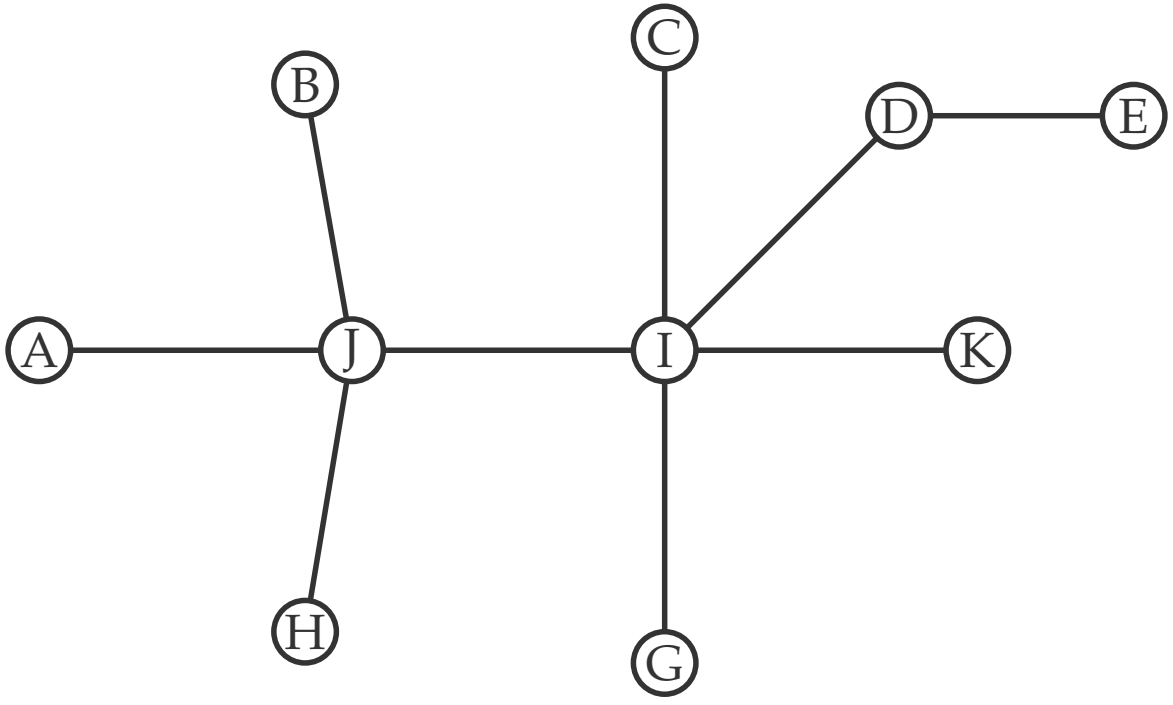
Árbol generador mínimo

Tecnología Digital V: Diseño de Algoritmos
Universidad Torcuato Di Tella

UNIVERSIDAD
TORCUATO DI TELLA

Árboles



Definición

Un árbol es un grafo conexo sin circuitos.

Definición

Una hoja es un nodo de grado 1.

Teorema

Todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas.

Teorema

Dado un grafo $G = (V, E)$ son equivalentes:

1. G es un árbol.
2. G no tiene circuitos y $m = n - 1$.
3. G es conexo y $m = n - 1$.
4. G es un grafo sin circuitos simples, pero si se agrega cualquier arista e a G resulta un grafo con exactamente un circuito simple, y ese circuito contiene a e.
5. Existe exactamente un camino simple entre todo par de nodos.
6. G es conexo, pero si se quita cualquier arista a G queda un grafo no conexo.

Árbol generador mínimo

Árbol generador

Dado un grafo G, un árbol generador de G es un subgrafo de G que es un árbol y tiene el mismo conjunto de vértices que G.

Longitud de un árbol generador

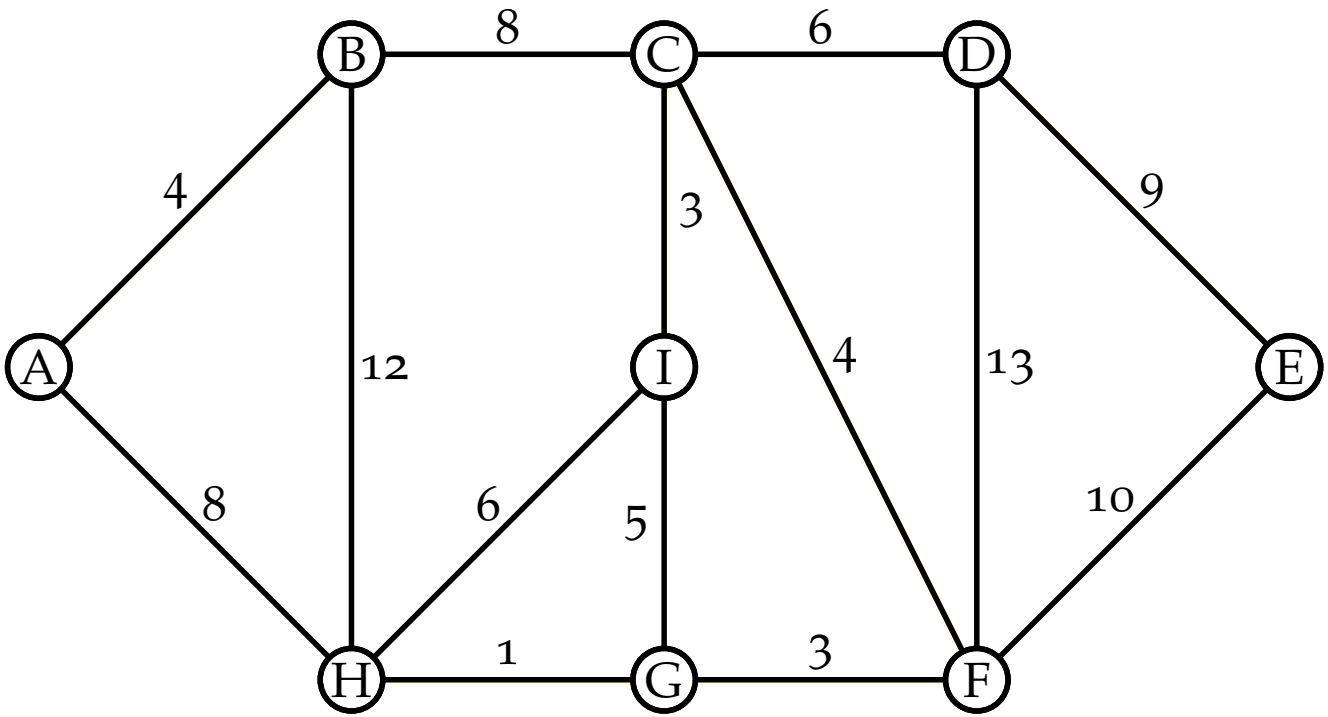
Sea $T = (V, E)$ un árbol y $l : E \to R$ una función que asigna longitudes (o pesos) a las aristas de T. Se define la longitud de T como $l(T) = \sum_{e \in T} l(e)$.

Árbol generador mínimo

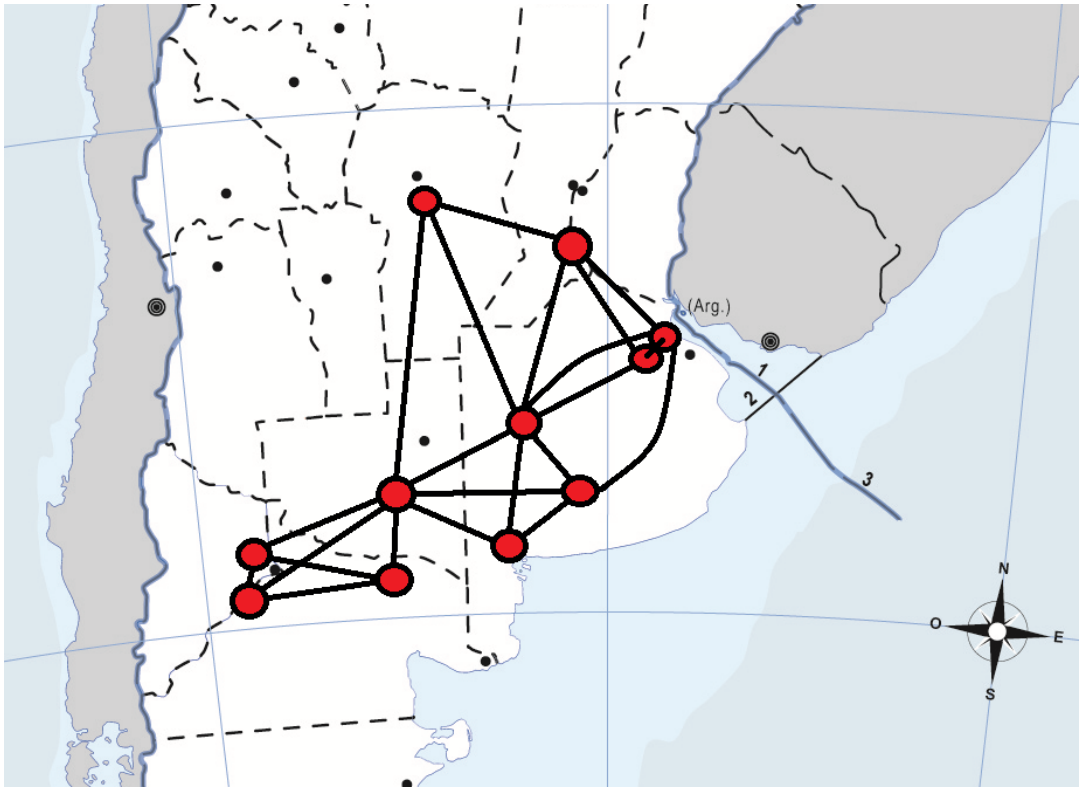
Dado un grafo $G = (V, E)$ un árbol generador mínimo T de G es un árbol generador de G de mínima longitud, es decir

$$l(T) \leq l(T') \qquad \text{para todo } T' \text{ árbol generador de } G.$$

Ejemplo



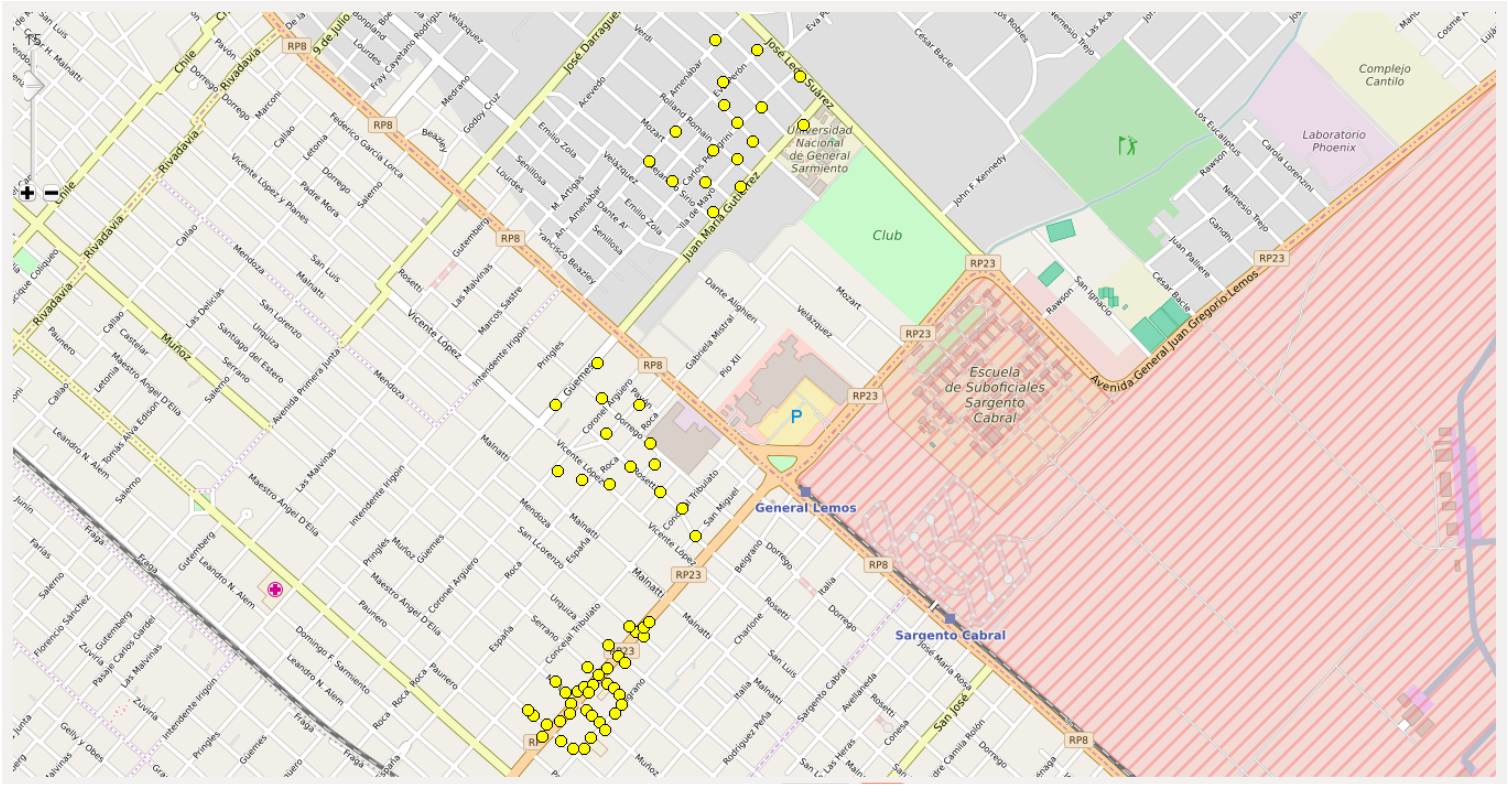
Aplicaciones

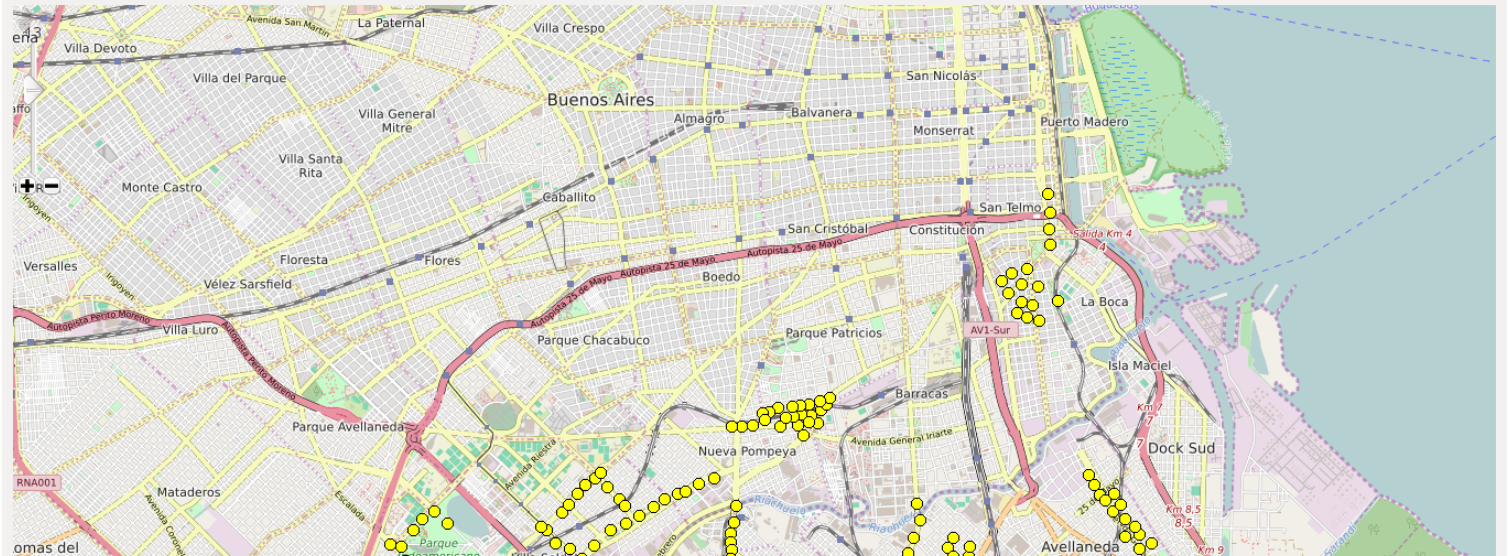


Conexión con costo mínimo de una red eléctrica.

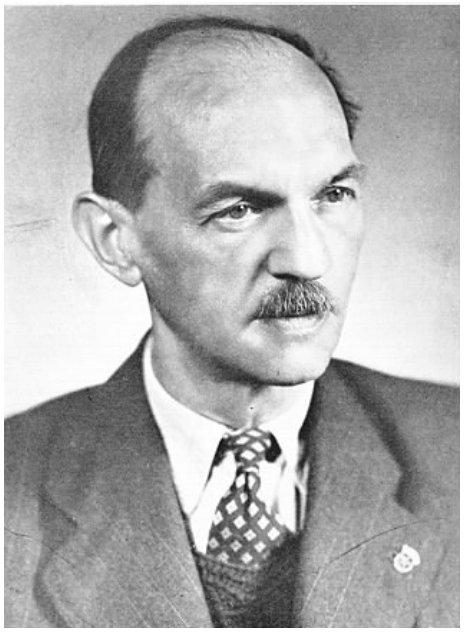
- Si las longitudes de las aristas representan el costo de construir una línea de alta tensión, un árbol generador mínimo proporciona la estrategia de menor costo para interconectar la red completa.

Aplicaciones





Algoritmo de Prim



Vojtech Jarnik
(1897–1970)

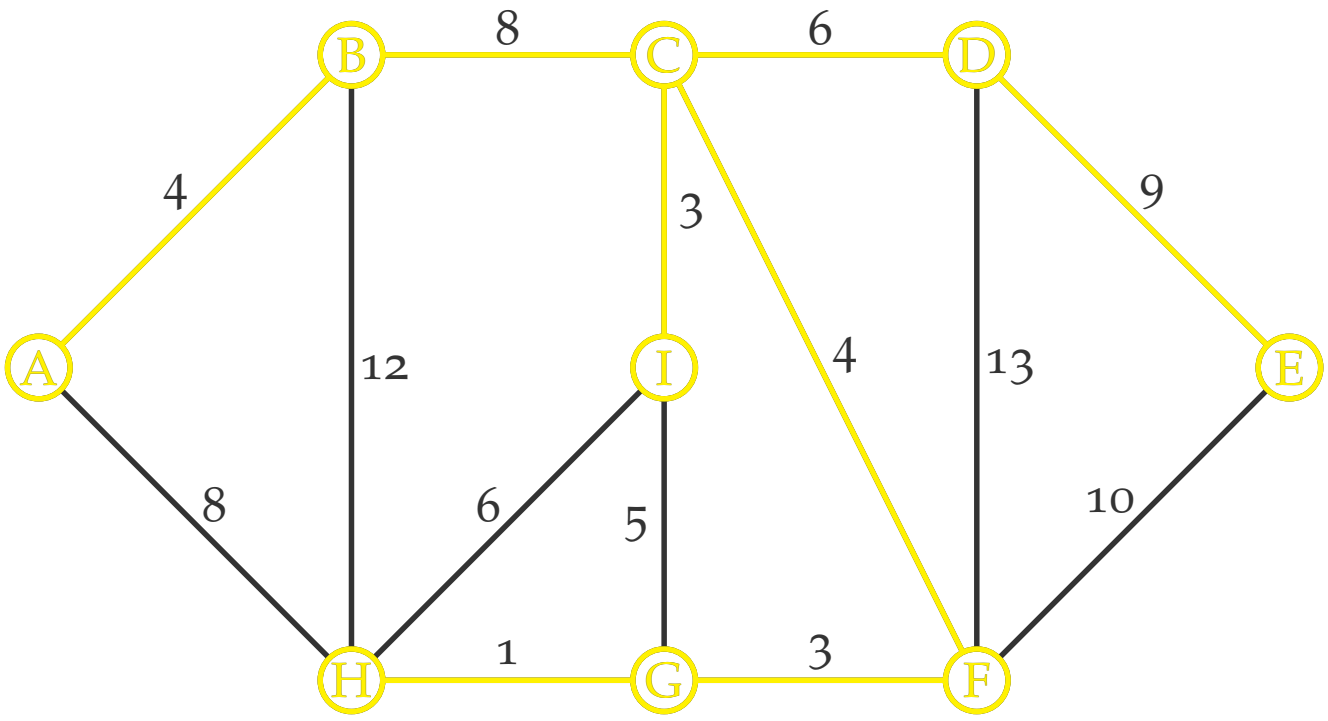
Robert Prim
(1921–2021)

Edsger Dijkstra
(1930–2002)

Algoritmo de Prim

$V_T := \{u\}$ (u cualquier vértice de G)
$E_T := \emptyset$
$i := 1$
mientras $i \leq n - 1$ **hacer**
    elegir $e = (u, v) \in E$ tal que $l(e)$ sea mínima
        entre las aristas que tienen un extremo
        $u \in V_T$ y el otro $v \in V \setminus V_T$
    $E_T := E_T \cup \{e\}$
    $V_T := V_T \cup \{v\}$
    $i := i + 1$
retornar $T = (V_T, E_T)$

Ejemplo



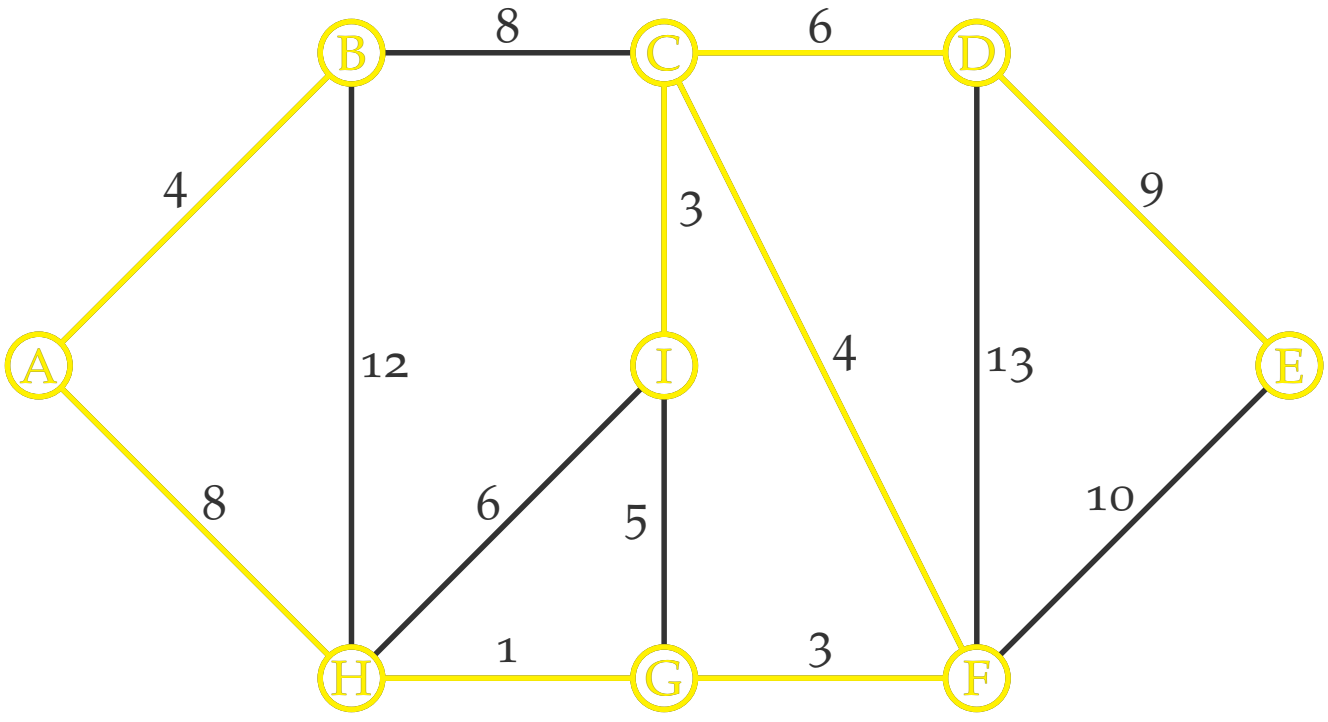
Algoritmo de Kruskal

Joseph Kruskal
(1928–2010)

Algoritmo de Kruskal

$E_T := \emptyset$
$i := 1$
mientras $i \leq n - 1$ **hacer**
    elegir $e \in E$ tal que $l(e)$ sea mínima entre las
        aristas que no forman circuito con las
        aristas que ya están en E_T
    $E_T := E_T \cup \{e\}$
    $i := i + 1$
retornar $T = (V, E_T)$

Ejemplo



Union-Find

Bernard Galler (1928–2006)

Michael Fischer (1942)

- Podemos mejorar la complejidad computacional del Algoritmo de Kruskal por medio de la estructura de datos union-find (Galler y Fischer, 1964).

Union-Find

- Mantenemos un arreglo especificando en qué componente conexa está cada vértice.
  1. El arreglo contiene el padre de cada vértice. Cada vértice está en la misma componente conexa que su padre.
  2. Se forma una estructura de árbol, cuya raíz es el representante de la componente conexa.

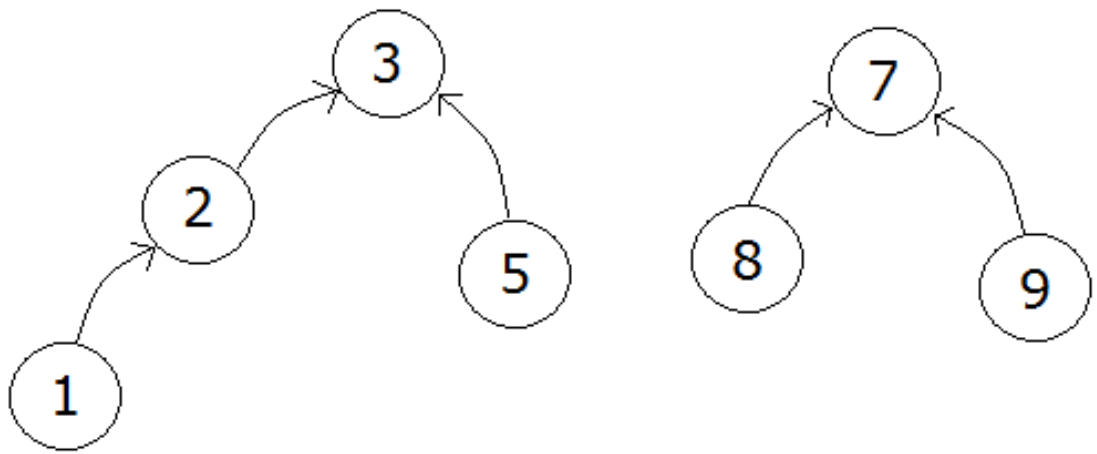
- Inicialmente, cada vértice está en su propia componente conexa:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Después de algunas iteraciones, tendremos varias componentes conexas:

0	2	3	3	4	3	6	7	7	7

- Representamos esta situación con un árbol por cada componente conexa:



Union-Find

- Dado un vértice, es fácil encontrar su raíz:

```
int root(int i)
{
  while(A[i] != i)
    i = A[i];

  return i;
}
```

- Para determinar si dos vértices están en la misma componente conexa:

```
boolean find(int i, int j)
{
  return raiz(i) == raiz(j);
}
```

Union-Find

- La única operación que modifica la estructura es la unión de dos componentes conexas.
- Hacemos que la raíz de una de ellas apunte a la raíz de la otra:

```
void union(int i, int j)
{
  int ri = root(i);
  int rj = root(j);

  A[ri] = rj;
}
```

- ¿Qué complejidad computacional tienen estas operaciones?
  1. Union: $O(n)$
  2. Find: $O(n)$

- Si llevamos la cuenta de la cantidad de elementos en cada componente conexa, podemos hacer que la raíz del menor árbol apunte a la raíz del mayor. Con esto, logramos:

  1. Union: $O(\log n)$
  2. Find: $O(\log n)$

- Podemos compactar los árboles cuando se hace find(), con las siguientes operaciones:

  1. **Path compression:** Hacer que todos los nodos apunten a la raíz.
  2. **Path splitting:** Hacer que cada nodo apunte a su abuelo.
  3. **Path halving:** Aplicar *path splitting* nodo de por medio.

Definición: Función de Ackermann

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{si } m > 0 \text{ y } n = 0 \\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{si } m > 0 \text{ y } n > 0 \end{cases}$$

- La función de Ackermann crece muy rápidamente! Por ejemplo, $A(4,2)$ tiene 19.729 dígitos decimales.
- Si se usa alguna de las técnicas de compactación y la unión por tamaño (o por altura), entonces el tiempo amortizado de cada operación es $O(\alpha(n))$, donde $\alpha(n)$ es la inversa de $A(n,n)$.
- La función $\alpha(n)$ crece muy lentamente! A fines prácticos, $\alpha(n) \leq 5$ para cualquier valor de n que utilicemos.