Modelo Parcial 2

Métodos Computacionales 2023

Ejercicio 1. Sea $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_p}\}$ una base ortonormal del subespacio $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la proyección de un vector $\mathbf{x}$ sobre W como:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v_1})\mathbf{v_1} + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v_p})\mathbf{v_p}, \tag{1}$$

a. Mostrar que si tomamos $V = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v_1} & \cdots & \mathbf{v_p} \\ | & & | \end{pmatrix}$, entonces $\hat{\mathbf{x}} = VV^t\mathbf{x}$.

b. Usando el item anterior, demostrar que la función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que proyecta vectores sobre el subespacio W es una transformación lineal.

c. Mostrar que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\|\mathbf{x}\|^2 \geq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v_1})^2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v_p})^2.$$

Ejercicio 2.

a. Tenemos $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que A^tA es invertible. Si $\hat{\mathbf{x_1}}$, $\hat{\mathbf{x_2}}$ son soluciones del problema de cuadrados mínimos de A para $\mathbf{b_1}$ y $\mathbf{b_2}$ respectivamente; mostrar que $c_1\hat{\mathbf{x_1}} + c_2\hat{\mathbf{x_2}}$ es solución para $c_1\mathbf{b_1} + c_2\mathbf{b_2}$.

b. Hallar una formula para los sistemas de cuadrados mínimos

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|,$$

cuando A es ortogonal.

Ejercicio 3. Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene columnas ortogonales $\{\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_n}\}$ donde $\|\mathbf{w_i}\| = \alpha_i > 0$. Calcular A^tA y hallar las matrices U, Σ y V de la descomposición en valores singulares de A.

Ejercicio 4. Dado un vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ que representa n mediciones de temperatura realizadas por un sensor, buscamos hallar una señal $\mathbf{x}$ que mejor aproxime a los datos según la ecuación:

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} w_i(x_i - y_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2,$$

donde el primer término representa el error cometido por la aproximación, agregándole los pesos $w_1, \ldots, w_n$ que priorizan las mediciones más recientes; y el segundo término busca que las derivadas de primer orden sean chicas, con λ un parámetro que ajusta la precisión de la aproximación de la derivada.

Encontrar el problema de cuadrados mínimos $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ asociado. Hallar A, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$.

Pista: expresar las sumatorias como normas al cuadrado.