

## **Trabajo Práctico N° 2:** **Demostraciones, Conjuntos y Funciones.**

### **Ejercicio 1.**

*Demostrar que la suma de 3 números enteros consecutivos es un múltiplo de 3. (Un múltiplo de 3 es un número que puede escribirse como 3 por un número entero: si  $a$  es múltiplo de 3, entonces,  $a = 3h$ ,  $h$  entero).*

#### **Proposición:**

“La suma de 3 números enteros consecutivos es un múltiplo de 3”.

“Si  $a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] = 3k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ ”.

#### **Método directo:**

Se parte de antecedente verdadero, para llegar a consecuente verdadero:

$$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] = a + a + 1 + a + 1 + 1$$

$$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] = 3a + 3$$

$$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] = 3(a + 1),$$

donde  $(a + 1) \in \mathbb{Z}$ .

Por lo tanto, al llegar a consecuente verdadero, queda demostrada la proposición.

#### **Método del absurdo:**

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

$$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] = 3k + 1$$

$$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad a + a + 1 + a + 1 + 1 = 3k + 1$$

$$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad 3a + 3 = 3k + 1$$

$$a, (a + 1), [(a + 1) + 1] \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad 3(a + 1) = 3k + 1,$$

donde  $(a + 1) \in \mathbb{Z}$ .

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es y no es múltiplo de 3), queda demostrada la proposición.

#### **Método indirecto:**

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

$$a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] = 3k + 1$$

$$a + a + 1 + a + 1 + 1 = 3k + 1$$

$$3a + 3 = 3k + 1$$

$$3a = 3k + 1 - 3$$

$$3a = 3k - 2$$

$$a = \frac{3k-2}{3}$$

$$a = k - \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}.$$

$$a + 1 = k + \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}.$$

$$(a + 1) + 1 = k + \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

**Ejercicio 2.**

*Demostrar que, si el cuadrado de un número entero  $w$  es par, el cuadrado del anterior a  $w$  es impar.*

**Proposición:**

“Si el cuadrado de un número entero  $w$  es par, el cuadrado del anterior a  $w$  es impar”.

“Si  $w^2 = 2k$ , entonces,  $(w - 1)^2 = 2k + 1$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ ”.

**Método del absurdo:**

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

$$\begin{array}{lll} w^2 = 2k & \wedge & (w - 1)^2 = 2k \\ w^2 = 2k & \wedge & w^2 - 2w + 1 = 2k \\ w^2 = 2k & \wedge & w^2 = 2k + 2w - 1 \\ w^2 = 2k & \wedge & w^2 = 2(k + w) - 1, \end{array}$$

donde  $(k + w) \in \mathbb{Z}$ .

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es par e impar), queda demostrada la proposición.

**Método indirecto:**

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

$$\begin{array}{l} (w - 1)^2 = 2k \\ w^2 - 2w + 1 = 2k \\ w^2 = 2k + 2w - 1 \\ w^2 = 2(k + w) - 1, \end{array}$$

donde  $(k + w) \in \mathbb{Z}$ .

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

**Ejercicio 3.**

*Demostrar que la suma de 3 números enteros consecutivos, si el primero es impar, es múltiplo de 6.*

**Proposición:**

“Si el primer número es impar, entonces, la suma de 3 números enteros consecutivos es múltiplo de 6”.

“Si  $a = 2k + 1$ , entonces,  $a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] = 6k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ ”.

**Método directo:**

Se parte de antecedente verdadero, para llegar a consecuente verdadero:

$$\begin{aligned} a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] &= (2k + 1) + [(2k + 1) + 1] + \{[(2k + 1) + 1] + 1\} \\ a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] &= 2k + 1 + 2k + 1 + 1 + 2k + 1 + 1 + 1 \\ a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] &= 6k + 6 \\ a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] &= 6(k + 1), \end{aligned}$$

donde  $(k + 1) \in \mathbb{Z}$ .

Por lo tanto, al llegar a consecuente verdadero, queda demostrada la proposición.

**Método del absurdo:**

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

$$\begin{aligned} a = 2k + 1 & \quad \wedge \quad a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] = 6k + 3 \\ a = 2k + 1 & \quad \wedge \quad a + a + 1 + a + 1 + 1 = 6k + 3 \\ a = 2k + 1 & \quad \wedge \quad 3a + 3 = 6k + 3 \\ a = 2k + 1 & \quad \wedge \quad 3a = 6k + 3 - 3 \\ a = 2k + 1 & \quad \wedge \quad 3a = 6k \\ a = 2k + 1 & \quad \wedge \quad a = \frac{6k}{3} \\ a = 2k + 1 & \quad \wedge \quad a = 2k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es impar y par), queda demostrada la proposición.

**Método indirecto:**

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

$$\begin{aligned} a + (a + 1) + [(a + 1) + 1] &= 6k + 3 \\ a + a + 1 + a + 1 + 1 &= 6k + 3 \\ 3a + 3 &= 6k + 3 \\ 3a &= 6k + 3 - 3 \\ 3a &= 6k \end{aligned}$$

$$a = \frac{6k}{3}$$

$$a = 2k.$$

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

**Ejercicio 4.**

Recordar que un número racional o fraccionario es aquel que puede expresarse como cociente de enteros, es decir si  $x = \frac{a}{b}$  y  $b \neq 0$ , se dice que  $x$  es un número racional. Un número es irracional si no puede escribirse como cociente de enteros, por ejemplo:  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $\sqrt{5}$ . Demostrar que la suma de un número racional y un irracional es un número irracional.

**Proposición:**

“Si  $a$  es un número racional y  $b$  es un número irracional, entonces, su suma es un número irracional”.

“Si  $a = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$  y  $b \in I$ , entonces,  $(a + b) \in I$ ”.

**Método directo:**

Se parte de antecedente verdadero, para llegar a consecuente verdadero:

$$a + b = \frac{x}{y} + b \in I.$$

Por lo tanto, al llegar a consecuente verdadero, queda demostrada la proposición.

**Método absurdo:**

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

$$\begin{aligned} a = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \text{ y } b \in I & \quad \wedge \quad (a + b) \notin I \\ a = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \text{ y } b \in I & \quad \wedge \quad \frac{x}{y} + b = \frac{w}{z} \\ a = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \text{ y } b \in I & \quad \wedge \quad b = \frac{w}{z} - \frac{x}{y} \\ a = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \text{ y } b \in I & \quad \wedge \quad b = \frac{yw - xz}{yz} \in \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

donde  $x, y, w, z \in \mathbb{Z}$ .

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es irracional y racional), queda demostrada la proposición.

**Método indirecto:**

Se parte de consecuente falso, para llegar a antecedente falso:

$$\begin{aligned} (a + b) & \notin I \\ \frac{x}{y} + b & = \frac{w}{z} \\ b & = \frac{w}{z} - \frac{x}{y} \\ b & = \frac{yw - xz}{yz} \in \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

donde  $x, y, w, z \in \mathbb{Z}$ .

Por lo tanto, al llegar a antecedente falso, queda demostrada la proposición.

**Ejercicio 5.**

*Escribir por extensión los siguientes conjuntos:*

(a)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x \leq 9\}.$

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

(b)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x + 3 = 7\}.$

$$A = \{4\}.$$

(c)  $B = \{y: y \in \mathbb{Z} \wedge -2 < y \leq 3\}.$

$$B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}.$$

(d)  $C = \{x: x \text{ es una vocal de la palabra "número"}\}.$

$$C = \{e, o, u\}.$$

(e)  $D = \{x: x \text{ es un dígito de la cifra 453425}\}.$

$$D = \{2, 3, 4, 5\}.$$

(f)  $E = \{z: z \text{ es un dígito primo de la cifra 729634}\}.$

$$E = \{2, 3, 7\}.$$

(g)  $A = \{w: w \in \mathbb{N} \wedge w \text{ es divisor de } 50\}.$

$$A = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}.$$

(h)  $H = \{w: w \in \mathbb{N} \wedge w^2 \leq 9\}.$

$$H = \{1, 2, 3\}.$$



(i)  $F = \{a: a \in \mathbb{Z} \wedge -4 \leq a + 2 \leq 5\}.$

$$F = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

(j)  $G = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 3 \leq x - 4 \leq 8\}.$

$$G = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

(k)  $W = \{x: x = 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq 5\}.$

$$W = \{2, 6, 10, 14, 18, 22\}.$$

(l)  $F = \{x: x = 6k + 3 \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq 4\}.$

$$F = \{3, 9, 15, 21, 27\}.$$

**Ejercicio 6.**

*Definir por comprensión los siguientes conjuntos:*

**(a)** *El conjunto de los números enteros pares mayores que -8 y menores o iguales que 12.*

$$A = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq k \leq 6\}.$$

**(b)** *El conjunto de las primeras seis potencias naturales de -2.*

$$B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = (-2)^k \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 6\}.$$

**(c)** *El conjunto de los números naturales pares.*

$$C = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x = 2k \wedge k \in \mathbb{N}\}.$$

**(d)** *El conjunto de los enteros múltiplos de 3.*

$$D = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 3k \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

**(e)** *El conjunto de los naturales múltiplos de 5.*

$$E = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x = 5k \wedge k \in \mathbb{N}\}.$$

**(f)** *El conjunto de los enteros múltiplos de 9.*

$$F = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 9k \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

**(g)** *El conjunto de los números reales que anulan la ecuación  $(x^3 - \frac{1}{4}x)(x^2 - 3)(x + 5)$ .*

$$G = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge (x^3 - \frac{1}{4}x)(x^2 - 3)(x + 5) = 0\}.$$

**(h)** *El conjunto de los enteros que son el siguiente de los múltiplos de 3.*

$$H = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 3k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

(i) *El conjunto de los enteros que son el resultado de sumarle 2 a los múltiplos de 4.*

$$I = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

(j) *El conjunto de los enteros que son el resultado de sumarle 5 a los múltiplos de 10.*

$$J = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 10k + 5 \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Ejercicio 7.**

*Indicar si los siguientes pares de conjuntos son iguales, son distintos o alguno está incluido en el otro:*

(a)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 6\}$ ;  $B = \{1, 2, 3, 6\}$ .

$A = B$ .

(b)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 5\}$ ;  $B = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 2 < x < 5\}$ .

$A \subset B$ .

(c)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisor de } 12\}$ ;  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ .

$B \subset A$ .

(d)  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 4x + 4 = 0\}$ ;  $B = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x^2 \leq 5\}$ .

$A = B$ .

(e)  $A = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 2x = x\}$ ;  $B = \{0\}$ .

$A = B$ .

**Ejercicio 8.**

*En cada caso, escribir por comprensión los conjuntos que se mencionan.*

**(a)** *Probar que los múltiplos naturales de 18 son múltiplos de 6.*

$$A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x = 18k \wedge k \in \mathbb{N}\} = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x = 6(3k) \wedge k \in \mathbb{N}\}.$$

$$B = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x = 6k \wedge k \in \mathbb{N}\}.$$

**(b)** *Probar que los múltiplos enteros de 60 son múltiplos de 15.*

$$A = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 60k \wedge k \in \mathbb{Z}\} = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 15(4k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 15k \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

**(c)** *Probar que los múltiplos enteros de 12 son pares.*

$$A = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 12k \wedge k \in \mathbb{Z}\} = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 2(6k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

**(d)** *¿Son todos los múltiplos naturales de 3 múltiplos de 21?*

$$A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\}.$$

$$B = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x = 21k \wedge k \in \mathbb{N}\} = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x = 3(7k) \wedge k \in \mathbb{N}\}.$$

Por lo tanto, no todos los múltiplos naturales de 3 son múltiplos de 21.

**(e)** *¿Son todos los múltiplos enteros de 13 múltiplos de 39?*

$$A = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 13k \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 39k \wedge k \in \mathbb{Z}\} = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 13(3k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

Por lo tanto, no todos los múltiplos naturales de 13 son múltiplos de 39.

**(f)** *Probar que los múltiplos enteros de 39 son múltiplos de 13.*

$$A = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 39k \wedge k \in \mathbb{Z}\} = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 13(3k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 13k \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

(g) Sean  $B$  el conjunto de los múltiplos enteros de  $-5$  y  $C$  el conjunto de los múltiplos enteros de  $5$ , probar que  $B = C$ .

$$B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = -5k \wedge k \in \mathbb{Z}\} = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 5(-k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$C = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 5k \wedge k \in \mathbb{Z}\} = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = -5(-k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Ejercicio 9.**

Sean  $A = \{x: x = 10k + 5 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$  y  $B = \{x: x = 5h \wedge h \in \mathbb{Z}\}$  conjuntos.

(a) Probar que  $A \subseteq B$ .

$$A = \{x: x = 10k + 5 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

$$A = \{x: x = 5 * 2k + 5 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

$$A = \{x: x = 5(2k + 1) \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge (k + 1) \in \mathbb{Z}\}.$$

Por lo tanto, queda demostrado que  $A \subseteq B$ .

(b) ¿El número 40 es un elemento de  $A$ ? ¿Y de  $B$ ? Justificar la respuesta.

$$40 = 10k + 5$$

$$10k = 40 - 5$$

$$10k = 35$$

$$k = \frac{35}{10}$$

$$k = 3,5 \notin \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, 40 no es un elemento de  $A$ .

$$40 = 5h$$

$$h = \frac{40}{5}$$

$$h = 8 \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, 40 es un elemento de  $B$ .

(c) ¿Está el conjunto  $B$  incluido en  $A$ ? Justificar la respuesta.

Para que  $B \subseteq A$ , todo elemento de  $B$  sería elemento de  $A$  y, como se vió anteriormente, existe, al menos, un elemento de  $B$  que no es elemento de  $A$ . Por lo tanto, el conjunto  $B$  no está incluido en el conjunto  $A$ .

**Ejercicio 10.**

Sean  $A = \{x: x = 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$  y  $B = \{x: x = 2h \wedge h \in \mathbb{Z}\}$  conjuntos.

(a) Probar que  $A \subseteq B$ .

$$A = \{x: x = 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

$$A = \{x: x = 2 * 2k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

$$A = \{x: x = 2(2k + 1) \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge (k + 1) \in \mathbb{Z}\}.$$

Por lo tanto, queda demostrado que  $A \subseteq B$ .

(b) ¿A y B son el mismo conjunto? Justificar la respuesta.

Se debe demostrar que  $A \subseteq B$  (demostrado en inciso (a)) y  $B \subseteq A$ .

Sea  $4 = 2h$ , con  $h = 2 \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $4 \in B$ . Si  $4 \in A$ ,  $4 = 4k + 2$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}$ , pero esto no sucede para ningún  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $4 \notin A$ . Entonces,  $B \not\subseteq A$ .

Por lo tanto, A y B no son el mismo conjunto.



**Ejercicio 11.**

Sean  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  $C = \{x: x = 2k \wedge k \in \mathbb{N}\}$ ,  $D = \{x: x = 3m \wedge m \in \mathbb{Z}\}$  y  $U = \mathbb{Z}$ .

(a) Expresar por comprensión  $A \cup \mathbb{Z}$ .

$$A \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

(b) Expresar por comprensión  $A^c$ .

$$A^c = \mathbb{Z} - \{1, 2\}.$$

(c) Expresar por extensión  $A \cap C$ .

$$A \cap C = \{2\}.$$

(d) Expresar por extensión  $B - (D \cap A)$ .

$$B - (D \cap A) = B - \emptyset$$

$$B - (D \cap A) = B$$

$$B - (D \cap A) = \{1, 2, 3, 6\}.$$

(e) Expresar por comprensión  $C^c$ .

$$C^c = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x \neq 2k \wedge k \in \mathbb{N}\}.$$

(f) Expresar por comprensión  $D^c \cup B^c$ . Recordar que, por las propiedades mencionadas, se puede calcular como  $(D \cap B)^c$ .

$$D^c \cup B^c = (D \cap B)^c$$

$$D^c \cup B^c = \{x: x \in \mathbb{Z} - \{3, 6\}\}.$$

(g) Expresar por extensión  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ . Según las propiedades enunciados, ¿de qué otra forma se podría calcular?

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 6\} \cap \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 6\}.$$

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2\} \cup \{2, 6\}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 6\}.$$

(h) Expresar por comprensión  $A^c \cup D^c$ .

$$A^c \cup D^c = (A \cap D)^c$$

$$A^c \cup D^c = \{x: x \in \mathbb{Z}\}.$$

(i) Expresar por comprensión  $A^c \cap C^c$ .

$$A^c \cap C^c = (A \cup C)^c$$

$$A^c \cap C^c = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 2k \wedge k \in \mathbb{N}\}.$$

**Ejercicio 12.**

Sean  $A = \{x: x = 5w \wedge w \in \mathbb{Z}\}$  y  $B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x + 2 \leq 7\}$ .

(a) Hallar por extensión los conjuntos:  $A \cap B$  y  $B - A$ .

$$A \cap B = \{0, 5\}.$$

$$B - A = \{-1, 1, 2, 3, 4\}.$$

(b) Definir un conjunto  $H$ , que cumpla que  $H \subseteq B$ .

$$H = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leq x + 2 \leq 7\}.$$

$$H \subseteq B.$$

**Ejercicio 13.**

Sean los conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{x: x = 4k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$  y  $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

(a) Hallar y expresar por extensión:  $A \cap (B \cup C)$  y  $C - (A - B)$ .

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{3, 4, 5, 6\}.$$

$$C - (A - B) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

$$C - (A - B) = \{4, 7, 8\}.$$

(b) Hallar un conjunto  $D$  que esté incluido en  $B$ .

$$D = \{x: x = 8k \wedge k \in \mathbb{Z}\} = \{x: x = 4(2k) \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$D \subseteq B.$$

**Ejercicio 14.**

Sean  $P$  el conjunto de los enteros pares e  $I$  el conjunto de los enteros impares y  $U = \mathbb{Z}$ .

(a) Expresar por comprensión:  $P \cup I$ ,  $P - I$ ,  $I - P$ ,  $P^c$ ,  $I^c$ .

$$P \cup I = \mathbb{Z}.$$

$$P - I = P = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$I - P = I = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$P^c = I = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$I^c = P = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) Probar que  $P \cap I = \emptyset$ . Indicaciones: probar por el absurdo, suponiendo que fuera distinto del  $\emptyset$ , es decir, que existe un número  $m$  que es, a la vez, elemento de  $P$  y elemento de  $I$ .

**Proposición:**

“Si  $P$  es el conjunto de los enteros pares e  $I$  es el conjunto de los enteros impares, entonces, su intersección es vacía”.

“Si  $P = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k \wedge k \in \mathbb{Z}\} \wedge I = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ , entonces,  $P \cap I = \emptyset$ ”.

**Método del absurdo:**

Se parte de antecedente verdadero y consecuente falso, para llegar a un absurdo:

$$P = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k \wedge k \in \mathbb{Z}\} \wedge I = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\} \wedge P \cap I = a.$$

$$\text{Entonces, } a = 2k \text{ y } a = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, al llegar a un absurdo (ningún número, a la vez, es par e impar), queda demostrada la proposición.

**Ejercicio 15.**

Si  $T$  es un conjunto de enteros múltiplos de 3 y  $C = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 3k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$  y  $U = \mathbb{Z}$ .

(a) Hallar  $T \cap C$ .

$$T \cap C = \emptyset.$$

(b) Hallar  $(T \cup C)^c$ .

$$(T \cup C)^c = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 3k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Ejercicio 16.**

Hallar el producto cartesiano  $E \times F$  de los conjuntos  $E = \{-2, -1, 0, 1\}$  y  $F = \{2, 3\}$  y representarlo en  $\mathbb{R}^2$  como puntos del plano.

$$E \times F = \{(-2, 2), (-2, 3), (-1, 2), (-1, 3), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\}.$$

**Gráfico.**

**Ejercicio 17.**

Si  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{-2, -1, 6\}$  y  $C = \{6, 7\}$  son conjuntos, hallar  $A \times (B \cap C)$  y  $(A \times B) \cap (A \times C)$  y verificar que son iguales.

$$A \times (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \times \{6\}$$

$$A \times (B \cap C) = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}.$$

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, -2), (1, -1), (1, 6), (2, -2), (2, -1), (2, 6), (3, -2), (3, -1), (3, 6)\} \cap \{(1, 6), (1, 7), (2, 6), (2, 7), (3, 6), (3, 7)\}$$

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}.$$

Por lo tanto,  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .



**Ejercicio 18.**

Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones, justificando lo que se afirma. En caso de serlo, indicar la imagen:

(a)



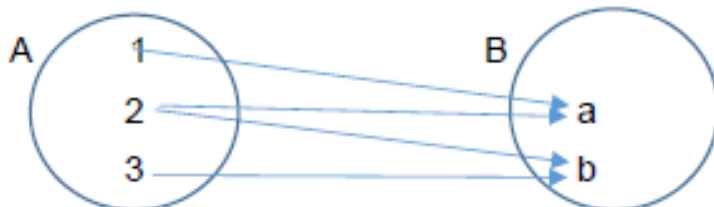
Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (3) al que no se le asigna un único elemento de B.

(b)



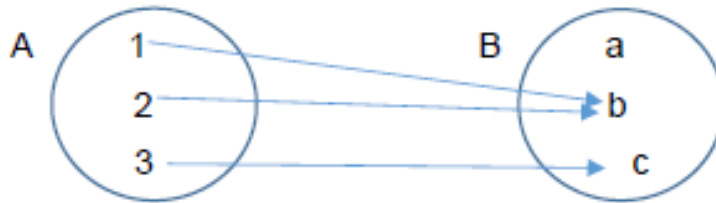
Esta relación es una función, ya que a todo elemento de A se le asigna un único elemento de B. La imagen de esta función es  $\{a, b\}$ .

(c)



Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (2) al que se le asigna más de un elemento de B.

(d)



Esta relación es una función, ya que a todo elemento de A se le asigna un único elemento de B. La imagen de esta función es  $\{b, c\}$ .

(e) Si  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{x, y, z\}$ :

(i)  $f: A \rightarrow B, f = \{(1, x), (2, z)\}$ .

Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (3) al que no se le asigna un único elemento de B.

(ii)  $g: A \rightarrow B, g = \{(1, y), (2, x), (2, z), (3, y)\}$ .

Esta relación no es una función, ya que existe elemento de A (2) al que se le asigna más de un elemento de B.

(iii)  $h: A \rightarrow B, h = \{(1, y), (2, x), (3, y)\}$ .

Esta relación es una función, ya que a todo elemento de A se le asigna un único elemento de B. La imagen de esta función es  $\{x, y\}$ .

**Ejercicio 19.**

Sea  $A$  el conjunto de los alumnos de Matemática 1. Determinar cuál de las siguientes asignaciones define una función sobre  $A$ :

(a) Asignarle a cada estudiante su edad.

Esta asignación define una función sobre  $A$  (dado que cada estudiante tiene sólo una edad).

(b) Asignarle a cada estudiante su profesor.

Esta asignación define una función sobre  $A$  (siempre que no exista un estudiante que tenga más de un profesor).

(c) Asignarle a cada estudiante su hermana mujer.

Esta asignación no define una función sobre  $A$  (siempre que exista, al menos, un estudiante que tenga más de una hermana mujer).

**Ejercicio 20.**

Dada  $f: \mathbb{R} - \{5\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3+x}{x-5}$ , determinar:

(a)  $f(-1)$ .

$$f(-1) = \frac{3+(-1)}{-1-5}$$

$$f(-1) = \frac{3-1}{-6}$$

$$f(-1) = \frac{2}{-6}$$

$$f(-1) = \frac{-1}{3}.$$

(b)  $f(0)$ .

$$f(0) = \frac{3+0}{0-5}$$

$$f(0) = \frac{3}{-5}$$

$$f(0) = \frac{-3}{5}.$$

(c)  $f(2)$ .

$$f(2) = \frac{3+2}{2-5}$$

$$f(2) = \frac{5}{-3}$$

$$f(2) = \frac{-5}{3}.$$

(d)  $f(\frac{3}{2})$ .

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{3+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-5}$$

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{\frac{9}{2}}{-\frac{7}{2}}$$

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{-9}{7}.$$

**Ejercicio 21.**

Dada  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(t) = \sqrt{1+t^2}$ , determinar:

(a)  $g(0)$ .

$$g(0) = \sqrt{1+0^2}$$

$$g(0) = \sqrt{1+0}$$

$$g(0) = \sqrt{1}$$

$$g(0) = 1.$$

(b)  $g\left(\frac{-3}{4}\right)$ .

$$g\left(\frac{-3}{4}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$$

$$g\left(\frac{-3}{4}\right) = \sqrt{1 + \frac{9}{16}}$$

$$g\left(\frac{-3}{4}\right) = \sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$g\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{5}{4}.$$

(c)  $g(3)$ .

$$g(3) = \sqrt{1+3^2}$$

$$g(3) = \sqrt{1+9}$$

$$g(3) = \sqrt{10}.$$

**Ejercicio 22.**

Un rectángulo tiene 100 cm de perímetro. Expresar el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados. Graficar la función obtenida, utilizando el eje  $x$  para indicar la longitud del lado elegido y el eje  $y$  para indicar el área. ¿Cuál es el área máxima?

$$P = 2(L_1 + L_2)$$

$$100 = 2(L_1 + L_2)$$

$$L_1 + L_2 = \frac{100}{2}$$

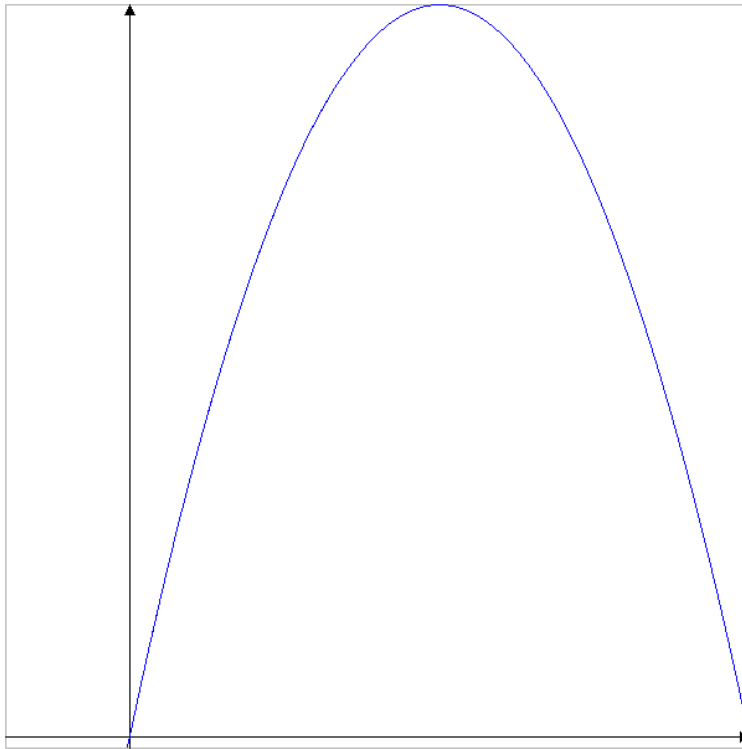
$$L_1 + L_2 = 50.$$

$$L_2 = 50 - L_1.$$

$$A(L_1, L_2) = L_1 L_2$$

$$A(L_1) = L_1(50 - L_1)$$

$$A(L_1) = 50L_1 - L_1^2.$$



$$A'(L_1) = 50 - 2L_1.$$

$$A'(L_1) = 0$$

$$50 - 2L_1 = 0$$

$$2L_1 = 50$$

$$L_1 = \frac{50}{2}$$

$$L_1 = 25.$$

$$A(25) = 50 * 25 - 25^2$$

$$A(25) = 1250 - 625$$

$$A(25) = 625.$$

Por lo tanto, el área máxima es  $625 \text{ cm}^2$ .

**Ejercicio 23.**

*Se desea construir un depósito de base cuadrada (sin tapa) y  $10 \text{ m}^3$  de capacidad. Expresar la superficie lateral del depósito en función de la longitud del lado de la base.*

$$h = \frac{V}{b^2},$$

donde h es la altura del depósito, V es la capacidad y b es la longitud del lado de la base.

$$S(b) = 4bh$$

$$S(b) = 4b \frac{V}{b^2}$$

$$S(b) = 4 \frac{V}{b}$$

$$S(b) = 4 \frac{10}{b}$$

$$S(b) = \frac{40}{b},$$

donde S (b) es la superficie lateral del depósito en función de la longitud del lado de la base.



**Ejercicio 24.**

*Una lámina metálica rectangular mide 5 m de ancho y 8 m de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. Expresar el volumen de la caja en función de su altura.*

$$a = 5 - 2h; l = 8 - 2h,$$

donde  $a$  es el ancho,  $l$  es el largo y  $h$  es la altura de la caja sin tapa.

$$V(h) = alh$$

$$V(h) = (5 - 2h)(8 - 2h)h$$

$$V(h) = 40h - 10h^2 - 16h^2 + 4h^3$$

$$V(h) = 4h^3 - 16h^2 + 40h,$$

donde  $V(h)$  es el volumen de la caja en función de su altura.

**Ejercicio 25.**

*Estudiar si las siguientes funciones son iguales. Justificar.*

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x + 2$  y  $g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ .

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$
$$g(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$g(x) = x + 2.$$

Por lo tanto, si se redefine el dominio de  $g$  en  $\mathbb{R}$ , estas funciones ( $f$  y  $g$ ) son iguales.

**Ejercicio 26.**

Usar una fórmula para definir cada una de las siguientes funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ :

(a)  $f$  asigna a cada número su cubo.

$$f(x) = x^3.$$

(b)  $g$  asigna a cada número el 5.

$$g(x) = 5.$$

(c)  $h$  asigna a cada número 4 más su cuadrado.

$$h(x) = 4 + x^2.$$

(d)  $w$  asigna a cada número su cubo más el doble del número.

$$w(x) = x^3 + 2x.$$

**Ejercicio 27.**

Se define la función floor o suelo:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , como la función que a cada número real le asigna el mayor entero menor o igual que el número. Así,  $\text{suelo}(2,5) = 2$ ,  $\text{suelo}(-3,7) = -4$ ,  $\text{suelo}(5) = 5$ . Se nota también como  $\text{suelo}(x) = \lfloor x \rfloor$ . Hallar el valor de:

(a)  $\lfloor \sqrt{5} \rfloor$ .

$$\text{suelo}(\sqrt{5}) = \lfloor \sqrt{5} \rfloor$$

$$\text{suelo}(\sqrt{5}) = 2.$$

(b)  $\lfloor \frac{3}{4} \rfloor$ .

$$\text{suelo}\left(\frac{3}{4}\right) = \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor$$

$$\text{suelo}\left(\frac{3}{4}\right) = 0.$$

(c)  $\left\lfloor \frac{7}{3} - 9 \right\rfloor$ .

$$\text{suelo}\left(\frac{7}{3} - 9\right) = \left\lfloor \frac{7}{3} - 9 \right\rfloor$$

$$\text{suelo}\left(\frac{7}{3} - 9\right) = \left\lfloor \frac{-20}{3} \right\rfloor$$

$$\text{suelo}\left(\frac{7}{3} - 9\right) = -7.$$

**Ejercicio 28.**

Se define la función ceiling o techo:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , como la función que a cada número real le asigna el menor entero mayor o igual que el número. Así,  $\text{techo}(2,5) = 3$ ,  $\text{techo}(-3,7) = -3$ ,  $\text{techo}(5) = 5$ . Se nota también como  $\text{techo}(x) = \lceil x \rceil$ . Hallar el valor de:

(a)  $\lceil \sqrt{11} \rceil$ .

$$\text{techo}(\sqrt{11}) = \lceil \sqrt{11} \rceil$$

$$\text{techo}(\sqrt{11}) = 4.$$

(b)  $\lceil \frac{3}{5} + \sqrt{2} \rceil$ .

$$\text{techo}\left(\frac{3}{5} + \sqrt{2}\right) = \left\lceil \frac{3}{5} + \sqrt{2} \right\rceil$$

$$\text{techo}\left(\frac{3}{5} + \sqrt{2}\right) = 2.$$

(c)  $\lceil \frac{5}{3} - 7 \rceil$ .

$$\text{techo}\left(\frac{5}{3} - 7\right) = \left\lceil \frac{5}{3} - 7 \right\rceil$$

$$\text{techo}\left(\frac{5}{3} - 7\right) = \left\lceil \frac{-16}{3} \right\rceil$$

$$\text{techo}\left(\frac{5}{3} - 7\right) = 6.$$

**Ejercicio 29.**

Se define la función factorial  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , como la función que a cada número natural le asigna el producto de todos los números naturales desde el número hasta el 1, suele escribirse en forma decreciente. Así, factorial (1)= 1, factorial (2)= 2 \* 1, factorial (3)= 3 \* 2 \* 1, factorial (4)= 4 \* 3 \* 2 \* 1. La notación habitual es factorial (n)= n!. Por definición, 0!= 1. Hallar el valor de:

(a) 4!.

$$\text{factorial (4)} = 4!$$

$$\text{factorial (4)} = 4 * 3 * 2 * 1$$

$$\text{factorial (4)} = 24.$$

(b) 5!.

$$\text{factorial (5)} = 5!$$

$$\text{factorial (5)} = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$$

$$\text{factorial (5)} = 120.$$

(c) 6!.

$$\text{factorial (6)} = 6!$$

$$\text{factorial (6)} = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1$$

$$\text{factorial (6)} = 720.$$

**Ejercicio 30.**

Sean  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{a, b, c\}$  conjuntos. Definir una función con dominio  $A$  y codominio  $B$ , que sea suryectiva.

$$1 \rightarrow a.$$

$$2 \rightarrow a.$$

$$2 \rightarrow b.$$

$$3 \rightarrow c.$$

$$4 \rightarrow c.$$

Por lo tanto, esta función  $A \rightarrow B$  es suryectiva porque  $(\forall y) (y \in B \rightarrow (\exists x) (x \in A \wedge y = f(x)))$  o, equivalentemente, porque  $\text{Im}(f) = \text{Codom}(f)$ .

**Ejercicio 31.**

Sean  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{a, b, c, d, e\}$  conjuntos. Definir una función con dominio  $A$  y codominio  $B$ , que sea inyectiva.

$1 \rightarrow a.$

$2 \rightarrow b.$

$3 \rightarrow c.$

$4 \rightarrow d.$

Por lo tanto, esta función  $A \rightarrow B$  es inyectiva porque  $(\forall x_1) (\forall x_2) (x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$  o, equivalentemente, porque  $(\forall x_1) (\forall x_2) (f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2).$



**Ejercicio 32.**

Definir conjuntos finitos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  y realizar diagramas de flechas para definir una función:

(a)  $f: B \rightarrow C$  que sea inyectiva y no suryectiva.

$B = \{1, 2, 3, 4\}$ .

$C = \{a, b, c, d, e\}$ .

$1 \rightarrow a$ .

$2 \rightarrow b$ .

$3 \rightarrow c$ .

$4 \rightarrow d$ .

(b)  $g: D \rightarrow E$  que sea suryectiva y no inyectiva.

$D = \{1, 2, 3, 4\}$ .

$E = \{a, b, c\}$ .

$1 \rightarrow a$ .

$2 \rightarrow a$ .

$2 \rightarrow b$ .

$3 \rightarrow c$ .

$4 \rightarrow c$ .

(c)  $f: B \rightarrow A$  que sea biyectiva. Definir la función inversa.

$B = \{1, 2, 3, 4\}$ .

$A = \{a, b, c, d\}$ .

$1 \rightarrow a$ .

$2 \rightarrow b$ .

$3 \rightarrow c$ .

$4 \rightarrow d$ .

$f^{-1}: A \rightarrow B$ .

$a \rightarrow 1$ .

$b \rightarrow 2$ .

$c \rightarrow 3$ .

$d \rightarrow 4$ .

**Ejercicio 33.**

*Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos justificando lo que afirma:*

(a) *“Una recta horizontal es la gráfica de una función inyectiva”.*

Este enunciado es FALSO, ya que el único elemento de la imagen tiene asociado infinitos valores del dominio.

(b) *“Una recta vertical es la gráfica de una función”.*

Este enunciado es FALSO, ya que el único elemento del dominio tiene asociado infinitos elementos del codominio.

(c) *“Una parábola con eje paralelo al eje  $y$  es la gráfica de una función inyectiva”.*

Este enunciado es FALSO, ya que cada elemento de la imagen (excepto en el vértice de la parábola) tiene asociado dos elementos del dominio.

(d) *“Una parábola con eje paralelo al eje  $x$  es la gráfica de una función”.*

Este enunciado es FALSO, ya que cada elemento del dominio (excepto en el vértice de la parábola) tiene asociado dos elementos del codominio.

(e) *“Una circunferencia es la gráfica de una función”.*

Este enunciado es FALSO, ya que cada elemento del dominio (excepto en los extremos laterales de la circunferencia) tiene asociado dos elementos del codominio.

(f) *“Dos conjuntos finitos entre los que se establece una función biyectiva pueden tener distinta cantidad de elementos”.*

Este enunciado es FALSO, ya que, si se establece una función biyectiva entre dos conjuntos finitos, entonces, estos tienen la misma cantidad de elementos.

**Ejercicio 34.**

*Para las funciones del ejercicio 16, indicar si son inyectivas, suryectivas o biyectivas.*

El producto cartesiano del ejercicio 16 no es una función.

**Ejercicio 35.**

*Para las funciones del ejercicio 17, indicar si son inyectivas. Definir, para cada una, un codominio de manera que sean suryectivas y otro para que no lo sean.*

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}.$$

Estas funciones no son inyectivas. El codominio de manera que sean suryectivas es  $\text{Codom} = \{6\}$  y un codominio para que no lo sean es  $\text{Codom} = \{6, 7\}$ .

**Ejercicio 36.**

*Analizar si las funciones suelo, techo y factorial son funciones inyectivas, suryectivas o biyectivas.*

- La función “suelo” no es inyectiva, es suryectiva y, por lo tanto, no es biyectiva.
- La función “techo” no es inyectiva, es suryectiva y, por lo tanto, no es biyectiva.
- La función “factorial” es inyectiva, no es suryectiva y, por lo tanto, no es biyectiva.