Trabajo Práctico Nº 3: Continuidad de una Función.

Ejercicio 1.

Determinar si las siguientes funciones son continuas en los valores indicados. Clasificar las discontinuidades, si las hay. Representar, gráficamente, cada función y verificar la conclusión obtenida.

(a)
$$f(x) = |x - 2| + 3$$
 en $x = 2$.

$$f(2) = |2 - 2| + 3$$

$$f(2) = |0| + 3$$

$$f(2) = 0 + 3$$

$$f(2) = 3.$$

$$\lim_{x \to 2^{-}} f(x) = \lim_{x \to 2^{-}} |x - 2| + 3$$

$$\lim_{x \to 2^{-}} f(x) = \lim_{x \to 2^{-}} -(x - 2) + 3$$

$$\lim_{x \to 2^{-}} f(x) = \lim_{x \to 2^{-}} -x + 2 + 3$$

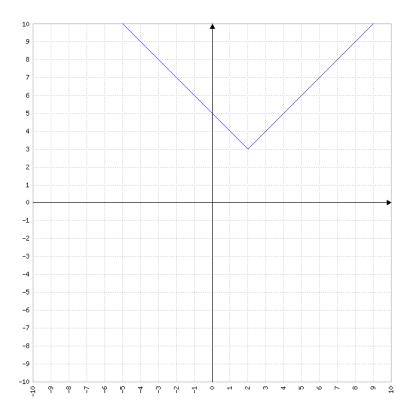
$$\lim_{x \to 2^{-}} f(x) = \lim_{x \to 2^{-}} -x + 5 = -2 + 5 = 3.$$

$$\lim_{x \to 2^{+}} f(x) = \lim_{x \to 2^{+}} |x - 2| + 3$$

$$\lim_{x \to 2^{+}} f(x) = \lim_{x \to 2^{+}} x - 2 + 3$$

$$\lim_{x \to 2^{+}} f(x) = \lim_{x \to 2^{+}} x + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Por lo tanto, ya que f (2)= $\lim_{x\to 2} f(x)$ = 3, f (x) es continua en x= 2.



(b)
$$g(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5} en x = 5.$$

 $x=5 \notin Dom_g$.

$$\lim_{x \to 5^{-}} g(x) = \lim_{x \to 5^{-}} \frac{x^{2} - 25}{x - 5} = \frac{5^{2} - 25}{5 - 5} = \frac{25 - 25}{0} = (\frac{0}{0}).$$

$$\lim_{x \to 5^{-}} g(x) = \lim_{x \to 5^{-}} \frac{(x - 5)^{2}}{x - 5}$$

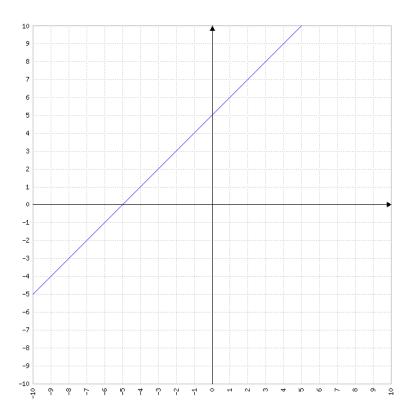
$$\lim_{x \to 5^{-}} g(x) = \lim_{x \to 5^{-}} x - 5 = 5 - 5 = 0.$$

$$\lim_{x \to 5^{+}} g(x) = \lim_{x \to 5^{+}} \frac{x^{2} - 25}{x - 5} = \frac{5^{2} - 25}{5 - 5} = \frac{25 - 25}{0} = (\frac{0}{0}).$$

$$\lim_{x \to 5^{+}} g(x) = \lim_{x \to 5^{+}} \frac{(x - 5)^{2}}{x - 5}$$

$$\lim_{x \to 5^{+}} g(x) = \lim_{x \to 5^{+}} x - 5 = 5 - 5 = 0.$$

Por lo tanto, ya que $x = 5 \notin Dom_g$ y, entonces, \nexists g (5), pero $\lim_{x \to 5} g(x) = 0$, g (x) es discontinua evitable en x = 5.



(c)
$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, si \ x \neq 0 \\ 0, si \ x = 0 \end{cases} en \ x = 0.$$

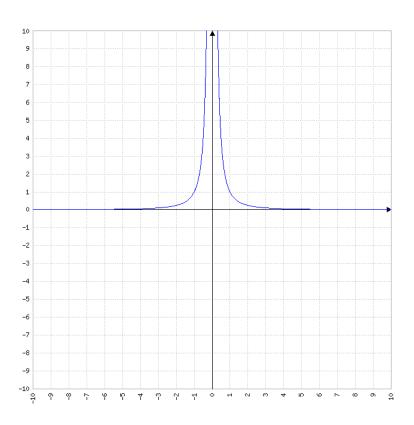
$$h(0)=0.$$

$$\lim_{x \to 0^{-}} h(x) = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{1}{x^{2}} = \frac{1}{0^{2}} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

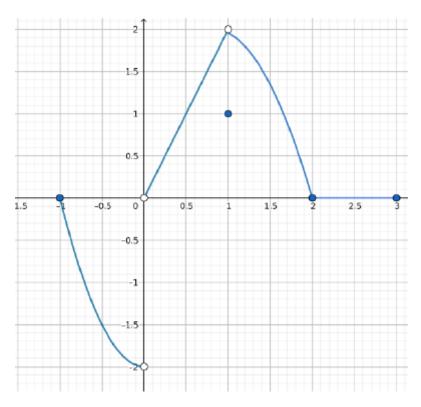
Por lo tanto, ya que $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ y, entonces, $\nexists \lim_{x\to 0} h(x)$, h(x) es discontinua inevitable en x=0.

Juan Menduiña



Ejercicio 2.

A partir de la siguiente gráfica de f(x):



Responder:

(a) ¿Existe
$$f(-1)$$
?

Sí,
$$f(-1) = 0$$
.

(b) ¿Existe
$$\lim_{x \to -1^+} f(x)$$
?

Sí,
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$$
.

(c)
$$f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$
?

Sí, f (-1)=
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$$
.

(d)
$$\&Existe f(0)$$
?

No, ∄ f (0).

(e) Existe
$$\lim_{x\to 0} f(x)$$
?

No,
$$\not\exists \lim_{x\to 0} f(x)$$
.

(f) *if es continua en
$$x = 0$$
?*

No, f no es continua en x = 0.

(g) ¿Existe
$$f(1)$$
?

$$Si, f(1) = 1.$$

(h) ¿ Existe
$$\lim_{x\to 1} f(x)$$
?

Sí,
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$
.

(i)
$$f$$
 es continua en $x = 1$?

No, f no es continua en x=1.

(j) if es continua en
$$x=2$$
?

Sí, f es continua en x=2.

(**k**)
$$\partial f$$
 es continua en $x=3$?

Sí, f es continua en
$$x=3$$
.

Ejercicio 3.

Dada la siguiente función, decidir si es continua en x=-1 y en x=1:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, si \ x \le -1 \\ 1, si - 1 < x \le 1 \\ \frac{1}{x}, si \ x > 1 \end{cases}.$$

$$f(-1) = -2(-1) + 1$$

$$f(-1)=2+1$$

$$f(-1)=3$$
.

$$\lim_{x \to -1^{-}} f(x) = \lim_{x \to -1^{-}} -2x + 1 = -2(-1) + 1 = 2 + 1 = 3.$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 1 = 1.$$

Por lo tanto, ya que $\lim_{x \to -1^{-}} f(x) = \lim_{x \to -1^{+}} f(x)$ y, por lo tanto, $\nexists \lim_{x \to -1} f(x)$, f(x) es discontinua inevitable en x= -1.

$$f(1)=1$$
.

$$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = \lim_{x \to 1^{-}} 1 = 1.$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

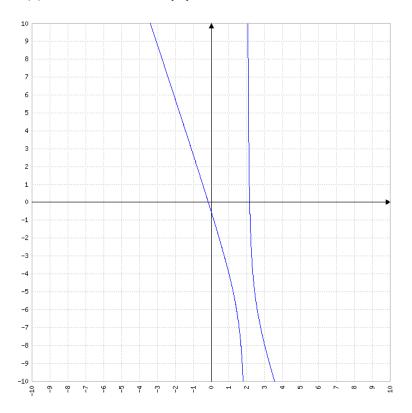
Por lo tanto, ya que f (1)= $\lim_{x\to 1} f(x)$ = 1, f (x) es continua en x= 1.

Ejercicio 4.

Decidir en qué conjuntos son continuas las siguientes funciones:

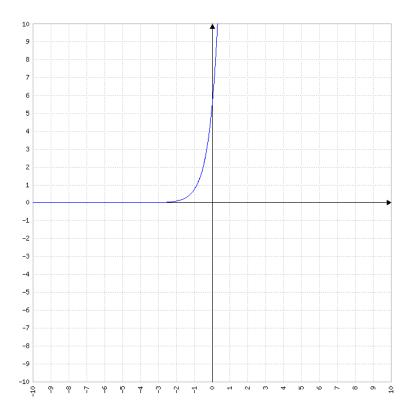
(a)
$$f(x) = \frac{1}{x-2} - 3x$$
.

f(x) es continua en \mathbb{R} - $\{2\}$.



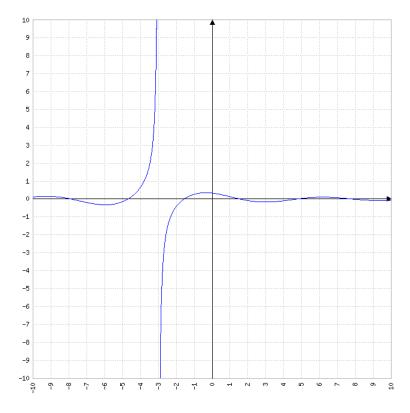
(b)
$$g(x) = 2e^{2x+1}$$
.

g (x) es continua en \mathbb{R} .



(c)
$$h(x) = \frac{\cos x}{x+3}$$
.

h (x) es continua en \mathbb{R} - {-3}.



Ejercicio 5.

Para qué valor de k, g(x) resulta continua en \mathbb{R} .

$$g(x) = \begin{cases} -x, si \ x > -2 \\ kx^2, si \ x \le -2 \end{cases}$$

$$f(-2)=k(-2)^2$$

f(-2)= 4k.

$$\lim_{x \to -2^{-}} g(x) = \lim_{x \to -2^{-}} kx^{2} = k(-2)^{2} = 4k.$$

$$\lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} -x = -(-2) = 2.$$

$$\lim_{\substack{x \to -2^{-} \\ 4k=2}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -2^{+} \\ 4}} g(x)$$

$$k = \frac{2}{4}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, para $k = \frac{1}{2}$, g (x) resulta continua en \mathbb{R} , ya que g (-2)= $\lim_{x \to -2} g(x) = 2$ y, por lo tanto, g (x) es continua en x= -2 y, además, g (x) es continua a la izquierda y a la derecha de x= -2 (ya que toda función polinómica es continua en \mathbb{R}).

Ejercicio 6.

Decidir si la siguiente función es continua en [-2, 5]:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3, si \ x \ge 3 \\ \frac{x^2 - 9}{x - 3}, si \ x < 3 \end{cases}.$$

$$h(3)=3^2-3$$

$$h(3) = 9 - 3$$

$$h(3)=6.$$

$$\lim_{x \to 3^{-}} h(x) = \lim_{x \to 3^{-}} \frac{x^{2} - 9}{x - 3} = \frac{3^{2} - 9}{3 - 3} = \frac{9 - 9}{0} = (\frac{0}{0}).$$

$$\lim_{x \to 3^{-}} h(x) = \lim_{x \to 3^{-}} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to 3^{-}} h(x) = \lim_{x \to 3^{-}} x + 3 = 3 + 3 = 6.$$

$$\lim_{x \to 3^+} h(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 - 3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6.$$

h (-2)=
$$\frac{(-2)^2-9}{-2-3}$$

h (-2)= $\frac{4-9}{-5}$
h (-2)= $\frac{-5}{-5}$

$$h(-2) = \frac{4-9}{4-9}$$

h (-2)=
$$\frac{-5}{5}$$

$$h(-2)=1$$
.

$$\lim_{x \to -2^+} h(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(-2)^2 - 9}{-2 - 3} = \frac{4 - 9}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

$$h(5)=5^2-3$$

$$h(5)=25-3$$

$$h(5)=22.$$

$$\lim_{x \to 5^{-}} h(x) = \lim_{x \to 5^{-}} x^{2} - 3 = 5^{2} - 3 = 25 - 3 = 22.$$

Por lo tanto, ya que h (x) es continua en todos los puntos interiores (-2, 5), continua por la derecha en x = -2 y continua por la izquierda en x = 5, h (x) es continua en [-2, 5].