Métodos Computacionales

Clase IV: Espacios Vectoriales

Factorización

Factorización de matrices

- Expresar una matriz A como un producto de dos o más matrices:
  - Multiplicar matrices constituye una **síntesis** de datos.
  - Factorizar matrices es un **análisis** de datos.

Factorización de matrices

- Expresar una matriz A como un producto de dos o más matrices:
  - Multiplicar matrices constituye una **síntesis** de datos.
  - Factorizar matrices es un **análisis** de datos.

- Existen múltiples factorizaciones de matrices:
  - LU
  - QR
  - SVD
  - Cholesky
  - Schur
  - Valores/vectores propios
  - …
  - …
  - …

Factorización LU

- **Motivación:** problemas industriales y de negocios que frecuentemente necesitan resolver ecuaciones con la misma matriz de coeficientes:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \quad \ldots, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_p$$

Factorización LU

- **Motivación:** problemas industriales y de negocios que frecuentemente necesitan resolver ecuaciones con la misma matriz de coeficientes:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \quad \ldots, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_p$$

- Si A es invertible, calculamos: $A^{-1}\mathbf{b}_1$, $A^{-1}\mathbf{b}_2$, ..., $A^{-1}\mathbf{b}_p$
- Encontrar A^{-1} es caro computacionalmente!

Factorización *LU*

- **Motivación:** problemas industriales y de negocios que frecuentemente necesitan resolver ecuaciones con la misma matriz de coeficientes:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \quad \ldots, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_p$$

- Si A es invertible, calculamos: $A^{-1}\mathbf{b}_1$, $A^{-1}\mathbf{b}_2$, ..., $A^{-1}\mathbf{b}_p$
- Resulta más eficiente calcular la factorización LU de A.

Factorización LU

- Forma de la factorización: $A = LU$

$$\underset{m \times n}{A} = \underset{m \times m}{\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}} \underset{m \times n}{\underset{U}{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

Factorización LU

- Forma de la factorización: $A = LU$

$$\underset{m \times n}{A} = \underset{m \times m}{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L}} \underset{m \times n}{\underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$L(U\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

Factorización LU

- Forma de la factorización: $A = LU$

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}} \underset{m\times n}{\underset{U}{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$L\underbrace{(U\mathbf{x})}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

Factorización LU

- Forma de la factorización: $A = LU$

$$\underset{m\times n}{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{L \\ m\times m}} \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{U \\ m\times n}}$$

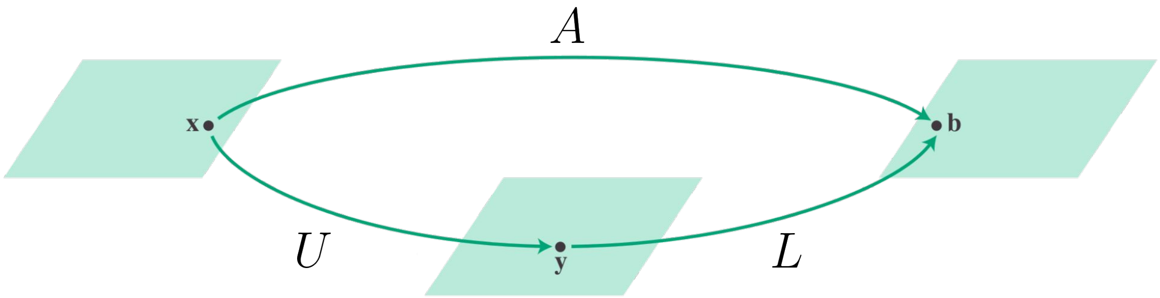
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$L\underbrace{(U\mathbf{x})}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Factorización LU

- Forma de la factorización: $A = LU$



$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$L(\underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}) = \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Factorización LU

- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix}$$

Resolver: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = LU$$

Un algoritmo para encontrar LU

- Llevar A a una forma escalonada U

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Un algoritmo para encontrar LU

- Llevar A a una forma escalonada U

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{hacia } U} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

Un algoritmo para encontrar LU

- Llevar A a una forma escalonada U
- Elegir L tal que la misma secuencia reduzca L a I

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ -3 \end{matrix} & \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$\div 2$

hacia U

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

hacia L

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Un algoritmo para encontrar LU

- Llevar A a una forma escalonada U
- Elegir L tal que la misma secuencia reduzca L a I

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

$\div 3$

$$\xrightarrow{\text{hacia } U} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{hacia } L} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Un algoritmo para encontrar LU

- Llevar A a una forma escalonada U
- Elegir L tal que la misma secuencia reduzca L a I

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\div 2$

hacia U

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

hacia L

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Un algoritmo para encontrar LU

- Llevar A a una forma escalonada U
- Elegir L tal que la misma secuencia reduzca L a I

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

$\div 5$

hacia U

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

hacia L

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Un algoritmo para encontrar LU

- Llevar A a una forma escalonada U
- Elegir L tal que la misma secuencia reduzca L a I

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Un algoritmo para encontrar LU

- Reducir A a una forma escalonada U con operaciones de reemplazo de filas.
- Colocar entradas en L de tal manera que la misma secuencia de operaciones por fila reduzca L a I.

$$E_p \cdots E_1 A = U$$

Un algoritmo para encontrar LU

- Reducir A a una forma escalonada U con operaciones de reemplazo de filas.
- Colocar entradas en L de tal manera que la misma secuencia de operaciones por fila reduzca L a I.

$$E_p \cdots E_1 A = U$$
$$A = \left(E_p \cdots E_1\right)^{-1} U$$

Un algoritmo para encontrar LU

- Reducir A a una forma escalonada U con operaciones de reemplazo de filas.
- Colocar entradas en L de tal manera que la misma secuencia de operaciones por fila reduzca L a I.

$$E_p \cdots E_1 A = U$$

$$A = \underbrace{\left(E_p \cdots E_1\right)^{-1}}_{L = \left(E_p \cdots E_1\right)^{-1}} U = LU$$

Un algoritmo para encontrar LU

- Reducir A a una forma escalonada U con operaciones de reemplazo de filas.
- Colocar entradas en L de tal manera que la misma secuencia de operaciones por fila reduzca L a I.

$$E_p \cdots E_1 A = U$$

$$A = \underbrace{\left(E_p \cdots E_1\right)}^{-1} U = LU$$

$$L = \left(E_p \cdots E_1\right)^{-1}$$

$$E_p \cdots E_1 L = \left(E_p \cdots E_1\right)\left(E_p \cdots E_1\right)^{-1} = I$$

Ejercicio

- Encontrar la factorización LU de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Espacio Vectorial - Definición

- Un **espacio vectorial** es un conjunto no vacío V de vectores donde están definidas dos operaciones: la suma y la multiplicación por escalares.
- Debe cumplir con 10 axiomas:

1. La suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en V
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4. Hay un vector cero $\mathbf{0}$ en V tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. Para cada $\mathbf{u}$ en V, existe -$\mathbf{u}$ en V tal que $\mathbf{u} + (\text{-}\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Espacio Vectorial - Definición

- Un **espacio vectorial** es un conjunto no vacío V de vectores donde están definidas dos operaciones: la suma y la multiplicación por escalares.
- Debe cumplir con 10 axiomas:

6. El múltiplo escalar de $\mathbf{u}$ por c, $(c\,\mathbf{u})$ está en V
7. $c\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = c\,\mathbf{u} + c\,\mathbf{v}$
8. $(c+d)\,\mathbf{u} = c\,\mathbf{u} + d\,\mathbf{u}$
9. $c\,(d\,\mathbf{u}) = (c\,d)\,\mathbf{u}$
10. $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Subespacio - Definición

- Un **subespacio** de un espacio vectorial V es cualquier conjunto H en V que cumpla con las siguientes 3 propiedades:
  - El vector cero pertenece a H
  - Para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en H, la suma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ está en H
  - Para cada $\mathbf{u}$ en H y cada escalar c, el vector $c\,\mathbf{u}$ está en H

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Ejemplo:

$$H = \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Ejemplo:

$$H = \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

  - El vector $\mathbf{0}$ está en H porque $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Ejemplo:

$$H = \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

- El vector $\mathbf{0}$ está en H porque $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$
- Para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en H, la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en H porque:

$$\mathbf{u} = s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{v} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (s_1 + t_1)\mathbf{v}_1 + (s_2 + t_2)\mathbf{v}_2$$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Ejemplo:

$$H = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

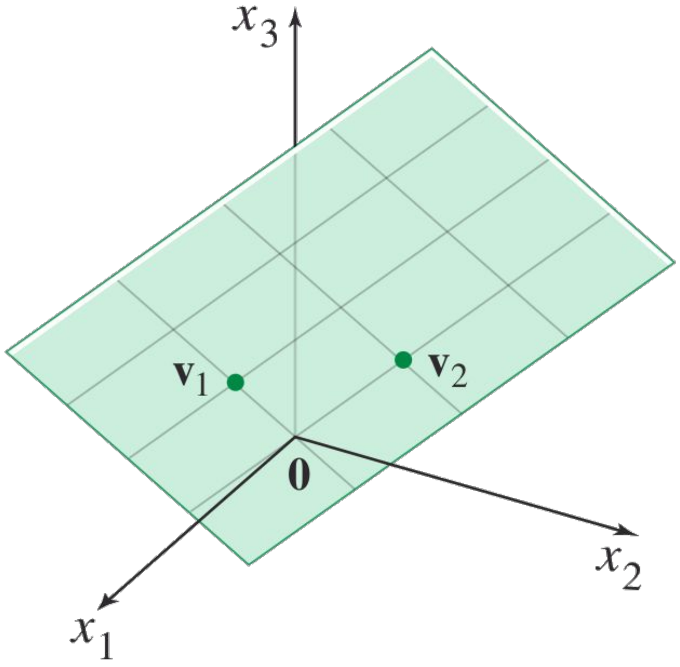
  - El vector $\mathbf{0}$ está en H porque $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$
  - Para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en H, la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en H
  - Para cualquier escalar c, el vector $c\,\mathbf{u}$ está en H porque:

$$c\mathbf{u} = c(s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2)$$
$$c\mathbf{u} = (cs_1)\mathbf{v}_1 + (cs_2)\mathbf{v}_2$$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

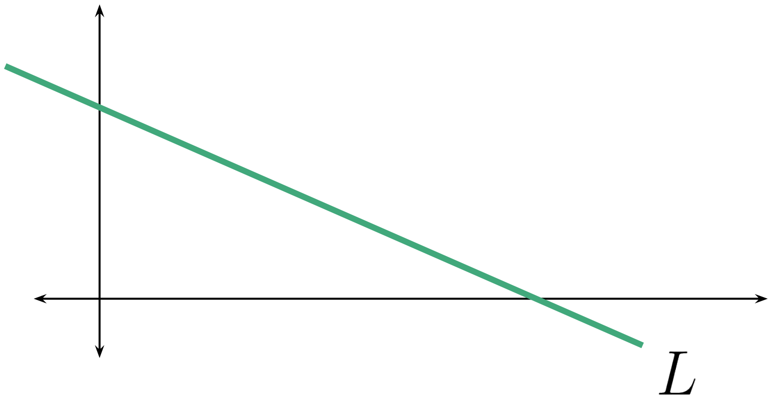
- Ejemplo:

$$H = \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$



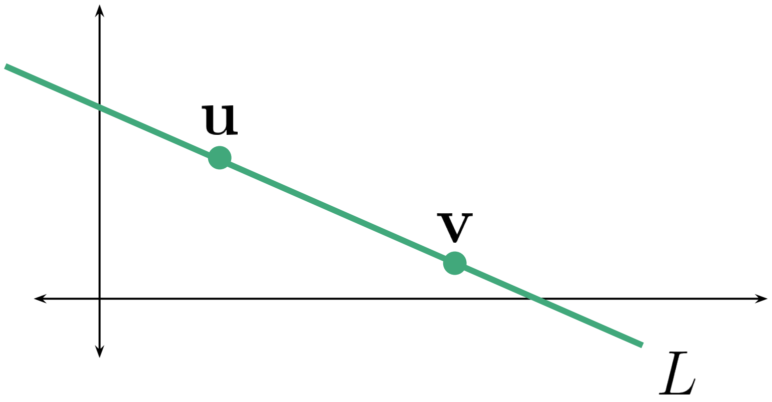
Subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Ejemplo:



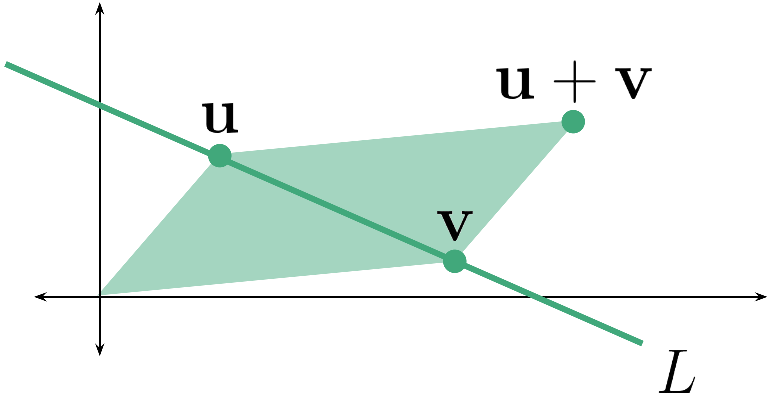
Subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Ejemplo:



Subespacios de $\mathbb{R}^n$

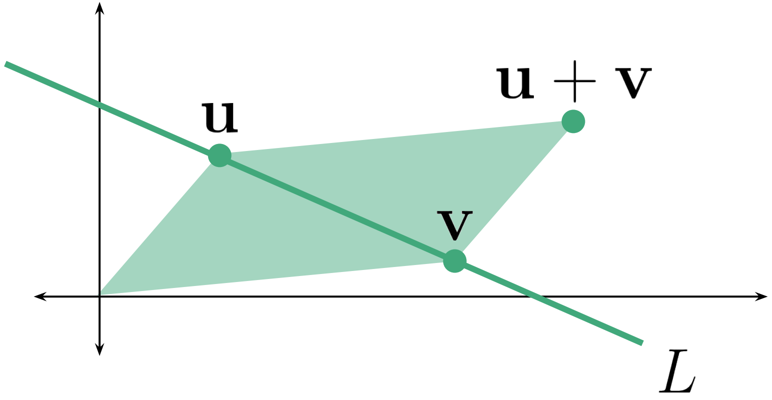
- Ejemplo:



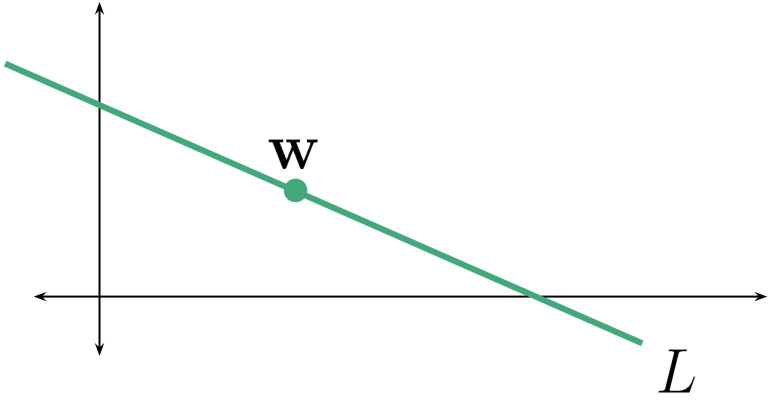
La suma no está sobre L

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Ejemplo:

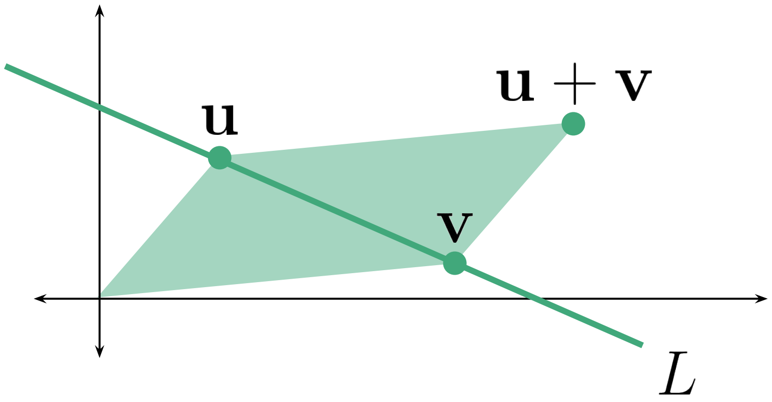


La suma no está sobre L

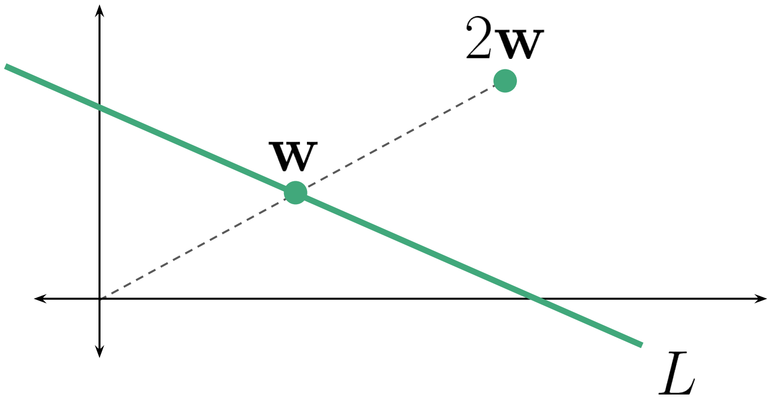


Subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Ejemplo:



La suma no está sobre L



$2\mathbf{w}$ no está sobre L

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

- Los $\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ son subespacios generados por $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$.
- $\mathbb{R}^n$ es un subespacio (cumple con las tres condiciones requeridas por la definición).
- El vector $\mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$ es un subespacio y se conoce como **subespacio cero**.

Espacio de columnas

- El **espacio de columnas** de una matriz A es el conjunto $\mathrm{Col}\ A$ de todas las combinaciones lineales de sus columnas.

$$A = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

$$\mathrm{Col}\ \ A = \mathrm{Gen}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

Espacio de columnas

- El **espacio de columnas** de una matriz A es el conjunto $\mathrm{Col}\ A$ de todas las combinaciones lineales de sus columnas.

$$A = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

$$\mathrm{Col}\ \ A = \mathrm{Gen}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

- El espacio columna de una matriz de m x n es un subespacio de $\mathbb{R}^m$

Espacio de columnas

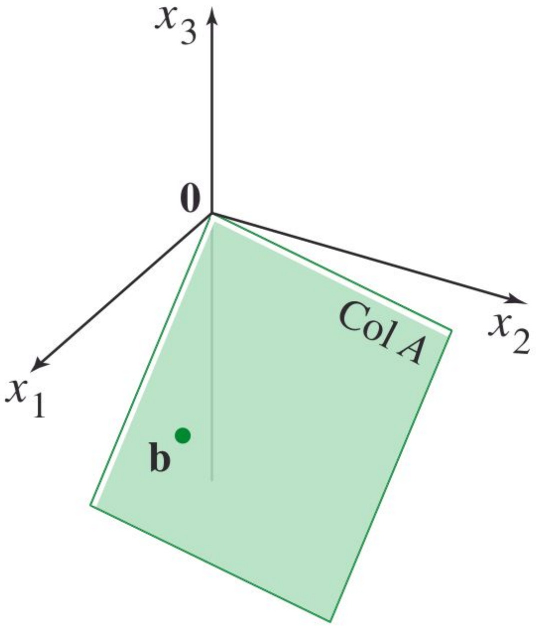
- Determinar si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Espacio de columnas

- Determinar si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A

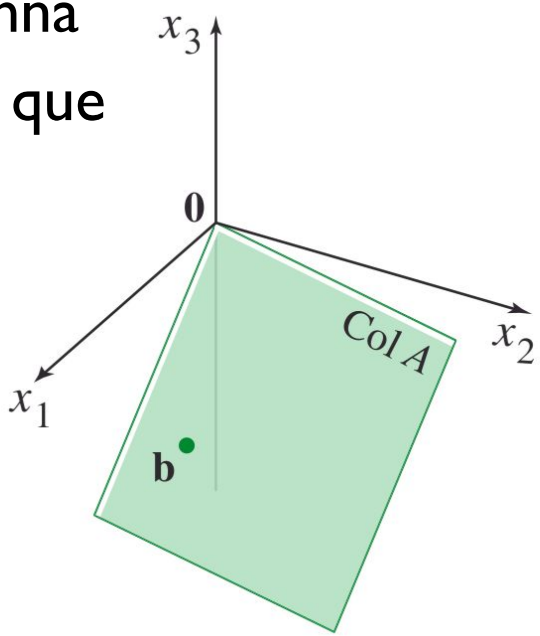
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$



Espacio de columnas

- Cuando un sistema de ecuaciones lineales está escrito en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, el espacio columna $\mathrm{Col}\ A$ es el conjunto de todas las $\mathbf{b}$ para las que el sistema tiene una solución

- $\mathrm{Col}\ A$ es igual a $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ sólo cuando las columnas de A generan $\mathbb{R}^m$, sino es solo una parte de $\mathbb{R}^m$



Espacio Nulo

- El **espacio nulo** de una matriz A es el conjunto $\mathrm{Nul}\,A$ de todas las soluciones posibles para la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Espacio Nulo

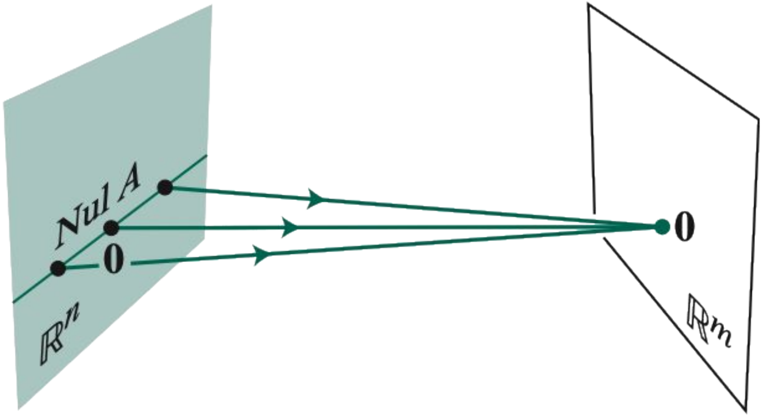
- El **espacio nulo** de una matriz A es el conjunto $\mathrm{Nul}\ A$ de todas las soluciones posibles para la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- El espacio nulo de una matriz A de m x n es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

Espacio Nulo

- El **espacio nulo** de una matriz A es el conjunto $\mathrm{Nul}\ A$ de todas las soluciones posibles para la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$



Base para un subespacio

- Por lo general, un subespacio contiene un número infinito de vectores.
- Para muchos problemas, es deseable trabajar con un **conjunto finito y pequeño de vectores**.
- Se puede demostrar que, el conjunto generador más chico posible tiene que ser **linealmente independiente**.

Base para un subespacio

- Por lo general, un subespacio contiene un número infinito de vectores.
- Para muchos problemas, es deseable trabajar con un **conjunto finito y pequeño de vectores**.
- Se puede demostrar que, el conjunto generador más chico posible tiene que ser **linealmente independiente**.

Una **base** de un subespacio H de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto linealmente independiente en H que genera H

Base para un subespacio

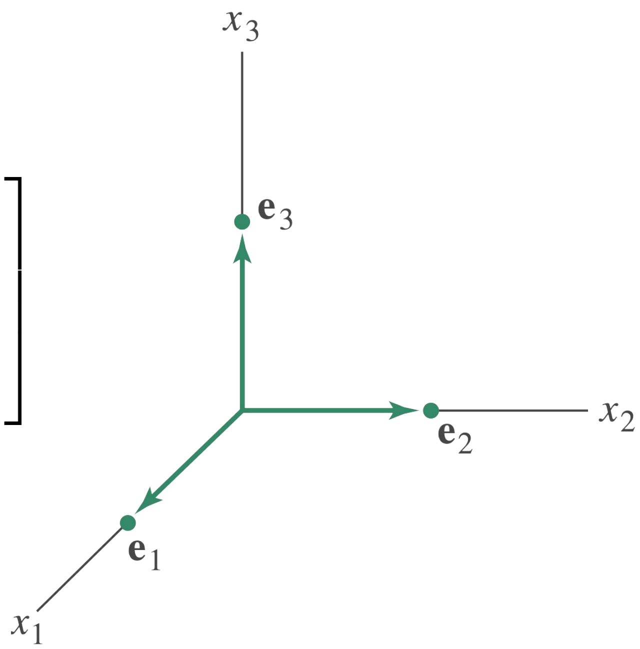
- Base estándar para $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Base para un subespacio

- Base estándar para $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Base para un subespacio

- Encontrar una base para el espacio nulo de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Base para un subespacio

- Encontrar una base para el espacio columna de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Base para un subespacio

- Encontrar una base para el espacio columna de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Las columnas pivote de una matriz A forman una base para el espacio columna de A.

Sistemas de Coordenadas

Sistemas de Coordenadas

- Razón principal para seleccionar una base para un subespacio H: cada vector en H se puede escribir de **tan solo una** manera como combinación lineal de los vectores de la base.

Sistemas de Coordenadas

- Razón principal para seleccionar una base para un subespacio H: cada vector en H se puede escribir de **tan solo una** manera como combinación lineal de los vectores de la base.

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p \quad \mathbf{x} = d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_p\mathbf{b}_p$$

Sistemas de Coordenadas

- Razón principal para seleccionar una base para un subespacio H: cada vector en H se puede escribir de **tan solo una** manera como combinación lineal de los vectores de la base.

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p \quad \mathbf{x} = d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_p\mathbf{b}_p$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = (c_1 - d_1)\,\mathbf{b}_1 + \cdots + \left(c_p - d_p\right)\mathbf{b}_p$$

Sistemas de Coordenadas

- Especificar una base $\mathcal{B}$ para un espacio vectorial V es imponer un **sistema de coordenadas** en V

Sistemas de Coordenadas

- Especificar una base $\mathcal{B}$ para un espacio vectorial V es imponer un **sistema de coordenadas** en V

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

Sistemas de Coordenadas

- Especificar una base $\mathscr{B}$ para un espacio vectorial V es imponer un **sistema de coordenadas** en V

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Sistemas de Coordenadas

- Especificar una base $\mathcal{B}$ para un espacio vectorial V es imponer un **sistema de coordenadas** en V

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

"B-coordenadas" $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

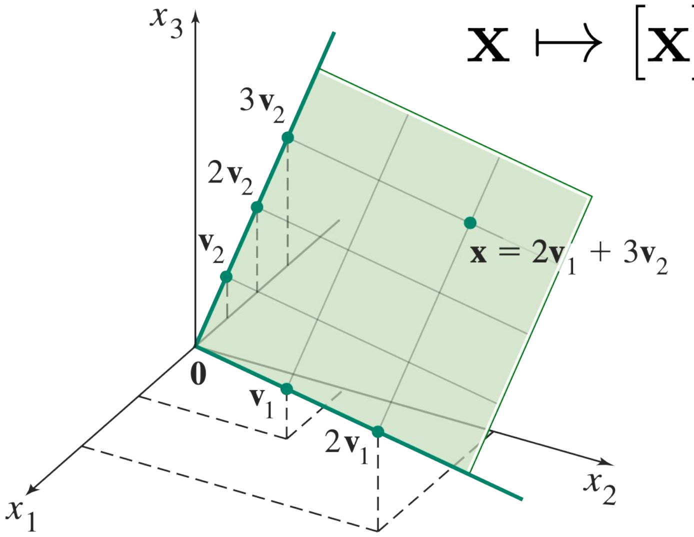
Sistemas de Coordenadas

- Especificar una base $\mathcal{B}$ para un espacio vectorial V es imponer un **sistema de coordenadas** en V

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$



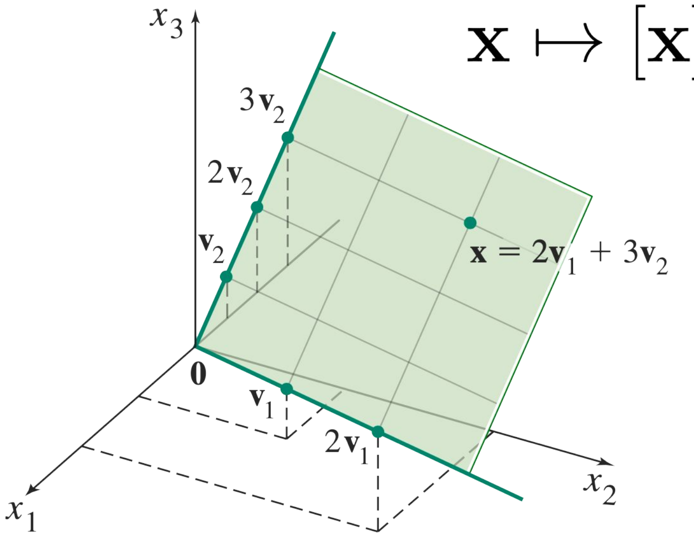
Sistemas de Coordenadas

- Especificar una base $\mathcal{B}$ para un espacio vectorial V es imponer un **sistema de coordenadas** en V

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$



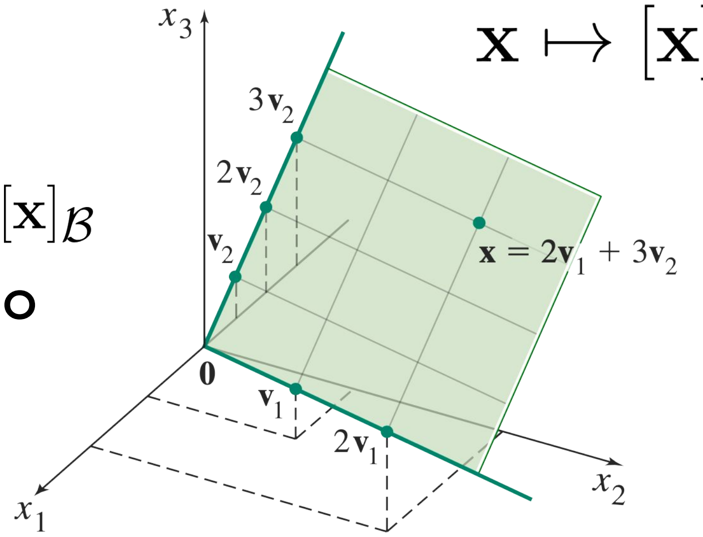
Isomorfismo subespacio H y $\mathbb{R}^2$

Sistemas de Coordenadas

- Especificar una base $\mathcal{B}$ para un espacio vectorial V es imponer un **sistema de coordenadas** en V

- Si $\mathcal{B}$ es una base con p vectores para H, entonces el mapeo $\mathrm{x} \mapsto [\mathrm{x}]_{\mathcal{B}}$ es una correspondencia uno a uno que permite a H **verse** y **actuar** como $\mathbb{R}^{\mathrm{p}}$

$$\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$



Isomorfismo subespacio H y $\mathbb{R}^2$

Sistemas de Coordenadas

- Ejemplo:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \text{ para } \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sistemas de Coordenadas

- Ejemplo:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \text{ para } \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Sistemas de Coordenadas

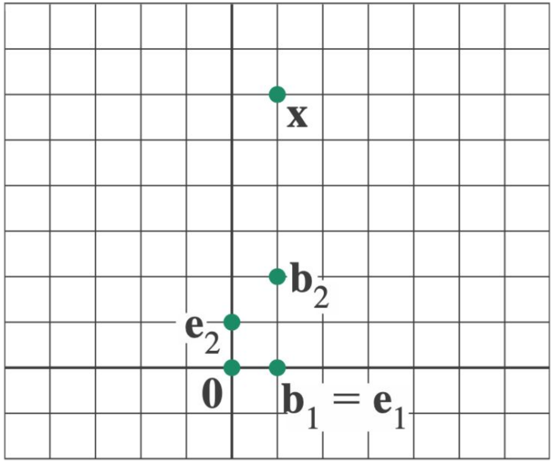
- Ejemplo:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \text{ para } \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

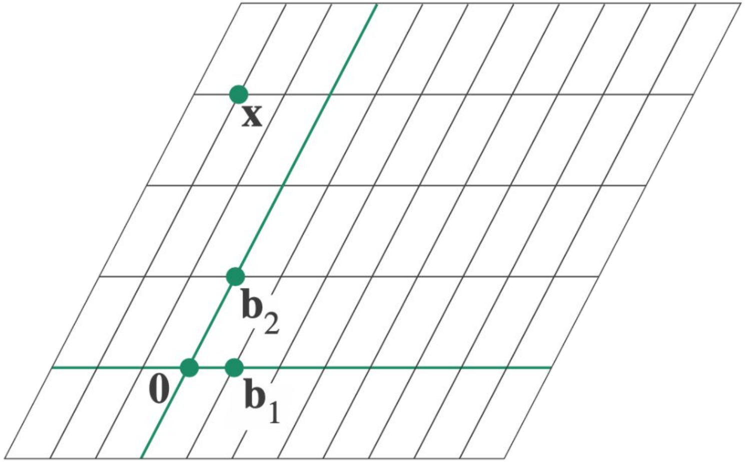
$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$$

Sistemas de Coordenadas

- Especificar una base $\mathcal{B}$ para un espacio vectorial V es imponer un **sistema de coordenadas** en V.



$\mathcal{E} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$



$\mathcal{B} = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2\}$

Sistemas de Coordenadas

- Ejercicio: encontrar las $\mathcal{B}$-coordenadas de una $\mathbf{x}$ dada para una base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$$

Determinar las coordenadas de $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$

Sistemas de Coordenadas

- Ejercicio: encontrar las $\mathcal{B}$-coordenadas de una $\mathbf{x}$ dada para una base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}^n$

$$\underbrace{c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_1} + \underbrace{c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

Sistemas de Coordenadas

- Ejercicio: encontrar las $\mathcal{B}$-coordenadas de una $\mathbf{x}$ dada para una base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriz de cambio de coordenadas $P_{\mathcal{B}}$

Sistemas de Coordenadas

- Ejercicio: encontrar las $\mathcal{B}$-coordenadas de una $\mathbf{x}$ dada para una base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}^n$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sistemas de Coordenadas

- Matriz de cambio de coordenadas:

$$P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n]$$

$$\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Sistemas de Coordenadas

<NOTEBOOK>

- Matriz de cambio de coordenadas:

$$P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n]$$

$$\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

$$P_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Cambio de base

Cambio de base

- En algunas aplicaciones, se describe un problema usando una base $\mathcal{B}$, pero la solución se facilita si cambiamos a una nueva base $\mathcal{C}$

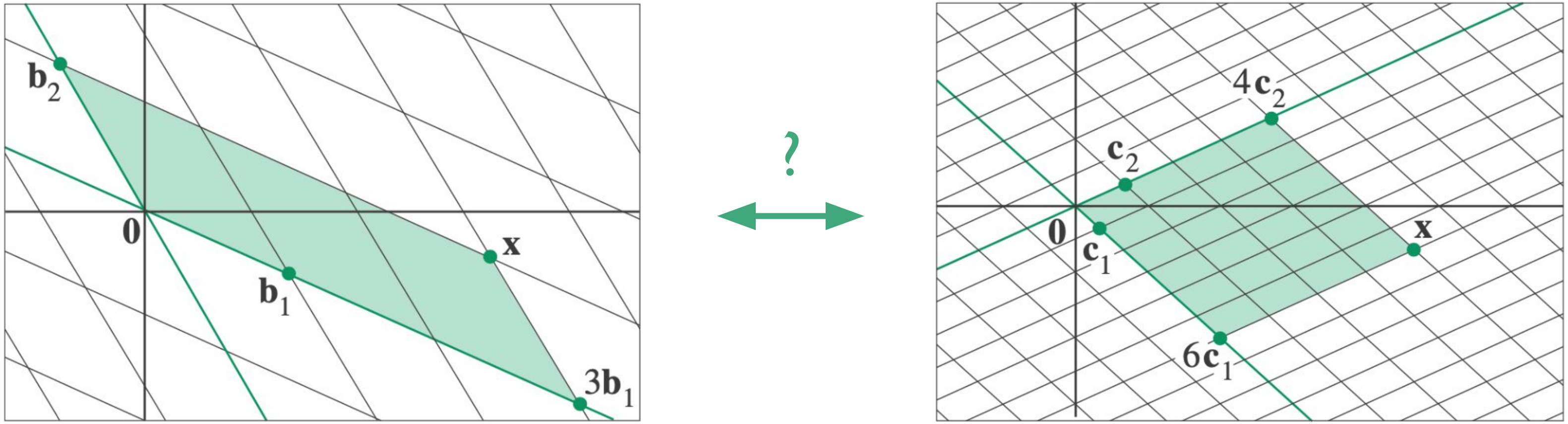
Cambio de base

- En algunas aplicaciones, se describe un problema usando una base $\mathcal{B}$, pero la solución se facilita si cambiamos a una nueva base $\mathcal{C}$
- A cada vector en $\mathcal{B}$ le asignamos un nuevo vector de $\mathcal{C}$-coordenadas.

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Cambio de base

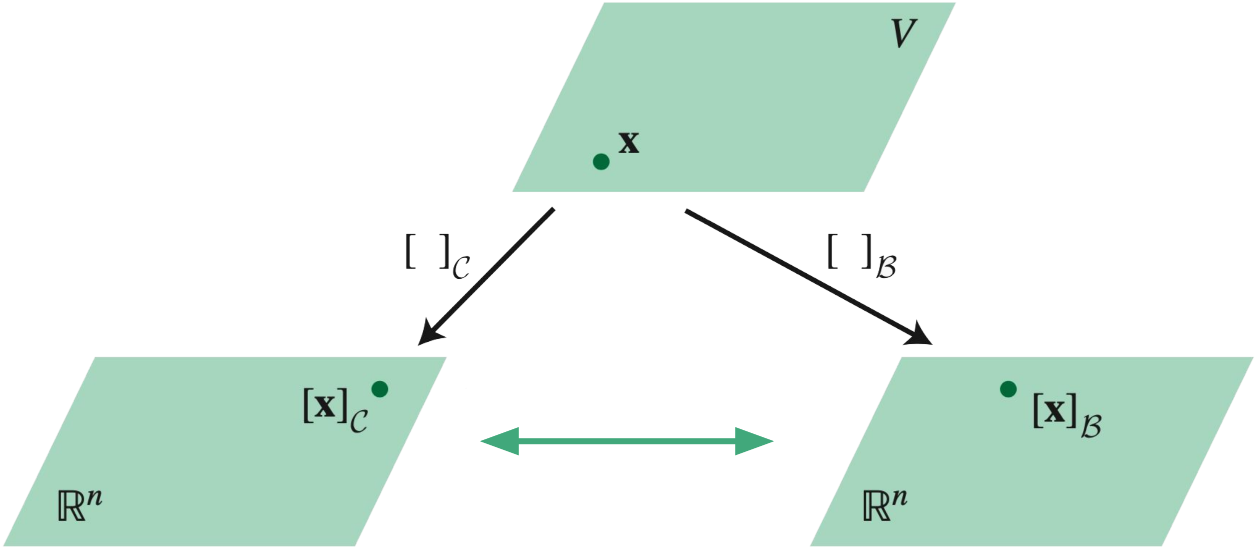
- **Problema:** encontrar la conexión entre los dos sistemas de coordenadas:



$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \qquad \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$$

Cambio de base

- **Problema:** encontrar la conexión entre los dos sistemas de coordenadas:



Cambio de base - Ejemplo

- Dados:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \qquad \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= 4\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= -6\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \end{aligned}$$

Si $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, encontrar $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$

Cambio de base - Ejemplo

- Dados:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

Cambio de base - Ejemplo

- Dados:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \\ [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = [3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \end{array}$$

Cambio de base - Ejemplo

- Dados:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} \mathbf{x} &= 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \\ [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} &= 3[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

Cambio de base - Ejemplo

- Dados:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = 3[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} & [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cambio de base - Ejemplo

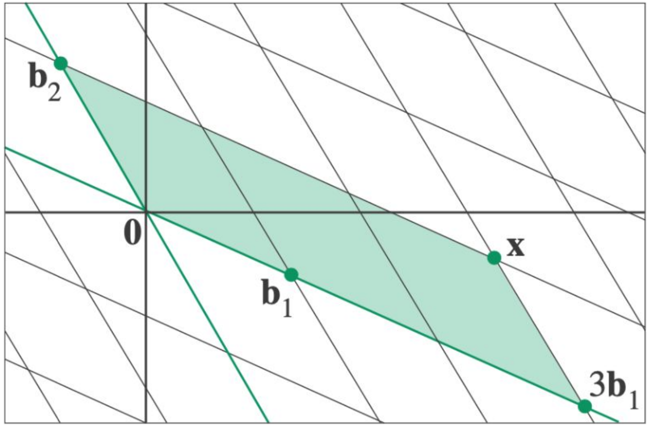
- Dados:

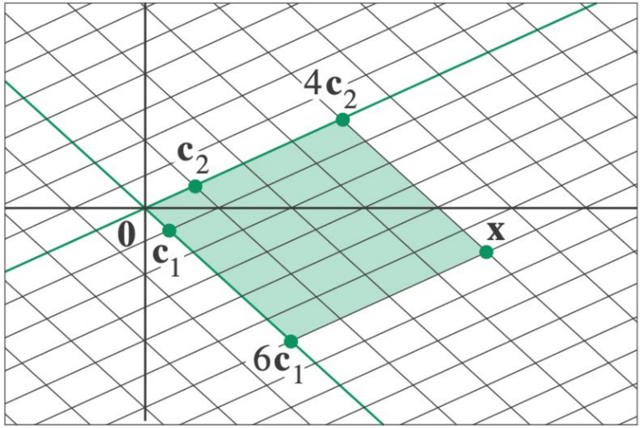
$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Cambio de base

- Problema: encontrar la conexión entre los dos sistemas de coordenadas:





$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \qquad \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$$

Cambio de base

- En general, si tenemos dos bases de un espacio vectorial V

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\} \qquad \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$$

Existe una única matriz P de n x n tal que:

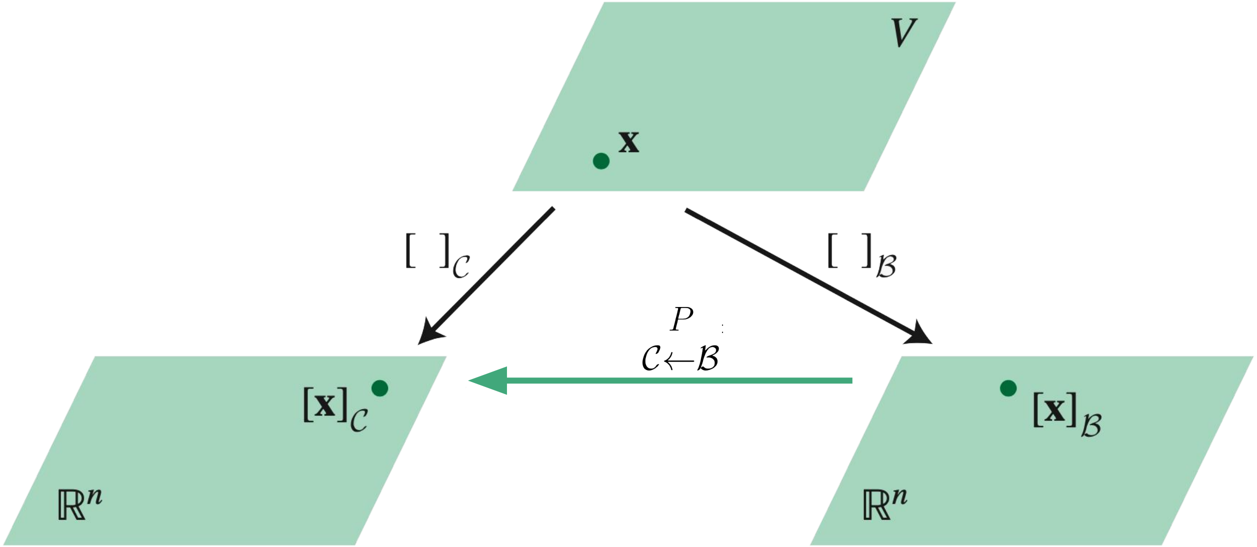
$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

y las columnas de P son los vectores en $\mathcal{C}$-coordenadas de la base de $\mathcal{B}$:

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \;]$$

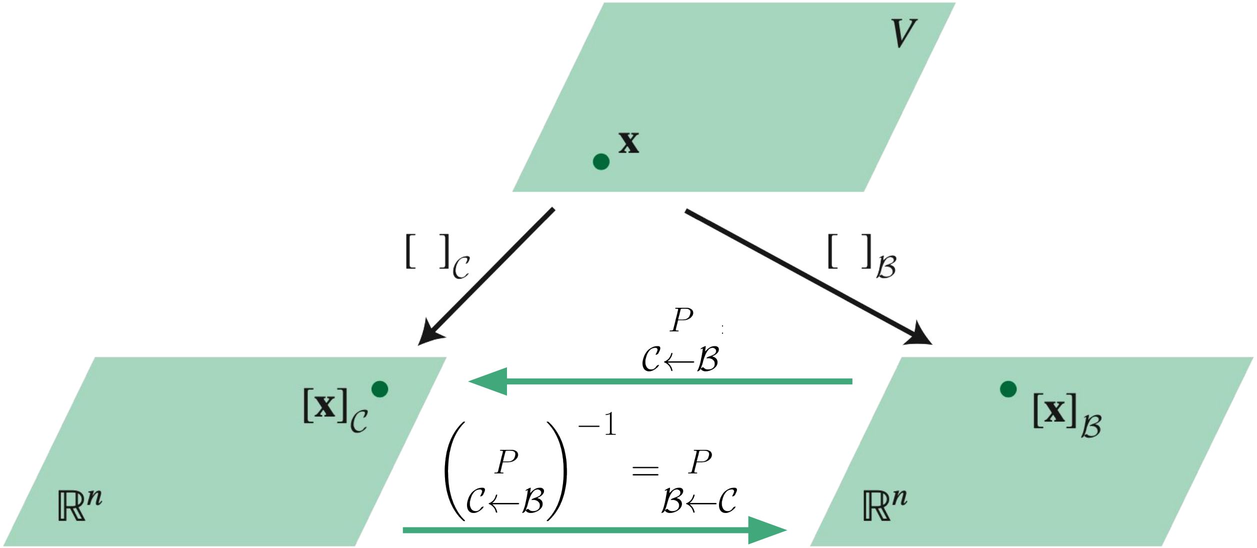
Cambio de base

- Problema: encontrar la conexión entre los dos sistemas de coordenadas:



Cambio de base

- Problema: encontrar la conexión entre los dos sistemas de coordenadas:



Cambio de base

<NOTEBOOK>

- Encontrar la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \qquad \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$$

Cambio de base

- Encontrar la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = [[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C} \quad [\mathbf{b}_2]_\mathcal{C}] = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

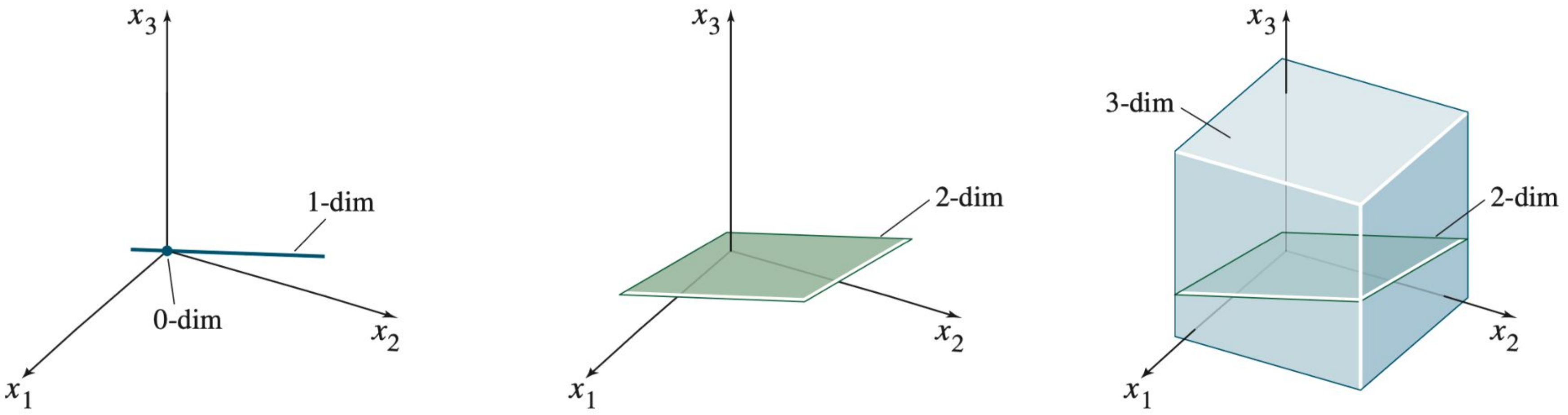
Dimensión y Rango

Definiciones de Dimensión y Rango

- La **dimensión** de un subespacio H ($\dim H$) es el número de vectores en cualquier base para H. La dimensión del subespacio $\{\mathbf{0}\}$ es cero por definición.

Dimensiones de los subespacios en $\mathbb{R}^3$

- Podemos clasificar los subespacios por dimensión:



Definiciones de Dimensión y Rango

- La **dimensión** de un subespacio H ($\dim H$) es el número de vectores en cualquier base para H. La dimensión del subespacio $\{\mathbf{0}\}$ es cero por definición.

- El **rango** de una matriz A ($\text{rango } A$), es la dimensión del espacio columna de A.

Determinar el Rango de A

- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

Determinar el Rango de A

- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar el Rango de A

- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rango $A = 3$ (# pivotes)

Determinar el Rango de A

- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rango $A = 3$ (# pivotes)

dim Nul $A = 2$ (# var. libres)

Dimensión y Rango

- Si una matriz tiene n columnas, entonces:

$$\mathrm{rango}A + \dim\ \mathrm{Nul}A = n$$