Métodos Computacionales

Clase III: Álgebra de Matrices

Operaciones de Matrices

Suma de matrices

- Extensión natural de la aritmética vectorial:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suma de matrices

- Extensión natural de la aritmética vectorial:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

<NOTEBOOK>

Suma de matrices

- Extensión natural de la aritmética vectorial:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A + C = \,?$$ no está definida

Múltiplo escalar

- Extensión natural de la aritmética vectorial:

$$2B = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

<NOTEBOOK 1>

<NOTEBOOK 2>

Múltiplo escalar

- Extensión natural de la aritmética vectorial:

$$2B = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

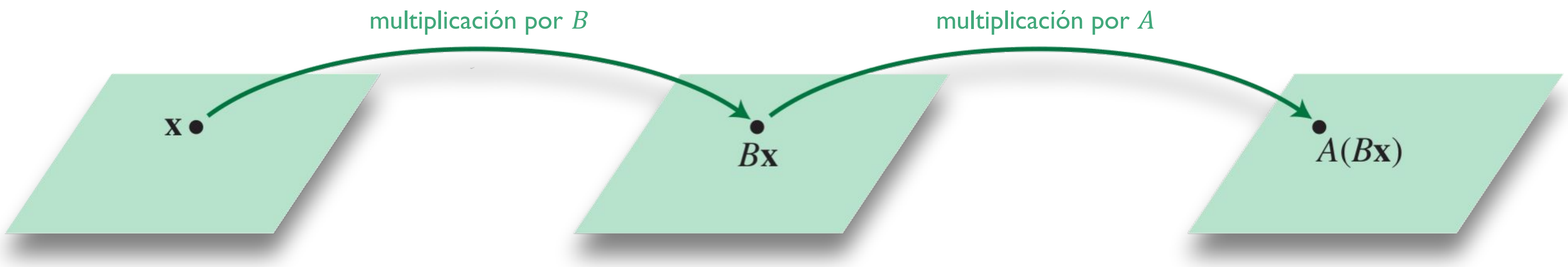
$$A - 2B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -7 & -7 & -12 \end{bmatrix}$$

Propiedades

- Sean A, B y C matrices del mismo tamaño, y sean r y s escalares:
  - $A+B=B+A$
  - $(A+B)+C=A+(B+C)$
  - $A+0=A$
  - $r(A+B)=rA+rB$
  - $(r+s)A=rA+sA$
  - $r(sA)=(rs)A$

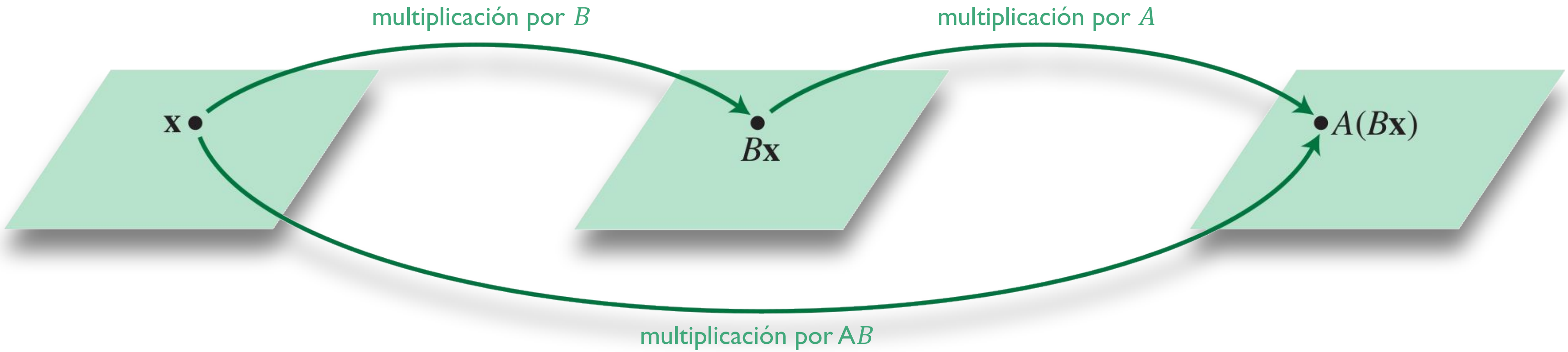
Multiplicación de matrices

- Multiplicación matriz vector:



Multiplicación de matrices

- Composición de mapeos en una sola matriz AB:



$$A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$$

Multiplicación de matrices

- Composición de mapeos en una sola matriz AB:

$$\underset{3\times 5}{\overset{A}{\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}}}\ \underset{5\times 2}{\overset{B}{\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}}} = \underset{3\times 2}{\overset{AB}{\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}}}$$

correspondencia

tamaño matriz AB

Multiplicación de matrices

- Si el producto entre AB está definido, entonces la entrada de la fila i y la columna j de AB es la suma de los productos de las entradas correspondientes de la fila i de A y la columna j de B:

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Multiplicación de matrices

- Si A es una matriz de $m \times n$, y si B es una matriz de $n \times p$ con columnas $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$, entonces el producto AB es la matriz de $m \times p$ cuyas columnas son $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_p$.

$$AB = A\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p\end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

<NOTEBOOK>

- Calcular AB :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 6 & -8 & -7 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Propiedades

- Sea A una matriz de m x n; B, C matrices con tamaños compatibles con la definición de sumas y productos indicados, y r un escalar:
  - $A(BC) = (AB)C$
  - $A(B + C) = AB + AC$
  - $(B + C)A = BA + CA$
  - $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
  - $I_mA = A = AI_n$

¡Advertencias!

- En general $AB \neq BA$
- Si $AB = AC$, en general no vale $B = C$ (cancelación)
- Si $AB = 0$, no podemos concluir que $A = 0$ o $B = 0$.

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{bmatrix}$$

Potencias de una matriz

- Si A es una matriz de $n \times n$ y k es un entero positivo, entonces A^k denota el producto de k copias de A:

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ veces}}$$

Traspuesta de una matriz

- Si A es una matriz de m x n, la transpuesta de A es la matriz de n x m, que se denota con A^T, cuyas columnas se forman a partir de las filas correspondientes de A:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Traspuesta de una matriz

- Si A es una matriz de m x n, la transpuesta de A es la matriz de n x m, que se denota con A^T, cuyas columnas se forman a partir de las filas correspondientes de A:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \\ 1 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Propiedades

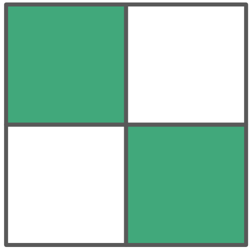
- Sean A y B dos matrices de tamaños adecuados para las siguientes sumas y productos, y r un escalar, entonces:

  - $(A^T)^T = A$
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(rA)^T = rA^T$
  - $(AB)^T = B^T A^T$

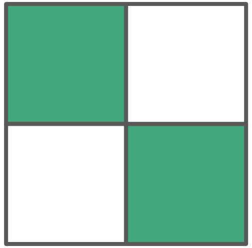
Aplicación en IA: reconocimiento de patrones

- Un área importante de la IA es identificar si un objeto en una imagen coincide con un determinado patrón: un número, una huella digital o una cara.
- Podemos buscar patrones usando multiplicaciones y transpuestas de una matriz.

Aplicación en IA: reconocimiento de patrones



Aplicación en IA: reconocimiento de patrones



$$\longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicación en IA: reconocimiento de patrones

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^T M \mathbf{v} = 0$$

Aplicación en IA: reconocimiento de patrones

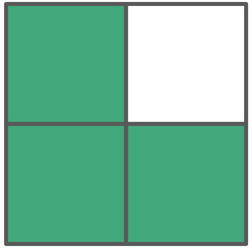
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^T M \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} \neq 0$$

Aplicación en IA: reconocimiento de patrones

- Por ejemplo:



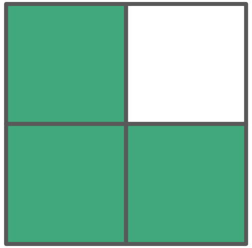
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 1$$
$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 3$$

No es el patrón

Aplicación en IA: reconocimiento de patrones

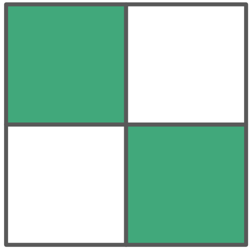
- Por ejemplo:



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 1$$
$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 3$$

No es el patrón



$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}^T M \mathbf{w} = 0$$
$$\mathbf{w}^T \mathbf{w} = 2$$

Es el patrón!!

Aplicación en IA: reconocimiento de patrones

- ¿Qué patrones de 2x2 reconocen las siguientes matrices?

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Matriz Inversa

- Inverso multiplicativo de un número:

$$5^{-1} \cdot 5 = 1 \qquad\qquad 5 \cdot 5^{-1} = 1$$

Matriz Inversa

- Inverso multiplicativo de un número:

$$5^{-1} \cdot 5 = 1 \qquad 5 \cdot 5^{-1} = 1$$

- Inverso multiplicativo de una matriz (cuadrada):

$$A^{-1}A = I \qquad AA^{-1} = I$$

Matriz Inversa

- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

- Ejemplo:

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa 2 x 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa 2 x 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa 2 x 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad - bc}_{\text{determinante}}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ejemplo

- Resolver el siguiente sistema a partir de la inversa de su matriz:

$$3x_1 + 4x_2 = 3$$
$$5x_1 + 6x_2 = 7$$

Ejemplo

- Resolver el siguiente sistema a partir de la inversa de su matriz:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 3 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 7 \end{aligned} \longrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Ejemplo

- Resolver el siguiente sistema a partir de la inversa de su matriz:

$$3x_1 + 4x_2 = 3$$
$$5x_1 + 6x_2 = 7$$

$\rightarrow$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Ejemplo

- Resolver el siguiente sistema a partir de la inversa de su matriz:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Propiedades

- Si una matriz A es **invertible**, entonces A^{-1} es invertible:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Propiedades

- Si una matriz A es **invertible**, entonces A^{-1} es invertible:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- Si A y B son matrices invertibles, entonces también lo es AB, y la inversa de AB es el producto de las inversas de AB en el orden opuesto:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Propiedades

- Si A es una matriz invertible, también lo es su traspuesta, y la inversa de la traspuesta es la traspuesta de la inversa:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Matrices elementales

- Una matriz elemental es aquella que se obtiene al realizar una única operación elemental por fila sobre una matriz identidad:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrices elementales

- Multiplicar (a izquierda) las matrices elementales para averiguar qué operación por fila se realizó en cada caso:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Matrices elementales

- Si realizamos una operación por fila con una matriz A de m x n, la matriz resultante se puede escribir como EA, donde la matriz E de m x m se crea al realizar **la misma operación** por fila sobre I_m:

$$E_1A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-4a & h-4b & i-4c \end{bmatrix}$$

Matrices elementales

- Como las operaciones por fila son reversibles, las matrices elementales **son invertibles**.
- Por lo tanto, existe una matriz elemental F tal que $FE = I$.

Matrices elementales

- Como las operaciones por fila son reversibles, las matrices elementales **son invertibles**.
- Por lo tanto, existe una matriz elemental F tal que $FE = I$.
- Ejemplo: encontrar la inversa de E_1 :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices elementales

- Como las operaciones por fila son reversibles, las matrices elementales **son invertibles**.
- Por lo tanto, existe una matriz elemental F tal que $FE = I$.
- Ejemplo: encontrar la inversa de E_1 :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ +4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz de $n \times n$

- Una matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si A es equivalente por filas a I_n, y en este caso, cualquier secuencia de operaciones elementales por fila que reduzca A a I_n también transforma I_n en A^{-1}.

Un algoritmo para A^{-1}

- Si colocamos A e I lado a lado para formar una matriz aumentada $[A\ I]$, las operaciones por fila en esta matriz producen operaciones idénticas sobre A y sobre I.

- Las mismas operaciones por fila que transforman a A en I_n, transforman a I_n en A^{-1}, o bien, la matriz A no es invertible.

Un algoritmo para A^{-1}

- Algoritmo:
  - Reducir por filas la matriz aumentada $[A \; I]$
  - Si A es equivalente por filas a I, entonces $[A \; I]$ es equivalente por filas a $[I \;\; A^{-1}]$
  - Sino, A no tiene inversa.

Un algoritmo para A^{-1}

- Encontrar, si existe, la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

<NOTEBOOK>

Un algoritmo para A^{-1}

- Encontrar, si existe, la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Otro punto de vista sobre A^{-1}

- Si separamos las columnas de la matriz identidad:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$$

El algoritmo anterior puede ser visto como la resolución simultánea de n sistemas de ecuaciones, donde cada solución es una de las columnas de A^{-1}.

Teorema de la matriz invertible I

- Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes. Es decir, para una A dada, las afirmaciones son **todas verdaderas o todas falsas**.
  - A es una matriz invertible.
  - A es equivalente por filas a la matriz identidad de $n \times n$.
  - A tiene n pivotes.
  - La ecuación $A\mathbf{x} = 0$ tiene solo la solución trivial.

Teorema de la matriz invertible II

- Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes. Es decir, para una A dada, las afirmaciones son **todas verdaderas o todas falsas**.
  - …
  - Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente.
  - La transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es uno-a-uno.
  - La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una sola solución para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$.
  - Las columnas de A generan $\mathbb{R}^n$.

Teorema de la matriz invertible III

- Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes. Es decir, para una A dada, las afirmaciones son **todas verdaderas o todas falsas**.
  - …
  - La transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.
  - Existe una matriz $n \times n$ C tal que $CA = I$.
  - Existe una matriz $n \times n$ D tal que $AD = I$.
  - A^T es una matriz invertible.

Matrices Particionadas

Matriz por bloques

- Idea simple:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Matriz por bloques

- Idea simple:

$$A = \left[\begin{array}{rrr|rr|r} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ \hline -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right]$$

Matriz por bloques

- Idea simple:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -8 & -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}$$

Operaciones en matrices por bloques

- Suma: se suma cada bloque (deben estar particionadas de exactamente la misma manera los operandos).
- Multiplicación por un escalar: se multiplica cada bloque.
- Multiplicación de matrices: ¿?

Operaciones en matrices por bloques

- Suma: se suma cada bloque (deben estar particionadas de exactamente la misma manera los operandos).
- Multiplicación por un escalar: se multiplica cada bloque.
- Multiplicación de matrices: ¿?

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \left[\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ \hline -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices por bloques

$$A = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array}\right]}_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ \hline -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array}\right]}_{5 \times 2} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices por bloques

- Particiones **conformadas** para la multiplicación por bloques:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \left[\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ \hline -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

5 columnas ⟶ 3,2 columnas

5 filas ⟶ 3,2 filas

Multiplicación de matrices por bloques

- Particiones **conformadas** para la multiplicación por bloques:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} -5 & 4 \\ -6 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicación de matrices por bloques

- Además, vale que:

$$AB = \begin{bmatrix} \mathrm{col}_1(A) & \mathrm{col}_2(A) & \cdots & \mathrm{col}_n(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(B) \\ \mathrm{row}_2(B) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_n(B) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{col}_1(A)\,\mathrm{row}_1(B) + \cdots + \mathrm{col}_n(A)\,\mathrm{row}_n(B)$$

Operaciones en matrices por bloques

- Suma: se suma cada bloque (deben estar particionadas de exactamente la misma manera los operandos).
- Multiplicación por un escalar: se multiplica cada bloque.
- Multiplicación de matrices: siempre y cuando tengamos particiones conformadas para la multiplicación.

Operaciones en matrices por bloques

- Suma: se suma cada bloque (deben estar particionadas de exactamente la misma manera los operandos).
- Multiplicación por un escalar: se multiplica cada bloque.
- Multiplicación de matrices: siempre y cuando tengamos particiones conformadas para la multiplicación.
- Traspuesta: (en la práctica)
- Inversa: (en la práctica)