Introducción a la teoría de grafos

Tecnología Digital V: Diseño de Algoritmos
Universidad Torcuato Di Tella

Grafos dirigidos

Ejercicio 1: Grafos y sus propiedades

Consideremos los grafos dirigidos. Un grafo dirigido $G = (V, E)$ se dice **fuertemente conexo** si para todo par de vértices $u, v \in V$, existe al menos un camino dirigido de u a v.

a) ¿Es posible construir un grafo dirigido fuertemente conexo con exactamente n vértices y $2n$ aristas para todo $n \in \mathbb{N}$? ¿y si tuviera n vértices y n aristas? Describe cómo sería o justifica por qué no es posible.

b) Considera un grafo dirigido G con n vértices donde cada vértice tiene un grado de salida mayor o igual a 1. Demuestra que $(\forall n \in \mathbb{N})$ este grafo contiene al menos un ciclo.

Solución a la Parte a

Solución a la Parte a

¿Es posible construir un grafo dirigido fuertemente conexo con n vértices y n o más aristas?

Sí, es posible. Para que un grafo dirigido sea fuertemente conexo, debe haber un camino dirigido de cualquier vértice a cualquier otro vértice.

- Empezamos formando un ciclo simple con los n vértices, utilizando n aristas.
- Con las aristas restantes, podemos agregarlas indiscriminadamente total ya existe al menos 1 camino dirigido entre dos vértices cualesquiera del grafo.

Solución a la Parte b

Demostración de que un grafo con n vértices y grado de salida de al menos 1 contiene al menos un ciclo

Vamos por construcción, hagamos el ciclo:

- Comenzamos por tomar un vértice cualquiera del grafo.
- Todo vértice tiene al menos una arista saliente (por tener grado de salida al menos 1), lo que significa que está conectado a otro vértice. Luego puedo continuar mi camino y tomar otro vértice.
- Si el nuevo vértice es uno que ya visité antes entonces hay un ciclo. Si no, sigo sacando vértices.
- Como el grafo es finito, en algún momento voy a tener que volver a llegar a un nodo del que ya salí (como mucho en n pasos).
- Por lo tanto hay al menos 1 ciclo en el grafo.

Ejercicio 2: Más inducción en grafos

Enunciado

Para todo grafo conexo $G = (V, E)$, hay al menos dos vértices $x_1, x_2 \in V$ tales que $G' = (V - \{x_i\}, E)$ es conexo con $i = 1, 2$. Es decir, si a G quitamos algún vértice x_1, x_2, el grafo continúa siendo conexo.

Demostramos por inducción en $n = |V|$, la cantidad de nodos del grafo.
Caso base: Si tomamos el grafo conexo G con $n = 2$, al quitar los vértices se cumple que el grafo es conexo, dado que queda un vértice.
Hipótesis inductiva: Sea $G = (V, E)$ con $n \geq 2$, asumimos que el teorema vale para todo grafo $G' = (V', E')$ con $n' < n$.
Paso inductivo: Si $G - x$ es conexo $\forall x \in V$, no hay nada que demostrar.
En cambio, si tomamos $x \in V$ tal que $G - x$ no es conexo, entonces podemos dividir el grafo en las componentes conexas $C_1, C_2, ..., C_m$ con $m \geq 2$.
Si a cada componente conexa C_i le volvemos a agregar el vértice x que quitamos con sus respectivas aristas, entonces nos queda la componente conexa C_i' que tiene al menos 2 vértices. Además, sabemos que la cantidad de nodos de C_i' es menor a la cantidad de nodos de $G \Rightarrow$ Usamos la HI.
Por la hipótesis inductiva, sabemos que debe haber al menos un vértice $x_i \in C_i', x_i \neq x$ tal que la componente $C_i' - x_i$ continúa siendo conexa. Por lo tanto, como teníamos al menos dos componentes C_i, podemos quitar al menos un x_i por componente, lo cual prueba lo enunciado.

Ejercicio 3: Cómo no usar inducción

Enunciado

Todo grafo $G = (V, E)$ con $n \geq 3$ y con todos los vértices de grado ≥ 2 contiene un ciclo de longitud 3.

Demostramos por inducción en $n = |V|$, la cantidad de nodos del grafo.

Caso base: Si tomamos el grafo conexo G con $n = 3$, como todos deben tener grado ≥ 2, todos van tener una arista con los demás por lo que es trivial el ciclo de longitud 3.

Hipótesis inductiva: Sea $G = (V, E)$ el grafo con $n - 1$ vértices para el cual el teorema es válido.

Paso inductivo: Si definimos G' como el grafo G agregándole un vértice y al menos 2 aristas, vemos que como G contiene un ciclo de longitud 3, entonces G' también debe contenerlo. Por lo tanto, se prueba lo enunciado.

Esta demostración es errónea. Esto se debe a que no es correcto partir la demostración desde un caso en el cual se cumple y agregar un vértice para el cual el resultado se mantiene, ya que no estamos cubriendo todos los grafos con un vértice menos. Por ejemplo, si tenemos 4 vértices conectados en forma de cuadrado, es claro que no hay ciclos de longitud 3.

Por eso siempre que probamos por inducción, el paso inductivo debe asumir que se hace uso de un grafo arbitrario con esa cantidad de vértices o de aristas.