Métodos Computacionales

Clase VI: Valores y Vectores Propios

Valores y Vectores Propios

Factorización de matrices

- Expresar una matriz A como un producto de dos o más matrices:
  - Multiplicar matrices constituye una **síntesis** de datos.
  - Factorizar matrices es un **análisis** de datos.
- Existen múltiples factorizaciones de matrices:
  - LU
  - QR
  - SVD
  - Cholesky
  - Schur
  - **Valores/vectores propios**
  - …
  - …
  - …

Valores y Vectores Propios

- Las transformaciones del tipo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ pueden mover los vectores en direcciones muy diversas.

Valores y Vectores Propios

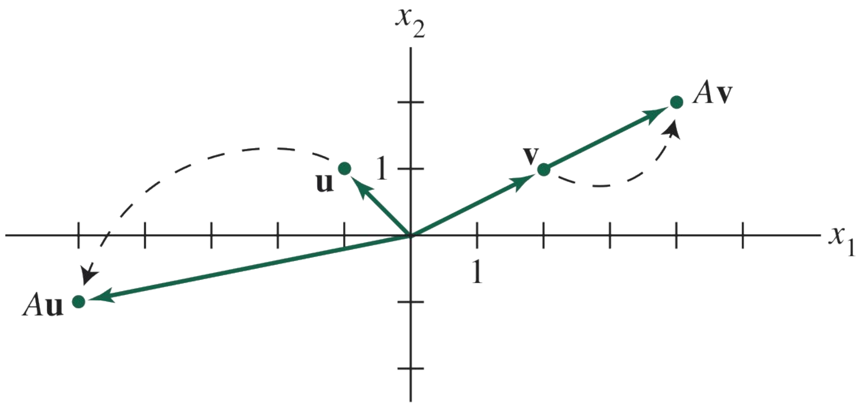
- Las transformaciones del tipo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ pueden mover los vectores en direcciones muy diversas.
- A veces sucede que hay vectores sobre los cuales la acción de A es "**simple**":

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

- Las transformaciones del tipo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ pueden mover los vectores en direcciones muy diversas.
- A veces sucede que hay vectores sobre los cuales la acción de A es "**simple**":

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Definición: Vector Propio y Valor Propio

- Un **vector propio** de una matriz A de n x n es un vector $\mathbf{x}$ distinto de cero tal que:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

para algún escalar λ.

Definición: Vector Propio y Valor Propio

- Un **vector propio** de una matriz A de n x n es un vector $\mathbf{x}$ distinto de cero tal que:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

  para algún escalar λ.

- El escalar λ es un **valor propio** de A si existe una solución (no trivial) de $A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$, tal que $\mathbf{x}$ es el vector propio de λ.

Definición: Vector Propio y Valor Propio

- **Propiedad:** si $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$, son vectores propios que corresponden a distintos valores propios $\lambda_1, ..., \lambda_r$ de una matriz de n x n, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r\}$ es **linealmente independiente**.

Valores y Vectores Propios

- Decidir si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

- Decidir si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4\mathbf{u}$$

Valores y Vectores Propios

- Decidir si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de A:

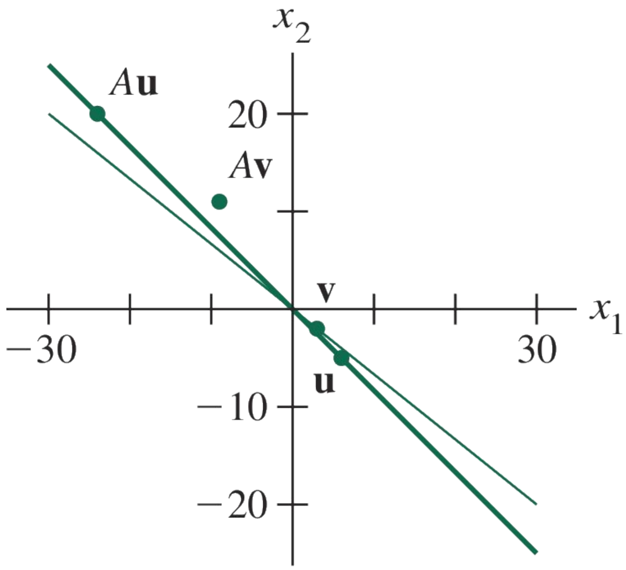
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

- Decidir si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$



Valores y Vectores Propios

- Demostrar que $\lambda=7$ es un valor propio de la matriz A.
- Determinar los vectores propios correspondientes.

$$A\mathbf{x} = 7\mathbf{x}$$

Valores y Vectores Propios

- Demostrar que λ=7 es un valor propio de la matriz A.
- Determinar los vectores propios correspondientes.

$$A\mathbf{x} = 7\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} - 7\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Valores y Vectores Propios

- Demostrar que $\lambda=7$ es un valor propio de la matriz A.
- Determinar los vectores propios correspondientes.

$$A\mathbf{x} = 7\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} - 7\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(A - 7I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Ecuación homogénea

Valores y Vectores Propios

- Demostrar que λ=7 **es un valor propio** de la matriz A.
- Determinar los vectores propios correspondientes.

$$A\mathbf{x} = 7\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} - 7\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(A - 7I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \longrightarrow \text{Ecuación homogénea}$$

$$A - 7I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

- Demostrar que $\lambda=7$ es un valor propio de la matriz A.
- Determinar los **vectores propios** correspondientes.

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

- Demostrar que λ=7 es un valor propio de la matriz A.
- Determinar los **vectores propios** correspondientes.

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Soluciones: } x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valores y Vectores Propios

- Demostrar que λ=7 es un valor propio de la matriz A.
- Determinar los **vectores propios** correspondientes.

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Soluciones: } x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Cada vector de esta forma, con $\mathbf{x}_2$ distinto de 0 es un vector propio correspondiente a λ=7.

Valores Propios

- En general, λ es un valor propio de A de n x n si y sólo si la ecuación:

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tiene una solución no trivial.

Valores Propios

- En general, λ es un valor propio de A de n x n si y sólo si la ecuación:

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tiene una solución no trivial.

- El conjunto de todas las soluciones es exactamente el espacio nulo de la matriz A - λI.

Espacio Propio

- En general, λ es un valor propio de A de n x n si y sólo si la ecuación:

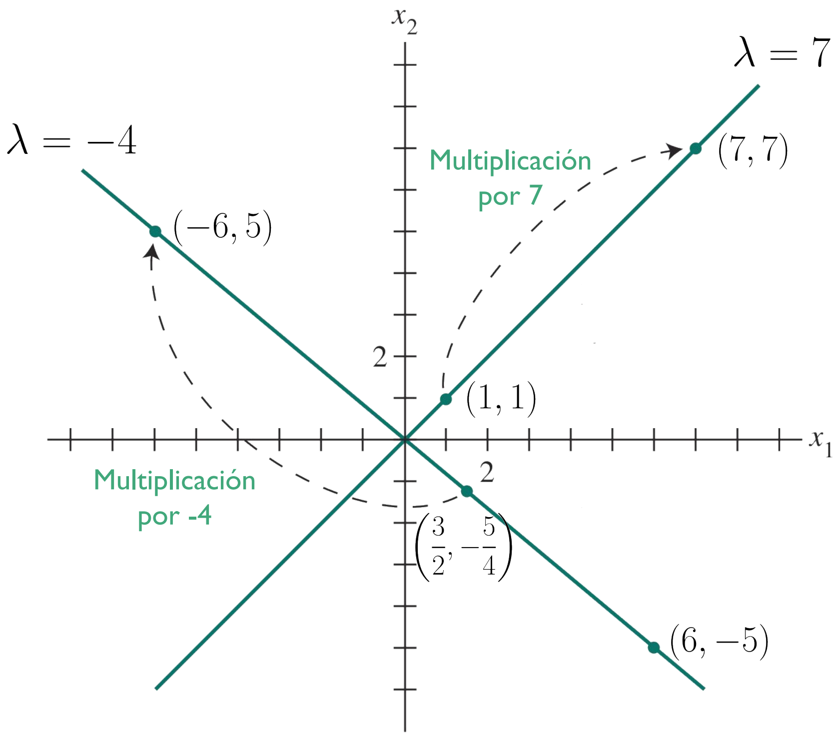
$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tiene una solución no trivial.

- El conjunto de todas las soluciones es exactamente el espacio nulo de la matriz A - λI.
- Por tanto, es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y se denomina **espacio propio** de A correspondiente a λ.

Espacio Propio

- Espacios propios para los autovalores λ=7 y λ=-4
- Para λ=7, el subespacio está compuesto por todos los múltiplos de (1,1)
- Para λ=-4, el subespacio está compuesto por todos los múltiplos de (6,-5)



Acción geométrica de $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$

Espacio Propio

- Sabiendo que $\lambda=2$ es un valor propio de A, determinar una base para el espacio propio correspondiente.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Espacio Propio

- Sabiendo que $\lambda=2$ es un valor propio de A, determinar una base para el espacio propio correspondiente.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}} A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Espacio Propio

- Sabiendo que $\lambda=2$ es un valor propio de A, determinar una base para el espacio propio correspondiente.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}} A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Espacio Propio

- Sabiendo que $\lambda=2$ es un valor propio de A, determinar una base para el espacio propio correspondiente.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espacio Propio

- Sabiendo que $\lambda=2$ es un valor propio de A, determinar una base para el espacio propio correspondiente.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Subespacio bidimensional en $\mathbb{R}^3$

Espacio Propio

- Sabiendo que $\lambda=2$ es un valor propio de A, determinar una base para el espacio propio correspondiente.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

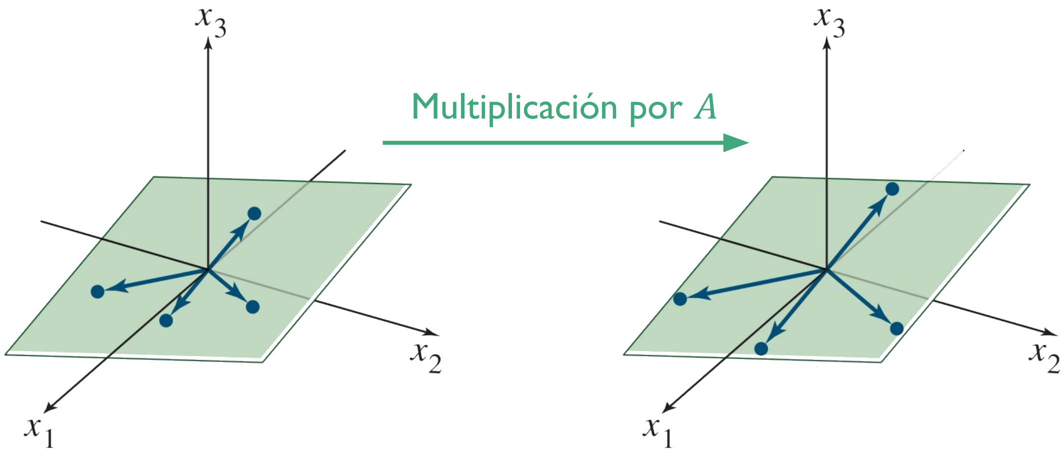
Base para el subespacio propio λ=2

Espacio Propio

- Sabiendo que $\lambda=2$ es un valor propio de A, determinar una base para el espacio propio correspondiente.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$



Base para el subespacio propio $\lambda=2$

Cálculo de Valores Propios

- Los valores propios de una **matriz triangular** son las entradas sobre su diagonal principal:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Cálculo de Valores Propios

- Los valores propios de una **matriz triangular** son las entradas sobre su diagonal principal:

$$
\begin{aligned}
A-\lambda I &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Cálculo de Valores Propios

- Los valores propios de una **matriz triangular** son las entradas sobre su diagonal principal:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Cálculo de Valores Propios

- Los valores propios de una **matriz triangular** son las entradas sobre su diagonal principal:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda = 3, 0, 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda = 4, 1$$

Autovalor 0

- Una matriz A tiene un valor propio de 0 si y sólo si existe solución no trivial para:

$$A\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$$

Autovalor 0

- Una matriz A tiene un valor propio de 0 si y sólo si existe solución no trivial para:

$$A\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$$
$$A\mathbf{x} = 0$$

Autovalor 0

- Una matriz A tiene un valor propio de 0 si y sólo si existe solución no trivial para:

$$A\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$$

$$\underbrace{A\mathbf{x} = 0}_{\text{Tiene solución no trivial si y sólo sí } A \text{ no es invertible}}$$

Autovalor 0

- Una matriz A tiene un valor propio de 0 si y sólo si existe solución no trivial para:

$$\underbrace{\begin{aligned} A\mathbf{x} &= 0\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} &= 0 \end{aligned}}_{\text{Tiene solución no trivial si y sólo sí } A \text{ no es invertible}}$$

- Entonces: **0 es valor propio de A si y sólo si A no es invertible.**

Teorema de la matriz invertible I (actualizado)

- Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes. Es decir, para una A dada, las afirmaciones son **todas verdaderas o todas falsas**.
  - A es una matriz invertible.
  - A es equivalente por filas a la matriz identidad de $n \times n$.
  - A tiene n pivotes.
  - La ecuación $A\mathbf{x} = 0$ tiene solo la solución trivial.
  - Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente.

Teorema de la matriz invertible II (actualizado)

- Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes. Es decir, para una A dada, las afirmaciones son **todas verdaderas o todas falsas**.
  - La transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es uno-a-uno.
  - La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una sola solución para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$.
  - Las columnas de A generan $\mathbb{R}^n$.
  - La transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

Teorema de la matriz invertible III (actualizado)

- Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes. Es decir, para una A dada, las afirmaciones son **todas verdaderas o todas falsas**.
  - Existe una matriz $n \times n$ C tal que $CA = I$.
  - Existe una matriz $n \times n$ D tal que $AD = I$.
  - A^T es una matriz invertible.
  - <u>det A es distinto de 0</u>
  - <u>0 no es valor propio de A.</u>

Teorema de la matriz invertible III (actualizado)

Ecuación Característica

Ecuación Característica

- Determinar los valores propios de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Ecuación Característica

- Determinar los valores propios de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}}$$

Ecuación Característica

- Determinar los valores propios de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}} A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & -6 - \lambda \end{bmatrix}$$

Ecuación Característica

- Determinar los valores propios de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}} A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & -6 - \lambda \end{bmatrix}}_{\text{Todos los valores de } \lambda \text{ que hacen que no sea invertible}}$$

Ecuación Característica

- Determinar los valores propios de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}} A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Ecuación Característica

- Determinar los valores propios de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}} A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-6-\lambda) - (3)(3)$$

Ecuación Característica

- Determinar los valores propios de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2-\lambda)(-6-\lambda) - (3)(3) \\ &= -12 + 6\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 9 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda - 21 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 7) \end{aligned}$$

Ecuación Característica

- Determinar los valores propios de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2-\lambda)(-6-\lambda) - (3)(3) \\ &= -12 + 6\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 9 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda - 21 \\ &= \underbrace{(\lambda - 3)(\lambda + 7)} \end{aligned}$$

Valores propios: λ=3 y λ=-7

Ecuación Característica

- Un escalar λ es un valor propio de una matriz A de n x n si y sólo si λ satisface la **ecuación característica**:

$$\det\left(A - \lambda I\right) = 0$$

Ecuación Característica

- Encontrar la ecuación característica de A:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación Característica

- Encontrar la ecuación característica de A:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Ecuación Característica

- Encontrar la ecuación característica de A:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

Ecuación Característica $\longrightarrow$ $(5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$

Polinomio Característico $\longrightarrow$ $\lambda^4 - 14\lambda^3 + 68\lambda^2 - 130\lambda + 75 = 0$

Cómputo de Valores Propios

- Mathematica/Maple usan **cálculo simbólico**. No hay fórmula ni algoritmo finito para una matriz general de n x n con $n \geq 5$.
- Los **métodos numéricos** (MATLAB) evitan totalmente el polinomio característico.
- Algunos frameworks implementan el **algoritmo QR** (Numpy/LAPACK).
- Existen otros métodos, como el de **Jacobi**, el de **potencias** y el de **potencia inversa**.

Similaridad

- A y B son similares si hay una matriz invertible P tal que:

$$P^{-1}AP = B$$

- Noción útil para implementar métodos computacionales que aproximan valores propios de una matriz (mediante QR).

Similaridad

- A y B son similares si hay una matriz invertible P tal que:

$$P^{-1}AP = B$$

- Noción útil para implementar métodos computacionales que aproximan valores propios de una matriz (mediante QR).
- Si las matrices A y B de n x n son similares, entonces tienen el **mismo polinomio característico** y, por lo tanto, los mismos valores propios (con la misma multiplicidad).

Diagonalización

Factorización Valor Propio/Vector Propio

- Una matriz cuadrada A de n x n es **diagonalizable** si A es similar a una matriz diagonal D, para alguna matriz invertible P:

$$A = PDP^{-1}$$

Factorización Valor Propio/Vector Propio

- Una matriz cuadrada A de n x n es **diagonalizable** si A es similar a una matriz diagonal D, para alguna matriz invertible P:

$$A = PDP^{-1}$$

- A es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.

Factorización Valor Propio/Vector Propio

- Una matriz cuadrada A de n x n es **diagonalizable** si A es similar a una matriz diagonal D, para alguna matriz invertible P:

$$A = PDP^{-1}$$

- A es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.
- Las entradas diagonales de D son **valores propios** de A que corresponden respectivamente a los **vectores propios** en P.

Diagonalización de Matrices

- Si es posible, diagonalizar la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de Matrices

- Si es posible, diagonalizar la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A = PDP^{-1}$$

Diagonalización de Matrices

1. Determinar valores propios de A :

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 \longrightarrow \lambda = 1,\ \lambda = -2 \end{aligned}$$

Diagonalización de Matrices

1. Determinar valores propios de A :

$$0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$
$$= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 \longrightarrow \lambda = 1,\ \lambda = -2$$

2. Encontrar n vectores propios de A linealmente independientes:

$$\text{Base para } \lambda = 1: \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Base para } \lambda = -2: \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ \text{y} \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de Matrices

3. Construir P con los vectores del paso 2:

$$P = \left[\, \mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3 \,\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de Matrices

3. Construir P con los vectores del paso 2:

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Construir D con los valores propios correspondientes:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de Matrices - Comprobación

- Podemos calcular P^{-1} y verificar que:

$$A = PDP^{-1}$$

- Otra opción es calcular:

$$AP = PD$$

Importante: asegurarse de que P sea invertible!!

Diagonalización de Matrices

- Ejercicio. Diagonalizar la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de Matrices

- Ejercicio. Diagonalizar la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

$$\lambda = 1, \ \lambda = -2$$

Diagonalización de Matrices

- Ejercicio. Diagonalizar la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

$$\lambda = 1,\ \lambda = -2$$

Espacios propios:

$$\lambda = 1 : \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -2 : \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de Matrices

- Ejercicio. Diagonalizar la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

$$\lambda = 1, \; \lambda = -2$$

Espacios propios:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 1 : \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda = -2 : \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\}$$

Imposible construir una base de $\mathbb{R}^3$ con 2 vectores!!

Diagonalización de Matrices

- Ejercicio. Diagonalizar la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 \\ \lambda = 1,\ &\lambda = -2 \end{aligned}$$

Espacios propios:

$$\left.\begin{aligned} \lambda = 1: \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda = -2: \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Imposible construir una base de $\mathbb{R}^3$ con 2 vectores!!

$\downarrow$

A no es diagonalizable

Diagonalización de Matrices

- Una matriz A de n x n con n **valores propios distintos** es diagonalizable.

  Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de Matrices

- Una matriz A de n x n con n **valores propios distintos** es diagonalizable.
- Una matriz A de n x n cuyos valores propios distintos son λ_1, ..., λ_p es diagonalizable si y sólo si la suma de las dimensiones de los espacios propios es igual a n. Esto ocurre si:
  - Se puede factorizar el polinomio característico en factores lineales.
  - La dimensión del espacio propio para cada λ es igual a la multiplicidad de cada λ.

Estimaciones Iterativas de Valores Propios

El método de potencias

- Permite calcular el autovalor más grande de una matriz A
- Produce una secuencia de escalares que aproximan a λ_1 y una secuencia de vectores que aproxima al vector propio correspondiente.

El método de potencias

1. Seleccionar un vector inicial $\mathbf{x}_0$ cuya entrada más grande sea 1
2. Para $k = 0, 1, \ldots$
   a. Calcular $A\mathbf{x}_k$
   b. Definir u_k como la entrada en $A\mathbf{x}_k$ cuyo valor absoluto sea tan grande como sea posible
   c. Calcular $\mathbf{x}_{k+1} = (1/u_k)A\mathbf{x}_k$
3. Para (casi todas) las elecciones de $\mathbf{x}_0$, la sucesión $\{u_k\}$ se aproxima al valor propio dominante, y la sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ tiende al vector propio correspondiente.

El método de potencias

- Calcular 5 iteraciones del método de potencias para:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El método de potencias

- Calcular 5 iteraciones del método de potencias para:

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

El método de potencias

- Calcular 5 iteraciones del método de potencias para:

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mu_0 = 5$$

El método de potencias

- Calcular 5 iteraciones del método de potencias para:

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mu_0 = 5$$

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\mu_0} A\mathbf{x}_0 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

El método de potencias

- Calcular 5 iteraciones del método de potencias para:

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.0 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

El método de potencias

- Calcular 5 iteraciones del método de potencias para:

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.0 \\ 1.8 \end{bmatrix}, \quad \mu_1 = 8$$

El método de potencias

- Calcular 5 iteraciones del método de potencias para:

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.0 \\ 1.8 \end{bmatrix}, \quad \mu_1 = 8$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\mu_1} A\mathbf{x}_1 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8.0 \\ 1.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.225 \end{bmatrix}$$

El método de potencias

- Calcular 5 iteraciones del método de potencias para:

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.125 \\ 1.450 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = 7.125$$

El método de potencias

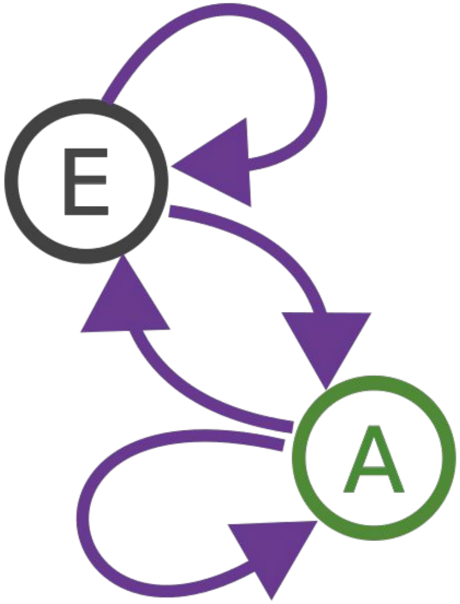
- Calcular 5 iteraciones del método de potencias para:

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ .4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ .225 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ .2035 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ .2005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ .20007 \end{bmatrix}$
$A\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 1.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.125 \\ 1.450 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.0175 \\ 1.4070 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.0025 \\ 1.4010 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.00036 \\ 1.40014 \end{bmatrix}$
μ_k	5	8	7.125	7.0175	7.0025	7.00036

Aplicaciones

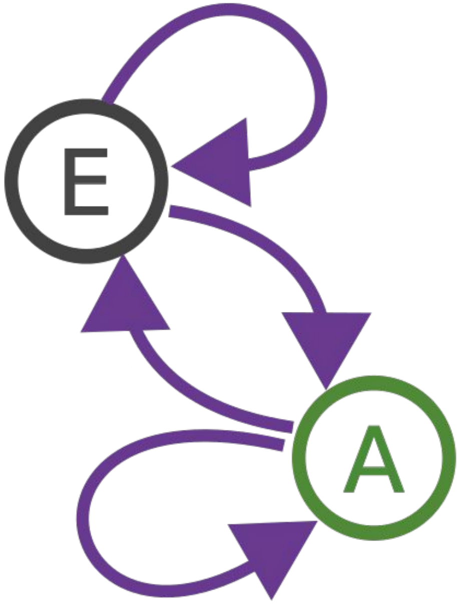
Cadenas de Markov

- **Modelos matemáticos** usados en biología, negocios, química, ingeniería, física, … (la lista es larga!).
- El modelo se utiliza para describir un **experimento** o medición **que se realiza muchas veces** de la misma manera



Cadenas de Markov

- El **resultado** de cada ensayo del experimento será **uno de varios posibles** resultados especificados.
- El **resultado** de un ensayo depende solo del ensayo **inmediatamente anterior**.



Cadenas de Markov

- Supongamos que medimos año a año la proporción de habitantes de la Ciudad de Buenos Aires y del Conurbano Bonaerense.

Cadenas de Markov

- Supongamos que medimos año a año la proporción de habitantes de la Ciudad de Buenos Aires y del Conurbano Bonaerense.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} .40 \\ .60 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{40\% CABA} \\ \longrightarrow \text{60\% Conurbano} \end{array}$$

Cadenas de Markov

- Supongamos que medimos año a año la proporción de habitantes de la Ciudad de Buenos Aires y del Conurbano Bonaerense.

$$\mathbf{x}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} .40 \\ .60 \end{bmatrix}}_{\text{Vector de probabilidades}} \begin{matrix} \longrightarrow \text{40\% CABA} \\ \longrightarrow \text{60\% Conurbano} \end{matrix}$$

Cadenas de Markov

- Un **vector de probabilidad** es un vector con entradas positivas que suman 1.
- Vamos a llamar **matriz estocástica**, a una matriz cuyas columnas son vectores de probabilidad.

Cadenas de Markov

- Una **Cadena de Markov** es una secuencia de vectores de probabilidad $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ junto con una matriz estocástica P, tal que:

$$\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_3 = P\mathbf{x}_2, \quad \ldots$$

Cadenas de Markov

- Una **Cadena de Markov** es una secuencia de vectores de probabilidad $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ junto con una matriz estocástica P, tal que:

$$\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_3 = P\mathbf{x}_2, \quad \ldots$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Cadenas de Markov

- Volviendo a nuestro ejemplo, supongamos que la migración anual desde CABA está gobernada por la siguiente matriz:

Desde

$$M = \begin{array}{cc} \text{CABA} & \text{Conurbano} \\ \end{array}$$

$$M = \begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{CABA} & \text{Conurbano} \end{array} \\ \begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{CABA} \\ \text{Conurbano} \end{array}$$

Hacia

Cadenas de Markov

- Volviendo a nuestro ejemplo, supongamos que la migración anual desde CABA está gobernada por la siguiente matriz:

Desde

$$M = \begin{array}{cc} \text{CABA} & \text{Conurbano} \\ \left[\begin{array}{cc} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{CABA} \\ \text{Conurbano} \end{array} \quad \textbf{Hacia}$$

- Si en 2025 las poblaciones son de 3,200,000 para CABA y 9,800,000 para el Conurbano ¿Cuál será la distribución en 2026?

Cadenas de Markov

- Si en 2025 las poblaciones son de 3,200,000 para CABA y 9,800,000 para el Conurbano ¿Cuál será la distribución en 2026?

$$M\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$$

Cadenas de Markov

- Si en 2025 las poblaciones son de 3,200,000 para CABA y 9,800,000 para el Conurbano ¿Cuál será la distribución en 2026?

$$\begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,200,000 \\ 9,800,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,334,000 \\ 9,666,000 \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov

- Si en 2025 las poblaciones son de 3,200,000 para CABA y 9,800,000 para el Conurbano ¿Cuál será la distribución en 2026?

$$\begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.246 \\ 0.754 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.256 \\ 0.744 \end{bmatrix}}_{\text{Distribución en 2026}}$$

Cadenas de Markov y Predicciones

- Aspecto interesante de las Cadenas de Markov: estudiar **comportamientos a largo plazo**. Por ejemplo: ¿Qué pasará con las distribuciones de la población?
- Aquí **entran en juego los valores y vectores propios.**

Cadenas de Markov y Predicciones

- Ejemplo: ¿Qué sucede con el siguiente sistema conforme avanzan las iteraciones?

$$P = \begin{bmatrix} .5 & .2 & .3 \\ .3 & .8 & .3 \\ .2 & 0 & .4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov y Predicciones

- Ejemplo: ¿Qué sucede con el siguiente sistema conforme avanzan las iteraciones?

$$\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} .5 & .2 & .3 \\ .3 & .8 & .3 \\ .2 & 0 & .4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 \\ .3 \\ .2 \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov y Predicciones

- Ejemplo: ¿Qué sucede con el siguiente sistema conforme avanzan las iteraciones?

$$\mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} .5 & .2 & .3 \\ .3 & .8 & .3 \\ .2 & 0 & .4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5 \\ .3 \\ .2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .37 \\ .45 \\ .18 \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov y Predicciones

- Ejemplo: ¿Qué sucede con el siguiente sistema conforme avanzan las iteraciones?

$$\mathbf{x}_3 = P\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} .5 & .2 & .3 \\ .3 & .8 & .3 \\ .2 & 0 & .4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .37 \\ .45 \\ .18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .329 \\ .525 \\ .146 \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov y Predicciones

- Ejemplo: ¿Qué sucede con el siguiente sistema conforme avanzan las iteraciones?

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} .3133 \\ .5625 \\ .1242 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} .3064 \\ .5813 \\ .1123 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} .3032 \\ .5906 \\ .1062 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} .3016 \\ .5953 \\ .1031 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} .3008 \\ .5977 \\ .1016 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} .3004 \\ .5988 \\ .1008 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} .3002 \\ .5994 \\ .1004 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{11} = \begin{bmatrix} .3001 \\ .5997 \\ .1002 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{12} = \begin{bmatrix} .30005 \\ .59985 \\ .10010 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{13} = \begin{bmatrix} .30002 \\ .59993 \\ .10005 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{14} = \begin{bmatrix} .30001 \\ .59996 \\ .10002 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{15} = \begin{bmatrix} .30001 \\ .59998 \\ .10001 \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov y Predicciones

- Ejemplo: ¿Qué sucede con el siguiente sistema conforme avanzan las iteraciones?

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} .3133 \\ .5625 \\ .1242 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} .3064 \\ .5813 \\ .1123 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} .3032 \\ .5906 \\ .1062 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} .3016 \\ .5953 \\ .1031 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} .3008 \\ .5977 \\ .1016 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} .3004 \\ .5988 \\ .1008 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} .3002 \\ .5994 \\ .1004 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{11} = \begin{bmatrix} .3001 \\ .5997 \\ .1002 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{q} = \begin{bmatrix} .3 \\ .6 \\ .1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{12} = \begin{bmatrix} .30005 \\ .59985 \\ .10010 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{13} = \begin{bmatrix} .30002 \\ .59993 \\ .10005 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{14} = \begin{bmatrix} .30001 \\ .59996 \\ .10002 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{15} = \begin{bmatrix} .30001 \\ .59998 \\ .10001 \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov y Predicciones

- Ejemplo: ¿Qué sucede con el siguiente sistema conforme avanzan las iteraciones?

$$P\mathbf{q} = \begin{bmatrix} .5 & .2 & .3 \\ .3 & .8 & .3 \\ .2 & 0 & .4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .3 \\ .6 \\ .1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .15 + .12 + .03 \\ .09 + .48 + .03 \\ .06 + 0 + .04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .30 \\ .60 \\ .10 \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

Cadenas de Markov y Predicciones

- Ejemplo: ¿Qué sucede con el siguiente sistema conforme avanzan las iteraciones?

$$P\mathbf{q} = \begin{bmatrix} .5 & .2 & .3 \\ .3 & .8 & .3 \\ .2 & 0 & .4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .3 \\ .6 \\ .1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .15 + .12 + .03 \\ .09 + .48 + .03 \\ .06 + 0 + .04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .30 \\ .60 \\ .10 \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

Estado estacionario

Vector de Estado Estacionario

- Si P es una matriz estocástica, un **vector de estado estacionario** es un vector de probabilidad $\mathbf{q}$ tal que:

$$P\mathbf{q} = \mathbf{q}$$

Vector de Estado Estacionario

- Volviendo a nuestro ejemplo sobre poblaciones, $\mathbf{q}$ es un vector de estado estacionario de la matriz de migración M porque:

$$M\mathbf{q} = \begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .375 \\ .625 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .35625 + .01875 \\ .01875 + .60625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .375 \\ .625 \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

Vector de Estado Estacionario

- Encontrar el vector estacionario de la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix}$$

Vector de Estado Estacionario

- Encontrar el vector estacionario de la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} P\mathbf{x} &= \mathbf{x} \\ P\mathbf{x} - \mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Vector de Estado Estacionario

- Encontrar el vector estacionario de la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} P\mathbf{x} &= \mathbf{x} \\ P\mathbf{x} - \mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ P\mathbf{x} - I\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ (P - I)\mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Vector de Estado Estacionario

- Encontrar el vector estacionario de la matriz:

$$P-I = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.4 & .3 \\ .4 & -.3 \end{bmatrix}$$

- Resolvemos el sistema $(P - I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} -.4 & .3 & 0 \\ .4 & -.3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -.4 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vector de Estado Estacionario

- Encontrar el vector estacionario de la matriz:

$$P - I = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.4 & .3 \\ .4 & -.3 \end{bmatrix}$$

- Resolvemos el sistema $(P - I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\sim \begin{bmatrix} -.4 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vector de Estado Estacionario

- Encontrar el vector estacionario de la matriz:

$$P - I = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.4 & .3 \\ .4 & -.3 \end{bmatrix}$$

- Resolvemos el sistema $(P - I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\sim \begin{bmatrix} -.4 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_2 \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vector de Estado Estacionario

- Encontrar el vector estacionario de la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix} \rightarrow P\mathbf{x} = \mathbf{x} \rightarrow x_2 \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vector de Estado Estacionario

- Encontrar el vector estacionario de la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix} \rightarrow P\mathbf{x} = \mathbf{x} \rightarrow x_2 \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Elegimos una base para el espacio solución:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vector de Estado Estacionario

- Encontrar el vector estacionario de la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix} \rightarrow P\mathbf{x} = \mathbf{x} \rightarrow x_2 \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Elegimos una base para el espacio solución:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$$

Vector de Estado Estacionario

- Encontrar el vector estacionario de la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix}$$

- Verificamos:

$$P\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 6/10 & 3/10 \\ 4/10 & 7/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/70 + 12/70 \\ 12/70 + 28/70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30/70 \\ 40/70 \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

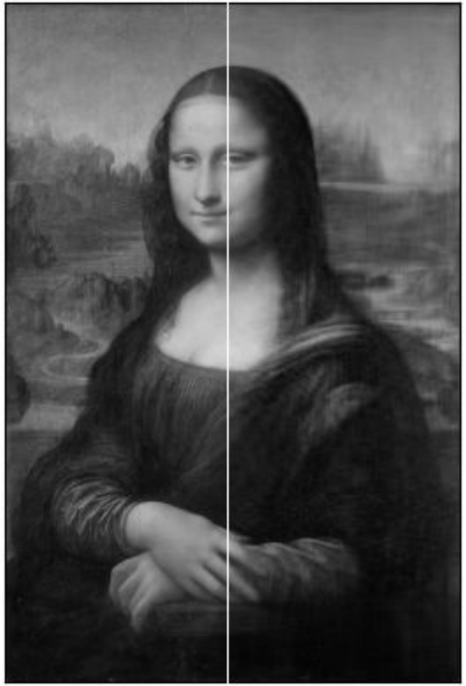
Vector de Estado Estacionario

- Si P es una matriz estocástica de n x n, entonces P tiene un único vector de estado estacionario $\mathbf{q}$.

- Además, si $\mathbf{x}_0$ es cualquier estado inicial, entonces la cadena de Markov $\{\mathbf{x}_k\}$ converge a $\mathbf{q}$ cuando k tiende a infinito.

Compresión de imágenes

- Hay decenas de formas de comprimir imágenes con y sin pérdida.
- Podemos utilizar una factorización de la **matriz de covarianza** como una forma muy básica de compresión con pérdida vía reducción de dimensionalidad.



Sin compresión 14 Mb | Comprimida 3 Mb

Matriz de covarianza

- Vamos a llamar **matriz de covarianza** Σ a una matriz cuadrada que contiene la covarianza entre los elementos de un vector (variable aleatoria con n entradas):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \longrightarrow \Sigma_{ij} = \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)$$

Matriz de covarianza

- Vamos a llamar **matriz de covarianza** Σ a una matriz cuadrada que contiene la covarianza entre los elementos de un vector (variable aleatoria con n entradas):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \longrightarrow \Sigma_{ij} = \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)\left(y_i - \bar{Y}\right)$$

Covarianza entre dos variables aleatorias X e Y

Matriz de covarianza

- Vamos a llamar **matriz de covarianza** Σ a una matriz cuadrada que contiene la covarianza entre los elementos de un vector (variable aleatoria con n entradas):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \operatorname{Var}(X_1) & \operatorname{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \operatorname{Cov}(X_1, X_n) \\ \operatorname{Cov}(X_2, X_1) & \operatorname{Var}(X_2) & \cdots & \operatorname{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}(X_n, X_1) & \operatorname{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \operatorname{Var}(X_n) \end{bmatrix}$$

Matriz de covarianza

- Vamos a llamar **matriz de covarianza** Σ a una matriz cuadrada que contiene la covarianza entre los elementos de un vector (variable aleatoria con n entradas).
- Características de la matriz de covarianza:
  - Σ es una **matriz cuadrada y simétrica**.
  - Σ es **semidefinida positiva** (próxima clase).

Matriz de covarianza de una imagen

- Podemos computar una matriz de covarianzas a partir de la información del valor de los píxeles de una imagen.
- **Captura la relación entre las diferentes intensidades de los píxeles.** Es útil en múltiples contextos:
  - Eliminación de ruido
  - Compresión
  - Detección de patrones

Matriz de covarianza de una imagen

- Para calcular la matriz de covarianza a partir de una imagen (arreglo 2D) usando numpy, primero tenemos que asegurarnos que los datos tengan el formato correcto.
  - Intensidades de cada píxel entre 0 y 1
  - Calculamos la covarianza entre todos los pares de vectores columna X_i, X_j

<Notebook>

Intuición

- Representar una matriz bidimensional de $m \times n$ como el producto de dos matrices **más pequeñas** V y C, de $n \times k$ y $k \times m$ respectivamente:

$$\underset{m \times n}{M} = \underset{m \times k}{C} \quad \underset{k \times n}{V^T}$$

- k determina el factor de compresión.
- Si $k<n$, $M \sim CV^T$

Intuición

- Representar una matriz bidimensional de m x n como el producto de dos matrices más pequeñas (V,C) de n x k y k x m respectivamente:
    - V tiene columnas que son los k autovectores asociados a los autovalores de mayor valor absoluto de la **matriz de covarianza** de M.
    - C es la proyección de M sobre V, y captura la información esencial de la imagen en un espacio reducido.

Intuición

- Hay muchas matrices C y V que cumplen con $M = CV^T$
- Los **autovectores** de la **matriz de covarianza** corresponden a las direcciones de máxima varianza en el conjunto de datos original.
- Permite que conservemos las características que más información aportan sobre la apariencia visual de la imagen original.

Algoritmo de compresión / descompresión

1. Intensidades de cada píxel entre 0 y 1
2. Calculamos la covarianza entre todos los pares de vectores columna X_i, X_j y formamos la matriz Σ
3. Obtenemos los autovalores y autovectores de Σ
4. Construimos/almacenamos C y V para un k a elección.

---

1. Reconstruir M a partir de C y V^T

Métodos Computacionales

Clase VI: Valores y Vectores Propios