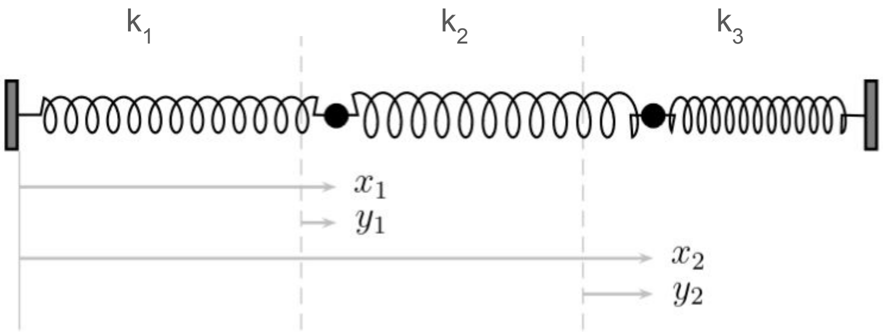
Métodos Computacionales

Clase VI: Valores y Vectores Propios

Osciladores Acoplados

Vamos a resolver un sistema de osciladores armónicos acoplados, para ello vamos a usar los autovectores y autovalores de la matriz que representa el sistema físico. Escribiremos la solución en esa base para luego escribir la solución general.

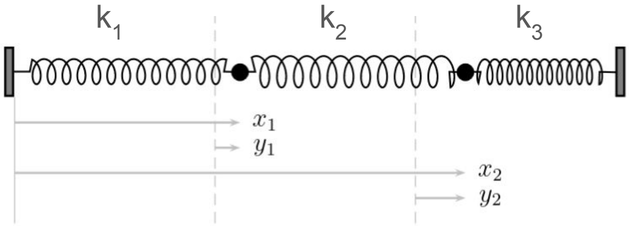


Algunas hipótesis físicas:

1. El movimiento es unidimensional.
2. Ley de Hooke para modelar la fuerza de los resortes.
3. Las desviaciones respecto a la posición de equilibrio son pequeñas.
4. Las partículas son puntuales. sólo interactúan a través de los resortes (no tienen tamaño ni forma, solo inercia).

Osciladores Acoplados

Con las hipótesis listadas el sistema físico puede modelarse con las siguientes ecuaciones:



$$m_1\ddot{y}_1 = -(k_1+k_2)y_1 + k_2 y_2$$
$$m_2\ddot{y}_2 = -(k_2+k_3)y_2 + k_2 y_1$$

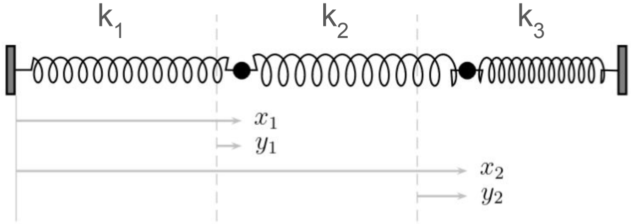
$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\text{M}} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 \\ k_2 & -(k_2+k_3) \end{bmatrix}}_{\text{-K}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$A = M^{-1}K = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2+k_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(k_1+k_2)}{m_1} & -\frac{k_2}{m1} \\ -\frac{k_2}{m2} & \frac{(k_2+k_3)}{m2} \end{bmatrix}$$

Osciladores Acoplados

Vamos a proponer un cambio de coordenadas: $\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix} = S\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$ de forma tal que $A_D = SAS^{-1}$



$$m_1\ddot{y}_1 = -(k_1+k_2)y_1 + k_2 y_2$$
$$m_2\ddot{y}_2 = -(k_2+k_3)y_2 + k_2 y_1$$

$$\begin{bmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{bmatrix} + A\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix}\ddot{\eta}_1\\ \ddot{\eta}_2\end{bmatrix} + A_D\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix}\ddot{\eta}_1\\ \ddot{\eta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix} = 0$$

En este nuevo sistema de coordenadas las ecuaciones diferenciales quedan desacopladas!

Osciladores Acoplados

$$\begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = 0$$

Se resuelve el sistema desacoplado y luego se calculan las coordenadas originales.

$$\ddot{\vec{\eta}}_1 + \lambda_1 \vec{\eta}_1 = 0$$

$$\ddot{\vec{\eta}}_2 + \lambda_2 \vec{\eta}_2 = 0$$

$$\eta_1(t) = A_1 cos(\omega_1 t) + B_1 sen(\omega_1 t)$$

$$\eta_2(t) = A_2 cos(\omega_2 t) + B_2 sen(\omega_2 t)$$

$$\omega_{1,2}^2 = \lambda_{1,2}.$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} A_1 cos(\omega_1 t) + B_1 sen(\omega_1 t) \\ A_2 cos(\omega_2 t) + B_2 sen(\omega_2 t) \end{bmatrix}$$

1. ¿Cómo encontramos la matriz S? Hallar la relación entre los lambdas y las variables físicas k y m.
2. Resolver las ecuaciones diferenciales y explorar distintas condiciones iniciales.
3. Ejemplo de applet