Ejercicios Adicionales

MATEMÁTICA 0

Curso Inicial 2023

FACULTAD DE INFORMÁTICA - UNLP

★ Diofanto de Alejandría fue un matemático griego que vivió en el siglo III, considerado el *padre del álgebra* y conocido principalmente por su obra **Aritmética**, una serie de libros, muchos de los cuales ahora se han perdido, en los que se trata esta materia de forma sistemática.

En la tumba de Diofanto grabaron un problema, un acertijo cuya solución daba al visitante el número de años que vivió quien allí estaba enterrado.

Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto. Los números pueden mostrar la duración de su vida.
La infancia de Diofanto duró $\frac{1}{6}$ *de su vida. Más tarde, durante la* $\frac{1}{12}$ *parte de su existencia, sus mejillas se cubrieron de barba. Después de* $\frac{1}{7}$ *de su vida Diofanto se casó. Cinco años después tuvo un hijo. El hijo vivió exactamente la mitad de lo que vivió el padre, y Diofanto murió cuatro años más tarde que su hijo, tras consolar su pena con la ciencia de los números.*

El reto es calcular la edad que tenía Diofanto al morir.

★ Este es uno de los acertijos que nos dejó Lewis Carroll, el autor de "Alicia en el país de las maravillas", quien bajo su verdadero nombre, Charles Lutwidge Dodgson, era un matemático y, en sus últimos años de vida, dedicó parte de su tiempo a las matemáticas recreativas.

En tu jardín, hay nueve rosas plantadas en un círculo perfecto. Pero ya te cansaste de ver lo mismo todo el tiempo. Tienes tres opciones para cambiarlas, pero cada una tiene sus reglas:

1. *Planta las 9 rosas de manera que crees 8 filas con 3 rosas en cada fila.*
2. *Planta las 9 rosas de manera que crees 9 filas con 3 rosas en cada fila.*
3. *Planta las 9 rosas de manera que crees 10 filas con 3 rosas en cada fila.*

¿Se puede??

★ Otro problema con el que Lewis Carroll retó a una adolescente -Helen Fielden, que en ese entonces tenía 14 años de edad- en 1873.

Un noble tenía un salón con una sola ventana que era cuadrada y medía 1 *metro de alto y* 1 *metro de ancho. Tenía un problema en sus ojos, y la ventana dejaba entrar mucha luz. Llamó a un constructor y le pidió que alterara la ventana para que sólo entrara la mitad de la luz. Pero tenía que seguir siendo cuadrada y con las mismas dimensiones de* 1×1 *metros. Tampoco podía usar cortinas o persianas o vidrios de color, ni nada parecido.*

¿cómo lo resolvió el constructor?

El siguiente fragmento es una editorial periodística del Profesor y periodista Adrián Paenza, leerlo y tratar de hallar la solución:

Ojos Celestes en la Isla

La vida cotidiana nos pone ante situaciones en donde hay que decidir. Decidir rápido, decidir racionalmente, decidir con pasión, decidir pensando en el futuro, decidir sobre si tener un hijo, si casarnos, si comprar este departamento, si seguir esta carrera. Podría seguir, obviamente, pero estoy seguro de que la lista suya tomaría por distintas direcciones. El hecho es que uno está constantemente expuesto a decidir.
Pero para tomar decisiones elaboradas, educadas, racionales, hace falta tener datos. Y, si fuera posible, la mayor cantidad de datos. Hasta para patear un penal hacen falta datos. ¿Qué sabe mi interlocutor sobre mí que yo no sé que él sabe? ¿Qué sé yo sobre él que él no sabe que yo sé? ¿Cómo usar esa información en beneficio propio?
La matemática, aunque no parezca, ofrece herramientas para tratar estos temas. No son infalibles ni categóricas (en general), pero le dan claramente una ventaja al "otro" si él las tiene y yo no. Y ni hablar si yo las conozco y ese "otro" no.
A lo que me refiero es a lo que se llama "conocimiento común". Ya verá de qué estoy hablando. Lo voy a hacer con un ejemplo muy divulgado y muy útil.
Hay múltiples variantes de lo que se conoce con el nombre de "Ojos Celestes en la Isla".
Acá es donde quiero hacer una breve advertencia: lo que sigue es un maravilloso juego de lógica. No hace falta "saber" nada. No hace falta haber "estudiado" nada. No hace falta más que la capacidad para razonar que viene incluida en el software que trae nuestro cerebro. La/lo invito a usarlo. Verá que vale la pena. Si no se le ocurre la respuesta ahora, no tiene importancia. Mantenga con usted mismo una discusión interna. Téngase paciencia. Todo lo que sigue es, obviamente, ficticio. Se trata de una situación ideal, producto de la imaginación. Eso sí: lea las "reglas" con cuidado porque son importantes para decidir qué hay que contestar. Acá va: en una isla hay 100 habitantes.
Todos ellos tienen o bien ojos celestes o bien ojos marrones. Todos ven el color de los otros, pero no el color propio. Está prohibido hablar entre ellos de ese tema. No hay espejos ni trampas posibles. Eso sí: hay una ley en la isla que establece que si alguien "descubre" que tiene ojos celestes, tiene que abandonar la isla inexorablemente a las 8 de la mañana del día siguiente. Todos los pobladores tienen la misma capacidad para razonar y todos son capaces de usar una lógica impecable.
Un día, una persona llega de visita a la isla y, mientras, los mira a todos, dice: "¡Qué bueno es ver al menos una persona con ojos celestes después de tanto tiempo de estar en alta mar!"
Ahora le toca pensar a usted: ¿Qué consecuencias trajo esta frase entre los habitantes de la isla? Es decir, una vez que los pobladores escucharon al visitante decir que había al menos uno de ellos que tenía ojos celestes, ¿qué cree usted que pasó después?

1 Lógica y Teoría de Conjuntos

- Un prisionero está encerrado en una celda que tiene dos puertas: una conduce a la muerte y otra a la libertad. Cada puerta está custodiada por un vigilante.
  El prisionero sabe que uno de ellos siempre dice la verdad, y el otro siempre miente. Para elegir la puerta por la que pasará solo puede hacer una pregunta a uno solo de los vigilantes.

  ¿Qué debe preguntar para salvarse?

- Imagine un sistema de riego automático. Tenemos dos sensores A y B que miden la luz y la humedad del suelo. El jardinero no quiere regar sus plantas en exceso, es decir si el sensor detecta que el suelo está húmedo, también sabe que no es bueno regar durante el día cuando hay mucho sol.
  ¿Cuándo debería activarse el sistema? ¿Se anima a mostrarlo usando proposisiones y una tabla de verdad?

- Un sistema de seguridad activará un imán para desbloquear una caja fuerte sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

  - p: la puerta exterior está cerrada
  - q: la alarma NO se ha disparado
  - r: se introdujo la clave correcta

  ¿cuáles de las siguientes proposiones corresponden a la situación de "caja fuerte bloqueada" ?

  a $(p \wedge r) \vee \neg q$
  b $(p \wedge r) \vee q$
  c $r \wedge (p \veebar q)$
  d $r \wedge (p \vee q)$

- Un ciclista debe usar una campera impermeable y reflectante si hace frío o llueve y además está oscuro.
  ¿Se anima a dar una proposición compuesta que refleje la situación?

1. Indicar los valores de verdad de todas las proposiciones que intervienen para que la proposición $[p \longrightarrow (q \vee r)]$ resulte falsa

2. Marcar las afirmaciones correctas:

   - Una conjunción es verdadera sólo si las dos proposiciones que la componen lo son
   - Una conjunción es falsa si las dos proposiciones componentes lo son
   - Una disyunción es falsa sólo si todas las proposiciones que la componen lo son
   - Una conjunción es falsa si algunas las proposiciones componentes lo son
   - Una disyunción es verdadera sólo si lo son todas las proposiciones componentes
   - Una disyunción es verdadera solo si lo son algunas las proposiciones componentes
   - Un condicional es falso si el antecedente es verdadero y el consecuente es verdadero
   - Un condicional es verdadero si el antecedente es falso
   - Un condicional es falso si el antecedente es verdadero
   - Un bicondicional es verdadero si ambos componentes son verdaderos
   - Un bicondicional es verdadero si ambos componentes tienen el mismo valor de verdad
   - Un bicondicional es falso si ambos componentes son falsos

3. La proposición $\neg p \longrightarrow (q \vee r)$ es falsa ¿Qué sucede con las siguientes proposiciones?

   - $p \longrightarrow q$
   - $(p \wedge \neg q) \vee \neg r$
   - $(\neg p \vee q) \longrightarrow r$
   - $\neg q \longrightarrow p$

4. Analizar si las siguientes proposiciones son equivalentes:

   - $\neg(p \wedge q)$
   - $\neg p \wedge \neg q$

5. Para cada una de las siguientes proposiciones dar el valor de verdad para un conjunto universal apropiado y simbolizar usando esquemas proposicionales y cuantificadores

   (a) Todos los números son amigos
   (b) Algunos números son perfectos
   (c) Los números y los matemáticos son irracionales

6. (a) Simbolizar la siguiente proposición, usando proposiciones simples y/o esquemas proposicionales, cuantificadores y dar un universo:
   Hay ingresantes que cursan COC pero no cursan EPA
   (b) Negar la proposición anterior de forma simbólica y coloquial

7. Considerando como conjunto Universo a aquel comprendido por todas las letras del alfabeto castellano, y los siguientes conjuntos:
   $A = \{x : x\, es\ vocal\}$
   $B = \{a, e, o\}$
   $C = \{i, u\}$
   $D = \{x : x \text{ es letra de la palabra ``murcielago''}\}$
   $E = \{x : x \text{ es consonante}\}$

   Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas.

   - la intersección entre B y C es vacía
   - la unión entre A y E es igual al Universo
   - el complemento de C respecto de A es igual a D

2 Conjuntos Numéricos

El enigma del número 6

El enigma del número 6 consiste en completar o añadir operaciones matemáticas comunes para que cada conjunto de números listados abajo termine dando 6 como resultado.

$0 \quad 0 \quad 0 = 6$	$6 \quad 6 \quad 6 = 6$
$1 \quad 1 \quad 1 = 6$	$7 \quad 7 \quad 7 = 6$
$2 \quad 2 \quad 2 = 6$	$8 \quad 8 \quad 8 = 6$
$3 \quad 3 \quad 3 = 6$	$9 \quad 9 \quad 9 = 6$
$4 \quad 4 \quad 4 = 6$	$10 \quad 10 \quad 10 = 6$
$5 \quad 5 \quad 5 = 6$	

Hay dos reglas a tener en cuenta:
No vale agregar un nuevo número dentro de la operación.
No vale alterar el símbolo = (por ejemplo, tachándolo).

El mágico número 7

Probemos las propiedades "mágicas" y de *adivinación* del número **7**: (puede ayudarse con la calculadora)

- Piense una fecha importante (puede ser la su cumpleaños)
- Multiplique el día (el número del día) por 7
- Restar 1
- Ahora multiplique por otro número *especial*, el 13.
- Sumar el (número) del mes de la fecha elegida
- Sumar 3 y multiplicar por 11
- Restar el día y mes de esa fecha importante que eligió
- Dividir por 10
- Sumar 11
- Dividir por 100

- ¿ qué aparece?

¿ Qué aparece? ¿Por qué cree que da ese resultado? ¿puede descubrir el truco? (recuerde el Teorema Fundamental de la Numeración)

1. Pizzas!!
   (a) Si cada pizza viene cortada en 8 porciones, ¿qué es más, 4 pizzas o 37 porciones?
   (b) 21 amigos se juntan a comer pizza. Compran 8 pizzas, (que vienen cortadas en 8 porciones cada una). ¿Alcanza para que coman 3 porciones cada uno?

2. Demostrar que el número 2.520 es el número más pequeño que puede ser dividido en forma exacta por los números del 1 al 10.

3. Hallar el error en el siguiente cálculo:
   $4+\frac{18}{3}=\frac{12}{3}+6$ pues $\frac{12+18}{3}=\frac{12+18}{3}$, por la definición de suma en $\mathbb{Q}$. Entonces $4-\frac{12}{3}=6-\frac{18}{3}$ y luego, $2\left(2-\frac{6}{3}\right)=3\left(2-\frac{6}{3}\right)$. Así resulta $2=3$.

4. En una heladería de Barracas, venden potes de un sexto de kilo, además de los potes comunes de un cuarto de kilo.
   Extrañamente tienen como política no poner más de un gusto en un mismo pote, por lo tanto, hay que llevar tantos potes como gustos uno quiera. Un grupo de amigos lleva 7 potes de un sexto y 3 potes de un cuarto. En total ¿están llevando 2 kilos, más, o menos?

5. Analizar si son válidas las siguientes igualdades:
   (a) $2^{2-m}.(2.2^{m+1}+2^{m+2})=32$
   (b) $\frac{2^{m-1}}{2^{3-m}}-(2^m+2.2^{m-1})=0$
   (c) $3^{-4-m}(3^2 3^{m+1}+3^{m+3}+3.3^{m+2})=0$
   (d) $(2k+3k)^2=13k^2$
   (e) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

6. Calcular:

   a) $\sqrt{5}.\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4}=$
   b) $\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{20}=$
   c) $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}.\left(1+\sqrt[4]{81}\right)=$

7. Escriba fracciones equivalentes a las dadas, racionalizando los denominadores:

   a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$
   b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$
   c) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}$

8. ¿Son correctas las igualdades?

   a) $\sqrt{50}=5.\sqrt{2}$
   b) $\sqrt{12}=3.\sqrt{2}$
   c) $\sqrt[5]{64}=2.\sqrt[5]{-2}$

3 Ecuaciones y polinomios

- Entre Ana y Beto tienen 8000 pesos. Ana tiene el triple de Beto. ¿Cuánta plata tiene cada uno?

- En una exhibición un basketbolista tira un total de 32 tiros en los mismos tres aros. Emboca en el azul el doble de tiros que en el amarillo, y en el rojo, el triple de tiros que en el amarillo. Erra menos de 5 tiros. ¿Cuántos tiros embocó en cada aro?

1. Encuentre dos números consecutivos y positivos enteros cuyo producto sea 168.

2. En cada caso, elegir la opción correcta.
   (a) Si 9x + 12 = 15, entonces :
      - 3x + 4 = 5
      - 3x + 12 = 5
      - 9x + 4 = 5

   (b) Si 6x + 12y 10 = 0, entonces:
      - 3x + 6y = 0
      - 3x + 6y = 10
      - 3x + 6y = 5

3. Encuentre la base y la altura de un triángulo cuya área es de $2m^2$ si su base es $3m$ más larga que su altura.

4. La suma de un número y su recíproco es $\frac{10}{3}$. Encuentre el número. (Recíproco de a es $\frac{1}{a}$, cuando $a \neq 0$).

5. Cuarenta alumnos deben ser distribuidos para prácticas de linux o de java. En cada grupo de linux hay 8 alumnos, mientras que en los de java 2; el número de grupos de java supera en 10 a los de linux. ¿Cuántas grupos de linux y cuántos de java se realizarán?

6. Dos personas están acomodando una gran cantidad de sillas en un patio de manera de formar un cuadrado. Una sugiere una manera, pero le sobran 39 sillas. La otra, entonces propone sumarle una silla más a cada fila, pero le faltan 50 sillas. ¿Cuántas sillas tenían?

7. Encuentra todos los valores de k tales que $P(x)$ sea divisible por el polinomio lineal dado en cada caso:
   $P(x) = kx^3 + x^2 + k^2x + 11$, $x + 2$
   $P(x) = k^2x^3 - 4kx + 3$, $x - 1$

4 Ejercicios del Apunte

4.1 Ejercicios Capítulo 1

1.- Indicar cuáles de las siguientes frases son proposiciones:
a) Un cuadrado tiene 3 lados.
b) $x > 2$.
c) Hoy tardé más de una hora en llegar.
d) El mes de abril del 2019.

2.- Expresar las siguientes proposiciones en forma simbólica, negarlas y retraducir su negación al lenguaje coloquial:
a) Juana no es simpática pero sabe bailar.
b) Los alumnos estudian los fines de semana o se divierten.
c) Si los alumnos conocen a los simuladores, entonces los desprecian.

3.- Construir las tablas de verdad de:
a) $\neg(p \wedge q)$
b) $\neg(\neg p \wedge \neg r) \wedge q$
c) $(p \to q) \to r$
d) $\neg(p \vee q)$
e) $\neg q \wedge \neg r$
f) $(\neg s \wedge p) \vee (s \wedge \neg p)$

4.- Consideremos las siguientes proposiciones p, q, r, s.
p: Tobi es el perro de mi amigo
q: Tobi es un caniche
r: Tobi es un caniche que ladra todo el tiempo.
s: Tobi es un perro muy divertido

5.- Escribir con palabras del lenguaje coloquial, los resultados de las siguientes operaciones:
a) $p \wedge q$
b) $\neg q \vee \neg r$
c) $\neg r \wedge s$
d) $q \vee s$

6.- Simbolizar las siguientes proposiciones:
a) Si $5 \geq 3$ entonces $5 - 3 \geq 0$.
b) Si A, B y C son números racionales tales que 2A+3B-5C $= 0$ entonces A=B=C=0.

6.1- a) Pasar a la forma si ... entonces ... y simbolizar:
Es necesario ser argentino para ser presidente de la república.
b) Expresar y simbolizar utilizando la palabra suficiente:
Si aprobó el examen entonces contestó bien el 40 % de sus preguntas.
c) Expresar y simbolizar utilizando la palabra necesario:
Pedro es argentino sólo si es americano.

7.- Establecer si las siguientes fórmulas constituyen tautologías, contradicciones o contingencias.
a) $(p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$
b) $(p \vee q) \rightarrow p$
c) $(q \rightarrow p) \vee p$

8.- Encontrar proposiciones equivalentes usando las leyes de De Morgan y sustituciones adecuadas:
a) $p \wedge \neg q$
b) $\neg(\neg p \wedge q)$
c) $(p \wedge q) \vee q$
d) $(p \wedge q) \wedge (q \wedge \neg p)$

9.- Determinar en cada caso si la información que se da es suficiente para conocer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas. Justifica tu respuesta, realiza de ser posible, el árbol.
a) $(p \wedge q) \rightarrow r$, r es V.
b) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$, p es V y r es F.
c) $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, q es V.

10.- Expresar mediante cuantificadores, esquemas proposicionales, conectivos, además usar equivalencias lógicas para expresar de manera condicional las siguientes proposiciones:
Todos los hombres son mortales.
Hay algún número que no es primo.

11.- Sean los esquemas $p(x) : x + 4 = 3$ y $q(x) : x^2 - 1 = 0$.
a) ¿Existe un universo en el cuál la proposición $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ resulte verdadera? Justifique.
b) Hallar un universo U en el cuál la proposición anterior sea falsa. Justifique.

12.- A partir de los enunciados, simbolícelos y obtenga conclusiones:
a) Si Juan nació en Mendoza entonces es argentino.
Juan Nació en Mendoza.
b) Si Juan nació en Mendoza entonces es argentino.
Juan no es argentino.

13.- Si x es una variable, decir cuáles de las siguientes expresiones son esquemas:
a) Juan y x fueron al teatro.
b) x es perro.
c) Distancia del punto P a x es igual a 2. (El punto P es conocido)
d) $x \geq 0 \wedge x \leq 3$.

14.- En cada caso decir si se trata de esquemas, en tal caso transformarlo en una proposición:
(a) Usando constantes adecuadas.
(b) Dar un universo y aplicar cuantificadores. Hallar su valor de verdad de la proposición.
1. $P(n)$: $n + 1 > n$.
2. $Q(n)$: $n^2 + 1$.
3. $R(n)$: $n^2 - 3n + 2 = 0$.
4. $S(n)$: n es un número racional.

15.- Simbolizar utilizando esquemas, cuantificadores y conectivos lógicos y dar un universo.
a) Hay objetos rojos y además hay objetos verdes.
b) Hay números pares o todos los números son múltiplos de 3.
c) No todos los números son múltiplos de 5.
d) Todos los números no son múltiplos de 5.
e) Algunos hombres son aburridos.
f) Ninguna persona es perfecta .
g) No todo número real es un número racional.
h) Todos los números primos son impares excepto el 2.

Negar las proposiciones anteriores simbólica y coloquialmente.

1. Escriba por extensión los siguientes conjuntos:
$A = \{x : x\ es\ una\ letra\ de\ la\ palabra\ FACULTAD\}$
$B = \{x : x\ es\ una\ cifra\ del\ nro.\ 3.502.332\}$
$C = \{x : x\ es\ un\ diptongo\ de\ la\ palabra\ VOLUMEN\}$

2. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$, $C = \{2, 4\}$, calcule los conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $C_B C$, $B - A$, $A \cap B \cap C$, $A - (B - C)$, $(A - B) - C$, $B - C$. Compare los resultados y obtenga conclusiones posibles.

3.- Considerando como conjunto Universo a aquel comprendido por todas las letras del alfabeto castellano, y los siguientes conjuntos:
A=x:x es vocal B=a,e,o C=i, u D=x:x es letra de la palabra *murcielago* E=x:x es consonante
Dar por extensión: $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $C \cup D$, $E - A$, $E - D$

4. Complete las proposiciones siguientes con los símbolos $\in$ o $\notin$:

2 $\{1, 3, 5, 7\}$, 5 $\{2, 4, 5, 6\}$, 2 $\{4, 5, 6, 7\}$, 0 $\emptyset$, 1 $\{1, 2\} - \{1, 6\}$,
París {x: x es el nombre de un país}, 2 $\{1, 2\} - \{1, 6\}$, 2 $\{1, 2\} \cap \{1, 6\}$,
Jujuy {x: x es provincia Argentina}, 2 $\{1, 2\} \cup \{1, 6\}$, a $\{\{a\}\}$, $\{a\}$ $\{\{a\}\}$
5. ¿Cómo puede traducir las leyes de De Morgan con la notación de conjuntos?

6. Sean A y B dos conjuntos no vacíos tales que $A \subseteq B$. Determinar, si es posible, el valor de verdad de los siguientes enunciados. Justificando la respuesta.

- $\exists x\ (x \in A \wedge x \notin B)$
- $\exists x\ (x \in B \wedge x \notin A)$
- $\forall x\ (x \notin B \rightarrow x \notin A)$
- $\forall x\ (x \notin A \rightarrow x \notin B)$

7. Sean A, B y C conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Sabiendo que $a \in A, b \in B, c \in C, d \notin A, e \notin B$ y $f \notin C$, ¿cuáles de las siguientes informaciones son ciertas?

$$\begin{array}{ccc} a \in C & b \notin A & b \in A \\ c \notin A & e \notin A & f \notin A \\ d \in B & f \in C_{\mathcal{U}}C & c \in C - B \\ a \in C \cap B & b \in C_B A & d \notin A \cap C \end{array}$$

4.2 Ejercicios Capítulo 2

1.- a) Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Hallar los elementos primos de A. Justificar.
b) Si un número es primo, ¿qué se puede decir de su opuesto?
c) Hallar la descomposición en primos de los números 340 y 195.

2.- Ordenar de menor a mayor $\frac{-12}{6}, 3, \frac{2}{5}, -1, \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{7}, \frac{6}{4}$.

3.-) Sea $-4 < m < 2$
a) Hallar $m \in \mathbb{Z}$ tal que se cumpla lo anterior.
b) Idem si $m \in \mathbb{Q}$.

4.- Probar que entre dos números racionales distintos, hay otro racional.

Importante: Esta propiedad muestra que siempre habrá un número racional entre dos, por muy próximos que estén. Por lo tanto se dice que el conjunto de los racionales es **denso**.

5.- Dados $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}$. Probar:
a) $a > b \rightarrow a + c > b + c$
b) $(a > b \wedge c > 0) \rightarrow a.c > b.c$
c) $(a > b \wedge c < 0) \rightarrow a.c < b.c$

6.- Probar que, para todo $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0, a > b \leftrightarrow a.a > b.b$

7.- Analizar la validez de la siguiente afirmación:
"Si $a.b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$". ¿Vale la recíproca?

8.- En los siguientes cálculos se han cometido errores al aplicar propiedades. Indicar dichos errores y corregirlos.
a) $\left(b^2.b^{-3}.b^5\right)^2 = \left(b^4\right)^2 = b^{16}$ suponemos $b \neq 0$
b) $\frac{\left(a^2\right)^4}{\left(a^{-3}\right)^2} = \frac{a^6}{a^{-6}} = 1$ suponemos $a \neq 0$
c) $\frac{7^4.\left(7^2\right)^6}{\left(7^9\right)^2} = \frac{7^4.7^{12}}{7^{18}} = 7^{-2} = 49$
d) $(7-14)^0 + 5^0 = 1$
9.- Aplicando las propiedades de la potencia, probar que:

a) $\frac{\left(10 2^{n+1}\right)^3}{\left(2^{n+1}\right)^3} = 1000$
b) $2^{2-m}.\left(2 2^{m+1} + 2^{m+2}\right) = 32$
10.- Calcular:

a) $\frac{\left(1-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}-1\right):\left(\frac{2}{5}-2\right)^2} =$
b) $\left[\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-4}.\frac{1}{16} + 11 =$
c) $\frac{0{,}27}{\left(\frac{16}{25-16}\right)^{-1/2}} - \sqrt{\frac{25}{16}} =$
d) $\frac{\sqrt{7}\cdot 7^5\cdot\sqrt{7^3}}{\left(7^2\right)^3} =$
11.- Responder si es V ó F y justificar:
a) $\frac{1}{4} < a < 25 \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 < a^2 < 25^2$
b) $-3 < -a < \frac{-1}{3} \rightarrow (-3)^2 < (-a)^2 < \left(\frac{-1}{3}\right)^2$

12.- Calcular:
a) $\sqrt{5}.\sqrt{5} - \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4} =$
b) $\left(1+\sqrt{5}\right)^2 - \sqrt{20} =$
c) $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}.\left(1+\sqrt[4]{81}\right) =$

13.- ¿Son correctas las igualdades?

a) $\sqrt{50} = 5.\sqrt{2}$
b) $\sqrt{12} = 3.\sqrt{2}$
c) $\sqrt[5]{64} = 2.\sqrt[5]{-2}$

14.- Responder V ó F y justificar: Si
a) $(a.b)^2 = a^2.b^2$
b) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$
c) $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$ con $b \neq 0$
d) $(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$
e) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

15.- Para los siguientes incisos, vamos a suponer que están definidas las raíces, es decir, se pueden realizar las operaciones en los reales. Responder V ó F. Justificar

a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
b) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

4.3 Ejercicios Capítulo 3

1. Resolver justificando cada paso.

- $10 - 3x = x - 2$
- $a - x = 3(x - a)$
- $3(2 - x) + 1 = -x + \frac{5}{2}(1 - x) + \frac{x+3}{2}$
- $\frac{1}{3}x - x = \frac{1}{4}x + 1$
- $5x + 2 = 8x - \frac{1}{2} - 3x$

2. Resuelva las ecuaciones e indique el conjunto numérico al que pertenecen.

- $10 = x - 2$
- $x = 3(x - 5)$
- $\frac{3x}{2} - \frac{1}{2} = -x + \frac{5}{2}$
- $\sqrt{5} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}x + 1$
- $5\pi x + 2\pi = 8x - \frac{\pi}{2}$
- $x + 3 - \frac{2}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}(x + 5) + 2$
- $3(2 - x) + 1 = -x + \frac{5}{2}(1 - x) + \frac{1}{2}(x + 3)$

3. Resolver

1. $\begin{cases} 3x - y = \frac{1}{2} \\ 2x - 3y = \frac{-5}{6} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 2y \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 1 \\ z - 3x = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 5 \\ -5x + y = -7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 3x - 4y + 2z = -1 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x^2 - 6x + 8 = y \end{cases}$

4. Un cartel en una mueblería dice “lleve los dos por \$655”. Si una silla cuesta \$55 más que una banqueta, ¿cuánto cuesta la silla?

5. Resuelva despejando la incógnita:

(i) $m^2 - 12 = 0$	(ii) $n^2 + 25 = 0$	(iii) $3y^2 - 45 = 0$
(iv) $4u^2 - 9 = 0$	(v) $(d-3)^2 - \frac{1}{2} = 0$	(vi) $(y+1)^2 - 9 = 0$
(vii) $\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2} = 0$	(viii) $w^2 - 25 = 0$	(ix) $\frac{49}{4}d^2 = 1$

6. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

- $(x-3)^2 = \frac{1}{2}$
- $(1-x)^2 = \sqrt{2}$
- $(2x+1)^2 = 4$
- $(3-2x)^2 = 0$

1. Resuelva sacando factor común:

(i) $12m^2 + m = 0$ (ii) $9n^2 + 9n = 0$ (iii) $7y^2 = -4y$
(iv) $6u^2 - u = 0$ (v) $x^2 = 2x$ (vi) $(\frac{y}{2})^2 - \frac{1}{2}y = 0$

2. Resuelva completando cuadrados:

(i) $x^2 + 6x = 7$ (ii) $x^2 - 8x + 11 = 0$ (iii) $4x^2 = 12x + 11$
(iv) $x^2 - 10x + 5 = -20$ (v) $(x-1)(x-3) = 1$ (vi) $\frac{5x^2}{3} + x - \frac{2}{3} = 0$

3. Utilice el discriminante para completar la siguiente tabla:

Ecuación	Discriminante	Cantidad de soluciones
$\frac{x^2}{3} - 2x + 6 = 0$		
$2x^2 - 6x + 3 = 0$		
$\sqrt{3}x^2 = -x - 2$		
$2x^2 = 2x + 1$		
$0.32x^2 - 0.75x - 0.66 = 0$		
$ax^2 = -bx$		
$x^2 = (a+b)x - ab$		

Encuentre las soluciones de las ecuaciones anteriores.

4. Expresar los siguientes polinomios como producto usando la técnica que corresponda o más de una de ellas:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 6x^2$
2. $P(x) = x^6 - x^2$
3. $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
4. $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$
5. $P(x) = x^{10} - x^6 - x^4 + 1$
6. $P(x) = 4x^2 + 4x + 1$

7. $P(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{16}$
8. $P(x) = x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 9x - 9$

5. Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias, indicar el/los valor/es de x no permitidos.

1. $\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-2x}$
2. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} = 1$
3. $1 + \frac{1}{x} = x(1 - \frac{x+1}{x})$
4. $\frac{6}{x^2-9} = 3$
5. $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{x+1}$
6. $\frac{3x-3}{x^2-1} = 2x$