Práctica de NP-completitud

Tecnología Digital V: Diseño de Algoritmos
Universidad Torcuato Di Tella

UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA

Repaso: clases P y NP

Clase P

Un problema de decisión Π pertenece a la clase **P** (polinomial determinístico) si existe un algoritmo polinomial que lo resuelve. Esdecir, dada una instancia de Π con respuesta Sí se puede dar un cómputo de longitud polinomial que garantiza que la respuesta es Sí.

Clase NP

Un problema de decisión Π pertenece a la clase **NP** (polinomial no-determinístico) si dada una instancia de Π con respuesta Sí se puede dar un certificado de longitud polinomial que garantiza que la respuesta es Sí, y esta garantía puede ser verificada en tiempo polinomial.

Observación

P $\subseteq$ NP.

Problema abierto.

¿P = NP?

- La pregunta por P = NP apunta a distinguir si computar una solución a un problema es polinomialmente equivalente a verificar la solución de un problema.

Repaso: P vs NP

Observación

P $\subseteq$ NP.

Problema abierto.

¿P = NP?

- La pregunta por P = NP apunta a distinguir si computar una solución a un problema es polinomialmente equivalente a verificar la solución de un problema.
- No se sabe si P = NP o si P $\neq$ NP. Mientras tanto, se estudian clases de complejidad relativa, comparando la dificultad entre problemas.

- Una transformación o reducción polinomial de un problema de decisión Π' a uno Π es una función polinomial que transforma una instancia I' de Π' en una instancia I de Π tal que I' tiene respuesta Sí para Π' si, y sólo si, I tiene respuesta Sí para Π:

$$I' \in Y_{\Pi'} \Longleftrightarrow f(I') \in Y_{\Pi}$$

- El problema de decisión Π' se reduce polinomialmente a otro problema de decisión Π, $\Pi' \leq_p \Pi$, si existe una transformación polinomial de Π' a Π.

Proposición.

Las reducciones polinomiales son transitivas:

$$\text{si } \Pi_1 \leq_p \Pi_2 \text{ y } \Pi_2 \leq_p \Pi_3 \text{ entonces } \Pi_1 \leq_p \Pi_3.$$

Ejercicio 1: Camino más largo optimizado

Enunciado

- **Entrada:** Dado un grafo $G = (V, E)$ y una longitud K.
- **Salida:** ¿Es posible demostrar que existe una ruta de longitud a lo sumo K entre un conjunto de nodos V_s y V_e?

Mostrar que este problema pertenece a NP.

Ejercicio 1: Camino más largo optimizado

El problema $\in$ NP?

- Debemos dar un certificado de que podemos verificar la solución en tiempo polinomial.
- Dado un camino P con un conjunto de vertices $v_1, v_2, v_3, \ldots , v_n$ queremos verificar que el camino que conecta $v_1, \ldots v_n$ es a lo sumo de longitud k.
- Esto puede ser verficado en tiempo polinomial. Entonces podemos decir que el problema está en NP.

Enunciado

Dado un conjunto base X, un entero k y una colección de subconjuntos de X, el problema consiste en determinar si existe una colección de subconjuntos cuya unión sea X y cuyo tamaño sea como máximo k.

Mostrar que este problema está en NP.

¿El problema $\in$ NP?

- Nuestro certificado en este caso será sobre una colección de subconjuntos C de tamaño K.
- Dado un conjunto C de subconjuntos de tamaño k, podemos iterar sobre cada elemento en los subconjuntos de la colección.
- Luego marcamos los elementos en X que están cubiertos.
- Por último, no deben haber elementos sin cubrir en X.
- Este proceso puede hacerse en tiempo polinomial en relación con el número de subconjuntos en X. Por lo tanto, el problema cobertura de conjuntos están en NP.