Métodos Computacionales

Clase VIII: Matrices Simétricas y Formas Cuadráticas

Matrices Simétricas

- Las matrices simétricas surgen con mayor frecuencia que cualquier otra clase de matrices:

Simétricas
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

No Simétricas
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices Simétricas

Diagonalización (repaso)

- Diagonalizar la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Diagonalización (repaso)

- Diagonalizar la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Ecuación característica:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144 \\ &= -(\lambda - 8)(\lambda - 6)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Diagonalización (repaso)

- Diagonalizar la matriz A:

$$\lambda = 8: \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 6: \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \lambda = 3: \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Base (en $\mathbb{R}^3$) del espacio propio

Diagonalización (repaso)

- Diagonalizar la matriz A:

$$\lambda = 8 : \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 6 : \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \lambda = 3 : \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como A es simétrica, **esto es base ortogonal** (en $\mathbb{R}^3$) del espacio propio

Diagonalización (repaso)

- Diagonalizar la matriz A:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Base **ortonormal** (en $\mathbb{R}^3$) del espacio propio

Diagonalización (repaso)

- Diagonalizar la matriz A:

$$A = PDP^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Diagonalización (repaso)

- Diagonalizar la matriz A:

$$A = PDP^{-1} \longrightarrow A = PDP^T$$

$$P = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz ortogonal}}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de Matrices Simétricas

- Si A es **simétrica**, entonces, los vectores propios de diferentes **espacios propios** son **ortogonales**.

- Una matriz A de n x n es diagonalizable ortogonalmente si existen una matriz ortogonal P (con $P^{-1} = P^T$) y una matriz diagonal D tales que:

$$A = PDP^T = PDP^{-1}$$

Diagonalización de Matrices Simétricas

- Una matriz A de $n \times n$ es **diagonalizable ortogonalmente si y sólo si** A es una matriz simétrica.

Diagonalización de Matrices Simétricas

- Diagonalizar la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de Matrices Simétricas

- Diagonalizar la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 \\ &= -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2) \end{aligned}$$

Ecuación característica

Diagonalización de Matrices Simétricas

- Diagonalizar la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 7 : \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -2 : \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Subespacios propios

Diagonalización de Matrices Simétricas

- Diagonalizar la matriz A:

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1/2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

Construcción de una base ortogonal para el subespacio λ=7

Diagonalización de Matrices Simétricas

- Diagonalizar la matriz A:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{bmatrix}$$

Construcción de una base
ortonormal para el subespacio λ=7

Diagonalización de Matrices Simétricas

- Diagonalizar la matriz A:

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|2\mathbf{v}_3\|} 2\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Construcción de una base **ortonormal** para el subespacio λ=-2

Diagonalización de Matrices Simétricas

- Diagonalizar la matriz A:

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 0 & 4/\sqrt{18} & -1/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Teorema espectral

El conjunto de valores propios de una matriz A se denomina el **espectro** de A. Una **matriz simétrica** A de n x n tiene las siguientes propiedades:

- A tiene n valores propios (contando multiplicidades).
- La dimensión del espacio propio para cada valor propio λ es igual a la multiplicidad de λ.
- Los espacios propios son mutuamente ortogonales (vectores propios correspondientes a distintos valores propios).
- A es diagonalizable ortogonalmente.

Descomposición espectral

- Dado $A = PDP^{-1}$, donde las columnas de P son los vectores propios ortonormales $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ de A y los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ están en la matriz diagonal D, entonces:

$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$$

Descomposición espectral

- Dado $A = PDP^{-1}$, donde las columnas de P son los vectores propios ortonormales $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ de A y los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ están en la matriz diagonal D, entonces:

$$A = PDP^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}$$

Descomposición espectral

- Dado $A = PDP^{-1}$, donde las columnas de P son los vectores propios ortonormales $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ de A y los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ están en la matriz diagonal D, entonces:

$$A = PDP^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{u}_1 & \cdots & \lambda_n \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}$$

Descomposición espectral

- Dado $A = PDP^{-1}$, donde las columnas de P son los vectores propios ortonormales $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ de A y los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ están en la matriz diagonal D, entonces:

$$A = PDP^T = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$$

Descomposición espectral: ejemplo

- Construir una **descomposición espectral** de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{\text{Diagonalización ortogonal}}$$

Descomposición espectral: ejemplo

- Construir una **descomposición espectral** de la matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$A = 8\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + 3\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T \longrightarrow$$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ columnas de P

Descomposición espectral: verificación

$$A = 8\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + 3\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T$$

$$\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$8\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + 3\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T = \begin{bmatrix} 32/5 & 16/5 \\ 16/5 & 8/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 & -6/5 \\ -6/5 & 12/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A$$

Formas Cuadráticas

Formas Cuadráticas

- Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es una función Q, definida en $\mathbb{R}^n$, que aplicándola a un vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \qquad Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

donde A es una matriz simétrica de n x n, denominada **matriz de la forma cuadrática.**

Formas Cuadráticas: ejemplo 1

- Calcular $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\,\mathbf{x}$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Formas Cuadráticas: ejemplo 1

- Calcular $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x}$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = 4x_1^2 + 3x_2^2$$

Formas Cuadráticas: ejemplo 2

- Calcular $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Formas Cuadráticas: ejemplo 2

- Calcular $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1 (3x_1 - 2x_2) + x_2 (-2x_1 + 7x_2) \\ &= 3x_1^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_1 + 7x_2^2 \\ &= 3x_1^2 - 4x_1 x_2 + 7x_2^2 \end{aligned}$$

Formas Cuadráticas: ejemplo 3

- Para $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^3$, escribir la siguiente ecuación en la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x}$:

$$Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3$$

Formas Cuadráticas: ejemplo 3

- Para $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^3$, escribir la siguiente ecuación en la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x}$:

$$Q(\mathbf{x}) = \underbrace{5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2}_{\text{Diagonal}} \underbrace{- x_1x_2 + 8x_2x_3}_{\text{?}}$$

Formas Cuadráticas: ejemplo 3

- Para $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^3$, escribir la siguiente ecuación en la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x}$:

$$Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 \underbrace{- x_1x_2 + 8x_2x_3}_{?}$$

- Como A tiene que ser simétrica, el coeficiente de $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$ (para i distinto de j) debe dividirse uniformemente entre las entradas $(i\,,j\,)$ de A y $(j\,,i\,)$ de A.

Formas Cuadráticas: ejemplo 3

- Para $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^3$, escribir la siguiente ecuación en la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\,\mathbf{x}$:

$$Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 \underbrace{- x_1x_2 + 8x_2x_3}_{?}$$

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{12} + a_{21} = -1 \rightarrow a_{12} = a_{21} = -1/2$$

$$a_{23} = a_{32}, \quad a_{23} + a_{32} = 8 \rightarrow a_{23} = a_{32} = 4$$

Formas Cuadráticas: ejemplo 3

- Para $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^3$, escribir la siguiente ecuación en la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\,\mathbf{x}$:

$$Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3$$

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Cambio de variable en una forma cuadrática

- Si $\mathbf{x}$ representa un vector variable en $\mathbb{R}^n$, entonces un **cambio de variable** es una ecuación de la forma:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \quad \text{ó} \quad \mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$$

donde P es una matriz invertible, $\mathbf{y}$ es un nuevo vector variable en $\mathbb{R}^n$ (notar que $\mathbf{y}$ es el vector $\mathbf{x}$ relativo a la base de $\mathbb{R}^n$ determinada por las columnas de P).

Cambio de variable en una forma cuadrática

- Aplicando el cambio de variable a la forma cuadrática:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T \left(P^T AP\right) \mathbf{y}\end{aligned}$$

Cambio de variable en una forma cuadrática

- Aplicando el cambio de variable a la forma cuadrática:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T \underbrace{\left(P^T AP\right)}_{\text{Nueva matriz de forma cuadrática}} \mathbf{y}\end{aligned}$$

Cambio de variable en una forma cuadrática

- Aplicandο el cambio de variable a la forma cuadrática:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{y}^T P^T A P\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T \underbrace{\left(P^T A P\right)}_{} \mathbf{y}\end{aligned}$$

Si P diagonaliza ortogonalmente a A:

$$P^\top = P^{-1} \text{ y } P^\top A P = P^{-1} A P = D$$

Cambio de variable en una forma cuadrática

- Aplicando el cambio de variable a la forma cuadrática:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{y}^T P^T A P\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T D\mathbf{y} \end{aligned}$$

- Si elegimos una matriz P de tal manera que diagonaliza a la matriz A, entonces existe una transformación $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ tal que la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}$ se convierta en $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} D \mathbf{y}$

Cambio de variable: ejemplo

- Hacer un cambio de variable para transformar Q en una forma cuadrática sin términos cruzados

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$$

Cambio de variable: ejemplo

- Hacer un cambio de variable para transformar Q en una forma cuadrática sin términos cruzados

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$$

Cambio de variable: ejemplo

- Hacer un cambio de variable para transformar Q en una forma cuadrática sin términos cruzados.

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriz de forma cuadrática

Cambio de variable: ejemplo

- Hacer un cambio de variable para transformar Q en una forma cuadrática sin términos cruzados.

- Paso 1: Diagonalizar ortogonalmente la matriz A, para ello, buscamos autovalores y autovectores (normalizados):

$$\lambda = 3 : \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}; \quad \lambda = -7 : \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Cambio de variable: ejemplo

- Hacer un cambio de variable para transformar Q en una forma cuadrática sin términos cruzados.

- Paso 2: Definir la matriz P de autovectores normalizados y la matriz diagonal D con los autovalores:

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Cambio de variable: ejemplo

- Hacer un cambio de variable para transformar Q en una forma cuadrática sin términos cruzados.

- Paso 3: Definir el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ donde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Cambio de variable: ejemplo

- Hacer un cambio de variable para transformar Q en una forma cuadrática sin términos cruzados.

- Paso 3: Definir el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ donde:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 &= \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} \\ &= 3y_1^2 - 7y_2^2 \end{aligned}$$

Cambio de variable: ejemplo

- Ahora calcular $Q(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} = (2\text{,-}2)$ usando el cambio de variable.

Cambio de variable: ejemplo

- Calcular $Q(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} = (2,\text{-}2)$

$$\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x} = P^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

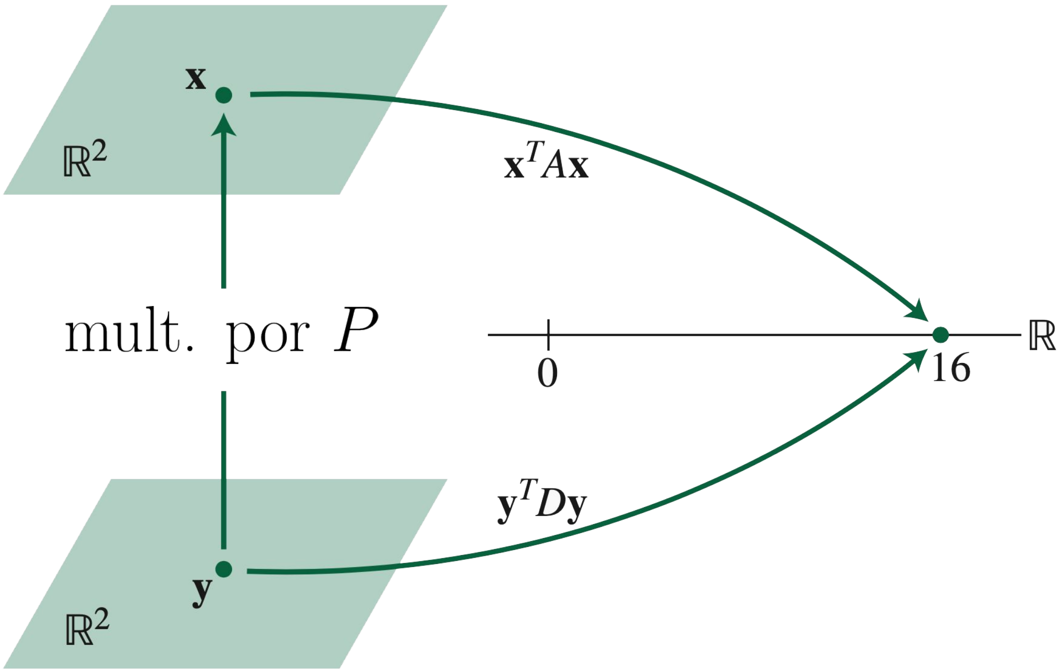
Cambio de variable: ejemplo

- Calcular $Q(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} = (2,-2)$

$$\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x} = P^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3y_1^2 - 7y_2^2 &= 3(6/\sqrt{5})^2 - 7(-2/\sqrt{5})^2 = 3(36/5) - 7(4/5) \\ &= 80/5 = 16 \end{aligned}$$

Cambio de variable: ejemplo



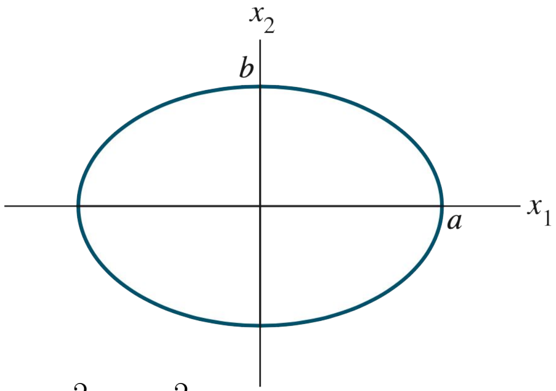
Teorema de los ejes principales

- Sea A una matriz simétrica de n x n, entonces existe un cambio ortogonal de variable, $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, que transforma la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ en una forma cuadrática $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}D\mathbf{y}$, **sin términos de producto cruzado**.

Intuición geométrica

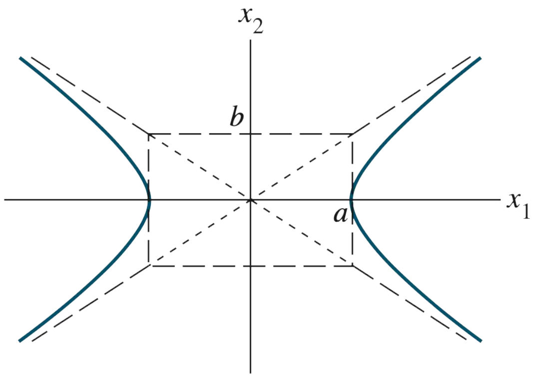
- Para formas cuadráticas $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x}$, donde A es una matriz simétrica invertible de 2 x 2, el conjunto de todas las $\mathbf{x}$ que satisfacen $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x} = c$, para una c constante corresponden a:

Elipse



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, a > b > 0$$

Hipérbola

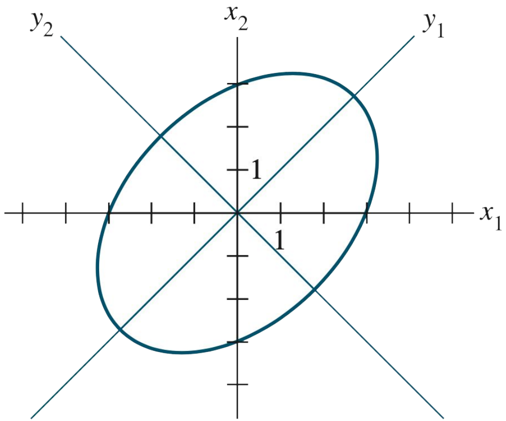


$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, a > b > 0$$

Intuición geométrica

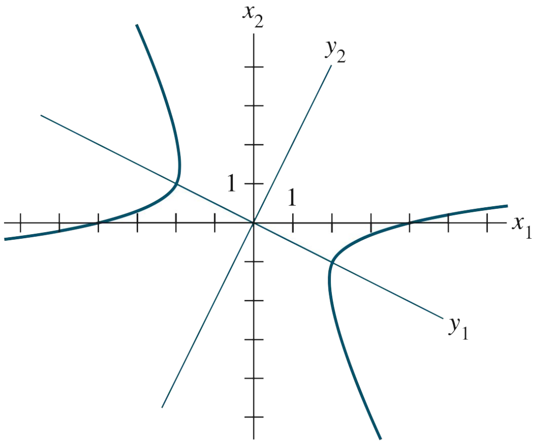
- Si A no es una matriz diagonal, las gráficas dan un giro. Los ejes principales son un nuevo sistema de coordenadas respecto al cual la gráfica está en posición estándar:

Elipse



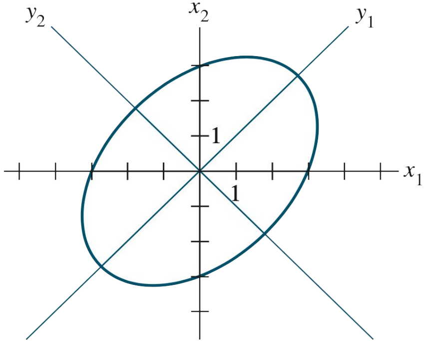
$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 48$$

Hipérbola

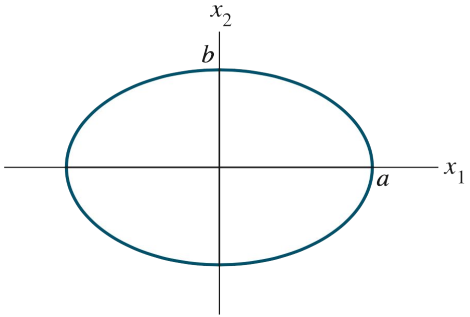


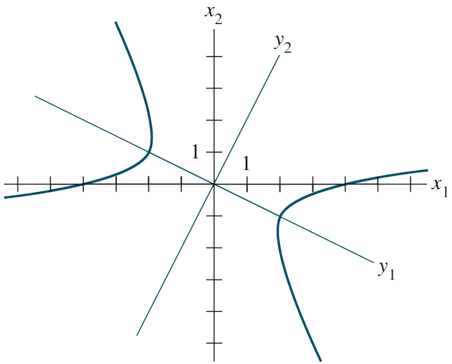
$$x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 = 16$$

Teorema de los ejes principales

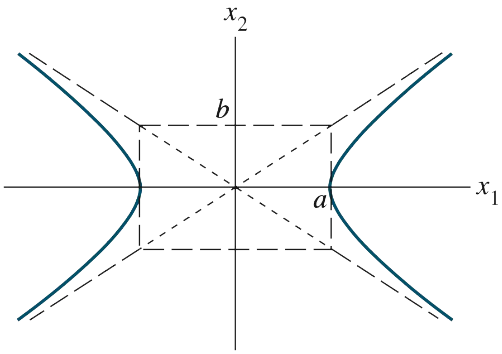


$$\xrightarrow{P^{-1}\mathbf{x}}$$





$$\xrightarrow{P^{-1}\mathbf{x}}$$

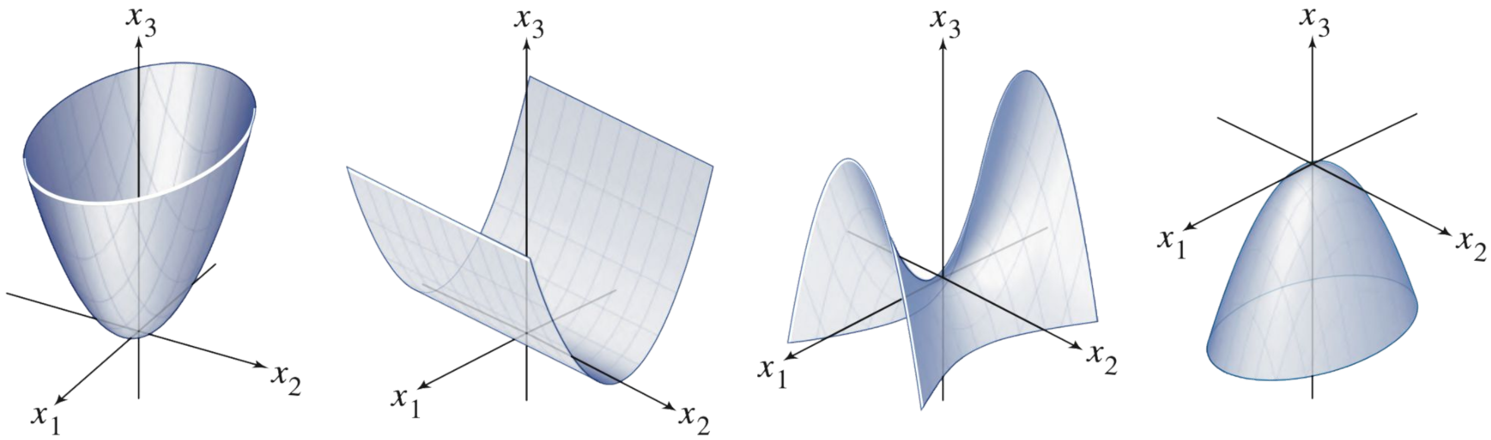


Intuición geométrica

- Para formas cuadráticas $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\,\mathbf{x}$, donde A de $n \times n$, Q es una función de valores reales en $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Intuición geométrica

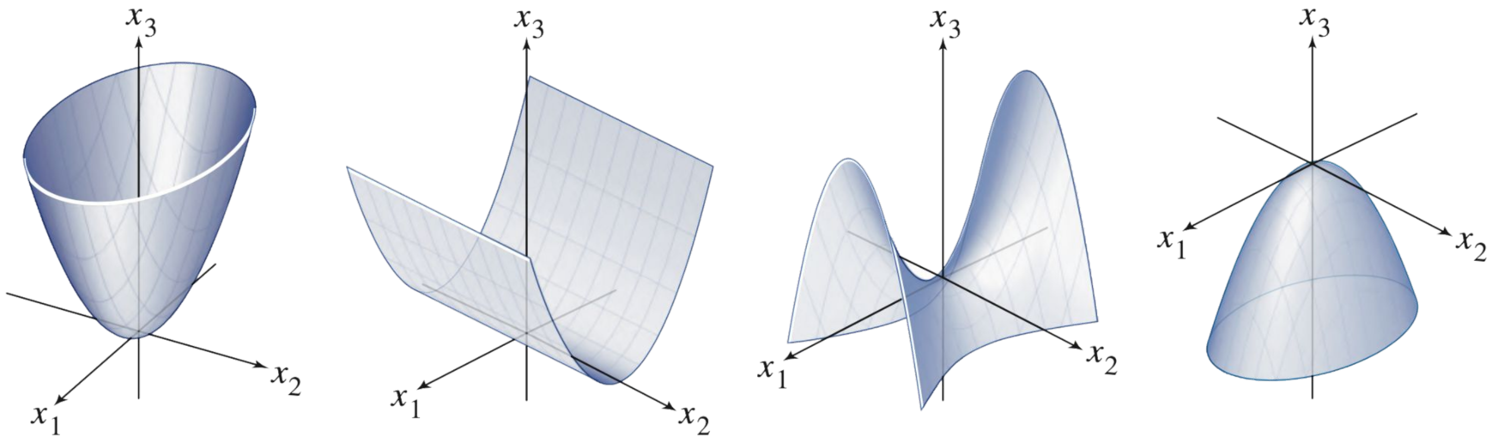
- Para formas cuadráticas $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{T} A \, \mathbf{x}$, donde A de $n \times n$, Q es una función de valores reales en $\mathbb{R}^{n}$. Para dominio en $\mathbb{R}^{2}$:



(a) $z = 3x_1^2 + 7x_2^2$ (b) $z = 3x_1^2$ (c) $z = 3x_1^2 - 7x_2^2$ (d) $z = -3x_1^2 - 7x_2^2$

Intuición geométrica

- Para formas cuadráticas $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x}$, donde A de $n \times n$, Q es una función de valores reales en $\mathbb{R}^n$. Para dominio en $\mathbb{R}^2$:

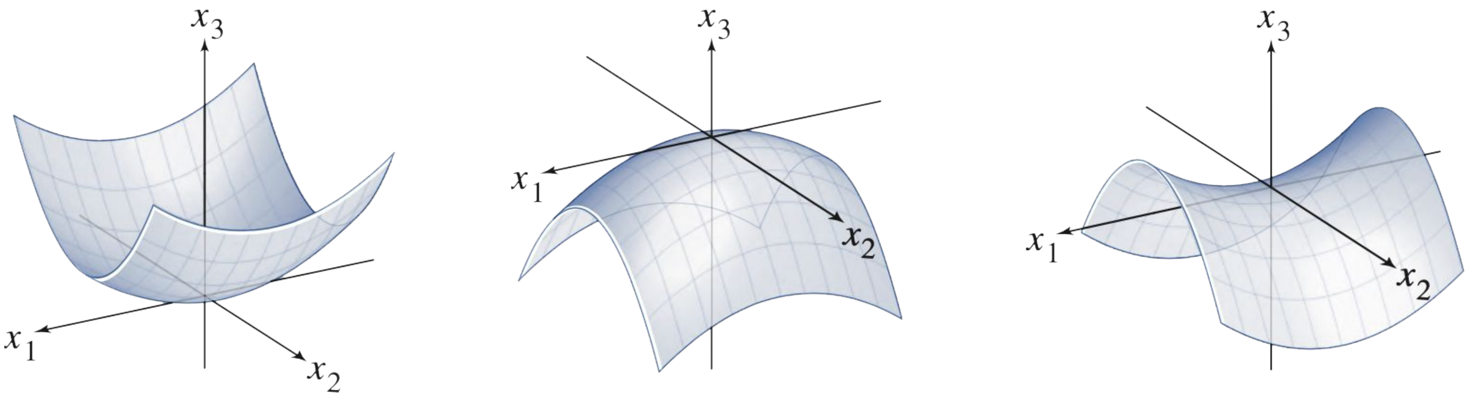


(a) $z = 3x_1^2 + 7x_2^2$ | (b) $z = 3x_1^2$ | (c) $z = 3x_1^2 - 7x_2^2$ | (d) $z = -3x_1^2 - 7x_2^2$

positiva | **positiva** | **indefinida** | **negativa**

Clasificación de las formas cuadráticas

- **Definida positiva** si $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x}$ distinto de 0
- **Definida negativa** si $Q(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x}$ distinto de 0
- **Indefinida** si puede tomar valores positivos y negativos



Definida positiva **Definida negativa** **Indefinida**

Clasificación de las formas cuadráticas

- Sea A una matriz simétrica de n x n asociada a la forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$:
  - $Q(\mathbf{x})$ es definida positiva si y sólo si los autovalores de A **son todos positivos**.
  - $Q(\mathbf{x})$ es definida negativa si y sólo si los autovalores de A **son todos negativos**.
  - $Q(\mathbf{x})$ es indefinida si y sólo si los autovalores de A son **algunos positivos y otros negativos**.
- Si algún autovalor de A es 0, se las llama **semidefinidas** (positivas/negativas).