#### Tecnología Digital IV: Redes de Computadoras

Clase 25: Introducción a la Teoría de la Información (Parte 1)

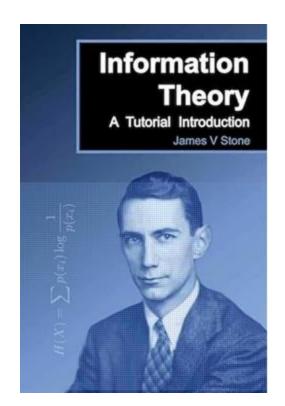
Emmanuel Iarussi & Lucio Santi

Licenciatura en Tecnología Digital Universidad Torcuato Di Tella

19 de junio 2025

#### ¿Qué es la Teoría de la Información?

- Teoría matemática de la comunicación.
- Estudia la cuantificación, almacenamiento y transmisión de la información.
- Parte integral de la teoría de la probabilidad.
- Desarrollada por Claude Shannon en la década de los 40.



# ¿En dónde se usa la Teoría de la Información?

- Diseño de circuitos digitales y computadoras
- Dispositivos de transmisión de datos, Internet
- Métodos de compresión de datos
- Criptografía
- Inferencia estadística, reconocimiento de patrones, aprendizaje automático (IA y Machine Learning).
- Audio e imágenes
- Física, biología, lingüística, economía, neurociencias, etc.

1D4 2025

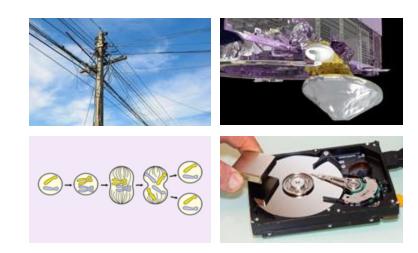
#### Problemas de la comunicación

- ¿Se puede medir la información? ¿Cómo? ¿Cuánta información contiene un mensaje?
- ¿Cuánta información se puede transmitir en un determinado canal?
- Si el mensaje es más grande que la cantidad de información que contiene, ¿se puede representar de otra manera para reducir su tamaño?
- ¿Se puede medir el ruido? ¿Es posible reducir su impacto sobre el mensaje?

1D4 2025

#### Ejemplos de comunicación ruidosa

- Línea telefónica
- El enlace de comunicación de radio con el telescopio Webb
- Células en reproducción: el ADN en las células hijas contiene información de las madres
- Un disco rígido magnético



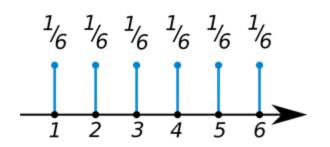
• **Probabilidad**: noción informal, basada en la cantidad de veces que ocurre un evento particular.

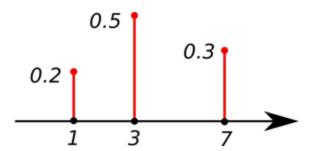
$$p(evento) = \frac{\#casos\ favorables}{\#casos\ posibles}$$



 Variable Discreta: variable que solo puede tomar valores dentro de un conjunto de elementos claramente diferenciados entre sí (por ejemplo, una lista de enteros). No acepta cualquier valor: únicamente aquellos que pertenecen al conjunto.

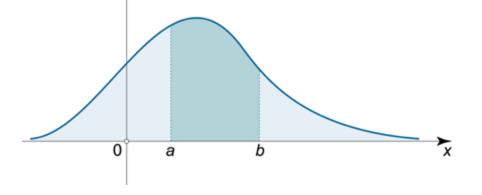
- Variable Discreta: variable que solo puede tomar valores dentro de un conjunto de elementos claramente diferenciados entre sí (por ejemplo, una lista de enteros). No acepta cualquier valor: únicamente aquellos que pertenecen al conjunto.
- Función de probabilidad: distribución de los valores de probabilidad de una variable discreta.





 Variable Continua: variable que potencialmente puede asumir valores en un intervalo de números reales. Por ejemplo, la estatura de las personas.

• Función de densidad: distribución de los valores de probabilidad de una variable continua. f(x)



 Variable Aleatoria: refiere a un tipo especial de cantidad cuyo valor no es fijo (o es incierto): puede tomar diferentes valores. Es una función que asigna un valor al resultado de un experimento aleatorio. Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas.

- Variable Aleatoria: refiere a un tipo especial de cantidad cuyo valor no es fijo (o es incierto): puede tomar diferentes valores. Es una función que asigna un valor al resultado de un experimento aleatorio. Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas.
- Experimento aleatorio: es la reproducción controlada de un fenómeno sobre el cual rige algún tipo de incertidumbre acerca del resultado que se obtendrá (tirar un dado, medir una persona que pasa por la calle, sacar una bolilla de lotería, etc).

#### Ejemplo: arrojar una moneda

 Una variable aleatoria toma como argumento las posibles salidas del experimento, y les asigna un valor:

$$X_{z=sale\ cruz}$$
  $X(x_z)=0,$   $X_{c=sale\ cara}$   $X(x_c)=1.$ 

variable aleatoria

A llabetor la deria in Comitianión dos sémbiolos a la despetación de des fondjamiental tenda in sómitatica y um se tutilizanisión adeodatous religionates es o secuencias de datos. Estos A lsánbeto A SO de la consiste reas, 1220 no arras, teras a citentes y en podiativas orrayal quida so tyo tipo de misión sou la squei a republisço en a republisço en a republisço en a republista de la companya de la companya



#### Ejemplo: arrojar una moneda

 Una variable aleatoria toma como argumento las posibles salidas del experimento, y les asigna un valor:

$$X = \begin{cases} 0, & si \ sale \ cara, \\ 1, & si \ sale \ cruz. \end{cases}$$



#### Ejemplo: arrojar un dado

 Definimos una variable aleatoria que vale 0 cuando obtenemos un resultado impar, y 1 cuando es par.

$$X = \begin{cases} 0, & si \ sale \ 1, 3 \ o \ 5, \\ 1, & si \ sale \ 2, 4 \ o \ 6. \end{cases}$$

Número de resultados = 6

Número de Valores de resultado = 2

#### Variables aleatorias y probabilidades

 En muchos experimentos, los resultados tienen diferentes probabilidades p:

$$p(X) = \{p(x_z), p(x_c)\}\$$



#### Variables aleatorias y probabilidades

• En muchos experimentos, los resultados tienen diferentes probabilidades *p*:

$$p(X) = \{p(x_z), p(x_c)\}$$
 
$$= \{0.5, 0.5\}$$
 moneda "justa"



#### Variables aleatorias y probabilidades

• En muchos experimentos, los resultados tienen diferentes probabilidades *p*:

$$p(X) = \{p(x_z), p(x_c)\}$$

$$= \{0.9, 0.1\} \cdot moneda "cargada" \cdot Caja con bolillas negras y blancas y blancas$$

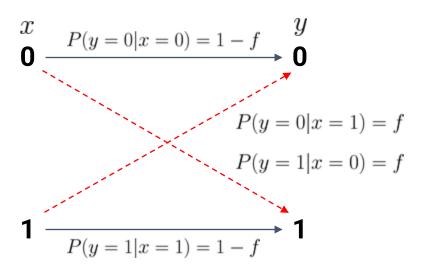
 Supongamos un canal que transmite correctamente cada bit con una probabilidad (1-f)

$$\begin{array}{c}
x \\
\mathbf{0} & P(y=0|x=0) = 1 - f \\
\end{array}$$

1 
$$P(y=1|x=1)=1-f$$

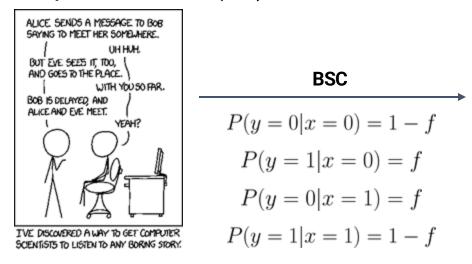
104 2025

 Supongamos un canal que transmite correctamente cada bit con una probabilidad (1-f) e incorrectamente con probabilidad f.



104 2025

 Supongamos un canal que transmite correctamente cada bit con una probabilidad (1-f) e incorrectamente con probabilidad f.

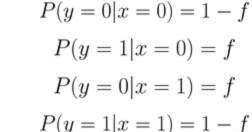


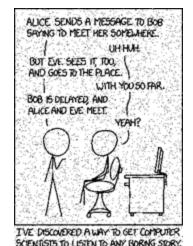
 Supongamos un canal que transmite correctamente cada bit con una probabilidad (1-f) e incorrectamente con probabilidad f.

**BSC** 



SCIENTISTS TO LISTEN TO ANY BORNG STORY.



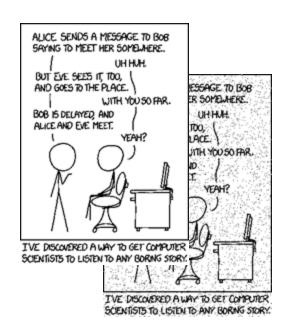


Soluciones:



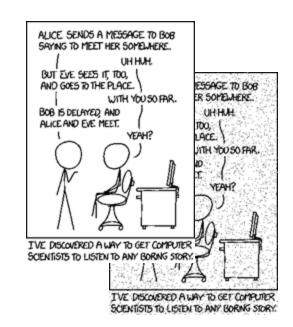
#### Soluciones:

 Física: cambiar los componentes por otros más confiables / mejorar la tecnología de comunicación (hardware)



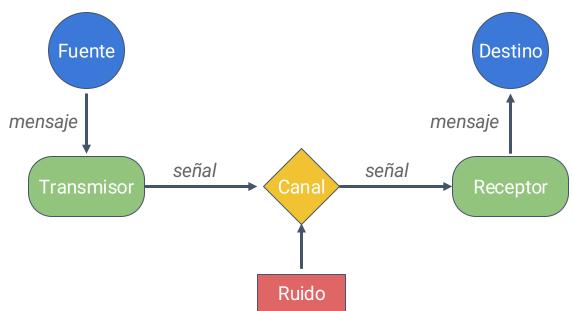
#### Soluciones:

- Física: cambiar los componentes por otros más confiables / mejorar la tecnología de comunicación (hardware)
- Lógica: aceptar el canal ruidoso, detectar y corregir errores utilizando redundancia



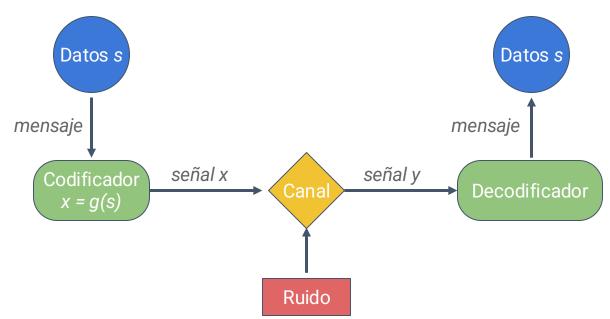
#### Problema fundamental de la comunicación

 Reproducir en un punto (destino) el mensaje enviado en otro punto (fuente).



#### Problema fundamental de la comunicación

 Reproducir en un punto (destino) el mensaje enviado en otro punto (fuente).



26

#### Variables aleatorias y transmisión de datos

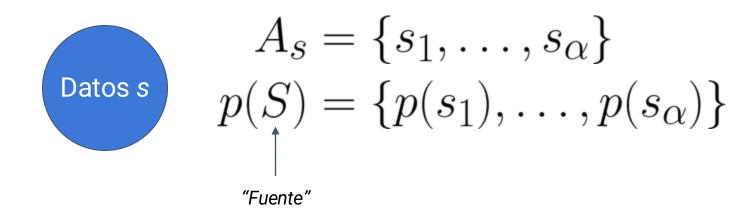
- Un mensaje s es una secuencia ordenada de k símbolos
- Modelamos cada símbolo como la salida de una variable aleatoria
- Puede tomar valores del alfabeto  $A_s(\alpha \text{ símbolos diferentes})$

Datos s 
$$\mathbf{s} = (s_1,...,s_k)$$
 
$$A_s = \{s_1,\ldots,s_\alpha\}$$

1D4 2025

#### Variables aleatorias y transmisión de datos

 Cada símbolo, además, aparece (o se genera) con una cierta probabilidad:



1D4 2025

#### Codificación del mensaje

 Antes de ser transmitido, el mensaje original s puede ser codificado en una nueva secuencia x de longitud n, que eventualmente puede tener símbolos diferentes.

$$\mathbf{s} = (s_1, ..., s_k)$$

$$\mathbf{s} = (s_1, ..., s_k)$$

$$g(\mathbf{s}) = (x_1, ..., x_n) = \mathbf{x}$$

#### Codificación del mensaje

- Antes de ser transmitido, el mensaje original s puede ser codificado en una nueva secuencia x de longitud n, que eventualmente puede tener símbolos diferentes.
- En este proceso se puede eliminar la redundancia natural en los datos (compresión con o sin pérdida) o sumar redundancia para ganar robustez frente al ruido.

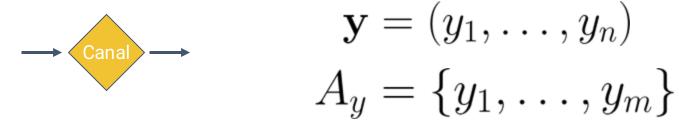
$$g(\mathbf{s}) = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$$

$$A_x = \{x_1, \dots, x_m\}$$

$$p(X) = \{p(x_1), \dots, p(x_m)\}$$

#### Transmisión del mensaje

- La transmisión del mensaje codificado produce una salida de longitud n en el extremo del canal.
- Modelamos esto con una variable aleatoria Y, que puede tomar valores en  $A_{\nu}$ .

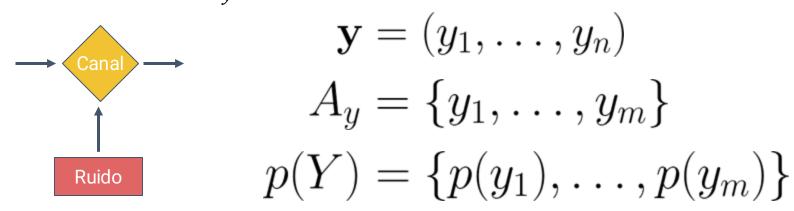


$$p(Y) = \{p(y_1), \ldots, p(y_m)\}\$$

31

#### Transmisión del mensaje

- La transmisión del mensaje codificado produce una salida de longitud n en el extremo del canal.
- Modelamos esto con una variable aleatoria Y, que puede tomar valores en  $A_{\nu}$ .



1D4 2025

#### Transmisión del mensaje

- Las secuencias de salida son interpretadas como si implicaran la presencia de una determinada secuencia de entrada.
- Si esta interpretación no es correcta (ruido), entonces la comunicación contiene errores.
- El ruido en el canal induce errores en la interpretación de las salidas.

104 2025

#### Ejemplo: codificación del mensaje

 Podemos pensar en la función que codifica el mensaje como una tabla "look-up".

• Cada entrada indica cómo se traduce el símbolo de  $A_s$  en uno de  $A_v$ .

Símbolo	Código
$s_1 = 3$	$x_1 = 000$
$s_2 = 6$	$x_2 = 001$
$s_3 = 9$	$x_3 = 010$
$s_4 = 12$	$x_4 = 011$
$s_5 = 15$	$x_5 = 100$
$s_6 = 18$	$x_6 = 101$
$s_7 = 21$	$x_7 = 110$
$s_8 = 24$	$x_8 = 111$

#### Distancia de un código

La distancia de un código puede referirse a diferentes tipos de distancia, pero las dos más comunes son la **distancia de Hamming** y la **distancia mínima**:

- **1. Distancia de Hamming**: Es el número de posiciones en las que dos palabras de código (secuencias de bits) son diferentes. Por ejemplo, la distancia de Hamming entre los códigos 1011101 y 1001001 es 2.
- 2. Distancia Mínima: Es la mínima distancia de Hamming entre cualquier par de palabras distintas en un código. Esta distancia mínima es lo que se usa para determinar la capacidad de un código para detectar y corregir errores

D4 2025

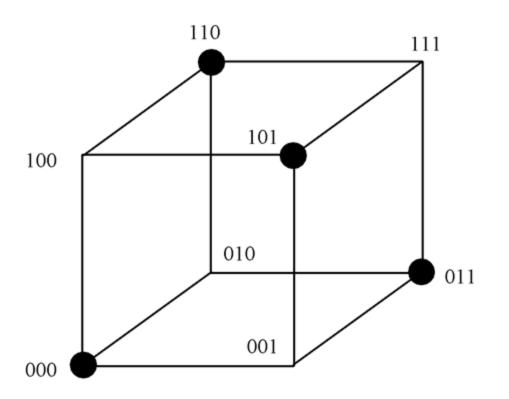
# Importancia de la Distancia Mínima

**Detección de Errores**: Un código con distancia mínima  $d_{min}$  puede detectar hasta  $d_{min}$  –1 errores.

**Corrección de Errores**: Un código con distancia mínima  $d_{min}$  puede corregir hasta  $(d_{min} - 1)/2$  errores.

104 2025

# Distancia de código 2 (Paridad)



Paridad Par

#### Esquema de Repetición

#### Paso 1: Definición del Esquema de Repetición (R3)

En un esquema de repetición (R3), cada bit de datos se transmite 3 veces. El receptor utiliza una regla de mayoría para decidir el valor del bit original. Si al menos 2 de los 3 bits recibidos son iguales, se asume que ese es el bit original.

#### Paso 2: Probabilidad de Error sin Redundancia

La probabilidad de error sin redundancia, P<sub>e</sub>, es simplemente la probabilidad de que un bit transmitido sea recibido incorrectamente.

#### Esquema de Repetición

#### Paso 3: Probabilidad de Error con Redundancia (R3)

Para el esquema R3, necesitamos calcular la probabilidad de que la mayoría de los 3 bits recibidos sean incorrectos. Hay tres posibles formas en que esto puede suceder:

- Todos los 3 bits están incorrectos.
- Dos de los 3 bits están incorrectos.

La probabilidad de que todos los 3 bits estén incorrectos es f<sup>3</sup>

#### Esquema de Repetición

La probabilidad de que exactamente 2 de los 3 bits estén incorrectos se calcula usando la combinación:

 $P(2 \text{ de } 3 \text{ incorrectos}) = f^2(1-f)$ 

Por lo tanto, la probabilidad total de error con redundancia,  $P_e(R3)$  es:

$$P_e(R3) = f^3 + 3 f^2 (1-f)$$

1D4 2025

- Volvamos al desafío de detectar y corregir errores en BSC (f=0.1).
- Esquema simple: redundancia por repetición R<sub>3</sub>

 $g(s) = 000 \ 000 \ 111 \ 000 \ 111 \ 111 \ 000 \ ---$  mensaje codificado

- Volvamos al desafío de detectar y corregir errores en BSC (f=0.1).
- Esquema simple: redundancia por repetición R<sub>3</sub>

1D4 2025

- Volvamos al desafío de detectar y corregir errores en BSC (f=0.1).
- Esquema simple: redundancia por repetición R<sub>3</sub>

- Volvamos al desafío de detectar y corregir errores en BSC (f=0.1).
- Esquema simple: redundancia por repetición R<sub>3</sub>

- Volvamos al desafío de detectar y corregir errores en BSC (f=0.1).
- Esquema simple: redundancia por repetición R<sub>3</sub>

#### Ejercicio!

- Calcular la probabilidad de error en un esquema de repetición  $(R_3)$ .
- Mostrar que mejora respecto al caso sin redundancia para f = 0.1.

## Ejercicio!

- Calcular la probabilidad de error en un esquema de repetición  $(R_3)$ .
  - Un error en  $R_3$  se produce cuando se invierten dos o más bits en un bloque de 3.
  - Por lo tanto, la probabilidad de error en  $R_3$  es la suma de dos términos:

$$f^3$$
  $3f^2(1-f)$ 

$$p = f^3 + 3f^2(1 - f)$$

1D4 2025 4

### Ejercicio!

Mostrar que mejora respecto al caso sin redundancia para f = 0.1.

$$p = f^3 + 3f^2(1 - f)$$

Para f = 0.1:

$$(0.1)^3 + 3(0.1)^2(1-0.1) = 0.028$$
 prob. de error por bit

#### Redundancia por repetición

- Esquema simple: muy fácil de codificar/decodificar mensajes
- Reduce la probabilidad de error
- Podríamos seguir bajando arbitrariamente la tasa de error agregando bits de redundancia, pero..

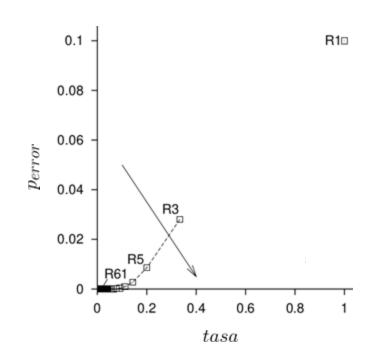
#### ¿Qué precio pagamos?

#### Redundancia por repetición

- Esquema simple: muy fácil de codificar/decodificar mensajes
- Reduce la probabilidad de error
- Podríamos seguir bajando arbitrariamente la tasa de error agregando bits de redundancia, pero..

#### ¿Qué precio pagamos?

 Tasa de transmisión cae según el factor k ( k = 3 en el ejemplo)

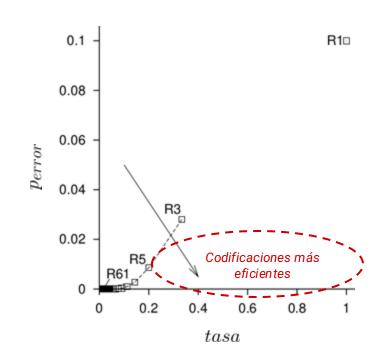


#### Redundancia por repetición

- Esquema simple: muy fácil de codificar/decodificar mensajes
- Reduce la probabilidad de error
- Podríamos seguir bajando arbitrariamente la tasa de error agregando bits de redundancia, pero..

#### ¿Qué precio pagamos?

 Tasa de transmisión cae según el factor k ( k = 3 en el ejemplo)



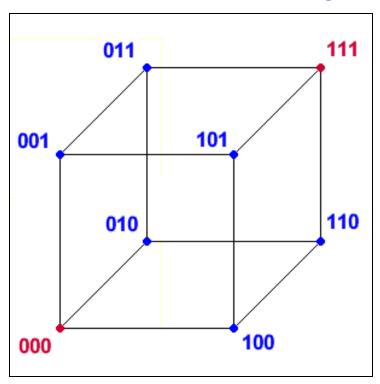
TD4 2025 51

#### Redundancia por bloques

- Nos gustaría comunicarnos con muy baja probabilidad de error a una tasa alta. ¿Podemos mejorar la redundancia mediante repetición?
- Idea: Agregar redundancia por bloques de datos en lugar de codificar un bit a la vez.

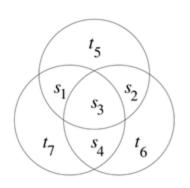
104 2025 52

## Distancia de código 3 (Hamming)



 Diagonales de un cubo

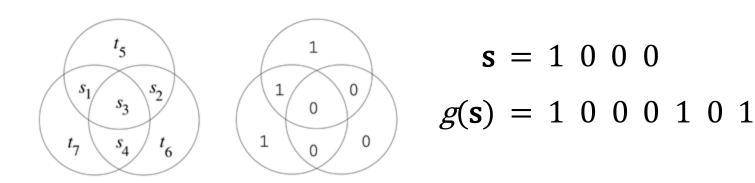
Código de **Hamming (7,4):** Cada 4 bits de mensaje se transmiten 7 (3 bits de redundancia)



mensaje=  $s_1 s_2 s_3 s_4$ 

mensaje hamming =  $s_1 s_2 s_3 s_4 t_5 t_6 t_7$ 

Código de Hamming (7,4): Cada 4 bits de mensaje se transmiten 7 (3 bits de redundancia)



Código de Hamming (7,4): Cada 4 bits de mensaje se transmiten 7 (3 bits de redundancia)

Símbolo	Código	Símbolo	Código
$s_1 = 0000$	$x_1 = 0000000$	$s_9 = 1000$	$x_9 = 1000101$
$s_2 = 0001$	$x_2 = 0001011$	$s_{10} = 1001$	$x_{10} = 1001110$
$s_3 = 0010$	$x_3 = 0010111$	$s_{11} = 1010$	$x_{11} = 1010010$
$s_4 = 0011$	$x_4 = 0011100$	$s_{12} = 1011$	$x_{12} = 1011001$
$s_5 = 0100$	$x_5 = 0100110$	$s_{13} = 1100$	$x_{13} = 1100011$
$s_6 = 0101$	$x_6 = 0101101$	$s_{14} = 1101$	$x_{14} = 1101000$
$s_7 = 0110$	$x_7 = 0110001$	$s_{15} = 1110$	$x_{15} = 1110100$
$s_8 = 0111$	$x_8 = 0111010$	$s_{16} = 1111$	$x_{16} = 11111111$

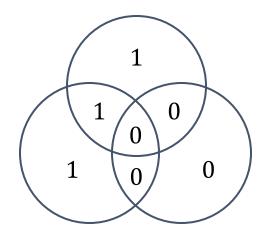
1D4 2025

- Códigos más complejos hacen más difícil el proceso de decodificación del mensaje. ¿Cómo podemos recuperar la secuencia de bits original?
  - Opción 1: Buscar en la tabla y quedarnos con la opción más cercana (distancia bit a bit). ¿Es la opción más eficiente?
  - Opción 2: ¿?

1D4 2025 57

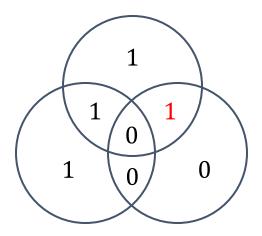
• Supongamos que se transmite **s** como:

$$\mathbf{s} = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \longleftarrow$$
 mensaje original  $g(\mathbf{s}) = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \longleftarrow$  Hamming (7,4)  $\mathbf{n} = 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \longrightarrow$  Ruido  $\mathbf{r} = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \longleftarrow$  Mensaje recibido



$$\mathbf{s} = 1 \ 0 \ 0 \ 0$$
 — mensaje original  $\mathbf{y} = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1$  — Mensaje recibido

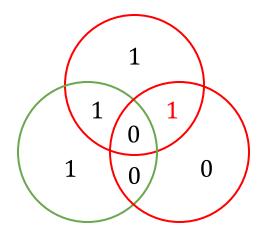
Paso 1: ubicar los elementos en los círculos



$$\mathbf{s} = 1 \ 0 \ 0 \ \longleftarrow$$
 mensaje original

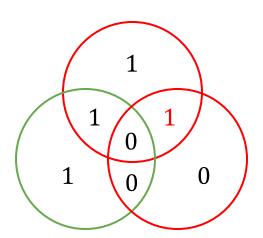
$$y = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \longleftarrow$$
 Mensaje recibido

- Paso 1: ubicar los elementos en los círculos
- Paso 2: marcar los círculos sin paridad par

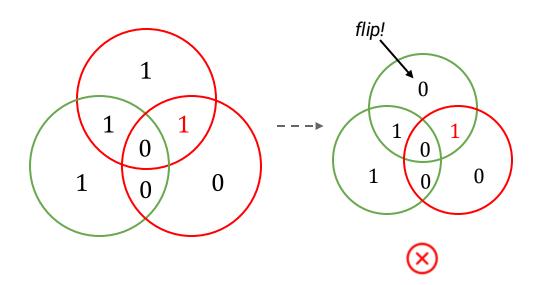


1D4 2025

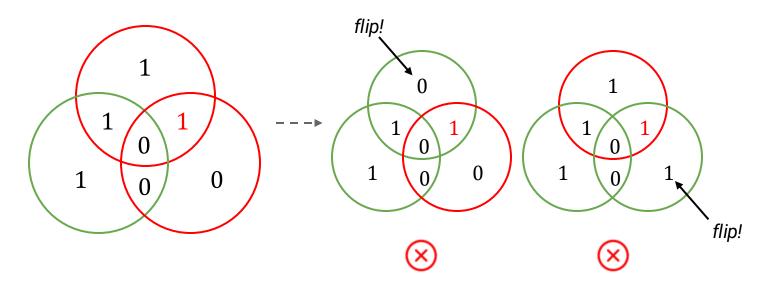
 Paso 3: encontrar la menor cantidad de flips que restauran la paridad:



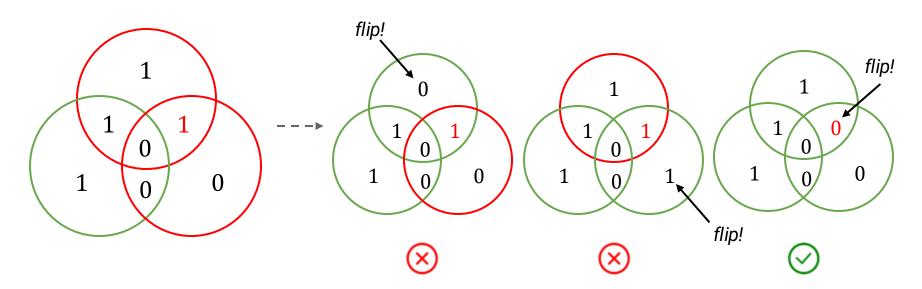
 Paso 3: encontrar la menor cantidad de flips que restauran la paridad:



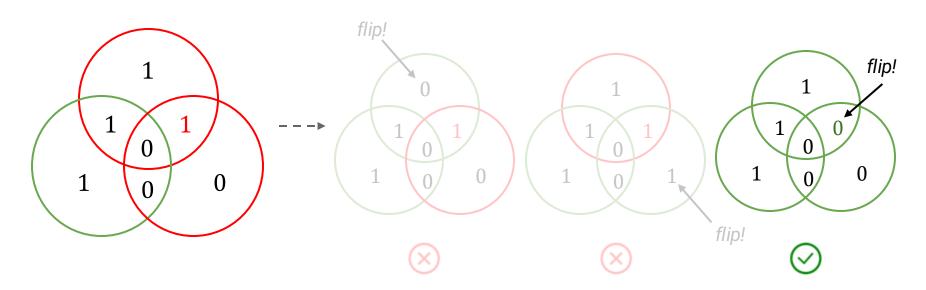
 Paso 3: encontrar la menor cantidad de flips que restauran la paridad:



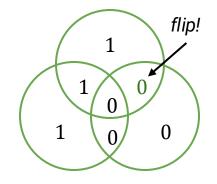
 Paso 3: encontrar la menor cantidad de flips que restauran la paridad:



 Paso 3: encontrar la menor cantidad de flips que restauran la paridad:

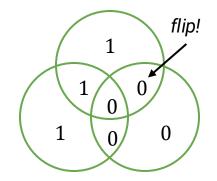


$$\mathbf{s} = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \longleftarrow$$
 mensaje original  $\mathbf{y} = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \longleftarrow$  Mensaje recibido  $1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \longleftarrow$  Mensaje corregido



 Las violaciones a la paridad de los círculos siguen un patrón y se pueden tabular en una "matriz de paridad":

$$\mathbf{s} = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \longleftarrow$$
 mensaje original  $\mathbf{y} = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \longleftarrow$  Mensaje recibido  $1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \longleftarrow$  Mensaje corregido



 Las violaciones a la paridad de los círculos siguen un patrón y se pueden tabular en una "matriz de paridad":

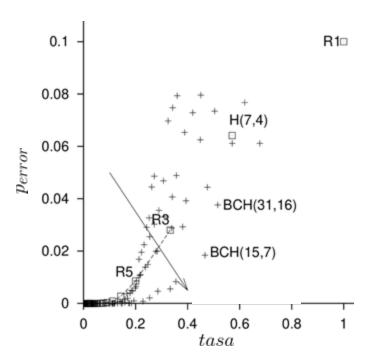
				<b>®</b>				
Patrón								
flip	-	$t_7$	$t_6$	$s_4$	$t_5$	$s_1$	$s_2$	$s_3$

#### Código de Hamming: resumen

- Todos los bloques recibidos están, a lo sumo, a un bit de distancia de lograr la paridad.
- Solo se pueden detectar y corregir errores de hasta un bit. Dicho de otro modo: se producirá un error de decodificación siempre que el ruido haya invertido más de un bit en un bloque de 7.
- La probabilidad de error es similar a la redundancia por repetición  $(R_3)$ , pero a una tasa de transmisión más alta (4/7 vs. 4/12).
- Existen generalizaciones a distintos tamaños de bloque (ej, [7,4],[15,7],[31,16], etc. Se conocen como códigos BCH.

#### Codificación: resumen

 Parece haber un trade-off entre la probabilidad de error (que queremos reducir) y la tasa de transmisión (que queremos mantener alta). "No pain, no gain".



#### Codificación: resumen

- Parece haber un trade-off entre la probabilidad de error (que queremos reducir) y la tasa de transmisión (que queremos mantener alta). "No pain, no gain".
- ¿Podemos obtener métodos de codificación con una performance dentro del área roja? ¿Cuál es la performance máxima que puede lograrse con el mejor algoritmo?

