Métodos Computacionales
Ejercicios Complementarios
Primer Semestre 2025

Ejercicio 1. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a los siguientes conjuntos de vectores para obtener una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ (o del subespacio generado por los vectores dados, si no son linealmente independientes).

i) Sean los vectores:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) Sean los vectores:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iii) Sean los vectores:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Luego de realizar el ejercicio a mano, utilicen esta plantilla de Colab para verificar sus respuestas y observar cómo es la base generada mediante el proceso de Gram-Schmidt.

Ejercicio 2. Sean los vectores en $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Verificá que el conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ es linealmente independiente.

b) Usá el proceso de Gram-Schmidt para construir una base ortogonal para el subespacio generado por esos vectores.

Ejercicio 3. Dado el conjunto de vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Aplicá el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$.

b) Dado el vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, escribilo en la base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$, es decir, encontrá sus coordenadas en esa base.

Ejercicio 4. Sea $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y sea el subespacio V generado por los vectores:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Encontrá una base ortonormal de V usando Gram-Schmidt.

b) Calculá la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre V.

c) Calculá la distancia de $\mathbf{u}$ al subespacio V.

Ejercicio 5. Sean:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usá el proceso de Gram-Schmidt para construir un par ortonormal $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ a partir de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. Luego:

a) Expresá $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ como combinaciones lineales de $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$.

b) Encontrá la matriz triangular superior R tal que $A = QR$.

Ejercicio 6. Dado el sistema sobredeterminado:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = 0 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

a) Expresá el sistema en forma matricial $Ax = b$.

b) Encontrá la solución por mínimos cuadrados.

c) Calculá el error cuadrático total.

Ejercicio 7. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Aplicá el proceso de Gram-Schmidt para obtener la factorización $A = QR$.

b) Verificá que Q tiene columnas ortonormales.

c) Usá la factorización para resolver el sistema $Ax = b$, con $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, en el sentido de mínimos cuadrados.

Ejercicio 8. Sea la función $f(x) = (x - 3)^2$.

a) Aplicá el método de descenso por gradiente para encontrar el mínimo comenzando en $x_0 = 0$.

b) Usá una tasa de aprendizaje $\alpha = 0{,}5$ y hacé 3 iteraciones.

c) Calculá el valor de la función en cada paso.

Ejercicio 9. Señalá cada enunciado como **verdadero** o **falso**. Justificá tus respuestas. En cada inciso, A representa una matriz $n \times n$.

a) Si A es diagonalizable ortogonalmente, entonces A es simétrica.

b) Si A es una matriz ortogonal, entonces A es simétrica.

c) Los ejes principales de una forma cuadrática $x^T Ax$ pueden ser las columnas de cualquier matriz P que diagonalice A.

d) Si todo coeficiente de una forma cuadrática es positivo, entonces la forma cuadrática es definida positiva.

e) Si $x^T Ax > 0$ para alguna x, entonces la forma cuadrática $x^T Ax$ es definida positiva.

f) El mayor valor para una forma cuadrática $x^T Ax$, con $\|x\| = 1$, es la mayor entrada en la diagonal de A.

g) El valor máximo de una forma cuadrática $x^T Ax$ definida positiva es el mayor valor propio de A.

h) Si P es una matriz ortogonal de $n \times n$, entonces el cambio de variable $x = Pu$ transforma $x^T Ax$ en una forma cuadrática cuya matriz es $P^{-1}AP$.

i) Si A es de $n \times n$, entonces A y $A^T A$ tienen los mismos valores singulares.