Métodos Computacionales

Clase V: Determinantes

Determinantes

Motivación

- Extender la noción de det 2x2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Determinantes de $n \times n$

- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinantes de n x n

- Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinantes de n x n

- Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinantes de n x n

- Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{bmatrix}$$

Determinantes de n x n

- Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{bmatrix}$$

Determinantes de n x n

- Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}\Delta \end{bmatrix}$$

Determinantes de *n* x *n*

- Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}\Delta \end{bmatrix}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Determinantes de $n \times n$

- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 5 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Determinantes de n x n

- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 5 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$1(0-2) - 5(0-0) + 0(-4-0) = -2$$

Determinantes de $n \times n$

- Para $n \geq 2$, el **determinante** de una matriz A de $n \times n$ es la suma de n términos de la forma $\pm a_{1j} \det A_{1j}$, con signos + y - alternados, donde las entradas $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ son de la primera fila de A. En símbolos:

$$A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

Determinantes de n x n

- Para $n \geq 2$, el **determinante** de una matriz A de n x n es la suma de n términos de la forma $\pm a_{1j} \det A_{1j}$, con signos + y - alternados, donde las entradas $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ son de la primera fila de A. En símbolos:

$$A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \rightarrow C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

cofactor (i, j)

Determinantes de $n \times n$

- Para $n \geq 2$, el **determinante** de una matriz A de $n \times n$ es la suma de n términos de la forma $\pm a_{1j} \det A_{1j}$, con signos + y - alternados, donde las entradas a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} son de la primera fila de A. En símbolos:

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Desarrollo por cofactores

- El **determinante** de una matriz A de $n \times n$ se puede calcular mediante un desarrollo por cofactores a lo largo de cualquier fila o columna. El desarrollo a lo largo de la i-ésima fila utilizando cofactores es:

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

El desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna:

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Patrón de cofactores:

- El signo en el cofactor depende de la posición a_{ij} en la matriz y genera el siguiente patrón:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Determinantes por cofactores

- Calcular el determinante por cofactores a lo largo de la tercera fila:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinantes por cofactores

- Calcular el determinante por cofactores a lo largo de la tercera fila:

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

Determinantes por cofactores

- Calcular el determinante por cofactores a lo largo de la tercera fila:

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

$$= (-1)^{3+1}a_{31}\det A_{31} + (-1)^{3+2}a_{32}\det A_{32} + (-1)^{3+3}a_{33}\det A_{33}$$

Determinantes por cofactores

- Calcular el determinante por cofactores a lo largo de la tercera fila:

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

$$= (-1)^{3+1}a_{31}\det A_{31} + (-1)^{3+2}a_{32}\det A_{32} + (-1)^{3+3}a_{33}\det A_{33}$$

$$= 0\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Determinantes por cofactores

- Calcular el determinante por cofactores a lo largo de la tercera fila:

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

$$= (-1)^{3+1}a_{31}\det A_{31} + (-1)^{3+2}a_{32}\det A_{32} + (-1)^{3+3}a_{33}\det A_{33}$$

$$= 0\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2(-1) + 0 = -2$$

Determinantes por cofactores

- Calcular el determinante por cofactores:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinantes por cofactores

- Calcular el determinante por cofactores:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det A = 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -12$$

Determinante de una matriz triangular

- Si A es una **matriz triangular**, su determinante es el producto de las entradas sobre la diagonal principal de A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 24$$

Implementaciones

- El cómputo del determinante por cofactores **no es eficiente**.
- En general, requiere más de $n!$ multiplicaciones.
- Por ejemplo, una matriz de 25 x 25 requiere 25! = 1.5 x 10^{25} multiplicaciones. Si una computadora ejecuta un billón de multiplicaciones por segundo, tendría que trabajar **más de 500,000 años** para calcular el determinante con este método.

Propiedades

Propiedades de los determinantes

- Si A es una matriz cuadrada:
  a. Si un múltiplo de una fila de A se suma a otra fila para producir B, entonces $\det B = \det A$
  b. Si dos filas de A se intercambian para producir B, entonces $\det B = -\det A$
  c. Si una fila de A se multiplica por k para producir B, entonces $\det B = k \det A$

Propiedades de los determinantes

- Ejemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

- Ejemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

- Ejemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

- Ejemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -(1)(3)(-5) = 15$$

Propiedades de los determinantes

- Ejemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

- Ejemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \ldots$$

Propiedades de los determinantes

- Si U es una forma escalonada de A que se obtuvo mediante reemplazos e intercambios de fila, si hay r intercambios entonces:

$$\det\ A = (-1)^r \det\ U$$

Propiedades de los determinantes

- Si U es una forma escalonada de A que se obtuvo mediante reemplazos e intercambios de fila, si hay r intercambios entonces:

$$\det\ A = (-1)^r \det\ U$$

$$U = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det U \neq 0$ $\qquad$ $\det U = 0$

Propiedades de los determinantes

- Si U es una forma escalonada de A que se obtuvo mediante reemplazos e intercambios de fila, si hay r intercambios entonces:

$$\det A = \begin{cases} (-1)^r \begin{pmatrix} \text{producto de} \\ \text{pivotes en } U \end{pmatrix} & \text{cuando } A \text{ es invertible} \\ 0 & \text{cuando } A \text{ no es invertible} \end{cases}$$

Propiedades de los determinantes

- Si U es una forma escalonada de A que se obtuvo mediante reemplazos e intercambios de fila, si hay r intercambios entonces:

$$\det A = \begin{cases} (-1)^r \begin{pmatrix} \text{producto de} \\ \text{pivotes en } U \end{pmatrix} & \text{cuando } A \text{ es invertible} \\ 0 & \text{cuando } A \text{ no es invertible} \end{cases}$$

Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$

Propiedades de los determinantes

- Calcular:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Propiedades de los determinantes

- Calcular:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ -6 & 7 & -7 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedades de los determinantes

- Calcular:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Otras propiedades

- Si A es una matriz de n x n, entonces $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$
  - Es posible realizar **operaciones sobre las columnas** de una matriz en forma análoga a las operaciones por fila.
- Si A y B son matrices de n x n, entonces $(\det AB) = (\det A)(\det B)$
  - Esto solo vale **para la multiplicación**, no para la suma ni otras operaciones.

Regla de Cramer

Regla de Cramer

- Sea A una matriz invertible de n x n, para cualquier $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$, la única solución x de Ax = $\mathbf{b}$ tiene entradas dadas por:

$$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$A_i(\mathbf{b}) = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} \phantom{\mathbf{a}_1} & & \uparrow & & \phantom{\mathbf{a}_n} \end{matrix} \end{array}$$

columna i

Regla de Cramer

- Resolver:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Regla de Cramer

- Resolver:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

Regla de Cramer

<NOTEBOOK>

- Resolver:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{24 + 16}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{24 + 30}{2} = 27$$

Una fórmula para A^{-1}

- La regla de Cramer nos permite deducir una fórmula general para la inversa de una matriz A de n x n

Una fórmula para A^{-1}

- La regla de Cramer nos permite deducir una fórmula general para la inversa de una matriz A de n x n
- La j-ésima columna de A^{-1} es un vector $\mathbf{x}$ que satisface:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$$

Una fórmula para A^{-1}

- La regla de Cramer nos permite deducir una fórmula general para la inversa de una matriz A de n x n
- La j-ésima columna de A^{-1} es un vector $\mathbf{x}$ que satisface:

$$\underbrace{A\mathbf{x}}_{\text{i-ésima entrada de } \mathbf{x} \text{ es (i,j) de } A^{-1}} = \underbrace{\mathbf{e}_j}_{\text{j-ésima columna de } I}$$

Una fórmula para A^{-1}

- La regla de Cramer nos permite deducir una fórmula general para la inversa de una matriz A de n x n
- La j-ésima columna de A^{-1} es un vector $\mathbf{x}$ que satisface:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$$

- Por regla de Cramer:

$$\{\text{entrada } (i,j) \text{ de } A^{-1}\} = x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{e}_j)}{\det A}$$

Una fórmula para A^{-1}

- Por regla de Cramer:

$$\{\text{entrada } (i,j) \text{ de } A^{-1}\} = x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{e}_j)}{\det A}$$

- Desarrollando por cofactores el determinante A_i:

$$\det A_i(\mathbf{e}_j) = (-1)^{i+j} \det A_{ji} = C_{ji}$$

Una fórmula para A^{-1}

- Finalmente:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Una fórmula para A^{-1}

- Finalmente:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz Adjunta

Matriz adjunta

- Encontrar la inversa de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriz adjunta

- Encontrar la inversa de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14, \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Matriz adjunta

- Encontrar la inversa de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14, \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz adjunta

- Encontrar la inversa de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14, \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$(\operatorname{adj} A)A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = 14I$$

Matriz adjunta

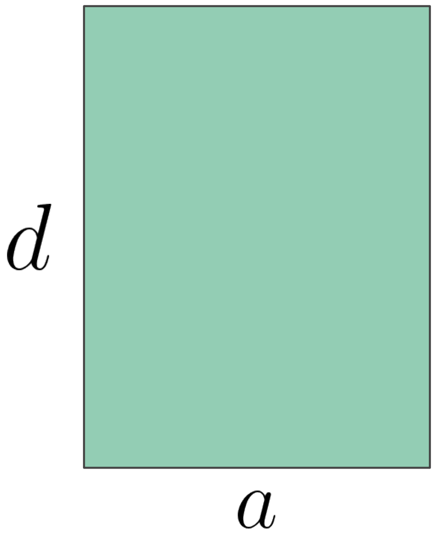
- Encontrar la inversa de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

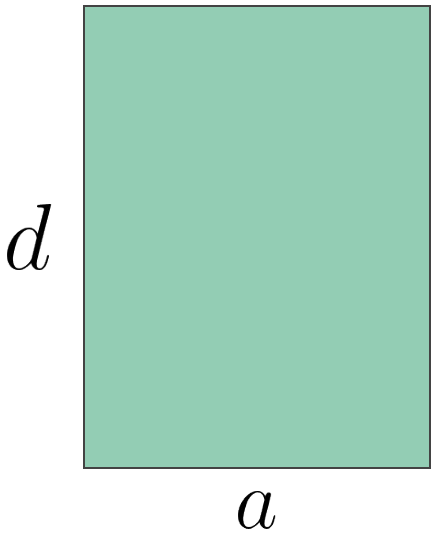
$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/7 & 1 & 2/7 \\ 3/14 & -1/2 & 1/14 \\ 5/14 & -1/2 & -3/14 \end{bmatrix}$$

Determinantes como área o volumen

Área de un paralelogramo

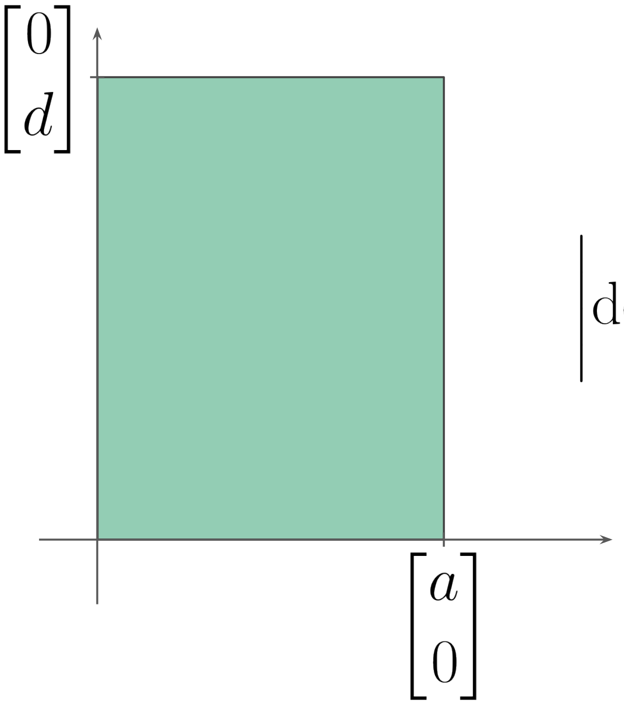


Área de un paralelogramo



$$\text{Área} = ad$$

Área de un paralelogramo

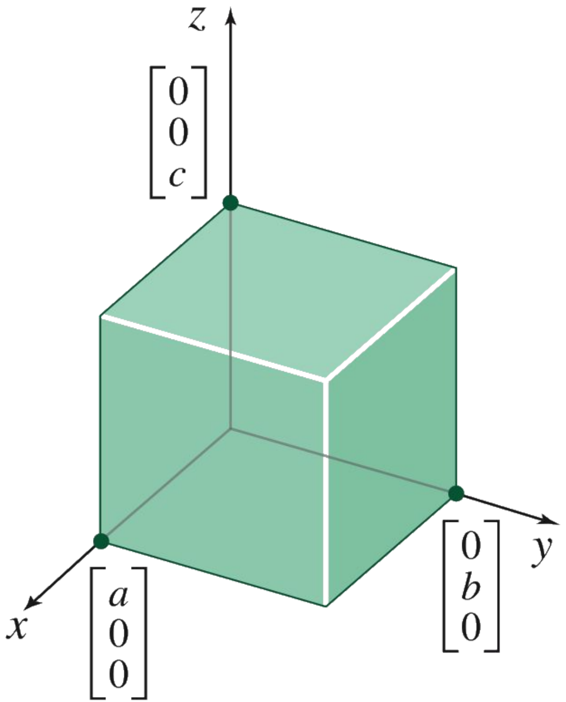


$$\text{Área} = ad$$

$$\left| \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right| = |ad| = \left\{ \begin{array}{c} \text{área del} \\ \text{rectángulo} \end{array} \right\}$$

Matriz Diagonal

Volumen de un paralelepípedo



$$\left| \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \right| = |abc| = \left\{ \begin{array}{c} \text{volumen del} \\ \text{paralelepípedo} \end{array} \right\}$$

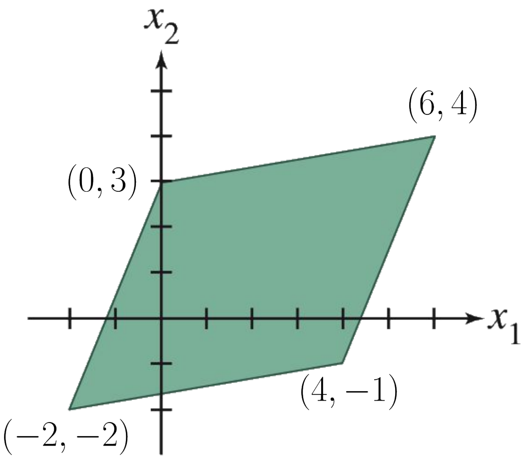
$$\text{Volumen} = |abc|$$

Determinantes como área o volumen

- Calcular el área del paralelogramo definido por los puntos: $(-2,-2)$, $(0,3)$, $(4,-1)$ y $(6,4)$

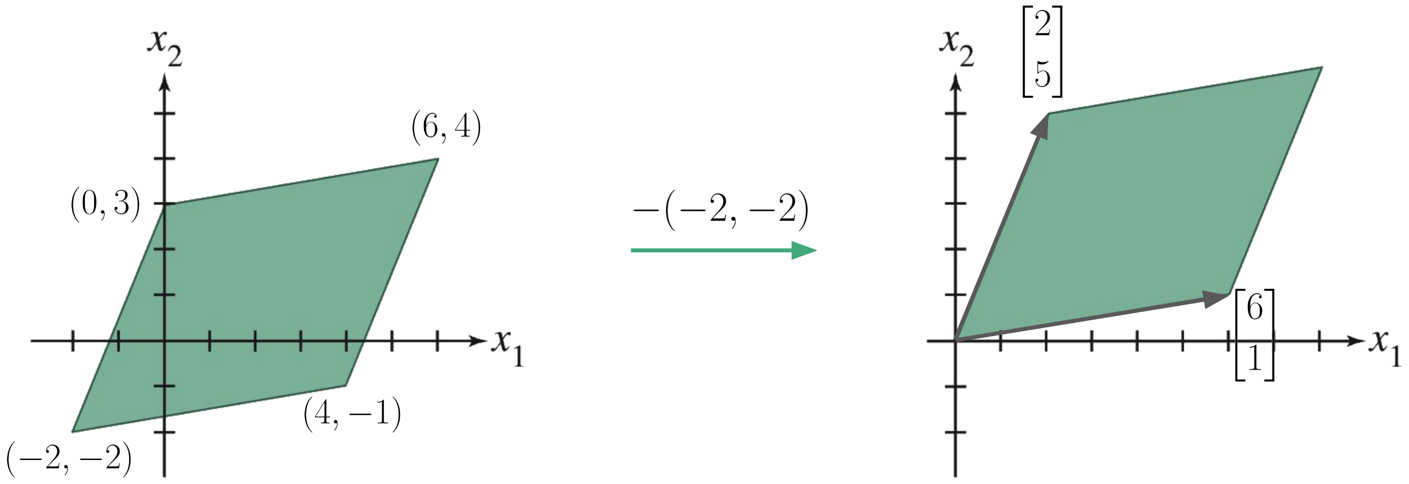
Determinantes como área o volumen

- Calcular el área del paralelogramo definido por los puntos: (-2,-2), (0,3), (4,-1) y (6,4)



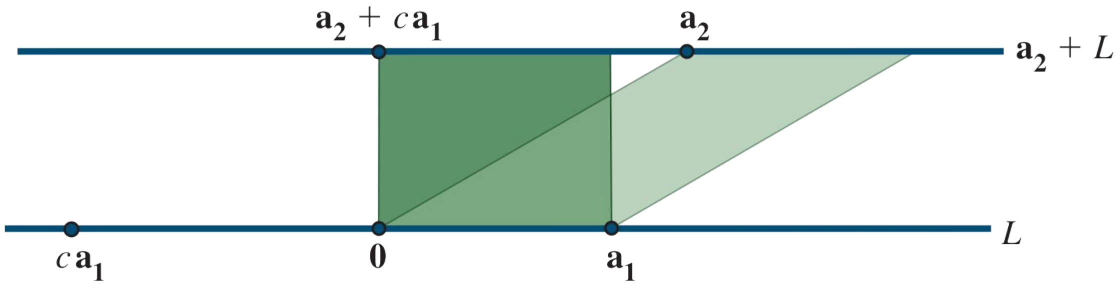
Determinantes como área o volumen

- Calcular el área del paralelogramo definido por los puntos: (-2,-2), (0,3), (4,-1) y (6,4)



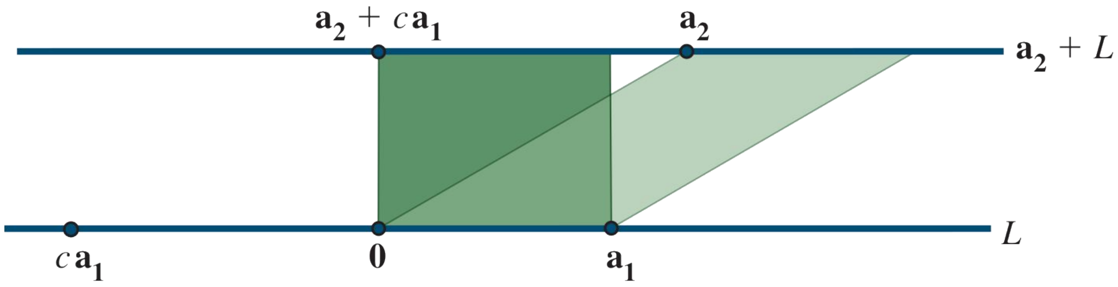
Determinantes como área o volumen

- Dados $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, vectores diferentes de cero, entonces para cualquier c, el área del paralelogramo definido por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ es igual al área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2 + c\,\mathbf{a}_1$



Determinantes como área o volumen

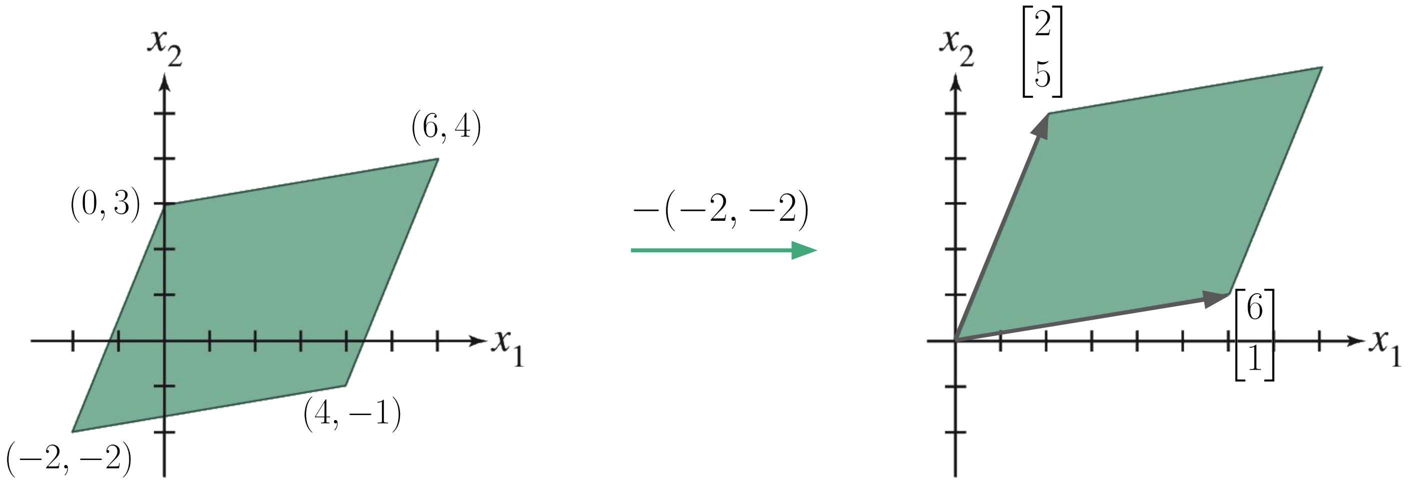
- Dados $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, vectores diferentes de cero, entonces para cualquier c, el área del paralelogramo definido por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ es igual al área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2 + c\,\mathbf{a}_1$



$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]$$
$$\downarrow$$
$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 + c\,\mathbf{a}_1]$$

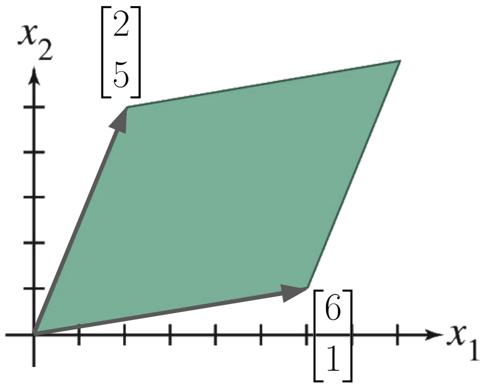
Determinantes como área o volumen

- Calcular el área del paralelogramo definido por los puntos: (-2,-2), (0,3), (4,-1) y (6,4)



Determinantes como área o volumen

- Calcular el área del paralelogramo definido por los puntos: (-2,-2), (0,3), (4,-1) y (6,4)



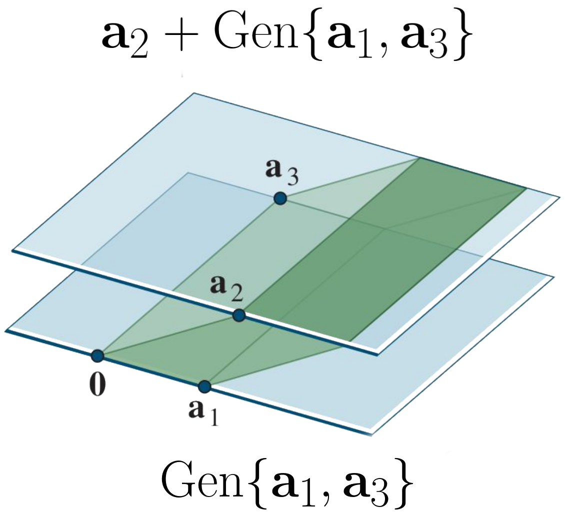
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

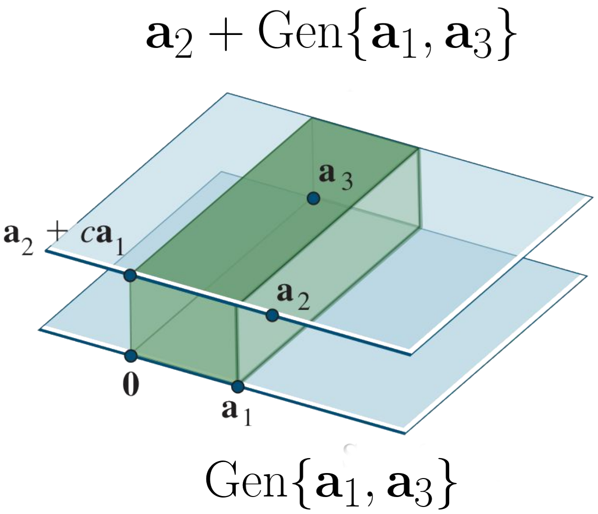
$$|\det A| = |-28| = 28$$

Área del paralelogramo

Determinantes como área o volumen

- La misma noción se puede generalizar a paralelepípedos:

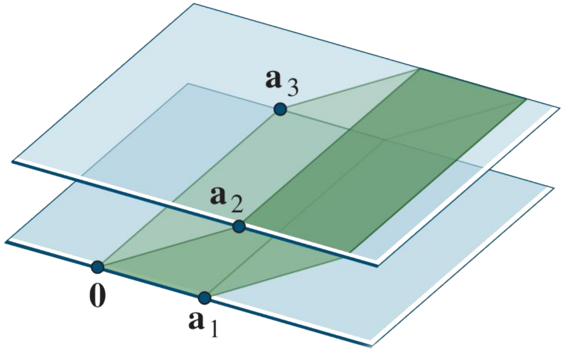




Determinantes como área o volumen

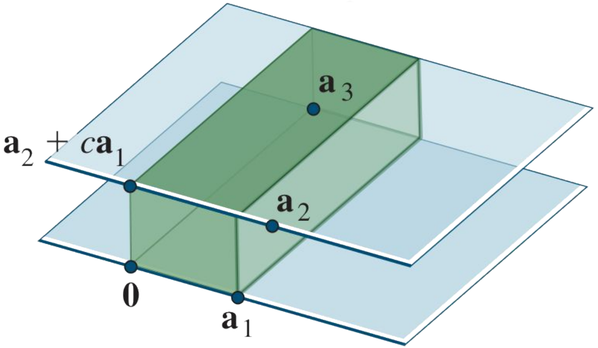
- La misma noción se puede generalizar a paralelepípedos:

$\mathbf{a}_2 + \mathrm{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$



$\mathrm{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$

$\mathbf{a}_2 + \mathrm{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$



$\mathrm{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 + c\,\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

Transformaciones lineales y determinantes

- El valor absoluto del determinante de una matriz de una transformación lineal nos proporciona información sobre cómo la transformación afecta las áreas (en 2D) o los volúmenes (en 3D)

Transformaciones lineales y determinantes

- Definimos $T\colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como una transformación lineal determinada por una matriz A de 2 x 2. Si S es un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\{\text{área de } T(S) = |\det A| \cdot \{\text{área de } S\}\}$$

Transformaciones lineales y determinantes

- Definimos $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como una transformación lineal determinada por una matriz A de 2 x 2. Si S es un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\{\text{área de } T(S) = \underbrace{|\det A|}_{\substack{= 1, \text{ la transformación preserva áreas} \\ > 1, \text{ la transformación amplía las áreas} \\ < 1, \text{ la transformación reduce las áreas} \\ = 0, \text{ la transformación colapsa las áreas}}} \cdot \{\text{área de } S\}\}$$

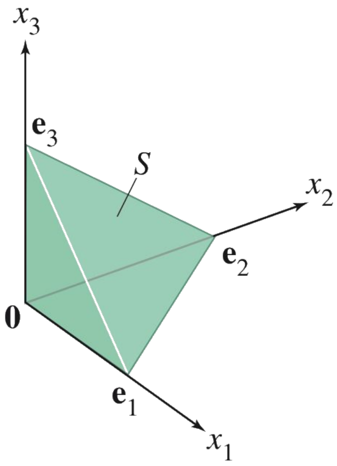
Transformaciones lineales y determinantes

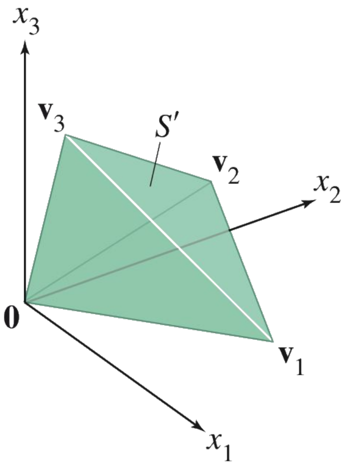
- Definimos T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como una transformación lineal determinada por una matriz A de 3 x 3. Si S es un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$\{\text{volumen de } T(S) = |\det A| \cdot \{\text{volumen de } S\}\}$$

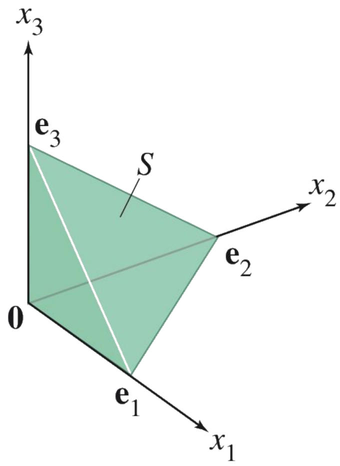
Transformaciones lineales y determinantes

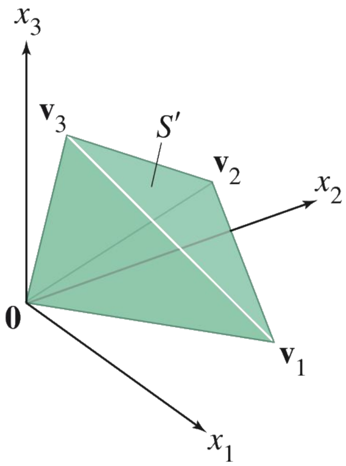
- Describir una transformación lineal que mapee S sobre S'
- Encontrar una fórmula para el volumen del tetraedro S' considerando que: $\{\text{volumen de S}\} = (1/3) \cdot \{\text{área de la base}\} \cdot \{\text{altura}\}$





Transformaciones lineales y determinantes

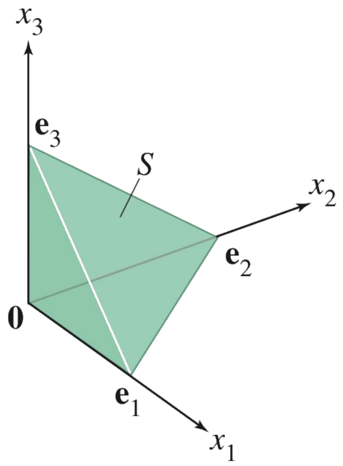


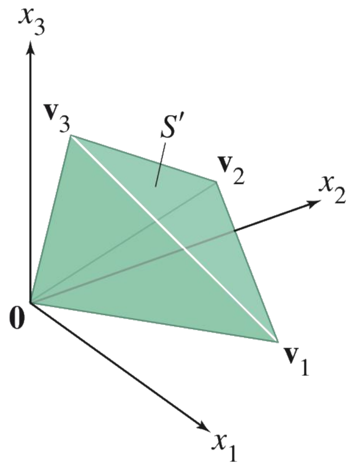


$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1 \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2 \quad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3$$

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad T(\mathbf{e}_3)] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]$$

Transformaciones lineales y determinantes





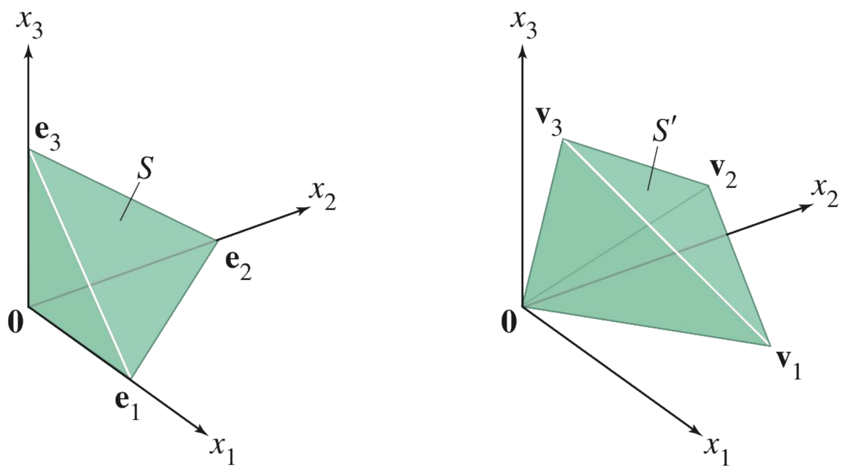
- Área de la base de S:

$$(1/2)(1)(1) = 1/2$$

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1 \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2 \quad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3$$

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad T(\mathbf{e}_3)] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]$$

Transformaciones lineales y determinantes

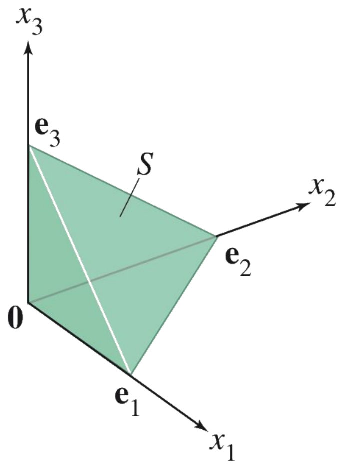


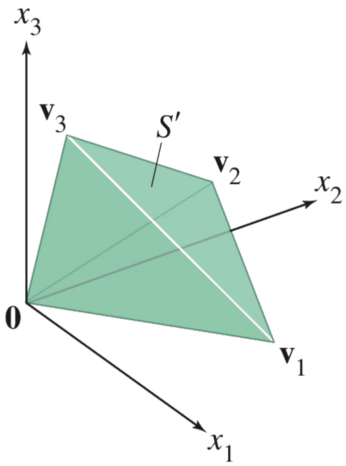
$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1 \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2 \quad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3$$

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad T(\mathbf{e}_3)] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]$$

- Área de la base de *S*:
  $(1/2)(1)(1) = 1/2$
- Volumen de *S*:
  $(1/3)(1/2)(1) = 1/6$

Transformaciones lineales y determinantes





$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1 \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2 \quad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3$$

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad T(\mathbf{e}_3)] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]$$

- Área de la base de *S*:

$$(1/2)(1)(1) = 1/2$$

- Volumen de *S*:

$$(1/3)(1/2)(1) = 1/6$$

- Volumen de *S'*:

$$= |\det A|\{\text{volumen } S\}$$
$$= |\det A|(1/6)$$