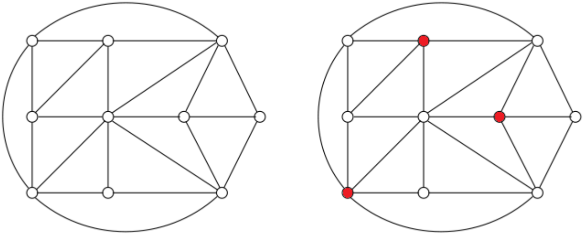
Problemas y aplicaciones sobre grafos

Tecnología Digital V: Diseño de Algoritmos

Universidad Torcuato Di Tella

Conjunto independiente y clique



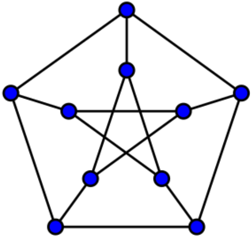
Definición

1. Un conjunto independiente de un grafo $G = (V, E)$ es un subconjunto $I \subseteq V$ de vértices tal que $ij \notin E$ para todo $i, j \in I$.
2. Una clique de un grafo $G = (V, E)$ es un subconjunto $K \subseteq V$ de vértices tal que $ij \in E$ para todo $i, j \in K$.

Conjunto independiente y clique

Definición

1. Notamos $\alpha(G)$ al tamaño del máximo conjunto independiente de G.
2. Notamos $\omega(G)$ al tamaño de la clique máxima de G.



El grafo de Petersen P

Pregunta

¿Cuánto valen $\alpha(P)$ y $\omega(P)$?

Conjunto independiente y clique

Aplicación

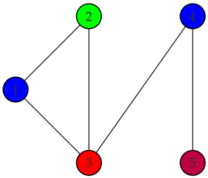
Tenemos un grafo $G = (V, E)$ que representa los usuarios de una red social. Una arista entre dos vértices representa que los usuarios correspondientes están conectados (son "amigos") en la red social.

- Suponemos que los pares de usuarios amigos comparten características en común.
- Sea $K \subseteq V$ una clique (pequeña) de usuarios que convirtieron (i.e., dieron click sobre) una publicidad.
- **Pregunta.** ¿Cuál es la clique $Q \subseteq V$ de tamaño máximo tal que $K \subseteq Q$? (¿y por qué nos interesa Q?)

Definición

Dado un grafo $G = (V, E)$, la función $f : V \to \mathbb{N}$ es un coloreo (de los vértices) de G si $f(i) \neq f(j)$ para todo $ij \in E$.

Intuitivamente, buscamos *pintar* los vértices (número = color) con colores de forma tal que vértices adyacentes tengan colores distintos.

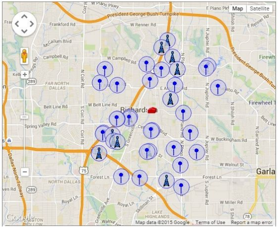


Preguntas

- ¿Es **válido** este coloreo?
- En caso de que lo sea, ¿es **mínimo**?
- ¿Podemos proveer una **cota superior** para el número mínimo de colores?
- ¿Podemos proveer una **cota inferior** para el número mínimo de colores?

Coloreo de grafos

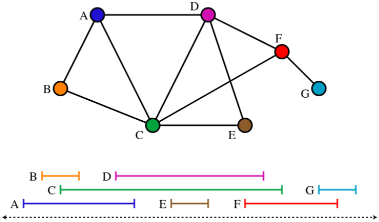
Red de telefonía celular



Pregunta: ¿Cuál es el mínimo número de frecuencias para cubrir el área sin interferencias?

- Modelamos el problema con el grafo de interferencias $G = (V, E)$.
- Buscamos un coloreo válido para G con el mínimo número de colores.

Asignación de aulas

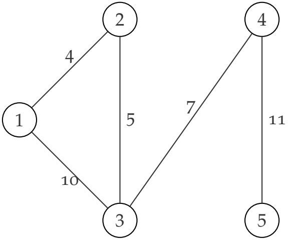


Pregunta: ¿Cuál es el mínimo número de aulas que necesitamos para dictar todos los cursos?

- Modelamos el problema con el grafo de intervalos $G = (V, E)$.
- Buscamos un coloreo válido para G con el mínimo número de colores.

Definiciones

1. Un grafo con pesos en los vértices es un grafo $G = (V, E)$ junto con una función $w : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Para $i \in V$, decimos que $w_i := w(i)$ es el peso del vértice i.
2. Un grafo con pesos en las aristas es un grafo $G = (V, E)$ junto con una función $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Para $ij \in E$, decimos que $w_{ij} := w(ij)$ es el peso de la arista ij.



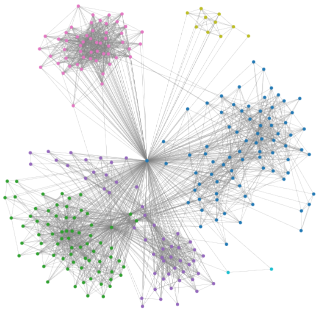
$G = (V, E)$ con

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y
- $E = \{12, 13, 23, 34, 45\}$
- $w_{12} = 4, w_{13} = 10, w_{23} = 5, w_{45} = 11, w_{34} = 7$.

Pregunta

¿Qué pueden representar pesos en los vértices? Y en las aristas?

Grafos pesados

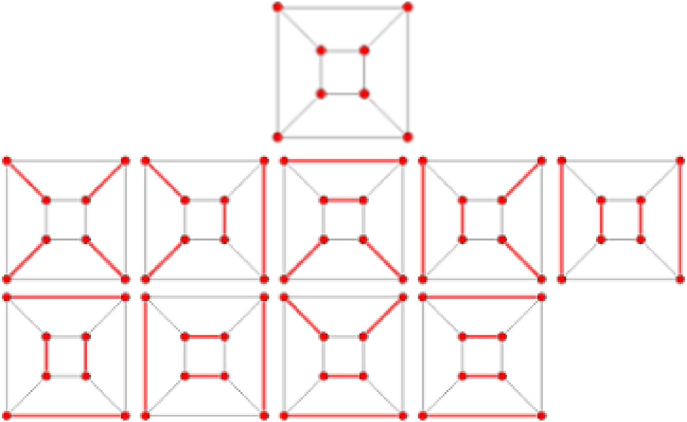


Pregunta

En el ejemplo de la red social, supongamos que ahora tenemos un grafo con pesos en las aristas, de modo tal que $w_{ij} \in [0, 1]$ representa la similitud entre los usuarios i y j, para $ij \in E$. ¿Qué problema podemos resolver ahora para intentar mejorar la conversión de un anuncio?

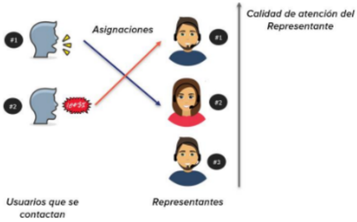
Definición

Un matching de un grafo $G = (V, E)$ es un subconjunto $M \subseteq E$ de aristas tal que para todo $i \in V$ a lo sumo existe una arista en M incidente a i.



En la práctica

En un determinado instante, un conjunto de usuarios que contactan a soporte al cliente tienen que ser atendidos por representantes con diferentes habilidades, experiencia, etc.



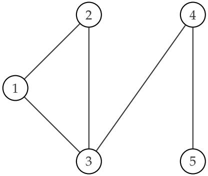
Definimos:

- $V_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ el conjunto de clientes,
- $V_2 = \{n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2\}$ el conjunto de representantes,
- $G = (V = V_1 \cup V_2, E, w)$ el grafo bipartito completo K_{n_1, n_2},
- w_{ij} el beneficio esperado de asignar el representante j al cliente i, $ij \in E$.

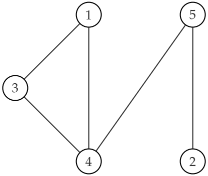
Definición

Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ se dicen **isomorfos** si existe una función biyectiva $f : V \to V'$ y para todo $v, w \in V$

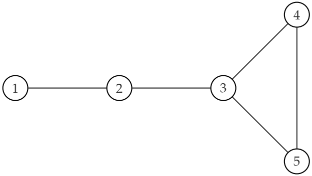
$$(v, w) \in E \iff (f(v), f(w)) \in E'.$$



(a) $G = (V, E)$



(b) $G' = (V', X')$



(c) $G'' = (V'', E'')$

Intuitivamente

Dos grafos son isomorfos si son esencialmente el mismo grafo salvo un renombre de los vértices.

Isomorfismo entre grafos

Proposición

Si dos grafos son isomorfos, entonces

- tienen el mismo número de vértices,
- tienen el mismo número de aristas,
- para todo k, $0 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de vértices de grado k,
- tienen el mismo número de componentes conexas,
- para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud k.

Preguntas (la segunda está abierta!)

- ¿Es cierta la recíproca de esta propiedad?
- ¿Hay condiciones necesarias y suficientes fácilmente verificables para ver si dos grafos son isomorfos?