

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

Tecnología Digital V: Diseño de Algoritmos
Universidad Torcuato Di Tella

- **Objetivos.** Conocer técnicas de diseño de algoritmos que nos permitan resolver problemas más difíciles que los que resolvimos hasta ahora.
 1. Introducción a la teoría de grafos.
 2. Técnicas algorítmicas: backtracking, programación dinámica, heurísticas y metaheurísticas, algoritmos aproximados, etc.
 3. Introducción a la teoría de NP-completitud.
 4. Aplicaciones. Cómo usar estas técnicas para modelar y resolver problemas prácticos.

○ Clases.

- Dos módulos de clases teóricas y dos módulos de clases prácticas por semana.
- Las disposición de clases prácticas / teóricas puede cambiar debido al calendario.

○ Régimen de cursada.

- Dos parciales escritos e individuales. Se aprueban con 60/100.
- Dos trabajos prácticos grupales (uno en cada mitad de la materia). Se aprueban con 60/100.

$$\text{nota final} = \min \left\{ 100, \frac{30(\text{parcial}_1 + \text{parcial}_2) + 20(\text{TP}_1 + \text{TP}_2)}{100} \right\}$$

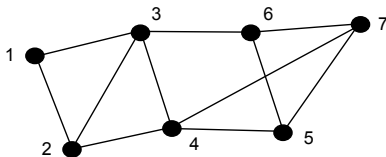
- Recuperatorios:
 - Máximo dos recuperatorios entre trabajos prácticos y parciales.
 - Nota de recuperatorio reemplaza nota original.
 - Para trabajos prácticos, nota máxima es 70/100.

○ Comunicación. El material de las clases y las consultas se canalizan a través del campus virtual.

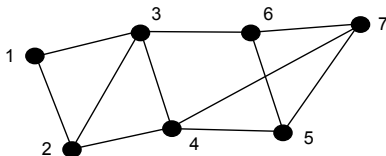
Definición

Un **grafo** es un par $G = (V, E)$ tal que ...

1. V es un conjunto finito (llamado el conjunto de **vértices** de G), y
2. $E \subseteq \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\}$ es un conjunto de **aristas**.



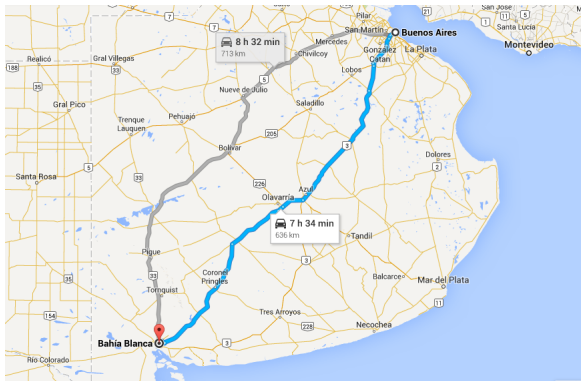
- En este ejemplo, $V = \{1, \dots, 7\}$ y $E = \{12, 13, 23, 24, 34, 36, 45, 47, 56, 57, 67\}$.



- El orden de los **extremos** de una arista no es importante. Nos referimos indistintamente a la arista 34 como 43 o bien $\{3, 4\}$.

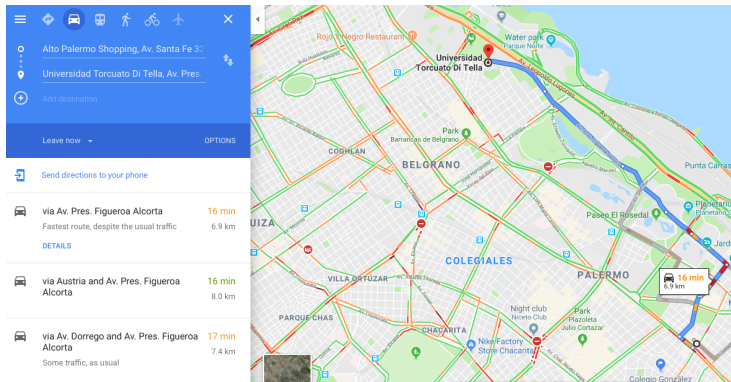
Definiciones

1. Si $ij \in E$, decimos que los vértices i y j son **vecinos**.
2. Dado $i \in V$, definimos el **vecindario** de i como $N(i) = \{j \in V : ij \in E\}$.
3. El **grado** de un vértice $i \in V$ es $d(i) = |N(i)|$.



Red vial I

Representamos con grafos un **mapa de rutas** entre un grupo de ciudades (los vértices representan las ciudades y los cruces de caminos).



Red vial II

Cambiando la interpretación, con grafos podemos representar **mapas de ciudades** (los vértices representan las esquinas!).



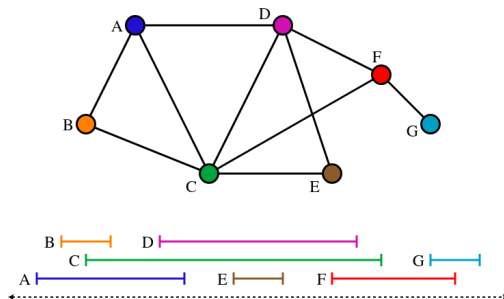
Red de transporte

Podemos representar una **red de transporte** con grafos (los vértices representan las estaciones/paradas).



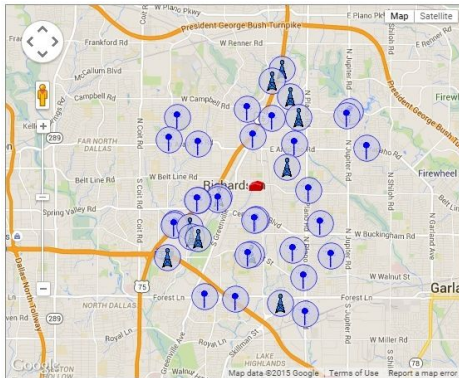
Redes sociales

Podemos representar **relaciones entre usuarios** de una red social (los vértices representan los usuarios).



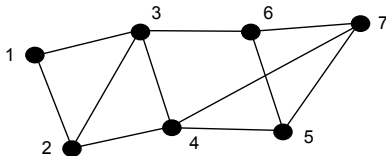
Conflictos de horarios

Cursos a dictar y superposiciones entre cursos (dos vértices son vecinos si sus cursos se solapan).



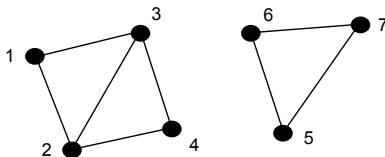
Conflictos espaciales

Antenas en una **red de telefonía celular** (dos vértices son vecinos si sus antenas tienen áreas de cobertura superpuestas).



Definiciones

- Un **camino** entre dos vértices i y j es una secuencia de aristas desde i hasta j .
- La **distancia** entre dos vértices es la cantidad de aristas del camino más corto entre ellos.
- Un grafo es **conexo** si existe un camino entre todo par de vértices.



Definiciones

- Una **componente conexa** es un subconjunto de vértices conexo, maximal con esta propiedad.
- Un **vértice aislado** es un vértice i con $d(i) = 0$ (que conforma una componente conexa de tamaño 1).

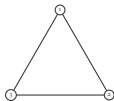
1. Un grafo conexo tiene exactamente una componente conexa.
2. Si i y j están en componentes conexas distintas, decimos que hay una distancia infinita entre ellos.

Definición

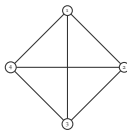
Un grafo se dice **completo** si todos los vértices son adyacentes entre sí.
Dado $n \in \mathbb{N}$, K_n es el grafo completo de n vértices.



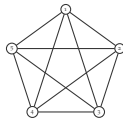
(a) K_2



(b) K_3



(c) K_4



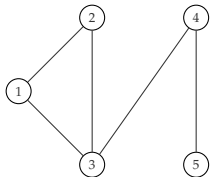
(d) K_5

Pregunta

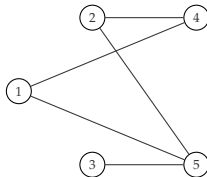
¿Cuántas aristas tiene un grafo completo de n vértices?

Definición

Dado un grafo $G = (V, E)$, el grafo **complemento** de G , que notamos como $\bar{G} = (V, \bar{E})$, tiene el mismo conjunto de vértices que G y cada par de vértices es adyacente en \bar{G} si y solo si no es adyacente en G (es decir, $ij \in E$ si y solo si $ij \notin \bar{E}$).



(a) $G = (V, E)$



(b) $\bar{G} = (V, \bar{E})$

Pregunta

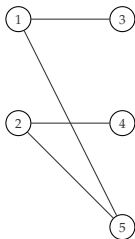
Si G tiene n vértices y m aristas, ¿cuántas aristas tiene \bar{G} ?

Definición

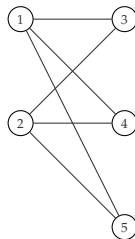
Un grafo $G = (V, E)$ se dice **bipartito** si existe una partición V_1, V_2 del conjunto de vértices V , es decir,

1. $V = V_1 \cup V_2$,
2. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
3. $V_1 \neq \emptyset$,
4. $V_2 \neq \emptyset$

tal que todas las aristas de G tienen un extremo en V_1 y otro en V_2 .



(a) $G = (V, E)$



(b) $K_{2,3}$

Definición

Un grafo bipartito $G = (V, E)$ con partición V_1, V_2 es **bipartito completo** si todo vértice en V_1 es adyacente a todo vértice en V_2 . Si $|V_1| = n_1$ y $|V_2| = n_2$, notamos a este grafo como K_{n_1, n_2} .

Teorema

Un grafo es bipartito si y sólo si no tiene **circuitos simples** (i.e., caminos que empiezan y terminan en el mismo vértice y no repiten vértices salvo el primero) de longitud impar.

Pregunta

¿Cuántas aristas tiene un grafo bipartito completo?