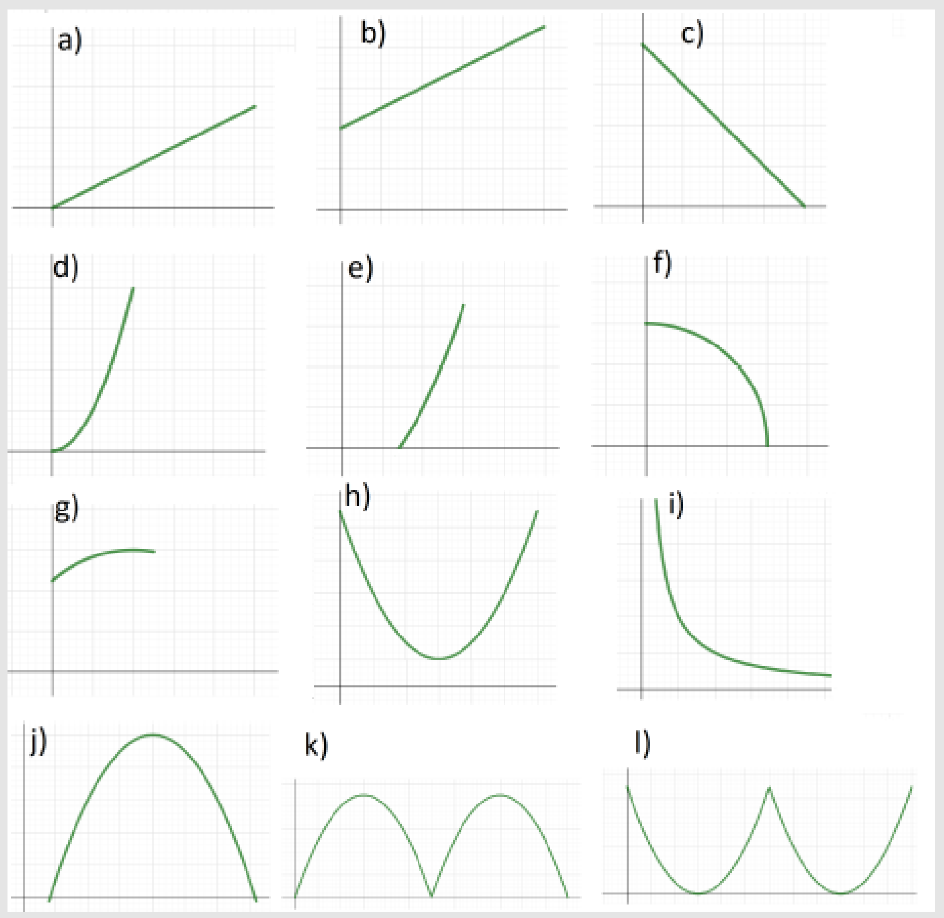
Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 1: Funciones.

Ejercicio 1.

Tratar de relacionar cada situación con, al menos, un gráfico:



- *Variación de la velocidad de una pelota cuando la picamos:* **(l)**.
- *Dependencia de la duración de una carrera con la longitud del recorrido:* **(d)**.
- *Dependencia del precio de una bolsa de papas con su peso:* **(a)**.
- *Variación del diámetro de una piñata cuando el aire comienza a salir:* **(f)**.
- *Variación de la velocidad que adquirimos cuando nos amacamos:* **(k)**.
- *Sonido que se produce en una cancha de futbol al gritar todos juntos un gol:* **(e)**.
- *Sonido que aumenta, paulatinamente, cuando un grupo de personas empieza a aplaudir de a 2, luego de a 4, 6, 8, y así hasta que todos aplauden juntos:* **(d)**.
- *Si la entrada al teatro es muy cara, no irá tanta gente. Si es muy barata, pierden dinero los organizadores. Con lo cual, hay que proponer un precio intermedio:* **(j)**.
- *Los precios aumentan mucho más lento que en los últimos 5 años:* **(g)**.
- *Me gusta mucho el chocolate negro y bastante el blanco, pero detesto comer los dos juntos:* **(c)**.
- *Cuantas más valijas pequeñas llevemos en el viaje, más podremos cargar en la camioneta:* **(b)**.

Ejercicio 2.

Se sabe que el precio del pan es $M por kg (se puede reemplazar M por el precio al que se consiga el pan).

(a) *¿Cuánto se deberá pagar si se compra 6 kg de pan? ¿Y si se compra 2 kg y 650 g?*

f (x)= Mx.

f (6)= 6M.
f (2,65)= 2,65M.

Por lo tanto, si se compra 6 kg. de pan, se deberá pagar $6M y, si se compra 2 kg. y 650 gr., se deberá pagar $2,65M.

(b) *¿Se puede construir una expresión que sirva para calcular el costo de adquirir x kg de pan?*

y= f (x)
y= Mx.

(c) *¿Cuál será el dominio de la función hallada en el inciso anterior?*

$Dom_f = \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.

En cierta localidad, el costo de la energía eléctrica se calcula de la siguiente manera: un cargo fijo de $950 más $3,5 por cada kwh consumido.

(a) *¿Cuál será el monto de la boleta de luz si en determinado período se consumieron 640 kwh? ¿Y si no hubo consumo?*

f (x)= 950 + 3,5x.

f (640)= 950 + 3,5 * 640
f (640)= 950 + 2240
f (640)= 3190.

f (0)= 950 + 3,5 * 0
f (0)= 950 + 0
f (0)= 950.

Por lo tanto, si en determinado período se consumieron 640 kwh, el monto de la boleta de luz será $3.190 y, si no hubo consumo, $950.

(b) *Escribir una expresión para calcular el monto a pagar para un consumo de x kwh. Determinar el dominio de la función hallada.*

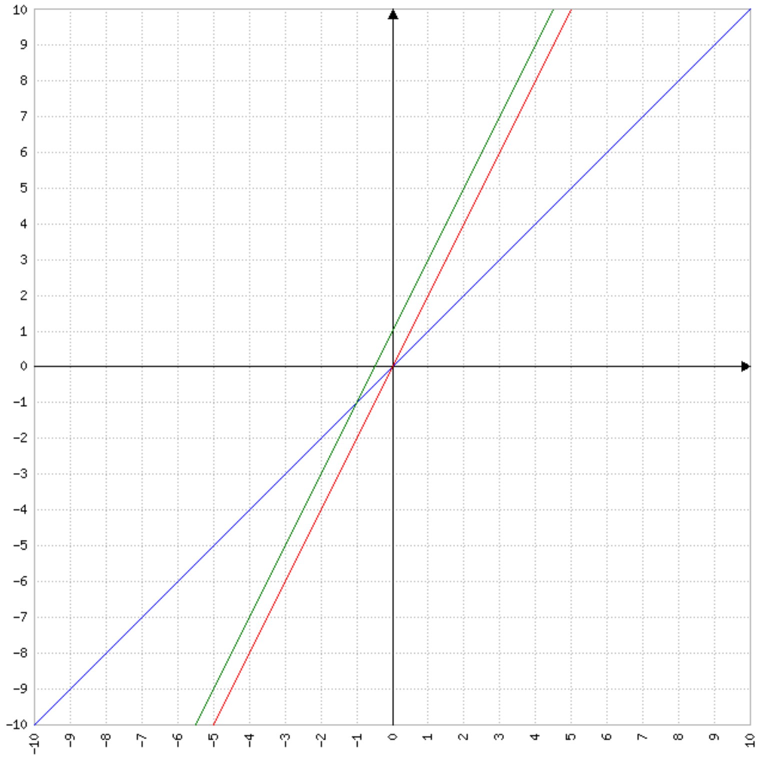
y= f (x)
y= 950 + 3,5x.

$Dom_f = \mathbb{R}$.

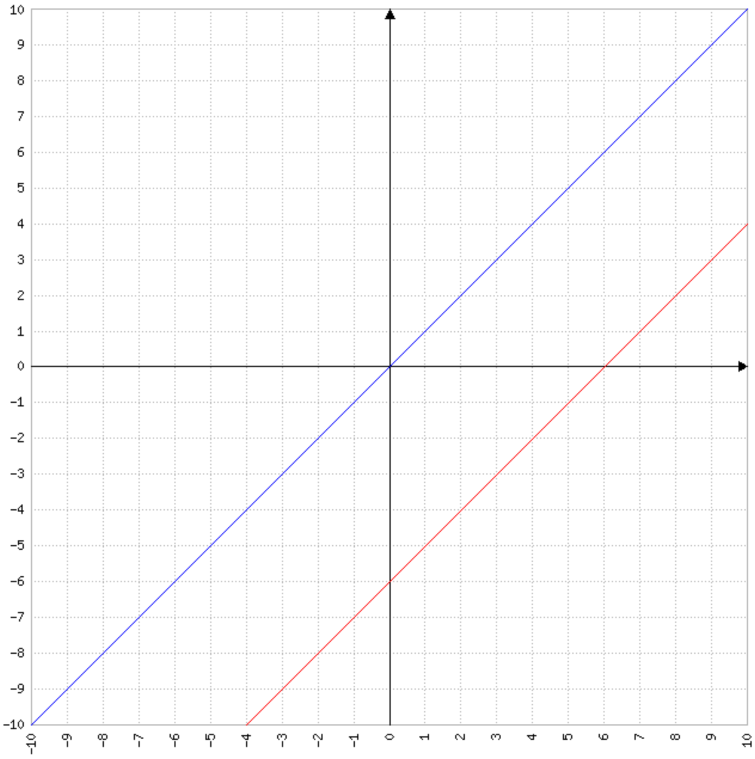
Ejercicio 4.

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base:

(a) *a (x)= 2x + 1.*



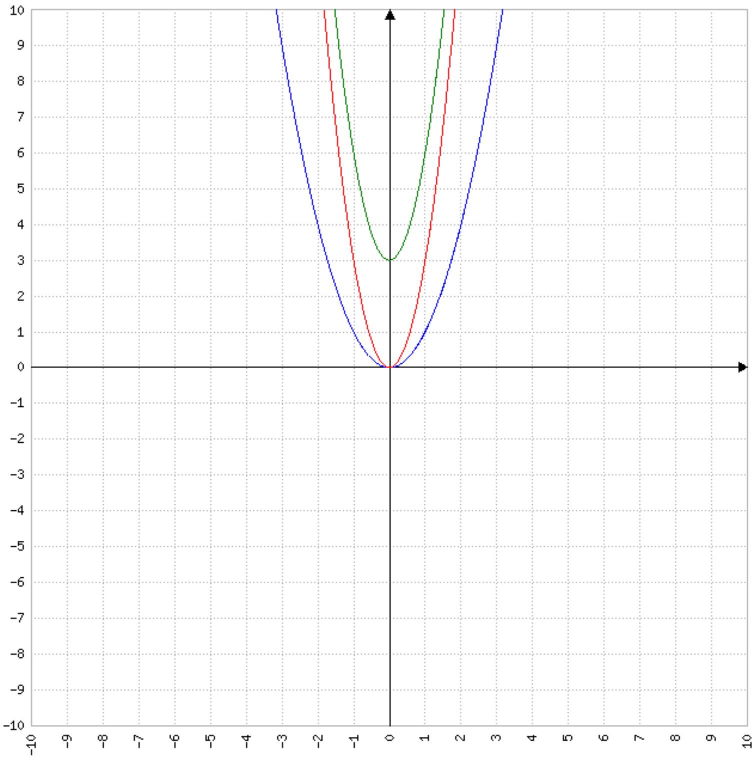
(b) *b (x)= x - 6.*


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

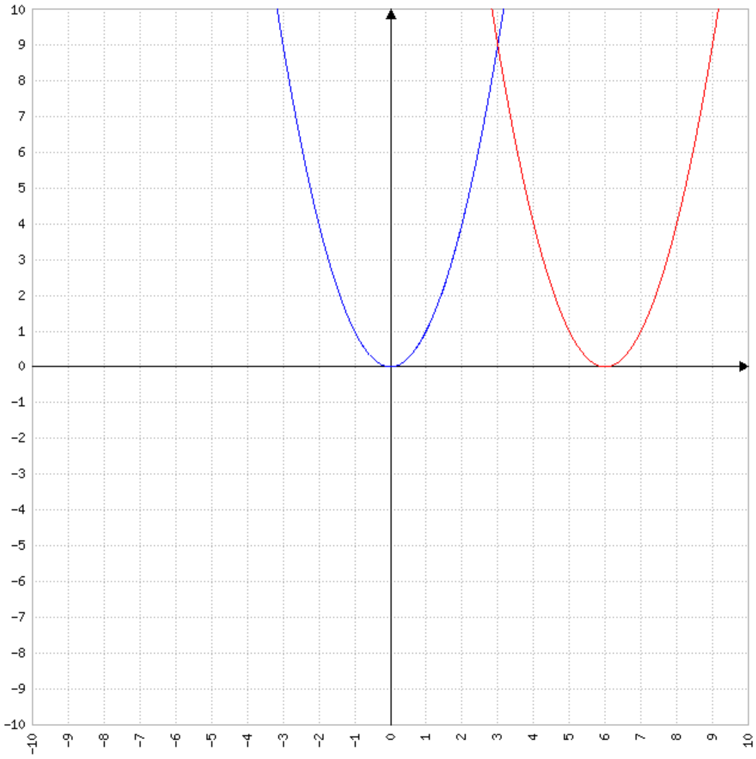
Ejercicio 5.

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base:

(a) *a (x)=* $3x^2 + 3$.



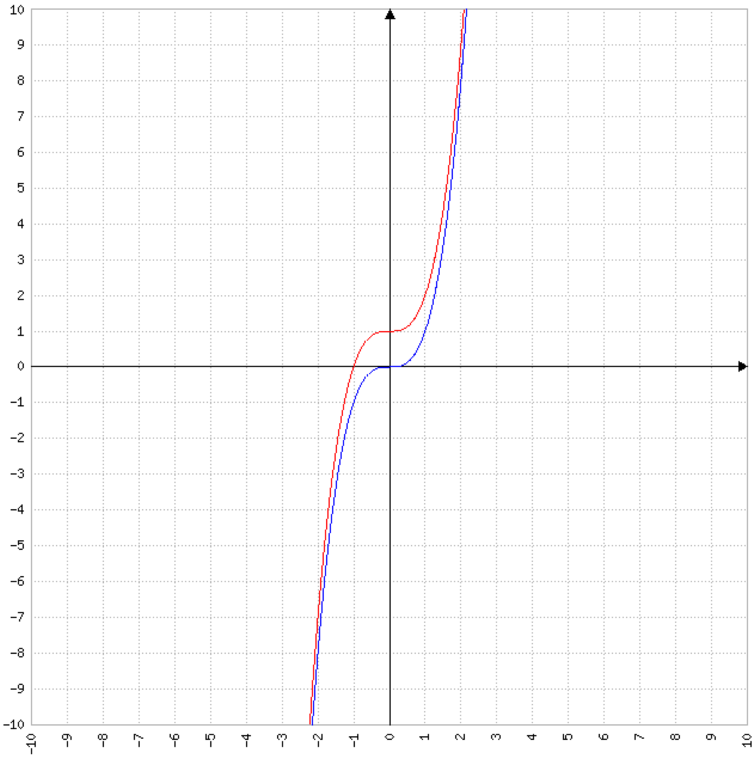
(b) *b (x)=* $(x-6)^2$.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

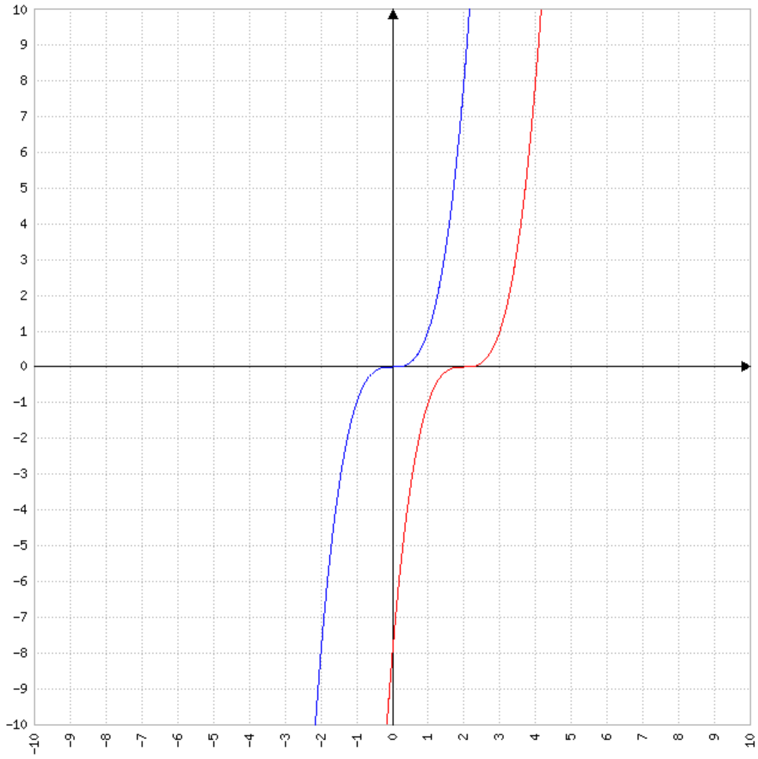
Ejercicio 6.

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base:

(a) *a (x)=* x^3 *+ 1.*



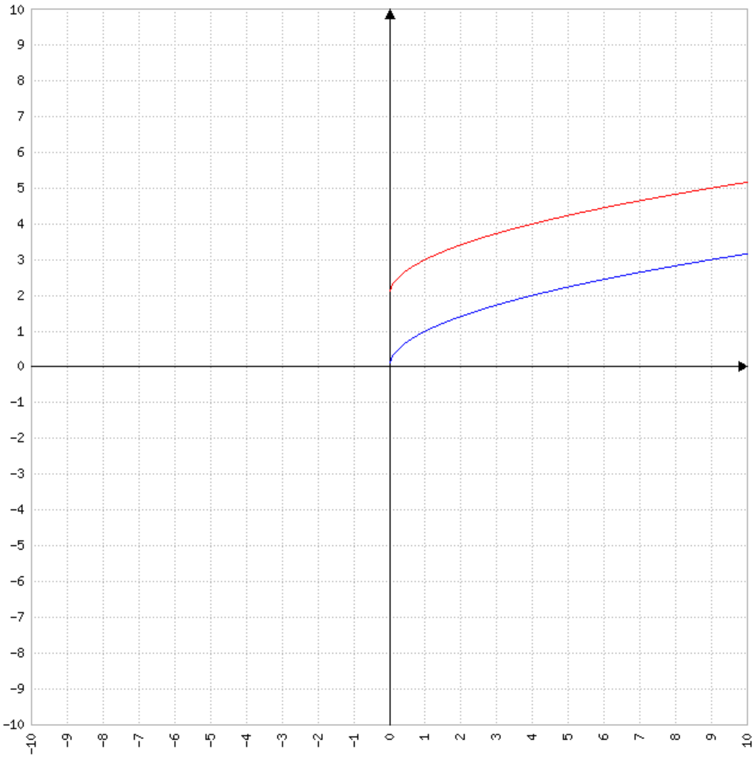
(b) *b (x)=* $(x-2)^3$.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

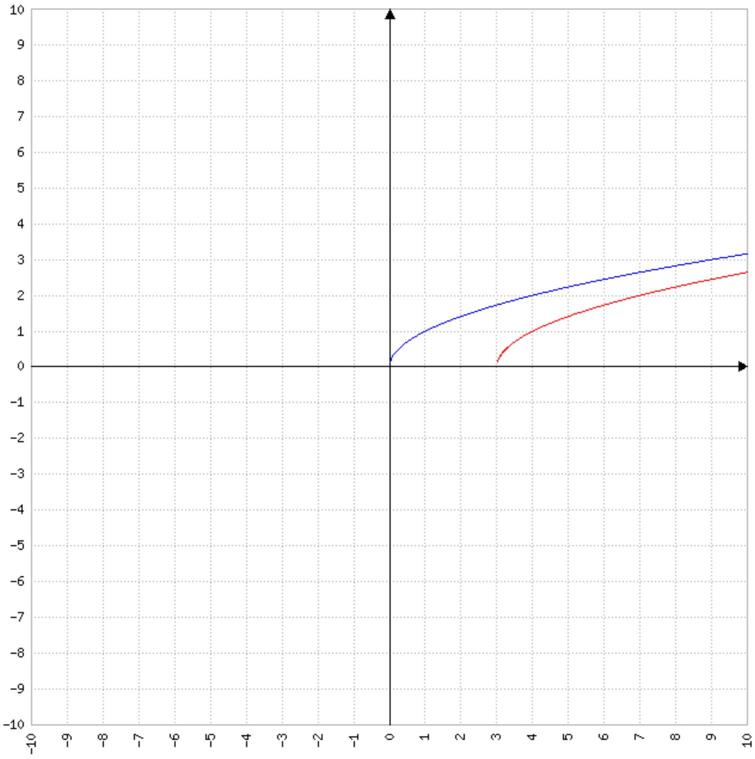
Ejercicio 7.

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base:

(a) $a(x) = \sqrt{x} + 2$.



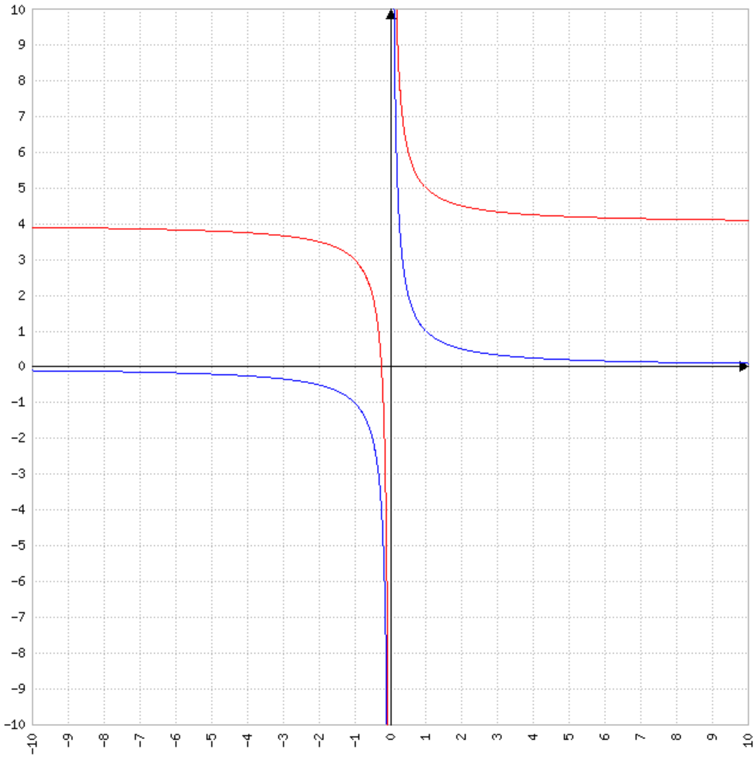
(a) $b(x) = \sqrt{x-3}$.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Ejercicio 8.

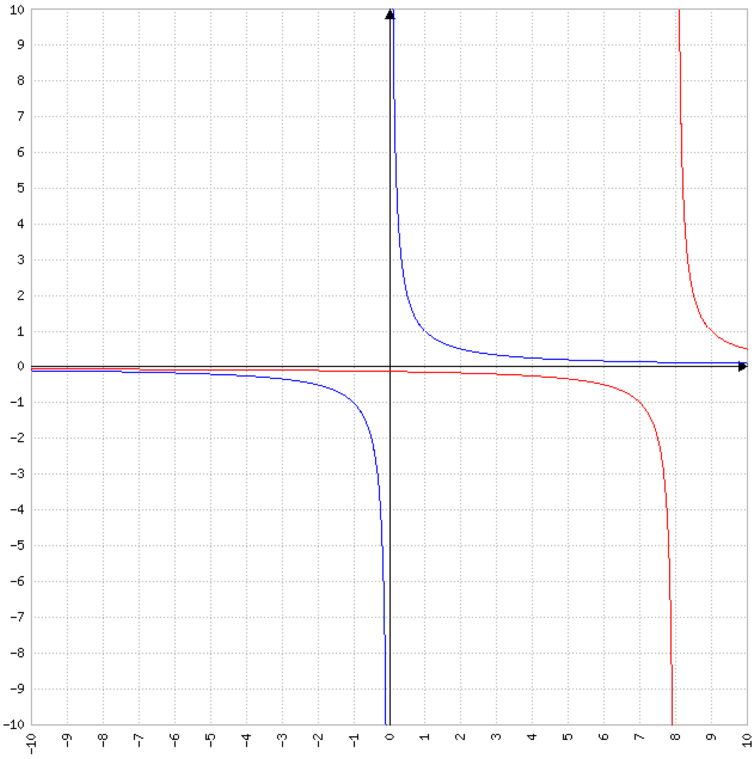
Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base y hallar el dominio de cada una de ellas:

(a) $a(x) = \frac{1}{x} + 4$.



$Dom_a = \mathbb{R} - \{0\}$.

(b) $b(x) = \frac{1}{x-8}$.



x - 8=0
x= 8.

Dom_b= ℝ - {8}.

Ejercicio 9.

Hallar el dominio de la siguiente función: f (x)= $\frac{x^3+x-3}{2x^2-10x+12}$.

$2x^2$ - 10x + 12= 0
2 (x^2 - 5x + 6)= 0
x^2 - 5x + 6= $\frac{0}{2}$
x^2 - 5x + 6= 0.

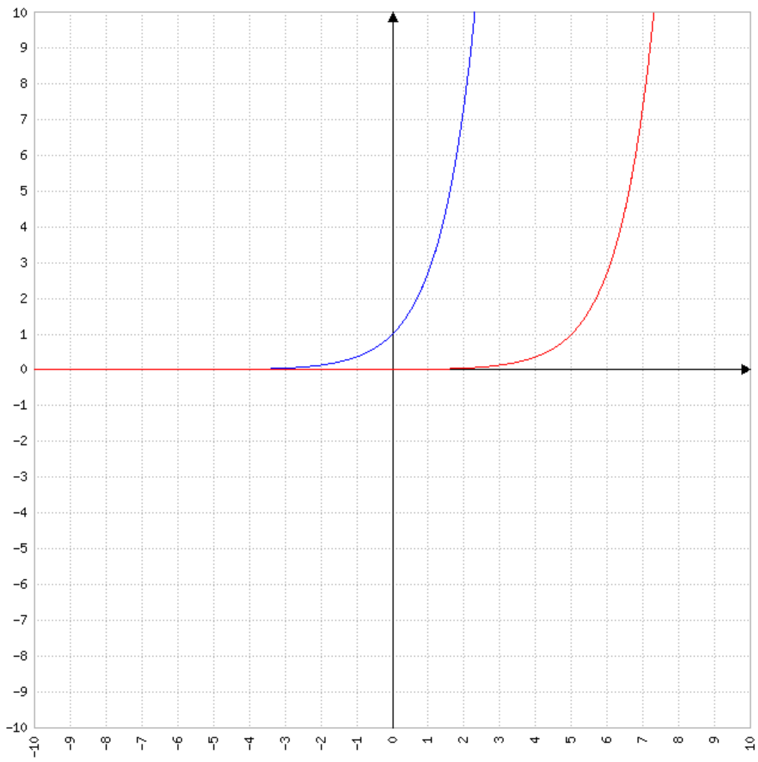
$x_1, x_2= \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4*1*6}}{2*1}$
$x_1, x_2= \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{5\pm\sqrt{1}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{5\pm1}{2}$
$x_1= \frac{5+1}{2}= \frac{6}{2}$= 3.
$x_2= \frac{5-1}{2}= \frac{4}{2}$= 2.

Dom_f= ℝ - {2, 3}.

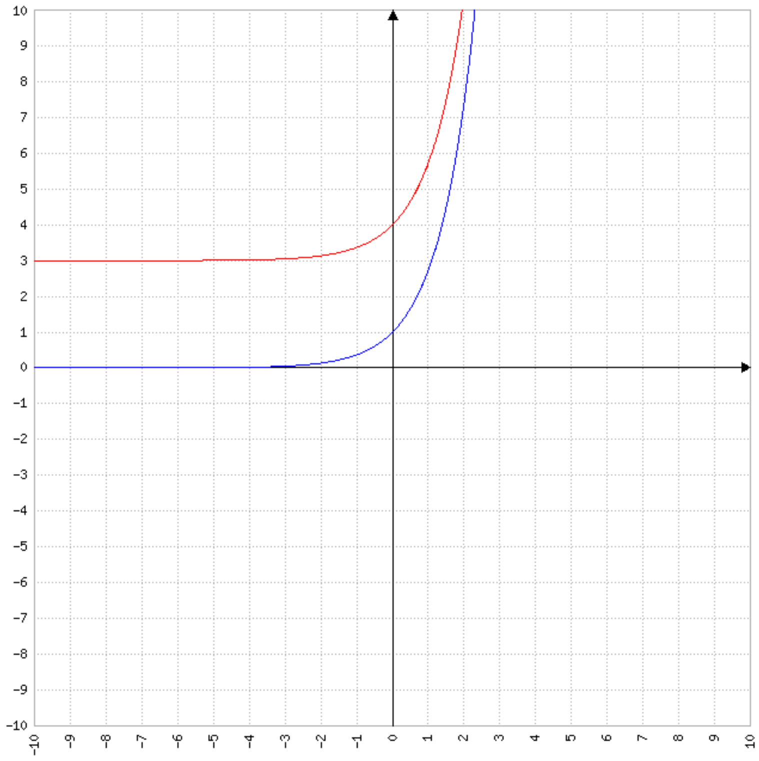
Ejercicio 10.

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base:

(a) *a (x)=* e^{x-5}.



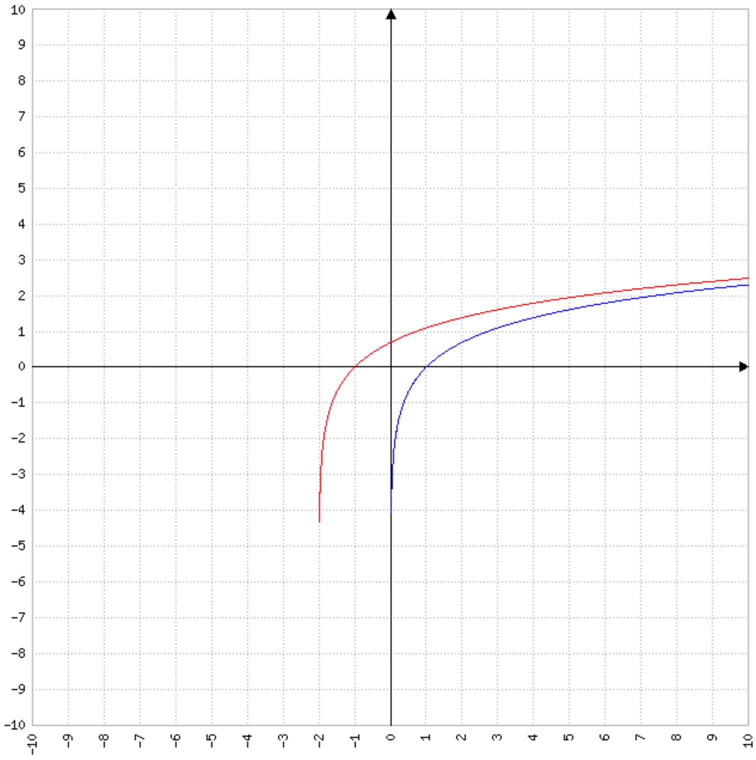
(b) *b (x)=* e^{x} *+ 3.*


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Ejercicio 11.

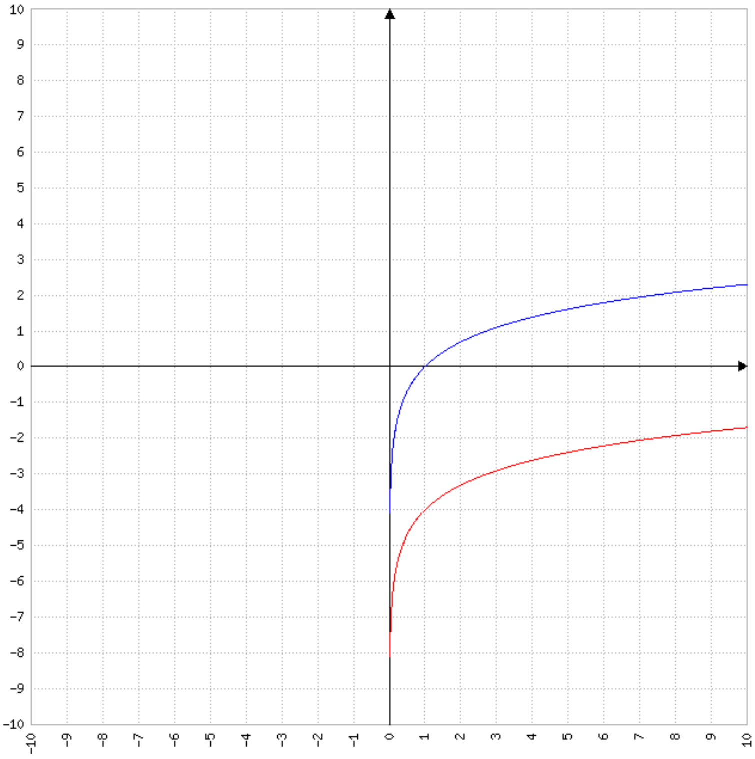
Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base:

(a) *a (x)= ln (x + 2).*



(b) *b (x)= ln x - 4.*

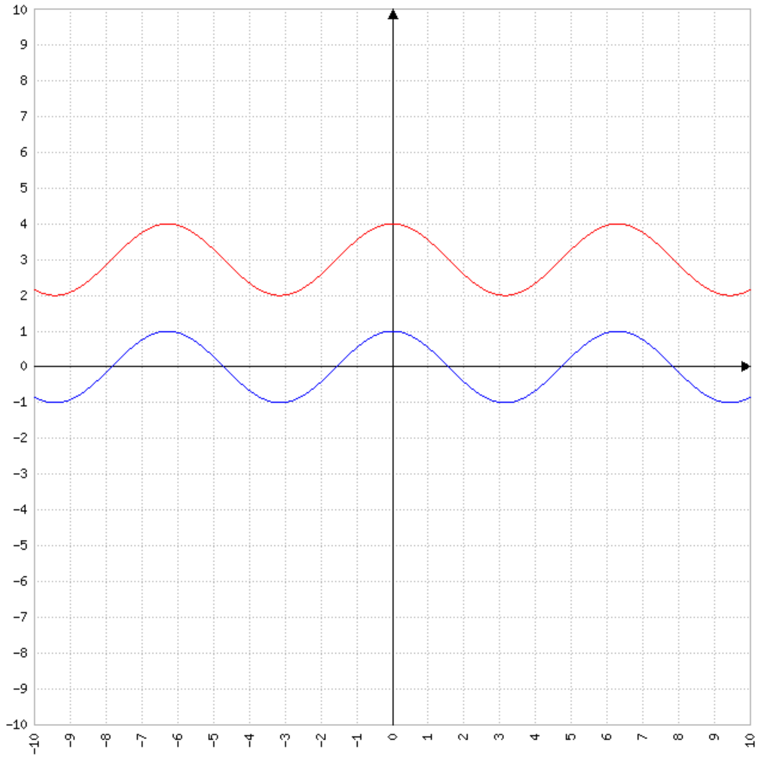
Juan Menduiña



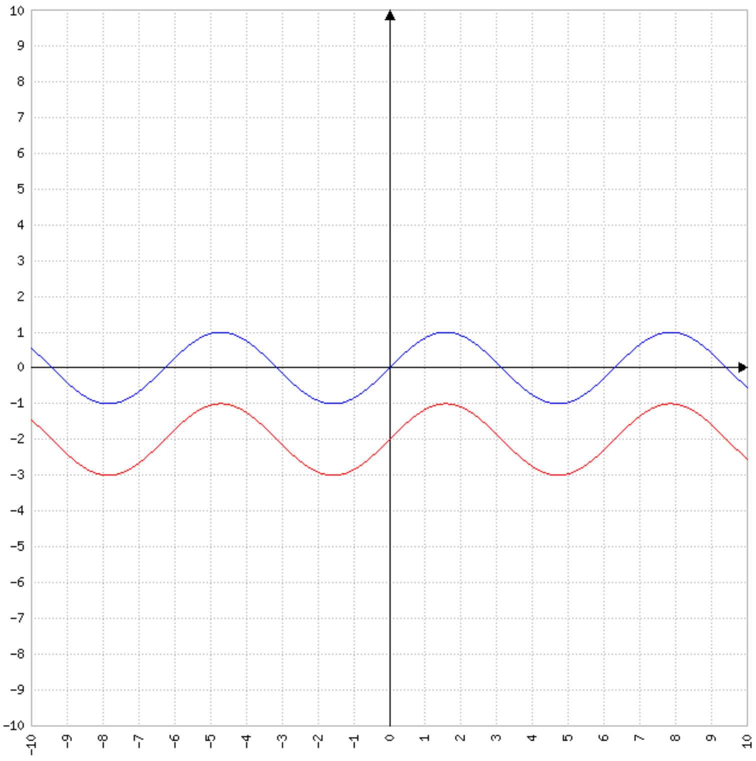
Ejercicio 12.

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base:

(a) *a (x)= cos x + 3.*



(b) *b (x)= sen x - 2.*



Ejercicio 13.

Para el cálculo del monto de la factura de luz, se considera el consumo del usuario y se le cobra de acuerdo al esquema que se describe a continuación. Si el consumo está entre 0 y 150 kwh, se cobra un monto fijo de $95,85, más un cargo variable de $3,41 por cada kwh consumido. Si el consumo que se registra es mayor a 150 kwh y hasta 325 kwh, se cobra un monto fijo de $265,22 más $3,17 por cada kwh consumido. Si el usuario utilizó más de 325 kwh y hasta 400 kwh, se cobra un cargo fijo de $322,26 más $3,20 por cada kwh. Si el consumo es mayor a 400 kwh el cargo fijo es de $422 y el cargo variable es de $3,50 por kwh.

(a) *¿Cuánto deberá pagar un usuario que ha consumido 270 kwh?¿Y si hubiera consumido 150 kwh? ¿Qué monto tendrá la factura de luz de otro usuario que gastó 450 kwh?*

f (270)= 265,22 + 3,17 * 270
f (270)= 265,22 + 855,9
f (270)= 1121,12.

f (450)= 422 + 3,5 * 450
f (450)= 422 + 1575
f (450)= 1997.

Por lo tanto, un usuario que ha consumido 270 kwh deberá pagar $1.121,12 y el monto que tendrá la factura de luz de otro usuario que gastó 450 kwh será $1.997.

(b) *Construir las fórmulas que calculan el monto de la factura de luz para cada uno de los intervalos de consumo.*

f (x)= 95,85 + 3,41x, si $0 \leq x \leq 150$.
g (x)= 265,22 + 3,17x, si $150 < x \leq 325$.
h (x)= 322,26 + 3,12x, si $325 < x \leq 400$.
i (x)= 422 + 3,5x, si $400 < x$.

(c) *¿De qué manera se podrían expresar las fórmulas anteriores en una única función?*

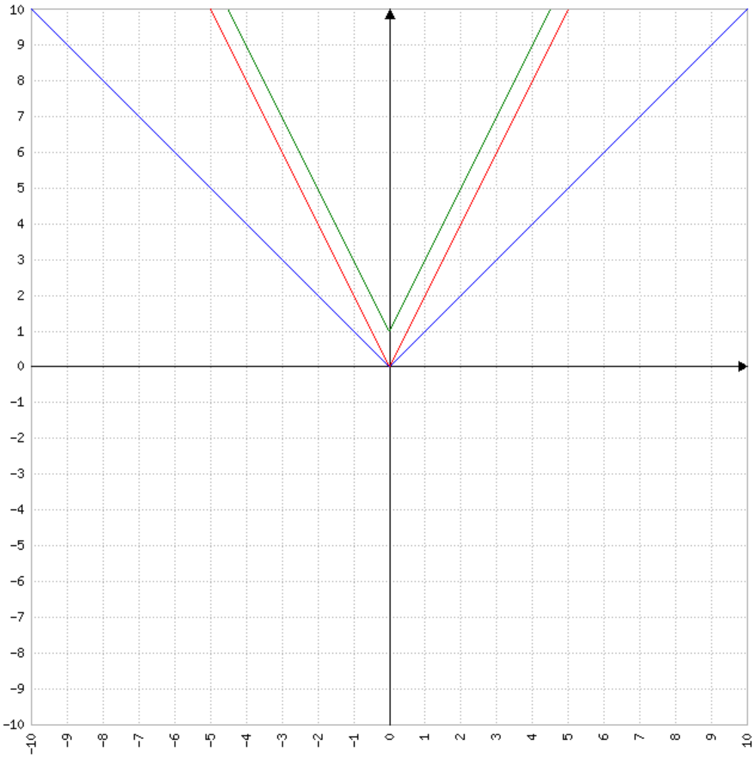
Las fórmulas anteriores se podrían expresar en única función de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} 95{,}85 + 3{,}41x, 0 \leq x \leq 150 \\ 265{,}22 + 3{,}17x, 150 < x \leq 325 \\ 322{,}26 + 3{,}2x, 325 < x \leq 400 \\ 422 + 3{,}5x, 400 < x \end{cases}.$$

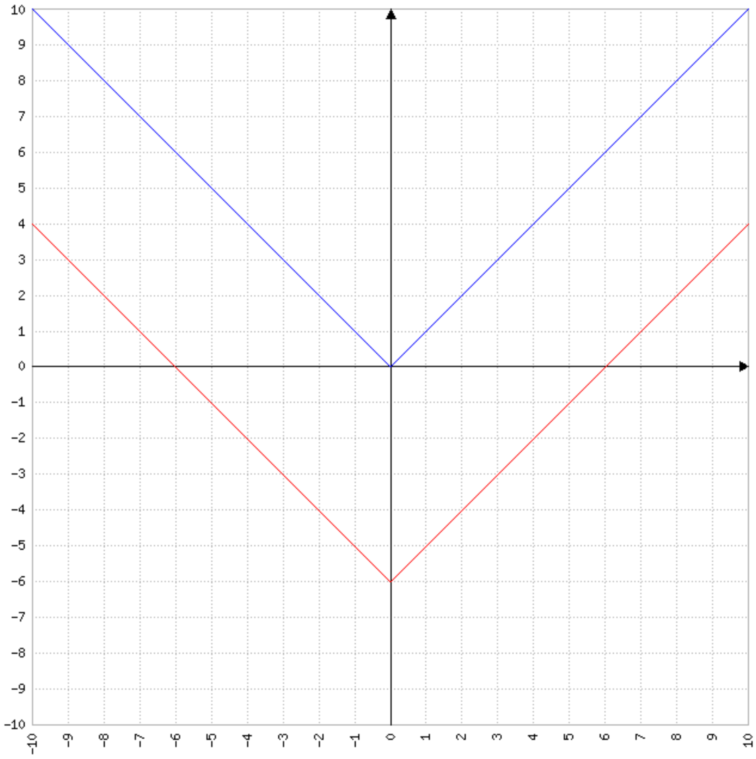
Ejercicio 14.

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base, la función valor absoluto:

(a) *a (x)=* $|2x|$ *+ 1.*



(b) *b (x)=* $|x-6|$.

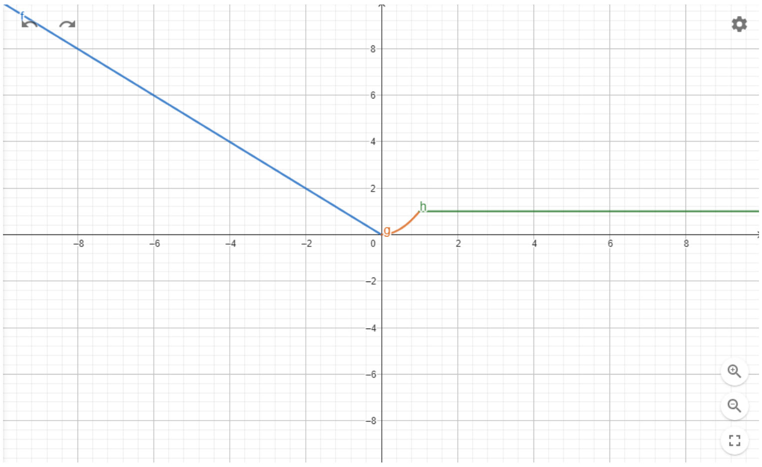


Ejercicio 15.

Hallar el dominio de las siguientes funciones a trozos y graficar:

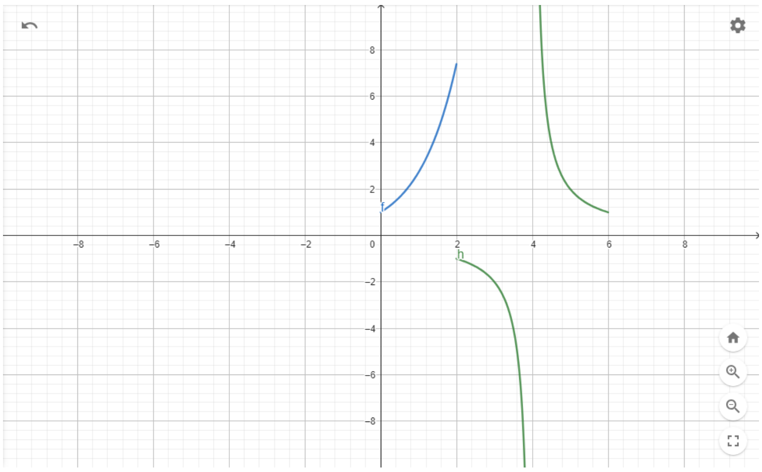
(a) $f(x)= \begin{cases} -x, si\ x \leq 0 \\ x^2, si\ 0 < x \leq 1. \\ 1, si\ x > 1 \end{cases}$

Dom_f= (-∞, 0] ∪ (0, 1] ∪ (1, +∞).
Dom_f= ℝ.



(b) $g(x)= \begin{cases} e^x, si\ 0 \leq x < 2 \\ 5, si\ x = 2 \\ \frac{2}{x-4}, si\ 2 < x < 6 \end{cases}.$

Dom_f= [0, 2) ∪ {2} ∪ (2, 6).
Dom_f= [0, 6).



Ejercicio 16.

Hallar el dominio para que las siguientes expresiones sean funciones:

(a) *a (x)= x + 1.*

Dom_a= $\mathbb{R}$.

(b) *b (x)=* x^2 *+ 1.*

Dom_b= $\mathbb{R}$.

(c) *c (x)=* $\frac{1}{x}$.

x= 0.

Dom_c= $\mathbb{R}$ - {0}.

(d) *d (x)=* $\frac{2}{x+3}$.

x + 3= 0
x= -3.

Dom_d= $\mathbb{R}$ - {-3}.

(e) *e (x)=* $\frac{3}{x^2-4}$.

x^2 - 4= 0
x^2= 4
$\sqrt{x^2}$= $\sqrt{4}$
$|x|$= 2
x= $\pm$2.

Dom_e= $\mathbb{R}$ - {-2, 2}.

(f) *f (x)=* $\frac{5}{x^2-4x+3}$.

x^2 - 4x + 3= 0.

$x_1, x_2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4*1*3}}{2*1}$
$x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{4 \pm 2}{2}$
$x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3.$
$x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

$Dom_f = \mathbb{R}$ - {1, 3}.

(g) $g\ (x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$.

x^2 - 4x + 3= 0.

$x_1, x_2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4*1*3}}{2*1}$
$x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{4 \pm 2}{2}$
$x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3.$
$x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

$Dom_f = \mathbb{R}$ - {1, 3}.

(h) $h\ (x) = |x+1|$.

$Dom_h = \mathbb{R}$.

(i) $i\ (x) = 2^x$.

$Dom_i = \mathbb{R}$.

(j) $j\ (x) = 2^{x-5}$.

$Dom_j = \mathbb{R}$.

(k) *k (x)= ln (x).*

x= 0.

Dom_k= (0, +∞).

(l) *l (x)= ln (x + 4).*

x + 4 $>$ 0
x $>$ -4.

Dom_l= (-4, +∞).

Ejercicio 17.

Sean f (x)= x + 1 g (x)= $\sqrt{x-3}$, *h (x)=* $\frac{1}{x}$, *M (x)= sen (x), W (x)=* $\frac{1}{x^2-1}$. *A partir de estas funciones, determinar:*

(a) *Dominio de cada una de las funciones.*

Dom_f= ℝ.
Dom_g= [3, +∞).
Dom_h= ℝ - {0}.
Dom_M= ℝ.
Dom_W= ℝ - {-1, 1}.

(b) *Expresión y dominio de:*

(i) *g + W.*

g + W= $\sqrt{x-3} + \frac{1}{x^2-1}$
g + W= $\frac{(x^2-1)\sqrt{x-3}+1}{x^2-1}$.

Dom_{g+W}= $Dom_g \cap Dom_W$
Dom_{g+W}= [3, +∞) ∩ ℝ - {-1, 1}
Dom_{g+W}= [3, +∞).

(ii) *hM.*

hM= $\frac{1}{x}$ sen x
hM= $\frac{sen\ x}{x}$.

Dom_{hM}= $Dom_h \cap Dom_M$
Dom_{hM}= ℝ - {0} ∩ ℝ
Dom_{hM}= ℝ - {0}.

(iii) $\frac{g}{f}$.

$\frac{g}{f}$= $\frac{\sqrt{x-3}}{x+1}$.

$Dom_{\frac{g}{f}}$= Dom_g ∩ Dom_f - {x: f (x)= 0}
$Dom_{\frac{g}{f}}$= [3, +∞) ∩ ℝ - {-1}
$Dom_{\frac{g}{f}}$= [3, +∞).

(c) *Expresión y dominio de las siguientes funciones compuestas:*

(i) *f ∘ g.*

f ∘ g= f (g (x))
f ∘ g= $\sqrt{x-3}$ + 1.

$Dom_{f \circ g}$= {x ∈ Dom_g / g (x) ∈ Dom_f}
$Dom_{f \circ g}$= {x ∈ [3, +∞) / $\sqrt{x-3}$ ∈ ℝ}
$Dom_{f \circ g}$= [3, +∞).

(ii) *h ∘ f.*

h ∘ f= h (f (x))
h ∘ f= $\frac{1}{x+1}$.

$Dom_{h \circ f}$= {x ∈ Dom_f / f (x) ∈ Dom_h}
$Dom_{h \circ f}$= {x ∈ ℝ / (x + 1) ∈ ℝ - {0}}
$Dom_{h \circ f}$= ℝ - {-1}.

(iii) *M ∘ h.*

M ∘ h= M (h (x))
M ∘ h= sen ($\frac{1}{x}$).

$Dom_{M \circ h}$= {x ∈ Dom_h / h (x) ∈ Dom_M}
$Dom_{M \circ h}$= {x ∈ ℝ - {0} / $\frac{1}{x}$ ∈ ℝ}
$Dom_{M \circ h}$= ℝ - {0}.

(d) *Expresión de (h ∘ M ∘ f).*

h ∘ M ∘ f = h (M (f (x)))

$h \circ M \circ f = \frac{1}{sen\,(x+1)}$.

Ejercicio 18.

Identificar las funciones f y g de modo que las funciones dadas se puedan escribir como (f ∘ g).

(a) *sen* x^3.

f (x)= sen x.
g (x)= x^3.

(f ∘ g) (x)= sen x^3.

(b) $\sqrt{x^4 + 1}$.

f (x)= $\sqrt{x}$.
g (x)= x^4 + 1.

(f ∘ g) (x)= $\sqrt{x^4 + 1}$.

(c) $\frac{1}{x^2+1}$.

f (x)= $\frac{1}{x}$.
g (x)= x^2 + 1.

(f ∘ g) (x)= $\frac{1}{x^2+1}$.

Ejercicio 19.

Hallar el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x)= \begin{cases} 4-x^2, si\ x \leq 1 \\ x^2+2x, si\ x > 1 \end{cases}$.

Dom_f= (-∞, 1] ∪ (1, +∞)
Dom_f= ℝ.

(b) $g(x)= \begin{cases} \frac{1}{x}, si\ x < 0 \\ ln\ x, si\ x > 0 \end{cases}$.

Dom_g= (-∞, 0) ∪ (0, +∞)
Dom_g= ℝ - {0}.

Ejercicio 20.

Dadas f (x)= 2 - x y g (x)= $\begin{cases} -x, si -2 \leq x < 0 \\ x - 1, si\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$*, hallar:*

(a) *f (g (0)) y g (f (0)).*

f (g (0))= f (-0)
f (g (0))= f (0)
f (g (0))= 2 - 0
f (g (0))= 2.

g (f (0))= g (2)
g (f (0))= 2 - 1
g (f (0))= 1.

(b) *f (f (2)) y g (g (-1)).*

f (f (2))= f (2 - 2)
f (f (2))= f (0)
f (f (2))= 2 - 0
f (f (2))= 2.

g (g (-1))= g (-(-1))
g (g (-1))= g (1)
g (g (-1))= 1 - 1
g (g (-1))= 0.

(c) *f (g ($\frac{1}{2}$)) y g (f (3)).*

f (g ($\frac{1}{2}$))= f ($\frac{1}{2}$ - 1)
f (g ($\frac{1}{2}$))= f ($\frac{-1}{2}$)
f (g ($\frac{1}{2}$))= 2 - ($\frac{-1}{2}$)
f (g ($\frac{1}{2}$))= 2 + $\frac{1}{2}$
f (g ($\frac{1}{2}$))= $\frac{5}{2}$.

g (f (3))= g (2 - 3)
g (f (3))= g (-1)
g (f (3))= -(-1)
g (f (3))= 1.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 2: Límites.

Ejercicio 1.

Calcular los límites de las siguientes funciones, si existen.

(a) *f (x)=* $\begin{cases} x^2, si\ x > 2 \\ 1, si\ x \leq 2 \end{cases}$. *Calcular* $\lim_{x \to 2^+} f\ (x)$ *y* $\lim_{x \to 2^-} f\ (x)$.

$\lim_{x \to 2^-} f\ (x)$= $\lim_{x \to 2^-} 1$= 1.

$\lim_{x \to 2^+} f\ (x)$= $\lim_{x \to 2^+} x^2$= 2^2= 4.

Por lo tanto, ya que $\lim_{x \to 2^-} f\ (x) \neq \lim_{x \to 2^+} f\ (x)$, $\nexists \lim_{x \to 2} f\ (x)$.

(b) *Sea g la función valor absoluto, g (x)=* $|x|$= $\begin{cases} x, si\ x \geq 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$. *Calcular* $\lim_{x \to 0^+} g\ (x)$ *y* $\lim_{x \to 0^-} g\ (x)$. *¿Qué se puede decir respecto al* $\lim_{x \to 0} g\ (x)$*?*

$\lim_{x \to 0^-} g\ (x)$= $\lim_{x \to 0^-} -x$= 0.

$\lim_{x \to 0^+} g\ (x)$= $\lim_{x \to 0^+} x$= 0.

Por lo tanto, ya que $\lim_{x \to 0^-} g\ (x)$= $\lim_{x \to 0^+} g\ (x)$, $\exists \lim_{x \to 0} g\ (x)$.

Ejercicio 2.

Dada la función f (x)= $\begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, si\ x \neq 1 \\ 3, si\ x = 1 \end{cases}$*, calcular* $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ *y* $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1^2-1} = \frac{0}{1-1} = (\frac{0}{0})$.
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1^2-1} = \frac{0}{1-1} = (\frac{0}{0})$.
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 3.

Calcular, si existen, los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \frac{\sqrt{0^2+9}-3}{0^2} = \frac{\sqrt{0+9}-3}{0} = \frac{\sqrt{9}-3}{0} = \frac{3-3}{0} = (\frac{0}{0})$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+9+3\sqrt{x^2+9}-3\sqrt{x^2+9}-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{0^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{0+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$.

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{1^2-2*1+1}{1^2-3*1+2} = \frac{1-2+1}{1-3+2} = (\frac{0}{0})$.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-2)(x-1)}$ (*) y (**)

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1-1}{1-2} = \frac{0}{-1} = 0$.

(*) $x_1, x_2 = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4*1*1}}{2*1}$

$x_1, x_2 = \frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}$

$x_1, x_2 = \frac{2\pm\sqrt{0}}{2}$

$x_1, x_2 = \frac{2\pm 0}{2}$

$x_1 = \frac{2+0}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

$x_2 = \frac{2-0}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

(**) $x_1, x_2 = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4*1*2}}{2*1}$

$x_1, x_2 = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$

$x_1, x_2 = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2}$

$x_1, x_2 = \frac{3\pm 1}{2}$

$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

$x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Ejercicio 4.

Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+2}{x+3}$.

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+2}{x+3}= \frac{3+2}{3+3}= \frac{5}{6}$.

(b) $\lim\limits_{x \to 1} x^3 + 5x^2 + 10$.

$\lim\limits_{x \to 1} x^3 + 5x^2 + 10= 1^3 + 5 * 1^2 + 10= 1 + 5 * 1 + 10= 1 + 5 + 10= 16$.

(c) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$.

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}= \frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)}= \frac{-8+2*4-1}{5+6}= \frac{-8+8-1}{11}= \frac{-1}{11}$.

(d) $\lim\limits_{x \to \pi} sen\ (x - \pi)$.

$\lim\limits_{x \to \pi} sen\ (x - \pi)$= sen ($\pi$ - π)= sen 0= 0.

(e) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{x}$.

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{x}= \frac{\sqrt[3]{2^2+2}}{2}= \frac{\sqrt[3]{4+2}}{2}= \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$.

(f) $\lim\limits_{x \to 1} ln \frac{2}{x^3+1}$.

$\lim\limits_{x \to 1} \ln \frac{2}{x^3+1}= \ln \frac{2}{1^3+1}= \ln \frac{2}{1+1}= \ln \frac{2}{2}= \ln 1= 0$.

(g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{e^x}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x}= \frac{\ln(0+1)}{e^0}= \frac{\ln 1}{1}= \frac{0}{1}= 0.$

(h) $\lim\limits_{x \to 0} 3 \cos x^2 \ (1+x)^4.$

$\lim\limits_{x \to 0} 3 \cos x^2 \ (1+x)^4= 3 \cos 0^2 \ (1+0)^4= 3 \cos 0 * 1^4= 3 * 1 * 1= 3.$

(i) $\lim\limits_{x \to 3} |x-3|.$

$\lim\limits_{x \to 3} |x-3|= |3-3|= |0|= 0.$

(j) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{|x-3|}{x}.$

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{|x-3|}{x}= \frac{|3-3|}{3}= \frac{|0|}{3}= \frac{0}{3}= 0.$

(k) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2+x}.$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2+x}= \frac{0}{0^2+0}= \frac{0}{0+0}= (\frac{0}{0}).$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2+x}= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x(x+1)}$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2+x}= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x+1}= \frac{1}{0+1}= \frac{1}{1}= 1.$

(l) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4}.$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4}= \frac{2^2-2-2}{2^2-4}= \frac{4-2-2}{4-4}= (\frac{0}{0}).$
$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4}= \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)}$ (*)
$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4}= \lim\limits_{x \to 2} \frac{x+1}{x+2}= \frac{2+1}{2+2}= \frac{3}{4}.$

(*) $x_1, x_2= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-4*1(-2)}}{2*1}$
$x_1, x_2= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$

$x_1, x_2= \frac{1\pm3}{2}$
$x_1= \frac{1+3}{2}= \frac{4}{2}= 2.$
$x_2= \frac{1-3}{2}= \frac{-2}{2}= -1.$

(m) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

$\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}= \frac{(-1)^2-1}{(-1)^2+3(-1)+2}= \frac{1-1}{1-3+2}= (\frac{0}{0}).$
$\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}= \lim\limits_{x\to-1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$ (*)
$\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}= \lim\limits_{x\to-1} \frac{x+1}{x-2}= \frac{-1+1}{-1-2}= \frac{0}{-3}= 0.$

(*) $x_1, x_2= \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4*1*2}}{2*1}$
$x_1, x_2= \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{3\pm\sqrt{1}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{3\pm1}{2}$
$x_1= \frac{3+1}{2}= \frac{4}{2}= 2.$
$x_2= \frac{3-1}{2}= \frac{2}{2}= 1.$

(n) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

$\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}= \frac{1-1}{\sqrt{1}-1}= \frac{0}{1-1}= (\frac{0}{0}).$
$\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}= \lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$
$\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}= \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}$
$\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}= \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$
$\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}= \lim\limits_{x\to1} \sqrt{x}+1= \sqrt{1}+1= 1+1= 2.$

(ñ) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^3}{x^2+x}$.

$\lim\limits_{x\to0} \frac{x^3}{x^2+x}= \frac{0^3}{0^2+0}= \frac{0}{0+0}= (\frac{0}{0}).$
$\lim\limits_{x\to0} \frac{x^3}{x^2+x}= \lim\limits_{x\to0} \frac{x^3}{x(x+1)}$
$\lim\limits_{x\to0} \frac{x^3}{x^2+x}= \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2}{x+1}= \frac{0^2}{0+1}= \frac{0}{1}= 0.$

(o) $\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x+2}{2-x}$.

$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x+1}{2-x} = \frac{2+1}{2-2} = \frac{3}{0} = +\infty$.

(p) $\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x}{x-3}$.

$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{3-3} = \frac{3}{0} = +\infty$.

(q) $\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x}{|x+2|}$.

$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x}{|x+2|} = \frac{-2}{|-2+2|} = \frac{-2}{|0|} = \frac{-2}{0} = -\infty$.

Ejercicio 5.

Calcular los siguientes límites al infinito:

(a) $\lim_{x\to -\infty} x - 3x^4$.

$\lim_{x\to -\infty} x - 3x^4$= -∞.

(b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5}{x} - \frac{3}{x}$.

$\lim_{x\to -\infty} \frac{5}{x} - \frac{3}{x}$= 0 - 0= 0.

(c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+3x-1}$.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+3x-1}$= 0.

(d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}= (\frac{\infty}{\infty})$.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(3+\frac{2}{x}-\frac{16}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}= \lim_{x\to +\infty} \frac{3+\frac{2}{x}-\frac{16}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}= \frac{3+0-0}{1-0-0}= \frac{3}{1}= 3$.

(e) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^3-x^2-6x-2}$.

$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^3-x^2-6x-2}$= 0.

(f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4-2x^2}{\sqrt{x^4-6x}}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4-2x^2}{\sqrt{x^4-6x}} = \frac{x^4(1-\frac{2}{x^2})}{\sqrt{x^4(1-\frac{6}{x^3})}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4-2x^2}{\sqrt{x^4-6x}} = \frac{x^4(1-\frac{2}{x^2})}{\sqrt{x^4}\sqrt{1-\frac{6}{x^3}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4-2x^2}{\sqrt{x^4-6x}} = \frac{x^4(1-\frac{2}{x^2})}{x^2\sqrt{1-\frac{6}{x^3}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4-2x^2}{\sqrt{x^4-6x}} = \frac{x^2(1-\frac{2}{x^2})}{\sqrt{1-\frac{6}{x^3}}} = +\infty.$$

Ejercicio 6.

Calcular los siguientes límites, si es que existen:

(a) *Dada h (x)=* $\begin{cases} \sqrt{x-4}, si\ x > 4 \\ 8-2x, si\ x < 4 \end{cases}$. *Calcular* $\lim_{x \to 4} h\ (x)$.

$\lim_{x \to 4^-} h\ (x)= \lim_{x \to 4^-} 8-2*4$= 8 - 8= 0.

$\lim_{x \to 4^+} h\ (x)= \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4}= \sqrt{4-4}= \sqrt{0}$= 0.

Por lo tanto, ya que $\lim_{x \to 4^-} h\ (x)= \lim_{x \to 4^+} h\ (x)$= 0, entonces, $\lim_{x \to 4} h\ (x)$= 0.

(b) *Sea f (x)=* $\begin{cases} \frac{x}{e^x}, si\ x \leq 0 \\ x^2, si\ x > 0 \end{cases}$. *Calcular* $\lim_{x \to 0} f\ (x)$ *y* $\lim_{x \to -1} f\ (x)$.

$\lim_{x \to 0^-} f\ (x)= \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{e^x}= \frac{0}{e^0}= \frac{0}{1}$= 0.

$\lim_{x \to 0^+} f\ (x)= \lim_{x \to 0^+} x^2= 0^2$= 0.

Por lo tanto, ya que $\lim_{x \to 0^-} f\ (x)= \lim_{x \to 0^+} f\ (x)$= 0, entonces, $\lim_{x \to 0} f\ (x)$= 0.

$\lim_{x \to -1} f\ (x)= \lim_{x \to -1} x^2= (-1)^2$= 1.

Por lo tanto, $\lim_{x \to -1} f\ (x)$= 1.

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{(ln\, x)^2}{x}$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$= 0.

(d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+2x+1}{e^x}$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+2x+1}{e^x}$= 0.

(e) $\lim_{x \to 0^+} x\, ln\, x$.

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} x\ln x = \lim_{y\longrightarrow +\infty} \frac{1}{y}\ln\frac{1}{y}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} x\ln x = \lim_{y\longrightarrow +\infty} \frac{\ln\frac{1}{y}}{y}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} x\ln x = \lim_{y\longrightarrow +\infty} \frac{\ln 1 - \ln y}{y}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} x\ln x = \lim_{y\longrightarrow +\infty} \frac{0 - \ln y}{y}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} x\ln x = \lim_{y\longrightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y} = 0.$$

Ejercicio 7.

Calcular las asíntotas verticales y horizontales, si existen, de las funciones dadas a continuación:

(a) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

$\lim_{x \to -1^-} f(x)= \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x+1}= \frac{(-1)^2}{-1+1}= \frac{1}{0}= -\infty$.

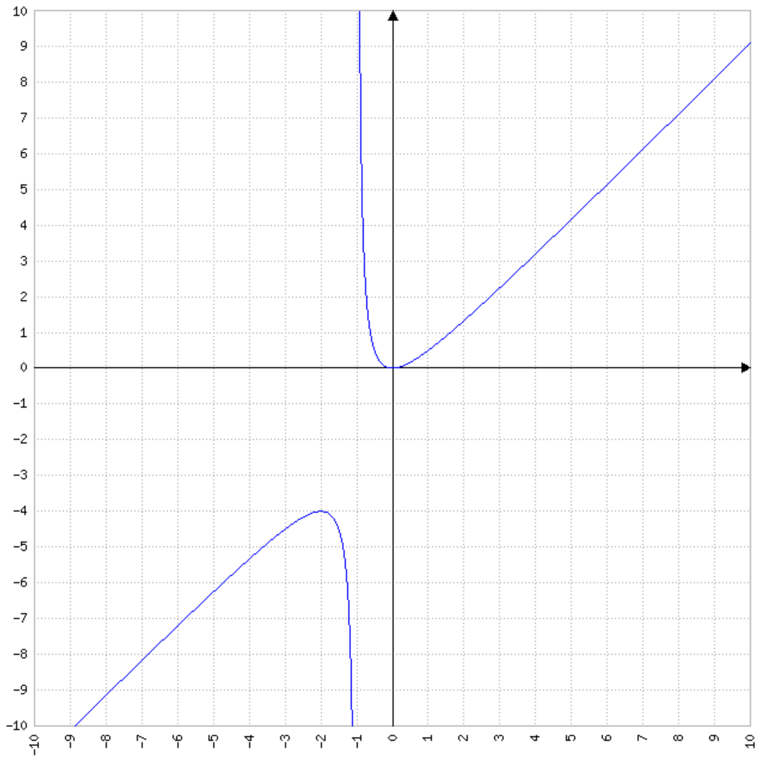
$\lim_{x \to -1^+} f(x)= \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x+1}= \frac{(-1)^2}{-1+1}= \frac{1}{0}= +\infty$.

Por lo tanto, f (x) tiene un asíntota vertical en x= -1.

$\lim_{x \to -\infty} f(x)= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1}= -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x)= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1}= +\infty$.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.



(b) $g(x)=\frac{4x^2+2x-2}{3x-1}$.

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} g\ (x)= \lim_{x \to \frac{1}{3}^-} \frac{4x^2+2x-2}{3x-1}= \frac{4(\frac{1}{3})^2+2\frac{1}{3}-2}{3(\frac{1}{3})-1}= \frac{4\frac{1}{9}+\frac{2}{3}-2}{1-1}= \frac{\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-2}{0}= \frac{\frac{-8}{9}}{0}= +\infty.$$

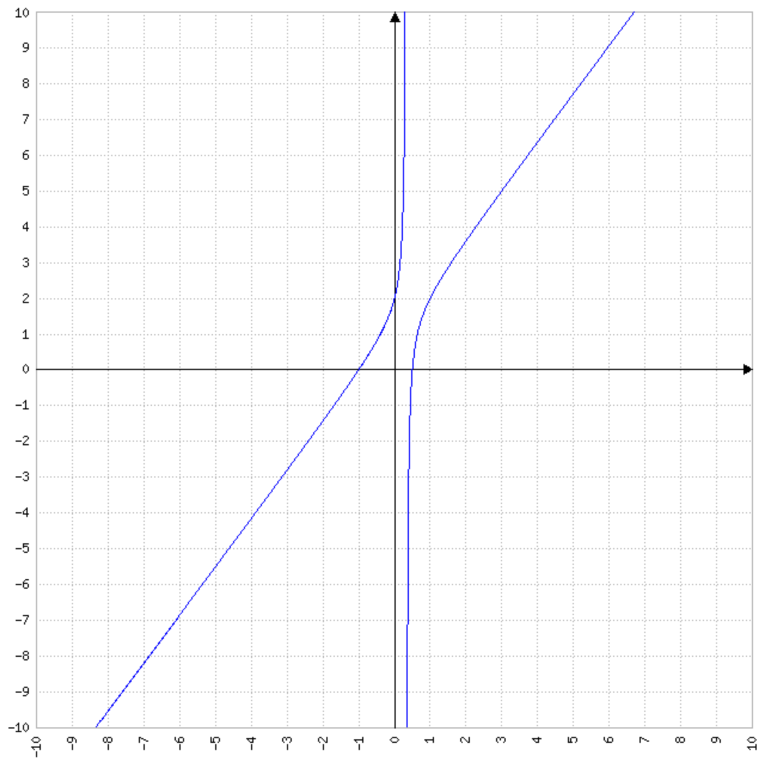
$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^+} g\ (x)= \lim_{x \to \frac{1}{3}^+} \frac{4x^2+2x-2}{3x-1}= \frac{4(\frac{1}{3})^2+2\frac{1}{3}-2}{3(\frac{1}{3})-1}= \frac{4\frac{1}{9}+\frac{2}{3}-2}{1-1}= \frac{\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-2}{0}= \frac{\frac{-8}{9}}{0}= -\infty.$$

Por lo tanto, g (x) tiene un asíntota vertical en x= $\frac{1}{3}$.

$$\lim_{x \to -\infty} g\ (x)= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2+2x-2}{3x-1}= -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} g\ (x)= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+2x-2}{3x-1}= +\infty.$$

Por lo tanto, g (x) no tiene asíntotas horizontales.



(c) $h\ (x)= \frac{x-2}{x^2-4x+4}$.

$$x_1,\ x_2= \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4*1*4}}{2*1}$$
$$x_1,\ x_2= \frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}$$
$$x_1,\ x_2= \frac{4\pm\sqrt{0}}{2}$$
$$x_1,\ x_2= \frac{4\pm0}{2}$$

$x_1 = \frac{4+0}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

$x_2 = \frac{4-0}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

h (x)= $\frac{x-2}{(x-2)^2}$

h (x)= $\frac{1}{x-2}$

$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = -\infty.$

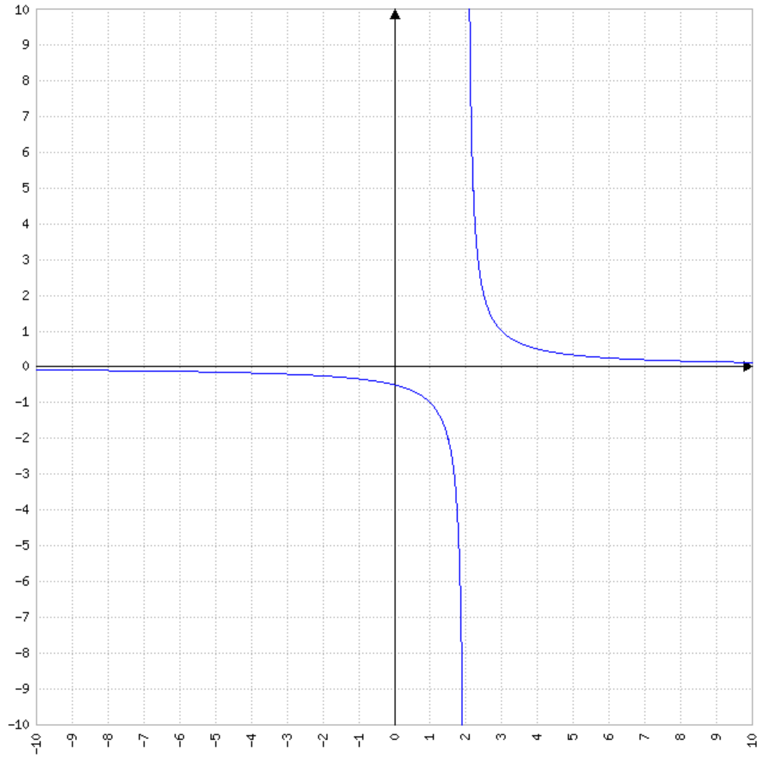
$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = +\infty.$

Por lo tanto, h (x) tiene un asíntota vertical en x= 2.

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0.$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0.$

Por lo tanto, h (x) tiene un asíntota horizontal en y= 0.



(d) *k (x)*= $\begin{cases} \frac{x}{x^2-1}, si\ x < 2 \\ 3x^3 - 2x, si\ x \geq 2 \end{cases}.$

$\lim_{x \to -1^-} k\ (x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{(-1)^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = -\infty.$
$\lim_{x \to -1^+} k\ (x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{(-1)^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = +\infty.$

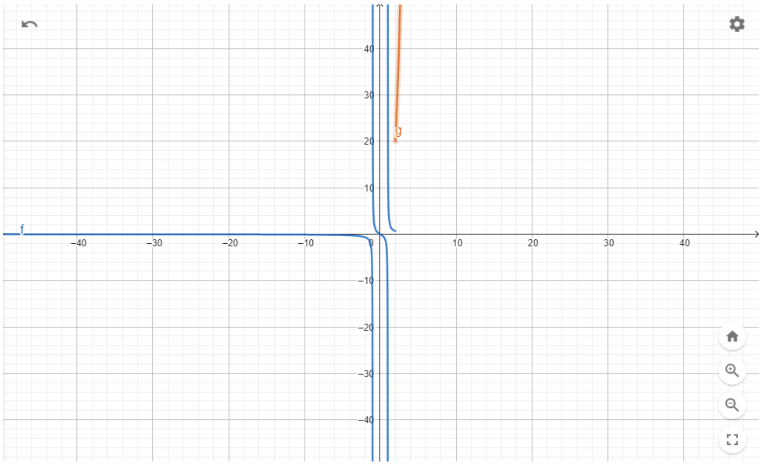
$\lim_{x \to 1^-} k\ (x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{1^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = -\infty.$
$\lim_{x \to 1^+} k\ (x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{1^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = +\infty.$

Por lo tanto, k (x) tiene asíntotas verticales en x= -1 y x= 1.

$\lim_{x \to -\infty} k\ (x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$

$\lim_{x \to +\infty} k\ (x) = \lim_{x \to +\infty} 3x^3 - 2x = +\infty.$

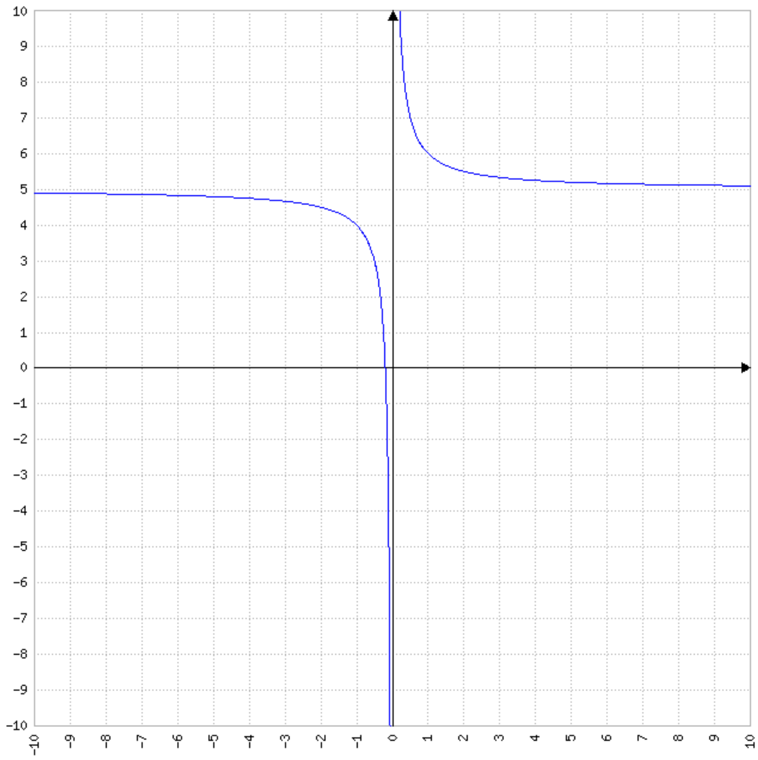
Por lo tanto, k (x) tiene un asíntota horizontal en y= 0.



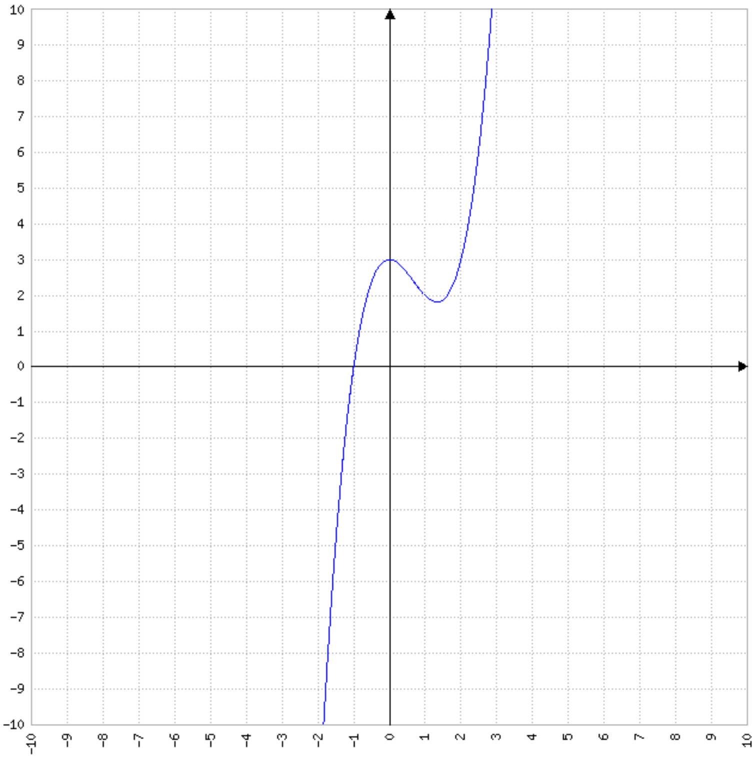
Ejercicio 8.

Utilizar GeoGebra para verificar, gráficamente, el comportamiento de las funciones de los Ejemplos (11) y (15).

Ejemplo 11:



Ejemplo 15:



Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 3: Continuidad de una Función.

Ejercicio 1.

Determinar si las siguientes funciones son continuas en los valores indicados. Clasificar las discontinuidades, si las hay. Representar, gráficamente, cada función y verificar la conclusión obtenida.

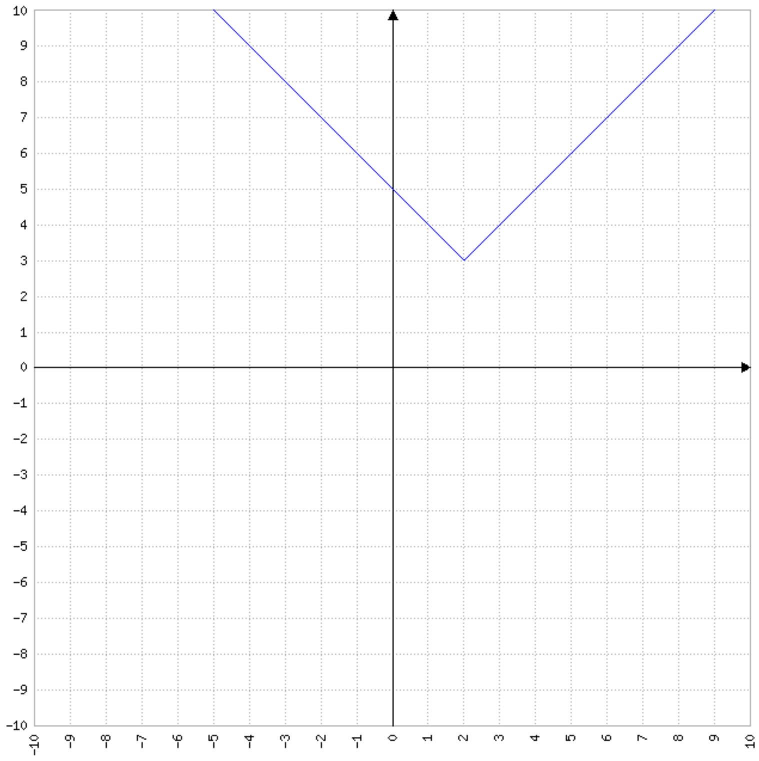
(a) *f (x)=* $|x-2|$ *+ 3 en x= 2.*

f (2)= $|2-2|$ + 3
f (2)= $|0|$ + 3
f (2)= 0 + 3
f (2)= 3.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} |x-2| + 3$
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -(x-2) + 3$
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -x + 2 + 3$
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -x + 5$= -2 + 5= 3.

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} |x-2| + 3$
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x - 2 + 3$
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x + 1$= 2 + 1= 3.

Por lo tanto, ya que f (2)= $\lim_{x \to 2} f(x)$= 3, f (x) es continua en x= 2.



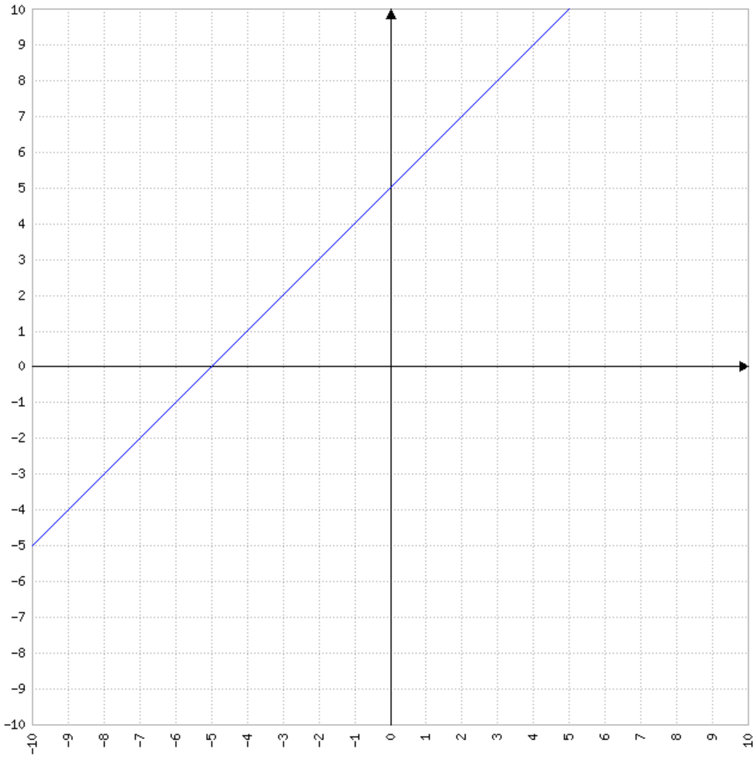
(b) *g (x)=* $\frac{x^2-25}{x-5}$ *en x= 5.*

x= 5 $\notin Dom_g$.

$\lim_{x \to 5^-} g\ (x)= \lim_{x \to 5^-} \frac{x^2-25}{x-5}= \frac{5^2-25}{5-5}= \frac{25-25}{0}= (\frac{0}{0})$.
$\lim_{x \to 5^-} g\ (x)= \lim_{x \to 5^-} \frac{(x-5)^2}{x-5}$
$\lim_{x \to 5^-} g\ (x)= \lim_{x \to 5^-} x - 5$= 5 - 5= 0.

$\lim_{x \to 5^+} g\ (x)= \lim_{x \to 5^+} \frac{x^2-25}{x-5}= \frac{5^2-25}{5-5}= \frac{25-25}{0}= (\frac{0}{0})$.
$\lim_{x \to 5^+} g\ (x)= \lim_{x \to 5^+} \frac{(x-5)^2}{x-5}$
$\lim_{x \to 5^+} g\ (x)= \lim_{x \to 5^+} x - 5$= 5 - 5= 0.

Por lo tanto, ya que x= 5 $\notin Dom_g$ y, entonces, ∄ g (5), pero $\lim_{x \to 5} g\ (x)$= 0, g (x) es discontinua evitable en x= 5.



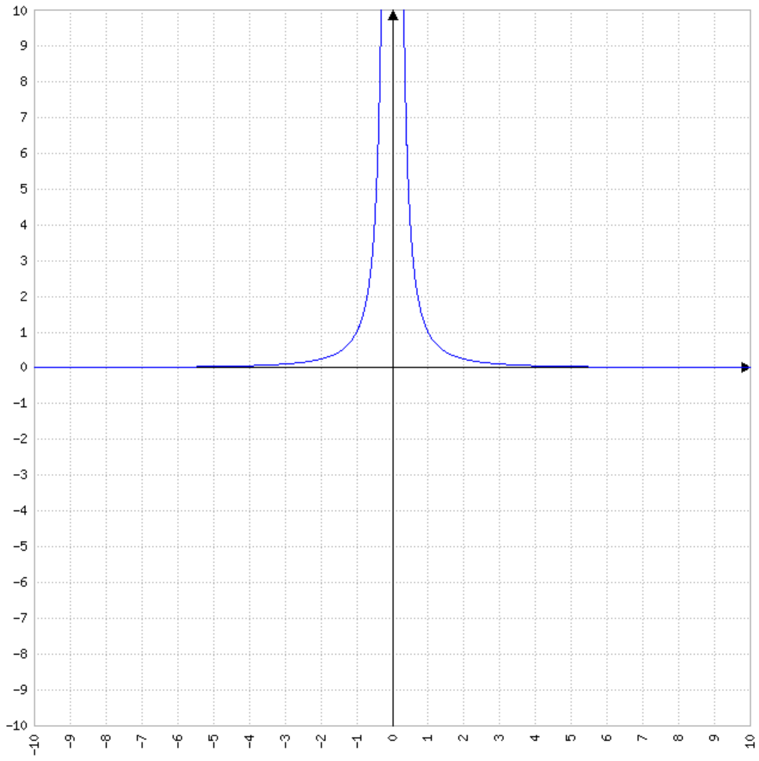
(c) *h (x)=* $\begin{cases} \frac{1}{x^2}, si\ x \neq 0 \\ 0, si\ x = 0 \end{cases}$ *en x= 0.*

h (0)= 0.

$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = +\infty.$

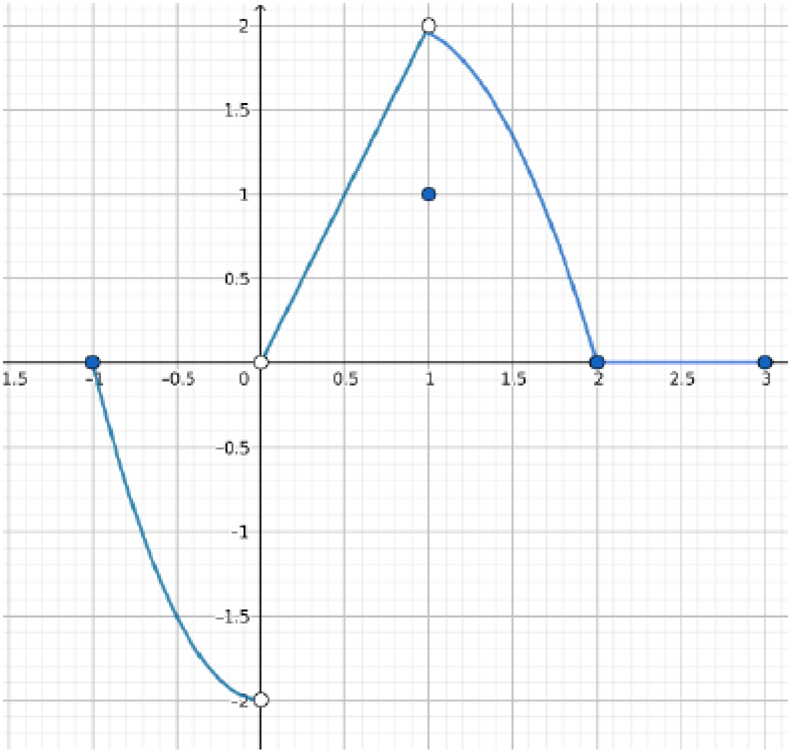
$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = +\infty.$

Por lo tanto, ya que $\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \to 0} h(x)$, h (x) es discontinua inevitable en x= 0.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−10
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Ejercicio 2.

A partir de la siguiente gráfica de f (x):



Responder:

(a) *¿Existe f (-1)?*

Sí, f (-1)= 0.

(b) *¿Existe* $\lim_{x \to -1^+} f(x)$*?*

Sí, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$.

(c) *¿ f (-1)=* $\lim_{x \to -1^+} f(x)$*?*

Sí, f (-1)= $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$.

(d) *¿Existe f (0)?*

No, ∄ f (0).

(e) *¿Existe* $\lim_{x \to 0} f\ (x)$*?*

No, ∄ $\lim_{x \to 0} f\ (x)$.

(f) *¿f es continua en x= 0?*

No, f no es continua en x= 0.

(g) *¿Existe f (1)?*

Sí, f (1)= 1.

(h) *¿ Existe* $\lim_{x \to 1} f\ (x)$*?*

Sí, $\lim_{x \to 1} f\ (x)$= 2.

(i) *¿f es continua en x= 1?*

No, f no es continua en x= 1.

(j) *¿f es continua en x= 2?*

Sí, f es continua en x= 2.

(k) *¿f es continua en x= 3?*

Sí, f es continua en x= 3.

Ejercicio 3.

Dada la siguiente función, decidir si es continua en x= -1 y en x= 1:

$f(x)= \begin{cases} -2x+1, si\ x \leq -1 \\ 1, si -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, si\ x > 1 \end{cases}$.

f (-1)= -2 (-1) + 1
f (-1)= 2 + 1
f (-1)= 3.

$\lim_{x \to -1^-} f(x)= \lim_{x \to -1^-} -2x+1$= -2 (-1) + 1= 2 + 1= 3.

$\lim_{x \to -1^+} f(x)= \lim_{x \to -1^+} 1$= 1.

Por lo tanto, ya que $\lim_{x \to -1^-} f(x)= \lim_{x \to -1^+} f(x)$ y, por lo tanto, $\nexists \lim_{x \to -1} f(x)$, f (x) es discontinua inevitable en x= -1.

f (1)= 1.

$\lim_{x \to 1^-} f(x)= \lim_{x \to 1^-} 1$= 1.

$\lim_{x \to 1^+} f(x)= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x}= \frac{1}{1}$= 1.

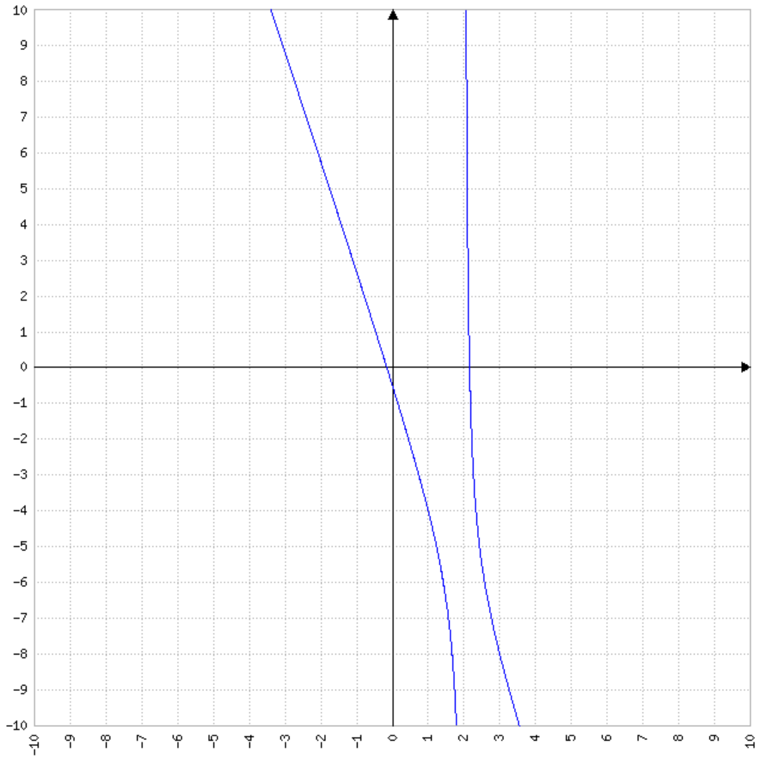
Por lo tanto, ya que f (1)= $\lim_{x \to 1} f(x)$= 1, f (x) es continua en x= 1.

Ejercicio 4.

Decidir en qué conjuntos son continuas las siguientes funciones:

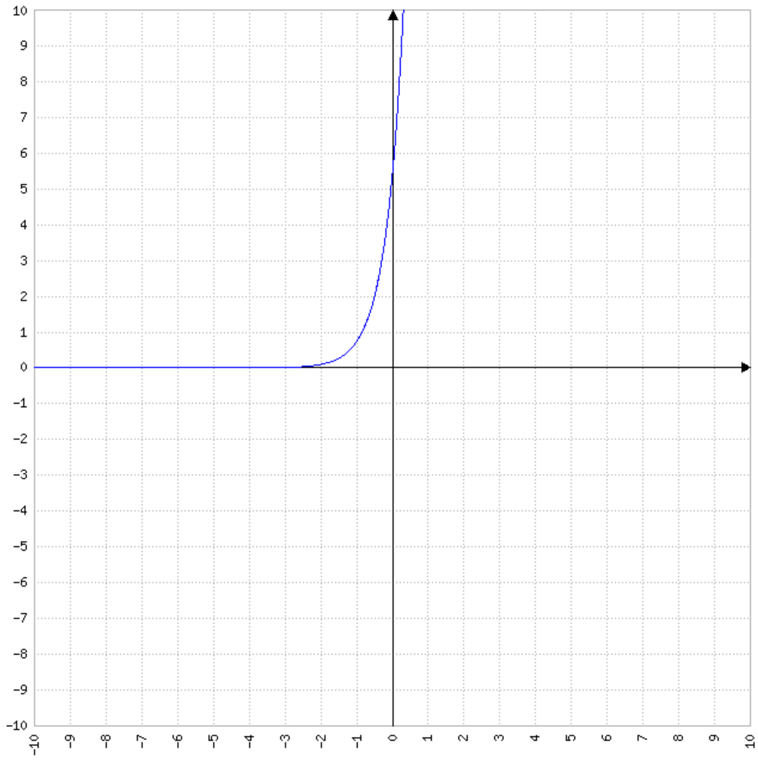
(a) $f(x) = \frac{1}{x-2} - 3x$.

f (x) es continua en $\mathbb{R}$ - {2}.



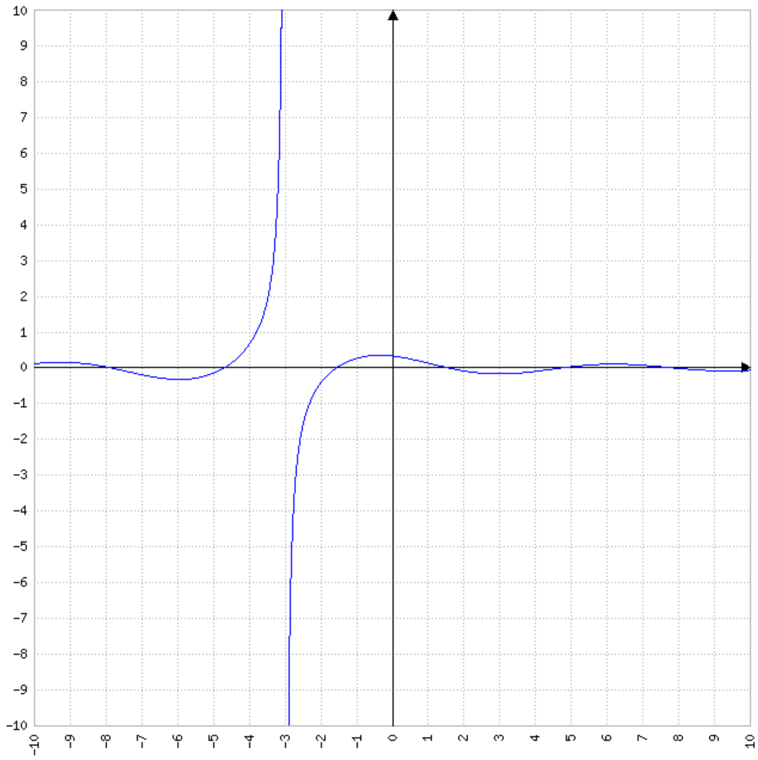
(b) $g(x) = 2e^{2x+1}$.

g (x) es continua en $\mathbb{R}$.



(c) $h(x)=\frac{\cos x}{x+3}$.

h (x) es continua en $\mathbb{R}$ - {-3}.



Ejercicio 5.

Para qué valor de k, g (x) resulta continua en $\mathbb{R}$.

$g(x)= \begin{cases} -x, si\ x > -2 \\ kx^2, si\ x \leq -2 \end{cases}$.

f (-2)= k $(-2)^2$
f (-2)= 4k.

$\lim_{x\to -2^-} g(x)= \lim_{x\to -2^-} kx^2$= k $(-2)^2$= 4k.

$\lim_{x\to -2^+} g(x)= \lim_{x\to -2^+} -x$= -(-2)= 2.

$\lim_{x\to -2^-} g(x)= \lim_{x\to -2^+} g(x)$
4k= 2
k= $\frac{2}{4}$
k= $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, para k= $\frac{1}{2}$, g (x) resulta continua en $\mathbb{R}$, ya que g (-2)= $\lim_{x\to -2} g(x)$= 2 y, por lo tanto, g (x) es continua en x= -2 y, además, g (x) es continua a la izquierda y a la derecha de x= -2 (ya que toda función polinómica es continua en $\mathbb{R}$).

Ejercicio 6.

Decidir si la siguiente función es continua en [-2, 5]:

$h\ (x)= \begin{cases} x^2 - 3, si\ x \geq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3}, si\ x < 3 \end{cases}.$

h (3)= 3^2 - 3
h (3)= 9 - 3
h (3)= 6.

$\lim_{x \to 3^-} h\ (x)= \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3}= \frac{3^2-9}{3-3}= \frac{9-9}{0}= (\frac{0}{0})$.
$\lim_{x \to 3^-} h\ (x)= \lim_{x \to 3^-} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$
$\lim_{x \to 3^-} h\ (x)= \lim_{x \to 3^-} x + 3$= 3 + 3= 6.

$\lim_{x \to 3^+} h\ (x)= \lim_{x \to 3^+} x^2 - 3$= 3^2 - 3= 9 - 3= 6.

h (-2)= $\frac{(-2)^2-9}{-2-3}$
h (-2)= $\frac{4-9}{-5}$
h (-2)= $\frac{-5}{-5}$
h (-2)= 1.

$\lim_{x \to -2^+} h\ (x)= \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2-9}{x-3}= \frac{(-2)^2-9}{-2-3}= \frac{4-9}{-5}= \frac{-5}{-5}$= 1.

h (5)= 5^2 - 3
h (5)= 25 - 3
h (5)= 22.

$\lim_{x \to 5^-} h\ (x)= \lim_{x \to 5^-} x^2 - 3$= 5^2 - 3= 25 - 3= 22.

Por lo tanto, ya que h (x) es continua en todos los puntos interiores (-2, 5), continua por la derecha en x= -2 y continua por la izquierda en x= 5, h (x) es continua en [-2, 5].

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 4: Derivadas.

Ejercicio 1.

Realizar la derivada por definición de f (x)= x^3 *+ 1 en x= 0.*

f´ (0)= $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

f´ (0)= $\lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^3+1-0^3-1}{h}$

f´ (0)= $\lim_{h \to 0} \frac{h^3+1-0-1}{h}$

f´ (0)= $\lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h}$

f´ (0)= $\lim_{h \to 0} h^2$= 0^2= 0.

Ejercicio 2.

Obtener la derivada por definición de la función f (x)= 2x, para todo valor de x.

f´ (x)= $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
f´ (x)= $\lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)-2x}{h}$
f´ (x)= $\lim_{h \to 0} \frac{2x+2h-2x}{h}$
f´ (x)= $\lim_{h \to 0} \frac{2h}{h}$
f´ (x)= $\lim_{h \to 0} 2$= 2.

Ejercicio 3.

Hallar la derivada de f (x) en x= 0:

f (x)= $\begin{cases} x^2, si\ x \leq 0 \\ -x^2, si\ x > 0 \end{cases}$.

$f_-^{\prime}$ (x)= $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$= $\lim_{h \to 0^-} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$
$f_-^{\prime}$ (x)= $\lim_{h \to 0^-} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$
$f_-^{\prime}$ (x)= $\lim_{h \to 0^-} \frac{2xh+h^2}{h}$
$f_-^{\prime}$ (x)= $\lim_{h \to 0^-} \frac{h(2x+h)}{h}$
$f_-^{\prime}$ (x)= $\lim_{h \to 0^-} 2x + h$= 2x + 0= 2x.

$f_+^{\prime}$ (x)= $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$= $\lim_{h \to 0^-} \frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h}$
$f_+^{\prime}$ (x)= $\lim_{h \to 0^-} \frac{-x^2-2xh-h^2+x^2}{h}$
$f_+^{\prime}$ (x)= $\lim_{h \to 0^-} \frac{-2xh-h^2}{h}$
$f_+^{\prime}$ (x)= $\lim_{h \to 0^-} \frac{h(-2x-h)}{h}$
$f_+^{\prime}$ (x)= $\lim_{h \to 0^-} -2x - h$= -2x - 0= -2x.

$f_-^{\prime}$ (0)= 2 * 0
$f_-^{\prime}$ (0)= 0.

$f_+^{\prime}$ (0)= -2 * 0
$f_+^{\prime}$ (0)= 0.

f´ (0)= 0.

Por lo tanto, la derivada de f (x) en x= 0 es 0.

Juan Menduiña

Ejercicio 4.

Derivar las siguientes funciones utilizando reglas:

(a) *f (x)=* $5x^3 + 2x + 8$.

f´ (x)= $15x^2 + 2$.

(b) *f (x)=* $x^{\frac{1}{3}} + 5x^8 - \sqrt{x}$.

f´ (x)= $\frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} + 40x^7 - \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}}$.

(c) *f (x)=* $\frac{\pi x^{\frac{2}{3}}}{x+1}$.

f´ (x)= $\frac{\frac{2}{3}\pi x^{\frac{-1}{3}}(x+1)-\pi x^{\frac{2}{3}}*1}{(x+1)^2}$

f´ (x)= $\frac{\frac{2}{3}\pi x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\pi x^{\frac{-1}{3}}-\pi x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^2}$

f´ (x)= $\frac{\frac{-1}{3}\pi x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\pi x^{\frac{-1}{3}}}{(x+1)^2}$

f´ (x)= $\frac{\frac{\pi}{3}(-x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{-1}{3}})}{(x+1)^2}$.

(d) *f (x)=* $\frac{2x}{4x+1}$.

f´ (x)= $\frac{2(4x+1)-2x*4}{(4x+1)^2}$

f´ (x)= $\frac{8x+2-8x}{(4x+1)^2}$

f´ (x)= $\frac{2}{(4x+1)^2}$.

(e) *f (x)=* $(x^2 - 2)(x + 4)$.

f´ (x)= 2x (x + 4) + (x^2 - 2) * 1

f´ (x)= $2x^2$ + 8x + x^2 - 2

f´ (x)= $3x^2$ + 8x - 2.

(f) *f (x)= ln (x - 4) + 1.*

f´ (x)= $\frac{1}{x-4}$ * 1
f´ (x)= $\frac{1}{x-4}$.

(g) *f (x)=* e^{x^2+1} *- x.*

f´ (x)= e^{x^2+1} 2x - 1
f´ (x)= 2xe^{x^2+1} - 1.

(h) *f (x)=* $\sqrt{x^4+2x}$.

f´ (x)= $\frac{1}{2}$ $(x^4+2x)^{\frac{-1}{2}}$ (4x^3 + 2)
f´ (x)= $2x^3$ $(x^4+2x)^{\frac{-1}{2}}$ + $(x^4+2x)^{\frac{-1}{2}}$
f´ (x)= $(x^4+2x)^{\frac{-1}{2}}$ (2x^3 + 1).

(i) *f (x)= cos (x + 1) -* x^2.

f´ (x)= -sen (x + 1) * 1 - 2x
f´ (x)= -sen (x + 1) - 2x.

(j) *f (x)=* $\frac{sen\, x}{e^x}$.

f´ (x)= $\frac{(\cos x)e^x-(sen\, x)e^x*1}{(e^x)^2}$
f´ (x)= $\frac{e^x(\cos x-sen\, x)}{e^{2x}}$
f´ (x)= $\frac{\cos x-sen\, x}{e^x}$.

(k) *f (x)= tan x.*

f´ (x)= $\frac{\cos x*\cos x-sen\, x(-sen\, x)}{(\cos x)^2}$
f´ (x)= $\frac{(\cos x)^2+(sen\, x)^2}{(\cos x)^2}$

f´ (x)= $\frac{1}{(\cos x)^2}$
f´ (x)= $(\sec x)^2$.

(l) *f (x)= ln (3 - x) cos* x^3.

f´ (x)= $\frac{1}{3-x}$ (-1) cos x^3 + ln (3 - x) (-sen x^3) $3x^2$
f´ (x)= $\frac{-\cos x^3}{3-x}$ - $3x^2$ ln (3 - x) sen x^3.

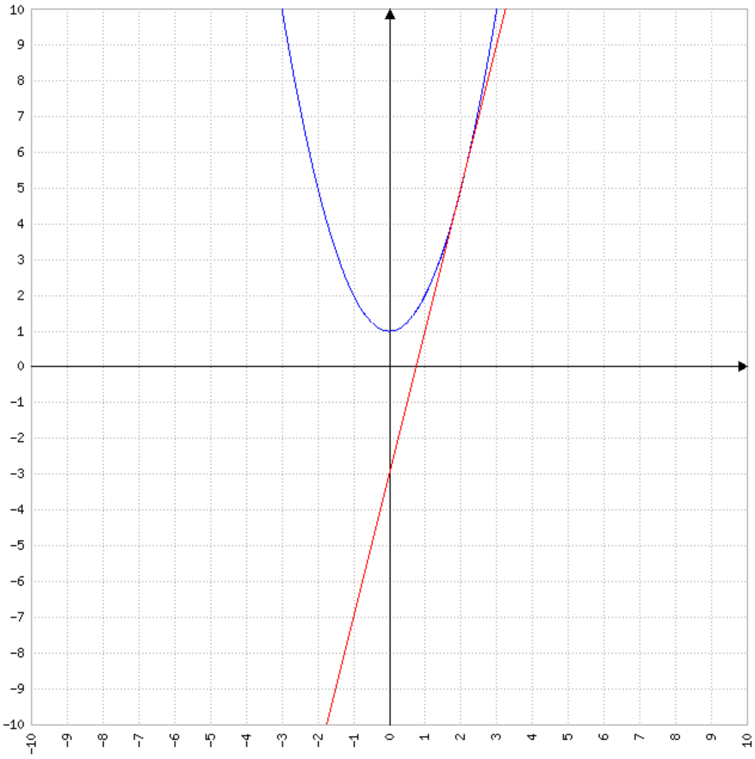
Ejercicio 5.

Encontrar la recta tangente a f (x)= x^2 *+ 1 en el punto (2, 5).*

f´ (x)= 2x.

f´ (2)= 2 * 2
f´ (2)= 4.

y - 5= 4 (x - 2)
y - 5= 4x - 8
y= 4x - 8 + 5
y= 4x - 3.



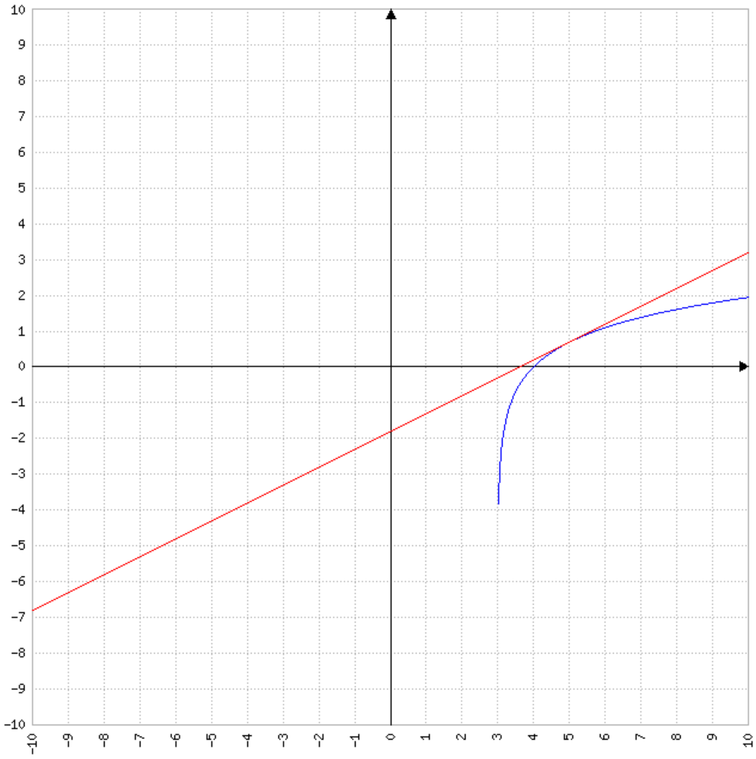
Ejercicio 6.

Encontrar la recta tangente a h (x)= ln (x - 3) en el punto (5, ln 2).

h´ (x)= $\frac{1}{x-3}$.

h´ (5)= $\frac{1}{5-3}$
h´ (5)= $\frac{1}{2}$.

y - ln 2= $\frac{1}{2}$ (x - 5)
y - ln 2= $\frac{1}{2}$ x - $\frac{5}{2}$
y= $\frac{1}{2}$ x - $\frac{5}{2}$ + ln 2.



Ejercicio 7.

Determinar el o los puntos y la o las rectas tangentes con pendiente m= 5 de la función f (x)= x^3 + 2x + 1.

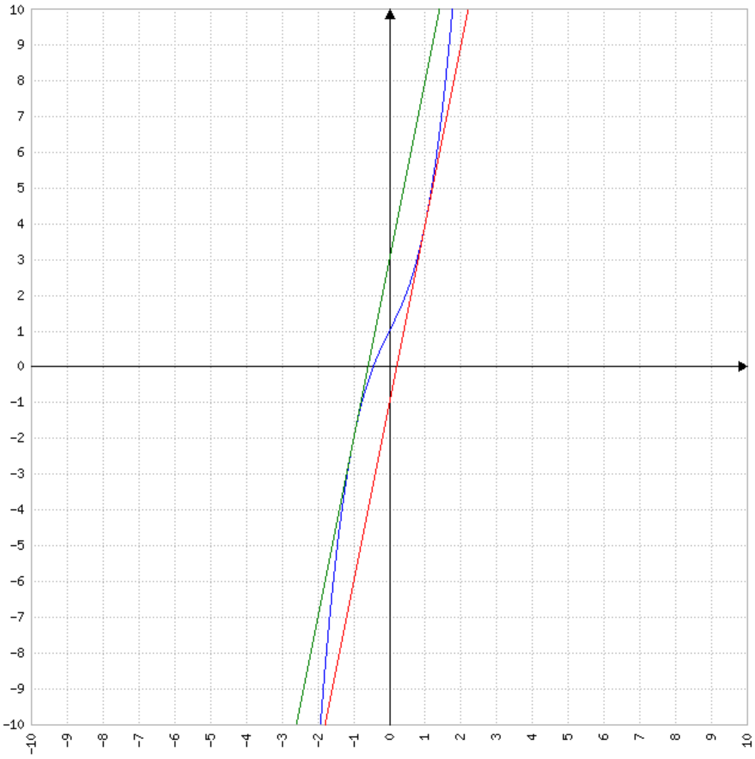
f´ (x)= 5
$3x^2$ + 2= 5
$3x^2$= 5 - 2
$3x^2$= 3
x^2= $\frac{3}{3}$
x^2= 1
$\sqrt{x^2}$= $\sqrt{1}$
$|x|$= 1
x= $\pm$1.

f (1)= 1^3 + 2 * 1 + 1
f (1)= 1 + 2 + 1
f (1)= 4.

f (-1)= $(-1)^3$ + 2 (-1) + 1
f (-1)= -1 - 2 + 1
f (-1)= -2.

y - 4= f´ (1) (x - 1)
y - 4= 5 (x - 1)
y - 4= 5x - 5
y= 5x - 5 + 4
y= 5x - 1.

y - (-2)= f´ (-1) (x + 1)
y + 2= 5 (x + 1)
y + 2= 5x + 5
y= 5x + 5 - 2
y= 5x + 3.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

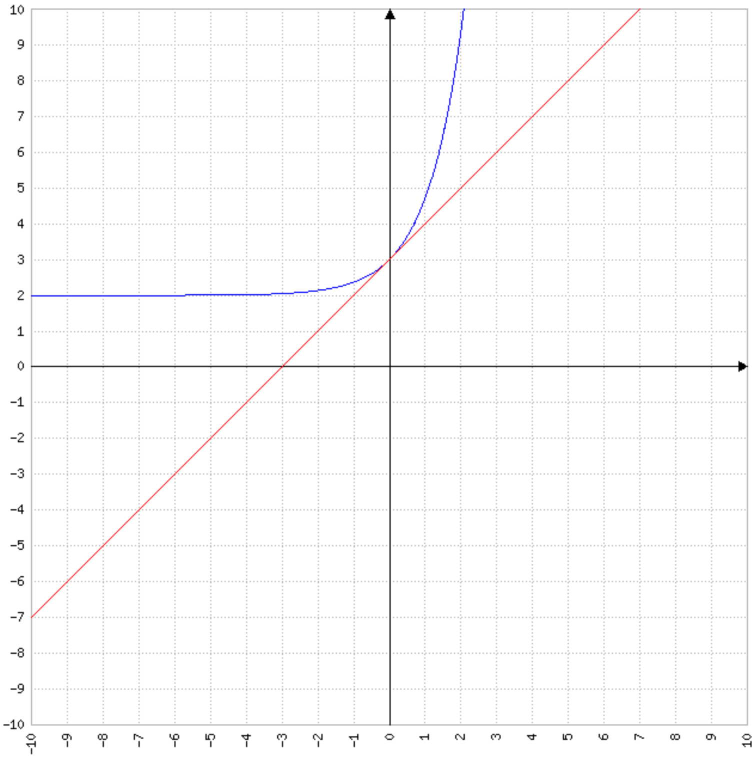
Ejercicio 8.

Determinar el punto y la recta tangente con pendiente m= 1 de la función f (x)= e^x + 2.

f´ (x)= 1
e^x= 1
ln e^x= ln 1
x ln e= 0
x * 1= 0
x= 0.

f (0)= e^0 + 2
f (0)= 1 + 2
f (0)= 3.

y - 3= 1 (x - 0)
y - 3= 1x
y - 3= x
y= x + 3.



Ejercicio 9.

Hallar f´´ (x) de las funciones (a), (b), (d), (f), (k) del Ejercicio 4.

(a) *f (x)=* $5x^3$ *+ 2x + 8.*

f´ (x)= $15x^2$ + 2.

f´´ (x)= 30x.

(b) *f (x)=* $x^{\frac{1}{3}}$ *+* $5x^8$ *-* $\sqrt{x}$*.*

f´ (x)= $\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$ + $40x^7$ - $\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$.

f´´ (x)= $\frac{-2}{3}\frac{1}{3}x^{\frac{-5}{3}}$ + $280x^6$ - $\frac{1}{2}(\frac{-1}{2})x^{\frac{-3}{2}}$
f´´ (x)= $\frac{-2}{9}x^{\frac{-5}{3}}$ + $280x^6$ + $\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{2}}$.

(d) *f (x)=* $\frac{2x}{4x+1}$.

f´ (x)= $\frac{2(4x+1)-2x*4}{(4x+1)^2}$
f´ (x)= $\frac{8x+2-8x}{(4x+1)^2}$
f´ (x)= $\frac{2}{(4x+1)^2}$.

f´´ (x)= $\frac{0(4x+1)^2-2*2(4x+1)*4}{[(4x+1)^2]^2}$
f´´ (x)= $\frac{0-16(4x+1)}{(4x+1)^4}$
f´´ (x)= $\frac{-16(4x+1)}{(4x+1)^4}$
f´´ (x)= $\frac{-16}{(4x+1)^3}$.

(f) *f (x)= ln (x - 4) + 1.*

f´ (x)= $\frac{1}{x-4}$ * 1
f´ (x)= $\frac{1}{x-4}$.

f´´ (x)= $\frac{0(x-4)-1*1}{(x-4)^2}$
f´´ (x)= $\frac{-1}{(x-4)^2}$.

(k) *f (x)= tan x.*

f´ (x)= $\frac{\cos x * \cos x - sen\ x(-sen\ x)}{(\cos x)^2}$
f´ (x)= $\frac{(\cos x)^2 + (sen\ x)^2}{(\cos x)^2}$
f´ (x)= $\frac{1}{(\cos x)^2}$
f´ (x)= $(\sec x)^2$.

f´´ (x)= -2 $(\cos x)^{-3}$ (-sen x)
f´´ (x)= 2 sen x $(\cos x)^{-3}$
f´´ (x)= 2 sen x $\frac{1}{(\cos x)^3}$
f´´ (x)= 2 sen x $(\sec x)^3$.

Ejercicio 10.

Hallar las derivadas de todos los órdenes de f (x)= x^5 *- 3*x^3 *- 3x - 2.*

f´ (x)= 5x^4 - 9x^2 - 3.

f´´ (x)= 20x^3 - 18x.

f´´´ (x)= 60x^2 - 18.

f´´´´ (x)= 120x.

f´´´´´ (x)= 120.

f´´´´´´ (x)= 0.

Ejercicio 11.

Determinar todos los puntos críticos para cada función:

(a) $f(x) = 6x^2 - x^3$.

$Dom_f = \mathbb{R}$.

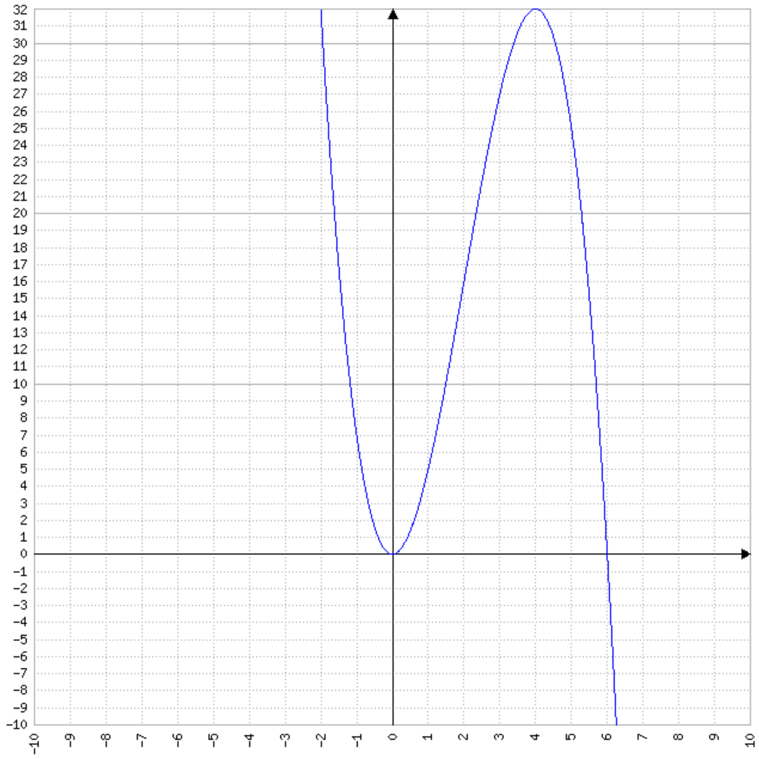
f´ (x)= 12x - $3x^2$.

$\exists$ f´ (x) $\forall$ x $\in$ Dom_f.

f´ (x)= 0
12x - $3x^2$= 0
x (12 - 3x)= 0.

x_1= 0; x_2= 4.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en x_1= 0 y x_2= 4.



(b) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

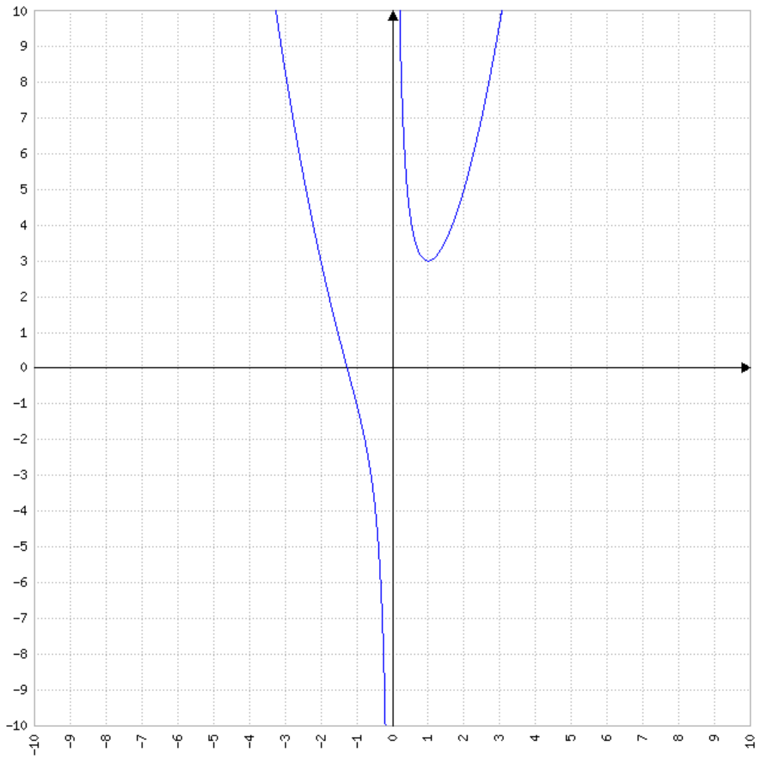
$Dom_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

f´ (x)= 2x - $\frac{2}{x^2}$.

∃ f´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´ (x)= 0
2x - $\frac{2}{x^2}$= 0
2x= $\frac{2}{x^2}$
xx^2= $\frac{2}{2}$
x^3= 1
x= $\sqrt[3]{1}$
x= 1.

Por lo tanto, f (x) tiene un punto crítico en x= 1.



(c) *f (x)*= $\frac{-x^2}{x-2}$.

Dom_f= ℝ - {2}.

f´ (x)= $\frac{-2x(x-2)-(-x^2)}{(x-2)^2}$
f´ (x)= $\frac{-2x^2+4x+x^2}{(x-2)^2}$
f´ (x)= $\frac{-x^2+4x}{(x-2)^2}$

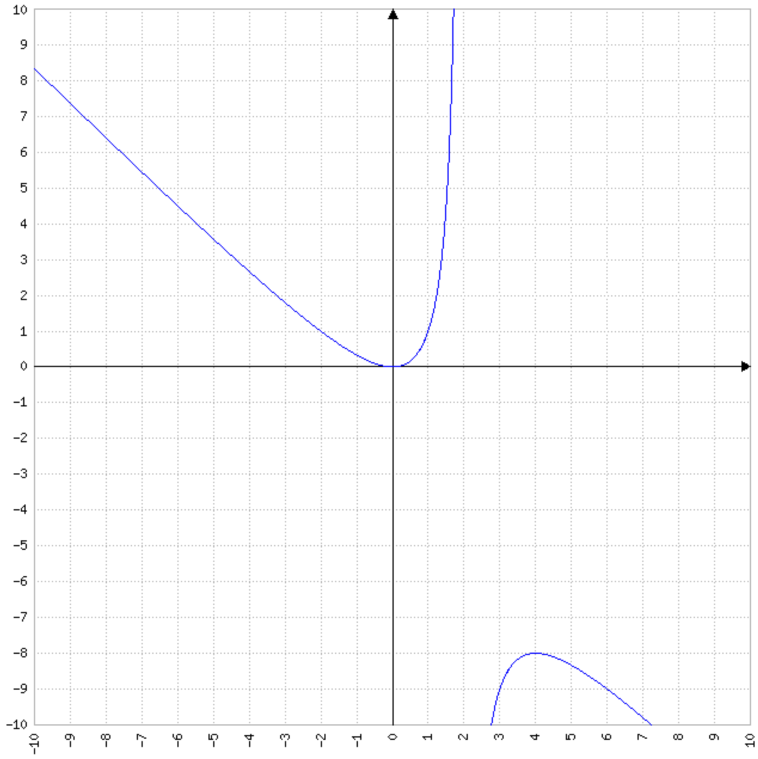
f´ (x)= $\frac{x(4-x)}{(x-2)^2}$.

∃ f´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´ (x)= 0
$\frac{x(4-x)}{(x-2)^2}$= 0
x (4 - x)= 0 $(x-2)^2$
x (4 - x)= 0.

x_1= 0; x_2= 4.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en x_1= 0 y x_2= 4.



(d) *f (x)*= $\sqrt{2x-x^2}$.

Dom_f= [0, 2].

f´ (x)= $\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}$ (2 - 2x)
f´ (x)= $\frac{2(1-x)}{2\sqrt{2x-x^2}}$
f´ (x)= $\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

∄ f´ (x) para x= 2 ∈ Dom_f.

f´ (x)= 0

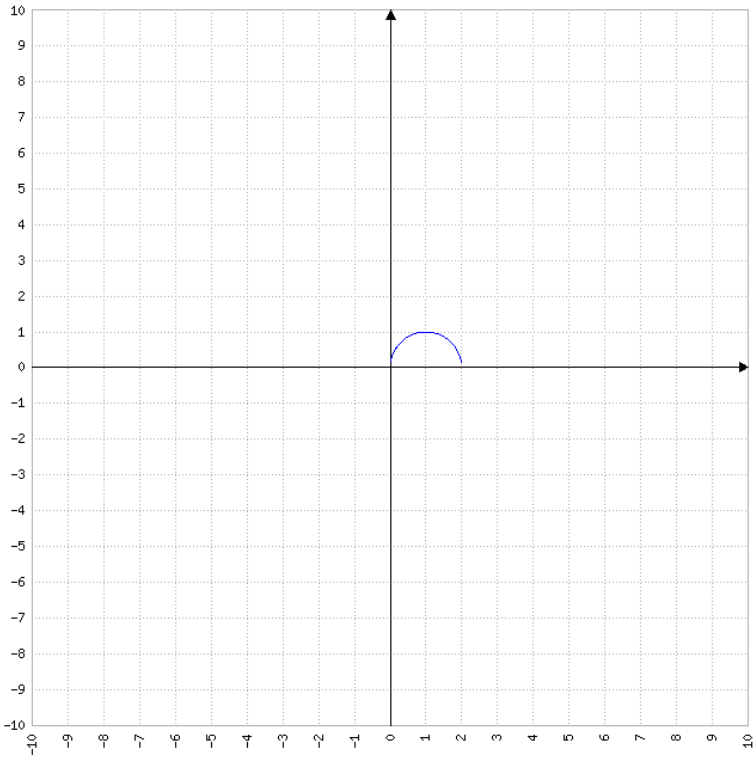
$\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$= 0

1 - x= 0 $\sqrt{2x-x^2}$

1 - x= 0

x= 1.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en x_1= 1 y x_2= 2.



Ejercicio 12.

Determinar los valores máximo y mínimo absolutos de cada función en el intervalo indicado. Luego, graficar la función e identificar los puntos de la gráfica donde se alcanzan los extremos absolutos.

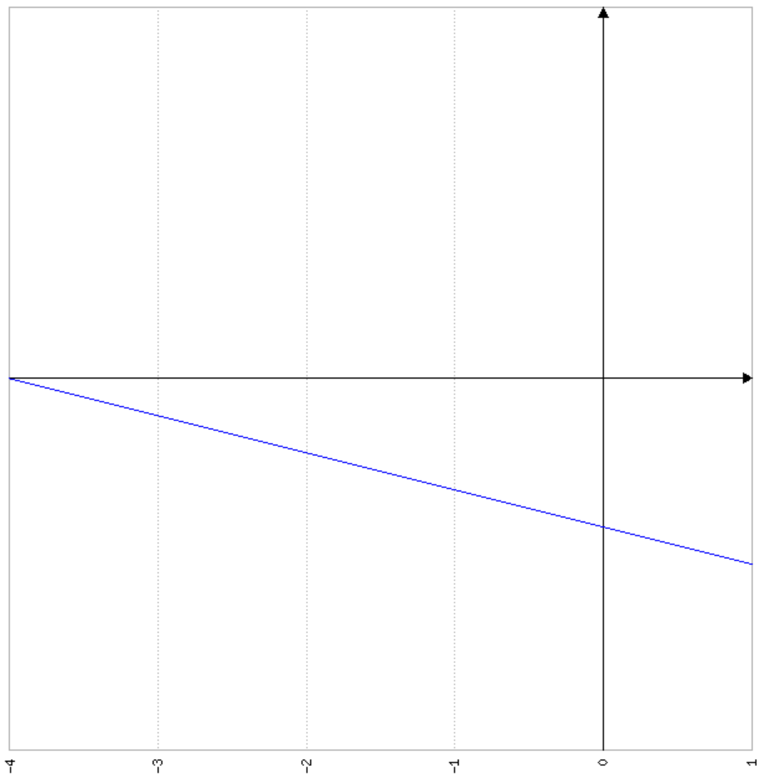
(a) *f (x)= -x - 4 en [-4, 1].*

f´ (x)= 0
-1≠ 0.

f (-4)= -(-4) - 4
f (-4)= 4 - 4
f (-4)= 0.

f (1)= -1 - 4
f (1)= -5.

Por lo tanto, los valores máximo y mínimo absolutos de f (x) en el intervalo indicado son (-4, 0) y (1, -5), respectivamente.



(b) *f (x)= 4 - x^2 en [-3, 1].*

f´ (x)= 0
-2x= 0

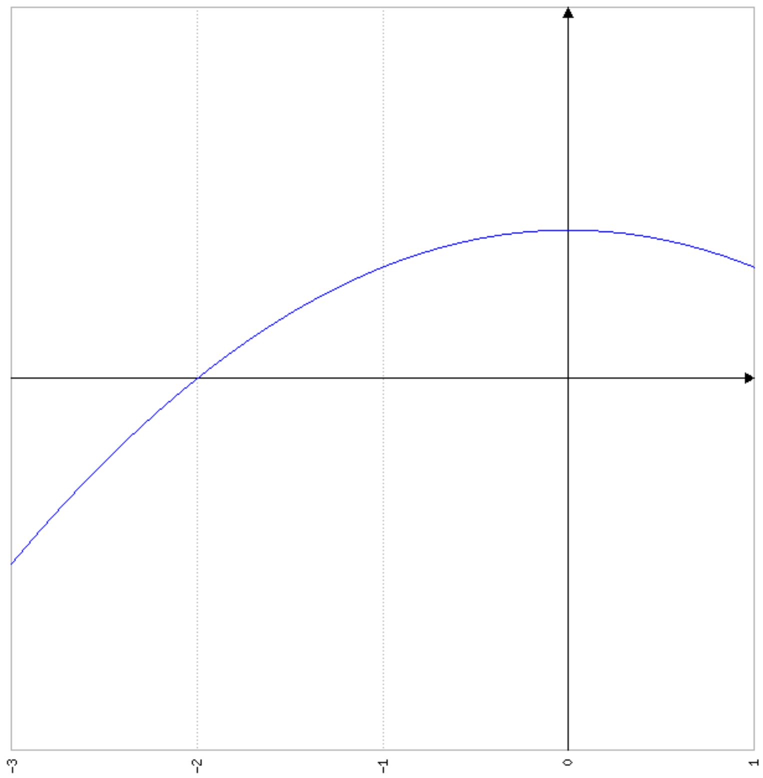
x= $\frac{0}{-2}$
x= 0.

f (-3)= 4 - $(-3)^2$
f (-3)= 4 - 9
f (-3)= -5.

f (0)= 4 - 0^2
f (0)= 4 - 0
f (0)= 4.

f (1)= 4 - 1^2
f (1)= 4 - 1
f (1)= 3.

Por lo tanto, los valores máximo y mínimo absolutos de f (x) en el intervalo indicado son (0, 4) y (-3, -5), respectivamente.



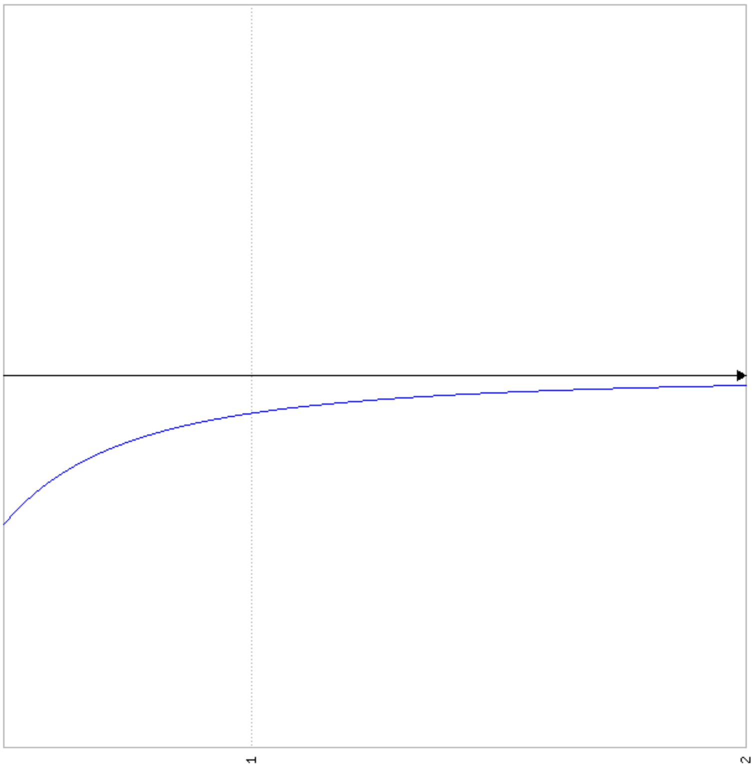
(c) *f (x)=* $\frac{-1}{x^2}$ *en* $[\frac{1}{2}, 2]$.

f´ (x)= 0
$\frac{2}{x^3}$= 0
2= $0x^3$
2≠ 0.

f $(\frac{1}{2})= \frac{-1}{(\frac{1}{2})^2}$
f $(\frac{1}{2})= \frac{-1}{\frac{1}{4}}$
f $(\frac{1}{2})= -4$.

f $(2)= \frac{-1}{2^2}$
f $(2)= \frac{-1}{4}$.

Por lo tanto, los valores máximo y mínimo absolutos de f (x) en el intervalo indicado son $(2, \frac{-1}{4})$ y $(\frac{1}{2}, -4)$, respectivamente.



(d) *f (x)=* $\sqrt{4-x^2}$ *en [-2, 1].*

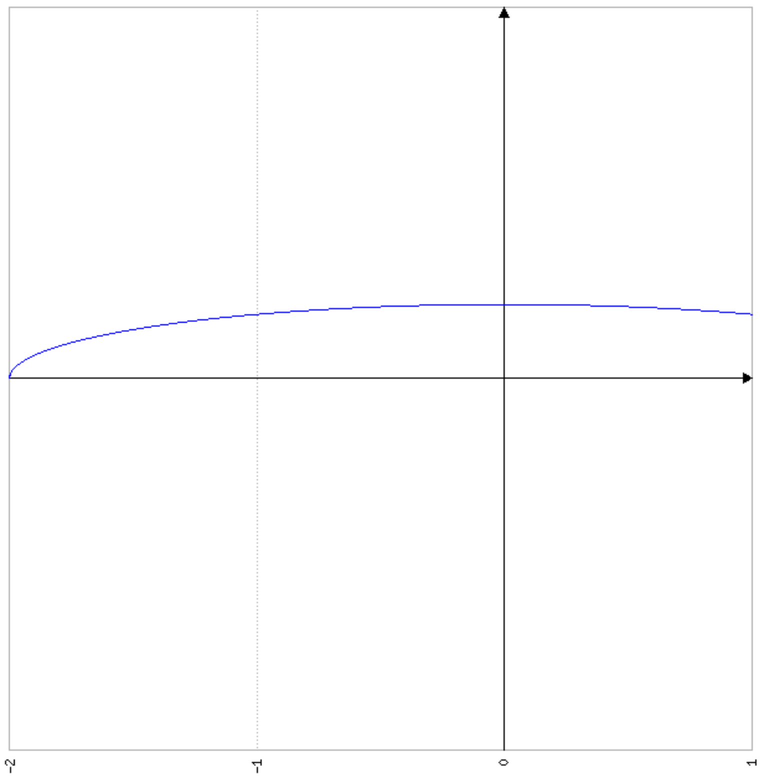
f´ (x)= 0
$\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x)= 0$
$\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}= 0$
$\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}= 0$
-x= 0 $\sqrt{4-x^2}$
-x= 0
x= $\frac{0}{-1}$
x= 0.

f (-2)= $\sqrt{4-(-2)^2}$
f (-2)= $\sqrt{4-4}$
f (-2)= $\sqrt{0}$
f (-2)= 0.

f (0)= $\sqrt{4-0^2}$
f (0)= $\sqrt{4-0}$
f (0)= $\sqrt{4}$
f (0)= 2.

f (1)= $\sqrt{4-1^2}$
f (1)= $\sqrt{4-1}$
f (1)= $\sqrt{3}$.

Por lo tanto, los valores máximo y mínimo absolutos de f (x) en el intervalo indicado son (0, 2) y (-2, 0), respectivamente.



Ejercicio 13.

Para las siguientes funciones, determinar los intervalos de crecimiento/decrecimiento y los puntos máximos y mínimos relativos.

(a) $h(x) = -x^3 + 2x^2$.

$Dom_h = \mathbb{R}$.

$h'(x) = -3x^2 + 4$.

$\exists\ h'(x)\ \forall\ x \in Dom_h$.

$h'(x) = 0$
$-3x^2 + 4x = 0$
$x(-3x + 4) = 0$.

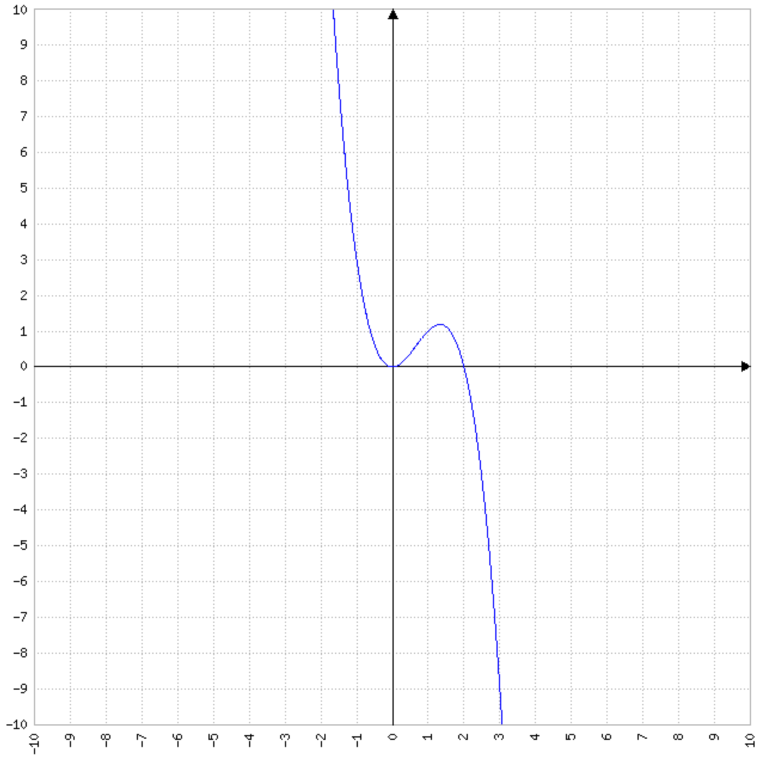
$x_1 = 0$; $x_2 = \frac{4}{3}$.

Intervalo	**$(-\infty, 0)$**	**$x = 0$**	**$(0, \frac{4}{3})$**	**$x = \frac{4}{3}$**	**$(\frac{4}{3}, +\infty)$**
VP	-1	---	1	---	2
$h'(x)$	< 0	0	> 0	0	< 0
h (x)	decreciente	mínimo relativo	creciente	máximo relativo	decreciente

$h(0) = -0^3 + 2 * 0^2$
$h(0) = -0 + 2 * 0$
$h(0) = -0 + 0$
$h(0) = 0$.

$h(\frac{4}{3}) = -(\frac{4}{3})^3 + 2(\frac{4}{3})^2$
$h(\frac{4}{3}) = \frac{-64}{27} + 2\frac{16}{9}$
$h(\frac{4}{3}) = \frac{-64}{27} + \frac{32}{9}$
$h(\frac{4}{3}) = \frac{32}{27}$.

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de h (x) son $(0, \frac{4}{3})$ y $(-\infty, 0) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$, respectivamente, y los puntos máximo y mínimo relativos de esta función son $(\frac{4}{3}, \frac{32}{27})$ y $(0, 0)$, respectivamente.



(b) $g\ (x)= \frac{x^2-3}{x-2}$.

Dom_g= ℝ - {2}.

$g'(x)= \frac{2x(x-2)-(x^2-3)}{(x-2)^2}$
$g'(x)= \frac{2x^2-4x-x^2+3}{(x-2)^2}$
$g'(x)= \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.

$\exists\ g'(x)\ \forall\ x \in Dom_g$.

$g'(x)= 0$
$\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}= 0$
$x^2 - 4x + 3= 0\ (x-2)^2$
$x^2 - 4x + 3= 0$.

$x_1, x_2= \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4*1*3}}{2*1}$
$x_1, x_2= \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{4\pm\sqrt{4}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{4\pm2}{2}$
$x_1= \frac{4+2}{2}= \frac{6}{2}= 3$.

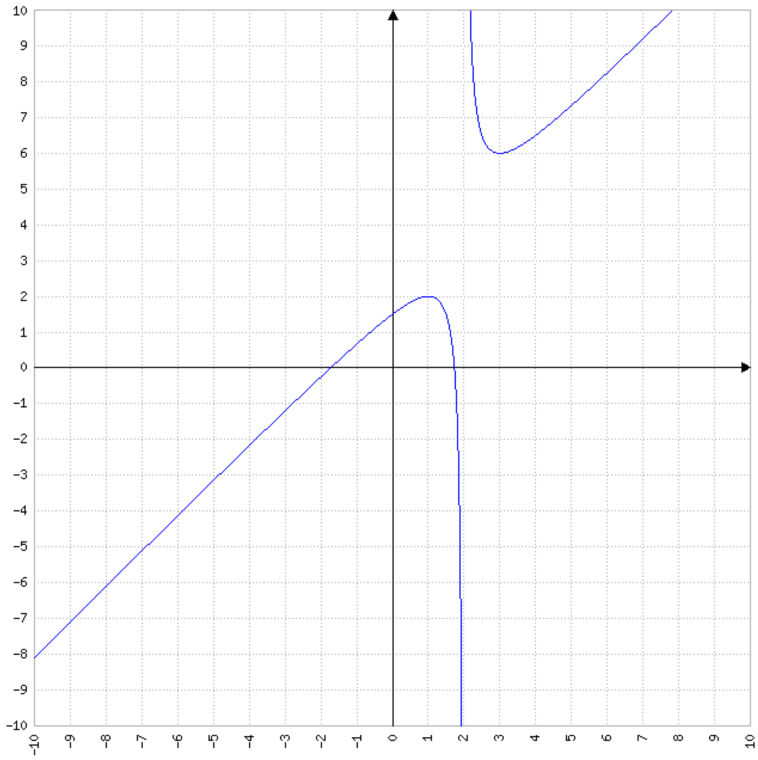
$x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

Intervalo	**(-∞, 1)**	**x= 1**	**(1, 2)**	**(2, 3)**	**x= 3**	**(3, +∞)**
VP	0	---	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	---	2
g´ (x)	> 0	0	< 0	< 0	0	> 0
g (x)	creciente	máximo relativo	decreciente	decreciente	mínimo relativo	creciente

g (1)= $\frac{1^2-3}{1-2}$
g (1)= $\frac{1-3}{-1}$
g (1)= $\frac{-2}{-1}$
g (1)= 2.

g (3)= $\frac{3^2-3}{3-2}$
g (3)= $\frac{9-3}{1}$
g (3)= $\frac{6}{1}$
g (3)= 6.

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de g (x) son (-∞, 1) ∪ (3, +∞) y (1, 2) ∪ (2, 3), respectivamente, y los puntos máximo y mínimo relativos de esta función son (1, 2) y (3, 6), respectivamente.



(c) $f(x)=\frac{x^3}{3x^2+1}$.

$Dom_f=\mathbb{R}$.

f´ (x)= $\frac{3x^2(3x^2+1)-x^3 6x}{(3x^2+1)^2}$
f´ (x)= $\frac{9x^4+3x^2-6x^4}{(3x^2+1)^2}$
f´ (x)= $\frac{3x^4+3x^2}{(3x^2+1)^2}$
f´ (x)= $\frac{3(x^4-x^2)}{(3x^2+1)^2}$.

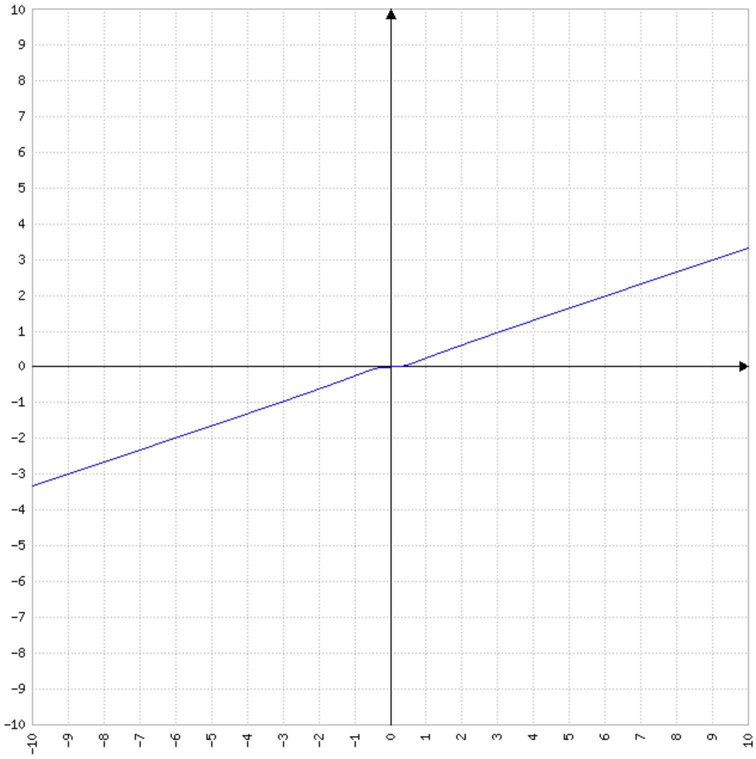
∃ f´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´ (x)= 0
$\frac{3(x^4-x^2)}{(3x^2+1)^2}$= 0
3 (x^4 - x^2)= 0 $(3x^2+1)^2$
3 (x^4 - x^2)= 0
x^4 - x^2= $\frac{0}{3}$
x^4 - x^2= 0
x^2 (x^2 - 1)= 0.

x_1= -1; x_2= 0; x_3= 1.

Intervalo	**(-∞, -1)**	**x= -1**	**(-1, 0)**	**x= 0**	**(0, 1)**	**x= 1**	**(1, +∞)**
VP	-2	---	$\frac{-1}{2}$	---	$\frac{1}{2}$	---	2
f´ (x)	>0	0	>0	0	>0	0	>0
f (x)	creciente	no tiene extremo relativo	creciente	no tiene extremo relativo	creciente	no tiene extremo relativo	creciente

Por lo tanto, la función f (x) crece en todo su dominio y, por lo tanto, no tiene puntos máximos ni mínimos relativos.

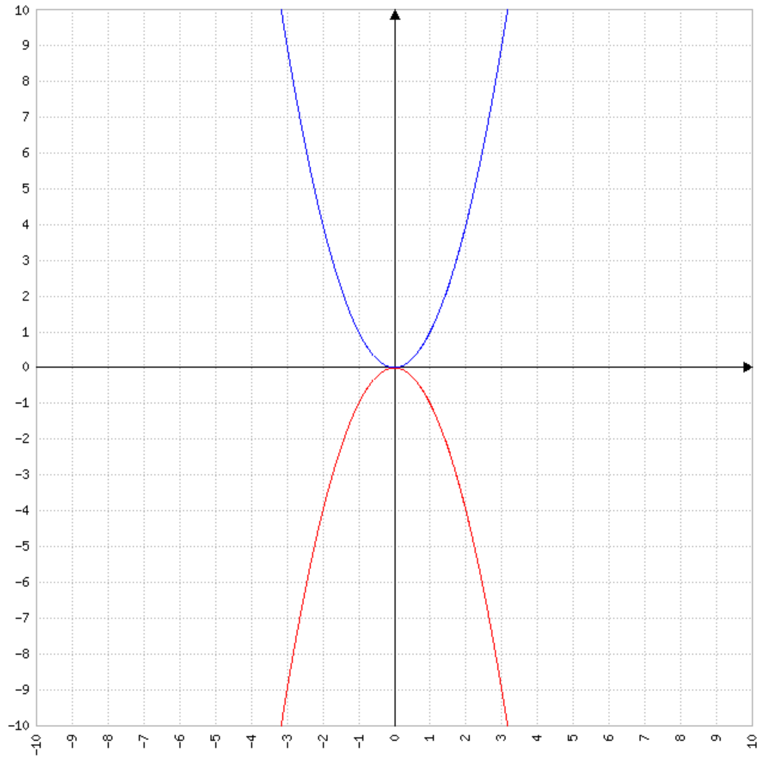

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Ejercicio 14.

(a) *Trazar dos gráficas de funciones continuas y decrecientes. Una de ellas que sea cóncava hacia arriba y la otra cóncava hacia abajo.*

(b) *En cada una de las gráficas, dibujar algunas rectas tangentes, como se hizo en la figura anterior.*

(c) *Reflexionar, en forma similar a la que se hizo para las gráficas crecientes, respecto del crecimiento o decrecimiento del valor de las pendientes de esas rectas tangentes, tanto en el caso de la gráfica cóncava hacia arriba como en aquella que sea cóncava hacia abajo.*



En el caso de la gráfica cóncava hacia arriba (gráfica azul), las pendientes de las rectas tangentes, considerándolas de izquierda a derecha, primero, son negativas y decrecen y, luego, son positivas y crecen. En cambio, en el caso de la gráfica cóncava hacia abajo (gráfica roja), las pendientes de las rectas tangentes, considerándolas de izquierda a derecha, primero, son positivas y decrecen y, luego, son negativas y crecen.

Ejercicio 15.

Determinar todos los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad para cada función:

(a) *f (x)=* $3x^3$ *+ 2x.*

Dom_f= ℝ.

f´ (x)= 9x^2 + 2.

f´´ (x)= 18x.

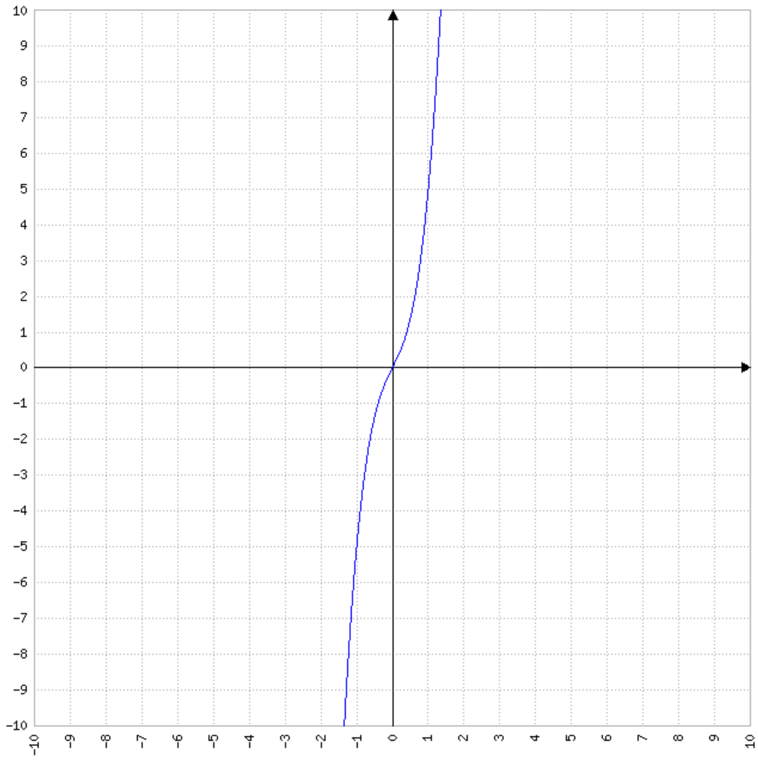
∃ f´´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´´ (x)= 0
18x= 0
x= $\frac{0}{18}$
x= 0.

Intervalo	(-∞, 0)	x= 0	(0, +∞)
VP	-1	---	1
f´´ (x)	< 0	0	> 0
f (x)	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

f (0)= 3 * 0^3 + 2 * 0
f (0)= 3 * 0 + 0
f (0)= 0 + 0
f (0)= 0.

Por lo tanto, f (x) tiene un punto de inflexión en (0, 0) y los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de esta función son (0, +∞) y (-∞, 0), respectivamente.



(b) $f(x) = 2x^4 + 3x^3$.

$Dom_f = \mathbb{R}$.

f´ (x)= $8x^3 + 9x^2$.

f´´ (x)= $24x^2 + 18x$.

$\exists$ f´´ (x) $\forall$ x $\in Dom_f$.

f´´ (x)= 0
$24x^2 + 18x = 0$
x (24x + 18)= 0.

$x_1 = 0$; $x_2 = \frac{-3}{4}$.

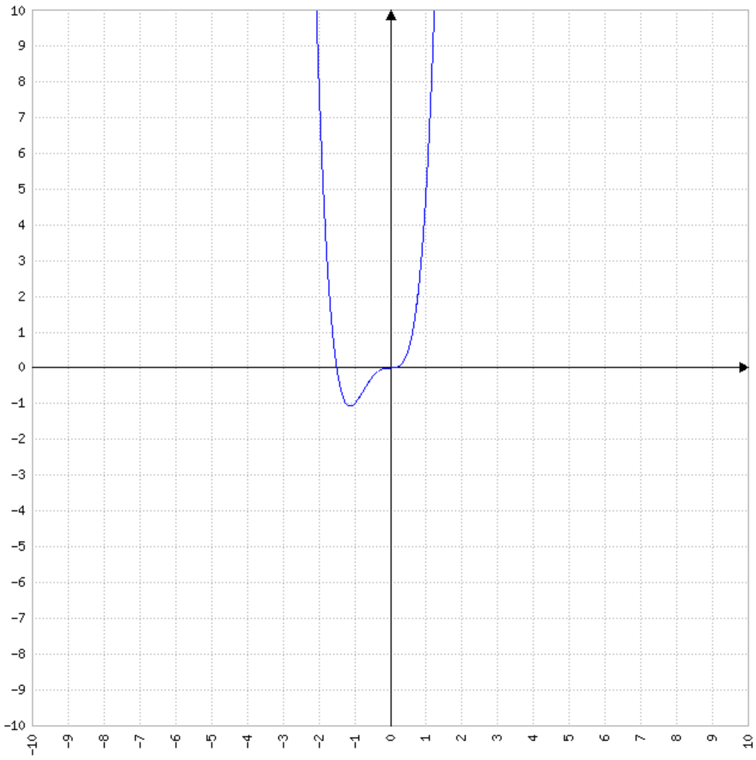
Intervalo	**(-∞, $\frac{-3}{4}$)**	**x= $\frac{-3}{4}$**	**($\frac{-3}{4}$, 0)**	**x= 0**	**(0, +∞)**
VP	-1	---	$\frac{-1}{2}$	--	1
f´´ (x)	> 0	0	< 0	0	> 0
f (x)	cóncava hacia arriba	punto de inflexión	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

f ($\frac{-3}{4}$)= 2 $(\frac{-3}{4})^4$ + 3 $(\frac{-3}{4})^3$

f $(\frac{-3}{4})$= 2 $\frac{81}{256}$ + 3 $(\frac{-27}{64})$
f $(\frac{-3}{4})$= $\frac{81}{128}$ - $\frac{81}{64}$
f $(\frac{-3}{4})$= $\frac{-81}{128}$.

f (0)= 2 * 0^4 + 3 * 0^3
f (0)= 2 * 0 + 3 * 0
f (0)= 0 + 0
f (0)= 0.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos de inflexión en $(\frac{-3}{4}, \frac{-81}{128})$ y (0, 0) y los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de esta función son $(-\infty, \frac{-3}{4}) \cup (0, +\infty)$ y $(\frac{-3}{4}, 0)$, respectivamente.



(c) *f (x)= sen x en [-2π, 2π].*

Dom_f= ℝ.

f´ (x)= cos x.

f´´ (x)= -sen x.

∃ f´´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´´ (x)= 0

-sen x= 0
sen x= $\frac{0}{-1}$
sen x= 0.

x_1= -π; x_2= 0; x_3= π.

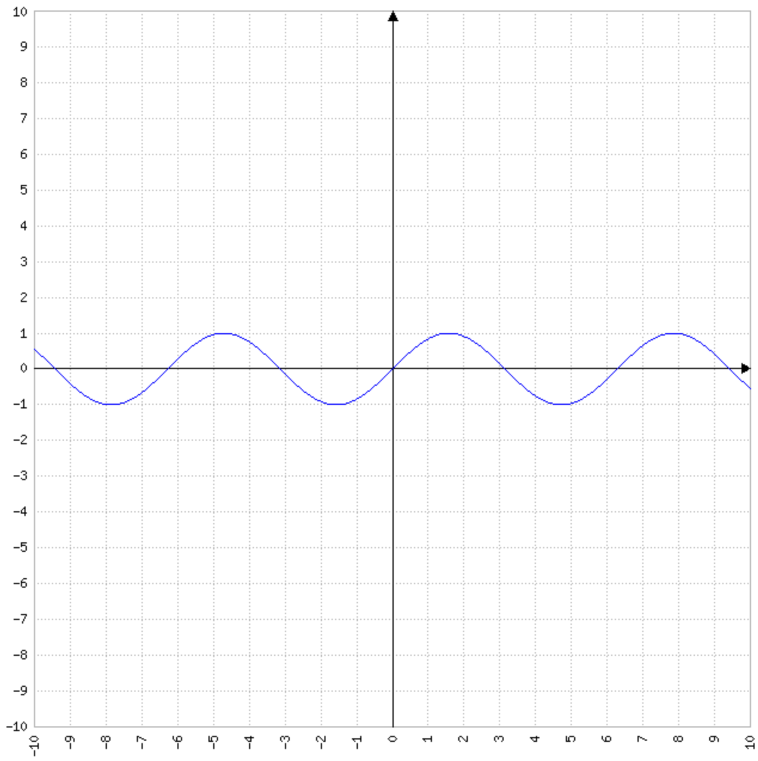
Intervalo	**(-2π, -π)**	**x= -π**	**(-π, 0)**	**x= 0**	**(0, π)**	**x= π**	**(π, 2π)**
VP	-4	---	-1	---	1	---	4
f´´ (x)	< 0	0	> 0	0	< 0	0	> 0
f (x)	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba	punto de inflexión	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

f (-π)= sen -π
f (-π)= 0.

f (0)= sen 0
f (0)= 0.

f (π)= sen π
f (π)= 0.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos de inflexión en (-π, 0), (0, 0) y (π, 0) y los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de esta función son (-π, 0) ∪ (π, 2π) y (-2π, π) ∪ (0, π), respectivamente.



(d) *f (x)= ln x.*

Dom_f= (0, +∞).

f´ (x)= $\frac{1}{x}$.

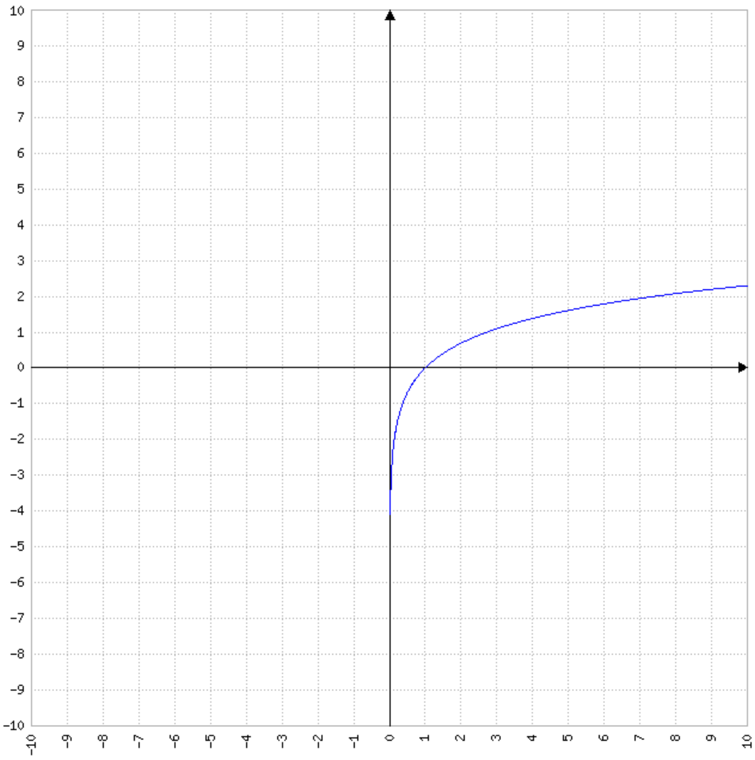
f´´ (x)= $\frac{-1}{x^2}$.

∃ f´´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´´ (x)= 0
$\frac{-1}{x^2}$= 0
-1= $0x^2$
-1≠ 0.

Intervalo	**(0, +∞)**
VP	1
f´´ (x)	< 0
f (x)	cóncava hacia abajo

Por lo tanto, f (x) no tiene puntos de inflexión y es cóncava hacia abajo en todo su dominio.



Ejercicio 16.

En caso de que se pueda, usar el criterio de la segunda derivada para corroborar la clasificación de extremos de las funciones del Ejercicio 13.

(a) *h (x)=* $-x^3 + 2x^2$.

h´ (x)= $-3x^2 + 4x$.

h´´ (x)= -6x + 4.

h´´ (0)= -6 * 0 + 4
h´´ (0)= 0 + 4
h´´ (0)= 4 $>$ 0.

h´´ ($\frac{4}{3}$)= -6 $\frac{4}{3}$ + 4
h´´ ($\frac{4}{3}$)= -8 + 4
h´´ ($\frac{4}{3}$)= -4 $<$ 0.

Por lo tanto, usando el criterio de la segunda derivada, se corrobora la clasificación de extremos de h (x), en donde los puntos máximo y mínimo relativos son ($\frac{4}{3}$, $\frac{32}{27}$) y (0, 0), respectivamente.

(b) *g (x)=* $\frac{x^2-3}{x-2}$.

g´ (x)= $\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.

g´´ (x)= $\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x+3)2(x-2)}{[(x-2)^2]^2}$
g´´ (x)= $\frac{(2x-4)(x^2-4x+2)-(x^2-4x+3)(2x-4)}{(x-2)^4}$
g´´ (x)= $\frac{(2x-4)[(x^2-4x+2)-(x^2-4x+3)]}{(x-2)^4}$
g´´ (x)= $\frac{(2x-4)(x^2-4x+2-x^2+4x-3)}{(x-2)^4}$
g´´ (x)= $\frac{(2x-4)(-1)}{(x-2)^4}$
g´´ (x)= $\frac{2(x-2)}{(x-2)^4}$
g´´ (x)= $\frac{2}{(x-2)^3}$.

g´´ (1)= $\frac{2}{(1-2)^3}$
g´´ (1)= $\frac{2}{(-1)^3}$

g´´ (1)= $\frac{2}{-1}$
g´´ (1)= -2 $<$ 0.

g´´ (3)= $\frac{2}{(3-2)^3}$
g´´ (3)= $\frac{2}{1^3}$
g´´ (3)= $\frac{2}{1}$
g´´ (3)= 2 $>$ 0.

Por lo tanto, usando el criterio de la segunda derivada, se corrobora la clasificación de extremos de g (x), en donde los puntos máximo y mínimo relativos son (1, 2) y (3, 6), respectivamente.

(c) *f (x)*= $\frac{x^3}{3x^2+1}$.

f´ (x)= $\frac{3(x^4-x^2)}{(3x^2+1)^2}$.

f´ (-1)= $\frac{3[(-1)^4-(-1)^2]}{[3(-1)^2+1]^2}$
f´ (-1)= $\frac{3(1-1)}{(3*1+1)^2}$
f´ (-1)= $\frac{3*0}{(3+1)^2}$
f´ (-1)= $\frac{0}{4^2}$
f´ (-1)= $\frac{0}{16}$
f´ (-1)= 0.

f´ (0)= $\frac{3(0^4-0^2)}{(3*0+1)^2}$
f´ (0)= $\frac{3(0-0)}{(0+1)^2}$
f´ (0)= $\frac{3*0}{1^2}$
f´ (0)= $\frac{0}{1}$
f´ (0)= 0.

f´ (1)= $\frac{3(1^4-1^2)}{(3*1+1)^2}$
f´ (1)= $\frac{3(1-1)}{(3+1)^2}$
f´ (1)= $\frac{3*0}{4^2}$
f´ (1)= $\frac{0}{16}$
f´ (1)= 0.

Por lo tanto, usando el criterio de la segunda derivada, se corrobora la clasificación de extremos de f (x), la cual no tiene puntos máximos ni mínimos relativos.

Ejercicio 17.

Realizar, paso a paso, el análisis completo de las funciones siguientes . Luego, graficar en base al análisis realizado.

(a) *f (x)=* $2x^3$ *+* $3x^2$ *+ 1.*

(1) Determinar el dominio de la función:

Dom_f= ℝ.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

Las funciones polinómicas son continuas en ℝ. Por lo tanto, f (x) es continua en ℝ.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$\nexists \lim_{x \to a} f\ (x)= \pm\infty$, ∀ a ∈ ℝ.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to -\infty} f\ (x)= \lim_{x \to -\infty} 2x^3 + 3x^2 + 1$= -∞.

$\lim_{x \to +\infty} f\ (x)= \lim_{x \to +\infty} 2x^3 + 3x^2 + 1$= +∞.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

f´ (x)= $6x^2$ + 6x.

∃ f´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´ (x)= 0
$6x^2$ + 6x= 0
6x (x + 1)= 0
x (x + 1)= $\frac{0}{6}$
x (x + 1)= 0.

x_1= -1; x_2= 0.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en x_1= -1 y x_2= 0.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	**(-∞, -1)**	**x= -1**	**(-1, 0)**	**x= 0**	**(0, +∞)**
VP	-2	---	$\frac{-1}{2}$	---	1
f´ (x)	> 0	0	< 0	0	> 0
f (x)	creciente	máximo relativo	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (x) son (-∞, -1) ∪ (0, +∞) y (-1, 0), respectivamente.

(6) <u>Determinar los valores máximos y mínimos relativos:</u>

f (-1)= 2 $(-1)^3$ + 3 $(-1)^2$ + 1
f (-1)= 2 (-1) + 3 * 1 + 1
f (-1)= -2 + 3 + 1
f (-1)= 2.

f (0)= 2 * 0^3 + 3 * 0^2 + 1
f (0)= 2 * 0 + 3 * 0 + 1
f (0)= 0 + 0 + 1
f (0)= 1.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos máximo y mínimo relativos en (-1, 2) y (0, 1), respectivamente.

(7) <u>Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:</u>

f´´ (x)= 12x + 6.

∃ f´´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´´ (x)= 0
12x + 6= 0
12x= -6
x= $\frac{-6}{12}$
x= $\frac{-1}{2}$.

Por lo tanto, f´´ (x)= 0 en x= $\frac{-1}{2}$.

(8) <u>Determinar los intervalos de concavidad:</u>

Intervalo	**(-∞, $\frac{-1}{2}$)**	**x= $\frac{-1}{2}$**	**($\frac{-1}{2}$, +∞)**
VP	-1	---	0
f´´ (x)	< 0	0	> 0
f (x)	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

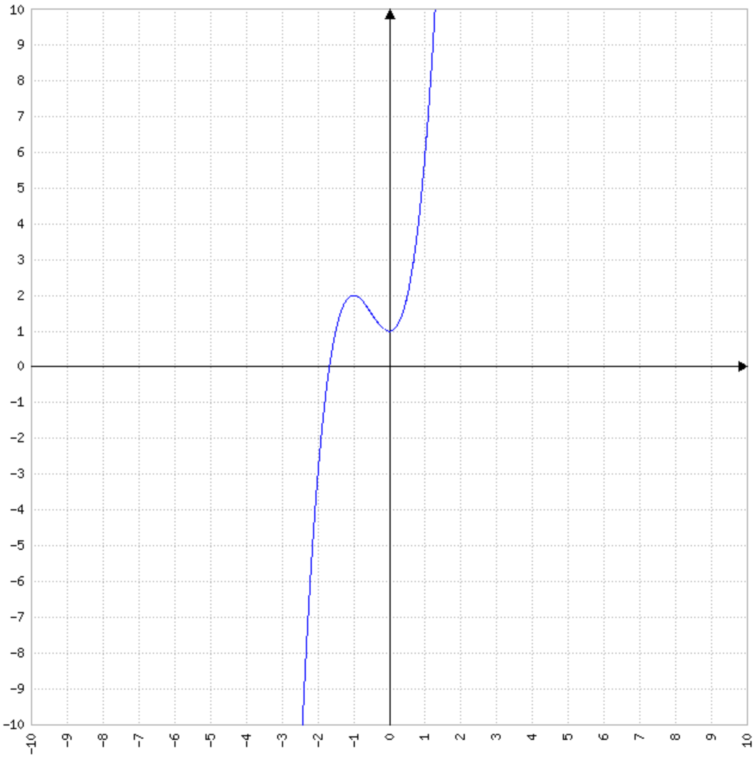
Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de f (x) son ($\frac{-1}{2}$, +∞) y (-∞, $\frac{-1}{2}$), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

$f\left(\frac{-1}{2}\right)= 2\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1$
$f\left(\frac{-1}{2}\right)= 2\left(\frac{-1}{8}\right) + 3\,\frac{1}{4} + 1$
$f\left(\frac{-1}{2}\right)= \frac{-1}{4} + \frac{3}{4} + 1$
$f\left(\frac{-1}{2}\right)= \frac{-3}{2}$.

Por lo tanto, f (x) tiene un punto de inflexión en ($\frac{-1}{2}$, $\frac{3}{2}$).

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



(b) *f (x)=* $\frac{2}{x^3}$.

(1) Determinar el dominio de la función:

x^3= 0
x= $\sqrt[3]{0}$
x= 0.

Dom_f= ℝ - {0}.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

f (x) es discontinua inevitable en x= 0, ya que $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$ y, entonces, $\nexists$ $\lim_{x \to 0} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en ℝ - {0}.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$\lim_{x \to 0^-} f(x)= \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^3}$= -∞.

$\lim_{x \to 0^+} f(x)= \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^3}$= +∞.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en x= 0.

$\lim_{x \to -\infty} f(x)= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^3}$= 0.

$\lim_{x \to +\infty} f(x)= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^3}$= 0.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en y= 0.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

f´ (x)= $\frac{2}{x^3}$
f´ (x)= $\frac{-6}{x^4}$.

∃ f´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´ (x)= 0
$\frac{-6}{x^4}$= 0
-6= $0x^4$
-6≠ 0.

Por lo tanto, f (x) no tiene puntos críticos.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	**(-∞, 0)**	**x= 0**	**(0, +∞)**
VP	-1	---	1
f´ (x)	< 0	---	< 0
f (x)	decreciente	asíntota vertical	decreciente

Por lo tanto, f (x) decrece en todo su dominio.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

Dado que decrece en todo su dominio, f (x) no tiene puntos máximos ni mínimos relativos.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:

f´´ (x)= $\frac{24}{x^5}$.

∃ f´´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´´ (x)= 0
$\frac{24}{x^5}$= 0
24= $0x^5$
24≠ 0.

Por lo tanto, f´´ (x)≠ 0 ∀ x ∈ Dom_f.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

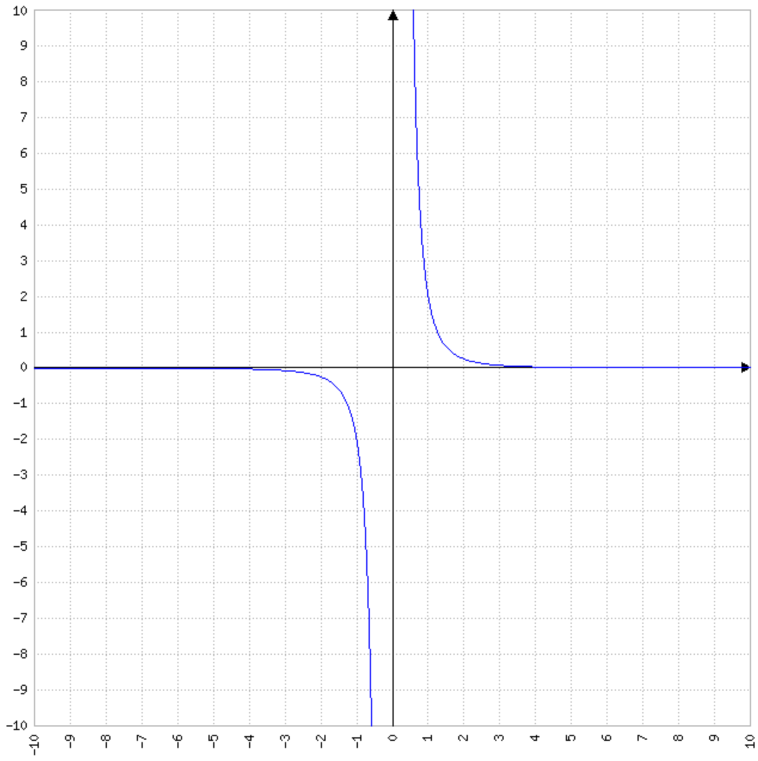
Intervalo	**(-∞, 0)**	**x= 0**	**(0, +∞)**
VP	-1	---	1
f´ (x)	< 0	---	> 0
f (x)	cóncava hacia abajo	asíntota vertical	cóncava hacia arriba

Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de f (x) son (0, +∞) y (-∞, 0), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

Por lo tanto, f (x) no tiene puntos de inflexión.

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



g

(c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

(1) <u>Determinar el dominio de la función:</u>

x - 1= 0
x= 1.

Dom_f= ℝ - {1}.

(2) <u>Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:</u>

f (x) es discontinua inevitable en x= 1, ya que $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en ℝ - {1}.

(3) <u>Determinar las asíntotas verticales y horizontales:</u>

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en x= 1.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(4) <u>Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:</u>

f´ (x)= $\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}$
f´ (x)= $\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}$
f´ (x)= $\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$
f´ (x)= $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

∃ f´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´ (x)= 0
$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$= 0
x (x - 2)= 0 $(x-1)^2$
x (x - 2)= 0.

x_1= 0; x_2= 2.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en x_1= 0 y x_2= 2.

(5) <u>Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:</u>

Intervalo	**(-∞, 0)**	**x= 0**	**(0, 1)**	**x= 1**	**(1, 2)**	**x= 2**	**(2, +∞)**
VP	-1	---	$\frac{1}{2}$	---	$\frac{3}{2}$	---	3
f´ (x)	> 0	0	< 0	---	< 0	0	> 0
f (x)	creciente	máximo relativo	decreciente	asíntota vertical	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (x) son (-∞, 0) ∪ (2, +∞) y (0, 1) ∪ (1, 2), respectivamente.

(6) <u>Determinar los valores máximos y mínimos relativos:</u>

f (0)= $\frac{0^2}{0-1}$
f (0)= $\frac{0}{-1}$
f (0)= 0.

f (2)= $\frac{2^2}{2-1}$
f (2)= $\frac{4}{1}$
f (2)= 4.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos máximo y mínimo relativos en (0, 0) y (2, 4), respectivamente.

(7) <u>Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:</u>

f´´ (x)= $\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)}{[(x-1)^2]^2}$
f´´ (x)= $\frac{2(x-1)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4}$
f´´ (x)= $\frac{2(x-1)[(x-1)^2-(x^2-2x)]}{(x-1)^4}$
f´´ (x)= $\frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^3}$
f´´ (x)= $\frac{2*1}{(x-1)^3}$
f´´ (x)= $\frac{2}{(x-1)^3}$.

∃ f´´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´´ (x)= 0
$\frac{2}{(x-1)^3}$= 0
2= 0 $(x-1)^3$
2≠ 0.

Por lo tanto, f´´ (x)≠ 0 ∀ x ∈ Dom_f.

(8) <u>Determinar los intervalos de concavidad:</u>

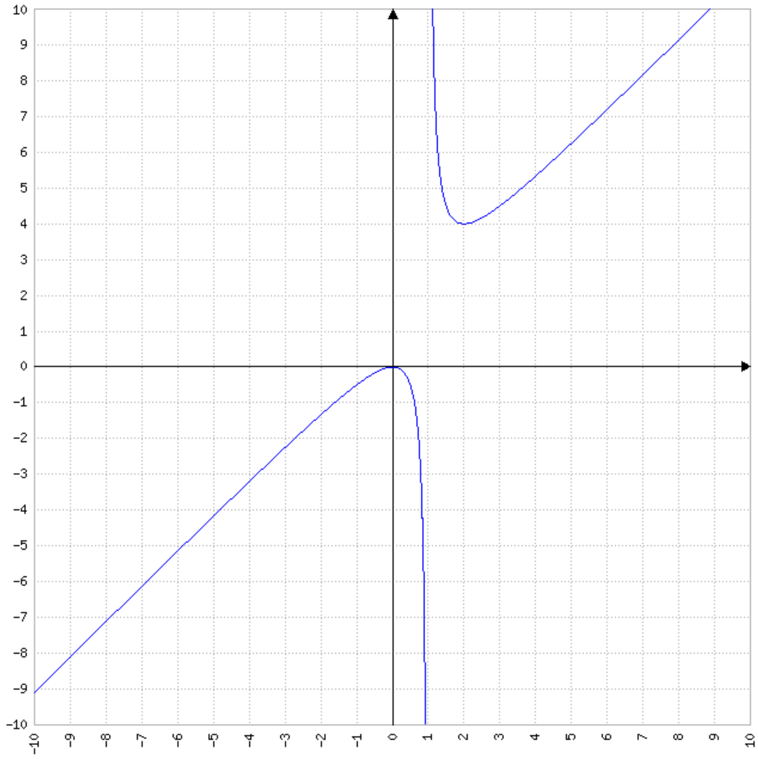
Intervalo	**(-∞, 1)**	**x= 1**	**(1, +∞)**
VP	-2	---	2
f´ (x)	< 0	---	> 0
f (x)	cóncava hacia abajo	asíntota vertical	cóncava hacia arriba

Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de f (x) son (1, +∞) y (-∞, 1), respectivamente.

(9) <u>Determinar si la función presenta puntos de inflexión:</u>

Por lo tanto, f (x) no tiene puntos de inflexión.

(10) <u>Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:</u>



(d) $f(x)= \frac{e^x}{x}$.

(1) Determinar el dominio de la función:

x= 0.

Dom_f= $\mathbb{R}$ - {0}.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

f (x) es discontinua inevitable en x= 0, ya que $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en $\mathbb{R}$ - {0}.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$\lim_{x \to 0^-} f(x)= \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x}= -\infty$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x)= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x}= +\infty$.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en x= 0.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0.$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en y= 0.

(4) <u>Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:</u>

f´ (x)= $\frac{e^x x - e^x}{x^2}$
f´ (x)= $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

∃ f´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´ (x)= 0
$\frac{e^x(x-1)}{x^2}$= 0
e^x (x - 1)= $0x^2$
e^x (x - 1)= 0.
x= 1.

Por lo tanto, f (x) tiene un punto crítico en x= 1.

(5) <u>Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:</u>

Intervalo	**(-∞, 0)**	**x= 0**	**(0, 1)**	**x= 1**	**(1, +∞)**
VP	-1	---	$\frac{1}{2}$	---	2
f´ (x)	< 0	---	< 0	0	> 0
f (x)	decreciente	asíntota vertical	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (x) son (1, +∞) y (-∞, 0) ∪ (0, 1), respectivamente.

(6) <u>Determinar los valores máximos y mínimos relativos:</u>

f (1)= $\frac{e^1}{1}$
f (1)= $\frac{e}{1}$
f (1)= e.

Por lo tanto, f (x) tiene un punto mínimo relativo en (1, e).

(7) <u>Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:</u>

f´´ (x)= $\frac{[e^x(x-1)+e^x]x^2 - e^x(x-1)2x}{(x^2)^2}$

f´´ (x)= $\frac{(xe^x-e^x+e^x)x^2-2x^2e^x+2xe^x}{x^4}$
f´´ (x)= $\frac{xe^xx^2-2x^2e^x+2xe^x}{x^4}$
f´´ (x)= $\frac{x^3e^x-2x^2e^x+2xe^x}{x^4}$
f´´ (x)= $\frac{xe^x(x^2-2x+2)}{x^4}$
f´´ (x)= $\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$.

∃ f´´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´´ (x)= 0
$\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$= 0
e^x (x^2 - 2x + 2)= 0
x^2 - 2x + 2= $\frac{0}{e^x}$
x^2 - 2x + 2= 0.

x_1, x_2= $\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4*1*2}}{2*1}$
x_1, x_2= $\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{2\pm\sqrt{-1*4}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{2\pm\sqrt{-1}\sqrt{4}}{2}$
x_1, x_2= $\frac{2\pm 2i}{2}$
x_1= $\frac{2+2i}{2}$= $\frac{2(1+i)}{2}$= 1 + i.
x_2= $\frac{2-2i}{2}$= $\frac{2(1-i)}{2}$= 1 - i.

Por lo tanto, f´´ (x)≠ 0 ∀ x ∈ Dom_f.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

Intervalo	**(-∞, 0)**	**x= 0**	**(0, +∞)**
VP	-1	---	1
f´ (x)	<0	---	>0
f (x)	cóncava hacia abajo	asíntota vertical	cóncava hacia arriba

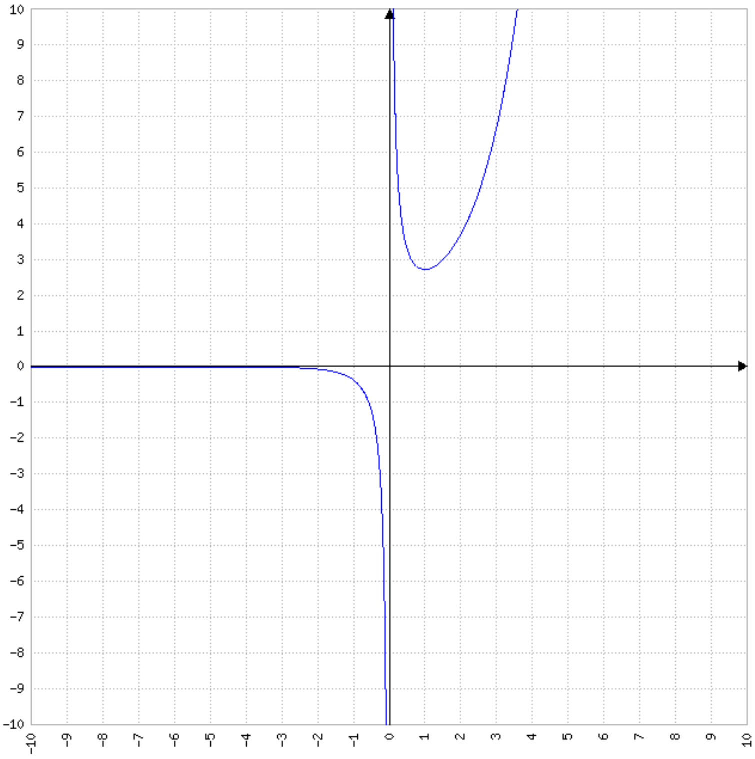
Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de f (x) son (0, +∞) y (-∞, 0), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

Por lo tanto, f (x) no tiene puntos de inflexión.

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en

el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 5:
Problemas de Optimización.

Ejercicio 1.

Se dispone de 240 metros de alambre para construir un corral rectangular. ¿Cuáles son las dimensiones del corral de área máxima que puede construirse con todo el alambre disponible?

P= 240
2b + 2h= 240
2 (b + h)= 240
b + h= $\frac{240}{2}$
b + h= 120
h= 120 - b.

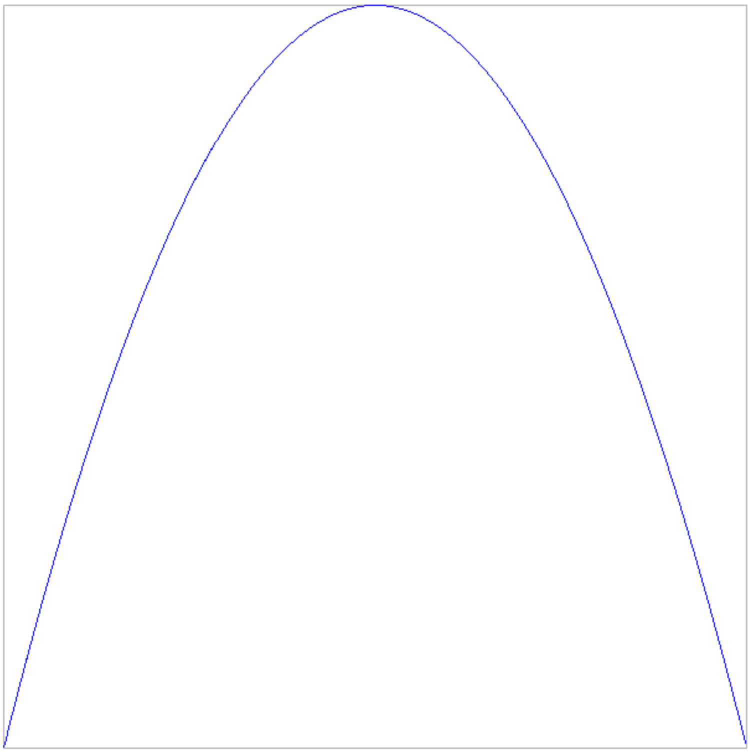
A= bh
A= b (120 - b)
A= 120b - b^2.

A´= 0
120 - 2b= 0
2b= 120
b= $\frac{120}{2}$
b^*= 60.

h^*= 120 - 60
h^*= 60.

Intervalo	**(0, 60)**	**b= 60**	**(60, 120)**
VP	10	---	100
A´ (b)	> 0	0	< 0
A (b)	creciente	máximo absoluto	decreciente

Juan Menduiña



Por lo tanto, las dimensiones del corral de área máxima que puede construirse con todo el alambre disponible es b= 60 y h= 60.

Ejercicio 2.

Entre todos los rectángulos de área 9, ¿cuál es el de menor perímetro?

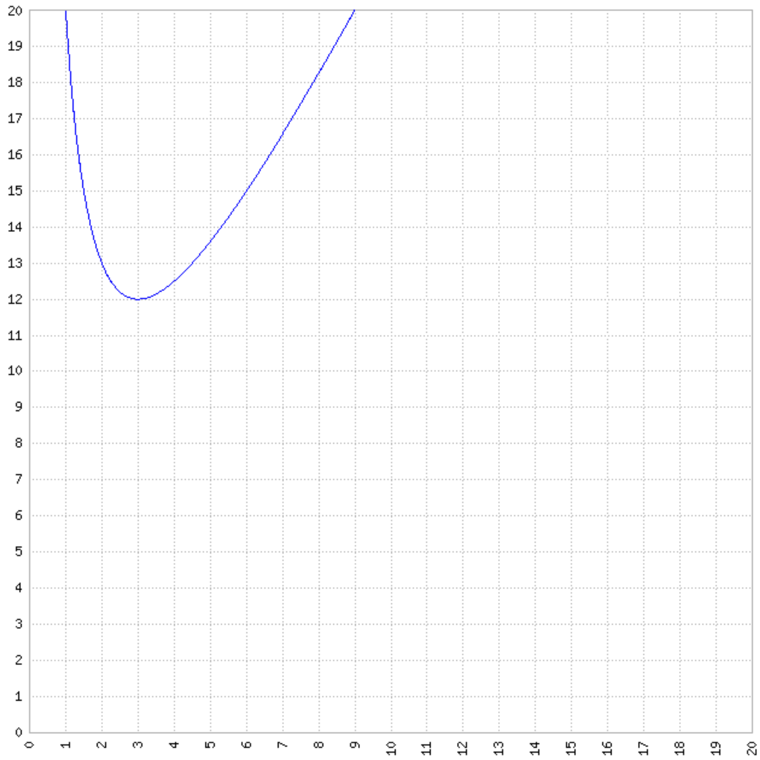
A= 9
bh= 9
h= $\frac{9}{b}$.

P= 2b + 2h
P= 2b + 2 $\frac{9}{b}$
P= 2b + $\frac{18}{b}$.

P´= 0
2 - $\frac{18}{b^2}$= 0
$\frac{18}{b^2}$= 2
$2b^2$= 18
b^2= $\frac{18}{2}$
b^2= 9
$\sqrt{b^2}$= $\sqrt{9}$
$|b|$= 3
b^*= 3.

h^*= $\frac{9}{3}$
h^*= 3.

Intervalo	**(0, 3)**	**b= 3**	**(3, 9)**
VP	1	---	4
P´ (b)	< 0	0	> 0
P (b)	decreciente	mínimo absoluto	creciente



Por lo tanto, entre todos los rectángulos de área 9, el de menor perímetro es el que tiene b= 3 y h= 3.

Ejercicio 3.

Entre todos los rectángulos de perímetro 12, ¿cuál es el de área máxima?

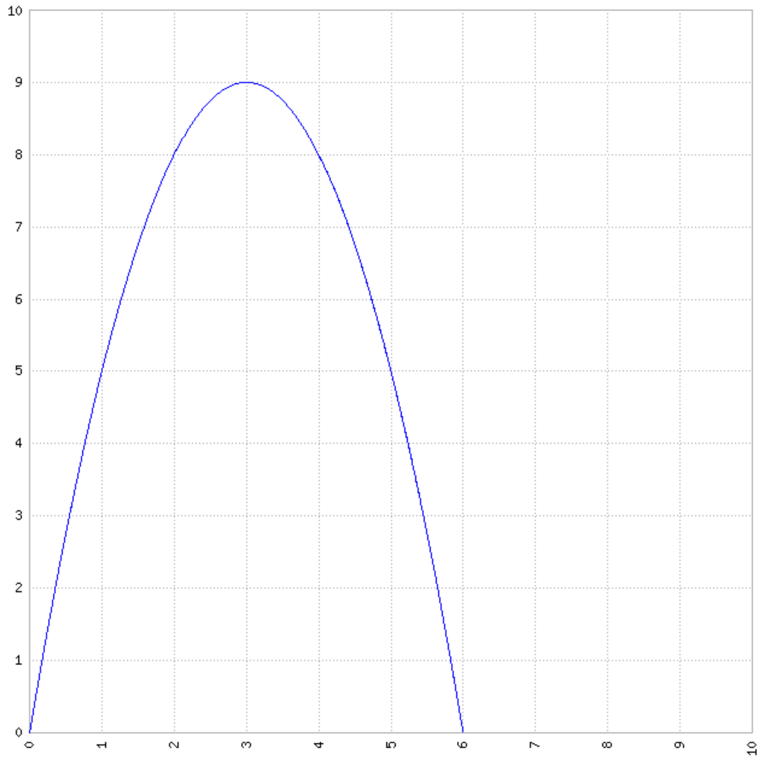
P= 12
2b + 2h= 12
2 (b + h)= 12
b + h= $\frac{12}{2}$
b + h= 6
h= 6 - b.

A= bh
A= b (6 - b)
A= 6b - b^2.

A´= 0
6 - 2b= 0
2b= 6
b= $\frac{6}{2}$
b^*= 3.

h^*= 6 - 3
h^*= 3.

Intervalo	**(0, 3)**	**b= 3**	**(3, 6)**
VP	1	---	4
A´ (b)	> 0	0	< 0
A (b)	creciente	máximo absoluto	decreciente



Por lo tanto, entre todos los rectángulos de perímetro 12, el de área máxima es el que tiene b= 3 y h= 3.

Ejercicio 4.

Se va a construir un corral doble que forma dos rectángulos idénticos adyacentes. Si se dispone de 120 metros de alambre, ¿qué dimensiones harán que el área del corral sea máxima?

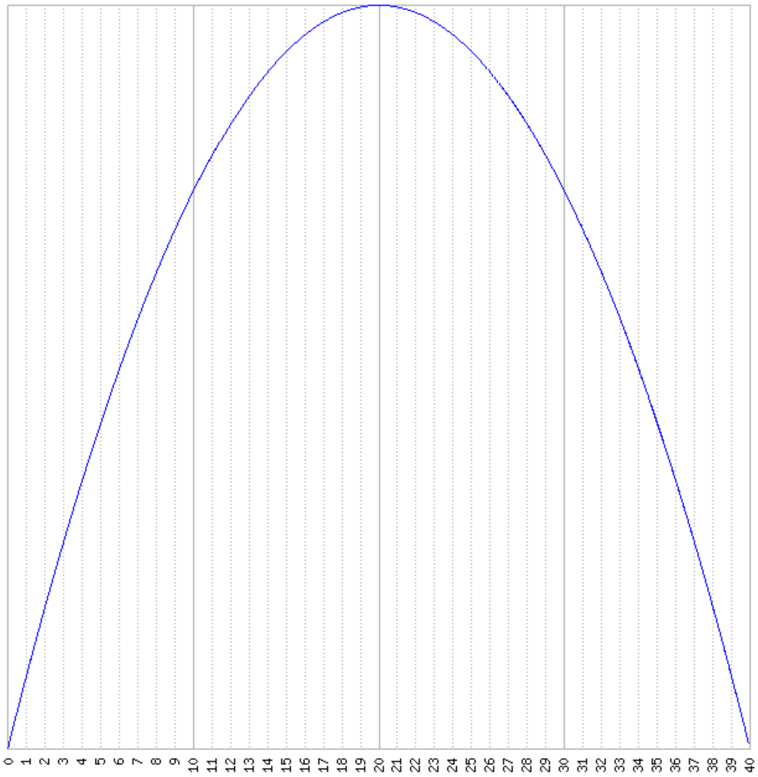
3b + 2h= 120
2h= 120 - 3b
h= $\frac{120-3b}{2}$
h= 60 - $\frac{3}{2}$ b.

A= 2bh
A= 2b (60 - $\frac{3}{2}$ b)
A= 120b - 3b^2.

A´= 0
120 - 6b= 0
6b= 120
b= $\frac{120}{6}$
b^*= 20.

h^*= 60 - $\frac{3}{2}$ * 20
h^*= 60 - 30
h^*= 30.

Intervalo	**(0, 20)**	**b= 20**	**(20, 40)**
VP	1	---	31
A´ (b)	> 0	0	< 0
A (b)	creciente	máximo absoluto	decreciente



Por lo tanto, las dimensiones que harán que el área del corral sea máxima son b= 20 y h= 30.

Ejercicio 5.

¿Existirán dos números positivos tal que su suma es 4 y la suma del cuadrado del primero y del cubo del segundo sea lo más pequeña posible?

x + y= 4
y= 4 - x.

f (x, y)= x^2 + y^3
f (x)= x^2 + $(4-x)^3$.

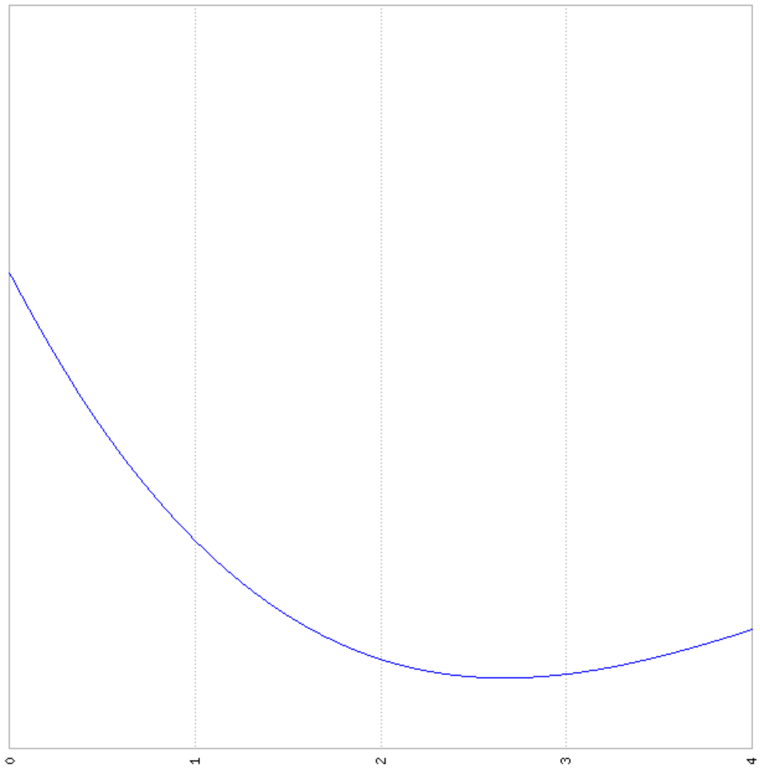
f´ (x)= 0
2x + 3 $(4-x)^2$ (-1)= 0
2x - 3 $(4-x)^2$= 0
2x - 3 (16 - 8x + x^2)= 0
2x - 48 + 24x - 3x^2= 0
-3x^2 + 26x - 48= 0
-3 (x^2 - $\frac{26}{3}$ x + 16)= 0
x^2 - $\frac{26}{3}$ x + 16= $\frac{0}{-3}$
x^2 - $\frac{26}{3}$ x + 16= 0.

$x_1, x_2= \frac{-(\frac{-26}{3}) \pm \sqrt{(\frac{-26}{3})^2-4*1*16}}{2*1}$
$x_1, x_2= \frac{\frac{26}{3} \pm \sqrt{\frac{676}{9}-64}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{\frac{26}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9}}}{2}$
$x_1, x_2= \frac{\frac{26}{3} \pm \frac{10}{3}}{2}$
$x_1= \frac{\frac{26}{3}+\frac{10}{3}}{2}= \frac{12}{2}= 6.$
$x_2= \frac{\frac{26}{3}-\frac{10}{3}}{2}= \frac{\frac{16}{3}}{2}= \frac{8}{3}.$

y_1= 4 - 6= -2.
y_2= 4 - $\frac{8}{3}$= $\frac{4}{3}$.

$x^*= \frac{8}{3}$.
$y^*= \frac{4}{3}$.

Intervalo	**$(0, \frac{8}{3})$**	**x= $\frac{8}{3}$**	**$(\frac{8}{3}, 4)$**
VP	1	---	3
f´ (x)	< 0	0	> 0
f (x)	decreciente	mínimo absoluto	creciente



Por lo tanto, los dos números positivos tal que su suma es 4 y la suma del cuadrado del primero y del cubo del segundo sea lo más pequeña posible son x= $\frac{8}{3}$ e y= $\frac{4}{3}$.

Ejercicio 6.

La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

x + y + z= 30
z= 30 - x - y.

x + 2y + 3z= 60
x + 2y + 3 (30 - x - y)= 60
x + 2y + 90 - 3x - 3y= 60
-2x - y + 90= 60
y= -2x + 90 - 60
y= -2x + 30.

z= 30 - x - (-2x + 30)
z= 30 - x + 2x - 30
z= x.

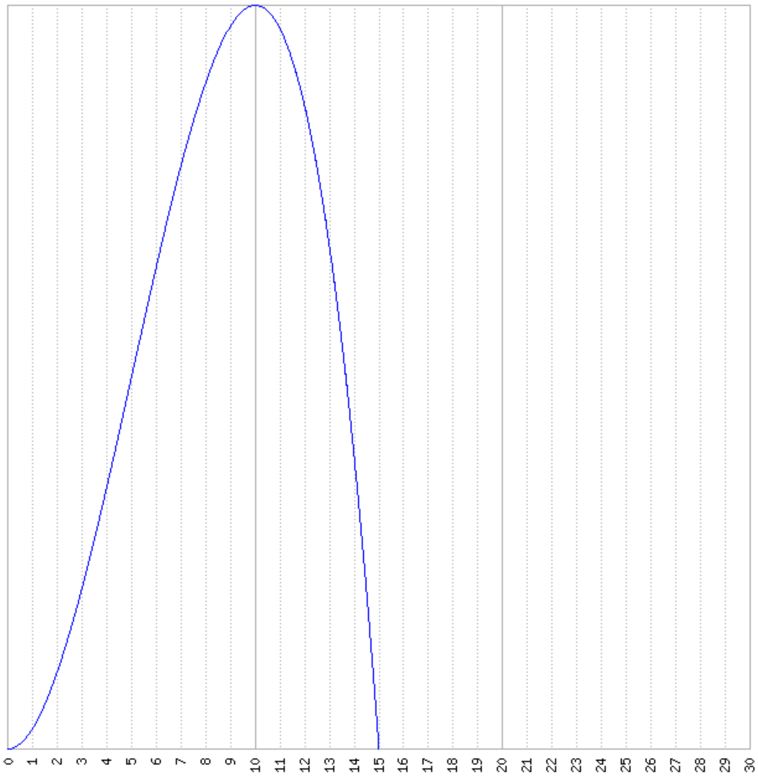
f (x, y, z)= xyz
f (x)= x (-2x + 30) x
f (x)= -2x^3 + 30x^2.

f´ (x)= 0
-6x^2 + 60x= 0
-6 (x^2 - 10x)= 0
x^2 - 10x= $\frac{0}{-6}$
x^2 - 10x= 0
x (x - 10)= 0
x^*= 10.

y^*= -2 * 10 + 30
y^*= -20 + 30
y^*= 10.

z^*= 10.

Intervalo	**(0, 10)**	**x= 10**	**(10, 30)**
VP	1	---	11
f´ (x)	< 0	0	> 0
f (x)	decreciente	mínimo absoluto	creciente



Por lo tanto, los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible son x= 10, y= 10 y z= 10.

Ejercicio 7.

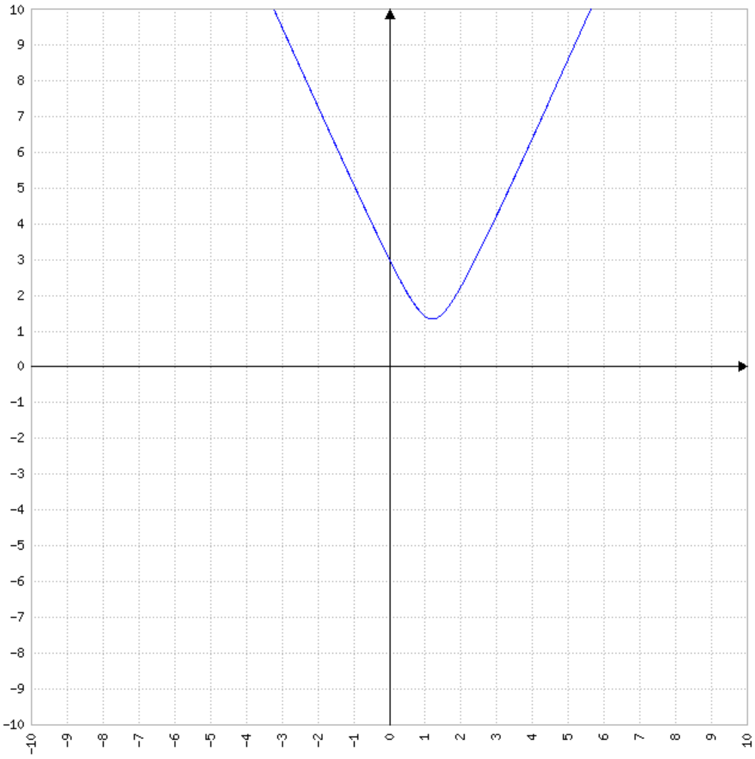
Encontrar el punto sobre la recta y= 2x - 3 más próximo al origen.

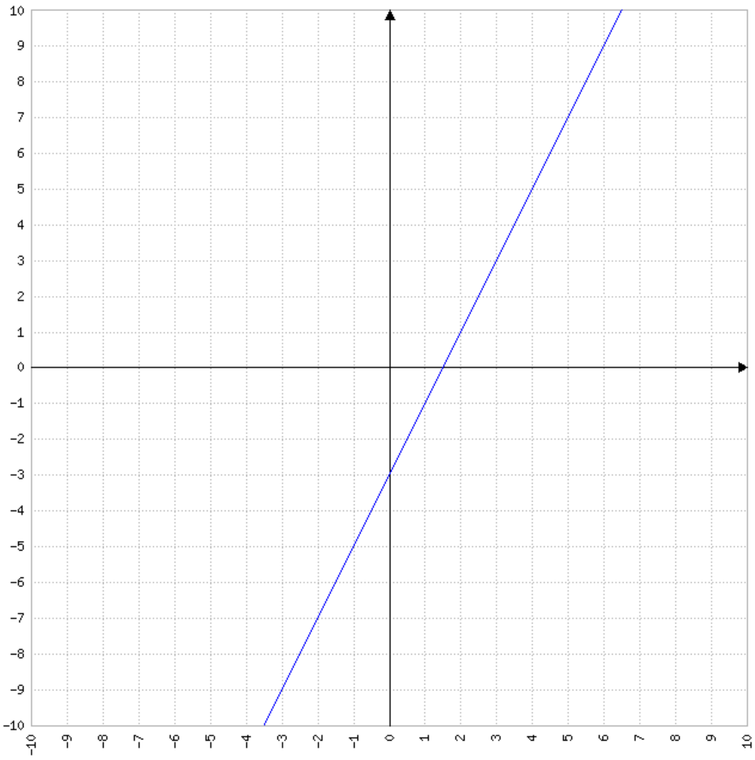
D= $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$
D= $\sqrt{x^2+y^2}$
D= $\sqrt{x^2+(2x-3)^2}$
D= $\sqrt{x^2+4x^2-12x+9}$
D= $\sqrt{5x^2-12x+9}$.

D´= 0
$\frac{1}{2\sqrt{5x^2-8x+9}}$ (10x - 12)= 0
$\frac{2(5x-6)}{2\sqrt{5x^2-8x+9}}$= 0
$\frac{5x-6}{\sqrt{5x^2-8x+9}}$= 0
5x - 6= 0 $\sqrt{5x^2-8x+9}$
5x - 6= 0
5x= 6
x^*= $\frac{6}{5}$.

y^*= 2 $\frac{6}{5}$ - 3
y^*= $\frac{12}{5}$ - 3
y^*= $\frac{-3}{5}$.

Intervalo	**(-∞, $\frac{6}{5}$)**	**x= $\frac{6}{5}$**	**($\frac{6}{5}$, +∞)**
VP	1	---	2
D´ (x)	< 0	0	> 0
D (x)	decreciente	mínimo absoluto	creciente





Por lo tanto, el punto sobre la recta y= 2x - 3 más próximo al origen es $(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5})$

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 6: Integrales.

Ejercicio 1.

(a) *Si* $\int_0^9 f\ (x)\ dx$*= 37 y* $\int_0^9 g\ (x)\ dx$*= 16, encontrar el valor de* $\int_0^9 [2\ f\ (x) - \frac{1}{4}\ g\ (x)]\ dx$.

$\int_0^9 [2\ f\ (x) - \frac{1}{4}\ g\ (x)]\ dx$= $\int_0^9 2\ f\ (x)\ dx$ + $\int_0^9 \frac{-1}{4}\ g\ (x)\ dx$
$\int_0^9 [2\ f\ (x) - \frac{1}{4}\ g\ (x)]\ dx$= 2 $\int_0^9 f\ (x)\ dx$ - $\frac{1}{4}$ $\int_0^9 g\ (x)\ dx$
$\int_0^9 [2\ f\ (x) - \frac{1}{4}\ g\ (x)]\ dx$= 2 * 37 - $\frac{1}{4}$ * 16
$\int_0^9 [2\ f\ (x) - \frac{1}{4}\ g\ (x)]\ dx$= 74 - 4
$\int_0^9 [2\ f\ (x) - \frac{1}{4}\ g\ (x)]\ dx$= 70.

(b) *Si* $\int_{-2}^3 h\ (x)\ dx$*= 12 y* $\int_0^3 h\ (x)\ dx$*= 3, hallar el valor de* $\int_{-2}^0 h\ (x)\ dx$.

$\int_{-2}^0 h\ (x)\ dx$= $\int_{-2}^3 h\ (x)\ dx$ - $\int_0^3 h\ (x)\ dx$
$\int_{-2}^0 h\ (x)\ dx$= 12 - 3
$\int_{-2}^0 h\ (x)\ dx$= 9.

(c) *Si* $\int_{-1}^3 f\ (t)\ dt$*= 3 y* $\int_{-1}^4 f\ (t)\ dt$*= 7, determinar el valor de* $\int_3^4 f\ (t)\ dt$.

$\int_3^4 f\ (t)\ dt$= $\int_{-1}^4 f\ (t)\ dt$ - $\int_{-1}^3 f\ (t)\ dt$
$\int_3^4 f\ (t)\ dt$= 7 - 3
$\int_3^4 f\ (t)\ dt$= 4.

Ejercicio 2.

Calcular las siguientes integrales utilizando las propiedades y, en caso de ser posible, usando la regla de Barrow.

(a) $\int_{-2}^{3} 2x - 1\, dx$.

$\int_{-2}^{3} 2x - 1\, dx = \int_{-2}^{3} 2x\, dx + \int_{-2}^{3} -1\, dx$
$\int_{-2}^{3} 2x - 1\, dx = 2 \int_{-2}^{3} x\, dx - \int_{-2}^{3} 1\, dx$
$\int_{-2}^{3} 2x - 1\, dx = 2\, \frac{x^2}{2} |_{-2}^{3} - x |_{-2}^{3}$
$\int_{-2}^{3} 2x - 1\, dx = x^2 |_{-2}^{3} - [3 - (-2)]$
$\int_{-2}^{3} 2x - 1\, dx = [3^2 - (-2)^2] - (3 + 2)$
$\int_{-2}^{3} 2x - 1\, dx = (9 - 4) - 5$
$\int_{-2}^{3} 2x - 1\, dx = 5 - 5$
$\int_{-2}^{3} 2x - 1\, dx = 0$.

(b) $\int x^2 + 2x + 8\, dx$.

$\int x^2 + 2x + 8\, dx = \int x^2\, dx + \int 2x\, dx + \int 8\, dx$
$\int x^2 + 2x + 8\, dx = \frac{x^3}{3} + 2 \int x\, dx + 8 \int 1\, dx$
$\int x^2 + 2x + 8\, dx = \frac{x^3}{3} + 2\, \frac{x^2}{2} + 8x$
$\int x^2 + 2x + 8\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 8x + C$.

(c) $\int_{0}^{2\pi} sen\, x + x\, dx$.

$\int_{0}^{2\pi} sen\, x + x\, dx = \int_{0}^{2\pi} sen\, x\, dx + \int_{0}^{2\pi} x\, dx$
$\int_{0}^{2\pi} sen\, x + x\, dx = -\cos x |_{0}^{2\pi} + \frac{x^2}{2} |_{0}^{2\pi}$
$\int_{0}^{2\pi} sen\, x + x\, dx = -(\cos 2\pi - \cos 0) + \frac{1}{2} [(2\pi)^2 - 0^2]$
$\int_{0}^{2\pi} sen\, x + x\, dx = -(1 - 1) + \frac{1}{2} (4\pi^2 - 0)$
$\int_{0}^{2\pi} sen\, x + x\, dx = -0 + \frac{1}{2}\, 4\pi^2$
$\int_{0}^{2\pi} sen\, x + x\, dx = 2\pi^2$.

(d) $\int_{0}^{4} 2e^x + 3x^4\, dx$.

$\int_0^4 2e^x + 3x^4\, dx$= $\int_0^4 2e^x\, dx$ + $\int_0^4 3x^4\, dx$
$\int_0^4 2e^x + 3x^4\, dx$= 2 $\int_0^4 e^x\, dx$ + 3 $\int_0^4 x^4\, dx$
$\int_0^4 2e^x + 3x^4\, dx$= $2e^x$ $|_0^4$ + 3 $\frac{x^5}{5}$ $|_0^4$
$\int_0^4 2e^x + 3x^4\, dx$= 2 ($e^4$ - e^0) + $\frac{3}{5}$ (4^5 - 0^5)
$\int_0^4 2e^x + 3x^4\, dx$= 2 ($e^4$ - 1) + $\frac{3}{5}$ (1024 - 0)
$\int_0^4 2e^x + 3x^4\, dx$= $2e^4$ - 2 + $\frac{3}{5}$ * 1024
$\int_0^4 2e^x + 3x^4\, dx$= $2e^4$ - 2 + $\frac{3072}{5}$
$\int_0^4 2e^x + 3x^4\, dx$= $\frac{10e^4+3062}{5}$.

(e) $\int 3\frac{1}{x} + 2e^x\, dx$.

$\int 3\frac{1}{x} + 2e^x\, dx$= $\int 3\frac{1}{x}\, dx$ + $\int 2e^x\, dx$
$\int 3\frac{1}{x} + 2e^x\, dx$= 3 $\int \frac{1}{x}\, dx$ + 2 $\int e^x\, dx$
$\int 3\frac{1}{x} + 2e^x\, dx$= 3 ln $|x|$ + $2e^x$ + C.

(f) $\int \cos x + sen\, x + 2x^{\frac{3}{5}}\, dx$.

$\int \cos x + sen\, x + 2x^{\frac{3}{5}}\, dx$= $\int \cos x\, dx$ + $\int sen\, x\, dx$ + $\int 2x^{\frac{3}{5}}\, dx$
$\int \cos x + sen\, x + 2x^{\frac{3}{5}}\, dx$= sen x - cos x + 2 $\int x^{\frac{3}{5}}\, dx$
$\int \cos x + sen\, x + 2x^{\frac{3}{5}}\, dx$= sen x - cos x + 2 $\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}$
$\int \cos x + sen\, x + 2x^{\frac{3}{5}}\, dx$= sen x - cos x + $\frac{5}{4}$ $x^{\frac{8}{5}}$ + C.

(g) $\int_{-5}^1 x^2 + 2x + 8\, dx$.

$\int_{-5}^1 x^2 + 2x + 8\, dx$= $\int_{-5}^1 x^2\, dx$ + $\int_{-5}^1 2x\, dx$ + $\int_{-5}^1 8\, dx$
$\int_{-5}^1 x^2 + 2x + 8\, dx$= $\frac{x^3}{3}$ $|_{-5}^1$ + 2 $\int_{-5}^1 x\, dx$ + 8 $\int_{-5}^1 1\, dx$
$\int_{-5}^1 x^2 + 2x + 8\, dx$= $\frac{1}{3}$ [1^3 - $(-5)^3$] + 2 $\frac{x^2}{2}$ $|_{-5}^1$ + 8 x $|_{-5}^1$
$\int_{-5}^1 x^2 + 2x + 8\, dx$= $\frac{1}{3}$ [1 - (-125)] + [1^2 - $(-5)^2$] + 8 [1 - (-5)]
$\int_{-5}^1 x^2 + 2x + 8\, dx$= $\frac{1}{3}$ (1 + 125) + (1 - 25) + 8 (1 + 5)
$\int_{-5}^1 x^2 + 2x + 8\, dx$= $\frac{1}{3}$ * 126 - 24 + 8 * 6
$\int_{-5}^1 x^2 + 2x + 8\, dx$= $\frac{126}{3}$ - 24 + 48

$\int_{-5}^{1} x^2 + 2x + 8\ dx$= 66.

(h) $\int x - x^{\frac{2}{5}} + 3e^x - cos\ x\ \ dx$.

$\int x - x^{\frac{2}{5}} + 3e^x - cos\ x\ \ dx$= $\int x\ dx$ + $\int -x^{\frac{2}{5}}\ dx$ + $\int 3e^x\ dx$ + $\int -cos\ x\ \ dx$

$\int x - x^{\frac{2}{5}} + 3e^x - cos\ x\ \ dx$= $\frac{x^2}{2}$ - $\int x^{\frac{2}{5}}\ dx$ + 3 $\int e^x\ dx$ - $\int cos\ x\ \ dx$

$\int x - x^{\frac{2}{5}} + 3e^x - cos\ x\ \ dx$= $\frac{x^2}{2}$ - $\frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}$ + 3e^x - sen x

$\int x - x^{\frac{2}{5}} + 3e^x - cos\ x\ \ dx$= $\frac{1}{2}\ x^2$ - $\frac{5}{7}\ x^{\frac{7}{5}}$ + 3e^x - sen x + C.

Ejercicio 3.

Calcular las siguientes integrales utilizando los métodos vistos.

(a) $\int (3x^4 + 5x^2 + 8)^4\ (12x^3 + 10x)\ dx$.

$\int (3x^4 + 5x^2 + 8)^4\ (12x^3 + 10x)\ dx = \int u^4\ du$ (*)
$\int (3x^4 + 5x^2 + 8)^4\ (12x^3 + 10x)\ dx = \frac{u^5}{5}$
$\int (3x^4 + 5x^2 + 8)^4\ (12x^3 + 10x)\ dx = \frac{(3x^4+5x^2+8)^5}{5}$ + C.

(*) u= $3x^4$ + $5x^2$ + 8; du= (12x^3 + 10x) dx.

(b) $\int x \cos x\ \ dx$.

$\int x \cos x\ \ dx$= x sen x - $\int sen\ x\ dx$ (*)
$\int x \cos x\ \ dx$= x sen x - (-cos x)
$\int x \cos x\ \ dx$= x sen x + cos x + C.

(*) u= x; du= dx; dv= cos x dx; v= sen x.

(c) $\int x^3 \ln x\ \ dx$.

$\int x^3 \ln x\ \ dx$= ln x $\frac{x^4}{4}$ - $\int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x}\ dx$ (*)
$\int x^3 \ln x\ \ dx$= $\frac{x^4}{4}$ ln x - $\frac{1}{4}$ $\int x^3\ dx$
$\int x^3 \ln x\ \ dx$= $\frac{x^4}{4}$ ln x - $\frac{1}{4}$ $\frac{x^4}{4}$
$\int x^3 \ln x\ \ dx$= $\frac{x^4}{4}$ ln x - $\frac{x^4}{16}$
$\int x^3 \ln x\ \ dx$= $\frac{x^4}{4}$ (ln x - $\frac{1}{4}$) + C.

(*) u= ln x; du= $\frac{1}{x}$ dx; dv= x^3 dx; v= $\frac{x^4}{4}$.

(d) $\int cos\ 5x * 5\ dx$.

$\int cos\ 5x * 5\ dx$= $\int \cos u\ \ du$ (*)
$\int cos\ 5x * 5\ dx$= sen u
$\int cos\ 5x * 5\ dx$= sen 5x + C.

(*) u= 5x; du= 5 dx.

(e) $\int \frac{2+e^x}{e^x+2x} dx$.

$\int \frac{2+e^x}{e^x+2x} dx = \int \frac{1}{u} du$ (*)
$\int \frac{2+e^x}{e^x+2x} dx = \ln |u|$
$\int \frac{2+e^x}{e^x+2x} dx = \ln |e^x + 2x|$ + C.

(*) u= e^x + 2x; du= (e^x + 2) dx.

(f) $\int x\sqrt{x-1}\, dx$.

(*) u= $\sqrt{x-1}$; du= $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ dx.

$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \int (u+1)\sqrt{u}\, du$ (*)
$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \int u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\, du$
$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \int u^{\frac{3}{2}}\, du + \int u^{\frac{1}{2}}\, du$
$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$
$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$
$\int x\sqrt{x-1}\, dx = 2\, [\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}]$ + C.

(*) u= x - 1; du= dx.

(g) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$.

$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \int_0^8 \frac{1}{\sqrt{u}} dx$ (*)
$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \int_{0+1}^{8+1} u^{\frac{-1}{2}}\, du$
$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} |_{0+1}^{8+1}$
$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2\,(x+1)^{\frac{1}{2}} |_0^8$
$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2\,\sqrt{x+1} |_0^8$
$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2\,(\sqrt{8+1} - \sqrt{0+1})$
$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2\,(\sqrt{9} - \sqrt{1})$

$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$= 2 (3 - 1)
$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$= 2 * 2
$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$= 4.

(*) u= x + 1; du= dx.

(h) $\int_0^{2\pi} x \, sen \, x \, dx.$

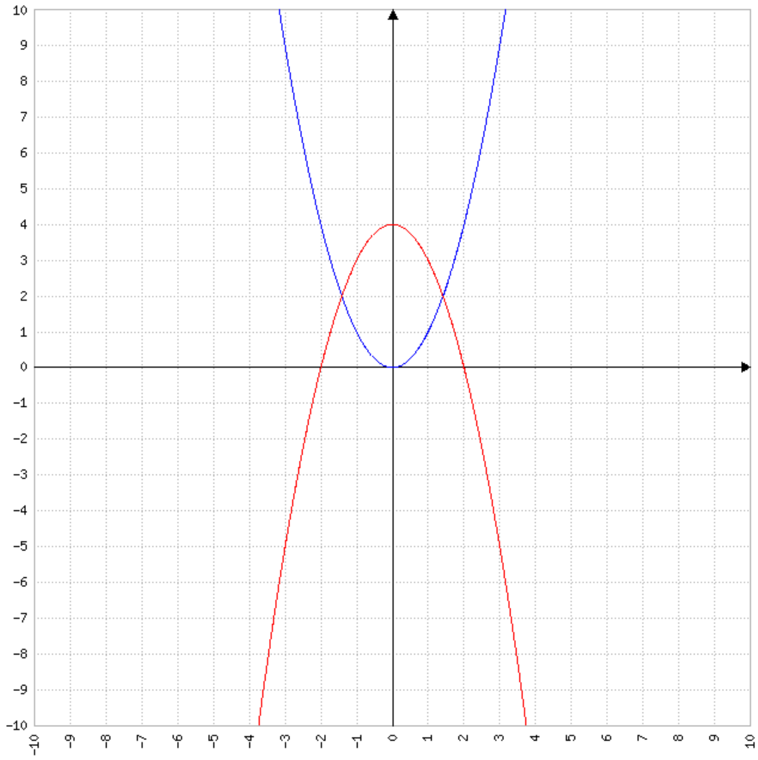
$\int_0^{2\pi} x \, sen \, x \, dx$= x (-cos x) $|_0^{2\pi}$ - $\int_0^{2\pi} -\cos x \, dx$ (*)
$\int_0^{2\pi} x \, sen \, x \, dx$= -x cos x $|_0^{2\pi}$ + $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$
$\int_0^{2\pi} x \, sen \, x \, dx$= -(2$\pi$ cos 2π - 0 cos 0) + sen x $|_0^{2\pi}$
$\int_0^{2\pi} x \, sen \, x \, dx$= -(2$\pi$ * 1 - 0 * 1) + (sen 2π - sen 0)
$\int_0^{2\pi} x \, sen \, x \, dx$= -(2$\pi$ - 0) + (0 - 0)
$\int_0^{2\pi} x \, sen \, x \, dx$= -2$\pi$ + 0
$\int_0^{2\pi} x \, sen \, x \, dx$= -2$\pi$.

(*) u= x; du= dx; dv= sen x dx; v= -cos x.

Ejercicio 4.

Hallar el área comprendida entre las gráficas de las siguientes pares de funciones:

(a) *f (x)=* x^2 *y g (x)= -*x^2 *+ 4.*



f (x)= g (x)
x^2= -x^2 + 4
x^2 + x^2= 4
2x^2= 4
x^2= $\frac{4}{2}$
x^2= 2
$\sqrt{x^2}$= $\sqrt{2}$
$|x|$= $\sqrt{2}$
x= $\pm$ $\sqrt{2}$.

Intervalo	(-$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)
VP	0
f (x)	0
g (x)	4

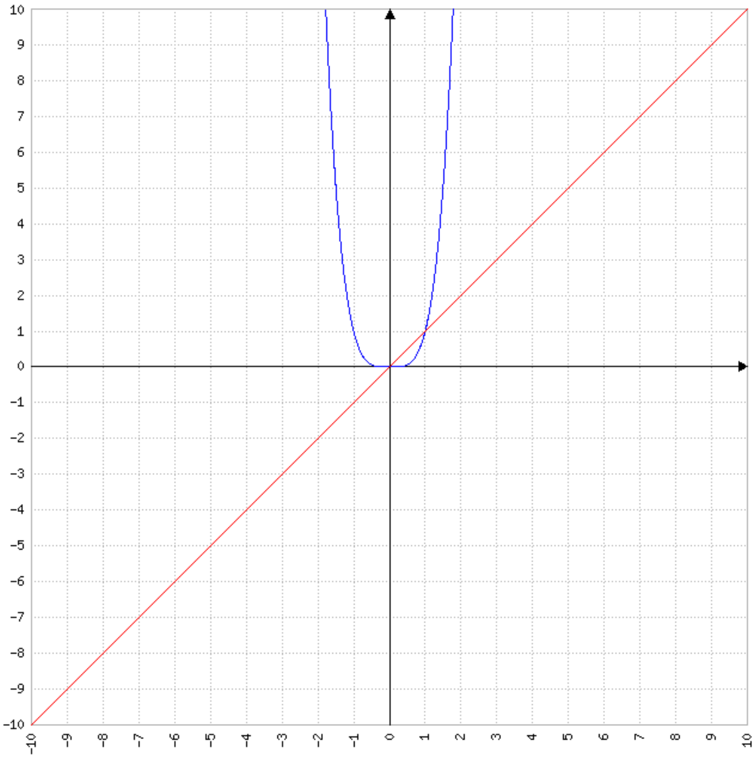
A= $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} g\ (x) - f\ (x)\ dx$

A= $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-x^2 + 4) - x^2\ dx$

A= $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -x^2 + 4 - x^2\ dx$

A= $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -2x^2 + 4\, dx$
A= $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -2x^2\, dx$ + $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4\, dx$
A= -2 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2\, dx$ + 4 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 1\, dx$
A= -2 $\frac{x^3}{3} |_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$ + 4x $|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$
A= $\frac{-2}{3}$ [$(\sqrt{2})^3$ - $(-\sqrt{2})^3$] + 4 [$\sqrt{2}$ - (-$\sqrt{2}$)]
A= $\frac{-2}{3}$ [$(\sqrt{2})^3$ + $(\sqrt{2})^3$] + 4 ($\sqrt{2}$ + $\sqrt{2}$)
A= $\frac{-2}{3}$ * 2 $(\sqrt{2})^3$ + 4 * 2 $\sqrt{2}$
A= $\frac{-4}{3}$ $(\sqrt{2})^2$ $\sqrt{2}$ + 8 $\sqrt{2}$
A= $\frac{-4}{3}$ * 2 $\sqrt{2}$ + 8 $\sqrt{2}$
A= $\frac{-8}{3}$ $\sqrt{2}$ + 8 $\sqrt{2}$
A= $\frac{16}{3}$ $\sqrt{2}$.

(b) *f (x)=* x^4 *y g (x)= x.*



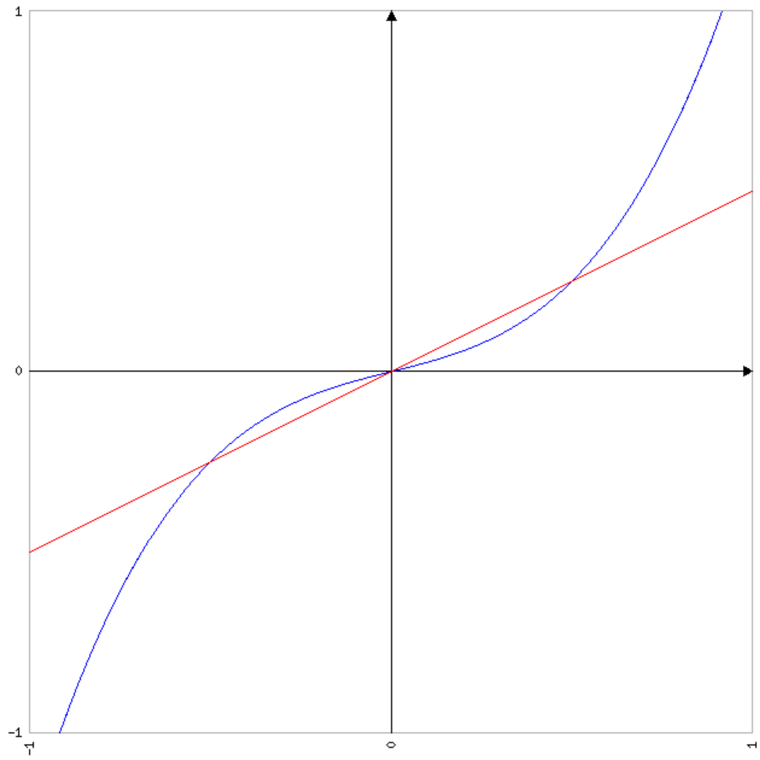
f (x)= g (x)
x^4= x
x^4 - x= 0
x^3 (x - 1)= 0.

x_1= 0; x_2= 1.

Intervalo	(0, 1)
VP	$\frac{1}{2}$
f (x)	$\frac{1}{16}$
g (x)	$\frac{1}{2}$

A= $\int_0^1 g\ (x) - f\ (x)\ dx$
A= $\int_0^1 x - x^4\ dx$
A= $\int_0^1 x\ dx$ + $\int_0^1 -x^4\ dx$
A= $\frac{x^2}{2}\ |_0^1$ - $\int_0^1 x^4\ dx$
A= $\frac{1}{2}$ $(1^2$ - $0^2)$ - $\frac{x^5}{5}\ |_0^1$
A= $\frac{1}{2}$ (1 - 0) - $\frac{1}{5}$ $(1^5$ - $0^5)$
A= $\frac{1}{2}$ * 1 - $\frac{1}{5}$ (1 - 0)
A= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{5}$ * 1
A= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{5}$
A= $\frac{3}{10}$.

(c) *f (x)=* x^3 + $\frac{1}{4}$ *x y g (x)=* $\frac{1}{2}$ *x.*



f (x)= g (x)
x^3 + $\frac{1}{4}$ x= $\frac{1}{2}$ x
x^3 + $\frac{1}{4}$ x - $\frac{1}{2}$ x= 0
x^3 - $\frac{1}{4}$ x= 0
x (x^2 - $\frac{1}{4}$)= 0.

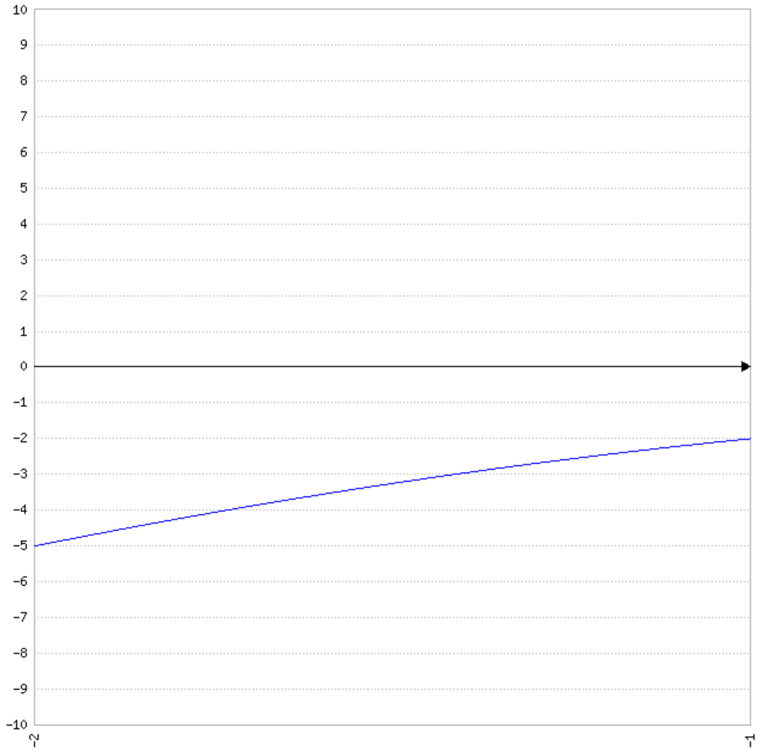
x_1= 0; x_2= $\frac{-1}{2}$; x_3= $\frac{1}{2}$.

Intervalo	**($\frac{-1}{2}$, 0)**	**(0, $\frac{1}{2}$)**
VP	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$
f (x)	$\frac{-5}{64}$	$\frac{5}{64}$
g (x)	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$

A= $\int_{\frac{-1}{2}}^{0} f\ (x) - g\ (x)\ dx$ + $\int_{0}^{\frac{1}{2}} g\ (x) - f\ (x)\ dx$
A= $\int_{\frac{-1}{2}}^{0} (x^3 + \frac{1}{4}x) - \frac{1}{2}x\ dx$ + $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}x - (x^3 + \frac{1}{4}x)\ dx$
A= $\int_{\frac{-1}{2}}^{0} x^3 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x\ dx$ + $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}x - x^3 - \frac{1}{4}x\ dx$
A= $\int_{\frac{-1}{2}}^{0} x^3 - \frac{1}{4}x\ dx$ + $\int_{0}^{\frac{1}{2}} -x^3 + \frac{1}{4}x\ dx$
A= $\int_{\frac{-1}{2}}^{0} x^3\ dx$ + $\int_{\frac{-1}{2}}^{0} \frac{-1}{4}x\ dx$ + $\int_{0}^{\frac{1}{2}} -x^3\ dx$ + $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}x\ dx$
A= $\int_{\frac{-1}{2}}^{0} x^3\ dx$ - $\frac{1}{4}$ $\int_{\frac{-1}{2}}^{0} x\ dx$ - $\int_{0}^{\frac{1}{2}} x^3\ dx$ + $\frac{1}{4}$ $\int_{0}^{\frac{1}{2}} x\ dx$
A= $\frac{x^4}{4}\ |_{\frac{-1}{2}}^{0}$ - $\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\ |_{\frac{-1}{2}}^{0}$ - $\frac{x^4}{4}\ |_{0}^{\frac{1}{2}}$ + $\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\ |_{0}^{\frac{1}{2}}$
A= $\frac{1}{4}$ [0^4 - $(\frac{-1}{2})^4$] - $\frac{1}{8}$ [0^2 - $(\frac{-1}{2})^2$] - $\frac{1}{4}$ [$(\frac{1}{2})^4$ - 0^4] + $\frac{1}{8}$ [$(\frac{1}{2})^2$ - 0^2]
A= $\frac{1}{4}$ (0 - $\frac{1}{16}$) - $\frac{1}{8}$ (0 - $\frac{1}{4}$) - $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{16}$ - 0) + $\frac{1}{8}$ ($\frac{1}{4}$ - 0)
A= $\frac{1}{4}$ ($\frac{-1}{16}$) - $\frac{1}{8}$ ($\frac{-1}{4}$) - $\frac{1}{4}\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{8}\frac{1}{4}$
A= $\frac{-1}{64}$ + $\frac{1}{32}$ - $\frac{1}{64}$ + $\frac{1}{32}$
A= $\frac{1}{32}$.

Ejercicio 5.

Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f (x)= -x^2 - 1 entre -2 ≤ x ≤ -1.



f (x)= 0
-x^2 - 1= 0
$x^2 \neq$ -1.

Intervalo	(-2, -1)
VP	$\frac{-3}{2}$
f (x)	< 0

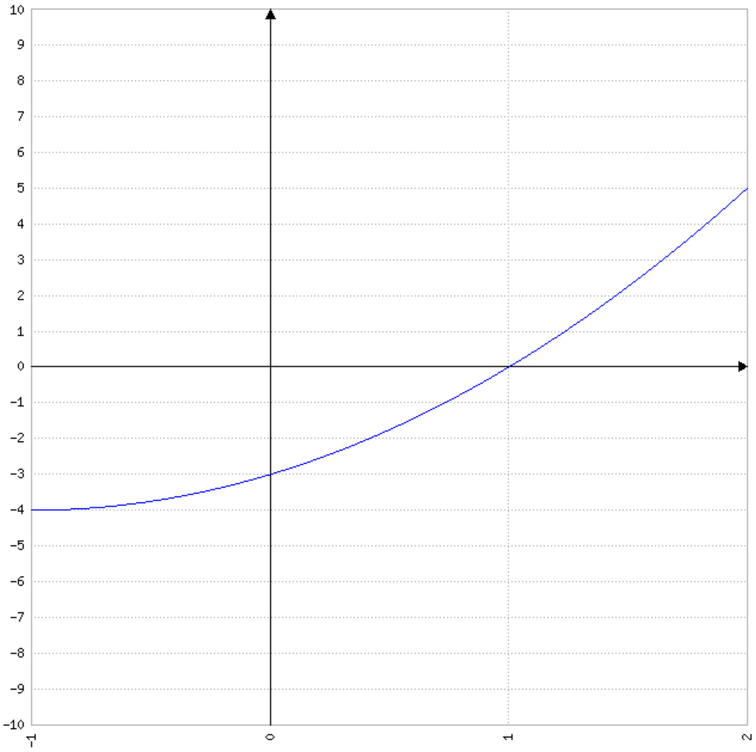
A= -$\int_{-2}^{-1} -x^2 - 1\, dx$
A= -($\int_{-2}^{-1} -x^2\, dx$ + $\int_{-2}^{-1} -1\, dx$)
A= -(-$\int_{-2}^{-1} x^2\, dx$ - $\int_{-2}^{-1} 1\, dx$)
A= -($\frac{-x^3}{3}$ $|_{-2}^{-1}$ - x $|_{-2}^{-1}$)
A= -{$\frac{-1}{3}$ [$(-1)^3$ - $(-2)^3$] - [-1 - (-2)]}
A= -{$\frac{-1}{3}$ [-1 - (-8)] - (-1 + 2)}
A= -[$\frac{-1}{3}$ (-1 + 8) - 1]
A= -($\frac{-1}{3}$ * 7 - 1)
A= -($\frac{-7}{3}$ - 1)

A= $-(\frac{-10}{3})$

A= $\frac{10}{3}$.

Ejercicio 6.

Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f (x)= x^2 + 2x - 3 entre -1 ≤ x ≤ 2.



f (x)= 0
x^2 + 2x - 3= 0.

$x_1, x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4*1(-3)}}{2*1}$
$x_1, x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{-2 \pm 4}{2}$
$x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$.
$x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$.

Intervalo	**(-1, 1)**	**(1, 2)**
VP	0	$\frac{3}{2}$
f (x)	< 0	> 0

A= -$\int_{-1}^{1} x^2 + 2x - 3 \, dx$ + $\int_{1}^{2} x^2 + 2x - 3 \, dx$
A= -($\int_{-1}^{1} x^2 \, dx$ + $\int_{-1}^{1} 2x \, dx$ + $\int_{-1}^{1} -3 \, dx$) + ($\int_{1}^{2} x^2 \, dx$ + $\int_{1}^{2} 2x \, dx$ + $\int_{1}^{2} -3 \, dx$)
A= -($\frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1}$ + 2 $\int_{-1}^{1} x \, dx$ - 3 $\int_{-1}^{1} 1 \, dx$) + ($\frac{x^3}{3} \Big|_{1}^{2}$ + 2 $\int_{1}^{2} x \, dx$ - 3 $\int_{1}^{2} 1 \, dx$)

A= -{$\frac{1}{3}$ [1^3 - $(-1)^3$] + 2 $\frac{x^2}{2}$ $|_{-1}^{1}$ - 3x $|_{-1}^{1}$} + [$\frac{1}{3}$ (2^3 - 1^3) + 2 $\frac{x^2}{2}$ $|_{1}^{2}$ - 3x $|_{1}^{2}$]

A= -{$\frac{1}{3}$ [1 - (-1)] + [1^2 - $(-1)^2$] - 3 [1 - (-1)]] + [$\frac{1}{3}$ (8 - 1) + (2^2 - 1^2) - 3 (2 - 1)]

A= -[$\frac{1}{3}$ (1 + 1) + (1 - 1) - 3 (1 + 1)] + [$\frac{1}{3}$ * 7 + (4 - 1) - 3 * 1]

A= -($\frac{1}{3}$ * 2 + 0 - 3 * 2) + ($\frac{7}{3}$ + 3 - 3)

A= -($\frac{2}{3}$ + 0 - 6) + $\frac{7}{3}$

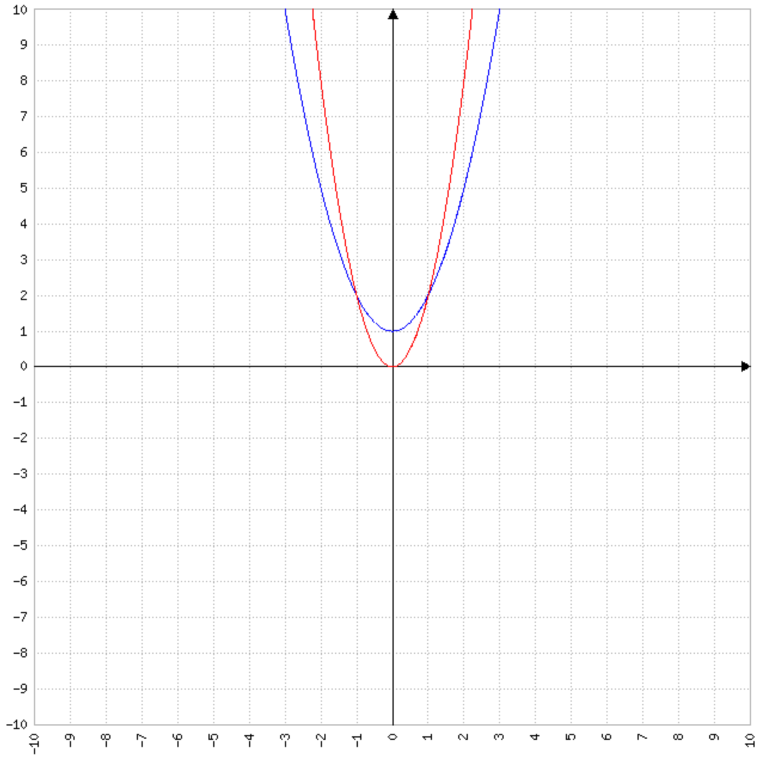
A= -($\frac{-16}{3}$) + $\frac{7}{3}$

A= $\frac{16}{3}$ + $\frac{7}{3}$

A= $\frac{23}{3}$.

Ejercicio 7.

Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de f (x)= x^2 + 1 y g (x)= $2x^2$ para 0 ≤ x ≤ 2.



f (x)= g (x)
x^2 + 1= $2x^2$
$2x^2$ - x^2= 1
x^2= 1
$\sqrt{x^2}$= $\sqrt{1}$
$|x|$= 1
x= $\pm$1.

Intervalo	(-1, 1)
VP	0
f (x)	1
g (x)	0

A= $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1) - 2x^2 \, dx$
A= $\int_{-1}^{1} x^2 + 1 - 2x^2 \, dx$
A= $\int_{-1}^{1} -x^2 + 1 \, dx$
A= $\int_{-1}^{1} -x^2 \, dx$ + $\int_{-1}^{1} 1 \, dx$
A= -$\int_{-1}^{1} x^2 \, dx$ + x $|_{-1}^{1}$
A= $\frac{-x^3}{3}$ $|_{-1}^{1}$ + [1 - (-1)]

A= $\frac{-1}{3}$ [1^3 - $(-1)^3$] + (1 + 1)

A= $\frac{-1}{3}$ [1 - (-1)] + 2

A= $\frac{-1}{3}$ (1 + 1) + 2

A= $\frac{-1}{3}$ * 2 + 2

A= $\frac{-2}{3}$ + 2

A= $\frac{4}{3}$.

Juan Menduiña

Ejercicio 8.

Hallar f (x) sabiendo que f´ (x)= $x + \frac{1}{x^2}$ y f (1)= 1.

f (x)= $\int f'(x)\, dx$
f (x)= $\int x + \frac{1}{x^2}\, dx$
f (x)= $\int x\, dx$ + $\int \frac{1}{x^2}\, dx$
f (x)= $\frac{x^2}{2}$ + $\int x^{-2}\, dx$
f (x)= $\frac{x^2}{2}$ + $\frac{x^{-1}}{-1}$
f (x)= $\frac{1}{2}x^2$ - $\frac{1}{x}$ + C.

f (1)= 1
$\frac{1}{2} * 1^2$ - $\frac{1}{1}$ + C= 1
$\frac{1}{2}$ * 1 - 1 + C= 1
$\frac{1}{2}$ - 1 + C= 1
$\frac{-1}{2}$ + C= 1
C= 1 + $\frac{1}{2}$
C= $\frac{3}{2}$.

f (x)= $\frac{1}{2}x^2$ - $\frac{1}{x}$ + $\frac{3}{2}$.

Ejercicio 9.

Sabiendo que f´ (x)= $3x^2$ - 8x + 2 y, además, que f (3)= -4, hallar la función f (x).

f (x)= $\int f'(x)\, dx$
f (x)= $\int 3x^2 - 8x + 2\, dx$
f (x)= $\int 3x^2\, dx$ + $\int -8x\, dx$ + $\int 2\, dx$
f (x)= 3 $\int x^2\, dx$ - 8 $\int x\, dx$ + 2 $\int 1\, dx$
f (x)= 3 $\frac{x^3}{3}$ - 8 $\frac{x^2}{2}$ + 2x
f (x)= x^3 - $4x^2$ + 2x + C.

f (3)= -4
3^3 - 4 * 3^2 + 2 * 3 + C= -4
27 - 4 * 9 + 6 + C= -4
27 - 36 + 6 + C= -4
-3 + C= -4
C= -4 + 3
C= -1.

f (x)= x^3 - $4x^2$ + 2x - 1.

Ejercicio 10.

Hallar todas las funciones cuya derivada es g´ (x)= x^2 *cos x.*

g (x)= $\int g´(x)\, dx$
g (x)= $\int x^2 \cos x\, dx$
g (x)= x^2 sen x - $\int sen\, x * 2x\, dx$ (*)
g (x)= x^2 sen x - 2 $\int x\, sen\, x\, dx$
g (x)= x^2 sen x - 2 [x (-cos x) - $\int -\cos x\, dx$] (**)
g (x)= x^2 sen x - 2 (-x cos x + $\int \cos x\, dx$)
g (x)= x^2 sen x - 2 (-x cos x + sen x)
g (x)= x^2 sen x - 2x cos x - 2 sen x
g (x)= (x^2 - 2) sen x - 2x cos x + C.

(*) u= x^2; du= 2x dx; dv= cos x dx; v= sen x.
(**) u= x; du= dx; dv= sen x; v= -cos x.

Ejercicio 11.

Sea g´´ (x)= 2x^3 - 4x^7, g´ (1)= -2 y g (0)= 0, hallar la función g (x).

g´ (x)= $\int g´´ (x)\ dx$
g´ (x)= $\int 2x^3 - 4x^7\ dx$
g´ (x)= $\int 2x^3\ dx$ + $\int -4x^7\ dx$
g´ (x)= 2 $\int x^3\ dx$ - 4 $\int x^7\ dx$
g´ (x)= 2 $\frac{x^4}{4}$ - 4 $\frac{x^8}{8}$
g´ (x)= $\frac{1}{2}$ x^4 - $\frac{1}{2}$ x^8
g´ (x)= $\frac{1}{2}$ (x^4 - x^8) + C.

g´ (1)= -2
$\frac{1}{2}$ (1^4 - 1^8) + C= -2
$\frac{1}{2}$ (1 - 1) + C= -2
$\frac{1}{2}$ * 0 + C= -2
0 + C= -2
C= -2.

g´ (x)= $\frac{1}{2}$ (x^4 - x^8) - 2.

g (x)= $\int g´ (x)\ dx$
g (x)= $\int \frac{1}{2} (x^4 - x^8) - 2\ dx$
g (x)= $\int \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2} x^8 - 2\ dx$
g (x)= $\int \frac{1}{2} x^4\ dx$ + $\int \frac{-1}{2} x^8\ dx$ + $\int -2\ dx$
g (x)= $\frac{1}{2}$ $\int x^4\ dx$ - $\frac{1}{2}$ $\int x^8\ dx$ - 2 $\int 1\ dx$
g (x)= $\frac{1}{2}$ $\frac{x^5}{5}$ - $\frac{1}{2}$ $\frac{x^9}{9}$ - 2x
g (x)= $\frac{1}{10}$ x^5 - $\frac{1}{18}$ x^9 - 2x + C.

g (0)= 0
$\frac{1}{10}$ 0^5 - $\frac{1}{18}$ 0^9 - 2 * 0 + C= 0
$\frac{1}{10}$ * 0 - $\frac{1}{18}$ * 0 - 0 + C= 0
0 - 0 - 0 + C= 0
C= 0.

g (x)= $\frac{1}{10}$ x^5 - $\frac{1}{18}$ x^9 - 2x.

Juan Menduiña

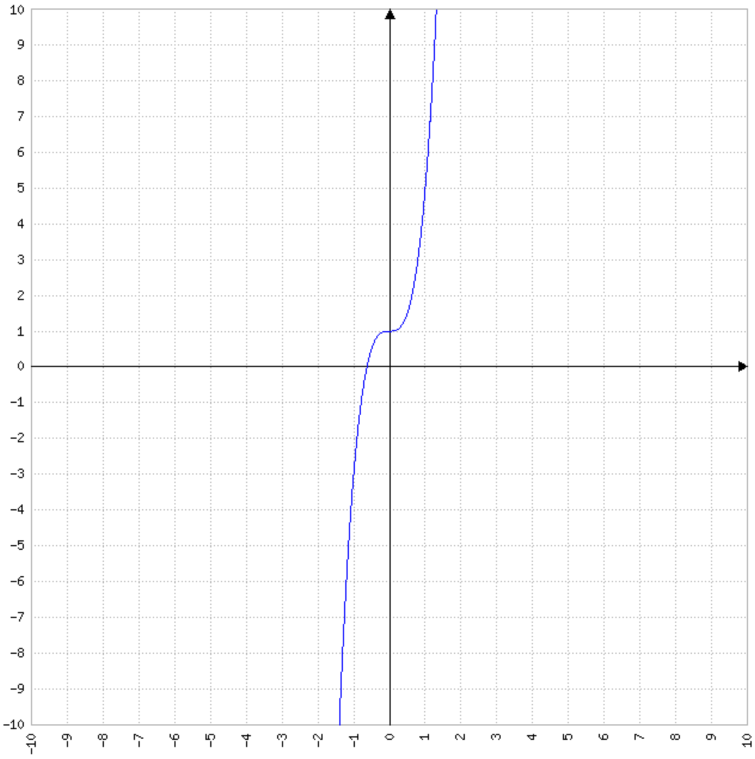
Trabajo Práctico N° 7:
Ejercicios de Repaso.

Ejercicio 1.

Para cada una de las siguientes funciones:

i. Determinar el dominio de la función.
ii. Estudiar la continuidad: indicar el conjunto donde la función es continua, señalar y clasificar sus discontinuidades si las hay.
iii. Estudiar la existencia de asíntotas verticales y horizontales.
iv. Determinar el conjunto donde es derivable.

(a) $f(x) = 4x^3 + 1$.



(i) Dominio:

$Dom_f = \mathbb{R}$.

(ii) Continuidad:

Al ser una función polinómica, f (x) es continua en todo su dominio. Por lo tanto, f (x) es continua en $\mathbb{R}$.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$\nexists \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $\forall$ a $\in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 4x^3 + 1 = +\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 4x^3 + 1 = -\infty$.

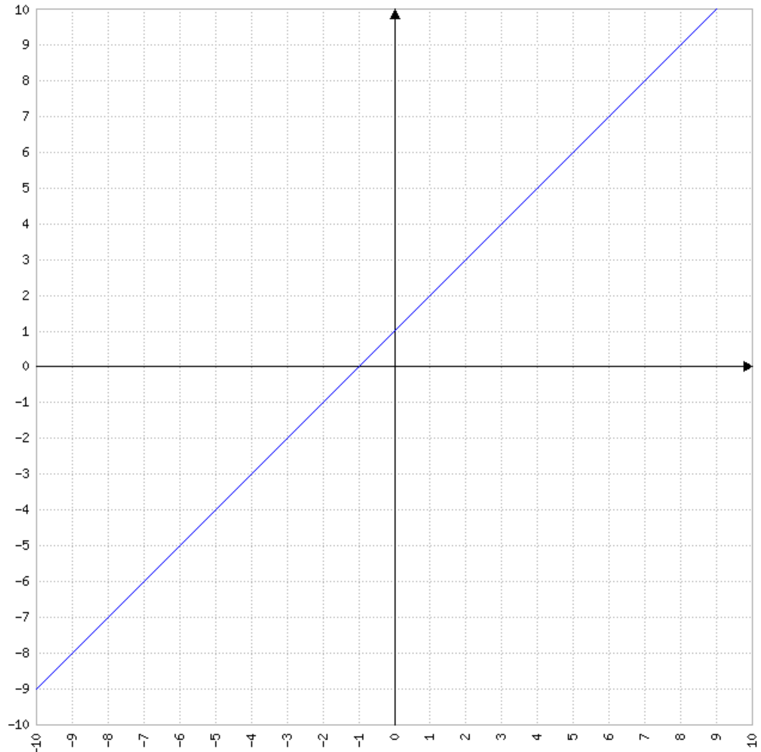
Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(iv) Derivabilidad:

$\exists$ f´ $(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, f (x) es derivable en $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.



(i) Dominio:

x - 1= 0
x= 1.

$Dom_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

(ii) Continuidad:

f (x) es discontinua evitable en x= 1, ya que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ y, entonces, ∃ $\lim_{x\to 1} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en ℝ - {1}.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 1 + 1 = 2.$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 1 + 1 = 2.$

Por lo tanto, f (x) no tiene una asíntota vertical en x= 0.

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-1}{x-1} = -\infty.$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{x-1} = +\infty.$

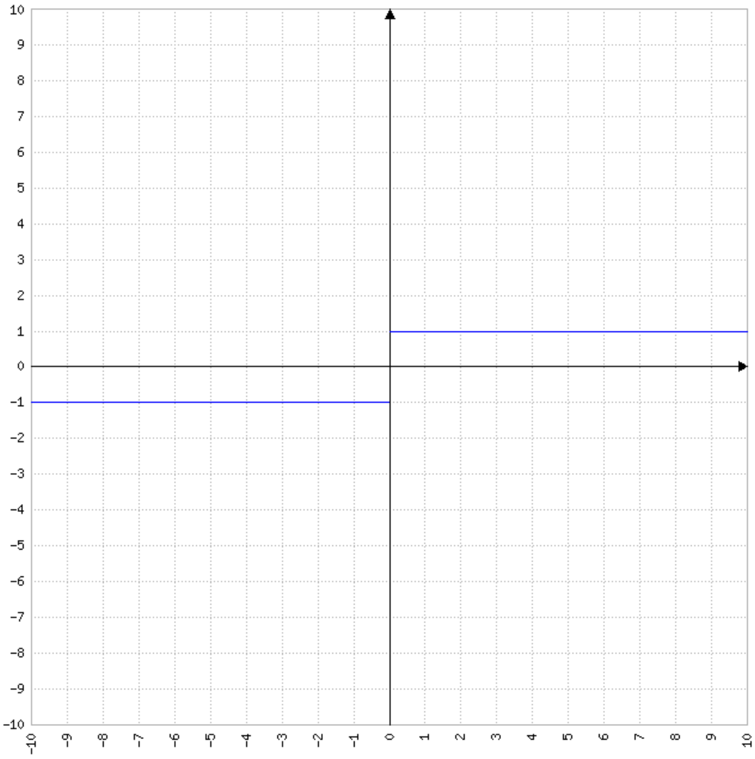
Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(iv) Derivabilidad:

∃ f´ $(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, ∀ x_0 ∈ ℝ - {1}.

Por lo tanto, f (x) es derivable en ℝ - {1}.

(c) *f (x)=* $\frac{x}{|x|}$.



(i) Dominio:

$|x|= 0$
x= 0.

$Dom_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

(ii) Continuidad:

f (x) es discontinua inevitable en x= 0, ya que $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$.

Por lo tanto, f (x) no tiene una asíntota vertical en x= 0.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|} = -1$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{|x|} = 1$.

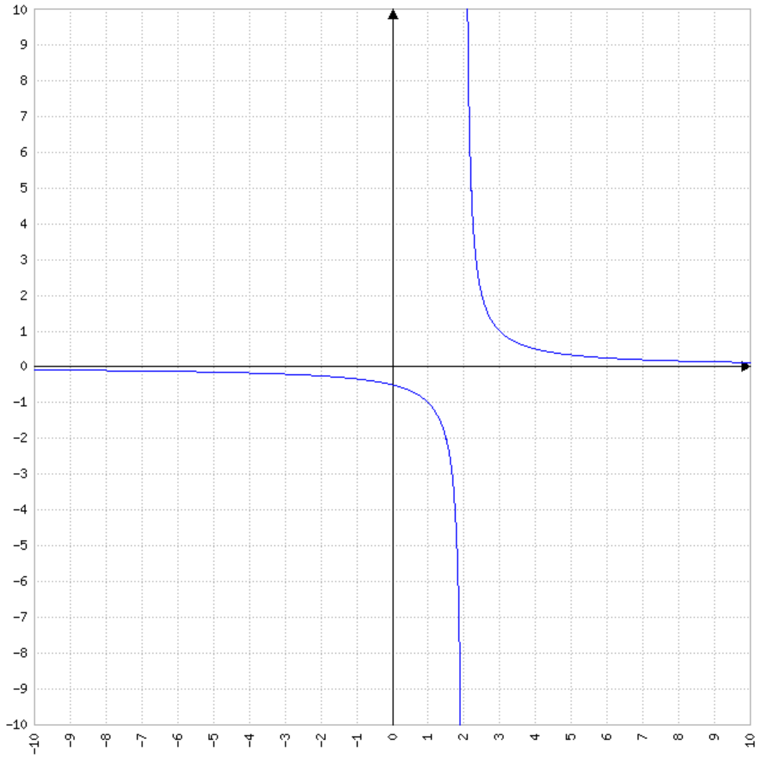
Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(iv) <u>Derivabilidad:</u>

$\exists$ f´ (x_0)= $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}$ - {0}.

Por lo tanto, f (x) es derivable en $\mathbb{R}$ - {0}.

(d) *f (x)*= $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$.



(i) <u>Dominio:</u>

x^2 - 3x + 2= 0.

x_1, x_2= $\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4*1*2}}{2*1}$

x_1, x_2= $\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$

x_1, x_2= $\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}$

x_1, x_2= $\frac{3\pm 1}{2}$

x_1= $\frac{3+1}{2}$= $\frac{4}{2}$= 2.

x_2= $\frac{3-1}{2}$= $\frac{2}{2}$= 1.

Dom_f= $\mathbb{R}$ - {1, 2}.

(ii) <u>Continuidad:</u>

f (x) es discontinua evitable en x= 1, ya que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$ y, entonces, $\exists \lim_{x \to 1} f(x)$. f (x) es discontinua inevitable en x= 2, ya que $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en $\mathbb{R}$ - {2}.

(iii) <u>Asíntotas verticales y horizontales:</u>

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1.$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1.$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = -\infty.$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = +\infty.$

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en x= 2.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = 0.$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = 0.$

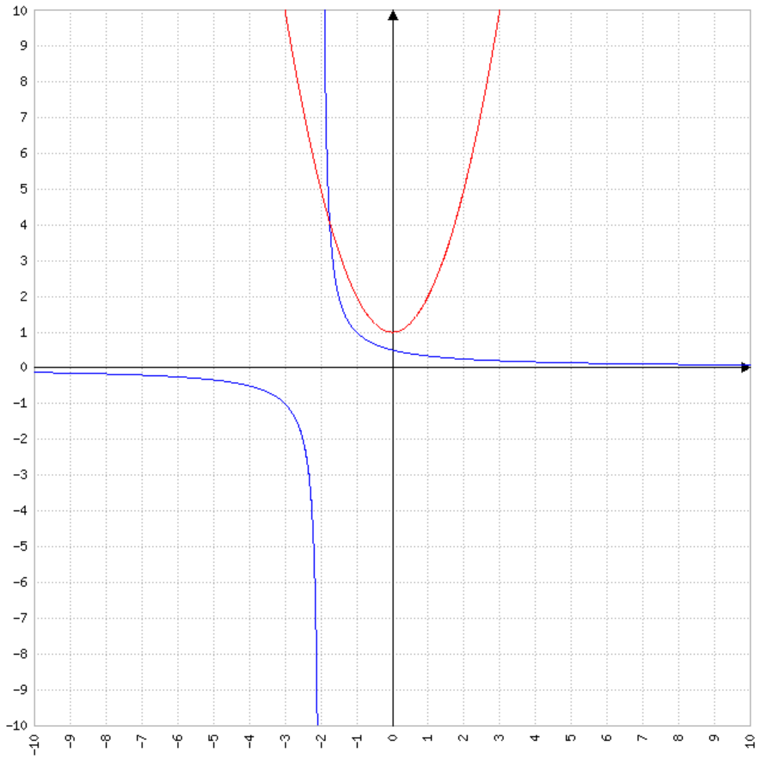
Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota horizontal en y= 0.

(iv) <u>Derivabilidad:</u>

$\exists$ f´ $(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ - {1, 2}.

Por lo tanto, f (x) es derivable en $\mathbb{R}$ - {1, 2}.

(e) *f (x)*= $\begin{cases} \frac{1}{x+2}, si\ x \geq -1 \\ x^2+1, si\ x < -1 \end{cases}$.



(i) Dominio:

$Dom_f = \mathbb{R}$.

(ii) Continuidad:

f (x) es discontinua inevitable en x= -1, ya que $\lim_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim_{x \to -1^+} f(x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \to -1} f(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en $\mathbb{R}$ - {-1}.

(iii) Asíntotas verticales y horizontales:

$\nexists \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $\forall$ a $\in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota horizontal en y= 0.

(iv) Derivabilidad:

$\exists$ f´ $(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$ - {-1}.

Por lo tanto, f (x) es derivable en $\mathbb{R}$ - {-1}.

(f) $f\,(x)= \begin{cases} \frac{x}{e^x}, si\ x \geq 0 \\ x^2, si\ x < 0 \end{cases}.$

(i) <u>Dominio:</u>

Dom_f= $\mathbb{R}$.

(ii) <u>Continuidad:</u>

f (x) es continua en x= 0, ya que $\lim_{x \to 0^-} f\,(x)$= $\lim_{x \to 0^+} f\,(x)$ y, entonces, $\exists \lim_{x \to 0} f\,(x)$. Por lo tanto, f (x) es continua en $\mathbb{R}$.

(iii) <u>Asíntotas verticales y horizontales:</u>

$\nexists \lim_{x \to a} f\,(x)= \pm\infty$, $\forall$ a $\in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to -\infty} f\,(x)$= $\lim_{x \to -\infty} x^2$= $+\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f\,(x)$= $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$= 0.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota horizontal en y= 0.

(iv) Derivabilidad:

$\exists$ f´ $(x_0)= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, f (x) es derivable en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.

Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$.

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{3^2-3-6}{3-3} = \frac{9-3-6}{0} = (\frac{0}{0})$.
$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ (*)
$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} x + 2 = 3 + 2 = 5$.

(*) $x_1, x_2 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4*1(-6)}}{2*1}$
$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{1 \pm 5}{2}$
$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$.
$x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$.

(b) $\lim\limits_{x \to 2} (2-x)^2 \, sen \frac{2}{2-x}$.

$\lim\limits_{x \to 2} (2-x)^2 \, sen \frac{2}{2-x} = (2-2)^2 \text{ sen } \frac{2}{2-2} = 0^2 \text{ sen } \frac{2}{0} = 0 * \text{sen } \frac{2}{0} = 0$.

(c) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x \to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \frac{4*4-4^2}{2-\sqrt{4}} = \frac{16-16}{2-2} = (\frac{0}{0})$.
$\lim\limits_{x \to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{4-2x}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}$
$\lim\limits_{x \to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 4} -8\sqrt{x} + 4\sqrt{x^3} = -8\sqrt{4} + 4\sqrt{4^3} = -8 * 2 + 4\sqrt{64} = -16 + 4 * 8 = -16 + 32 = 16$.

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-x^4}{3x^3}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-x^4}{3x^3} = -\infty$.

(e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{ln\,x}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

(f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.

(g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x}$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x} = (\frac{\infty}{\infty})$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x} = \frac{x^2(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2-\frac{1}{x})}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2+x+1}{2x^2-x} = \frac{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{5+0+0}{2-0} = \frac{5}{2}$.

(h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^6+1}{2x^4-x^2}$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^6+1}{2x^4-x^2} = +\infty$.

Ejercicio 3.

Calcular las derivadas de las siguientes funciones utilizando reglas de derivación.

(a) *a (x)= tan 2πx.*

a (x)= $\frac{sen\ 2\pi x}{\cos 2\pi x}$.

a´ (x)= $\frac{\cos 2\pi x * \cos 2\pi x - sen\ 2\pi x(-sen\ 2\pi x)}{(\cos 2\pi x)^2}$

a´ (x)= $\frac{(\cos 2\pi x)^2 + (sen\ 2\pi x)^2}{(\cos 2\pi x)^2}$

a´ (x)= $\frac{2\pi}{(\cos 2\pi x)^2}$

a´ (x)= $(\sec 2\pi x)^2$.

(b) *b (x)=* e^{x^2+1}.

b´ (c)= $e^{x^2+1} * 2$x

b´ (c)= 2xe^{x^2+1}.

(c) *c (x)=* $\frac{3x}{2x+10}$.

c´ (x)= $\frac{3(2x+10)-3x*2}{(2x+10)^2}$

c´ (x)= $\frac{6x+30-6x}{(2x+1)^2}$

c´ (x)= $\frac{30}{(2x+10)^2}$.

(d) *d (x)= ln (*x^2 *+ 1).*

d´ (x)= $\frac{1}{x^2+1}$ 2x

d´ (x)= $\frac{2x}{x^2+1}$.

(e) *e (x)= cos 2x sen x.*

e´ (x)= -sen 2x * 2 sen x + cos 2x cos x

e´ (x)= -2sen 2x sen x + cos 2x cos x.

(f) *f (x)*= $\sqrt{1+x^4}$ - *1*.

f´ (x)= $\frac{1}{2\sqrt{1+x^4}}\,4x^3$
f´ (x)= $\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$.

(g) *g (x)*= $\frac{e^{2x}}{x-1}$.

g´ (x)= $\frac{e^{2x}*2(x-1)-e^{2x}*1}{(x-1)^2}$
g´ (x)= $\frac{2xe^{2x}-2e^{2x}-e^{2x}}{(x-1)^2}$
g´ (x)= $\frac{2xe^{2x}-3e^{2x}}{(x-1)^2}$
g´ (x)= $\frac{e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^2}$.

(h) *h (x)*= $\frac{\ln x+2}{sen\,x}$.

h´ (x)= $\frac{\frac{1}{x+2}sen\,x-\ln(x+2)\cos x}{(sen\,x)^2}$.

Ejercicio 4.

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes de las siguientes funciones en los puntos indicados.

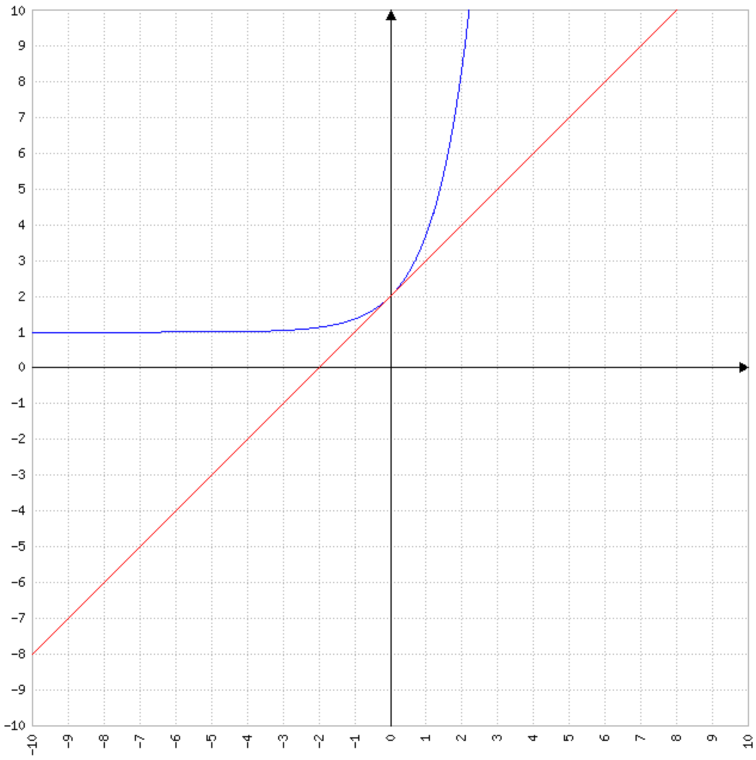
(a) *f (x)=* e^x *+ 1 en x= 0.*

f´ (x)= e^x.

f (0)= e^0 + 1
f (0)= 1 + 1
f (0)= 2.

f´ (0)= e^0
f´ (0)= 1.

y - 2= 1 (x - 0)
y - 2= 1x
y - 2= x
y= x + 2.



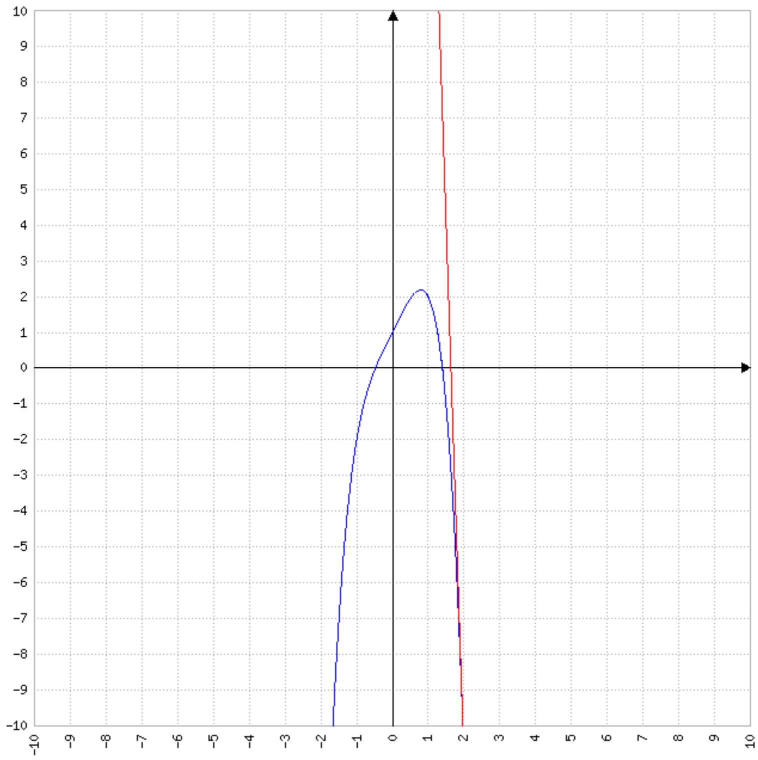
(b) *g (x)= -*x^4 *+ 2x + 1 en x= 2.*

g´ (x)= -4x^3 + 2.

g (2)= -2^4 + 2 * 2 + 1
g (2)= -16 + 4 + 1
g (2)= -11.

g´ (2)= -4 * 2^3 + 2
g´ (2)= -4 * 8 + 2
g´ (2)= -32 + 2
g´ (2)= -30.

y - (-11)= -30 (x - 2)
y + 11= -30x + 60
y= -30x + 60 - 11
y= -30x + 49.



(c) *h (x)= 2 ln (x^2 + 2) en x= 1.*

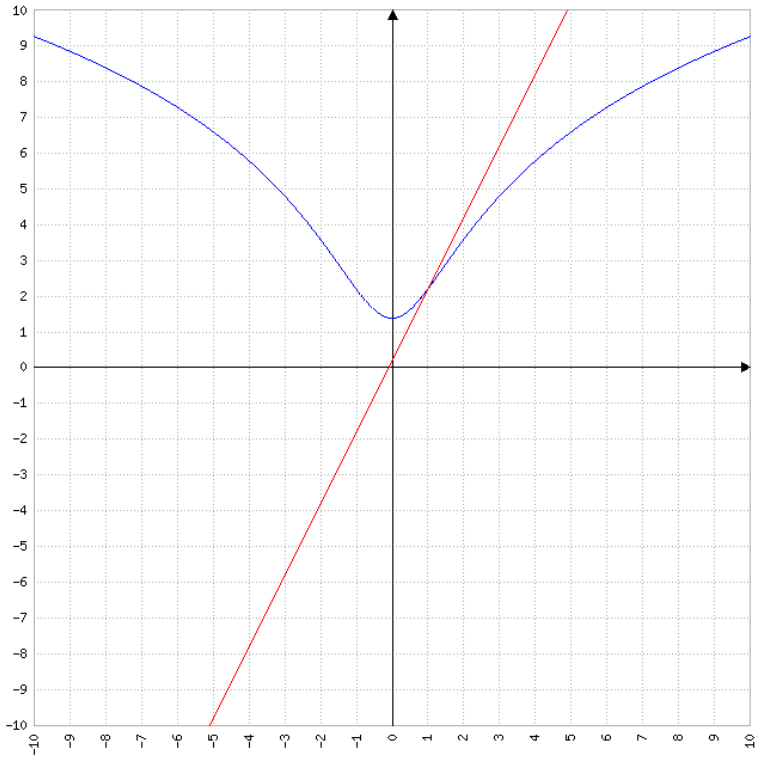
h´ (x)= 2 $\frac{1}{x^2+1}$ * 2x
h´ (x)= $\frac{4x}{x^2+1}$.

h (1)= 2 ln (1^2 + 2)
h (1)= 2 ln (1 + 2)
h (1)= 2 ln 3.

h´ (1)= $\frac{4*1}{1^2+1}$
h´ (1)= $\frac{4}{1+1}$

h´ (1)= $\frac{4}{2}$
h´ (1)= 2.

y - 2 ln 3= 2 (x - 1)
y - 2 ln 3= 2x - 2
y= 2x - 2 + 2 ln 3
y= 2x + 2 (ln 3 - 1).



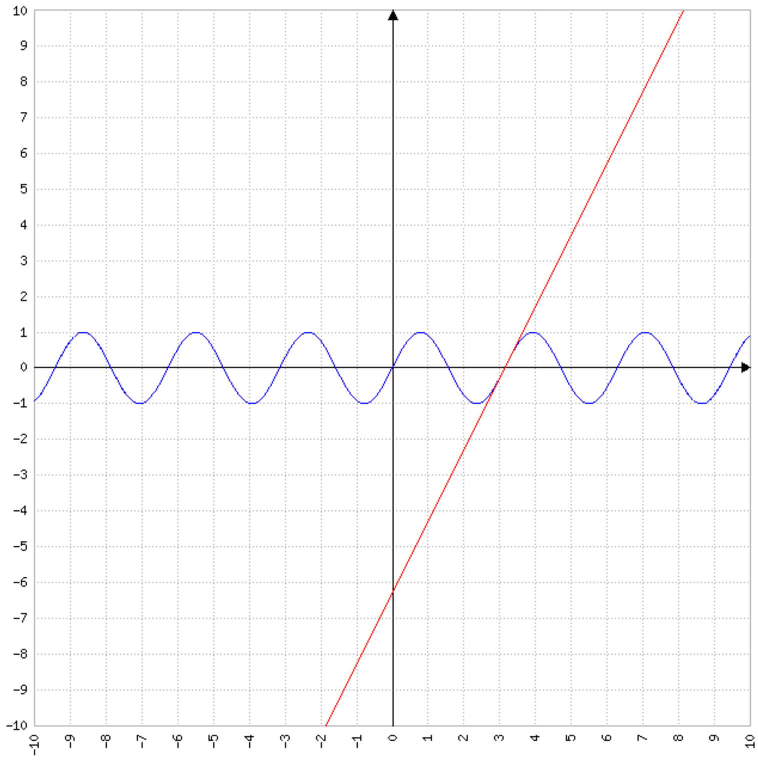
(d) *i (x)= sen 2x en x= π.*

i´ (x)= cos 2x * 2
i´ (x)= 2 cos 2x.

i (π)= sen 2π
i (π)= 0.

i´ (π)= 2 cos 2π
i´ (π)= 2 * 1
i´ (π)= 2.

y - 0= 2 (x - π)
y= 2x - 2π.



(e) *j (x)=* $\frac{x^2+x-2}{x}$ *en x= 1.*

j´ (x)= $\frac{(2x+1)x-(x^2+x-2)*1}{x^2}$

j´ (x)= $\frac{2x^2+x-x^2-x+2}{x^2}$

j´ (x)= $\frac{x^2+2}{x^2}$.

j (1)= $\frac{1^2+1-2}{1}$

j (1)= $\frac{1+1-2}{1}$

j (1)= $\frac{0}{1}$

j (1)= 0.

j´ (1)= $\frac{1^2+2}{1^2}$

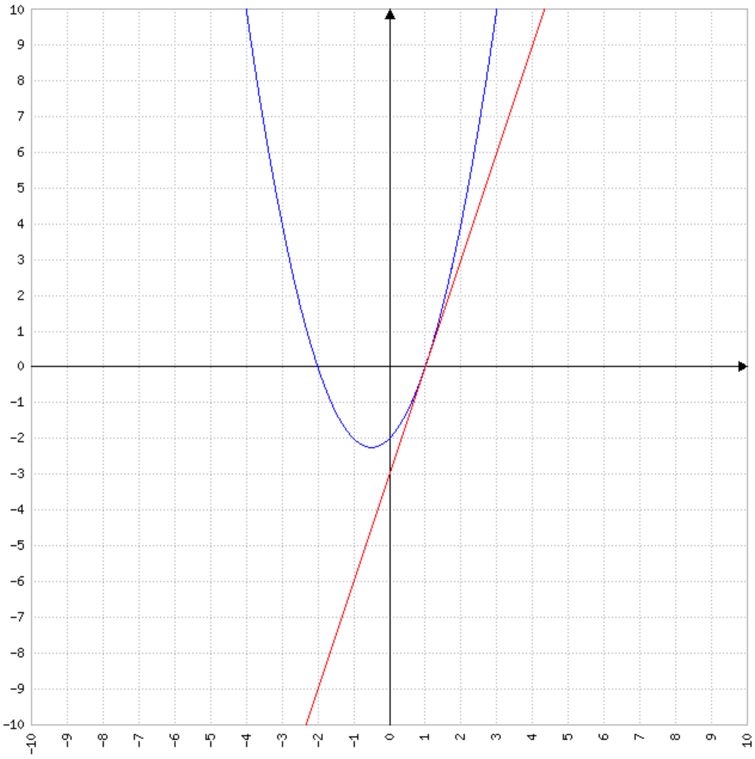
j´ (1)= $\frac{1+2}{1}$

j´ (1)= $\frac{3}{1}$

j´ (1)= 3.

y - 0= 3 (x - 1)

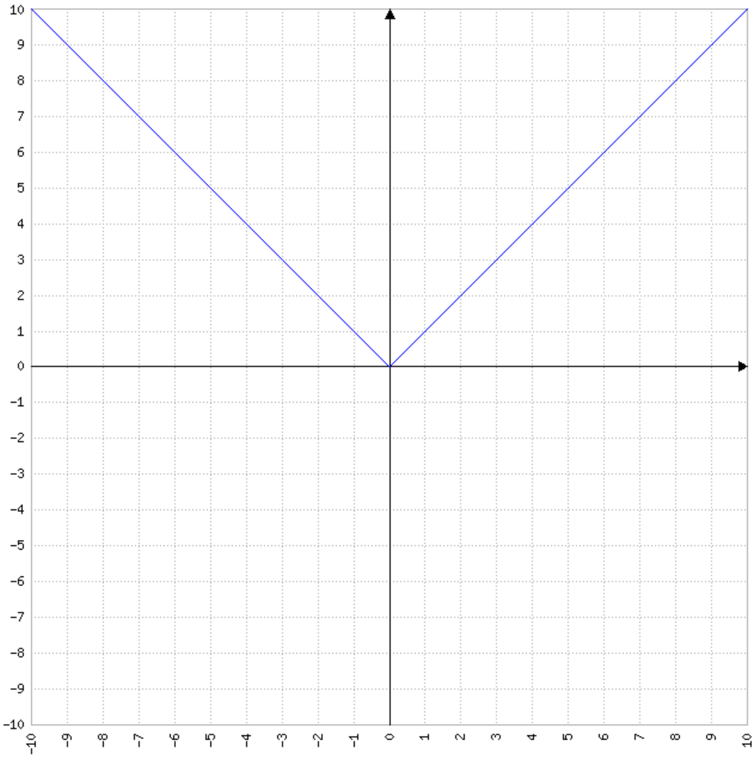
y= 3x - 3.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Ejercicio 5.

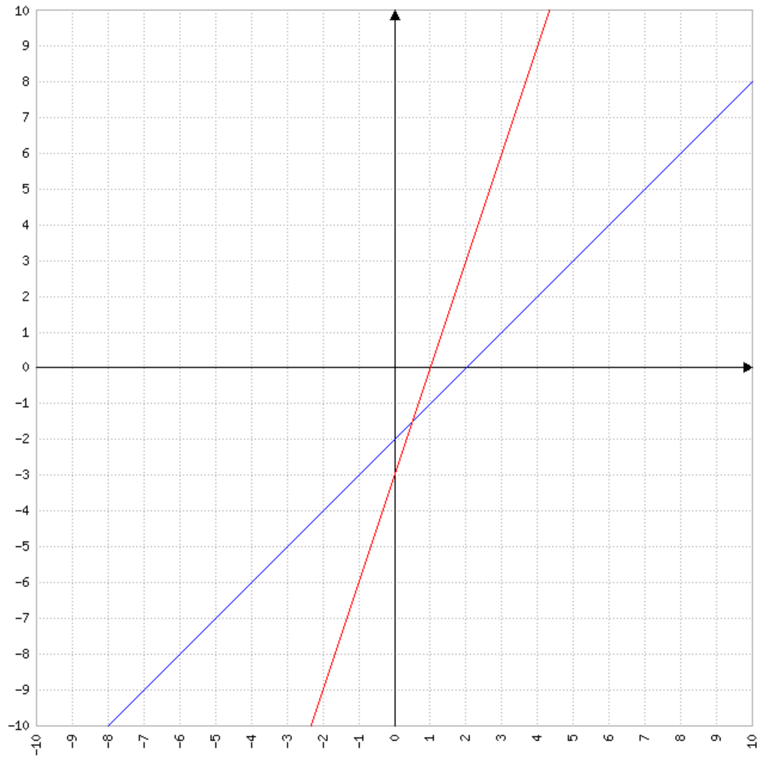
Graficar las siguientes funciones a trozos. ¿Para qué valores de x las funciones no son derivables?

(a) *a (x)=* $|x|$.



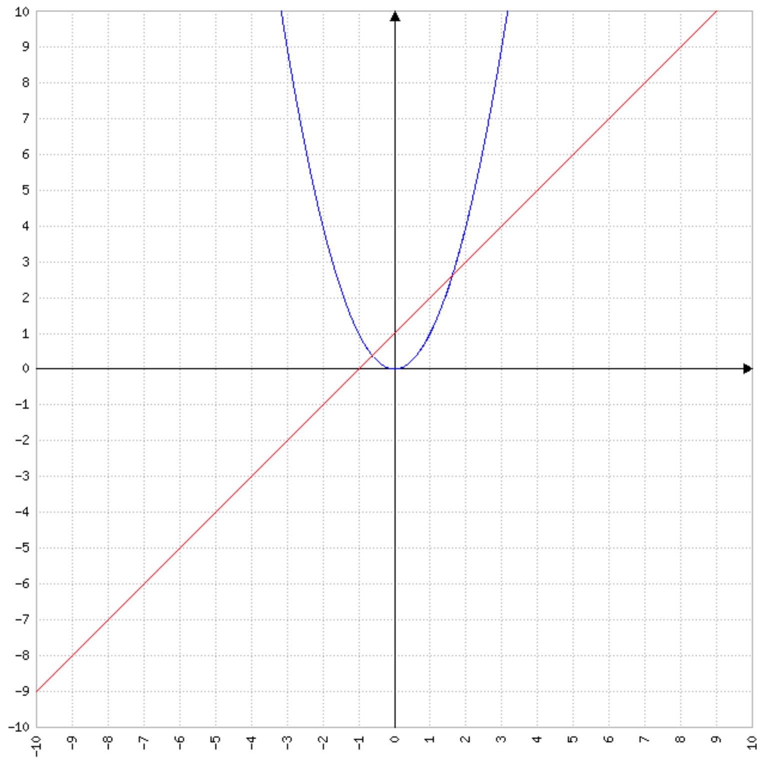
La función a (x) no es derivable para x= 0.

(b) *b (x)=* $\begin{cases} x-2, si\ x \leq 2 \\ 3x-3, si\ x > 2 \end{cases}$.



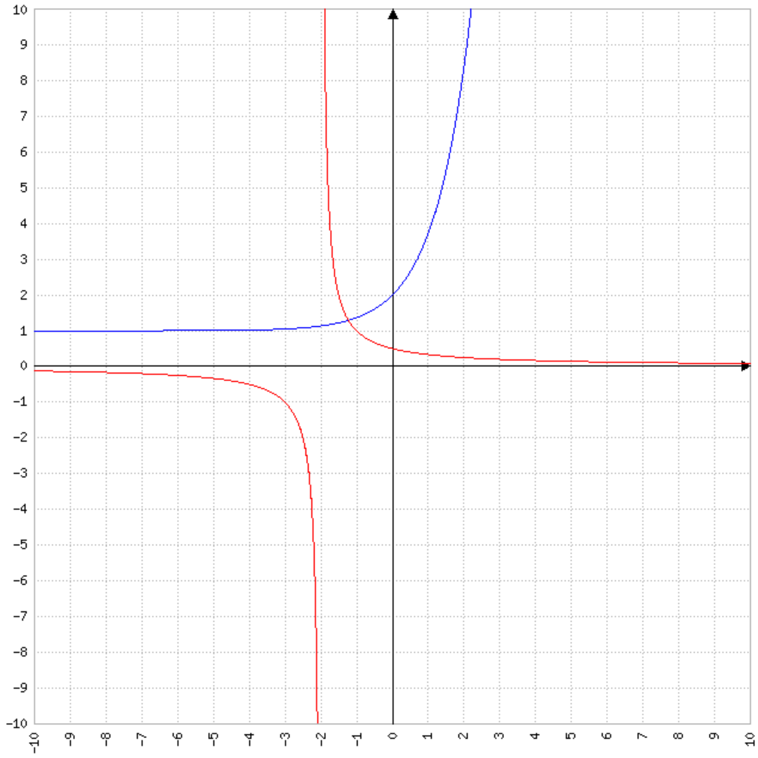
La función b (x) no es derivable para x= 2.

(c) *c (x)*= $\begin{cases} x^2, si\ x \leq 0 \\ x+1, si\ x > 0 \end{cases}$.



La función c (x) no es derivable para x= 0.

(d) *d (x)*= $\begin{cases} e^x + 1, si\ x \leq -1 \\ \frac{1}{x+2}, si\ x > -1 \end{cases}$.



La función d (x) no es derivable para x= -1.

Ejercicio 6.

Realizar el estudio de las siguientes funciones y graficar.

(a) *f (x)=* x^3 *- 3x.*

(1) Determinar el dominio de la función:

Dom_f= ℝ.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

Las funciones polinómicas son continuas en ℝ. Por lo tanto, f (x) es continua en ℝ.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$\nexists \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, ∀ a ∈ ℝ.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x$= -∞.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x$= +∞.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

f´ (x)= 3x^2 - 3
f´ (x)= 3 (x^2 - 1).

∃ f´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´ (x)= 0
3 (x^2 - 1)= 0
x^2 - 1= $\frac{0}{3}$
x^2 - 1= 0
x^2= 1
$\sqrt{x^2}$= $\sqrt{1}$
$|x|$= 1
x= $\pm$1.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en x_1= -1 y x_2= 1.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	**(-∞, -1)**	**x= -1**	**(-1, 1)**	**x= 1**	**(1, +∞)**
VP	-2	---	0	---	2
f´ (x)	> 0	0	< 0	0	> 0
f (x)	creciente	máximo relativo	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (x) son (-∞, -1) ∪ (1, +∞) y (-1, 1), respectivamente.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

f (-1)= $(-1)^3$ - 3 (-1)
f (-1)= -1 + 3
f (-1)= 2.

f (1)= 1^3 - 3 * 1
f (1)= 1 - 3
f (1)= -2.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos máximo y mínimo relativos en (-1, 2) y (-1, -2), respectivamente.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:

f´´ (x)= 6x.

∃ f´´ (x) ∀ x ∈ Dom_f.

f´´ (x)= 0
6x= 0
x= $\frac{0}{6}$
x= 0.

Por lo tanto, f´´ (x)= 0 en x= 0.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

Intervalo	**(-∞, 0)**	**x= 0**	**(0, +∞)**
VP	-1	---	1
f´´ (x)	< 0	0	> 0
f (x)	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

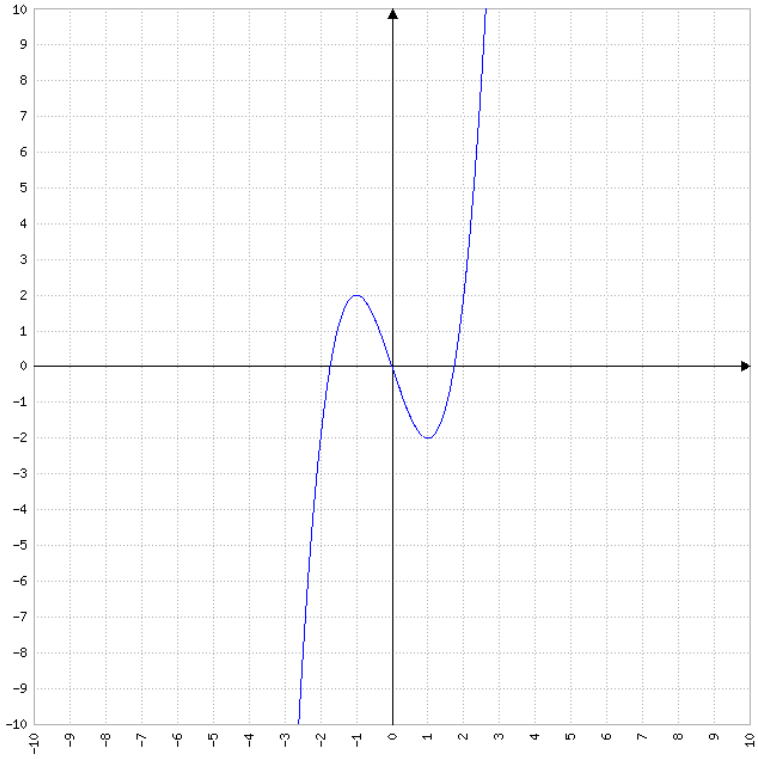
Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de f (x) son (0, +∞) y (-∞, 0), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

f (0)= 0^3 - 3 * 0
f (0)= 0 - 0
f (0)= 0.

Por lo tanto, f (x) tiene un punto de inflexión en (0, 0).

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



(b) $h\ (x)= \frac{x^2+1}{x-1}$.

(1) Determinar el dominio de la función:

x - 1= 0
x= 1.

Dom_h= ℝ - {1}.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

h (x) es discontinua inevitable en x= 0, ya que $\lim_{x \to 1^-} h\ (x) \neq \lim_{x \to 1^+} h\ (x)$ y, entonces, $\nexists \lim_{x \to 1} h\ (x)$. Por lo tanto, h (x) es continua en ℝ - {1}.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$.

$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$.

Por lo tanto, h (x) tiene una asíntota vertical en x= 1.

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$.

Por lo tanto, h (x) no tiene asíntotas horizontales.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

h´ (x)= $\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}$
h´ (x)= $\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}$
h´ (x)= $\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

∃ h´ (x) ∀ x ∈ Dom_h.

h´ (x)= 0
$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}= 0$
x^2 - 2x - 1= 0 $(x-1)^2$
x^2 - 2x - 1= 0.

$x_1, x_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4*1(-1)}}{2*1}$
$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4*2}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{2}}{2}$
$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1-\sqrt{2})}{2} = 1 - \sqrt{2}$.
$x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

Por lo tanto, h (x) tiene puntos críticos en x_1= 1 - $\sqrt{2}$ y x_2= 1 + $\sqrt{2}$.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	**(-∞, 1 - $\sqrt{2}$)**	**x= 1 - $\sqrt{2}$**	**(1 - $\sqrt{2}$, 1)**	**x= 1**	**(1, 1 + $\sqrt{2}$)**	**x= 1 + $\sqrt{2}$**	**(1 + $\sqrt{2}$, +∞)**
VP	-1	---	0	---	2	---	3
h´ (x)	> 0	0	< 0	---	< 0	0	> 0
h (x)	creciente	máximo relativo	decreciente	asíntota vertical	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (x) son (-∞, 1 - $\sqrt{2}$) ∪ (1 + $\sqrt{2}$, +∞) y (1 - $\sqrt{2}$, 1) ∪ (1, 1 + $\sqrt{2}$), respectivamente.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

h (1 - $\sqrt{2}$)= $\frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1}$
h (1 - $\sqrt{2}$)= $\frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{-\sqrt{2}}$
h (1 - $\sqrt{2}$)= $\frac{2\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}}$
h (1 - $\sqrt{2}$)= $\frac{2(\sqrt{2}-2)}{\sqrt{2}}$
h (1 - $\sqrt{2}$)= $\sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ - 2)
h (1 - $\sqrt{2}$)= 2 - 2 $\sqrt{2}$
h (1 - $\sqrt{2}$)= 2 (1 - $\sqrt{2}$).

h (1 + $\sqrt{2}$)= $\frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1}$
h (1 + $\sqrt{2}$)= $\frac{1+2\sqrt{2}+2+1}{\sqrt{2}}$
h (1 + $\sqrt{2}$)= $\frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}$
h (1 + $\sqrt{2}$)= $\frac{2(\sqrt{2}+2)}{\sqrt{2}}$
h (1 + $\sqrt{2}$)= $\sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ + 2)
h (1 + $\sqrt{2}$)= 2 + 2 $\sqrt{2}$
h (1 + $\sqrt{2}$)= 2 (1 + $\sqrt{2}$).

Por lo tanto, h (x) tiene puntos máximo y mínimo relativos en (1 - $\sqrt{2}$, 2 (1 - $\sqrt{2}$)) y (1 + $\sqrt{2}$, 2 (1 + $\sqrt{2}$)), respectivamente.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:

h´´ (x)= $\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4}$
h´´ (x)= $\frac{2(x-1)(x^2-2x+1)-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}$
h´´ (x)= $\frac{2(x-1)[(x^2-2x+1)-(x^2-2x-1)]}{(x-1)^4}$
h´´ (x)= $\frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^3}$
h´´ (x)= $\frac{2*2}{(x-1)^3}$

h´´ (x)= $\frac{4}{(x-1)^3}$.

∃ h´´ (x) ∀ x ∈ Dom_h.

h´´ (x)= 0
$\frac{4}{(x-1)^3}$= 0
4= 0 * $(x-1)^3$
4≠ 0.

Por lo tanto, h´´ (x)≠ 0 ∀ x ∈ Dom_h.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

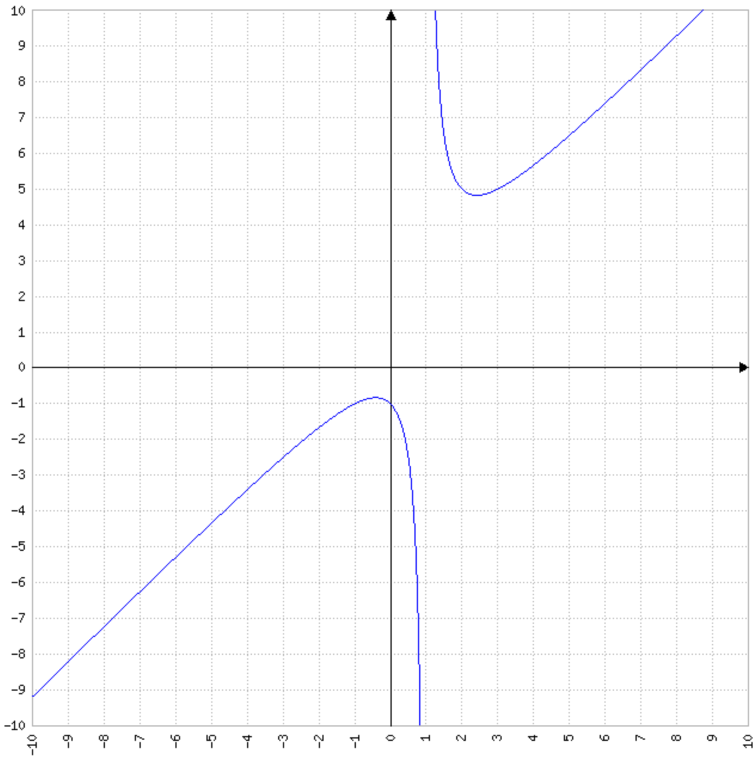
Intervalo	**(-∞, 1)**	**x= 1**	**(1, +∞)**
VP	0	---	2
h´´ (x)	< 0	0	> 0
h (x)	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de h (x) son (1, +∞) y (-∞, 1), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

Por lo tanto, h (x) no tiene puntos de inflexión.

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



(c) *g (x)=* x^2 *+ ln x.*

(1) Determinar el dominio de la función:

Dom_g= (0, +∞).

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

Las funciones logarítmicas son continuas en sus dominios. Por lo tanto, g (x) es continua en (0, +∞).

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + \ln x = -\infty$.

Por lo tanto, g (x) tiene una asíntota vertical en x= 0.

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + \ln x = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + \ln x = +\infty$.

Por lo tanto, g (x) no tiene asíntotas horizontales.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

g´ (x)= 2x + $\frac{1}{x}$
g´ (x)= $\frac{2x^2+1}{x}$.

∃ g´ (x) ∀ x ∈ Dom_g.

g´ (x)= 0
$\frac{2x^2+1}{x}$= 0
$2x^2$ + 1= 0x
$2x^2$ + 1= 0
$2x^2$= -1
x^2= $\frac{-1}{2}$.   ∄ x ∈ ℝ / x^2= $\frac{-1}{2}$.

Por lo tanto, g (x) no tiene puntos críticos.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	**(0, +∞)**
VP	1
g´ (x)	> 0
g (x)	creciente

Por lo tanto, g (x) es crece en todo su dominio.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

Dado que decrece en todo su dominio, g (x) no tiene puntos máximos ni mínimos relativos.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:

g´´ (x)= $\frac{4x*x-(2x^2+1)}{x^2}$
g´´ (x)= $\frac{4x^2-2x^2-1}{x^2}$
g´´ (x)= $\frac{2x^2-1}{x^2}$.

∃ g´´ (x) ∀ x ∈ Dom_g.

g´´ (x)= 0
$\frac{2x^2-1}{x^2}$= 0
$2x^2$ - 1= 0 * x^2
$2x^2$ - 1= 0
$2x^2$= 1
x^2= $\frac{1}{2}$

$\sqrt{x^2}= \sqrt{\frac{1}{2}}$

$|x|= \frac{1}{\sqrt{2}}$

x= $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto, g´´ (x)= 0 en x= $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(8) <u>Determinar los intervalos de concavidad:</u>

Intervalo	**(0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)**	**x= $\frac{1}{\sqrt{2}}$**	**($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $+\infty$)**
VP	$\frac{1}{2}$	---	1
g´´ (x)	< 0	0	> 0
g (x)	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de g (x) son ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $+\infty$) y (0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$), respectivamente.

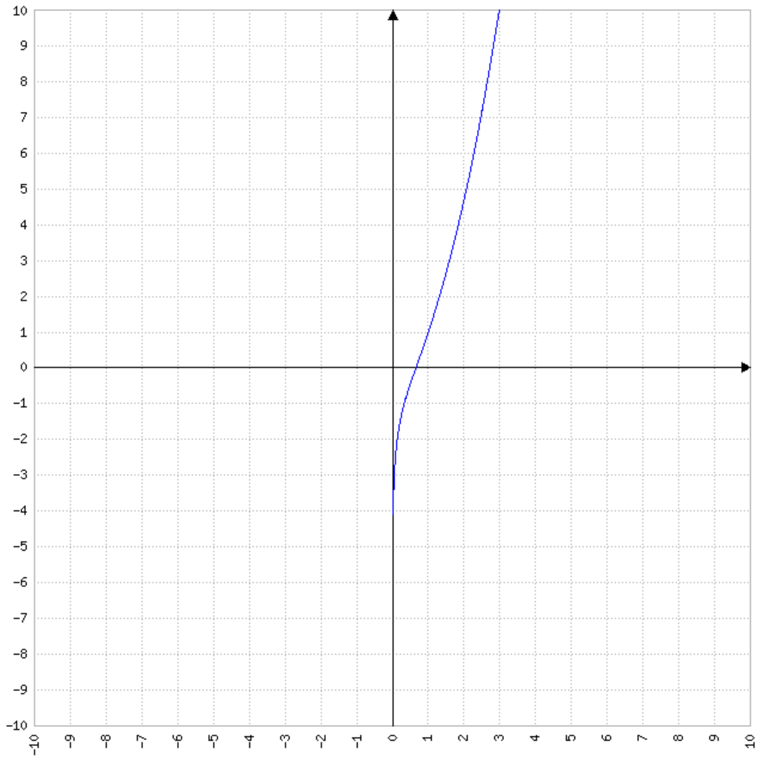
(9) <u>Determinar si la función presenta puntos de inflexión:</u>

g ($\frac{1}{\sqrt{2}}$)= $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ + ln $\frac{1}{\sqrt{2}}$

g ($\frac{1}{\sqrt{2}}$)= $\frac{1}{2}$ + ln $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto, g (x) tiene un punto de inflexión en ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$ + ln $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

(10) <u>Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:</u>



(d) $j\ (x)= xe^x$.

(1) Determinar el dominio de la función:

Dom_j= ℝ.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

La función identidad (y= x) y las funciones exponenciales son continuas en ℝ. Por lo tanto, j (x) es continua en ℝ.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

$\nexists \lim_{x \to a} j\ (x)= \pm\infty$, ∀ a ∈ ℝ.

Por lo tanto, j (x) no tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to -\infty} j\ (x)= \lim_{x \to -\infty} xe^x= 0$.

$\lim_{x \to +\infty} j\ (x)= \lim_{x \to +\infty} xe^x= +\infty$.

Por lo tanto, j (x) tiene una asíntota horizontal en y= 0.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

j´ (x)= e^x + xe^x
j´ (x)= e^x (x + 1).

∃ j´ (x) ∀ x ∈ Dom_j.

j´ (x)= 0
e^x (x + 1)= 0
x + 1= $\frac{0}{e^x}$
x + 1= 0
x= -1.

Por lo tanto, j (x) tiene un punto crítico en x= -1.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

Intervalo	**(-∞, -1)**	**x= -1**	**(-1, +∞)**
VP	-2	---	0
j´ (x)	< 0	0	> 0
j (x)	decreciente	mínimo relativo	creciente

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de j (x) son (-1, +∞) y (-∞, -1), respectivamente.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

j (-1)= -1e^{-1}
j (-1)= $\frac{-1}{e}$.

Por lo tanto, j (x) tiene un punto mínimo relativo en (-1, $\frac{-1}{e}$).

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´ no existe:

j´´ (x)= e^x (x + 1) + e^xx
j´´ (x)= e^xx + e^x + e^xx
j´´ (x)= 2e^xx + e^x
j´´ (x)= e^x (2x + 1).

∃ j´´ (x) ∀ x ∈ Dom_j.

j´´ (x)= 0
e^x (2x + 1)= 0
2x + 1= $\frac{0}{e^x}$
2x + 1= 0
2x= -1
x= $\frac{-1}{2}$.

Por lo tanto, j´´´(x)= 0 en x= $\frac{-1}{2}$.

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

Intervalo	**(-∞, $\frac{-1}{2}$)**	**x= $\frac{-1}{2}$**	**($\frac{-1}{2}$, +∞)**
VP	-1	---	1
j´´ (x)	< 0	0	> 0
j (x)	cóncava hacia abajo	punto de inflexión	cóncava hacia arriba

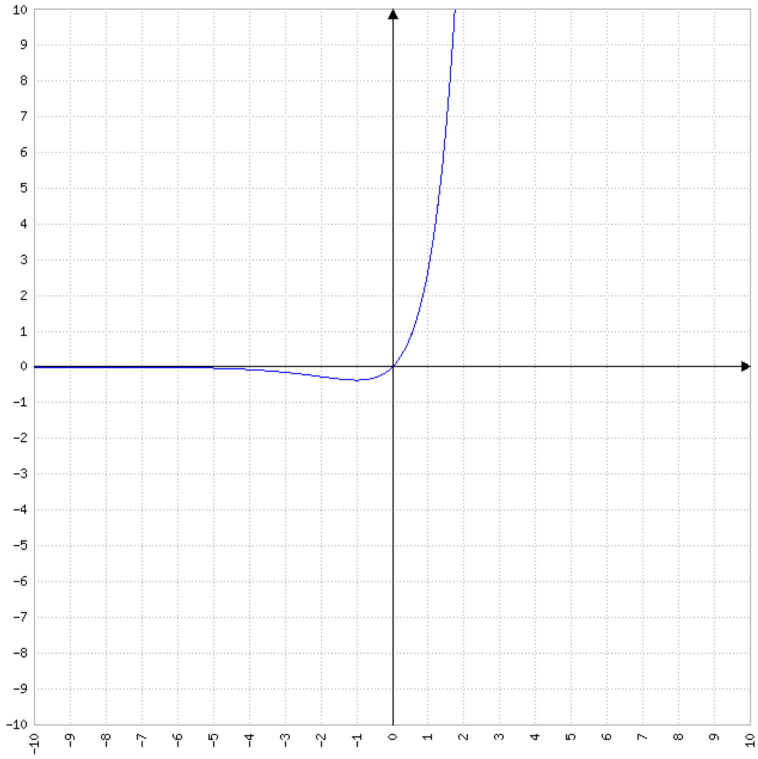
Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de j (x) son ($\frac{-1}{2}$, +∞) y (-∞, $\frac{-1}{2}$), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

j ($\frac{-1}{2}$)= $\frac{-1}{2} e^{\frac{-1}{2}}$
j ($\frac{-1}{2}$)= $\frac{-1}{2\sqrt{e}}$.

Por lo tanto, j (x) tiene un punto de inflexión en ($\frac{-1}{2}$, $\frac{-1}{2\sqrt{e}}$).

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



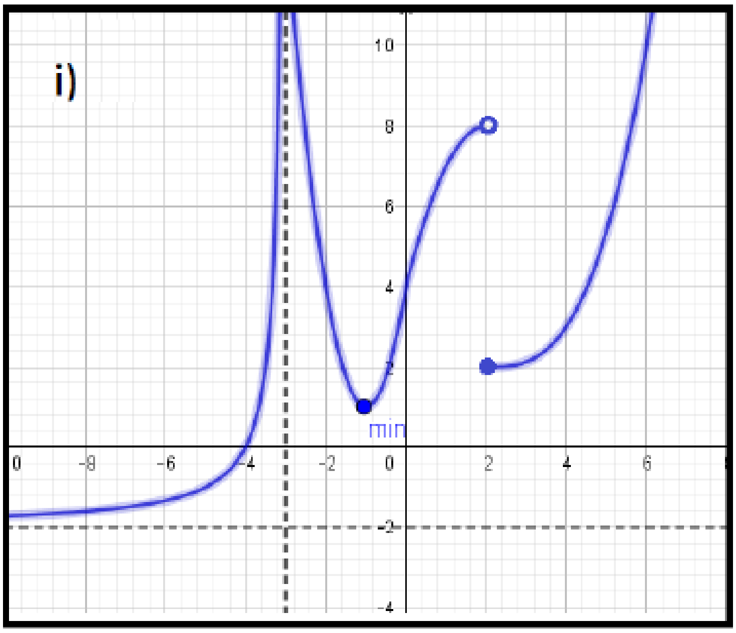
Ejercicio 7.

En cada caso, realizar el gráfico de una función f (x) que cumpla con los siguientes requisitos:

(a)

- *Dominio de f (x): (-∞, -3) ∪ (-3, +∞).*
- *Continuidad: (-∞, -3) ∪ (-3, 2) ∪ (2, +∞).*
- *Discontinuidad inevitable en x= 2.*
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$.
- *f´ (x) > 0 en (-∞, -3) ∪ (-1, +∞).*
- *f´ (x) < 0 en (-3, -1).*
- *f´´ (x) > 0 en (-∞, -3) ∪ (-3, 0) ∪ (2, +∞).*
- *f´´ (x) < 0 en (0, 2).*

Intervalo	**(-∞, -3)**	**(-3, -1)**	**(-1, 0)**	**(0, 2)**	**(2, +∞)**
f´ (x)	+	-	+	+	+
f´´ (x)	+	+	+	-	+
f (x)	creciente y convexa	decreciente y convexa	creciente y convexa	creciente y cóncava	creciente y convexa

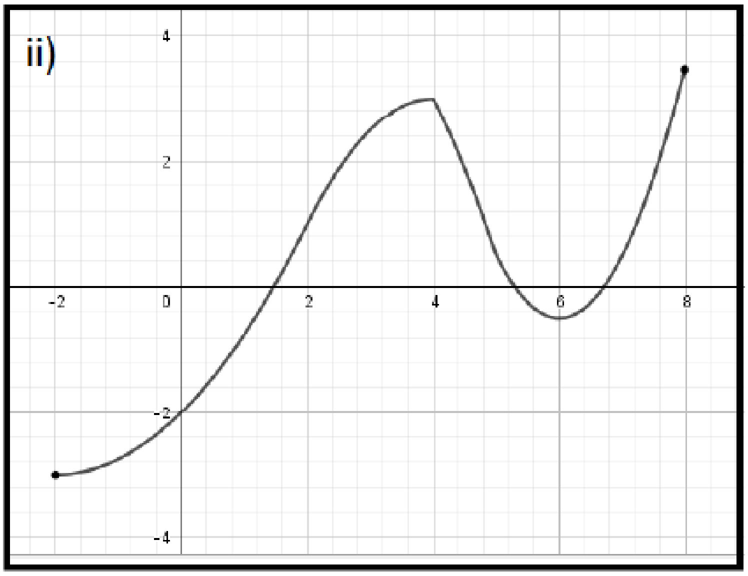


(b)

- *Dominio de f (x): [-2, 8].*
- *Creciente en (-2, 4) ∪ (6, 8) y decreciente en el intervalo (4, 6).*
- *f´´ (x) > 0 en (-2, 2) ∪ (5, 8) y f´´ (x) < 0 en (2, 5).*

- *¿Esta función tiene máximo absoluto? Sí, tiene máximo absoluto (por teorema de Weierstrass).*

Intervalo	**(-2, 2)**	**(2, 4)**	**(4, 5)**	**(5, 6)**	**(6, 8)**
f´ (x)	+	+	-	-	+
f´´ (x)	+	-	-	+	+
f (x)	creciente y cóncava	creciente y convexa	decreciente y convexa	decreciente y cóncava	creciente y cóncava



Ejercicio 8.

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\int \frac{\pi}{2} cos\ x\ \ dx$.

$\int \frac{\pi}{2} \cos x\ \ dx = \frac{\pi}{2} \int \cos x\ \ dx$
$\int \frac{\pi}{2} \cos x\ \ dx = \frac{\pi}{2}$ sen x + C.

(b) $\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx$.

$\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx = \int 2x^8\ dx + \int \frac{-1}{x} dx$
$\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx = 2 \int x^8\ dx$ - $\int \frac{1}{x} dx$
$\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx = 2 \frac{x^9}{9}$ - ln x
$\int 2x^8 - \frac{1}{x} dx = \frac{2}{9} x^9$ - ln x + C.

(c) $\int cos\ 3x\ dx$.

$\int \cos 3x\ dx = \int \cos u \frac{du}{3}$ (*)
$\int \cos 3x\ dx = \frac{1}{3} \int \cos u\ du$
$\int \cos 3x\ dx = \frac{1}{3}$ sen u
$\int \cos 3x\ dx = \frac{1}{3}$ sen 3x + C.

(*) u= 3x; du= 3 dx.

(d) $\int x\ sen\ x\ dx$.

$\int x\ sen\ x\ dx$= x (-cos x) - $\int - \cos x\ dx$ (*)
$\int x\ sen\ x\ dx$= -x cos x + $\int \cos x\ dx$
$\int x\ sen\ x\ dx$= -x cos x + sen x + C.

(*) u= x; du= dx; dv= sen x dx; v= -cos x.

(e) $\int x^2 e^x\ dx$.

$\int x^2 e^x \, dx$= $x^2 e^x$ - $\int e^x 2x \, dx$ (*)
$\int x^2 e^x \, dx$= $x^2 e^x$ - 2 $\int x e^x \, dx$
$\int x^2 e^x \, dx$= $x^2 e^x$ - 2 (xe^x - $\int e^x \, dx$) (**)
$\int x^2 e^x \, dx$= $x^2 e^x$ - 2 (xe^x - e^x)
$\int x^2 e^x \, dx$= $x^2 e^x$ - 2xe^x + 2e^x + C.

(*) u= x^2; du= 2x dx; dv= e^x dx; v= e^x.
(**) u= x; du= dx; dv= e^x dx; v= e^x.

(f) $\int x^2 \, (1 + x^3) \, dx$.

$\int x^2 \, (1 + x^3) \, dx$= $\int x^2 + x^5 \, dx$
$\int x^2 \, (1 + x^3) \, dx$= $\int x^2 \, dx$ + $\int x^5 \, dx$
$\int x^2 \, (1 + x^3) \, dx$= $\frac{x^3}{3}$ + $\frac{x^6}{6}$ + C.
$\int x^2 \, (1 + x^3) \, dx$= $\frac{1}{3} x^3$ + $\frac{1}{6} x^6$ + C.

(g) $\int (e^x - 3x^3)^5 \, (e^x - 9x^2) \, dx$.

$\int (e^x - 3x^3)^5 (e^x - 9x^2) \, dx$= $\int u^5 \, du$ (*)
$\int (e^x - 3x^3)^5 (e^x - 9x^2) \, dx$= $\frac{u^6}{6}$
$\int (e^x - 3x^3)^5 (e^x - 9x^2) \, dx$= $\frac{1}{6} (e^x - 3x^3)^6$ + C.

(*) u= e^x - 3x^3; du= (e^x - 9x^2) dx.

(h) $\int sen \, x \, cos \, x \; dx$.

$\int sen \, x \cos x \; dx$= $\int u \, du$ (*)
$\int sen \, x \cos x \; dx$= $\frac{u^2}{2}$
$\int sen \, x \cos x \; dx$= $\frac{1}{2} (sen \, x)^2$ + C.

(*) u= sen x; du= cos x dx.

(i) $\int \frac{x}{x+1} \, dx$.

$\int \frac{x}{x+1} \, dx$= $\int \frac{u-1}{u} \, du$ (*)
$\int \frac{x}{x+1} \, dx$= $\int 1 - \frac{1}{u} \, du$

$\int \frac{x}{x+1}\ dx$= $\int du$ + $\int \frac{-1}{u}\ du$
$\int \frac{x}{x+1}\ dx$= u - $\int \frac{1}{u}\ du$
$\int \frac{x}{x+1}\ dx$= u - ln $|u|$
$\int \frac{x}{x+1}\ dx$= x + 1 - ln $|x+1|$ + C.

(*) u= x + 1; du= dx.

(j) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$.

$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$= $\int \frac{1}{u} du$ (*)
$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$= ln $|u|$
$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$= ln $|x^2+x+1|$ + C.

(*) u= x^2 + x + 1; du= (2x + 1) dx.

(k) $\int \frac{4}{(ln\, x)^3 x} dx$.

$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= $\int \frac{4}{u^3} du$ (*)
$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= 4 $\int \frac{1}{u^3} du$
$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= 4 $\int u^{-3}\ du$
$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= 4 $\frac{u^{-2}}{-2}$
$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= $\frac{-2}{u^2}$
$\int \frac{4}{(\ln x)^3 x} dx$= $\frac{-2}{(\ln x)^2}$ + C.

(*) u= ln x; du= $\frac{1}{x}$ dx.

Ejercicio 9.

Calcular las siguientes integrales definidas:

(a) $\int_1^3 (2x+3)^2\, dx$.

$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \int_1^3 u^2\, \frac{du}{2}$ (*)
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{2} \int_{2*1+3}^{2*3+3} u^2\, du$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} |_{2*3+3}^{2*3+3}$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} (2x+3)^3 |_1^3$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} [(2*3+3)^3 - (2*1+3)^3]$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} [(6+3)^3 - (2+3)^3]$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} (9^3 - 5^3)$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} (729 - 125)$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{1}{6} * 604$
$\int_1^3 (2x+3)^2\, dx = \frac{302}{3}$.

(*) u= 2x + 3; du= 2 dx.

(b) $\int_0^{\pi} sen\, x\, dx$.

$\int_0^{\pi} sen\, x\, dx$= -cos x $|_0^{\pi}$
$\int_0^{\pi} sen\, x\, dx$= -(cos π - cos 0)
$\int_0^{\pi} sen\, x\, dx$= -(-1 - 1)
$\int_0^{\pi} sen\, x\, dx$= -(-2)
$\int_0^{\pi} sen\, x\, dx$= 2.

(c) $\int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}}\, dx$.

$\int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} |_{-1}^1$
$\int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{4} [1^{\frac{4}{3}} - (-1)^{\frac{4}{3}}]$
$\int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{4}$ (1 - 1)
$\int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{4} * 0$

$\int_{-1}^{1} x^{\frac{1}{3}}\, dx$= 0.

(d) $\int_0^{\pi} cos\, x + 3x^4\, dx$.

$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$ + $\int_0^{\pi} 3x^4\, dx$
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= sen x $|_0^{\pi}$ + 3 $\int_0^{\pi} x^4\, dx$
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= (sen π - sen 0) + 3 $\frac{x^5}{5}$ $|_0^{\pi}$
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= (0 - 0) + $\frac{3}{5}$ (π^5 - 0^5)
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= (0 - 0) + $\frac{3}{5}$ (π^5 - 0)
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= 0 + $\frac{3}{5}$ π^5
$\int_0^{\pi} \cos x + 3x^4\, dx$= $\frac{3}{5}$ π^5.

(e) $\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$.

$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= $\int_{1^2+1}^{e^2+1} \frac{1}{u}\, du$ (*)
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln $|u|$ $|_{1^2+1}^{e^2+1}$
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln $|x^2+1|$ $|_1^{e}$
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln ($e^2$ + 1) - ln (1^2 + 1)
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln ($e^2$ + 1) - ln (1 + 1)
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln ($e^2$ + 1) - ln 2
$\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$= ln $\frac{e^2+1}{2}$.

(*) u= x^2 + 1; du= 2x dx.

(f) $\int_0^{4} e^x x^3\, dx$.

$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= ($x^3 e^x$ - $\int e^x 3x^2\, dx$) $|_0^4$ (*)
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= ($x^3 e^x$ - 3 $\int x^2 e^x\, dx$) $|_0^4$
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= [$x^3 e^x$ - 3 ($x^2 e^x$ - $\int e^x 2x\, dx$)] $|_0^4$ (**)
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= [$x^3 e^x$ - 3 ($x^2 e^x$ - 2 $\int x e^x\, dx$)] $|_0^4$
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= {$x^3 e^x$ - 3 [$x^2 e^x$ - 2 (xe^x - $\int e^x\, dx$)]} $|_0^4$ (***)
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= {$x^3 e^x$ - 3 [$x^2 e^x$ - 2 (xe^x - e^x)]} $|_0^4$
$\int_0^{4} e^x x^3\, dx$= [$x^3 e^x$ - 3 ($x^2 e^x$ - 2xe^x + 2e^x)] $|_0^4$

$\int_0^4 e^x x^3\, dx$= ($x^3 e^x$ - $3x^2 e^x$ + 6xe^x - 6e^x) $|_0^4$
$\int_0^4 e^x x^3\, dx$= ($4^3 e^4$ - 3 * $4^2 e^4$ + 6 * 4e^4 - 6e^4) - ($0^3 e^0$ - 3 * $0^2 e^0$ + 6 * 0e^0 - 6e^0)
$\int_0^4 e^x x^3\, dx$= (64e^4 - 3 * 16e^4 + 24e^4 - 6e^4) - (0 * 1 - 3 * 0 * 1 + 6 * 0 * 1 - 6 * 1)
$\int_0^4 e^x x^3\, dx$= (64e^4 - 48e^4 + 24e^4 - 6e^4) - (0 - 0 + 0 - 6)
$\int_0^4 e^x x^3\, dx$= 34e^4 - (-6)
$\int_0^4 e^x x^3\, dx$= 34e^4 + 6.

(*) u= x^3; du= 3x^2 dx; dv= e^x dx; v= e^x.
(**) u= x^2; du= 2x dx; dv= e^x dx; v= e^x.
(***) u= x; du= dx; dv= e^x; v= e^x.

(g) $\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$.

$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$= $\int_{2*1+3}^{2*4+3} \sqrt{u}\, \frac{du}{2}$ (*)
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$= $\frac{1}{2} \int_{2*1+3}^{2*4+3} u^{\frac{1}{2}}\, du$
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$= $\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} |_{2*1+3}^{2*4+3}$
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$= $\frac{1}{3} (2x+3)^{\frac{3}{2}} |_1^4$
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$= $\frac{1}{3}$ [$(2*4+3)^{\frac{3}{2}}$ - $(2*1+3)^{\frac{3}{2}}$]
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$= $\frac{1}{3}$ [$(8+3)^{\frac{3}{2}}$ - $(2+3)^{\frac{3}{2}}$]
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$= $\frac{1}{3}$ ($11^{\frac{3}{2}}$ - $5^{\frac{3}{2}}$)
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$= $\frac{1}{3}$ ($11^{\frac{3}{2}}$ - $5^{\frac{3}{2}}$)
$\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$= 8,434.

(*) u= 2x + 3; du= 2 dx.

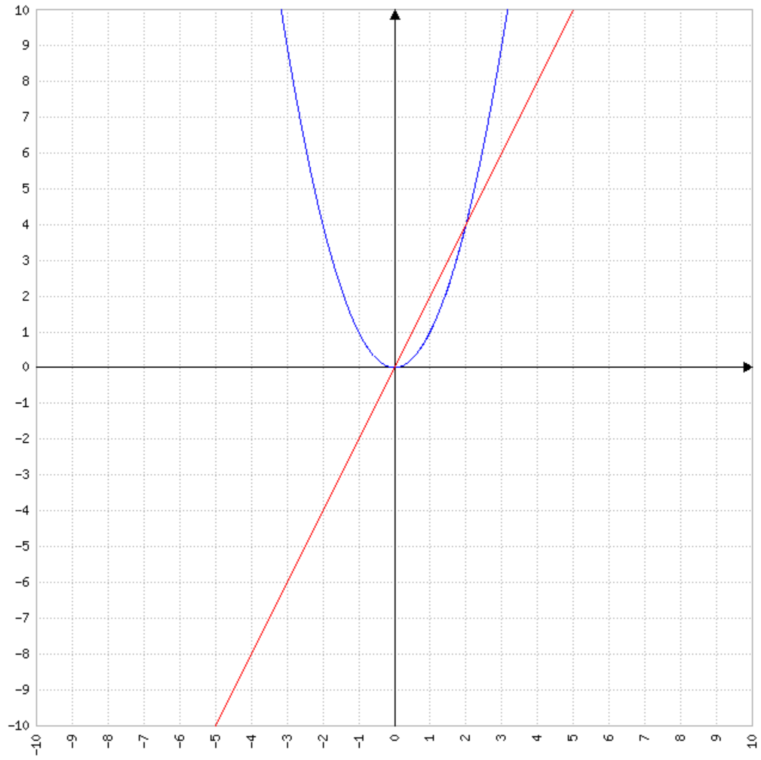
(h) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$.

$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$= $\int_1^3 x^{\frac{-1}{2}}\, dx$
$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$= $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} |_1^3$
$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$= 2 ($3^{\frac{1}{2}}$ - $1^{\frac{1}{2}}$)
$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$= 2 ($\sqrt{3}$ - 1).

Ejercicio 10.

Graficar las curvas y hallar el área de la región encerrada entre las gráficas de esas curvas.

(a) *y=* x^2*; y= 2x.*



f (x)= g (x)
x^2= 2x
x^2 - 2x= 0
x (x - 2)= 0.

x_1= 0; x_2= 2.

Intervalo	(0, 2)
VP	1
f (x)	1
g (x)	2

A= $\int_0^2 g\ (x) - f\ (x)\ dx$
A= $\int_0^2 2x - x^2\ dx$
A= $\int_0^2 2x\ dx$ + $\int_0^2 -x^2\ dx$
A= 2 $\int_0^2 x\ dx$ - $\int_0^2 x^2\ dx$
A= 2 $\frac{x^2}{2}$ $|_0^2$ - $\frac{x^3}{3}$ $|_0^2$
A= $(2^2 - 0^2)$ - $\frac{1}{3}(2^3 - 0^3)$

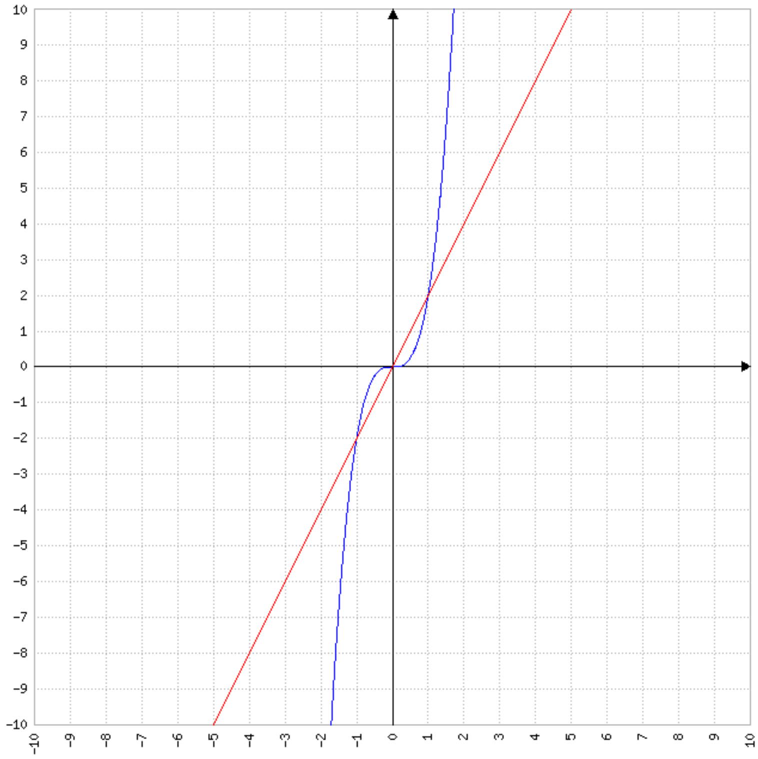
A= $(2^2 - 0^2) - \frac{1}{3}(8 - 0)$

A= $(4 - 0) - \frac{1}{3} * 8$

A= $4 - \frac{8}{3}$

A= $\frac{4}{3}$.

(b) *y= $2x^3$; y= 2x.*



f (x)= g (x)
$2x^3$= 2x
x^3= x
x^3 - x= 0
x (x^2 - 1)= 0.

x_1= 0; x_2= -1; x_3= 1.

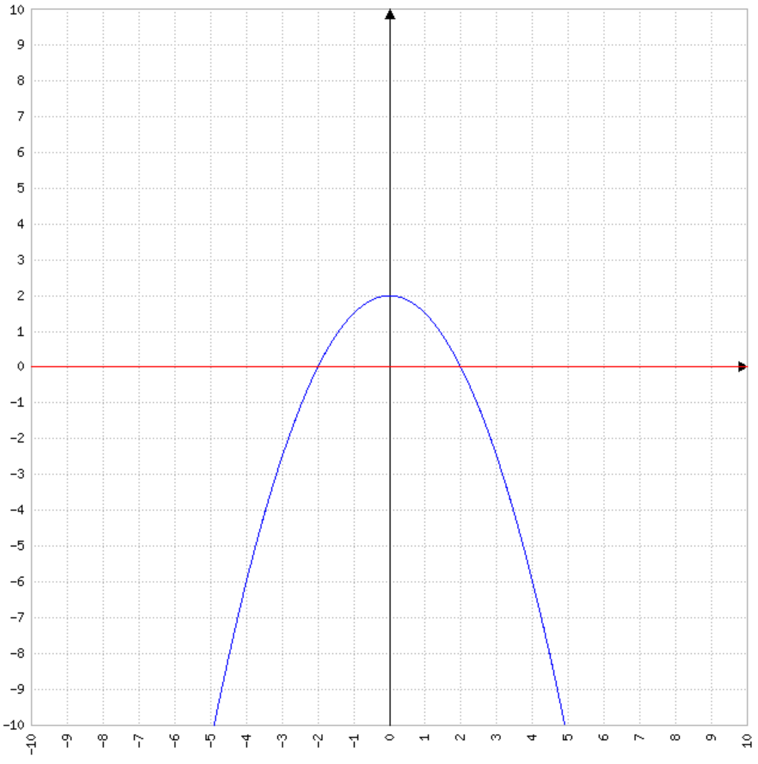
Intervalo	**(-1, 0)**	**(0, 1)**
VP	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f (x)	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$
g (x)	-1	1

A= $\int_{-1}^{0} f(x) - g(x)\, dx + \int_{0}^{1} g(x) - f(x)\, dx$

A= $\int_{-1}^{0} 2x^3 - 2x\, dx + \int_{0}^{1} 2x - 2x^3\, dx$

A= $\int_{-1}^{0} 2\,(x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} 2\,(x - x^3)\,dx$
A= 2 $\int_{-1}^{0} x^3 - x\,dx$ + 2 $\int_{0}^{1} x - x^3\,dx$
A= 2 $(\int_{-1}^{0} x^3 - x\,dx + \int_{0}^{1} x - x^3\,dx)$
A= 2 $(\int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{0}^{1} -x^3\,dx)$
A= 2 $(\frac{x^4}{4}\,|_{-1}^{0}$ - $\int_{-1}^{0} x\,dx + \frac{x^2}{2}\,|_{0}^{1}$ - $\int_{0}^{1} x^3\,dx)$
A= 2 $\{\frac{1}{4}\,[0^4$ - $(-1)^4]$ - $\frac{x^2}{2}\,|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\,(1^2$ - $0^2)$ - $\frac{x^4}{4}\,|_{0}^{1}\}$
A= 2 $\{\frac{1}{4}\,(0$ - $1)$ - $\frac{1}{2}\,[0^2$ - $(-1)^2] + \frac{1}{2}\,(1$ - $0)$ - $\frac{1}{4}\,(1^4$ - $0^4)\}$
A= 2 $[\frac{1}{4}$ (-1) - $\frac{1}{2}$ (0 - 1) + $\frac{1}{2}$ * 1 - $\frac{1}{4}$ (1 - 0)]
A= 2 $[\frac{-1}{4}$ - $\frac{1}{2}$ (-1) + $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$ * 1]
A= 2 $(\frac{-1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4})$
A= 2 $\frac{1}{2}$
A= 1.

(c) *y=* $\frac{-x^2}{2}$ *+ 2; y= 0-*



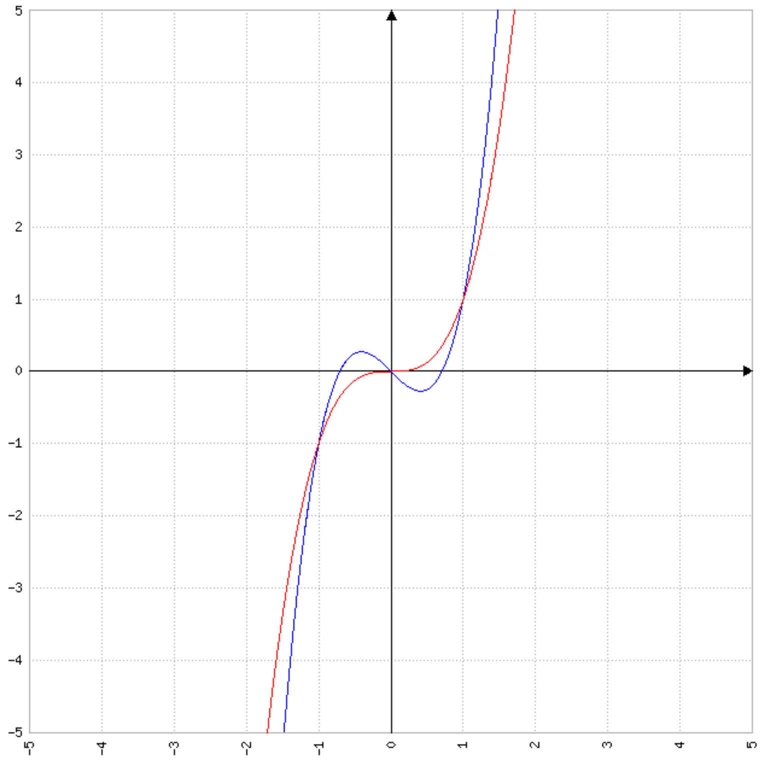
f (x)= g (x)
$\frac{-x^2}{2}$ + 2= 0
$\frac{x^2}{2}$= 2
x^2= 2 * 2
x^2= 4

$\sqrt{x^2}= \sqrt{4}$
$|x|= 2$
x= $\pm$2.

Intervalo	(-2, 2)
VP	0
f (x)	2
g (x)	0

A= $\int_{-2}^{2} f\ (x) - g\ (x)\ dx$
A= $\int_{-2}^{2} \frac{-x^2}{2} + 2 - 0\ dx$
A= $\int_{-2}^{2} \frac{-x^2}{2} + 2\ dx$
A= $\int_{-2}^{2} \frac{-x^2}{2}\ dx + \int_{-2}^{2} 2\ dx$
A= $\frac{-1}{2} \int_{-2}^{2} x^2\ dx + 2 \int_{-2}^{2} dx$
A= $\frac{-1}{2} \frac{x^3}{3} |_{-2}^{2} + 2x |_{-2}^{2}$
A= $\frac{-1}{6} [2^3 - (-2)^3] + 2 [2 - (-2)]$
A= $\frac{-1}{6} [8 - (-8)] + 2 (2 + 2)$
A= $\frac{-1}{6} (8 + 8) + 2 * 4$
A= $\frac{-1}{6} * 16 + 8$
A= $\frac{-16}{6} + 8$
A= $\frac{16}{3}$.

(d) *y= 2*x^3 *- x; y=* x^3.



f (x)= g (x)
$2x^3$ - x= x^3
$2x^3$ - x - x^3= 0
x^3 - x= 0
x (x^2 - 1)= 0.

x_1= 0; x_2= -1; x_3= 1.

Intervalo	(-1, 0)	(0, 1)
VP	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f (x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$
g (x)	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$

A= $\int_{-1}^{0} f\ (x) - g\ (x)\ dx$ + $\int_{0}^{1} g\ (x) - f\ (x)\ dx$
A= $\int_{-1}^{0} 2x^3 - x - x^3\ dx$ + $\int_{0}^{1} x^3 - (2x^3 - x)\ dx$
A= $\int_{-1}^{0} x^3 - x\ dx$ + $\int_{0}^{1} x^3 - 2x^3 + x\ dx$
A= $\int_{-1}^{0} x^3 - x\ dx$ + $\int_{0}^{1} -x^3 + x\ dx$
A= $\int_{-1}^{0} x^3\ dx$ + $\int_{-1}^{0} -x\ dx$ + $\int_{0}^{1} -x^3\ dx$ + $\int_{0}^{1} x\ dx$
A= $\frac{x^4}{4}$ $|_{-1}^{0}$ - $\int_{-1}^{0} x\ dx$ - $\int_{0}^{1} x^3\ dx$ + $\frac{x^2}{2}$ $|_{0}^{1}$
A= $\frac{1}{4}$ $[0^4$ - $(-1)^4]$ - $\frac{x^2}{2}$ $|_{-1}^{0}$ - $\frac{x^4}{4}$ $|_{0}^{1}$ + $\frac{1}{2}$ $(1^2$ - $0^2)$
A= $\frac{1}{4}$ (0 - 1) - $\frac{1}{2}$ $[0^2$ - $(-1)^2]$ - $\frac{1}{4}$ $(1^4$ - $0^4)$ + $\frac{1}{2}$ (1 - 0)

A= $\frac{1}{4}$ (-1) - $\frac{1}{2}$ (0 - 1) - $\frac{1}{4}$ (1 - 0) + $\frac{1}{2}$ * 1
A= $\frac{-1}{4}$ - $\frac{1}{2}$ (-1) - $\frac{1}{4}$ * 1 + $\frac{1}{2}$
A= $\frac{-1}{4}$ + $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{2}$
A= $\frac{1}{2}$.