Métodos Computacionales

Clase XI: Programación Lineal

Programación Lineal

Programación lineal

- Un problema de programación lineal consta en maximizar (o minimizar) una función objetivo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sujeto a un sistema lineal de inecuaciones en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Típicamente el sistema tiene muchas variables libres y se requiere encontrar, dentro del conjunto de soluciones, la que maximice (o minimice) la función objetivo $f(\mathbf{x})$

Programación lineal: Ejemplo

- La compañía *PastoPronto* combina dos tipos de mezclas de semillas de pasto, EverGreen y QuickGreen:
  - Cada bolsa de EverGreen contiene **3 kilos** de semillas de festuca, **1 kilo** de semillas de centeno y **1 kilo** de semillas de pasto azul.
  - Cada bolsa de QuickGreen contiene **2 kilos** de semillas de festuca, **2 kilos** de semillas de centeno y **1 kilo** de semillas de pasto azul.

Programación lineal: Ejemplo

- La compañía tiene **1,200 kilos** de semillas de festuca, **800 kilos** de semillas de centeno y **450 kilos** de semillas de pasto azul disponibles para poner en sus mezclas.
- La empresa obtiene una ganancia de **$2** por cada bolsa de EverGreen y **$3** por cada bolsa de QuickGreen que produce.

Objetivo: plantear el problema matemático para determinar el número de bolsas de cada mezcla que debe hacer *PastoPronto* para maximizar su ganancia.

Programación lineal: Ejemplo

- Paso 1: Identificar y plantear la función objetivo:

Programación lineal: Ejemplo

- Paso 1: Identificar y plantear la función objetivo:
  - En el enunciado, "maximizar la ganancia" identifica el objetivo del problema.

Programación lineal: Ejemplo

- **Paso 1:** Identificar y plantear la función objetivo:
  - En el enunciado, "maximizar la ganancia" identifica el objetivo del problema.

    x_1 : cant. de bolsas de *EverGreen*

    x_2 : cant. de bolsas de *QuickGreen*

Programación lineal: Ejemplo

- Paso 1: Identificar y plantear la función objetivo:
  - En el enunciado, "maximizar la ganancia" identifica el objetivo del problema:

    $$x_1 : \text{cant. de bolsas de } EverGreen$$
    $$x_2 : \text{cant. de bolsas de } QuickGreen$$

  - Queremos maximizar la ganancia, que viene dada por la función:

$$2x_1 + 3x_2 \longleftarrow \text{función objetivo}$$

Programación lineal: Ejemplo

- Paso 2: Plantear las restricciones como inecuaciones
  - Las restricciones en este problema son los ingredientes que tienen una cantidad limitada.

Programación lineal: Ejemplo

- Paso 2: Plantear las restricciones como inecuaciones
  - Las restricciones en este problema son los ingredientes que tienen una cantidad limitada.

Festuca:

-Cantidad total: 1200 kilos
-Consumo en *EverGreen*: 3 kilos por bolsa
-Consumo en *QuickGreen*: 2 kilos por bolsa

Programación lineal: Ejemplo

- Paso 2: Plantear las restricciones como inecuaciones
  - Las restricciones en este problema son los ingredientes que tienen una cantidad limitada.

Festuca:

-Cantidad total: 1200 kilos
-Consumo en *EverGreen*: 3 kilos por bolsa
-Consumo en *QuickGreen*: 2 kilos por bolsa

$$3x_1 + 2x_2 \leq 1,200 \longleftarrow \text{restricción Festuca}$$

Programación lineal: Ejemplo

- Paso 2: Plantear las restricciones como inecuaciones
  - Las restricciones en este problema son los ingredientes que tienen una cantidad limitada.

Centeno:

-Cantidad total: 800 kilos
-Consumo en *EverGreen*: 1 kilo por bolsa
-Consumo en *QuickGreen*: 2 kilos por bolsa

$$x_1 + 2x_2 \leq 800 \leftarrow \text{restricción Centeno}$$

Programación lineal: Ejemplo

- Paso 2: Plantear las restricciones como inecuaciones
  - Las restricciones en este problema son los ingredientes que tienen una cantidad limitada.

Pasto azul:

-Cantidad total: 450 kilos

-Consumo en *EverGreen*: 1 kilo por bolsa

-Consumo en *QuickGreen*: 1 kilo por bolsa

$$x_1 + x_2 \leq 450 \quad \leftarrow \text{restricción Pasto azul}$$

Programación lineal: Ejemplo

- Paso 3: Buscar otras restricciones adicionales

Programación lineal: Ejemplo

- Paso 3: Buscar otras restricciones adicionales
  - La cantidad a producir de *EverGreen* y *QuickGreen* tienen que ser positivas:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad \longleftarrow \text{restricciones adicionales}$$

Programación lineal: Ejemplo

- **Problema:**

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Maximizar} & 2x_1 + 3x_2 & & \text{(función objetivo)} \\
\text{sujeto a} & 3x_1 + 2x_2 & \leq 1,200 & \text{(festuca)} \\
 & x_1 + 2x_2 & \leq 800 & \text{(centeno)} \\
 & x_1 + x_2 & \leq 450 & \text{(pasto azul)} \\
\multicolumn{4}{l}{\text{con } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.}
\end{array}
$$

Programación lineal: Ejercicio

- YPF tiene dos refinerías que producen tres grados de nafta sin plomo:
  - Cada día, la refinería de Plaza Huincul produce 12000 litros de grado regular, 4000 litros de premium y 1000 litros de súper, a un costo de $3500.
  - Cada día, la refinería de La Plata produce 4000 litros de regular, 4000 litros de premium y 5000 litros de súper, a un costo de $3000.

Programación lineal: Ejercicio

- Se recibe un pedido de 48000 litros de regular, 32000 litros de premium y 20000 litros de súper.

Objetivo: Plantear el problema matemático para determinar el número de días que debe operar cada refinería para surtir el pedido al menor costo.

Programación lineal: Ejercicio

- **Problema:**

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Minimizar} & 3,500x_1 + 3,000x_2 & & \text{(función objetivo)} \\
\text{sujeto a} & 12,000x_1 + 4,000x_2 & \geq 48,000 & \text{(regular)} \\
 & 4,000x_1 + 4,000x_2 & \geq 32,000 & \text{(premium)} \\
 & 1.000x_1 + 5.000x_2 & \geq 20.000 & \text{(super)}
\end{array}
$$

con $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Problema Canónico de Programación Lineal

- Dados los vectores **b**, **c**, y la matriz A: $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^n$, $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$

Encontrar un vector **x**: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^n$

que maximice: $f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$

sujeto a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

y:

$x_j \geq 0$ for $j = 1, \ldots, n$

Problema Canónico de Programación Lineal

- En forma matricial:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad (1)$$

$$\text{sujeto a las restricciones } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (2)$$

$$\text{y } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (3)$$

Problema Canónico de Programación Lineal

- En forma matricial:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \qquad (1)$$

$$\text{sujeto a las restricciones } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \qquad (2)$$

$$\text{y } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad (3)$$

- Cualquier vector $\mathbf{x}$ que satisfaga (2) y (3) se llama **solución factible** y el conjunto de todas las soluciones factibles, denotado por $\mathcal{F}$ se llama el **conjunto factible**.

Problema Canónico de Programación Lineal

- En forma matricial:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad (1)$$

$$\text{sujeto a las restricciones } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (2)$$

$$\text{y } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (3)$$

- Un vector $\bar{\mathbf{x}}$ en $\mathcal{F}$ es una solución óptima si:

$$f(\overline{\mathbf{x}}) = \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} f(\mathbf{x})$$

Problema Canónico: Minimización

- El problema canónico se enuncia como una maximización.
- Para resolver $\min h(\mathbf{x})$, simplemente maximizamos $-h(\mathbf{x})$.

Problema Canónico: Minimización

- El problema canónico se enuncia como una maximización.
- Para resolver $\min h(\mathbf{x})$, simplemente maximizamos -$h(\mathbf{x})$.
- Las restricciones del tipo:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

se reemplazan por:

$$-a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

Problema Canónico: Restricciones de Igualdad

- Pueden existir restricciones de igualdad que no están explícitamente contempladas en el problema canónico.
- Cualquier igualdad del tipo:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

se puede reemplazar por dos desigualdades:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &\leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n &\leq -b_i \end{aligned}$$

Problema Canónico de Programación Lineal

- En un problema canónico de programación lineal dos cosas pueden resultar en no encontrar una solución:
  - Problemas infactibles: Las restricciones son inconsistentes y $\mathcal{F}$ es el conjunto vacío.
  - Problemas no acotados: La función objetivo $f(\mathbf{x})$ toma valores arbitrariamente grandes en $\mathcal{F}$ y el máximo no existe.

Ejemplo

- Considerar el problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & 5x \\ \text{sujeto a} \quad & x \leq 3 \\ & -x \leq -4 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

- Considerar el problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & 5x \\ \text{sujeto a} \quad & x \leq 3 \\ & -x \leq -4 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- El problema es **infactible** ya que no existe un x tal que $x \leq 3$ y $x \geq 4$.

Ejemplo

- Considerar el problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & 5x \\ \text{sujeto a} \quad & -x \leq 3 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

- Considerar el problema:

$$\begin{array}{rr} \text{Maximizar} & 5x \\ \text{sujeto a} & -x \leq 3 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- El problema es **no acotado** ya que $5x$ puede ser arbitrariamente grande con la restricción $x \geq 0$ (y $x \geq -3$)

Método de Resolución (Gráfico)

Teorema

- Si el conjunto factible $\mathcal{F}$ es no vacío y la función objetivo tiene cota superior en $\mathcal{F}$, entonces el problema canónico de programación lineal tiene **al menos una solución óptima**.
- Además, al menos una de las soluciones óptimas es un **punto extremo** de $\mathcal{F}$.

Ejemplo de Resolución

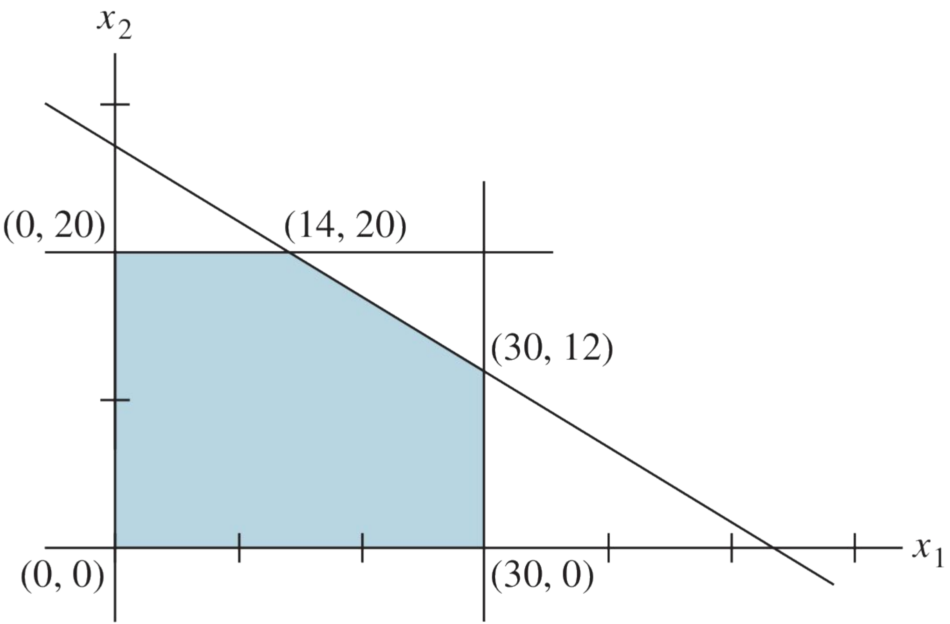
- Problema:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{sujeto a} && x_1 \leq 30 \\ & && x_2 \leq 20 \\ & && x_1 + 2x_2 \leq 54 \end{aligned}$$

con $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Ejemplo de Resolución

- Problema:



(x_1, x_2)	$2x_1 + 3x_2$
(0, 0)	0
(30, 0)	60
(30, 12)	96 $\leftarrow$
(14, 20)	88
(0, 20)	60

Ejercicio

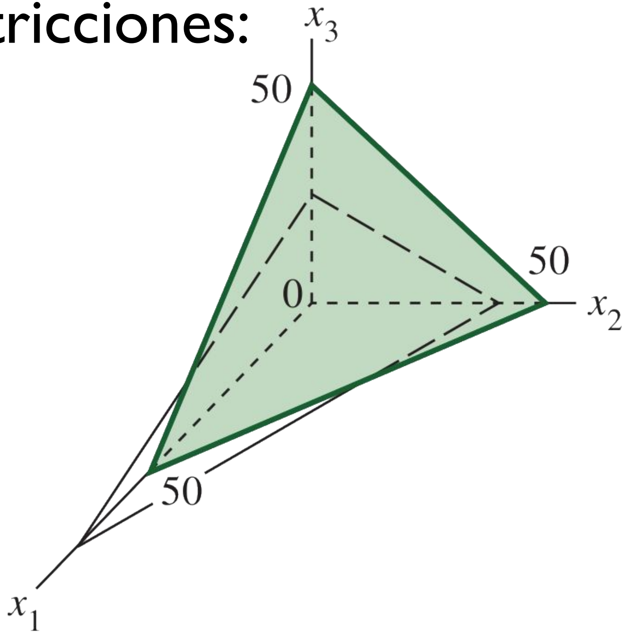
- Problema:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar} && f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
&\text{sujeto a} && x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \\
& && x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 80
\end{aligned}
$$

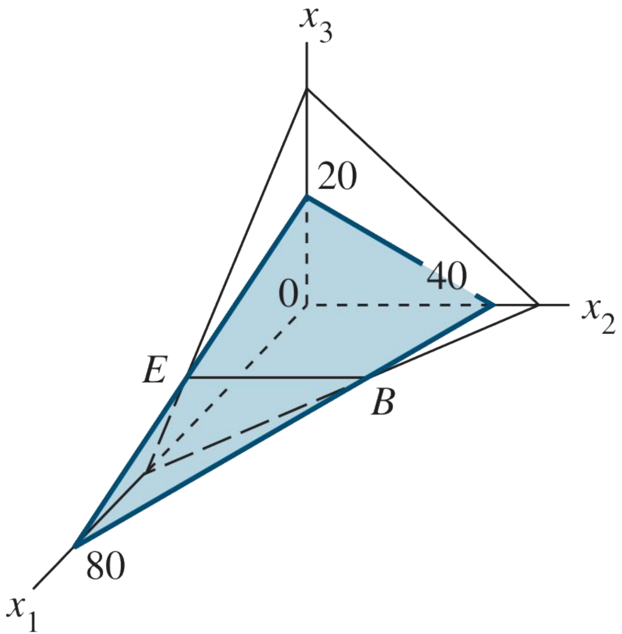
con $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

Ejercicio

- Restricciones:



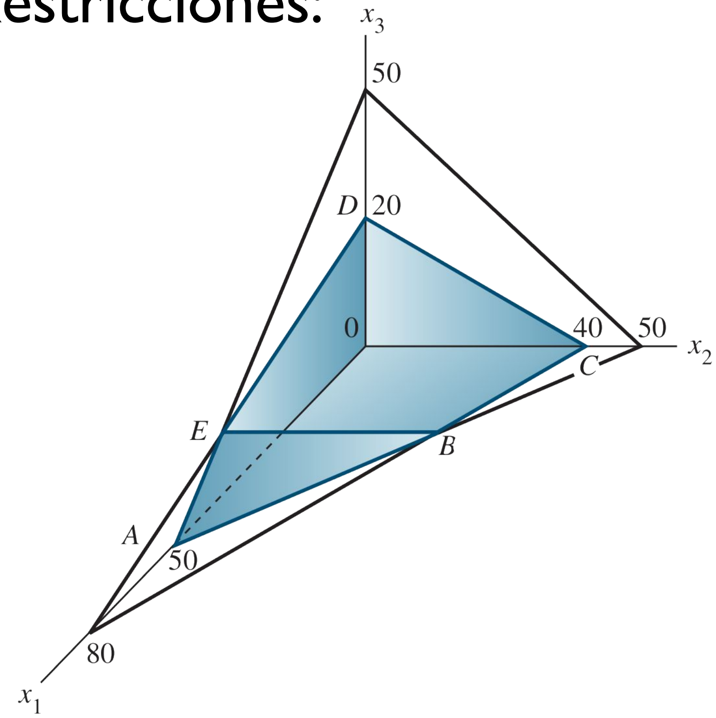
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50$$



$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 80$$

Ejercicio

- Restricciones:



El conjunto factible $\mathcal{F}$ está definido por los vértices $A, B, C, D, E,$ y 0

Ejercicio

- Resolvemos B y E:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 80 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 50 \\ x_1 + 2x_2 = 80 \end{cases} \Rightarrow B = (20, 30, 0)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 80 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 50 \\ x_1 + 4x_3 = 80 \end{cases} \Rightarrow E = (40, 0, 10)$$

Ejercicio

- Evaluamos el objetivo en puntos extremos:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$f(\mathbf{0}) = 0 \qquad f(C) = 120$$

$$f(A) = 100 \qquad f(D) = 80$$

$$f(B) = 130 \qquad f(E) = 120$$

Ejercicio

- Encontramos el máximo:

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

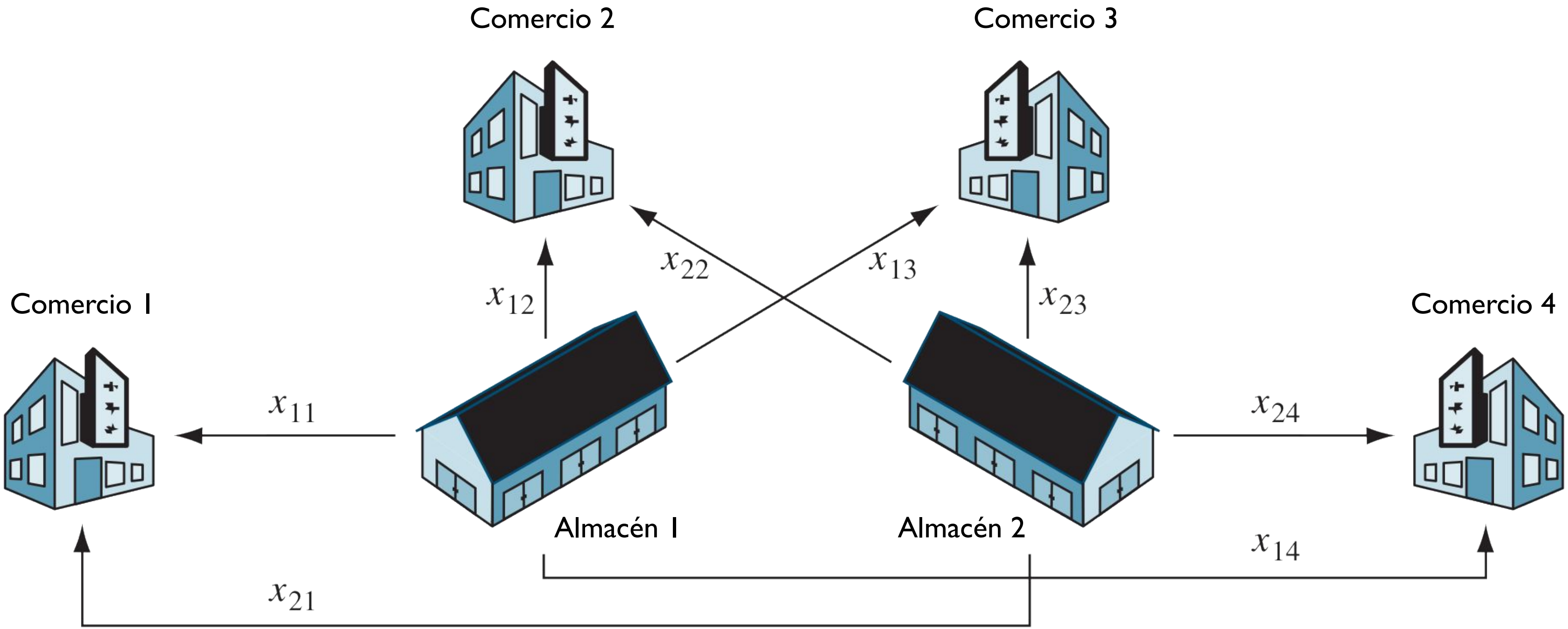
$$f\left(\mathbf{0}\right) = 0 \qquad f\left(C\right) = 120$$

$$f\left(A\right) = 100 \qquad f\left(D\right) = 80$$

$$\underline{f\left(B\right) = 130} \qquad f\left(E\right) = 120$$

Método Simplex

Problemas de Transporte



Problemas de Transporte

- Una empresa de ventas minoristas tiene dos almacenes y cuatro comercios.
- Se vende un modelo particular de jacuzzi en los cuatro comercios, y cada uno ha realizado un pedido a la sede de la empresa para un cierto número de estos jacuzzis.
- La sede determina que los almacenes tienen suficientes jacuzzis y pueden enviarlos de inmediato.

Problemas de Transporte

- Las distancias desde los almacenes hasta los comercios varían, y el costo de transportar un jacuzzi depende de la distancia.
- El problema consiste en decidir **un cronograma de envío** que minimice el costo total de envío.

Problemas de Transporte

- Definimos x_{ij} como el número de unidades (jacuzzis) que se envían desde el almacén i a la tienda j.
- Sean a_1 y a_2 los números de unidades disponibles en los almacenes 1 y 2, y sean r_1, ..., r_4 los números de unidades solicitadas por las diferentes tiendas.

Problemas de Transporte

- Entonces los x_{ij} deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq a_1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq a_2$$

Problemas de Transporte

- Entonces los x_{ij} deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq a_1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq a_2 \\
x_{11} + x_{21} &= r_1 \\
x_{12} + x_{22} &= r_2 \\
x_{13} + x_{23} &= r_3 \\
x_{14} + x_{24} &= r_4
\end{aligned}
$$

Problemas de Transporte

- Entonces los x_{ij} deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq a_1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq a_2 \\
x_{11} + x_{21} &= r_1 \\
x_{12} + x_{22} &= r_2 \\
x_{13} + x_{23} &= r_3 \\
x_{14} + x_{24} &= r_4 \\
x_{ij} &\geq 0 \text{ para } i = 1, 2 \text{ y } j = 1, \ldots, 4
\end{aligned}
$$

Problemas de Transporte

- El objetivo es minimizar la función:

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24}$$

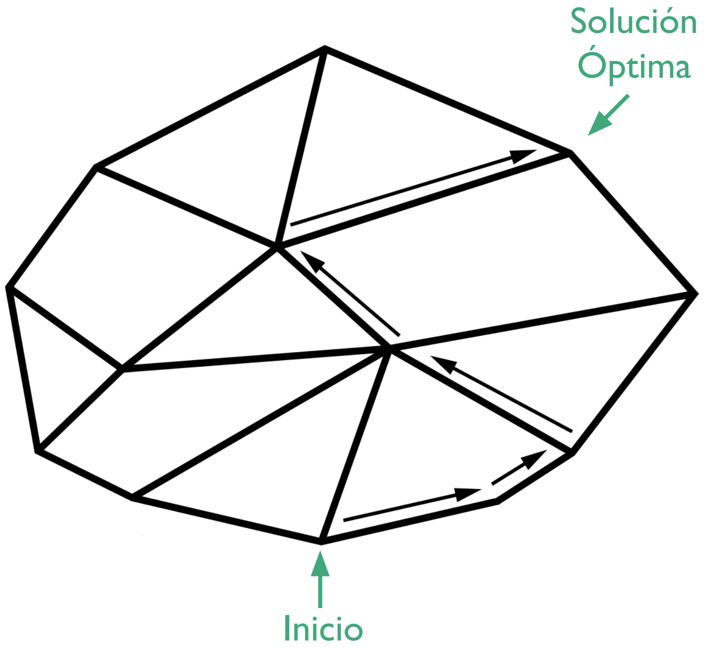
donde c_{ij} es el costo de trasladar una unidad de mercadería desde el almacén *i*, hasta el comercio *j*.

Idea general del método Simplex

1. **Seleccionar un punto** extremo $\mathbf{x}$ del conjunto factible $\mathcal{F}$.
2. Considerar todos los bordes de $\mathcal{F}$ que se unen en $\mathbf{x}$. Si la función objetivo f no crece al moverse a lo largo de ninguno de estos bordes, entonces $\mathbf{x}$ es una solución óptima.
3. Si f crece al moverse a lo largo de uno o más de los bordes, entonces seguir **el camino que ofrece el mayor aumento** y elegir el punto extremo de $\mathcal{F}$ en el extremo opuesto.
4. Repetir el proceso (desde el paso 2).

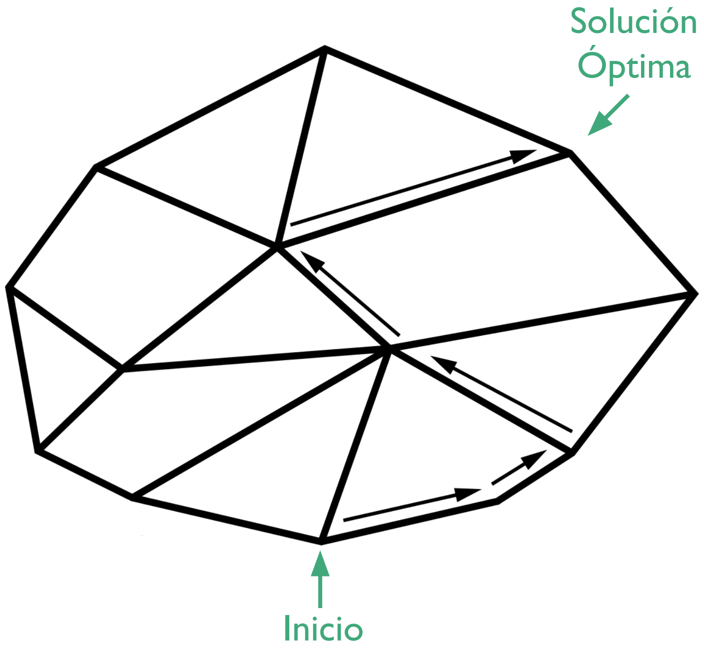
Consideraciones

- Dado que el valor de f aumenta en cada paso, el camino no pasará dos veces por el mismo punto extremo.
- Como hay un número finito de puntos extremos, este proceso llegará a una solución óptima (si existe) en un número finito de pasos.



Consideraciones

- Si el problema es **no acotado**, eventualmente el camino alcanzará un borde infinito en el paso 3 a lo largo del cual f crece sin límites.



Consideraciones

- El método simplex comienza transformando cada inecuación en una ecuación:

Consideraciones

- El método simplex comienza transformando cada inecuación en una ecuación:

$$5x_1 + 7x_2 \leq 80 \longrightarrow 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 80$$

Consideraciones

- El método simplex comienza transformando cada inecuación en una ecuación:

$$5x_1 + 7x_2 \leq 80 \longrightarrow 5x_1 + 7x_2 + \underbrace{x_3}_{\text{Variable “de holgura”}} = 80$$

Variables de Holgura - Ejemplo

- Encontrar una solución al siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 60 \\
3x_1 + x_2 + 5x_3 &\leq 46 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 50
\end{aligned}
$$

Variables de Holgura - Ejemplo

- Encontrar una solución al siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 60 \\
3x_1 + x_2 + 5x_3 &\leq 46 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 50
\end{aligned}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 60 \\
3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 &= 46 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 &= 50
\end{aligned}
$$

Variables de Holgura - Ejemplo

- Encontrar una solución al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 60 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &\leq 46 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 50 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 60 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 &= 46 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 &= 50 \end{aligned}$$

Solución: $x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 60, \quad x_5 = 46, \quad \text{y} \quad x_6 = 50$

Soluciones al sistema de inecuaciones

- Dado un sistema de inecuaciones $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, A de $m \times n$, la adición de m variables de holgura produce un sistema lineal de m ecuaciones y $n + m$ variables.

Soluciones al sistema de inecuaciones

- Dado un sistema de inecuaciones $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, A de $m \times n$, la adición de m variables de holgura produce un sistema lineal de m ecuaciones y $n + m$ variables.
- Una solución a este sistema se llama **solución básica** si, a lo sumo, m variables son distintas de 0.

Soluciones al sistema de inecuaciones

- Dado un sistema de inecuaciones $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, A de $m \times n$, la adición de m variables de holgura produce un sistema lineal de m ecuaciones y $n + m$ variables.
- Una solución a este sistema se llama **solución básica** si, a lo sumo, m variables son distintas de 0.
- Si además, cada variable toma un valor no negativo, se llama **solución básica factible.**

Soluciones al sistema de inecuaciones

- Dado un sistema de inecuaciones $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, A de $m \times n$, la adición de m variables de holgura produce un sistema lineal de m ecuaciones y $n + m$ variables.
- Una solución a este sistema se llama **solución básica** si, a lo sumo, m variables son distintas de 0.
- Si además, cada variable toma un valor no negativo, se llama **solución básica factible** → **puntos extremos !**

Variables de Holgura - Ejemplo

- Encontrar una solución al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 60 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &\leq 46 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 50 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 60 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 &= 46 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 &= 50 \end{aligned}$$

Solución: $x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 60, \quad x_5 = 46, \quad \text{y} \quad x_6 = 50$

Variables de Holgura - Ejemplo

- Encontrar una solución al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 60 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &\leq 46 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 50 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 60 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 &= 46 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 &= 50 \end{aligned}$$

Solución básica factible: $x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 60, \quad x_5 = 46, \quad \text{y} \quad x_6 = 50$

Terminología

- Es habitual referirse a las variables no nulas (x_4, x_5 y x_6) en el sistema anterior como variables básicas (cada una tiene un coeficiente de 1 y aparecen en solo una ecuación).

Terminología

- Es habitual referirse a las variables no nulas (x_4, x_5 y x_6) en el sistema anterior como variables básicas (cada una tiene un coeficiente de 1 y aparecen en solo una ecuación).
- En el ejemplo, diríamos que las variables básicas "están" en la solución y que las variables x_1, x_2 y x_3 están "fuera" de la solución.

Terminología

- Es habitual referirse a las variables no nulas (x_4, x_5 y x_6) en el sistema anterior como variables básicas (cada una tiene un coeficiente de 1 y aparecen en solo una ecuación).
- En el ejemplo, diríamos que las variables básicas "están" en la solución y que las variables x_1, x_2 y x_3 están "fuera" de la solución.
- En un problema de programación lineal, esta solución probablemente no sería óptima ya que solo las variables de holgura son distintas de cero.

Pivoteo de variables

- Un procedimiento estándar en el método simplex es cambiar el papel que juega una variable en una solución.
- Ejemplo: introducir x_2 en la solución del sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 60 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 &= 46 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 &= 50 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 60, \quad x_5 = 46, \quad \text{y} \quad x_6 = 50$$

Pivoteo de variables

- En general, para introducir la variable x_k en la solución usando la ecuación p, pivotando en la entrada $a_{pk}x_k$ de un sistema:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
&\vdots \\
a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

  - El coeficiente a_{pk} de x_k tiene que ser positivo.
  - El cociente b_p / a_{pk} tiene que ser el más chico entre los cocientes b_i/a_{ik} (siempre que $a_{ik} > 0$)

Pivoteo de variables

- Determinar qué ecuación usar como pivote para que x_2 aparezca en la solución:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 60 \\
3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 &= 46 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 &= 50
\end{aligned}
$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 60, \quad x_5 = 46, \quad \text{y} \quad x_6 = 50$$

Pivoteo de variables

- Determinar qué ecuación usar como pivote para que x_2 aparezca en la solución:
  - Los a_{pk} son todos positivos.
  - Computamos los cocientes b_p / a_{pk}:

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{60}{3} = 20, \quad \frac{b_2}{a_{22}} = 46, \quad \text{y} \quad \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{50}{2} = 25$$

Pivoteo de variables

- Determinar qué ecuación usar como pivote para que x_2 aparezca en la solución:
  - Los a_{pk} son todos positivos.
  - Computamos los cocientes $b_p\,/\,a_{pk}$:

$$\underbrace{\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{60}{3} = 20,}_{\text{Pivotamos en la primera ecuación}} \quad \frac{b_2}{a_{22}} = 46, \quad \text{y} \quad \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{50}{2} = 25$$

Pivoteo de variables

- Determinar qué ecuación usar como pivote para que x_2 aparezca en la solución:
  - Construimos el nuevo sistema mediante operaciones elementales entre filas.

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \quad &= 20 \\
\frac{7}{3}x_1 + \frac{11}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + x_5 \quad &= 26 \\
-\frac{1}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_6 \quad &= 10
\end{aligned}
$$

Pivoteo de variables

- Determinar qué ecuación usar como pivote para que x_2 aparezca en la solución:
  - Construimos el nuevo sistema mediante operaciones elementales entre filas.

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \quad &= 20 \\
\frac{7}{3}x_1 + \frac{11}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + x_5 \quad &= 26 \\
-\frac{1}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_6 \quad &= 10
\end{aligned}
$$

Solución básica factible: $x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = 20, \quad x_5 = 26, \quad x_6 = 10$

Pivoteo de variables

- En general es más cómodo trabajar en notación matricial:

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 46 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right]$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 60, \quad x_5 = 46, \quad \text{y} \quad x_6 = 50$$

Pivoteo de variables

- En general es más cómodo trabajar en notación matricial:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & {\color{blue}x_4} & {\color{blue}x_5} & {\color{blue}x_6} & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
\frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 20 \\
\frac{7}{3} & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 26 \\
-\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 10
\end{array}\right]
$$

$$
x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = 20, \quad x_5 = 26, \quad x_6 = 10
$$

Método Simplex: ejemplo

- Problema:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & 25x_1 + 33x_2 + 18x_3 \\
\text{sujeto a} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 60 \\
 & 3x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 46 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50 \\
\text{con } x_j \geq 0 & \text{para } j = 1, \ldots, 3.
\end{array}
$$

Método Simplex: ejemplo

1. Convertir las desigualdades en igualdades usando variables de holgura.
2. Convertir la función objetivo en una ecuación, usando una nueva variable M.

Método Simplex: ejemplo

- El problema original se transforma en encontrar una solución al siguiente sistema de ecuaciones, con $x_j \geq 0$ y para la cual M tiene el mayor valor posible:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 60 \\
3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 &= 46 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 &= 50 \\
-25x_1 - 33x_2 - 18x_3 + M &= 0
\end{aligned}
$$

Método Simplex: ejemplo

- Tabla Simplex inicial:

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & M & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 60 \\
3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 46 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 50 \\
\hline
-25 & -33 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Método Simplex: ejemplo

- Tabla Simplex inicial:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & M & & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{rrrrrrr|r}
2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 60 \\
3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 46 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 50 \\
\hline
-25 & -33 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 60, \quad x_5 = 46, \quad x_6 = 50, \quad M = 0$$

Solución básica factible, pero no óptima!

Método Simplex: ejemplo

- Incorporamos x_2 a la solución (pivoteo de variables):

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & M & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 60 \\
3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 46 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 50 \\
\hline
-25 & -33 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Método Simplex: ejemplo

- Resultado tras pivoteo de x_2 :

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & M & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
\frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 20 \\
\frac{7}{3} & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 26 \\
-\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 10 \\
\hline
-3 & 0 & 26 & 11 & 0 & 0 & 1 & 660
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = 20, \quad x_5 = 26, \quad x_6 = 10, \quad M = 660$$

Solución básica factible, pero... óptima?

Método Simplex: ejemplo

- Incorporamos x_1 a la solución (pivoteo de variables):

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & M & & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
\frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 20 \\
\frac{7}{3} & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 26 \\
-\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 10 \\
\hline
-3 & 0 & 26 & 11 & 0 & 0 & 1 & 660
\end{array}\right]
$$

Método Simplex: ejemplo

- Resultado tras pivoteo de x_1 :

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & M & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 0 & \frac{88}{7} \\
1 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & \frac{78}{7} \\
0 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 1 & 0 & \frac{96}{7} \\
\hline
0 & 0 & \frac{215}{7} & \frac{74}{7} & \frac{9}{7} & 0 & 1 & \frac{4854}{7}
\end{array}\right]
$$

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad x_1 = \frac{78}{7}, \quad x_2 = \frac{88}{7}, \quad x_6 = \frac{96}{7}, \quad M = \frac{4854}{7}$$

Solución básica factible, pero... óptima?

Método Simplex: ejemplo

- Resultado tras pivoteo de x_1 :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & M & & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 0 & \frac{88}{7} \\
1 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & \frac{78}{7} \\
0 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 1 & 0 & \frac{96}{7} \\
\hline
0 & 0 & \frac{215}{7} & \frac{74}{7} & \frac{9}{7} & 0 & 1 & \frac{4854}{7}
\end{array}\right]
$$

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad x_1 = \frac{78}{7}, \quad x_2 = \frac{88}{7}, \quad x_6 = \frac{96}{7}, \quad M = \frac{4854}{7}$$

M no puede seguir creciendo: $M = \frac{4854}{7} - \frac{215}{7}x_3 - \frac{74}{7}x_4 - \frac{9}{7}x_5$

Método Simplex: ejemplo

- Resultado tras pivoteo de x_1 :

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & M & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 0 & \frac{88}{7} \\
1 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & \frac{78}{7} \\
0 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 1 & 0 & \frac{96}{7} \\
\hline
0 & 0 & \frac{215}{7} & \frac{74}{7} & \frac{9}{7} & 0 & 1 & \frac{4854}{7}
\end{array}\right]
$$

$$x_1 = \frac{78}{7}, x_2 = \frac{88}{7}, x_3 = 0$$

Solución básica factible óptima

Algoritmo Simplex (problema canónico y $\mathbf{b}$ positivo)

1. Transformar las inecuaciones en ecuaciones con variables de holgura. Igualar el objetivo a M y despejar: -(función objetivo) + $M = 0$.
2. Preparar la tabla simplex inicial. Las variables de holgura (y M) nos proveen la primera solución factible.
3. Verificar la última fila: si todas las entradas a la izquierda de la línea vertical son positivas, entonces la solución es óptima. Sino, elegir la variable x_k con el coeficiente negativo más grande.

Algoritmo Simplex (problema canónico y **b** positivo)

4. Incorporar la variable x_k en la solución. Para eso pivotamos sobre la entrada positiva a_{pk} para la cual la proporción no negativa b_i/a_{ik} es la más pequeña. La nueva solución básica factible tiene un valor más de M.

5. Repetimos el proceso (desde el paso 3) hasta que todas las entradas en la última fila sean no negativas.

¿Puede fallar?

- **En el paso 4**, puede haber una entrada negativa en la última fila de la columna x_k, pero ninguna entrada positiva a_{ik} (para usar de pivote).
- En ese caso, no va a ser posible incorporar a x_k a la solución. La función objetivo no está correctamente restringida y **no existe una solución óptima**.

¿Puede fallar?

- **En el paso 4**, además, el cociente más pequeño b_i/a_{ik} puede ocurrir en más de una fila simultáneamente.
- Si esto pasa, la próxima tabla va a tener al menos una variable básica igual a 0, y el valor de M en las tablas siguientes puede llegar a permanecer constante.
- Teóricamente es posible (pero improbable) que ocurra una secuencia infinita de pivotes y no conduzca a una solución óptima (**cycling**).

Otros casos

- Hasta ahora nos concentramos en problemas de maximización y cuyo vector $\mathbf{b}$ tenía todas entradas positivas.
  - ¿Qué pasa si el problema es de minimización?
  - ¿Qué pasa si $\mathbf{b}$ tiene entradas 0 o negativas?

Vector $\mathbf{b}$ con entradas 0

- Si $\mathbf{b}$ tiene entradas 0, existe la posibilidad de caer en cycling y no encontrar una solución óptima, pero es raro que suceda en la práctica.

Vector **b** con entradas negativas

- Ejemplo:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeto a} & \quad x_1 + x_2 \geq 14 \\
 & \quad x_1 - x_2 \leq 2
\end{array}
$$

con $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Vector **b** con entradas negativas

- Si **b** tiene entradas negativas, se nos dificulta encontrar una solución básica factible para iniciar el algoritmo.
- Una opción consiste en multiplicar la desigualdad por -1:

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq -4 \rightarrow -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 4$$

Pero invierte la desigualdad!

Vector **b** con entradas negativas

- Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \geq 14 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \end{array}$$

$$\text{con } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Mismo par x_1,x_2 que minimiza x_1+$2x_2$, maximiza -x_1-$2x_2$

Reescribir inecuación equivalente pero con ≤

Vector **b** con entradas negativas

- Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} & -x_1 - x_2 \leq -14 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \end{array}$$

con $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Vector **b** con entradas negativas

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= -14 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + M &= 0 \end{aligned}$$

Vector **b** con entradas negativas

- Ejemplo:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & M & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -14 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = -14, \quad x_4 = 2, \quad M = 0$$

Solución básica **no factible**

Vector **b** con entradas negativas

- Buscamos otra entrada negativa en la misma fila:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & M & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\underline{-1} & \underline{-1} & 1 & 0 & 0 & -14 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Vector **b** con entradas negativas

- Si elegimos x_2, pivotamos usando la entrada a_{i2} con el cociente b_1 / a_{i2} mas chico (no negativo):

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & M & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -14 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Vector **b** con entradas negativas

- Ahora cada entrada en **b** es positiva (excepto la última), pero ya podemos comenzar a ejecutar Simplex:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & M & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 14 \\
2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 16 \\
\hline
-1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -28
\end{array}\right]
$$

Vector $\mathbf{b}$ con entradas negativas

- Completando el algoritmo, llegamos a:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & M & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 6 \\
1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 8 \\
\hline
0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -20
\end{array}\right]
$$

Vector **b** con entradas negativas

- Completando el algoritmo, llegamos a:

$$\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & M & \\
\end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 6 \\
1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 8 \\
\hline
0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -20
\end{array}\right]$$

Solución: el máximo valor posible de $-x_1-2x_2$ es -20, cuando $x_1 = 8$ y $x_2 = 6$, entonces el **mínimo valor** de x_1+2x_2 es 20.

Ejemplo de Minimización

- Resolver:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{sujeto a} & 4x_1 + x_2 \geq 12 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 10 \\
 & x_1 + 4x_2 \geq 16
\end{array}
$$

con $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Ejemplo de Minimización

- Revertimos las 3 inecuaciones:

$$-4x_1 - x_2 \leq -12, \quad -x_1 - 2x_2 \leq -10, \quad -x_1 - 4x_2 \leq -16$$

Ejemplo de Minimización

- Construimos la tabla simplex inicial:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \color{blue}{x_3} & \color{blue}{x_4} & \color{blue}{x_5} & M \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc|c}
-4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -12 \\
-1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\
-1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -16 \\
\hline
5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Ejemplo de Minimización

- Construimos la tabla simplex inicial:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & M \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc|c}
-4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -12 \\
-1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\
-1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -16 \\
\hline
5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

No deben ser negativas.

Ejemplo de Minimización

- Construimos la tabla simplex inicial:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & M
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
-4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -12 \\
-1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\
-1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -16 \\
\hline
5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Elegimos el pivot con mayor ratio b_i/a_{ij}

Ejemplo de Minimización

- Luego de este pivot de pre-procesamiento de la tabla, podemos comenzar con el algoritmo tal y como lo vimos:

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & M & & \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & 15 & 1 & 0 & -4 & 0 & 52 \\
0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 6 \\
1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 16 \\
\hline
0 & -17 & 0 & 0 & 5 & 1 & -80
\end{array}\right] \cdots
$$