Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 8: Test de Hipótesis.

Ejercicio 1.

Para cada una de las siguientes aseveraciones, expresar si es una hipótesis estadística legítima y por qué:

(a) *H:* $\sigma > 0$.

Sí, es una hipótesis estadística legítima. La hipótesis se refiere a la desviación estándar poblacional (σ), que es un parámetro poblacional.

(b) *H:* $s \leq 0,2$.

No, no es una hipótesis estadística legítima. La hipótesis se refiere a la desviación estándar muestral (s). Las hipótesis estadísticas deben referirse a parámetros poblacionales, no a estadísticos muestrales.

(c) *H:* $\bar{X} - \bar{Y} = 5$.

No, no es una hipótesis estadística legítima. La hipótesis se refiere a las medias muestrales ($\bar{X}$ y $\bar{Y}$). Las hipótesis estadísticas deben referirse a parámetros poblacionales, no a estadísticos muestrales.

(d) *H:* $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1$.

Sí, es una hipótesis estadística legítima. La hipótesis se refiere al cociente de desviaciones estándar poblacionales ($\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$), que es un parámetro poblacional.

(e) *H:* $\mu \leq 0,1$.

Sí, es una hipótesis estadística legítima. La hipótesis se refiere a la media poblacional (μ), que es un parámetro poblacional.

Ejercicio 2.

Sea el estadístico de prueba Z con una distribución normal estándar cuando H_0 es verdadera. Dar el nivel de significancia en cada una de las siguientes situaciones:

(a) *H_1: $\mu > \mu_0$, región de rechazo z ≥ 1,88.*

α= P (Z ≥ 1,88)
α= 1 - P (Z < 1,88)
α= 1 - F (1,88)
α= 1 - 0,9699
α= 0,0301.

(b) *H_1: $\mu < \mu_0$, región de rechazo z ≤ -2,75.*

α= P (Z ≤ -2,75)
α= F (-2,75)
α= 0,003.

(c) *H_1: $\mu \neq \mu_0$, región de rechazo z ≥ 2,88 o z ≤ -2,88.*

α= P (Z ≥ 2,88) + P (Z ≤ -2,88)
α= [1 - P (Z < 2,88)] + P (Z ≤ -2,88)
α= [1 - F (2,88)] + F (-2,88)
α= (1 - 0,998) + 0,002
α= 0,002 + 0,002
α= 0,004.

Ejercicio 3.

Se supone que una máquina que llena cajas de cereal está calibrada, por lo que la media del peso de llenado es de 340 gr. Sea μ la media verdadera del peso de llenado. Suponer que, en una prueba de hipótesis, H_0*:* μ*= 340 contra* H_1*:* $\mu \neq$ *340, el p-valor es 0,3.*

(a) *¿Se debe rechazar* H_0 *con base en esta prueba? Explicar.*

Con base en esta prueba, no se debe rechazar H_0, ya que el p-valor es significativamente mayor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1), por lo que no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula H_0.

(b) *¿Se puede concluir que la máquina está calibrada y decir que la media del peso de llenado es de 340 gr.? Explicar.*

No, no se puede concluir que la máquina está calibrada y decir que la media del peso de llenado es de 340 gr., aunque no exista evidencia suficiente para rechazar esta hipótesis nula. El hecho de no rechazar H_0 no implica que H_0 sea verdadera, sino sólo que estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que la media verdadera del peso de llenado es diferente de 340 gr.

Ejercicio 4.

Un proceso de fabricación produce cojinetes de bola con diámetros que tienen una distribución normal y una desviación estándar de σ= 0,04 cm. Los cojinetes de bola que tienen diámetros que son muy pequeños o muy grandes son indeseables. Para poner a prueba la hipótesis nula de que μ= 0,5 cm. se selecciona al azar una muestra de 25 y se encuentra que la media muestral es 0,51.

(a) *Establecer las hipótesis nula y alternativa tales que el rechazo de la hipótesis nula implicará que los cojinetes de bola son indeseables.*

Modelización:

X_i: "diámetro del i-ésimo cojinete de bola", i= 1, 2, … , 25.
$\bar{X}$: "diámetro promedio de un cojinete de bola de una muestra de n cojinetes de bola".

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ, σ^2), i= 1, 2, … , 25.
$\bar{X} \sim \mathcal{N}$ (μ, $\frac{\sigma^2}{n}$).

Hipótesis:

H_0: μ= 0,5.
H_1: $\mu \neq$ 0,5.

(b) *Con α= 0,02, ¿cuál es el valor crítico para el estadístico de prueba? Realizar el test.*

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}$ (0, 1), bajo H_0.

Valor observado:

$z_0 = \frac{0,51-0,5}{\frac{0,04}{\sqrt{25}}}$
$z_0 = \frac{0,01}{\frac{0,04}{5}}$
$z_0 = \frac{0,01}{0,008}$
z_0= 1,25.

Valor crítico:

$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,02}{2}}$
$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01}$
$z_{\frac{\alpha}{2}}$= 2,33.

Por lo tanto, el valor crítico para el estadístico de prueba es 2,33.

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,02, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que los cojinetes de bola son indeseables, ya que $|z_0|= |1{,}25|= 1{,}25 < z_{\frac{\alpha}{2}}$= 2,33.

Ejercicio 5.

Cuando está operando adecuadamente, una planta química tiene una media de producción diaria de, por lo menos, 740 toneladas. La producción se mide en una muestra aleatoria simple de 60 días. La muestra tenía una media de 715 toneladas por día y desviación estándar de 24 toneladas por día. Sea μ la media de la producción diaria de la planta. Un ingeniero prueba que: H_0: $\mu \geq 740$ contra H_1: $\mu < 740$.

(a) *Determinar el p-valor.*

Modelización:

X_i: "producción (en toneladas) del i-ésimo día de una planta química", i= 1, 2, … , 60.
$\bar{X}$: "producción (en toneladas) promedio diaria de una planta química de una muestra de n días".

$\bar{X} \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, por TCL.

Hipótesis:

H_0: $\mu \geq 740$.
H_1: $\mu < 740$.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$z_0 = \frac{715-740}{\frac{24}{\sqrt{60}}}$
$z_0 = \frac{-25}{\frac{24}{7{,}746}}$
$z_0 = \frac{-25}{3{,}098}$
z_0= -8,069.

P-valor:

p-valor= P (Z $<$ z_0)
p-valor= P (Z $<$ -8,069)
p-valor= F (-8,069)
p-valor$\cong$ 0.

(b) *¿Se piensa que es factible que la planta esté operando adecuadamente o se está convencido de que la planta no funciona en forma adecuada? Explicar el razonamiento.*

Estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que la planta química no está operando adecuadamente, ya que el p-valor (aproximado) es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

Ejercicio 6.

Probar la hipótesis de que el contenido medio de los envases de un lubricante específico es de 10 litros, si los contenidos de una muestra aleatoria de 10 envases son: 10.2, 9.7, 10.1, 10.3, 10.1, 9.8, 9.9, 10.4, 10.3, 9.8. Utilizar un nivel de significancia de 0,01 y suponer que la distribución del contenido es normal.

Modelización:

X_i: "contenido del i-ésimo envase de un lubricante específico", i= 1, 2, … , 10.
$\bar{X}$: "contenido promedio de un envase de un lubricante específico de una muestra de n envases".

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ, σ^2), i= 1, 2, … , 10.
$\bar{X} \sim \mathcal{N}$ $(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Hipótesis:

H_0: μ= 10.
H_1: $\mu \neq$ 10.

Estadístico de prueba:

T= $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$, bajo H_0.

Valor observado:

t_0= $\frac{10{,}06-10}{\frac{0{,}246}{\sqrt{10}}}$
t_0= $\frac{0{,}06}{\frac{0{,}246}{3{,}162}}$
t_0= $\frac{0{,}06}{0{,}077}$
t_0= 0,772.

Valor crítico:

$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= $t_{\frac{0{,}01}{2},9}$
$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= $t_{0{,}005,9}$
$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= 3,25.

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,01, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que el contenido medio de un envase de un lubricante específico es distinto de 10 litros, ya que $|t_0|$= $|0{,}772|$= 0,772 $< t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= 3,25.

Ejercicio 7.

Para determinar el efecto del grado de combustible en la eficiencia del combustible, 80 nuevos automóviles de la misma marca, con motores idénticos, fueron conducidos cada uno durante 1000 millas. Cuarenta de los automóviles funcionaron con combustible regular y otros 40 con combustible de grado Premium; los primeros tenían una media de 27,2 milla/galón, con desviación estándar de 1,2 milla/galón. Los segundos tenían una media de 28,1 milla/galón y una desviación estándar de 2,0 milla/galón. ¿Se puede concluir que este tipo de automóvil tiene mejor millaje con combustible Premium? Utilizar el p-valor.

Modelización:

$X_{p,i}$: "milla/galón del i-ésimo automóvil que funciona con combustible premium", i= 1, 2, … , 40.
$X_{r,i}$: "milla/galón del i-ésimo automóvil que funciona con combustible regular", i= 1, 2, … , 40.
$\bar{X}_p$: "milla/galón promedio de un automóvil que funciona con combustible premium de una muestra de n automóviles".
$\bar{X}_r$: "milla/galón promedio de un automóvil que funciona con combustible regular de una muestra de n automóviles".

$\bar{X}_p \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_p, \frac{\sigma_p^2}{n_p})$, por TCL.

$\bar{X}_r \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_r, \frac{\sigma_r^2}{n_r})$, por TCL.

$\bar{X}_p$ - $\bar{X}_r \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_p - \mu_r, \frac{\sigma_p^2}{n_p} + \frac{\sigma_r^2}{n_r})$, por TCL.

Hipótesis:

H_0: μ_p - $\mu_r \leq 0$.
H_1: μ_p - $\mu_r > 0$.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{(\bar{X}_p-\bar{X}_r)-(\mu_{p_0}-\mu_{r_0})}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_p}+\frac{S_r^2}{n_r}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$z_0 = \frac{(28,1-27,2)-0}{\sqrt{\frac{2^2}{40}+\frac{1,2^2}{40}}}$

$z_0 = \frac{0,9}{\sqrt{\frac{4}{40}+\frac{1,44}{40}}}$

$z_0 = \frac{0,9}{\sqrt{\frac{5,44}{40}}}$

$z_0 = \frac{0{,}9}{\sqrt{0{,}136}}$
$z_0 = \frac{0{,}9}{0{,}369}$
$z_0 = 2{,}44$.

<u>P-valor:</u>

p-valor= P (Z $> z_0$)
p-valor= 1 - P (Z $\leq z_0$)
p-valor= 1 - P (Z $\leq$ 2,44)
p-valor= 1 - F (2,44)
p-valor$\cong$ 1 - 0,9927
p-valor$\cong$ 0,0073.

<u>Conclusión:</u>

Por lo tanto, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que este tipo de automóvil tiene mejor millaje con combustible Premium, ya que el p-valor (aproximado) es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

Ejercicio 8.

Se probó la velocidad en cierta aplicación de 50 chips nuevos de computadora, con otra cantidad igual de diseño viejo. La velocidad promedio, en MHz, de los nuevos chips fue de 495,6 y la desviación estándar de 19,4. La velocidad promedio de los chips viejos fue de 481,2 y la desviación estándar fue de 14,3.

(a) *¿Se puede concluir que la media de la velocidad de los nuevos es mayor que la de los chips viejos? Establecer las hipótesis nula y alternativa adecuadas y, después, encontrar el p-valor.*

Modelización:

$X_{n,i}$: "velocidad (en MHz) del i-ésimo chip nuevo de computadora en cierta aplicación", i= 1, 2, … , 50.
$X_{v,i}$: "velocidad (en MHz) del i-ésimo chip viejo de computadora en cierta aplicación", i= 1, 2, … , 50.
$\bar{X}_n$: "velocidad (en MHz) promedio de un chip nuevo de computadora en cierta aplicación de una muestra de n chips nuevos".
$\bar{X}_v$: "velocidad (en MHz) promedio de un chip viejo de computadora en cierta aplicación de una muestra de n chips viejos".

$\bar{X}_n \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_n, \frac{\sigma_n^2}{n_n})$, por TCL.
$\bar{X}_v \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_v, \frac{\sigma_v^2}{n_v})$, por TCL.
$\bar{X}_n$ - $\bar{X}_v \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_n - \mu_v, \frac{\sigma_n^2}{n_n} + \frac{\sigma_v^2}{n_v})$, por TCL.

Hipótesis:

H_0: μ_n - $\mu_v \leq 0$.
H_1: μ_n - $\mu_v > 0$.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{(\bar{X}_n-\bar{X}_v)-(\mu_{n_0}-\mu_{v_0})}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n_n}+\frac{S_v^2}{n_v}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$z_0 = \frac{(495,6-481,2)-0}{\sqrt{\frac{19,4^2}{50}+\frac{14,3^2}{50}}}$
$z_0 = \frac{14,4}{\sqrt{\frac{376,36}{50}+\frac{204,49}{50}}}$
$z_0 = \frac{14,4}{\sqrt{\frac{580,85}{50}}}$

$z_0 = \frac{14,4}{\sqrt{11,617}}$
$z_0 = \frac{14,4}{3,408}$
$z_0 = 4,22$.

P-valor:

p-valor= P (Z $> z_0$)
p-valor= 1 - P (Z $\leq z_0$)
p-valor= 1 - P (Z $\leq$ 4,22)
p-valor= 1 - F (4,22)
p-valor$\cong$ 1 - 1
p-valor$\cong$ 0.

Conclusión:

Por lo tanto, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que la media de la velocidad (en MHz) de los chips nuevos es mayor que la de los chips viejos, ya que el p-valor (aproximado) es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

(b) *Una muestra de 60 chips aún más viejos tenía velocidad promedio de 391,2 MHz, con desviación estándar de 17,2 MHz. Alguien afirma que los nuevos chips tienen una velocidad promedio mayor a 100 MHz que los más viejos. ¿Los datos proporcionan evidencias convincentes para esta afirmación? Establecer las hipótesis nula y alternativa y, después, determinar el p-valor.*

Modelización:

$X_{mv,i}$: "velocidad (en MHz) del i-ésimo chip más viejo de computadora en cierta aplicación", i= 1, 2, … , 60.
$\bar{X}_{mv}$: "velocidad (en MHz) promedio de un chip más viejo de computadora en cierta aplicación de una muestra de n chips más viejos".

$\bar{X}_{mv} \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_{mv}, \frac{\sigma_{mv}^2}{n_{mv}})$, por TCL.
$\bar{X}_n - \bar{X}_{mv} \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_n - \mu_{mv}, \frac{\sigma_n^2}{n_n} + \frac{\sigma_{mv}^2}{n_{mv}})$, por TCL.

Hipótesis:

H_0: $\mu_n - \mu_{mv} \leq 100$.
H_1: $\mu_n - \mu_{mv} > 100$.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{(\bar{X}_n-\bar{X}_v)-(\mu_{n_0}-\mu_{mv_0})}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n_n}+\frac{S_{mv}^2}{n_{mv}}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$z_0= \frac{(495,6-391,2)-100}{\sqrt{\frac{19,4^2}{50}+\frac{17,2^2}{60}}}$

$z_0= \frac{104,4-100}{\sqrt{\frac{376,36}{50}+\frac{295,84}{60}}}$

$z_0= \frac{4,4}{\sqrt{7,5272+4,930\widehat{6}}}$

$z_0= \frac{4,4}{\sqrt{12,4578\widehat{6}}}$

$z_0= \frac{4,4}{3,5296}$

z_0= 1,25.

P-valor:

p-valor= P (Z $>$ z_0)
p-valor= 1 - P (Z $\leq$ z_0)
p-valor= 1 - P (Z $\leq$ 1,25)
p-valor= 1 - F (1,25)
p-valor$\cong$ 1 - 0,8944
p-valor$\cong$ 0,1056.

Conclusión:

Por lo tanto, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que los nuevos chips tienen una velocidad promedio mayor a 100 MHz que los chips más viejos, ya que el p-valor (aproximado) es mayor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

Ejercicio 9.

Se considera usar dos marcas diferentes de pintura látex. El tiempo de secado, en horas, se mide en especímenes de muestras del uso de las dos pinturas. Se seleccionan 15 especímenes de cada una y los tiempos de secado son los siguientes:

- *Pintura A: 3.5, 2.7, 3.9, 4.2, 3.6, 2.7, 3.3, 5.2, 4.2, 2.9, 4.4, 5.2, 4.0, 4.1, 3.4.*
- *Pintura B: 4.7, 3.9, 4.5, 5.5, 4.0, 5.3, 4.3, 6.0, 5.2, 3.7, 5.5, 6.2, 5.1, 5.4, 4.8.*

Suponer que el tiempo de secado se distribuye normalmente con $\sigma_A = \sigma_B$ y que ambos tiempos de secado son independientes.

(a) *Encontrar un intervalo de confianza para la diferencia de las medias de nivel 95%.*

Modelización:

$X_{A,i}$: "tiempo de secado (en horas) del i-ésimo espécimen de la pintura de la marca A", i= 1, 2, … , 15.
$X_{B,i}$: "tiempo de secado (en horas) del i-ésimo espécimen de la pintura de la marca B", i= 1, 2, … , 15.
$\bar{X}_A$: "tiempo de secado (en horas) promedio de la pintura de la marca A de una muestra de n especímenes".
$\bar{X}_B$: "tiempo de secado (en horas) promedio de la pintura de la marca B de una muestra de n especímenes".

$X_{A,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_A, $\sigma_A^2 = \sigma^2$).
$X_{B,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_B, $\sigma_B^2 = \sigma^2$).
$\bar{X}_A \sim \mathcal{N}$ (μ_A, $\frac{\sigma_A^2}{n_A} = \frac{\sigma^2}{n_A}$).
$\bar{X}_B \sim \mathcal{N}$ (μ_B, $\frac{\sigma_B^2}{n_B} = \frac{\sigma^2}{n_B}$).
$\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B \sim \mathcal{N}$ (μ_A - μ_B, $\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B} = \frac{\sigma^2}{n_A} + \frac{\sigma^2}{n_B}$).

Pivote:

$$T = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim t_{n_A+n_B-2},$$

donde:

$\bar{X}_A$= 3,82; S_A^2= 0,607; n_A= 15.
$\bar{X}_B$= 4,94; S_B^2= 0,568; n_B= 15.

$$S_p^2 = \frac{(n_A-1)S_A^2 + (n_B-1)S_B^2}{n_A+n_B-2}$$
$$S_p^2 = \frac{(15-1)*0,607 + (15-1)*0,568}{15+15-2}$$
$$S_p^2 = \frac{14*0,607 + 14*0,568}{28}$$

$S_p^2 = \frac{14(0,607+0,568)}{28}$
$S_p^2 = \frac{0,607+0,568}{2}$
$S_p^2 = \frac{1,176}{2}$
$S_p^2 = 0,588.$

$S_p = \sqrt{S_p^2}$
$S_p = \sqrt{0,588}$
$S_p = 0,767.$

Intervalo de confianza:

P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2} \leq$ T $\leq t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}$)= 1 - α
P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2} \leq \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}$)= 1 - α
P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}} \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B) \leq t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}$)= 1 - α
P ($-(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}} \leq -(\mu_A - \mu_B) \leq -(\bar{X}_A - \bar{X}_B) + t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}$)= 1 - α
P ($(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}} \leq \mu_A - \mu_B \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}$)= 1 - α.

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%}$= [(3,82 - 4,94) - $t_{0,025,28}$ * 0,767 $\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}}$; (3,82 - 4,94) + $t_{0,025,28}$ * 0,767 $\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}}$]
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%}$= [-1,12 - 2,048 * 0,767 $\sqrt{\frac{2}{15}}$; -1,12 + 2,048 * 0,767 $\sqrt{\frac{2}{15}}$]
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%}$= [-1,12 - 2,048 * 0,767 * 0,365; -1,12 + 2,048 * 0,767 * 0,365]
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%}$= [-1,12 - 0,573; -1,12 + 0,573]
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%}$= [-1,693; -0,547].

(b) *Utilizar el intervalo calculado en el inciso (a) para hacer un test para decidir si las medias difieren.*

Hipótesis:

H_0: μ_A - μ_B= 0.
H_1: μ_A - $\mu_B \neq 0$.

Conclusión:

Por lo tanto, ya que el intervalo de confianza de 95% no incluye el valor 0, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que las medias de los tiempos de secado (en horas) difieren, considerando un nivel de significación del 5%.

Ejercicio 10.

Se estudia el flujo de tránsito en dos intersecciones transitadas entre las 4 P.M. y las 6 P.M. para determinar la posible necesidad de señales de vuelta. Se descubrió que, en 21 días laborales, hubo, en promedio, 247,3 automóviles que se aproximaron a la primera intersección desde el sur y dieron vuelta a la izquierda, mientras que, en 11 días laborales, hubo, en promedio, 254,1 automóviles que se aproximaron a la segunda intersección desde el sur y dieron vuelta a la izquierda. Las desviaciones estándar muestrales correspondientes son S_1= 15,2 y S_2= 18,7. Suponer que las distribuciones son normales y que hay independencia entre ambas muestras. Probar la hipótesis nula μ_1 - μ_2= 0 contra la alternativa μ_1 - μ_2 $\neq$ 0 con nivel de significancia α= 0,01.

<u>Modelización:</u>

$X_{1,i}$: "flujo de tránsito del i-ésimo día entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la primera intersección", i= 1, 2, … , 21.
$X_{2,i}$: "flujo de tránsito del i-ésimo día entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la segunda intersección", i= 1, 2, … , 11.
$\bar{X}_1$: "flujo de tránsito promedio diario entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la primera intersección de una muestra de n días".
$\bar{X}_2$: "flujo de tránsito promedio diario entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la segunda intersección de una muestra de n días".

$X_{1,i} \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, i= 1, 2, … , 21.
$X_{2,i} \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, i= 1, 2, … , 11.
$\bar{X}_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$.
$\bar{X}_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$.
$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$.

<u>Hipótesis:</u>

H_0: μ_1 - μ_2= 0.
H_1: μ_1 - μ_2 $\neq$ 0.

<u>Estadístico de prueba:</u>

T= $\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_{1_0}-\mu_{2_0})}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \sim^{aprox} t_v$, por v aproximado al entero más próximo y bajo H_0.

<u>Valor observado:</u>

$t_0 = \frac{(247,3-254,1)-0}{\sqrt{\frac{15,2^2}{21}+\frac{18,7^2}{11}}}$

$t_0 = \frac{-6,8}{\sqrt{\frac{231,04}{21}+\frac{349,69}{11}}}$

$t_0 = \frac{-6,8}{\sqrt{11+31,79}}$

$t_0 = \frac{-6,8}{\sqrt{42,79}}$

$t_0 = \frac{-6,8}{6,541}$

t_0= -1,0395.

<u>Valor crítico:</u>

$v = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{(\frac{S_1^2}{n_1})^2}{n_1-1}+\frac{(\frac{S_2^2}{n_2})^2}{n_2-1}}$

$v = \frac{(\frac{15,2^2}{21}+\frac{18,7^2}{11})^2}{\frac{(\frac{15,2^2}{21})^2}{21-1}+\frac{(\frac{18,7^2}{11})^2}{11-1}}$

$v = \frac{(\frac{231,04}{21}+\frac{349,69}{11})^2}{\frac{(\frac{231,04}{21})^2}{20}+\frac{(\frac{349,69}{11})^2}{10}}$

$v = \frac{(11+31,79)^2}{\frac{11^2}{20}+\frac{31,79^2}{10}}$

$v = \frac{42,79^2}{\frac{121}{20}+\frac{1010,6041}{10}}$

$v = \frac{1830,9841}{6,05+101,06041}$

$v = \frac{1830,9841}{107,11401}$

v= 17,0938.

$t_{\frac{\alpha}{2},v} \cong t_{\frac{0,01}{2},17}$

$t_{\frac{\alpha}{2},v} \cong t_{0,005,17}$

$t_{\frac{\alpha}{2},v} \cong$ 2,898.

<u>Conclusión:</u>

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,01, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que flujo de tránsito promedio entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en las dos intersecciones difiere, ya que $|t_0|$= $|-1,0395|$= 1,0395 $< t_{\frac{\alpha}{2},v} \cong$ 2,898.

Ejercicio 11.

La directiva de una compañía de taxis está tratando de decidir si debe cambiar de neumáticos normales a neumáticos radiales para mejorar el ahorro de combustible. Se equiparon cada uno de los diez taxis con uno de los dos tipos de neumáticos y se condujeron en una trayectoria de prueba. Sin cambiar de conductores, se seleccionó el tipo de neumáticos y se repitió la trayectoria de prueba. El ahorro de combustible (en milla/galón) para los diez automóviles es:

Automóvil	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
radial	*32,1*	*36,1*	*32,3*	*29,5*	*34,3*	*31,9*	*33,4*	*34,6*	*35,2*	*32,7*
normal	*27,1*	*31,5*	*30,4*	*26,9*	*29,9*	*28,7*	*30,2*	*31,8*	*33,6*	*29,9*

Asumir que la diferencia en ahorro de combustible entre ambos neumáticos es aproximadamente normal.

(a) *Debido a que el cambio de neumáticos en la flota de taxis es caro, la directiva no quiere cambiar a menos que una prueba de hipótesis proporcione evidencias de que mejorará el millaje. Establecer la hipótesis nula y alternativa adecuadas y encontrar el p-valor.*

Modelización:

$X_{r,i}$: "ahorro de combustible (en milla/galón) del i-ésimo taxi equipado con neumáticos radiales", i= 1, 2, … , 10.
$X_{n,i}$: "ahorro de combustible (en milla/galón) del i-ésimo taxi equipado con neumáticos normales", i= 1, 2, … , 10.
X_D: "diferencia de ahorro de combustible (en milla/galón) del i-ésimo taxi equipado con neumáticos radiales versus equipado con neumáticos normales", i= 1, 2, … , 10.
$\bar{X}_D$: "diferencia de ahorro de combustible (en milla/galón) promedio de un taxi equipado con neumáticos radiales versus equipado con neumáticos normales de una muestra de n taxis".

$X_D \sim \mathcal{N}\ (\mu_D, \sigma_D^2)$.
$\bar{X}_D \sim \mathcal{N}\ (\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n})$.

Cálculos:

Automóvil	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
radial	32,1	36,1	32,3	29,5	34,3	31,9	33,4	34,6	35,2	32,7
normal	27,1	31,5	30,4	26,9	29,9	28,7	30,2	31,8	33,6	29,9
diferencia	5	4,6	1,9	2,6	4,4	3,2	3,2	2,8	1,6	2,8

$\bar{X}_D$= 3,21; S_D= 1,134.

Hipótesis:

H_0: $\mu_D \leq 0$.

H_1: $\mu_D > 0$.

Estadístico de prueba:

T= $\frac{\bar{X}_D-\mu_{D_0}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$, bajo H_0.

Valor observado:

t_0= $\frac{3,21-0}{\frac{1,134}{\sqrt{10}}}$
t_0= $\frac{3,21}{\frac{1,134}{3,162}}$
t_0= $\frac{3,21}{0,3585}$
t_0= 8,953.

P-valor:

p-valor= P (T $>$ t_0)
p-valor= 1 - P (T $\leq$ t_0)
p-valor= 1 - P (T $\leq$ 8,953)
p-valor= 1 - F (8,953)
p-valor$\cong$ 1 - 1
p-valor$\cong$ 0.

Conclusión:

Por lo tanto, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que el cambio de neumáticos normales a neumáticos radiales mejora el ahorro de combustible, ya que el p-valor es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

(b) *Un análisis costo-beneficio muestra que será provechoso cambiar a neumáticos radiales si la media de la mejora del millaje es mayor a dos millas/galón. Establecer la hipótesis nula y alternativa adecuadas y encontrar el p-valor, para una prueba de hipótesis diseñada como base de la decisión de cambiar.*

Hipótesis:

H_0: $\mu_D \leq 2$.
H_1: $\mu_D > 2$.

Estadístico de prueba:

T= $\frac{\bar{X}_D-\mu_{D_0}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$, bajo H_0.

Valor observado:

$t_0 = \frac{3,21-2}{\frac{1,134}{\sqrt{10}}}$
$t_0 = \frac{1,21}{\frac{1,134}{3,162}}$
$t_0 = \frac{1,21}{0,3585}$
$t_0 = 3,375.$

P-valor:

p-valor= P (T $>$ t_0)
p-valor= 1 - P (T $\leq$ t_0)
p-valor= 1 - P (T $\leq$ 3,375)
p-valor= 1 - F (3,375)
p-valor= 1 - 0,9959
p-valor= 0,0041.

Conclusión:

Por lo tanto, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que la media de la mejora del millaje es mayor a dos millas/galón, ya que el p-valor es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

Ejercicio 12.

El departamento de seguridad de un gran edificio de oficinas quiere probar la hipótesis nula de que σ= 2 minutos para el tiempo que tarda un guardia en realizar su rondín contra la hipótesis alternativa de que $\sigma \neq 2$ minutos. ¿Qué se puede concluir con un nivel de significancia de 0,01, si una muestra aleatoria de tamaño n= 31 da como resultado S= 1,8 minutos? Asumir que la muestra proviene de una distribución normal.

Modelización:

X_i: "tiempo (en minutos) del i-ésimo día que tarda un guardia en realizar su rondín", i= 1, 2, … , 31.

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, i= 1, 2, … , 31.

Hipótesis:

H_0: σ= 2.
H_1: $\sigma \neq 2$.

Estadístico de prueba:

X= $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$, bajo H_0.

Valor observado:

$x_0 = \frac{(31-1)*1{,}8^2}{2^2}$
$x_0 = \frac{30*3{,}24}{4}$
$x_0 = \frac{97{,}2}{4}$
x_0= 24,3.

Valores críticos:

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{\frac{0{,}01}{2},30}$
$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0{,}005,30}$
$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= 53,7.

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{1-\frac{0{,}01}{2},30}$
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{1-0{,}005,30}$
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0{,}995,30}$
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$= 13,8.

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,01, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que la desviación estándar del tiempo (en minutos) que tarda un guardia en realizar su rondín es distinta de 2 minutos, ya que $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$= 13,8 $<$ x_0= 24,3 $<$ $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= 53,7.

Ejercicio 13.

Con referencia al Ejercicio 10, usar el nivel de significancia de 0,05 para probar la afirmación de que existe una mayor variabilidad en el número de automóviles que dan vuelta a la izquierda aproximándose desde el sur entre 4 P.M. y 6 P.M. en la segunda intersección.

Modelización:

$X_{1,i}$: "flujo de tránsito del i-ésimo día entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la primera intersección", i= 1, 2, … , 21.
$X_{2,i}$: "flujo de tránsito del i-ésimo día entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la segunda intersección", i= 1, 2, … , 11.

$X_{1,i} \sim \mathcal{N}\ (\mu_1, \sigma_1^2)$, i= 1, 2, … , 21.
$X_{2,i} \sim \mathcal{N}\ (\mu_2, \sigma_2^2)$, i= 1, 2, … , 11.

Hipótesis:

H_0: $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$.
H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

Estadístico de prueba:

F= $\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$= $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim f_{n_1-1,n_2-1}$, bajo H_0.

Valor observado:

f_0= $\frac{15,2^2}{18,7^2}$
f_0= $\frac{231,04}{349,69}$
f_0= 0,661.

Valor crítico:

$f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$= $f_{1-0,05,20,10}$
$f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$= $f_{0,95,20,10}$
$f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$= 0,426.

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,05, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que existe una mayor variabilidad en el número de automóviles que dan vuelta a la izquierda aproximándose desde el sur entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la segunda intersección, ya que f_0= 0,661 $> f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$= 0,426.

Ejercicio 14.

Un taller acaba de recibir una máquina nueva y busca ajustarla correctamente. Según el técnico vendedor de la máquina, la máquina está ajustada para que no produzca más de 4% de piezas defectuosas. Al tomar una muestra de 350 piezas producidas, encuentra 10 defectuosas. La empresa no puede permitirse un nivel de defectuosos mayor de 5%. Razonar qué tipo de test se debe realizar con el fin de determinar si la máquina se encuentra mal ajustada y realizar dicho contraste (tomar α= 0,05).

Modelización:

X_i: "i-ésima pieza producida defectuosa por una máquina nueva (1 si defectuosa, 0 c.c.)", i= 1, 2, … , 350.
$\hat{P}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$: "proporción de piezas producidas defectuosas por una máquina nueva de una muestra de n piezas producidas".

$X_i \sim$ B (1, p), i= 1, 2, … , 350.
$\hat{P} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p, $\frac{p(1-p)}{n}$), por TCL.

Hipótesis:

H_0: p $\leq$ 0,05.
H_1: p $>$ 0,05.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{\hat{P}-p_0}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$z_0= \frac{\frac{10}{350}-0,05}{\sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{350}}}$
$z_0= \frac{0,0286-0,05}{\sqrt{\frac{0,05*0,95}{350}}}$
$z_0= \frac{-0,0214}{\sqrt{\frac{0,0475}{350}}}$
$z_0= \frac{-0,0214}{\sqrt{0,000136}}$
$z_0= \frac{-0,0214}{0,0116}$
z_0= -1,839.

Valor crítico:

$z_\alpha \cong z_{0,05}$
$z_\alpha \cong$ 1,645.

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,05, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que la máquina se encuentra mal ajustada, ya que z_0= -1,839 $<$ z_α $\cong$ 1,645.

Ejercicio 15.

En una muestra de 100 lotes de un producto químico comprado al distribuidor A, 70 satisfacen una especificación de pureza. En una muestra de 70 lotes comprada al distribuidor B, 61 satisfacen la especificación. ¿Se puede concluir que una proporción mayor de los lotes del distribuidor B satisface la especificación? Utilizar el p-valor.

Modelización:

$X_{A,i}$: "i-ésimo producto químico que satisface una especificación de pureza comprado al distribuidor A (1 si satisface, 0 c.c.)", i= 1, 2, … , 100.
$X_{B,i}$: "i-ésimo producto químico que satisface una especificación de pureza comprado al distribuidor B (1 si satisface, 0 c.c.)", i= 1, 2, … , 70.
$\hat{P}_A= \frac{\sum_{i=1}^{n_A} X_{Ai}}{n_A}$: "proporción de productos químicos que satisfacen una especificación de pureza comprados al distribuidor A de una muestra de n productos químicos".
$\hat{P}_B= \frac{\sum_{i=1}^{n_B} X_{Bi}}{n_B}$: "proporción de productos químicos que satisfacen una especificación de pureza comprado al distribuidor B de una muestra de n productos químicos".

$X_{A,i} \sim$ B (1, p_A), i= 1, 2, … , 100.
$X_{B,i} \sim$ B (1, p_B), i= 1, 2, … , 70.
$\hat{P}_A \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p_A, $\frac{p_A(1-p_A)}{n_A}$), por TCL.
$\hat{P}_B \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p_B, $\frac{p_B(1-p_B)}{n_B}$), por TCL.
$\hat{P}_A$ - $\hat{P}_B \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p_A - p_B, $\frac{p_A(1-p_A)}{n_A}$ + $\frac{p_B(1-p_B)}{n_B}$), por TCL.

Hipótesis:

H_0: p_A - $p_B \geq 0$.
H_1: p_A - $p_B < 0$.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{(\hat{P}_A-\hat{P}_B)-(p_{A_0}-p_{B_0})}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B})}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$\hat{P}= \frac{\sum_{i=1}^{n_A} X_{Ai}+\sum_{i=1}^{n_B} X_{Bi}}{n_A+n_B}$
$\hat{P}= \frac{70+61}{100+70}$
$\hat{P}= \frac{131}{170}$
$\hat{P} \cong 0{,}77$.

$z_0 = \frac{(0,7-0,871)-0}{\sqrt{0,77(1-0,77)(\frac{1}{100}+\frac{1}{70})}}$

$z_0 = \frac{-0,171}{\sqrt{0,77*0,23(0,01+0,014)}}$

$z_0 = \frac{-0,171}{\sqrt{0,77*0,23*0,024}}$

$z_0 = \frac{-0,171}{\sqrt{0,0043}}$

$z_0 = \frac{-0,171}{0,066}$

z_0= -2,62.

P-valor:

p-valor$\cong$ P (Z $<$ z_0)
p-valor$\cong$ P (Z $<$ -2,62)
p-valor$\cong$ F (-2,62)
p-valor$\cong$ 0,0044.

Conclusión:

Por lo tanto, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que una proporción mayor de los lotes del distribuidor B satisface la especificación de pureza, ya que el p-valor (aproximado) es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).