Métodos Computacionales

Clase Teórica Repaso

Primer Semestre 2025

Ejercicio 1. . Analizar las soluciones del sistema, y encontrar todos los valores de a y b para los cuales $(2, 0, -1)$ es la única solución del sistema.

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - bx_3 &= 3 \\ 2x_2 - 3x_3 &= 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Definir un proyector p tal que

(a) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Nu}(p) = \langle(-1, 2)\rangle$, $\mathrm{Im}(p) = \langle(-1, 1)\rangle$.

(b) $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Nu}(p) = \langle(1, 1, -2)\rangle$. ¿Es único?

(c) $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Nu}(p) = \langle(2, -1, 3)\rangle$,

$$\mathrm{Im}(p) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\right\}.$$

Interpretar geométricamente.

Ejercicio 3. Definir una t.l. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

(i) $Nu(T) \cap Im(T) = \langle(1, 1, 1, 1)\rangle$

(ii) $(1, 5, 1, 0) \in Im(T)$

(iii) $(3, 1, 2, 2) \notin Im(T) + Nu(T)$

Ejercicio 4. Sabiendo que :

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} a+b & c & d \\ e+f & g & h \\ i+j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ i & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix},$$

determinar el valor de la siguiente expresión, utilizando solamente las propiedades de los determinantes y explicando en cada paso que propiedad se utilizó:

$$\begin{vmatrix} y & 2y & y+2 \\ x & 2x+5 & x+2 \\ z & 2z+3 & z+2 \end{vmatrix}.$$

Ejercicio 5. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $b \in \mathbb{R}^{3\times1}$, $b \neq 0$. Se sabe que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $Ax = b$ y que $\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $Ax = 3b$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $Ax = b$.

Ejercicio 6. Sean $B = \{(1, 0, -1),\ (2, 2, 1),\ (1, -2, 1)\}$ y $B' = \{(2, 1, 1),\ (1, 2, 0),\ \mathbf{v}\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Se sabe que el vector $(4, 6, 0)$ tiene las mismas coordenadas en ambas bases. Hallar $\mathbf{v}$.

Ejercicio 7. Sea $C = E_2E_1E_3B$, donde E_1, E_2 y E_3 son matrices elementales. Explicar por qué C es equivalente a B por filas.

Ejercicio 8. Sea A una matriz $n \times n$ tal que la suma de las entradas de cada fila es cero. Explica por qué se puede concluir que A es singular.