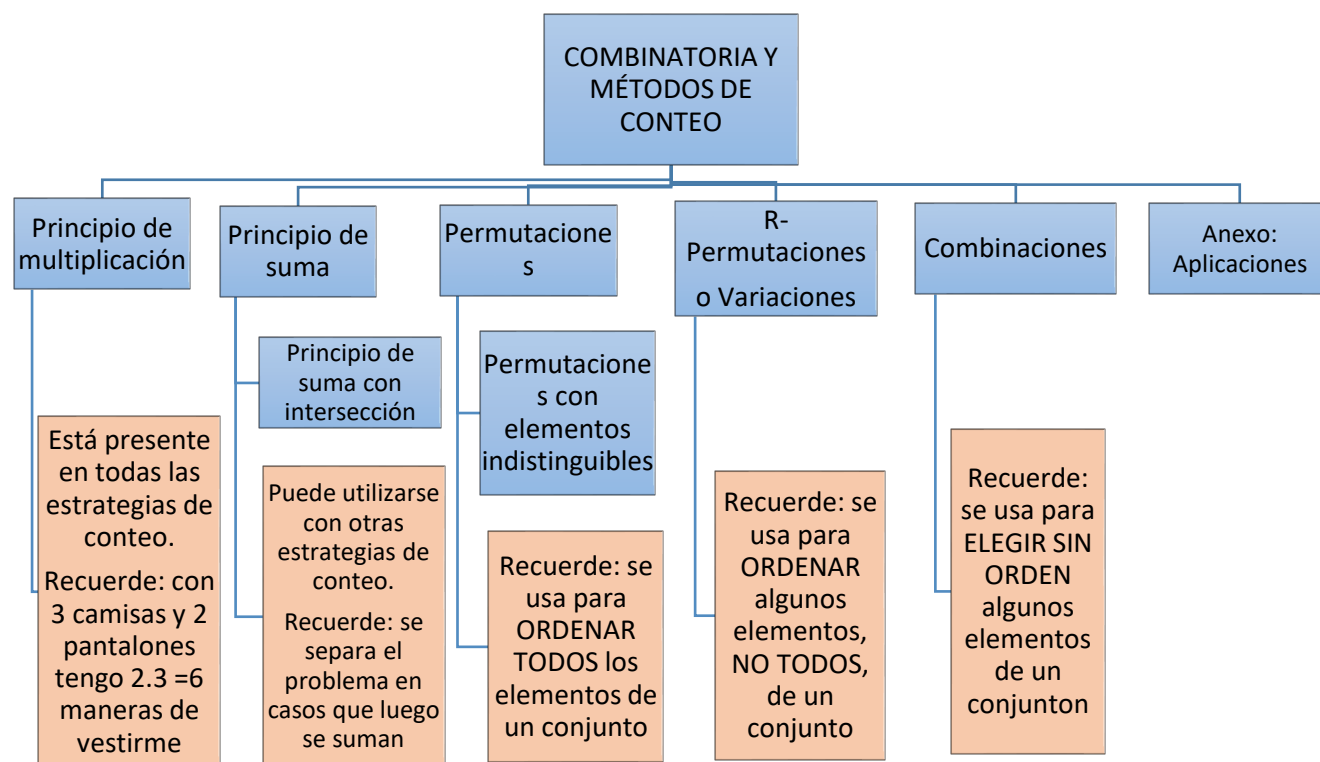


Capítulo 5

COMBINATORIA Y METODOS DE CONTEO

CONTENIDOS:

**Matemático invitado: Blaise Pascal**

La actividad de contar es casi tan antigua como el hombre, es posible contar casi cualquier cosa siempre y cuando se use el método de conteo adecuado y la forma adecuada para distinguir los elementos del conjunto que se quiere contar.

En el área de la computación es necesario usar métodos de conteo para determinar el número de ciclos que tiene un programa, el número de comparaciones que realiza un programa para ordenar un conjunto de datos, el número de palabras diferentes que tiene un lenguaje con determinada gramática. En función de esto diremos que un software es más o menos eficiente que otro para realizar determinado algoritmo. Los métodos de conteo en informática permiten optimizar los recursos de computadora y disminuir el tiempo de ejecución de un proceso.

Los métodos de conteo son también la antesala de la teoría de las probabilidades, que estudia la probabilidad de que un hecho ocurra. En líneas generales esto se calcula dividiendo la cantidad de éxitos, sobre la cantidad total de casos. Por ejemplo la probabilidad de que salga un número que empiece con 1 en un bolillero que tiene números de dos cifras, será 10 dividido 90, ya que hay 10 números que empiezan con 1 y hay 90 de dos cifras.

En el siglo XVII Pierre Fermat y Blaise Pascal tratan de resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar y comienzan a desarrollar la teoría de las probabilidades.

En este curso estudiaremos el número combinatorio, definido como:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Este número aparece en el llamado Triángulo de Pascal, donde cada fila del triángulo está formado por los números combinatorios. Se construye de arriba hacia abajo, con 1 en los extremos y el elemento que se escribe entre dos números que están arriba es la suma de esos números:

1							1								
1			1			$\binom{1}{0}$			$\binom{1}{1}$						
1		2		1		$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$					
1		3		3		1		$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
1		4		6		4		1		$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$
1		5		10		10		5		1				
1		6		15		20		15		6		1			
1		7		21		35		35		21		7		1	

El triángulo tiene varias propiedades, entre ellas, la suma de los elementos de una fila es 2^n , así, sacando el primer 1, la suma de la primer fila es 2^1 , la de la segunda es 2^2 , la de la tercera es 2^3 , etc.

Blaise Pascal nació en Francia el 19 de junio de 1623 y murió el 19 de agosto de 1662. Fue matemático, físico y filósofo cristiano. Sus contribuciones a la matemática incluyen el diseño y construcción de calculadoras mecánicas, aportes a la teoría de la probabilidad, investigaciones sobre los flúidos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío. Después de una experiencia religiosa profunda en 1654, Pascal se dedicó también a la filosofía y a la teología.

1. Principio de multiplicación.

Comenzaremos con algunos ejemplos.

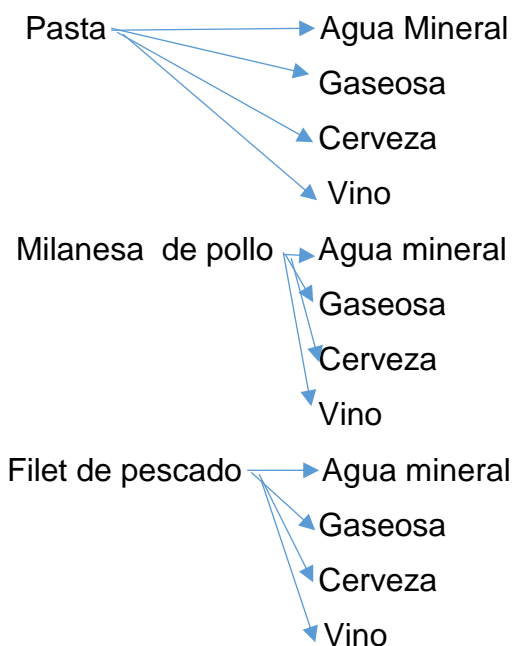
Ejemplo 1.1:

Con el menú que aparece a continuación,

a) ¿Cuántas comidas diferentes que consten de un plato principal y una bebida pueden hacerse?

Entradas
Sopa
Ensalada
Platos principales
Pasta
Milanesa de pollo
Filete de pescado
Bebidas
Agua mineral
Gaseosa
Cerveza
Vino

Enumeremos todas las comidas posibles con un plato principal y una bebida:

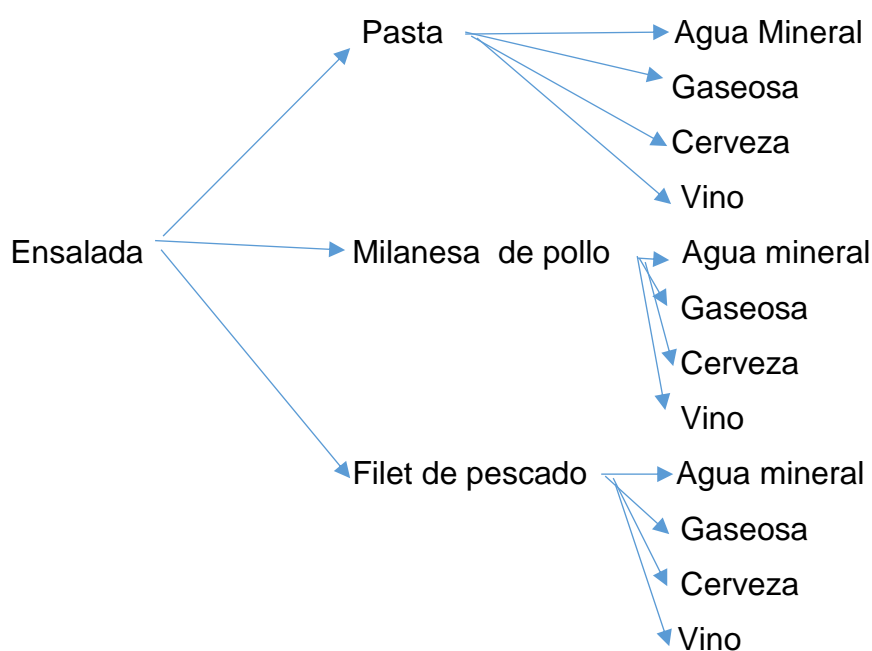
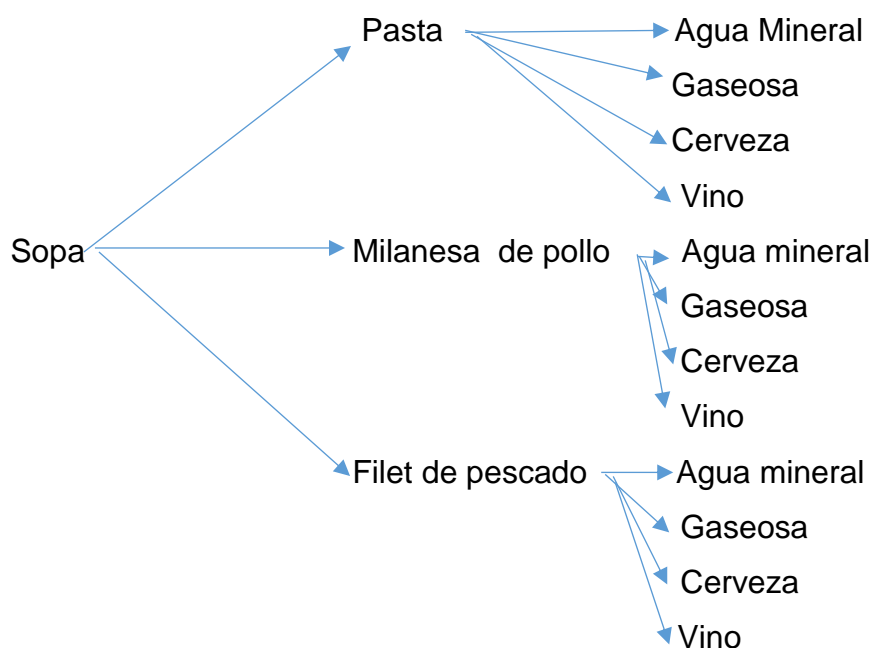


Hay 12 comidas diferentes. La elección del plato principal puede hacerse de tres maneras diferentes (P, M o F) y, para cada una de ellas, hay cuatro maneras distintas de elegir la bebida (A, G, C o V).

b) ¿Cuántas comidas diferentes que consten de una entrada, un plato principal y una bebida pueden hacerse?

La elección de la entrada puede hacerse de dos maneras diferentes.

Por cada una de esas elecciones, hay tres maneras diferentes de elegir el plato principal, habiendo entonces un total de $2 \cdot 3 = 6$ comidas diferentes con entrada y plato principal. Para cada una de esas comidas hay cuatro maneras diferentes de elegir la bebida, así que en total tendremos $6 \cdot 4 = 24$ comidas diferentes con entrada, plato principal y bebida.



Principio de multiplicación:

Si una actividad consta de t pasos sucesivos y
el paso 1 puede realizarse de n_1 formas,
el paso 2 puede realizarse de n_2 formas, . . . ,
el paso t puede realizarse de n_t formas,

entonces el número de diferentes resultados posibles es $n_1 \cdot n_2 \dots n_t$

Ejemplo 1.2:


Si tengo 3 pantalones y 4 remeras, ¿De cuántas maneras puedo vestirme?

Nuevamente tenemos que pensar que teniendo 3 pantalones, por cada elección de pantalón puedo elegir 4 remeras distintas. Siguiendo la definición del principio de multiplicación, tenemos 2 pasos a realizar (elección de pantalón, elección de remera), el primer paso puede hacerse de 3 maneras y el segundo de 4 maneras, por lo tanto la cantidad de formas de vestirme es $3 \cdot 4 = 12$.

Ejemplo 1.3:

- a) ¿Cuántas cadenas de longitud 4 pueden formarse con las letras A B C D E si no se permiten repeticiones?
- b) ¿y si las letras pueden repetirse?
- c) ¿Cuántas cadenas de la parte a) comienzan con la letra E?
- d) ¿Cuántas cadenas de la parte b) comienzan con la letra E?


a) Una cadena de longitud 4 puede construirse en cuatro pasos sucesivos: se elige la primera letra, luego la segunda, luego la tercera y finalmente la cuarta. La primera letra puede elegirse de cinco maneras. Una vez elegida la primera letra, la segunda puede seleccionarse de cuatro formas (pues no queremos que la cadena tenga letras repetidas), una vez elegida la segunda letra, la tercera puede seleccionarse de tres formas. Una vez elegida la tercera letra, la cuarta puede seleccionarse de dos formas.

Tengo que realizar 4 pasos: 
Cantidad de letras disponibles: 5 4 3 2

Por el principio de multiplicación, pueden formarse $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ cadenas diferentes de longitud 4 y sin letras repetidas.

b) Si se permiten repeticiones, la elección de cada letra puede hacerse de cinco maneras diferentes. Por lo tanto, hay $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ cadenas.

c) Si la cadena debe comenzar con la E, la elección de la primera letra puede hacerse de una única manera. Como no permitimos repeticiones, la elección de la segunda letra puede hacerse de cuatro maneras diferentes, la elección de la tercera, de tres maneras y la elección de la cuarta letra puede hacerse de dos maneras diferentes. Entonces $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ es el número de cadenas de la parte a) que empiezan con la letra E.

Tengo que realizar 4 pasos: 
Cantidad de letras disponibles: E 4 3 2

d) Otra vez, la elección de la primera letra puede hacerse de una única forma, pero ahora la elección de la segunda letra puede hacerse de cinco maneras diferentes, y lo mismo vale para la tercera y la cuarta letra. Así que, en este caso, hay $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ cadenas.

2. Principio de suma.






Ejemplo 2.1:

¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 101 o con 111?

Separemos el problema en dos casos:

Caso 1)

Una cadena de ocho bits que comienza con 101 puede construirse en cinco pasos: se elige el cuarto bit, se elige el quinto bit, . . . , se elige el octavo bit. Cada una de esas elecciones puede hacerse de dos maneras (se elige un 1 o un 0). Por el principio de multiplicación, hay $2^5 = 32$ cadenas de ocho bits que comiencen con 101.

Tengo que realizar 5 pasos: 1 0 1     

Cantidad disponible: 2(0 o 1) 2 2 2 2

Caso 2)

El mismo razonamiento vale para las cadenas que comienzan con 111. Hay también 32 de estas cadenas.

El conjunto de las cadenas que comienzan con 101 y el conjunto de las cadenas que comienzan con 111 son conjuntos disjuntos, es decir que no tienen cadenas en común, así que el número de cadenas de ocho bits que comienzan con 101 o con 111 es $32 + 32 = 64$.

Observación: acá el resultado no está dado por la multiplicación de los casos, ya que no es cierto que por cadena que comience con 101 tengo 32 cadenas que comiencen con 111.

Si una cadena empieza con 101 no puede empezar con 111, por eso decimos que son casos disjuntos, contamos por separado cada caso y luego sumamos.

Principio de suma:

Si una actividad puede separarse en t casos distintos de manera que no tengan intersección y el caso 1 puede realizarse de n_1 formas, el caso 2 de n_2 formas, ... el caso t de n_t formas, entonces la cantidad de formas de realizar el caso 1 o el caso 2 o el caso 3 o ... o el caso t , está dada por:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_t$$

Dicho de otro modo:

Si X_1, X_2, \dots, X_t son conjuntos con n_1, n_2, \dots, n_t elementos respectivamente, y

$X_i \cap X_j = \emptyset$ si $i \neq j$ entonces el número de elementos posibles que pueden elegirse de

$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ es $n_1 + n_2 + \dots + n_t$

($X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ tiene $n_1 + n_2 + \dots + n_t$ elementos)

Ejemplo 2.2:

Un consejo formado por Alicia, Berta, Carlos, Darío, Elena y Francisco debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

a) ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

- b)** ¿De cuántas formas puede hacerse si debe ser presidente Alicia o Francisco?
- c)** ¿De cuántas formas puede hacerse si Berta debe tener alguno de los puestos?
- d)** ¿De cuántas maneras puede hacerse si Berta es presidente o Carlos es secretario?

a) Los ocupantes de los cargos pueden elegirse en tres pasos: 1º) se elige el presidente (esta elección se puede hacer de 6 maneras distintas) 2º) se elige el secretario (quedan para esta elección cinco posibilidades) 3º) se elige el tesorero (4 posibilidades). Por el principio de multiplicación, hay $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas diferentes de elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

b) Separamos en dos casos:

Caso 1) Si Alicia es presidente, razonando como en a), concluimos que hay $5 \cdot 4 = 20$ maneras de seleccionar un secretario y un tesorero entre las cinco personas que quedan.

Caso 2) De la misma manera, si Francisco es presidente, hay 20 maneras de elegir a los demás. El conjunto de ternas que tienen a Alicia como presidente y el de ternas que tienen a Francisco como presidente son disjuntos.

Por el principio de suma, hay $20 + 20 = 40$ formas diferentes de elegir presidente, secretario y tesorero, si Alicia o Francisco deben ser presidentes.

c) Separamos en 3 casos:

Caso 1) Si Berta es presidente, razonando como en a) hay $5 \cdot 4 = 20$ maneras de elegir secretario y tesorero.

Caso 2) De la misma manera, si Berta es secretario hay 20 maneras de elegir presidente y tesorero.

Caso 3) Si Berta es tesorero, hay 20 maneras de elegir presidente y secretario.

Como las tres situaciones son disjuntas, por el principio de suma hay $20+20+20 = 60$ maneras de elegir presidente, secretario y tesorero, si Berta debe ocupar un cargo.

En esta parte también podríamos haber razonado de la siguiente manera: la actividad de elegir presidente, secretario y tesorero entre las seis personas si Berta debe ocupar un cargo, puede realizarse en tres pasos. En el primer paso se asigna a Berta un cargo (hay para esto 3 posibilidades: presidente, secretario o tesorero)). En el segundo paso se ocupa el siguiente cargo más alto (5 posibles elecciones). En el tercer paso se ocupa el otro cargo (4 posibilidades). Por

el principio de multiplicación hay $3 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas de elegir un presidente, un secretario y un tesorero si Berta debe ocupar algún cargo.




d) Consideraremos en este curso el “o inclusivo”, es decir que aceptamos como caso válido que Berta sea presidente y Carlos Secretario

Separamos en 2 casos:




Caso 1) Si Berta es presidente hay, como ya hemos dicho, 20 maneras de ocupar los otros dos cargos.

Caso 2) También, siendo Carlos secretario hay 20 maneras de ocupar los otros cargos.




Pero en este caso el conjunto de posibilidades en las que Berta es presidente y el conjunto de posibilidades en las que Carlos es secretario no son disjuntos.

Caso 1)	Presidente	Secretario	Tesorero
Tengo que realizar 3 pasos:			
Cantidad de personas disponibles:	Berta	5	4

(Puede estar Carlos)

Caso 2)	Presidente	Secretario	Tesorero
Tengo que realizar 3 pasos:			
Cantidad de personas disponibles:	5	Carlos	4

(Puede estar Berta)

Es decir que el caso	Presidente	Secretario	Tesorero
			
	Berta	Carlos	4

Se cuenta en ambos casos.

Las asignaciones de cargos que tienen a Berta como presidente y a Carlos como secretario pertenecen a ambos conjuntos (éstas son 4 posibilidades) Así que el número de maneras de elegir presidente, secretario y tesorero, con Berta como presidente o con Carlos como secretario es: $20 + 20 - 4 = 36$.

Principio de suma con intersección.

Si una actividad puede separarse en 2 casos distintos, de manera que el caso 1 puede realizarse de n_1 formas y el caso 2 de n_2 formas, pero tienen casos en común, es decir que no son disjuntos, y el número de casos en común es k , entonces la cantidad de formas de realizar la actividad está dada por:

$$n_1 + n_2 - k$$

Dicho de otro modo:

Si X e Y son conjuntos finitos, con n y m elementos respectivamente, y $X \cap Y$ tiene k elementos, la unión de X e Y tiene $n + m - k$ elementos.

Observación:

Transformar un problema de suma con intersección en uno sin intersección.

El inciso d) del ejercicio anterior podría resolverse también disjuntando los casos. Esto quiere decir que separamos en casos sin intersección:

Caso 1) Berta es presidente y Carlos no es secretario: hay entonces una sola posibilidad para el presidente (Berta), 4 para el secretario (de los 6 hay que descontar a Berta y a Carlos) y 4 posibilidades para el tesorero (descontamos a Berta y a la persona elegida de secretario, quedan 4 porque Carlos sí puede ser tesorero), entonces hay $4 \cdot 4 = 16$ maneras de ocupar los otros dos cargos.

Caso 2) Carlos es secretario y Berta no es presidente: igual que antes hay 16 maneras de ocupar los cargos.

Caso 3) Berta es presidente y Carlos es secretario: solo queda elegir al tesorero, que puede hacerse de 4 maneras distintas.

En este esquema nuestros casos son disjuntos y la cantidad de formas de elegir los cargos con las restricciones puestas es entonces $16 + 16 + 4 = 36$.

Ejercicios:

1) Un hombre tiene ocho camisas, cuatro pantalones y cinco pares de zapatos. ¿Cuántas combinaciones de ropa puede hacer?

2) ¿Cuántas patentes de auto diferentes pueden construirse?

- 3) a) ¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 1100?
b) ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen el segundo o el cuarto bit igual a 1?
c) ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen exactamente un 1?
d) ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen al menos un 1?
e) ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen exactamente dos 1?
f) ¿Cuántas cadenas de ocho bits se leen igual en ambas direcciones?
- 4) Las letras A B C D E se utilizan para formar cadenas de longitud 3.
a) ¿Cuál es el número total de cadenas?
b) ¿Cuántas cadenas hay sin letras repetidas?
c) ¿Cuántas cadenas comienzan con A?
d) ¿Cuántas cadenas comienzan con A y no tienen letras repetidas?
e) ¿Cuántas cadenas comienzan con B o con D?
f) ¿Cuántas cadenas comienzan con B o terminan con D?
- 5) a) ¿Cuántos enteros entre el 0 y el 200 inclusive son divisibles por 5?
b) ¿Cuántos enteros de 3 cifras tienen dígitos distintos?
c) ¿Cuántos enteros de 3 cifras contienen el dígito 7?
d) ¿Cuántos enteros de 3 cifras no contienen al dígito 0?
- 6) Con referencia al ejemplo 2.2, ¿de cuántas maneras pueden ocuparse los cargos si Berta es presidente o Carlos tiene un puesto? (Recuerde: consideramos el “o inclusivo”, es decir que pueden ocurrir las dos cosas)
- 7) Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{x, y, z, w, t, r, h\}$, ¿Cuántas funciones inyectivas hay con dominio A y codominio B?
-

3. Permutaciones.

Ejemplo 3.1:

¿De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse los nombres María, Nicolás y Paula en una lista?

El primer nombre puede elegirse de tres maneras diferentes. Una vez elegido el primer nombre, nos quedan 2 y por último sólo uno.

Podemos pensarlo con el principio de multiplicación:

Tengo que realizar 3 pasos:

Cantidad de personas disponibles:



3



2



1

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneras de ordenarlos

Enumeremos esas posibilidades:

María	María	Nicolás	Nicolás	Paula	Paula
Nicolás	Paula	María	Paula	María	Nicolás
Paula	Nicolás	Paula	María	Nicolás	María

Siempre que queremos **ordenar** objetos, personas, números, etc. Usamos el principio de multiplicación. Cada uno de los seis ordenamientos se llama **permutación**.

Permutaciones

Una **permutación** de n elementos distintos x_1, x_2, \dots, x_n es un ordenamiento de los n elementos x_1, x_2, \dots, x_n .

La cantidad de permutaciones es: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Existen $n!$ permutaciones de n elementos distintos.

La demostración del enunciado anterior es inmediata utilizando el principio de multiplicación. Dados n elementos distintos, una permutación de esos n elementos puede construirse en n pasos: se elige el primer elemento, luego el segundo, \dots y finalmente se elige el último elemento.

El primer elemento puede elegirse de n maneras diferentes, hecho esto, el segundo puede elegirse de $n - 1$ maneras diferentes, el tercer elemento puede elegirse de $n - 2$ maneras diferentes y así sucesivamente, hasta el último elemento que puede elegirse de $n - (n - 1) = 1$ maneras diferentes.

Hay entonces $n(n - 1)(n - 2) \dots 2 \cdot 1 = n!$ permutaciones de n elementos distintos.

Ejercicios:

8) a) ¿Cuántos códigos de cuatro letras se pueden formar con las letras P, D, Q, X sin repeticiones?

b) ¿Cuántos números diferentes pueden formarse utilizando todos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 sin repetirlos?

c) ¿De cuántas maneras pueden estacionar 6 bicicletas en una hilera?

9) a) ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen la subcadena DEF? (nos referimos a las permutaciones de las letras dadas que tienen a las letras D, E y F juntas y en ese orden)

b) ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen las letras D, E y F juntas en cualquier orden?

10) ¿De cuántas formas pueden sentarse seis personas en torno de una mesa circular?

Aclaración: Las formas de sentarse obtenidas mediante rotaciones se consideran idénticas.

11) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra MESA? ¿Y las de la palabra SOL?

Ejemplo 3.2:

¿De cuántas maneras diferentes pueden disponerse las seis letras de la palabra BANANA?

Tenemos que contar el número de ordenamientos posibles de 6 objetos que no son todos diferentes: 3 de ellos son iguales entre sí y otros 2 son iguales entre sí, por eso acá a la estrategia de las permutaciones tendremos que modificarla para aplicarla en este caso.

Si rotulamos las A y las N tenemos seis elementos diferentes: B, A₁, N₁, A₂, N₂, A₃

El número de permutaciones de esos elementos es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$

Pero, en nuestro caso, hay varias de esas permutaciones que son indistinguibles (por ejemplo B A₁ N₁ A₂ N₂ A₃ y B A₁ N₂ A₂ N₁ A₃).

Cada permutación tiene otra idéntica que es la que se obtiene dejando fija la B y las A y permutando las N. O sea que podríamos enlistar las 720 permutaciones en pares que resultan iguales. Nos quedan por lo tanto $720 : 2 = 360$ permutaciones diferentes.

Razonando de manera similar, vemos que esas 360 permutaciones a su vez tienen repeticiones, para una permutación fija de las letras B y N hay copias que no podemos distinguir:

B A ₁ N ₁ A ₂ N ₂ A ₃	B A ₁ N ₁ A ₃ N ₂ A ₂
B A ₂ N ₁ A ₁ N ₂ A ₃	B A ₂ N ₁ A ₃ N ₂ A ₁
B A ₃ N ₁ A ₂ N ₂ A ₁	B A ₃ N ₁ A ₁ N ₂ A ₂

Hay $3! = 6$ que difieren sólo en el orden de las letras A y que son por lo tanto idénticas si las letras A no tienen rótulo.

Hay entonces $\frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{720}{2 \cdot 6} = \frac{360}{6} = 60$ ordenamientos diferentes.

Permutaciones con elementos indistinguibles.

Dada una sucesión S de n objetos entre los que hay n_1 elementos iguales del tipo 1, n_2 elementos iguales del tipo 2, ..., n_k elementos iguales del tipo k, el número de permutaciones distinguibles de los elementos de S es:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Ejercicios:

12) ¿De cuántas maneras pueden izarse en un mástil 7 banderas entre las que hay 3 rojas, 2 verdes y 2 amarillas? (las del mismo color son idénticas)

13) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA?

14) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante 5 libros iguales de matemática, 3 libros iguales de computación y 2 iguales de física?

15) a) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante 5 libros distintos de matemática, 3 libros distintos de computación y 2 distintos de física?

b) ¿De cuántas maneras puede hacerse si los de la misma materia deben estar juntos entre sí?

c) ¿De cuántas maneras puede hacerse si sólo los de Matemática deben estar juntos entre sí?

4. R-Permutaciones o Variaciones.

Ejemplo 4.1:

Consideremos todas las cadenas diferentes de longitud 2 y sin elementos repetidos que pueden formarse con las letras A, B, C y D.

Podemos pensarlo nuevamente usando el principio de multiplicación:

Tengo que realizar 2 pasos:

Cantidad de letras disponibles:



4



3

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ cadenas}$$

Cada una de estas cadenas es un ordenamiento de dos letras elegidas entre las cuatro letras diferentes dadas.

Notar que ese número puede escribirse como $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{4!}{2!}$

Ejemplo 4.2:

Retomemos el ejemplo 2.2, inciso a)

Un consejo formado por Alicia, Berta, Carlos, Darío, Elena y Francisco debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

a) ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

¿Recuerda cómo lo resolvimos?

Usando el principio de multiplicación:

Tengo que realizar 3 pasos:

Cantidad de persona disponibles:



6



5



4

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \text{ formas de elegir}$$

Cada uno de los grupos es un ordenamiento de tres personas elegidas entre las seis personas dadas.

Notar que ese número puede escribirse como $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6!}{3!}$

r-Permutaciones o Variaciones

Sean n y r números naturales tales que $1 \leq r \leq n$.

Una **r-permutación** de n elementos distintos x_1, x_2, \dots, x_n es un ordenamiento de un subconjunto de r elementos de un conjunto de n elementos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Al número de r -permutaciones de un conjunto de n elementos distintos lo denotaremos

$P(n, r)$

Calculamos este número usando el principio de multiplicación, queremos realizar r pasos y disponemos de n objetos en total que no pueden repetirse:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

Observación:

De acuerdo a las definiciones dadas, una **n-permutación de n elementos distintos**, es lo que antes hemos llamado una **permutación**.

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

Aceptando como definición que **$0! = 1$** , podemos escribir:

$$P(n, r) = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)(n-r) \dots 2 \cdot 1}{(n-r) \dots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad \text{si } 1 \leq r \leq n.$$

Ejemplo 4.3:

¿Con cuántos podios diferentes puede finalizar una carrera de fórmula 1 en la que participan 19 corredores?

Debemos contar el número de ordenamientos de tres personas elegidas de un grupo de 19, pues cada uno de esos ordenamientos determina un primer puesto, un segundo puesto y un tercer puesto.

$$\text{La respuesta es entonces } P(19,3) = \frac{19!}{(19-3)!} = \frac{19!}{16!} = 19 \cdot 18 \cdot 17 = 5814$$

Ejemplo 4.4:

Hallar el valor de n para que: $P(n,4) = 8 \cdot P(n-1,3)$

Planteamos la igualdad usando la definición de r -permutaciones $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$P(n,4) = \frac{n!}{(n-4)!} \quad \text{y} \quad P(n-1,3) = \frac{(n-1)!}{((n-1)-3)!}$$

Entonces:

$$\frac{n!}{(n-4)!} = 8 \frac{(n-1)!}{((n-1)-3)!}$$
$$\frac{n \cdot (n-1)!}{(n-4)!} = 8 \frac{(n-1)!}{(n-4)!}$$

Multiplicando a ambos miembros por: $\frac{(n-4)!}{(n-1)!}$

$$\frac{n \cdot (n-1)!}{(n-4)!} \cdot \frac{(n-4)!}{(n-1)!} = 8 \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \cdot \frac{(n-4)!}{(n-1)!}$$

Simplificando:

$$\frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-4)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 8 \frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-4)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-1)!}}$$

Entonces: $n = 8$

Ejercicios

16) a) ¿Cuántas permutaciones existen de 11 objetos distintos?

b) ¿Cuántas 5-permutaciones existen de 11 objetos distintos?

17) Calcular:

- a) $P(10,4)$ b) $P(4,4)$ c) $P(n, n-1)$ d) $P(n, n-2)$

18) Hallar el valor de n tal que: a) $P(n,5) = 7 \cdot P(n,4)$

b) $P(n,5) = 9 \cdot P(n-1, 4)$

19) a) ¿Cuántos códigos de 7 letras diferentes pueden formarse con las letras del conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$?

b) ¿Cuántos de 5 letras diferentes?

c) ¿cuántos de hasta tres letras diferentes?

5. Combinaciones.

Ejemplo 5.1:

¿De cuántas maneras puede seleccionarse una delegación de 3 miembros de un grupo de 5 personas?

Como no hay cargos diferentes, en este problema no importa el orden en que se eligen las tres personas de la delegación.

Podemos pensar primero en elegir con orden y luego considerarlos elementos indistinguibles y dividir por las permutaciones de esos elementos, es decir:

Consideramos ordenar 3 personas de las 5, como vimos antes esto es:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{2!} = P(5,3)$$

Pero en este caso estamos contando que un grupo, por ejemplo Juan, Pedro, Luis es distinto del grupo Pedro, Juan, Luis.

Para contar los grupos sin orden dividimos por las permutaciones de 3: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$

Cada delegación diferente es un subconjunto de tres elementos (no ordenado) del conjunto formado por las cinco personas (lo que llamamos una **combinación de 5 elementos tomados de a 3**)

Combinaciones:

Dado un conjunto con n elementos distintos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $r \leq n$, una combinación de r elementos de X o una combinación de n elementos tomados de a r es una selección no ordenada de r elementos de X (es decir, un subconjunto de X con r elementos).

El número de r -combinaciones de un conjunto con n elementos se denota:

$$C(n, r) \text{ o también } \binom{n}{r}$$

Las combinaciones de n elementos tomados de a r pueden construirse en dos pasos:

Primero: consideramos orden y construimos una r -permutación haciendo

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Segundo: consideramos que los elementos elegidos son indistinguibles y como en el caso de las permutaciones con elementos indistinguibles, dividimos por el factorial de esos elementos,

haciendo

$$\frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

A este número lo llamamos combinaciones de n tomados de a r y se nota $C(n, r)$ o también $\binom{n}{r}$

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r \leq n$$

Ejercicios:

20) Interpretar la fórmula anterior para el caso $r = 0$.

21) Calcular: $a) \binom{7}{4}$ $b) \binom{10}{8}$ $c) \binom{n}{1}$ $d) \binom{n}{n-1}$ $e) \binom{n}{n}$

22) Demostrar que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ cualesquiera sean n y $r \leq n$.

23) Hallar el valor de n

$$a) \binom{n+1}{3} = 2 \cdot \binom{n}{2} \quad b) \binom{n}{n-2} = 6 \quad c) \binom{n}{3} = \binom{n-1}{1} \cdot \binom{n}{1}$$

24) ¿Cuántas cadenas de ocho bits contienen exactamente cuatro unos?

25) ¿De cuantas formas puede elegirse un comité de dos mujeres y tres hombres de un grupo de cinco mujeres distintas y seis hombres distintos?

26) ¿Cuántos partidos de football se juegan en una liga de 9 equipos si cada uno de ellos debe jugar dos veces contra cada rival?

27) Una baraja de 52 cartas consta de 4 palos con 13 denominaciones cada uno de ellos y una mano de póquer consta de cinco de esas cartas (sin importar el orden)

a) ¿cuántas manos de póquer pueden elegirse?

b) ¿cuántas manos de póquer tienen todas las cartas del mismo palo?

c) ¿cuántas manos de póquer tienen tres cartas de una denominación y otras dos de otra denominación?

28) Demostrar que: $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

29) Si un examen de opción múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 3 opciones de respuesta, ¿de cuántas maneras se puede responder?

30) ¿Cuántas cadenas de 8 bits hay que comiencen con 101 o con 111?

31) Cuántas cadenas de 8 bits hay que comiencen o terminen con 1?

32) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 5 libros de matemática, 4 de Física y 6 de Informática, si los de la misma materia deben estar juntos entre sí?

- 33) En una fiesta con 20 invitados donde todos se saludan entre sí, ¿cuántos saludos hay?
- 34) De un grupo de 10 estudiantes de Informática, 5 de Física y 8 de Ingeniería, se quiere formar un grupo de 4 estudiantes.
- a) ¿De cuántas maneras puede hacerse si debe haber 2 de informática, 1 de Física y 1 de Ingeniería?
- b) ¿De cuántas maneras puede hacerse si debe haber al menos uno de Ingeniería?
- 35) Cuántos números impares de 4 cifras hay?
- 36) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 3 libros de Ciencia Ficción, 5 de Novelas Policíacas y 7 de Poesía si los de Ciencia Ficción deben estar juntos entre sí?
- 37) Con 21 equipos de fútbol ¿Cuántos partidos se juegan si deben jugar una vez todos contra todos?
- 38) En un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una:
- a) ¿de cuántas maneras se puede sacar 0?
- b) ¿De cuántas maneras se puede sacar 10?
- b) Si consideramos que cada pregunta vale 2 puntos, ¿de cuántas maneras se puede sacar 4?
- c) ¿De cuántas maneras se puede sacar 4 o más?
- 39) De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra TELEFONO?
- 40) En el Quini 6 los apostadores deben elegir 6 números entre el 0 y el 45, ¿cuántos resultados puede haber?
-

6. ANEXO: APLICACIONES

En el campo de la computación es frecuente que se desee contar el número de veces que se ejecuta una instrucción, el número de palabras que se puede obtener con determinada gramática, el número de bits que se requieren para representar una cantidad, etcétera.

Los métodos de conteo son útiles en todas las ramas de las ciencias, y en particular en las ciencias de la computación ya que la cantidad de información que procesa la computadora es extremadamente grande y la exigencia en la velocidad de procesamiento es fundamental. La velocidad de procesamiento depende tanto del hardware como del software, es por ello que cada día salen equipos cada vez más rápidos y también por lo que en forma paralela se busca optimizar el software, proceso en el cual los métodos de conteo tienen una participación destacada para mejorar cada vez más los algoritmos.

1) Potencias de un binomio

Si queremos elevar la suma de dos números reales a una potencia grande el Binomio de Newton es una herramienta muy poderosa.

Analizaremos la forma del desarrollo de $(a + b)^n$, siendo a y b números reales y n un número natural.

Para $n = 2$ y $n = 3$ se tienen las conocidas expresiones:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

A manera de ejercicio, verifique que:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Observe los desarrollos anteriores y conteste:

- ¿Qué relación hay entre el exponente del binomio y el número de términos el desarrollo?
- En cada término de un desarrollo, ¿cuál es la suma de los exponentes de a y b ?
- Los coeficientes de $(a + b)^2$ son números combinatorios: $1 = \binom{2}{0}$, $2 = \binom{2}{1}$, $1 = \binom{2}{2}$, ¿qué puede decir de los coeficientes de $(a + b)^3$ y de $(a + b)^4$?

Consideremos ahora el caso general.

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b) \dots (a + b)}_{n \text{ factores}}$$

Este producto es igual a la suma de todos los productos que se pueden formar tomando como factores un término de cada paréntesis.

Cuando elegimos la letra a en todos los paréntesis, tenemos el producto a^n . Cuando elegimos la letra a en $n - 1$ paréntesis y la letra b en un solo paréntesis, tendremos el producto $a^{n-1}b$. El producto $a^{n-1}b$ aparecerá entonces n veces en el desarrollo de $(a + b)^n$ (tantas como maneras de elegir un paréntesis entre los n dados) . . .

Para cada $k = 0, 1, \dots, n$, el producto $a^{n-k}b^k$ aparecerá tantas veces como maneras hay de elegir k paréntesis (donde se toma la letra b) entre los n dados, esto es $\binom{n}{k}$ veces.

Se tiene entonces la siguiente fórmula, conocida como **fórmula del binomio de Newton**:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Esta fórmula suele expresarse con la notación sigma como mostramos a continuación

Binomio de Newton

Sean a y b números reales no nulos y n un número natural, entonces:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Y como $a + b = b + a$ podemos intercambiar los lugares en la sumatoria teniendo también:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$$

Ejemplo a):

Hallar el término de grado 60 en x en el desarrollo de $(x^2 + 3x)^{54}$

Utilizamos la fórmula del Binomio de Newton y escribimos:

$$\begin{aligned}
 (x^2 + 3x)^{54} &= \sum_{k=0}^{54} \binom{54}{k} (x^2)^k (3x)^{54-k} = \sum_{k=0}^{54} \binom{54}{k} x^{2k} 3^{54-k} x^{54-k} = \sum_{k=0}^{54} \binom{54}{k} x^{2k+54-k} 3^{54-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{54} \binom{54}{k} x^{k+54} 3^{54-k}
 \end{aligned}$$

Buscamos ahora para qué valores de k el exponente de x vale 60, ya que buscamos el término de grado 60.

$$k + 54 = 60 \quad \text{entonces} \quad k = 60 - 54 = 6$$

Esto nos dice que el término en el que k vale 6, x queda elevado a la 60:

$$\binom{54}{6} x^{6+54} 3^{54-6}$$

Ejemplo b):

Demostrar que: $2^n = \sum_{k=0}^n C(n, k)$

Observemos que la sumatoria que está del lado derecho contiene números combinatorios, podemos multiplicarla por 1 sin alterar su resultado:

$$\sum_{k=0}^n C(n, k) \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^n C(n, k) \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = (1 + 1)^n = 2^n$$

Como 1 elevado a cualquier potencia da 1, puedo reemplazar 1 por 1^{n-k} o también por 1^k

Si $a = 1$ y $b = 1$

Ejemplo c):

Como mencionamos en la introducción, se conoce como triángulo de Pascal a la siguiente disposición de números, que se construye de arriba hacia abajo, con 1 en los extremos y el elemento que se escribe entre dos números que están arriba es la suma de esos números:

			1							
		1		1						
	1		2		1					
	1	3		3		1				
	1	4	6		4		1			
	1	5	10	10		5		1		
	1	6	15	20	15		6		1	
	1	7	21	35	35	21		7		1

			1						
		1		1					
	1		1+1		1				
	1	1+2		2+1		1			
	1	1+3	3+3		3+1		1		
								

Observemos que en fila n de esta disposición ($n=0, 1, \dots$), se encuentran sucesivamente los números $C(n,r)$, $r = 0, \dots, n$

Tomemos por ejemplo la fila que corresponde a $n=4$, los números que aparecen son:

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 C(4,0) & C(4,1) & C(4,2) & C(4,3) & C(4,4) \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 4! & 4! & 4! & 4! & 4! \\
 \hline
 (4-0)!0! & (4-1)!1! & (4-2)!2! & (4-3)!3! & (4-4)!0!
 \end{array}$$

2) Eficiencia de los algoritmos

Se tiene el siguiente algoritmo:

$a = 0$

$x = 4$

Do while $a < 100$

$a = a + 5$

$b = 60$

Do while $b \geq 4$

$x = 3x$

$b = b - 2$

End

End

Queremos ver cuántas veces se ejecuta la sentencia: $x = 3x$

Observemos que a comienza en 0 y va creciendo de 5 en 5. Cuando es mayor o igual que 100 termina el bucle. Los valores que toma a no son otra cosa que los múltiplos de 5, así, debemos pensar cuántos múltiplos de 5 hay entre 0 y 100, múltiplos de 5 que sean de 1 dígito o de 2 dígitos, porque el 100 no está incluido.

Esto es pensar en que queremos llenar 2 casilleros, el primero puede tomar valores de 0 a 9 y el segundo sólo los valores 0 o 5:



Usando el principio de multiplicación, tenemos que hay $10 \cdot 2 = 20$ números múltiplos de 5

Por otro lado, cada vez que entramos en este bucle, entramos en otro, con valor inicial de $b = 60$. Este valor va decreciendo de 2 en 2 y se realiza la operación $x = 3x$ mientras $b \geq 4$.

Es decir que b toma los valores pares entre 4 y 60, esa es la cantidad de veces que se realiza la operación en ese bucle.

Debemos pensar entonces cuántos números pares hay entre esos números, separamos entonces el problema en:

- 1) Si tiene un dígito, la cantidad de pares es 3, ya que sólo puede tomar los valores 4, 6, 8.
- 2) Si tiene dos dígitos, para el primero tenemos 6 posibilidades (números del 1 al 6) y para el segundo 5 posibilidades (0, 2, 4, 6, 8):



Usando el principio de suma y el de multiplicación tenemos: $3+6 \cdot 5=33$ veces que se ejecuta la operación en este bucle.

Por lo tanto la operación $x = 3x$ se ejecuta $20 \cdot 33 = 660$ veces.

Bibliografía

- Espinosa Armenta, R., **Matemáticas discretas**, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010
- Jimenez Murillo, José A., **Matemáticas para la computación**, Alfaomega grupo editor, México, 2008
- Johnsonbaugh, Richard , **Matemáticas discretas**, 4ª ed., Prentice Hall, 1999
- Smith, et al , **Algebra, trigonometría y geometría analítica**, Pearson-Addison Wesley Longman, 1998