Tecnología Digital V: Diseño de algoritmos

Licenciatura en Tecnología Digital
Primer Semestre 2025

Guía de ejercicios 4: Más algoritmos sobre grafos

1. Consideremos un grafo dirigido G con longitudes en los arcos, y dos nodos especiales s y t, y supongamos que hemos computado el camino mínimo P entre s y t. Para cada una de las siguientes preguntas, responder con una demostración si la respuesta es negativa, y con un contraejemplo si la respuesta es afirmativa.

    a) ¿Cambia el camino mínimo si se multiplican las longitudes de todos los arcos por una constante $k > 0$?

    b) ¿Cambia el camino mínimo si se le suma una constante $k > 0$ a todas longitudes de los arcos?

    c) ¿Cambia el camino mínimo si se le suma una constante $k > 0$ a la longitud de solamente un arco?

    d) ¿Cambia el camino mínimo si se modifica la longitud de un arco que no está en el camino mínimo P?

2. Dado un digrafo D con pesos $c\colon E(D) \to \mathbb{N}$ y dos vértices s y t, decimos que una arista $v \to w$ es *st-eficiente* cuando $v \to w$ pertenece a algún camino mínimo de s a t. Sea $d(\cdot, \cdot)$ la función que indica el peso de un camino mínimo entre dos vértices. Demostrar que $v \to w$ es st-eficiente si y sólo si $d(s, v) + c(v \to w) + d(w, t) = d(s, t)$.

3. En el *problema del cambio* tenemos una cantidad ilimitada de monedas de distintos valores $w_1, \dots, w_k$ y queremos dar un vuelto v utilizando la menor cantidad de monedas posibles (ver Teórica 2). Por ejemplo, si los valores son $w_1 = 1$, $w_2 = 5$, y $w_3 = 12$ y el vuelto es $v = 15$, entonces el resultado es 3 ya que alcanza con dar 3 monedas de \$$5$. Modelar este problema como un problema de camino mínimo e indicar un algoritmo eficiente para resolverlo. El algoritmo sobre el modelo debe tener complejidad $O(vk)$. **Opcional:** discutir cómo se relaciona este modelo con el algoritmo de programación dinámica correspondiente.

4. En el *problema de gestión de proyectos* tenemos un proyecto que se divide en n etapas $v_1, \dots, v_n$. Cada etapa v_i consume un tiempo $t_i \geq 0$. Para poder empezar una etapa v_i se requiere que primero se hayan terminado un conjunto $N(v_i)$ de etapas v_j tales que $j < i$. Por simplicidad, la etapa v_1 se usa como indicador de inicio del proyecto y, por lo tanto, consume un tiempo $t_1 = 0$ y es requerida por todas las otras etapas. Análogamente, la etapa v_n indica el final del proyecto por lo que consume tiempo $t_n = 0$ y requiere la finalización del resto de las etapas. Una etapa es *crítica* cuando cualquier atraso en la misma provoca un retraso en la finalización del proyecto. Modelar el problema de encontrar todas las etapas críticas de un proyecto como un problema de camino mínimo e indicar qué algoritmo usaría para resolverlo. El mejor algoritmo que conocemos toma tiempo lineal en la cantidad de datos necesarios para describir un proyecto.

5. Consideremos una lista ordenada de n números reales $a_1, \dots, a_n$. Queremos particionar estos números en grupos de modo tal que (a) cada grupo contenga al menos p números, (b) cada grupo contenga números consecutivos de la lista y (c) la suma de las varianzas de todos los grupos sea la menor posible. Definimos la *varianza* de un grupo S como

$$\text{var}(S) \ = \ \sum_{x \in S} \frac{(x - \text{prom}(S))^2}{|S|},$$

siendo $\text{prom}(S)$ el promedio de los valores de S. Modelar este problema como un problema de camino mínimo en un grafo dirigido.

6. *[Opcional]* Un *sistema de restricciones de diferencias (SRD)* es un sistema $\mathcal{S}$ que tiene m inecuaciones y n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. Cada inecuación es de la forma $x_i - x_j \leq c_{ij}$ para una constante $c_{ij} \in \mathbb{R}$; por cada par i, j existe a lo sumo una inecuación (por qué?). Para cada SRD $\mathcal{S}$ se puede definir un digrafo pesado $D(\mathcal{S})$ que tiene un vértice v_i por cada incógnita x_i de forma tal que $v_i \to v_j$ es una arista de peso c_{ij} cuando $x_i - x_j \leq c_{ij}$ es una inecuación de $\mathcal{S}$. Asimismo, $\mathcal{S}$ tiene un vértice v_0 y una arista $v_0 \to v_i$ de peso 0 para todo $1 \leq i \leq n$.

   a) Demostrar que si $D(\mathcal{S})$ tiene un ciclo de peso negativo, entonces $\mathcal{S}$ no tiene solución.
   b) Demostrar que si $D(\mathcal{S})$ no tiene ciclos de peso negativo, entonces $\{x_i = d(v_0, v_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ es una solución de $D(\mathcal{S})$. Acá $d(v_0, v_i)$ es la distancia desde v_0 a v_i en $D(\mathcal{S})$.
   c) A partir de los incisos anteriores, proponer un algoritmo que permita resolver cualquier SRD. En caso de no existir solución, el algoritmo debe mostrar un conjunto de inecuaciones contradictorias entre sí.

7. **El problema de la cena.** Varias familias van a cenar juntas y, para maximizar la interacción social, les gustaría sentarse en mesas de modo tal que no haya dos miembros de la misma familia en la misma mesa. Mostrar cómo se puede formular este problema como un problema de flujo máximo. Suponemos que tenemos n familias y que la familia i tiene a_i integrantes, para $i = 1, \ldots, n$, y que tenemos m mesas, cada una con una capacidad máxima de p personas sentadas.

8. Se puede construir un digrafo con capacidades en los arcos y que contenga dos nodos s y t, de modo tal que exista más de un corte mínimo entre s y t?

9. Se puede construir un digrafo con capacidades en los arcos y que contenga dos nodos s y t, de modo tal que exista más de un flujo máximo entre s y t, pero tal que exista un único corte mínimo entre s y t? (cuando decimos "más de un flujo máximo" nos referimos a dos flujos con el mismo valor máximo pero que difieran en la cantidad de flujo enviada en al menos un arco).

10. Mostrar cómo convertir un problema de flujo máximo con varios nodos de origen y varios nodos de destino, en un problema de flujo máximo con un único nodo de orign y un único nodo de destino.

11. Supongamos que necesitamos resolver un problema de flujo máximo en un digrafo que tiene arcos paralelos (es decir, dos arcos entre el mismo par de nodos), pero el algoritmo que tenemos disponible no admite arcos paralelos. Mostrar cómo convertir el problema de flujo máximo con arcos paralelos en un problema de flujo máximo sobre un grafo sin arcos paralelos.

12. Consideremos el grafo de la Figura 2, y supongamos que todos los arcos tienen capacidad 1.

    a) ¿Cuántos caminos disjuntos en arcos (es decir, caminos que no tienen arcos en común) entre el nodo $s = 1$ y el nodo $t = 6$ contiene este grafo?
    b) Enumerar todos los cortes entre s y t que contiene este grafo. Para cada corte $(S, \bar{S})$, escribir la lista de arcos que van de S hacia $\bar{S}$. Llamamos a estos arcos los *arcos hacia adelante* del corte.
    c) Para este digrafo, ¿qué se puede decir sobre la relación entre la máxima cantidad de caminos disjuntos entre s y t y la mínima cantidad de arcos hacia adelante en un corte?

13. **El problema del DT.** *[Opcional pero interesante!]* Somos el director técnico de la selección argentina de fútbol. Tenemos una lista de 200 jugadores, de los cuales debemos seleccionar 23 jugadores para la selección. Para cada jugador tenemos su puesto (arquero, defensor, mediocampista o delantero) y el equipo para el cual juega. Necesitamos seleccionar tres arqueros, siete defensores, siete mediocampistas y seis delanteros. Además, para cada club

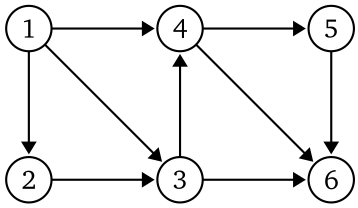

Figure 2: Ejemplo para el Ejercicio 12.

$i \in C$ (suponemos que C es la lista de clubes), tenemos un máximo m_i de jugadores que podemos citar de ese club. Queremos saber si es posible cumplir con estos requerimientos, o si en cambio ningún conjunto de 23 jugadores cumple estas condiciones. Mostrar cómo se puede formular este problema como un problema de camino máximo. Sugerencia: Pensar el problema para una instancia más pequeña, por ejemplo con una selección de cinco jugadores (en lugar de 23) y dos clubes.

14. **Asignación de aulas.** Tenemos un conjunto de clases que debemos dictar durante el día, cada una con un horario de inicio y un horario de finalización. Además, tenemos una cantidad de aulas disponibles. El problema consiste en determinar si es posible asignar un aula a cada clase, de modo tal que dos clases simultáneas no reciban el mismo aula. Mostrar cómo se puede modelar este problema como un problema de flujo máximo con cotas inferiores sobre el flujo de los arcos.