0$
$\implies 8 - 2s_1 = s_2$
$\implies s_2 = -8 + 2s_1$
$\therefore s_2 = 8 - 2s_1$ (1)

$\frac{\partial}{\partial s_2} u_1(s_1, s_2) = 0$
$\implies 8 - 2s_2 - s_1 = 0$
$\implies 8 - 2s_2 = s_1$
$\therefore s_1 = 8 - 2s_2$ (2)

Entonces, reemplazo en las ecuaciones a las variables $s_1 \wedge s_2$ en las funciones (1) y (2):
$s_2 = 8 - 2s_1$
$\implies s_2 = 8 - 2(8 - 2s_2)$
$\implies s_2 = 8 - 16 + 4s_2$
$\implies s_2 = -8 + 4s_2$
$\implies 8 = 3s_2$
$\implies \frac{8}{3} = s_2$
$\implies s_2^* = \frac{8}{3}$

$s_1 = 8 - 2(8 - 2s_1)$
$\implies s_1 = 8 - 16 + 4s_1$
$\implies s_1 = -8 + 4s_1$
$\implies 8 = 4s_1 - s_1$
$\implies 8 = 3s_1$
$\implies \frac{8}{3} = s_1$
$\therefore s_1^* = \frac{8}{3}$

El equilibrio de Nash es = {(8/3, 8/3)}.

Lo que hice fue lo siguiente:

1. Simplificar las fórmulas de utilidad (opcional)
2. Derivarlas respecto de s_1 y s_2.
3. Igualar las derivadas a cero (por el teorema de Lagrange).

4. Despejar s_1^* y s_2^* reemplazándolas una dentro de otra.

   Este será el equilibrio de Nash porque será donde ambos jugadores maximizan su utilidad.

Inciso (b)

Acá tengo que comparar cuál es mayor: $(u_1(s_1^*, s_2^*), u_2(s_1^*, s_2^*))$ o $(u_1(4,4), u_2(4,4))$.

$u_1(s_1^*, s_2^*) = (s_1^* + s_2^*) + (8 - s_1^*) + (8 - s_1^*)(s_1^* + s_2^*)$
$\implies u_1(s_1^*, s_2^*) = (\frac{8}{3} + \frac{8}{3}) + (8 - \frac{8}{3}) + (8 - \frac{8}{3})(\frac{8}{3} + \frac{8}{3})$
$\implies u_1(s_1^*, s_2^*) = \frac{16}{3} + (\frac{24}{3} - \frac{8}{3}) + (\frac{24}{3} - \frac{8}{3})(\frac{16}{3})$
$\implies u_1(s_1^*, s_2^*) = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} + (\frac{16}{3})(\frac{16}{3})$
$\implies u_1(s_1^*, s_2^*) = \frac{32}{3} + (\frac{16}{3} \cdot \frac{16}{3})$
$\implies u_1(s_1^*, s_2^*) = \frac{32}{3} + \frac{256}{3}$
$\implies u_1(s_1^*, s_2^*) = \frac{288}{3}$
$\therefore u_1(s_1^*, s_2^*) = 96$

$u_2(s_1^*, s_2^*) = (\frac{16}{3}) + (\frac{16}{3}) + (\frac{16}{3})(\frac{16}{3})$
$\therefore u_2(s_1^*, s_2^*) = 96$

$\implies (u_1(s_1^*, s_2^*), u_2(s_1^*, s_2^*)) = (96, 96)$

$u_1(4,4) = (4+4) + (8-4) + (8-4)(4+4)$
$\implies u_1(4,4) = (8) + (4) + (4)(8)$
$\implies u_1(4,4) = 8 + 4 + 4 \cdot 8$
$\implies u_1(4,4) = 12 + 32$
$\therefore u_1(4,4) = 44$

$u_2(4,4) = (4+4) + (8-4) + (8-4)(4+4)$
$\therefore u_2(4,4) = 44$

$\implies (u_1(4,4), u_2(4,4)) = (44, 44)$

$\therefore$ Sí, estarían peor que en el equilibrio de Nash, porque les genera menor utilidad que en ese equilibrio.

4 Búsqueda de equilibrios

Inciso (a)

El jugador 1 tiene una estrategia estrictamente dominante (que es C), pero no es el caso del jugador 2, este no tiene estrategias estrictamente dominantes. Si bien, para el jugador 2, a domina estrictamente a c, no se cumple que a domine estrictamente a b.

	a	b	c
A	1, 1	0, 0	-1, 0
B	0, 0	0, 6	10, -1
C	2, 0	10, -1	11, -1

$\therefore$ No hay equilibrio en estrategias estrictamente dominadas.

Inciso (b)

Sí, para el jugador 1 puedo descartar las estrategias A y B:

	A	B	C
C	2, 0	10, -1	11, -1

Como el jugador 2 sabe que el jugador 1 va a eliminar A y B, decidirá jugar el equilibrio de Nash, que es el mismo equilibrio bajo el concepto de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas. Este es