

# TDD: Teoría de Juegos

## Guía de Ejercicios 4: Juegos Repetidos

Profesora: M. Paula Bonel

Auxiliar: Maia Guglielmetti

Materia: Teoría de las Decisiones  
UTDT

Marzo, 2024

### Idea general de la guía:

Comprender la mecánica de los juegos repetidos: qué es el factor de descuento, cuando se traiciona y cuando se realiza un acuerdo. Diferenciar resultados de juegos repetidos finitas e infinitas veces. Comprender para qué nos sirven los juegos repetidos.

### Ejercicios:

1. Considere los siguientes juegos repetidos infinitamente. Encuentre el factor de descuento  $\delta \in [0, 1]$ , común a ambos jugadores, para que se logre la cooperación bajo estrategia gatillo.

(a)

	L	R
U	2, 2	0, 4
D	4, 0	1, 1

(b)

	L	R
U	3, 2	0, 1
D	7, 0	2, 1

(c)

	L	R
U	3, 4	0, 7
D	5, -1	1, 2

2. Estrategia de un cartel. Suponga que hay dos productores de crudo, Irán e Iraq. Ambos pueden elegir operar a uno de dos niveles de producción: 2 ó 4 millones de barriles por día. Dependiendo de sus decisiones, el producto total en el mercado mundial será 4, 6 u 8 millones de barriles por día, y el precio por barril en estos tres casos será \$25, \$15 y \$10 respectivamente. Los costos de producción son \$2 por barril para Irán y \$4 por barril para Iraq.

(a) Represente el juego en forma normal a través de una matriz de pagos.

(b) Muestre que cada país tiene una estrategia dominante y que el equilibrio consiste en que cada país produzca el nivel más alto.

- (c) Ahora suponga que el juego se repite todos los días indefinidamente, y ambos países acuerdan cooperar y producir al nivel bajo, amenazando al otro con una estrategia gatillo: “si produjiste el nivel alto al menos una vez, produciré el nivel alto para siempre”. Muestre que cooperar es un equilibrio de Nash si la tasa de descuento es suficientemente alta.
3. Suponga una firma tiene dos divisiones, cada una de las cuales tiene un gerente. El ingreso de cada uno de los gerentes está definido en función del esfuerzo que hace cada uno en mejorar la productividad de su división. Si ambos gerentes optan por realizar un “gran esfuerzo”, cada uno gana \$150.000 al año. Si ambos optan por esforzarse poco (“bajo esfuerzo”), ambos reciben \$100.000 al año. Pero si uno opta por un “gran esfuerzo” y el otro por “poco esfuerzo”, el que se esforzó más recibe \$150.000 más un bono de \$50.000 por su esfuerzo adicional en comparación con el de su par, y el que se esforzó menos recibe \$80.000. Ambos gerentes deciden su nivel de esfuerzo de manera independiente y simultánea, es decir, sin saber el esfuerzo que hace el otro.
- (a) Suponga que el esfuerzo para ambos gerentes no les implica ningún costo. Escriba la forma normal de esta interacción. Encuentre el/ los EN de este juego y explique si se trata de un juego tipo dilema del prisionero.
- (b) Ahora suponga que realizar un “gran esfuerzo” tiene un costo igual a \$60.000 al año. Construya la forma normal de este nuevo juego y encuentre el/ los Equilibrios de Nash del juego. ¿Es este juego un dilema del prisionero? Justifique.
- (c) Si el costo de hacer un “gran esfuerzo” fuera todavía más alto, supongamos \$80.000 al año, ¿cuál sería el nuevo equilibrio? ¿Cómo cambia el juego respecto a lo observado en el inciso anterior? ¿Y respecto al inciso (a)?
- (d) Suponga que el costo de llevar a cabo un “gran esfuerzo” es de nuevo \$60.000, pero el juego se repite por un número infinito de períodos. Esto permite un tipo de cooperación inusual, en la cual uno de los dos gerentes realiza un “gran esfuerzo” y el otro “poco esfuerzo”, y el que más gana compensa al que menos gana (con una transferencia oculta de la empresa), de forma tal que ambos perciben el mismo ingreso.
- ¿Qué monto debería ser transferido (de manera oculta) para que los ingresos gerentes sean iguales? ¿Cuánto ganaría cada uno de los gerentes en un año en el cual ambos decidieran cooperar con este acuerdo?
  - Si entendemos por cooperar al hecho de que ambos gerentes realicen el esfuerzo asignado y que el que más gana le transfiera parte de su ingreso al otro gerente, y por no cooperar al hecho de que el que gana más no transfiere el dinero prometido al otro gerente. ¿Cuánto tiene que ser la tasa de descuento para que ambos cooperen de manera infinita?
4. Considere dos cafeterías que compiten en el Campus Alcora. Cada una de las empresas puede vender el café a precio alto o bajo. Si ambas eligen un precio alto, obtienen beneficios anuales iguales a \$64.000. Si una de ellas elige un precio bajo y la otra un precio alto, la que optó por el precio bajo obtiene \$72.000 al año, mientras que la que optó por el precio alto recibe beneficios iguales a \$20.000 al año. Si ambas eligen un precio bajo cada una recibe \$57.000 al año.
- (a) Verifique que esta situación tiene una estructura similar a la del dilema del prisionero. Encuentre el/los equilibrios de Nash y los pagos correspondientes, si las firmas interactúan una sola vez.
- (b) ¿Cuáles serían los beneficios alcanzados por ambas firmas si interactuaran por cuatro períodos? Justifique. Suponga una tasa de descuento igual a 1.
- (c) Suponga que ambas firmas interactúan infinitos períodos y hacen uso de una estrategia gatillo (si una de ellas se desvía, la otra la castiga para siempre).
- ¿Cuál es la tasa mínima de descuento necesaria para que cooperar sea la mejor opción?
  - Si  $\delta = 0,25$ , ¿conviene cooperar?
- (d) Suponga que ambas firmas interactúan año tras año, pensando que esta interacción es para siempre. Sin embargo, a los cuatro años repentinamente se acaba el mundo. ¿Cuáles serán los beneficios alcanzados por ambas firmas hasta ese momento (asumiendo  $\delta = 1$ )? Compare esta respuesta con la encontrada en la parte (b) y justifique.

5. Considere el siguiente juego donde  $\delta = 1$ :

	L	M	R
U	1, 1	5, 0	0, 0
M	0, 5	4, 4	0, 0
D	0, 0	0, 0	3, 3

- ¿Cuáles son los equilibrios de Nash?
  - Si el juego se repite dos veces, con la misma matriz de pagos para cada etapa, muestre que existe un ENPS en el que  $(M, M)$  es jugado en el primer período. ¿Cómo debería ser el contrato del acuerdo?
6. Este ejercicio sirve para ilustrar algunos aspectos que dificultan la colusión entre empresas. Para la exposición, considere un juego repetido infinitamente donde  $n$  empresas compiten por precios. Asimismo, los costos marginales de todas las firmas son nulos y no existen costos fijos. Supongamos que las empresas han acordado establecer un precio monopolístico y repartirse el mercado de manera equitativa. Además, han adoptado estrategias trigger donde la pena es volver al equilibrio de Nash del juego de Bertrand en cada período.
- Obtenga el factor de descuento mínimo tal que sostiene el resultado cooperativo en equilibrio.
  - ¿Depende el factor de descuento mínimo de la magnitud de los beneficios monopolísticos? ¿Y de la cantidad de empresas?
  - Asuma ahora que existe dificultad en la detección de los desvíos. En particular, suponga que el precio establecido por cada empresa es descubierto tras 2 periodos, de tal manera que el castigo recién puede efectivizarse tras haber transcurrido éstos. Muestre que, en este caso, el factor de descuento mínimo que sustenta el resultado cooperativo es mayor respecto al encontrado en el inciso (a).
7. Considere el siguiente juego repetido infinitamente.

	C	D
C	2, 2	-1, 3
D	3, -1	0, 0

- Encuentre el factor de descuento  $\delta \in [0, 1]$ , común a ambos jugadores, para que se logre la cooperación bajo estrategia gatillo.
  - Encuentre el factor de descuento  $\delta \in [0, 1]$ , común a ambos jugadores, para que se logre la cooperación bajo estrategia castigo temporario por dos períodos. Compare los resultados.
8. Considere un juego en el que la siguiente matriz se juega dos veces. El resultado de la primera etapa es observado antes de que comience la segunda etapa. No hay factor de descuento ( $\delta \in [0, 1]$ ). ¿Podemos alcanzar los pagos (4,4) en la primera etapa de un ENPS de estrategias puras? Si es así, describa las estrategias que lo hacen posible. Si no es posible, muestre por qué no.

	L	C	R
T	3, 1	0, 0	5, 0
M	2, 1	1, 2	3, 1
B	1, 2	0, 1	4, 4