Problemas de flujo en redes

Tecnología Digital V: Diseño de Algoritmos
Universidad Torcuato Di Tella

Lester Ford
(1927–2017)

Delbert Fulkerson
(1924–1976)

- El algoritmo de Ford y Fulkerson (1956) obtiene un flujo máximo con complejidad $O(nmU)$, donde $U = \max_{ij \in A} u_{ij}$.

Definir un flujo inicial en N (por ejemplo, $x = 0$)
mientras exista $P :=$ camino de aumento en $R(G, x)$ **hacer**
  para cada arco $ij \in P$ **hacer**
    si $ij \in A$ **entonces**
      $x_{ij} := x_{ij} + \Delta(P)$
    si no $(ji \in A)$
      $x_{ji} := x_{ji} - \Delta(P)$
    fin si
  fin para
fin mientras

- Dada una red $G = (N, A)$ con función de capacidad u y un flujo factible x, definimos la red residual $R(G, x) = (N, A_R)$, donde:

  1. $ij \in A_R$ si $x_{ij} < u_{ij}$,
  2. $ji \in A_R$ si $x_{ij} > 0$.

- Un camino de aumento es un camino orientado de s a t en $R(G, x)$.

- Dado un camino de aumento P, para cada arco $ij \in P$ definimos

$$\Delta(ij) = \begin{cases} u_{ij} - x_{ij} & \text{si } ij \in A \\ x_{ji} & \text{si } ji \in A \end{cases}$$

- Definimos además $\Delta(P) = \min_{ij \in P}\{\Delta(ij)\}$.
- Podemos encontrar un camino de aumento P en la red residual en $O(m)$, y calculamos $\Delta(P)$ en $O(n)$.

Proposición

Sea x un flujo definido sobre una red N con valor F y sea P un camino de aumento en $R(G,x)$. Entonces el flujo $\bar{x}$, definido por

$$\bar{x}(ij) = \begin{cases} x_{ij} & \text{si } ij \notin P \\ x_{ij} + \Delta(P) & \text{si } ij \in P \\ x_{ij} - \Delta(P) & \text{si } ji \in P \end{cases}$$

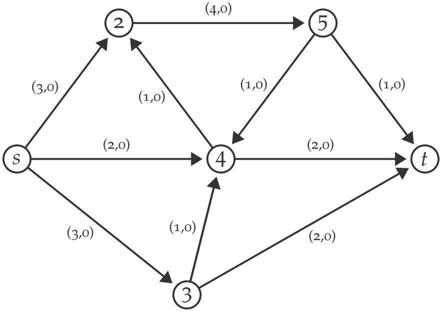
es un flujo factible sobre N con valor $\bar{F} = F + \Delta(P)$.

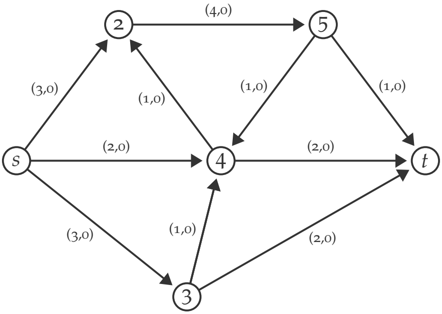
Teorema

Sea x un flujo definido sobre una red N. Entonces x es un flujo máximo $\Longleftrightarrow$ no existe camino de aumento en $R(G,x)$.

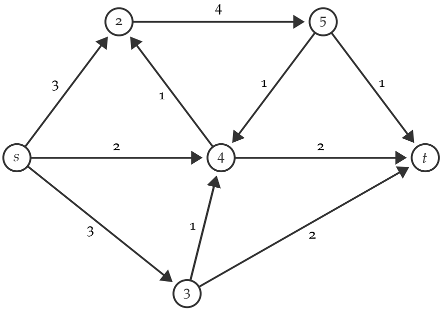
Teorema (max flow-min cut)

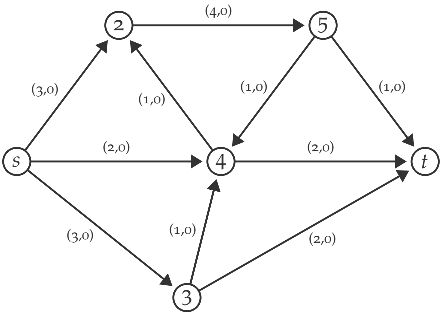
Dada una red N, el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.


2
5
s
4
t
3
(4,0)
(3,0)
(1,0)
(1,0)
(1,0)
(2,0)
(2,0)
(3,0)
(1,0)
(2,0)

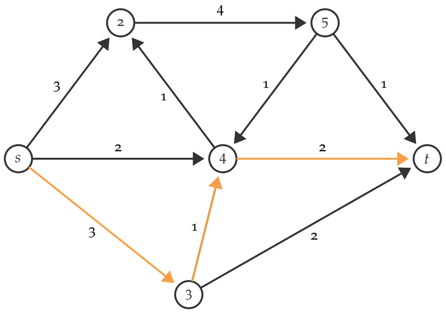


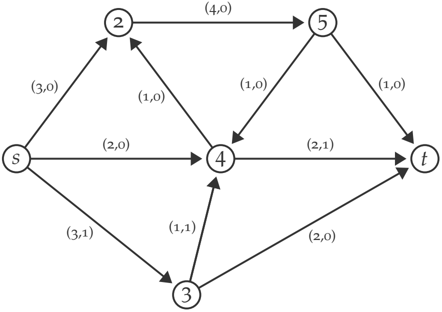
$R(G, x)$



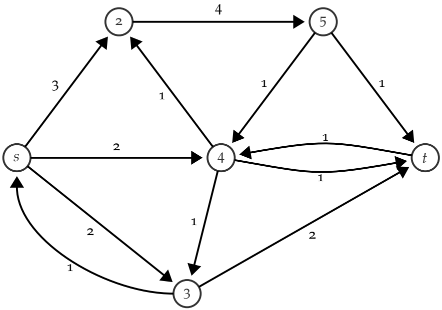


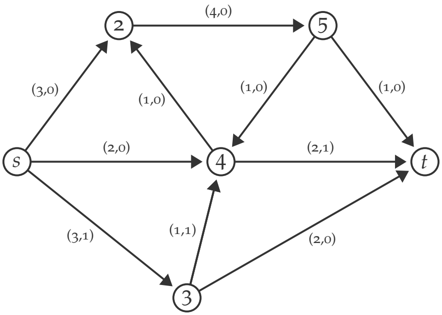
$R(G, x)$



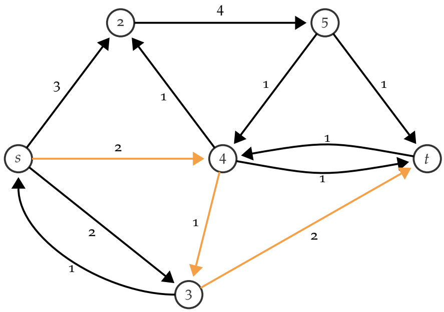


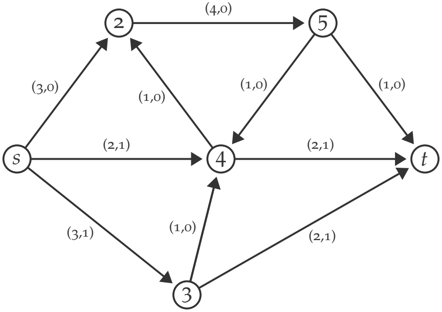
$R(G, x)$



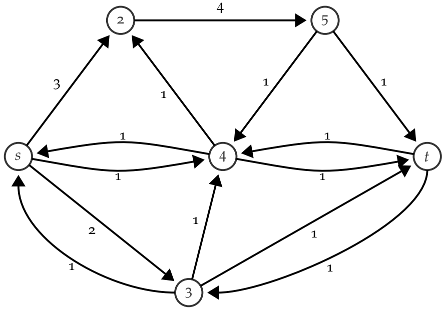


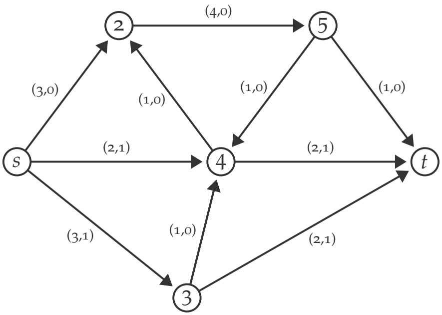
$R(G, x)$



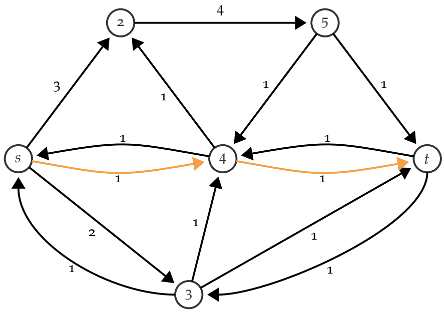


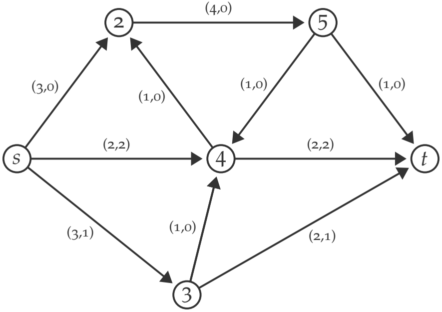
$R(G, x)$



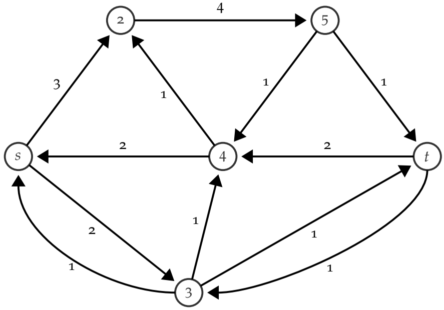


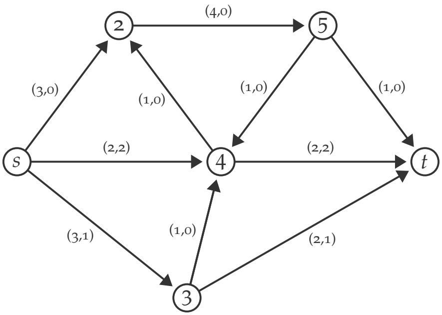
$R(G,x)$



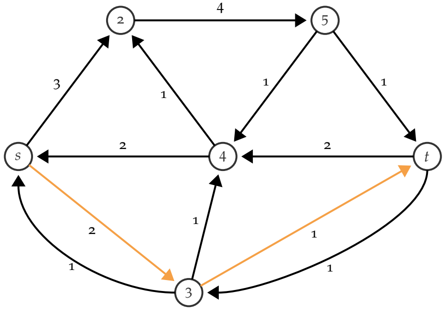


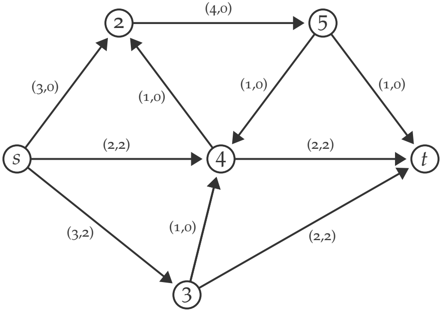
$R(G, x)$



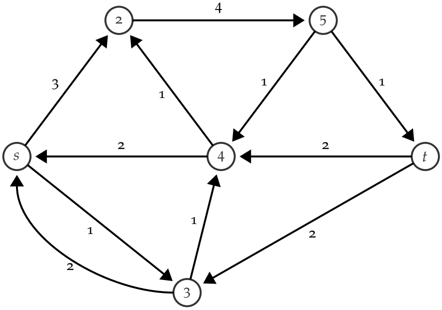


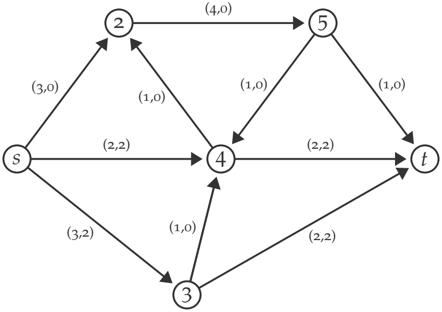
$R(G, x)$



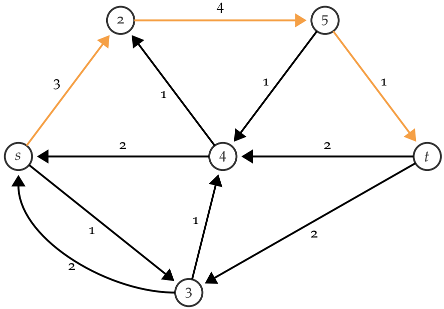


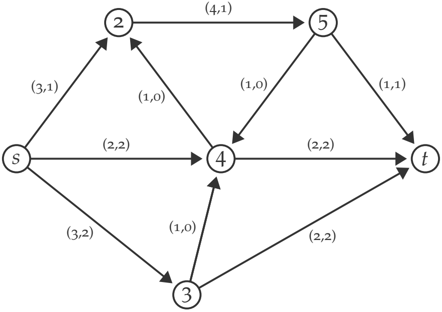
$R(G, x)$



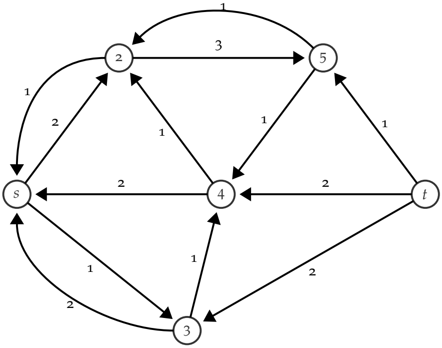


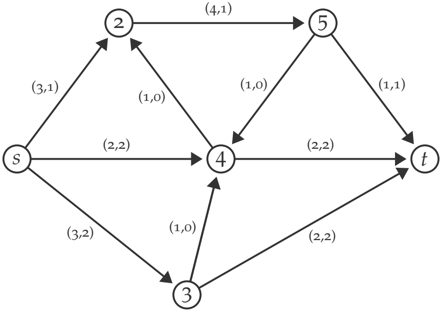
$R(G, x)$





$R(G, x)$





$R(G, x)$