Tecnología Digital V: Diseño de algoritmos
Licenciatura en Tecnología Digital
Primer Semestre 2025

Guía de ejercicios 1: Teoría de grafos

---

1. Recordemos que un *grafo bipartito* es un grafo $G = (V, E)$ cuyos vértices pueden particionarse en $V = V_1 \cup V_2$ de modo tal que toda arista de G conecta un vértice de V_1 con un vértice de V_2.

   a) ¿Existe un grafo bipartito con un vértice de grado 5 y cinco vértices de grado 1?
   b) ¿Existe un grafo bipartito con más de un vértice y tal que su complemento también sea bipartito?
   c) ¿Existe un grafo bipartito con 6 o más vértices y tal que exista exactamente un camino entre todo par de sus vértices?
   d) ¿Existe un grafo bipartito tal que todos sus vértices tengan grado 3?
   e) ¿Existe un grafo bipartito tal que todos sus vértices excepto uno de ellos tengan grado 3?

2. Demostrar que todo grafo con dos o más vértices tiene al menos dos vértices del mismo grado. Pista: prestar atención a la secuencia ordenada de los grados de los vértices.

3. Handshaking Lemma. Sea $G = (V, E)$ un grafo con m aristas ($|E| = m$), y recordemos que $d(i) = |N(i)|$ representa el grado del vértice $i \in V$. Demostrar que

$$\sum_{i \in V} d(i) = 2m.$$

4. Recordemos que un *conjunto independiente* de un grafo $G = (V, E)$ es un subconjunto de vértices $I \subseteq V$ tal que $ij \notin E$ para todo $i, j \in I$. Denotamos por $\alpha(G)$ al tamaño del mayor conjunto independiente de G.

   a) ¿Existe algún grafo conexo con 5 vértices tal que $\alpha(G) = 4$?
   b) ¿Existe algún grafo conexo con 5 vértices tal que $\alpha(G) = 5$?
   c) ¿Existe algún grafo con $\alpha(G) = 1$?

5. Recordemos que una *clique* de un grafo $G = (V, E)$ es un subconjunto de vértices $I \subseteq V$ tal que $ij \in E$ para todo $i, j \in I$, $i \neq j$. Denotamos por $\omega(G)$ al tamaño de la mayor clique de G.

   a) ¿Existe algún grafo tal que $\alpha(G) + \omega(G) = n$?.
   b) ¿Existe algún grafo conexo tal que $\alpha(G) + \omega(G) = n$?.
   c) Sea $\delta(G) := \min_{i \in V} d(i)$ el grado mínimo de G. ¿Es cierto que $\omega(G) \geq \delta(G)$?
   d) Sea $\Delta(G) := \max_{i \in V} d(i)$ el grado máximo de G. ¿Es cierto que $\omega(G) \geq \Delta(G)$?

6. Recordemos que un *coloreo* de un grafo es una asignación de colores a sus vértices de modo tal que todo par de vértices vecinos reciba colores distintos. Denotamos por $\chi(G)$ al menor número de colores necesarios para obtener un coloreo de $G = (V, E)$.

   a) ¿Es cierto que $\chi(G) \geq \delta(G)$?
   b) ¿Es cierto que $\chi(G) \geq \Delta(G)$?
   c) ¿Es cierto que $\chi(G) \geq \omega(G)$?

d) ¿Existe algún grafo G tal que $\chi(G) = \omega(G)$?

e) *[Opcional]* Mostrar que existe un grafo G con $\chi(G) \geq \omega(G) + 2$.

7. Un subconjunto de vértices $D \subseteq V$ de un grafo $G = (V, E)$ es un *conjunto dominante* si todo vértice $i \in V \backslash D$ tiene al menos un vecino en D. Denotamos por $\gamma(G)$ al tamaño del menor conjunto dominante de G.

   a) Mostrar un grafo G con $\gamma(G) = 1$.

   b) Mostrar un grafo G con $\gamma(G) = 3$.

   c) Denotamos por K_n al grafo completo con n vértices. ¿Cuánto vale $\gamma(K_n)$?

   d) ¿Es cierto que $\gamma(G) \geq \Delta(G)$? ¿Es cierto que $\gamma(G) \leq \Delta(G)$?

   e) ¿Cuál es el conjunto dominante de *mayor* tamaño de un grafo?

   f) ¿Existe un grafo G con un vértice i tal que todo conjunto dominante de G incluya al vértice i?

8. Un *ciclo* es un camino que comienza y termina en un mismo vértice. Demostrar que si todos los vértices de un grafo tienen grado dos o más, entonces el grafo tiene un ciclo.

9. Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos.

   a) Demostrar que todo árbol tiene al menos dos vértices de grado 1.

   b) Demostrar que todo árbol de n vértices tiene exactamente $n - 1$ aristas.

   c) Demostrar por medio de reducción al absurdo que si G es un árbol e i y j son dos vértices de G, entonces existe exactamente un camino en G entre i y j.

10. Sean P y Q dos caminos distintos de un grafo G que unen un vértice v con otro w. Demostrar en forma directa que G tiene un ciclo cuyas aristas pertenecen a P o Q. Pista: denotar $P = v_0, \ldots, v_p$ y $Q = w_0, \ldots, w_q$ con $v_0 = w_0 = v$ y $v_p = w_q = w$. Definir explícitamente cuáles son los subcaminos de P y Q cuya unión forman un ciclo.

11. Sea $G = (V, E)$. Demostrar que G o su complemento $\bar{G}$ es conexo.

12. Demostrar que un grafo es bipartito si y sólo si no tiene circuitos simples (i.e., caminos que empiezan y terminan en el mismo vértice y no repiten vértices salvo el primero) de longitud impar.

13. Demostrar que si dos grafos son isomorfos, entonces

    - tienen el mismo número de vértices,
    - tienen el mismo número de aristas,
    - para todo k, $0 \leq k \leq n - 1$, tienen el mismo número de vértices de grado k,
    - tienen el mismo número de componentes conexas,
    - para todo k, $1 \leq k \leq n - 1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud k.