

CAMINO MÍNIMO

Tecnología Digital V: Diseño de Algoritmos

Universidad Torcuato Di Tella

Objetivo

Durante la clase de hoy nos dedicaremos a resolver problemas modelandolos como problemas camino mínimo. Es decir, para resolverlos usaremos nada más que herramientas de grafos y **Dijkstra**.

Problema

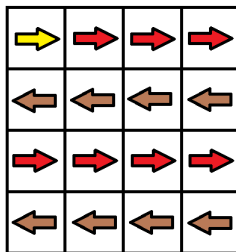
Se nos da una grilla de $n \times m$. Dentro de cada celda de la grilla, hay una flecha indicando hacia dónde podemos ir desde esa celda.

Nuestro objetivo es decir cuál es la cantidad mínima de flechas que hay que modificar con tal de que se forme un camino válido entre la celda superior izquierda y la inferior derecha.

Problema

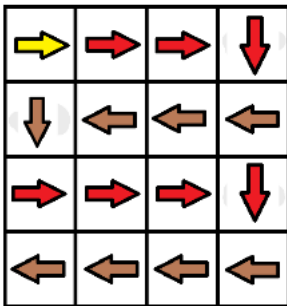
Se nos da una grilla de $m * n$. Dentro de cada celda de la grilla, hay una flecha indicando hacia dónde podemos ir desde esa celda.

Nuestro objetivo es decir cuál es la cantidad mínima de flechas que hay que modificar con tal de que se forme un camino válido entre la celda superior izquierda y la inferior derecha.



Ejercicio 1

Por ejemplo en la siguiente grilla, necesitamos hacer 3 cambios para lograr el camino: modificando por ejemplo, las flechas $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(2, 3)$



Solución

Lo modelamos con un digrafo pesado $G = (V, E)$ donde:

- V = conjunto que contiene un nodo por cada una de las celdas.
- E = conjunto que tiene una arista dirigida desde cada nodo a sus adyacentes en la grilla original.
- El peso de las aristas es 0 cuando la arista va en la misma dirección que la flecha en la grilla original y 1 en caso contrario.

Luego, al correr Dijkstra desde la esquina superior izquierda sobre el grafo, obtenemos a partir del camino mínimo a la esquina inferior derecha la cantidad mínima de cambios que necesitamos.

Problema

Un escalador se está preparando para una escalada. Tiene un mapa de las zonas a recorrer en forma de matriz $n \times m$ donde cada valor de la matriz representa la altura de la zona. Comienza de la zona superior izquierda y debe llegar a la inferior derecha. Sólo puede moverse de forma vertical u horizontal, siempre respetando las zonas.

El escalador nos pidió que le digamos cuál es la ruta que requiere mínimo esfuerzo. El esfuerzo de la ruta se define como la máxima diferencia absoluta entre las alturas de dos celdas consecutivas en la ruta.

Problema

Un escalador se está preparando para una escalada. Tiene un mapa de las zonas a recorrer en forma de una matriz $n \times m$ donde cada valor de la matriz representa la altura de la zona. Comienza en la zona superior izquierda y debe llegar a la inferior derecha. Sólomente puede moverse de forma vertical u horizontal, siempre respetando las zonas.

El escalador nos pidió que le digamos cuál es la ruta que requiere mínimo esfuerzo. El esfuerzo de la ruta se define como la máxima diferencia absoluta entre las alturas de dos celdas consecutivas en la ruta.

1	2	2		
2				
3	8	2		
2				
5	2	3	2	5

Pasos a seguir:

- Modelar el problema como un grafo
 - Es un grafo o un digrafo?
 - Cuál es el conjunto de nodos?
 - Cuál es el conjunto de aristas?
 - Cuál es el peso de las aristas?
- Resolver como camino mínimo. **Pista:** Dijkstra necesita una modificación para funcionar en este caso, cuál?

Solución

Lo modelamos con un grafo pesado $G = (V, E)$ donde:

- V = conjunto que contiene un nodo por cada una de las zonas.
- E = conjunto que tiene una arista desde cada nodo a sus adyacentes en el mapa.
- El peso de las aristas es la diferencia absoluta entre cada par de zonas adyacentes.

Solución

Sin embargo, si corremos Dijkstra sobre este grafo, no nos dará la respuesta que buscamos (en el mapa de ejemplo se puede ver que devolvería una ruta no ideal).

Entonces, modificamos la función de distancias tentativas de forma tal que la distancia tentativa a un nodo represente el esfuerzo máximo en el camino. Es decir, la distancia a un nodo será el máximo entre la distancia al anterior y el costo de la arista (a diferencia del algoritmo común donde estos se suman). Ahora si, usamos Dijkstra.