Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 1:
Espacios Muestrales y Eventos - Asignación de Probabilidades.

Ejercicio 1.

Un experimento implica lanzar un par de dados, uno verde y uno rojo, y registrar los números que salen. Si x es igual al resultado en el dado verde e y es el resultado en el dado rojo, describir el espacio muestral S.

(a) *Por extensión.*

S= {(1_x, 1_y), (1_x, 2_y), (1_x, 3_y), (1_x, 4_y), (1_x, 5_y), (1_x, 6_y), (2_x, 1_y), (2_x, 2_y), (2_x, 3_y), (2_x, 4_y), (2_x, 5_y), (2_x, 6_y), (3_x, 1_y), (3_x, 2_y), (3_x, 3_y), (3_x, 4_y), (3_x, 5_y), (3_x, 6_y), (4_x, 1_y), (4_x, 2_y), (4_x, 3_y), (4_x, 4_y), (4_x, 5_y), (4_x, 6_y), (5_x, 1_y), (5_x, 2_y), (5_x, 3_y), (5_x, 4_y), (5_x, 5_y), (5_x, 6_y), (6_x, 1_y), (6_x, 2_y), (6_x, 3_y), (6_x, 4_y), (6_x, 5_y), (6_x, 6_y)}.

(b) *Por comprensión.*

S= {(x, y): x= 1, 2, … , 6, y= 1, 2, … , 6)}.

Ejercicio 2.

Un experimento consiste en lanzar un dado y, después, lanzar una moneda una vez, si el número en el dado es par. Si el número en el dado es impar, la moneda se lanza dos veces. Usar la notación 4C, por ejemplo, para denotar el resultado de que el dado muestre 4 y, después, la moneda salga cara, y 3CS para denotar el resultado de que el dado muestre 3 seguido por una cara y, después, por una ceca. Construir un diagrama de árbol para mostrar los 18 elementos del espacio muestral S.

Gráfico.

Ejercicio 3.

Se seleccionan al azar cuatro estudiantes de una clase de química y se clasifican como femenino o masculino.

(a) *Listar los elementos del espacio muestral S_1 usando la letra F para femenino y la letra M para masculino.*

S_1= {(M, M, M, M), (F, M, M, M), (M, F, M, M), (M, M, F, M), (M, M, M, F), (M, M, F, F), (M, F, M, F), (M, F, F, M), (F, M, M, F), (F, M, F, M) (F, F, M, M), (M, F, F, F), (F, M, F, F), (F, F, M, F), (F, F, F, M), (F, F, F, F)}.

(b) *Definir un segundo espacio muestral S_2 donde los elementos representen el número de mujeres seleccionadas.*

S_2= {0, 1, 2, 3, 4}.

Ejercicio 4.

Para el espacio muestral del Ejercicio 1, listar los elementos del evento:

(a) *A: "la suma de los números es mayor que 8".*

A= $\{(3_x, 6_y), (4_x, 5_y), (4_x, 6_y), (5_x, 4_y), (5_x, 5_y), (5_x, 6_y), (6_x, 3_y), (6_x, 4_y), (6_x, 5_y), (6_x, 6_y)\}$.

(b) *B: "ocurre un dos en cualquiera de los dos dados".*

B= $\{(1_x, 2_y), (2_x, 1_y), (2_x, 2_y), (2_x, 3_y), (2_x, 4_y), (2_x, 5_y), (2_x, 6_y), (3_x, 2_y), (4_x, 2_y), (5_x, 2_y), (6_x, 2_y)\}$.

(c) *C: "sale un número mayor que cuatro en el dado verde".*

C= $\{(5_x, 1_y), (5_x, 2_y), (5_x, 3_y), (5_x, 4_y), (5_x, 5_y), (5_x, 6_y), (6_x, 1_y), (6_x, 2_y), (6_x, 3_y), (6_x, 4_y), (6_x, 5_y), (6_x, 6_y)\}$.

(d) *$A \cap C$.*

$A \cap C$= $\{(5_x, 4_y), (5_x, 5_y), (5_x, 6_y), (6_x, 3_y), (6_x, 4_y), (6_x, 5_y), (6_x, 6_y)\}$.

(e) *$A \cap B$.*

$A \cap B$= $\emptyset$.

(f) *$B \cap C$.*

$B \cap C$= $\{(5_x, 2_y), (6_x, 2_y)\}$.

Ejercicio 5.

Para el espacio muestral del Ejercicio 2, listar los elementos del evento:

(a) *A: "en el dado sale un número menor que 3".*

A= {1CC, 1CS, 1SC, 1SS, 2C, 2S}.

(b) *B: "ocurren dos cecas".*

B= {1SS, 3SS, 5SS}.

(c) A^C.

A^C= {3CC, 3CS, 3SC, 3SS, 4C, 4S, 5CC, 5CS, 5SC, 5SS, 6C, 6S}

(d) $A^C \cap B$.

$A^C \cap$ B= {3SS, 5SS}.

(e) $A \cup B$.

A $\cup$ B= {1CC, 1CS, 1SC, 1SS, 2C, 2S, 3SS, 5SS}.

Ejercicio 6.

Suponer que los dos dados del Ejercicio 1 son normales. Entonces, cada resultado del espacio muestral S tienen la misma probabilidad de ocurrir (S es equiprobable). Encontrar las siguientes probabilidades:

(a) *P (A).*

P (A)= $\frac{10}{36}$
P (A)= $\frac{5}{18}$.

(b) *P (B).*

P (B)= $\frac{11}{36}$.

(c) *P (C).*

P (C)= $\frac{12}{36}$
P (C)= $\frac{1}{3}$.

(d) *P (A ∩ C).*

P (A ∩ C)= $\frac{7}{36}$.

Ejercicio 7.

Si se toman 3 libros al azar de un estante que contiene 5 novelas, 3 libros de poemas y 1 diccionario, ¿cuál es la probabilidad de que:

(a) *se seleccione el diccionario?*

A: "se selecciona 1 diccionario".

P (A)= $\frac{\binom{1}{1}\binom{8}{2}}{\binom{9}{3}}$

P (A)= $\frac{1*28}{84}$

P (A)= $\frac{9}{28}$.

La probabilidad de que se seleccione el diccionario es $\frac{9}{28}$.

(b) *se seleccionen 2 novelas y 1 libro de poemas?*

B: "se seleccionan 2 novelas y 1 libro de poemas".

P (B)= $\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}}$

P (B)= $\frac{10*3}{84}$

P (B)= $\frac{5}{14}$.

La probabilidad de que se seleccionen 2 noveles y 1 libro de poemas es $\frac{5}{14}$.

Ejercicio 8.

Un dado octaedro (de ocho caras) tiene el número 1 pintado en dos de sus caras, el 2 en tres de sus caras, el 3 en dos de sus caras y el 4 en una cara. Se lanza el dado. Suponer que cada cara tiene la misma probabilidad de salir.

(a) *Determinar el espacio muestral de este experimento.*

S= {1, 2, 3, 4}.

(b) *Calcular la probabilidad de que salga número par.*

$P(2 \cup 4) = P(2) + P(4)$
$P(2 \cup 4) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}$
$P(2 \cup 4) = \frac{1}{2}$.

(c) *Si el dado estuviera cargado de tal forma que la cara con el número 4 tuviera el doble de probabilidad de salir que cada una de las otras siete caras.*

(i) *¿Cambiaría esto el espacio muestral? Explicar.*

No, esto no cambiaría el espacio muestral.

(ii) *¿Cambiaría esto la probabilidad de que salga número par? Explicar.*

Sí, esto cambiaría la probabilidad de que salga número par, ya que, ahora, la probabilidad de salir de la cara con el número 4 es $\frac{2}{9}$, mientras que la del resto de las caras es $\frac{1}{9}$.

$P(2 \cup 4) = P(2) + P(4)$
$P(2 \cup 4) = \frac{3}{9} + \frac{2}{9}$
$P(2 \cup 4) = \frac{5}{9}$.

Ejercicio 9.

Se lanza un dado normal 5 veces. Encontrar la probabilidad de obtener 4 números iguales.

A: “se obtienen 4 números iguales”.

P (A)= $\frac{6*5*5}{6^5}$
P (A)= $\frac{25}{6^4}$
P (A)= $\frac{25}{1296}$.

Ejercicio 10.

Se selecciona una carta al azar entre 50 cartas numeradas de 1 a 50. Hallar la probabilidad de que el número de la carta sea:

(a) *Divisible por 5.*

A: "la carta es divisible por 5".

P (A)= $\frac{10}{50}$
P (A)= $\frac{1}{5}$.

(b) *Termine en 2.*

B: "la carta termina en 2".

P (B)= $\frac{5}{50}$
P (B)= $\frac{1}{10}$.

Ejercicio 11.

Tres parejas de casados han comprado boletos para el teatro y se sientan en una fila formada por sólo seis asientos. Si toman sus asientos de un modo, totalmente, aleatorio:

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que Pablo y María (marido y mujer), se sienten en los dos asientos de la extrema izquierda?*

A: "Pablo y María se sientan en los dos asientos de la extrema derecha".

P (A)= $\frac{2*4!}{6!}$

P (A)= $\frac{2*4!}{6*5*4!}$

P (A)= $\frac{1}{3*5}$

P (A)= $\frac{1}{15}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que Pablo y María (marido y mujer) se sienten en los dos asientos de la extrema izquierda es $\frac{1}{15}$.

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que Pablo y María terminen sentados uno junto a otro?*

B= "Pablo y María terminan sentados uno junto a otro".

P (B)= $\frac{2*5*4!}{6!}$

P (B)= $\frac{2*5*4!}{6*5*4!}$

P (B)= $\frac{1}{3}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que Pablo y María terminen sentados uno junto a otro es $\frac{1}{3}$.

Ejercicio 12.

De acuerdo con un trabajo de investigación, la ubicación probable de las PC en una casa es:

- *Dormitorio de adultos: 0,03.*
- *Dormitorio de niños: 0,15.*
- *Otro dormitorio: 0,14.*
- *Oficina o estudio: 0,4.*
- *Otra habitación: 0,28.*

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que una PC esté en un dormitorio?*

A: “una PC está en un dormitorio”.

P (A)= P (DA + DN + OD)
P (A)= P (DA) + P (DN) + P (OD)
P (A)= 0,03 + 0,15 + 0,14
P (A)= 0,32.

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que una PC no esté en un dormitorio?*

P (A^C)= P (OE + OH)
P (A^C)= P (OE) + P (OH)
P (A^C)= 0,4 + 0,28
P (A^C)= 0,68.

Ejercicio 13.

El interés se enfoca en la vida de un componente electrónico. Suponer que se sabe que la probabilidad de que el componente funcione más de 6000 horas es 0,42. Suponer, además, que la probabilidad de que el componente no dure más de 4000 horas es 0,04.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que la vida del componente sea menor o igual a 6000 horas?*

A: "la vida del componente es menor o igual a 6000 horas".

P (A)= P (t $\leq$ 6000)
P (A)= 1 - P (t $>$ 6000)
P (A)= 1 - 0,42
P (A)= 0,58.

Por lo tanto, la probabilidad de que la vida del componente sea menor o igual a 6000 horas es 0,58.

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que la vida del componente sea mayor que 4000 horas?*

B: "la vida del componente es mayor a 4000 horas".

P (B)= P (t $>$ 4000)
P (B)= 1 - P (t $\leq$ 4000)
P (B)= 1 - 0,04
P (B)= 0,96.

Por lo tanto, la probabilidad de que la vida del componente sea mayor que 4000 horas es 0,96.

(c) *Sea A el evento de que el componente falle en una prueba específica y B el evento de que el componente se deforma pero no falla. Suponer que P (A)= 0,2 y P (B)= 0,35.*

(i) *¿Cuál es la probabilidad de que el componente no falle en la prueba?*

P (A^C)= 1 - P (A)
P (A^C)= 1 - 0,2
P (A^C)= 0,8.

Por lo tanto, la probabilidad de que el componente no falle en la prueba es 0,8.

(ii) *¿Cuál es la probabilidad de que el componente funcione perfectamente (no se deforma ni falla en la prueba)?*

P ($(A \cup B)^C$)= 1 - P (A ∪ B)
P ($(A \cup B)^C$)= 1 - [P (A) + P (B) - P (A ∩ B)]
P ($(A \cup B)^C$)= 1 - (0,2 + 0,35 - 0)
P ($(A \cup B)^C$)= 1 - 0,55
P ($(A \cup B)^C$)= 0,45.

Por lo tanto, la probabilidad de que el componente funcione perfectamente (no se deforma ni falla en la prueba) es 0,45.

(iii) *¿Cuál es la probabilidad de que el componente falle o se deforme en la prueba?*

P (A ∪ B)= P (A) + P (B) - P (A ∩ B)
P (A ∪ B)= 0,2 + 0,35 - 0
P (A ∪ B)= 0,55.

Por lo tanto, la probabilidad de que el componente falle o se deforme en la prueba es 0,55.

Ejercicio 14.

Sean A y B eventos con P (A ∪ B)= $\frac{3}{4}$*, P (*A^C*)=* $\frac{2}{3}$ *y P (A ∩ B)=* $\frac{1}{4}$*. Hallar P (A), P (B), P (A ∩* B^C*).*

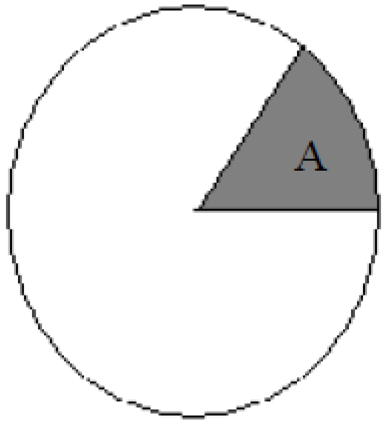
P (A)= 1 - P (A^C)
P (A)= 1 - $\frac{2}{3}$
P (A)= $\frac{1}{3}$.

P (B)= P (A ∪ B) - P (A) + P (A ∩ B)
P (B)= $\frac{3}{4}$ - $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{4}$
P (B)= $\frac{2}{3}$.

P (A ∩ B^C)= P (A) - P (A ∩ B)
P (A ∩ B^C)= $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{4}$
P (A ∩ B^C)= $\frac{1}{12}$.

Ejercicio 15.

Se escoge al azar un punto interior a un triángulo equilátero de lado 3. Hallar la probabilidad de que su distancia a un vértice sea mayor que 1. (Recordar que, si la circunferencia tiene radio r y el sector sombreado A tiene un ángulo de abertura α, entonces, el área del sector sombreado es $\frac{\pi r^2 \alpha}{360}$).



$A_{triángulo}= \frac{base*altura}{2}$

$A_{triángulo}= \frac{3*\frac{3}{2}\sqrt{3}}{2}$ (*)

$A_{triángulo}= \frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}}{2}$

$A_{triángulo}= \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

(*) $3^2= altura^2 + 1{,}5^2$

$9= altura^2 + (\frac{3}{2})^2$

$9= altura^2 + \frac{9}{4}$

$altura^2= 9 - \frac{9}{4}$

$altura^2= \frac{27}{4}$

altura= $\sqrt{\frac{27}{4}}$

altura= $\sqrt{\frac{3*9}{4}}$

altura= $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

$A_{sector}= \frac{\pi*1^2\frac{\pi}{3}}{2\pi}$

$A_{sector}= \frac{\frac{\pi^2}{3}*1}{2\pi}$

$A_{sector}= \frac{\frac{\pi^2}{3}}{2\pi}$

$A_{sector}= \frac{\pi}{6}$.

A: “la distancia de un punto interior de un triángulo equilátero de lado 3 a un vértice es mayor que 1”.

P (A)= $\frac{A_{triángulo}-3*A_{sector}}{A_{triángulo}}$
P (A)= 1 - $\frac{3*A_{sector}}{A_{triángulo}}$
P (A)= 1 - $\frac{3\frac{\pi}{6}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}}$
P (A)= 1 - $\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}}$
P (A)= 1 - $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$
P (A)≅ 1 - 0,403
P (A)≅ 0,597.

Por lo tanto, la probabilidad de que la distancia de un punto interior de un triángulo equilátero de lado 3 a un vértice sea mayor que 1 es 0,597.

Trabajo Práctico N° 2:
Probabilidad Condicional - Independencia.

Ejercicio 1.

Se lanza un par de dados normales. Hallar la probabilidad de que la suma de sus números sea 10 o mayor si:

(a) *aparece un 5 en el primer dado.*

A= {(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4) (6, 5), (6, 6)}.
B= {(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}.

P (A | B)= $\frac{2}{6}$
P (A | B)= $\frac{1}{3}$.

P (A | B)= $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
P (A | B)= $\frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}}$
P (A | B)= $\frac{1}{3}$.

(b) *aparece un 5 en uno de los dos dados por lo menos.*

A= {(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4) (6, 5), (6, 6)}.
C= {(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5)}.

P (A | C)= $\frac{3}{11}$.

P (A | C)= $\frac{P(A \cap C)}{P(C)}$
P (A | C)= $\frac{\frac{3}{36}}{\frac{11}{36}}$
P (A | C)= $\frac{3}{11}$.

Ejercicio 2.

Se lanzan 3 monedas normales. Hallar la probabilidad de que sean todas caras si:

(a) *la primera de las monedas es cara.*

A= {(c, c, c)}.
B= {(c, c, c), (c, c, s), (c, s, c), (c, s, s)}.

P (A | B)= $\frac{1}{4}$.

P (A | B)= $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
P (A | B)= $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}}$
P (A | B)= $\frac{1}{4}$.

(b) *una de las monedas es cara.*

A= {(c, c, c)}.
C= {(c, c, c), (c, c, s), (c, s, c), (s, c, c), (c, s, s), (s, c, s), (s, s, c)}.

P (A | C)= $\frac{1}{7}$.

P (A | C)= $\frac{P(A \cap C)}{P(C)}$
P (A | C)= $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}}$
P (A | C)= $\frac{1}{7}$.

Ejercicio 3.

Se escogen dos dígitos al azar del 1 al 9. Si la suma es par, hallar la probabilidad de que ambos números sean impares.

A= {(1, 1), (3, 3), (5, 5), (7, 7), (9, 9)}.
B= {(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (3, 9), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (4, 8), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (5, 9), (6, 2), (6, 4), (6, 6), (6, 8), (7, 1), (7, 3), (7, 5), (7, 7), (7, 9), (8, 2), (8, 4), (8, 6), (8, 8), (9, 1), (9, 3), (9, 5), (9, 7), (9, 9)}.

P (A | B)= $\frac{5}{41}$.

P (A | B)= $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

P (A | B)= $\frac{\frac{5}{81}}{\frac{41}{81}}$

P (A | B)= $\frac{5}{41}$.

Ejercicio 4.

Sean los eventos A y B con P (A)= $\frac{1}{2}$, *P (B)=* $\frac{1}{3}$ *y P (A ∩ B)=* $\frac{1}{4}$. *Hallar:*

(a) *P (A | B).*

P (A | B)= $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

P (A | B)= $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}$

P (A | B)= $\frac{3}{4}$.

(b) *P (B | A).*

P (B | A)= $\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

P (B | A)= $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$

P (B | A)= $\frac{1}{2}$.

(c) *P (A ∪ B).*

P (A ∪ B)= P (A) + P (B) - P (A ∩ B)

P (A ∪ B)= $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{4}$

P (A ∪ B)= $\frac{7}{12}$.

(d) *P* (A^C | B^C).

P (A^C | B^C)= $\frac{P(A^C \cap B^C)}{P(B^C)}$

P (A^C | B^C)= $\frac{P((A \cup B)^C)}{1-P(B)}$

P (A^C | B^C)= $\frac{1-P(A \cup B)}{1-P(B)}$

P (A^C | B^C)= $\frac{1-\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{3}}$

P (A^C | B^C)= $\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}$

P (A^C | B^C)= $\frac{5}{8}$.

(e) *P* $(B^C \mid A^C)$.

P $(B^C \mid A^C)= \frac{P(B^C \cap A^C)}{P(A^C)}$

P $(B^C \mid A^C)= \frac{P((B \cup A)^C)}{1-P(A)}$

P $(B^C \mid A^C)= \frac{1-P(B \cup A)}{1-P(A)}$

P $(B^C \mid A^C)= \frac{1-\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{2}}$

P $(B^C \mid A^C)= \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}}$

P $(B^C \mid A^C)= \frac{5}{6}$.

Ejercicio 5.

Una clase tiene 12 niños y 4 niñas. Si se escogen 3 estudiantes de la clase al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean todos niños?

A_i: "el i-ésimo estudiante elegido es un niño", i= 1, 2, 3.

P ($A_1 \cap A_2 \cap A_3$)= P (A_1) P ($A_2 \mid A_1$) P ($A_3 \mid A_1 \cap A_2$)
P ($A_1 \cap A_2 \cap A_3$)= $\frac{12}{16} \frac{11}{15} \frac{10}{14}$
P ($A_1 \cap A_2 \cap A_3$)= $\frac{11}{28}$.

Ejercicio 6.

Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 blancas. Se saca una bola de la urna y se reemplaza por una del otro color. Se saca de la urna una segunda bola.

(a) *Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea roja.*

R_1: "la primera bola es roja".
R_2: "la segunda bola es roja".

P (R_2)= P $(R_2 \mid R_1)$ P (R_1) + P $(R_2 \mid R_1^C)$ P (R_1^C)
P (R_2)= $\frac{2}{10} \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \frac{7}{10}$
P (R_2)= $\frac{3}{50} + \frac{7}{25}$
P (R_2)= $\frac{17}{50}$.

(b) *Si ambas bolas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?*

P $((R_1^C \cap R_2^C) \mid ((R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C)))$= $\frac{P((R_1^C \cap R_2^C) \cap ((R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C)))}{P((R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C))}$
P $((R_1^C \cap R_2^C) \mid ((R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C)))$= $\frac{P(R_1^C \cap R_2^C)}{P(R_1 \cap R_2) + P(R_1^C \cap R_2^C)}$
P $((R_1^C \cap R_2^C) \mid ((R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C)))$= $\frac{P(R_2^C | R_1^C) P(R_1^C)}{P(R_2 | R_1) P(R_1) + P(R_2^C | R_1^C) P(R_1^C)}$
P $((R_1^C \cap R_2^C) \mid ((R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C)))$= $\frac{[1 - P(R_2 | R_1^C)] P(R_1^C)}{P(R_2 | R_1) P(R_1) + [1 - P(R_2 | R_1^C)] P(R_1^C)}$
P $((R_1^C \cap R_2^C) \mid ((R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C)))$= $\frac{(1 - \frac{4}{10}) \frac{7}{10}}{\frac{2}{10} \frac{3}{10} + (1 - \frac{4}{10}) \frac{7}{10}}$
P $((R_1^C \cap R_2^C) \mid ((R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C)))$= $\frac{\frac{6}{10} \frac{7}{10}}{\frac{2}{10} \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \frac{7}{10}}$
P $((R_1^C \cap R_2^C) \mid ((R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C)))$= $\frac{\frac{21}{50}}{\frac{3}{50} + \frac{21}{50}}$
P $((R_1^C \cap R_2^C) \mid ((R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C)))$= $\frac{\frac{21}{50}}{\frac{24}{50}}$
P $((R_1^C \cap R_2^C) \mid ((R_1 \cap R_2) \cup (R_1^C \cap R_2^C)))$= $\frac{7}{8}$.

Por lo tanto, si ambas bolas son del mismo color, la probabilidad de que las dos sean blancas es $\frac{7}{8}$.

Ejercicio 7.

Una ciudad tiene dos carros de bomberos que operan en forma independiente. La probabilidad de que un carro específico esté disponible cuando se lo necesite es 0,96.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que ninguno esté disponible cuando se les necesite?*

A_i: "el i-ésimo carro de bombero está disponible", i= 1, 2.

P ($A_1^C \cap A_2^C$)= P ($A_1^C \mid A_2^C$) P (A_2^C)
P ($A_1^C \cap A_2^C$)= P (A_1^C) P (A_2^C)
P ($A_1^C \cap A_2^C$)= [1 - P (A_1)] [1 - P (A_2)]
P ($A_1^C \cap A_2^C$)= (1 - 0,96) (1 - 0,96)
P ($A_1^C \cap A_2^C$)= 0,04 * 0,04
P ($A_1^C \cap A_2^C$)= 0,0016.

Por lo tanto, la probabilidad de que ninguno esté disponible cuando se les necesite es 0,0016.

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que un carro de bomberos esté disponible cuando se le necesite?*

P ($A_1 \cup A_2$)= P (($A_1^C \cap A_2^C)^C$)
P ($A_1 \cup A_2$)= 1 - P ($A_1^C \cap A_2^C$)
P ($A_1 \cup A_2$)= 1 - 0,0016
P ($A_1 \cup A_2$)= 0,9984.

Por lo tanto, la probabilidad de que un carro de bomberos esté disponible cuando se le necesite es 0,9984.

Ejercicio 8.

Una caja contiene 2 caramelos de coco y 3 de chocolate. Una segunda caja contiene 3 caramelos de coco, 2 caramelos de chocolate y 1 de dulce de leche. Si se saca un caramelo al azar de cada caja, encontrar la probabilidad de que:

(a) *ambos caramelos sean de coco.*

CO_1: "el caramelo sacado de la primera caja es de coco".
CO_2: "el caramelo sacado de la segunda caja es de coco".

P $(CO_1 \cap CO_2)$= P $(CO_1 \mid CO_2)$ P (CO_2)
P $(CO_1 \cap CO_2)$= P (CO_1) P (CO_2)
P $(CO_1 \cap CO_2)$= $\frac{2}{5}\frac{3}{6}$
P $(CO_1 \cap CO_2)$= $\frac{1}{5}$.

(b) *ningún caramelo sea de coco.*

P $(CO_1^C \cap CO_2^C)$= P $(CO_1^C \mid CO_2^C)$ P (CO_2^C)
P $(CO_1^C \cap CO_2^C)$= P (CO_1^C) P (CO_2^C)
P $(CO_1^C \cap CO_2^C)$= $\frac{3}{5}\frac{3}{6}$
P $(CO_1^C \cap CO_2^C)$= $\frac{3}{10}$.

(c) *los dos caramelos sean diferentes.*

CHO_1: "el caramelo sacado de la primera caja es de chocolate".
CHO_2: "el caramelo sacado de la segunda caja es de chocolate".

P $((CO_1 \cap CO_2^C) \cup (CHO_1 \cap CHO_2^C))$= P $(CO_1 \cap CO_2^C)$ + P $(CHO_1 \cap CHO_2^C)$
P $((CO_1 \cap CO_2^C) \cup (CHO_1 \cap CHO_2^C))$= P $(CO_1 \mid CO_2^C)$ P (CO_2^C) + P $(CHO_1 \mid CHO_2^C)$ P (CHO_2^C)
P $((CO_1 \cap CO_2^C) \cup (CHO_1 \cap CHO_2^C))$= P (CO_1) P (CO_2^C) + P (CHO_1) P (CHO_2^C)
P $((CO_1 \cap CO_2^C) \cup (CHO_1 \cap CHO_2^C))$= $\frac{2}{5}\frac{3}{6} + \frac{3}{5}\frac{4}{6}$
P $((CO_1 \cap CO_2^C) \cup (CHO_1 \cap CHO_2^C))$= $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$
P $((CO_1 \cap CO_2^C) \cup (CHO_1 \cap CHO_2^C))$= $\frac{3}{5}$.

Ejercicio 9.

En una prueba de opción múltiple, un estudiante contesta una pregunta que ofrece cuatro posibles respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Suponer que la probabilidad de que el estudiante sepa la respuesta a la pregunta es 0,8 y que conteste al azar es 0,2.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que conteste, correctamente, la pregunta?*

A: "el estudiante contesta, correctamente, la pregunta".
B: "el estudiante sabe la respuesta a la pregunta".

P (A)= P (A | B) P (B) + P (A | B^C) P (B^C)
P (A)= 1 * 0,8 + 0,25 * 0,2
P (A)= 0,8 + 0,05
P (A)= 0,85.

Por lo tanto, la probabilidad de que conteste, correctamente, la pregunta es 0,85.

(b) *Si contesta, correctamente, la pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que, realmente, sepa la respuesta correcta?*

P (B | A)= $\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$
P (B | A)= $\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$
P (B | A)= $\frac{1*0,8}{0,85}$
P (B | A)= $\frac{0,8}{0,85}$
P (B | A)= $\frac{8}{85}$
P (B | A)≅ 0,094.

Por lo tanto, si contesta, correctamente, la pregunta, la probabilidad de que, realmente, sepa la respuesta es 0,094.

Ejercicio 10.

Se lanza cinco veces un dado normal. Hallar la probabilidad de que:

(a) *en ninguna tirada salga el 1.*

A_i: "en la i-ésima lanzada sale el 1", i= 1, 2, 3, 4, 5.

$P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) = P(A_1^C)\,P(A_2^C)\,P(A_3^C)\,P(A_4^C)\,P(A_5^C)$
$P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) = \frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}$
$P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) = (\frac{5}{6})^5$
$P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cong 0{,}402.$

(b) *salga el 1 una sola vez.*

$P((A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4 \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5)) =$
$P(A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) + P(A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) + P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C \cap A_5^C) + P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4 \cap A_5^C) + P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5)$

$P((A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4 \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5)) =$
$P(A_1)\,P(A_2^C)\,P(A_3^C)\,P(A_4^C)\,P(A_5^C) + P(A_1^C)\,P(A_2)\,P(A_3^C)\,P(A_4^C)\,P(A_5^C) + P(A_1^C)\,P(A_2^C)\,P(A_3)\,P(A_4^C)\,P(A_5^C) + P(A_1^C)\,P(A_2^C)\,P(A_3^C)\,P(A_4)\,P(A_5^C) + P(A_1^C)\,P(A_2^C)\,P(A_3^C)\,P(A_4^C)\,P(A_5)$

$P((A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4 \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5)) =$
$\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^4 + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^4 + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^4 + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^4 + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^4$

$P((A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4 \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5)) = 5\,\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^4$

$P((A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4 \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5)) = (\frac{5}{6})^5$

$P((A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4 \cap A_5^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5)) \cong 0{,}402.$

(c) *salga el 1 al menos una vez.*

B: "salga el 1 al menos una vez".

P (B)= 1 - P ($A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C$)
P (B)= 1 - $\left(\frac{5}{6}\right)^5$
P (B)$\cong$ 1 - 0,402
P (B)$\cong$ 0,598.

Ejercicio 11.

(a) *Si P (A | B)= 0,4, P (B)= 0,8 y P (A)= 0,6, ¿puede decirse que los eventos A y B son independientes?*

P (A ∩ B)= P (A | B) P (B)
P (A ∩ B)= 0,4 * 0,8
P (A ∩ B)= 0,32.

P (A) P (B)= 0,6 * 0,8
P (A) P (B)= 0,48.

P (A ∩ B)≠ P (A) P (B).

Por lo tanto, no puede decirse que los eventos A y B son independientes.

(b) *Si P (A | B)= 0,3, P (B)= 0,8 y P (A)= 0,3, ¿puede decirse que los eventos A^C y B son independientes?*

P (A^C ∩ B)= P (A^C | B) P (B)
P (A^C ∩ B)= (1 - 0,3) * 0,8
P (A^C ∩ B)= 0,7 * 0,8
P (A^C ∩ B)= 0,56.

P (A^C) P (B)= (1 - P (A)) * P (B)
P (A^C) P (B)= (1 - 0,3) * 0,8
P (A^C) P (B)= 0,7 * 0,8
P (A^C) P (B)= 0,56.

P (A^C ∩ B)= P (A^C) P (B).

Por lo tanto, puede decirse que los eventos A^C y B son independientes.

Ejercicio 12.

En una cierta estación de servicio, el 40% de los clientes utilizan nafta normal sin plomo, 35% utilizan nafta extra sin plomo y el 25% utilizan nafta premium sin plomo. De los clientes que consumen nafta normal, sólo 30% llenan sus tanques, de los que consumen nafta extra, 60% llenan sus tanques, en tanto que de los que usan premium, 50% llenan sus tanques.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente pida nafta extra sin plomo y llene su tanque?*

NN: "el cliente pide nafta normal sin plomo".
NE: "el cliente pide nafta extra sin plomo".
NP: "el cliente pide nafta premium sin plomo".
T: "el cliente llena el tanque".

P (NE ∩ T)= P (T | NE) P (NE)
P (NE ∩ T)= 0,6 * 0,35
P (NE ∩ T)= 0,6 * 0,35
P (NE ∩ T)= 0,21.

Por lo tanto, la probabilidad de que el siguiente cliente pida nafta extra sin plomo y llene el tanque es 0,21.

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llene el tanque?*

P (T)= P (T | NN) P (NN) + P (T | NE) P (NE) + P (T | NP) P (NP)
P (T)= 0,3 * 0,4 + 0,6 * 0,35 + 0,5 * 0,25
P (T)= 0,12 + 0,21 + 0,125
P (T)= 0,455.

Por lo tanto, la probabilidad de que el siguiente cliente llene el tanque es 0,455.

(c) *Si el siguiente cliente llena el tanque, ¿cuál es la probabilidad de que pida nafta normal?*

P (NN | T)= $\frac{P(NN \cap T)}{P(T)}$
P (NN | T)= $\frac{P(T|NN)P(NN)}{P(T|NN)P(NN)+P(T|NE)P(NE)+P(T|NP)P(NP)}$
P (NN | T)= $\frac{0,3*0,4}{0,455}$
P (NN | T)= $\frac{0,12}{0,455}$
P (NN | T)= $\frac{0,12}{0,455}$
P (NN | T)≅ 0,264.

Por lo tanto, si el siguiente cliente llena el tanque, la probabilidad de que pida nafta normal es 0,264.

(d) *¿Qué propiedades se utilizan para resolver los incisos (a), (b) y (c)?*

Las propiedades que se utilizan para resolver los incisos (a), (b) y (c) son el teorema de la multiplicación, el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes.

Ejercicio 13.

El 10% de los chips informáticos vendidos en el mercado son producidos por una empresa "pirata". Para un chip "pirata", la probabilidad de que sea defectuosos es del 50%, mientras que, si el chip no es "pirata", la probabilidad de que sea defectuoso desciende al 5%.

(a) *Definir los sucesos convenientes, junto con sus probabilidades.*

P: "el chip informático es producido por una empresa pirata".
D: "el chip informático es defectuoso".

P (P)= 0,1.
P (P^C)= 0,9.

P (D | P)= 0,5.
P (D | P^C)= 0,05.

(b) *Determinar el porcentaje total de chips defectuosos que salen al mercado.*

P (D)= P (D | P) P (P) + P (D | P^C) P (P^C)
P (D)= 0,5 * 0,1 + 0,05 * 0,9
P (D)= 0,05 + 0,045
P (D)= 0,095.

Por lo tanto, el porcentaje total de chips defectuosos que salen al mercado es 9,45%.

(c) *Se compra un chip y resulta ser defectuoso. Calcular la probabilidad de que proceda de la empresa "pirata".*

P (P | D)= $\frac{P(P \cap D)}{P(D)}$
P (P | D)= $\frac{P(D|P)P(P)}{P(D|P)P(P)+P(D|P^C)P(P^C)}$
P (P | D)= $\frac{0,5*0,1}{0,095}$
P (P | D)= $\frac{0,05}{0,095}$
P (P | D)$\cong$ 0,0526.

Ejercicio 14.

Se utilizan dos líneas de producción para empaquetar azúcar en bolsas de 5 kg. La línea 1 produce el doble de bolsas que la línea 2. Uno por ciento de las bolsas de la línea 1 están defectuosas, ya que no cumplen con una especificación de calidad, mientras que 3% de las bolsas de la línea 2 están defectuosas. Se elige, aleatoriamente, una bolsa para inspeccionarla.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la línea 1?*

L_1: "la bolsa de azúcar proviene de la línea 1 de producción".
L_2: "la bolsa de azúcar proviene de la línea 2 de producción".

P (L_1) + P (L_2)= 1
P (L_1) + $\frac{1}{2}$ P (L_1)= 1
$\frac{3}{2}$ P (L_1)= 1
P (L_1)= $\frac{1}{\frac{3}{2}}$
P (L_1)= $\frac{2}{3}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que provenga de la línea 1 es $\frac{2}{3}$.

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuosa?*

D: "la bolsa de azúcar está defectuosa".

P (D)= P (D | L_1) P (L_1) + P (D | L_2) P (L_2)
P (D)= 0,01 $\frac{2}{3}$ + 0,03 $\frac{1}{3}$
P (D)= $\frac{1}{100}\frac{2}{3} + \frac{3}{100}\frac{1}{3}$
P (D)= $\frac{1}{150} + \frac{1}{100}$
P (D)= $\frac{1}{60}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que esté defectuosa es $\frac{1}{60}$.

(c) *Si la bolsa está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que venga de la línea 1?*

P (L_1 | D)= $\frac{P(L_1 \cap D)}{P(D)}$
P (L_1 | D)= $\frac{P(D|L_1)P(L_1)}{P(D|L_1)P(L_1)+P(D|L_2)P(L_2)}$

P $(L_1 \mid \text{D})= \frac{\frac{1}{100}\frac{2}{3}}{\frac{1}{60}}$

P $(L_1 \mid \text{D})= \frac{\frac{1}{150}}{\frac{1}{60}}$

P $(L_1 \mid \text{D})= \frac{2}{5}$.

Por lo tanto, si la bolsa está defectuosa, la probabilidad de que venga de la línea 1 es $\frac{2}{5}$.

(d) *Si la bolsa no está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que venga de la línea 1?*

P $(L_1 \mid D^C)= \frac{P(L_1 \cap D^C)}{P(D^C)}$

P $(L_1 \mid D^C)= \frac{P(D^C|L_1)P(L_1)}{1-P(D)}$

P $(L_1 \mid D^C)= \frac{[1-P(D|L_1)]P(L_1)}{1-[P(D|L_1)P(L_1)+P(D|L_2)P(L_2)]}$

P $(L_1 \mid D^C)= \frac{(1-\frac{1}{100})\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{60}}$

P $(L_1 \mid D^C)= \frac{\frac{99}{100}\frac{2}{3}}{\frac{59}{60}}$

P $(L_1 \mid D^C)= \frac{\frac{33}{50}}{\frac{59}{60}}$

P $(L_1 \mid D^C)= \frac{198}{295}$.

Por lo tanto, si la bolsa no está defectuosa, la probabilidad de que venga de la línea 1 es $\frac{198}{295}$.

Trabajo Práctico N° 3:
Variables Aleatorias Discretas. Funciones de Distribución Binomial, Geométrica, Hipergeométrica, Poisson.

Ejercicio 1.

Clasificar las siguientes variables aleatorias como discretas o continuas:

(a) *X: "el número de accidentes automovilísticos por año en la ciudad de La Plata".*

Discreta.

(b) *Y: "el tiempo en horas que tarda en quemarse una lamparita".*

Continua.

(c) *Z: "la cantidad de leche en litros que una vaca específica produce anualmente".*

Continua.

(d) *W: "el número de huevos que una gallina pone mensualmente".*

Discreta.

(e) *N: "el número de permisos de construcción que emiten cada mes en una ciudad".*

Discreta.

(f) *Q: "el peso del grano producido por acre".*

Continua.

Ejercicio 2.

Un embarque de 10 automóviles extranjeros contiene 4 que tienen ligeras manchas de pintura. Si una agencia recibe 6 de estos automóviles al azar, sea X: "número de automóviles que la agencia compra con manchas de pintura".

(a) *Hallar la f.d.p. de X.*

X: "número de automóviles que la agencia compra con manchas de pintura".

X ~ H (n= 6, M= 4, N= 10).

P (X= x)= $\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

P (X= x)= $\frac{\binom{4}{x}\binom{10-4}{6-x}}{\binom{10}{6}}$

P (X= x)= $\frac{\binom{4}{x}\binom{6}{6-x}}{\binom{10}{6}}$, donde x= 0, 1, 2, 3, 4.

(b) *Determinar P (X= 0), P (X= 2), P (X ≤ 2), P (X ≥ 2).*

P (X= 0)= $\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{6-0}}{\binom{10}{6}}$

P (X= 0)= $\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{6}}{\binom{10}{6}}$

P (X= 0)= $\frac{1*1}{210}$

P (X= 0)= $\frac{1}{210}$.

P (X= 2)= $\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{6-2}}{\binom{10}{6}}$

P (X= 2)= $\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{4}}{\binom{10}{6}}$

P (X= 2)= $\frac{6*15}{210}$

P (X= 2)= $\frac{3}{7}$.

P (X ≤ 2)= P (X= 0) + P (X= 1) + P (X= 2)

P (X ≤ 2)= $\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{6-0}}{\binom{10}{6}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{6-1}}{\binom{10}{6}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{6-2}}{\binom{10}{6}}$

P (X ≤ 2)= $\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{6}}{\binom{10}{6}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{5}}{\binom{10}{6}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{4}}{\binom{10}{6}}$

Juan Menduiña

P (X $\leq$ 2)= $\frac{1*1}{210}+\frac{4*6}{210}+\frac{6*15}{210}$

P (X $\leq$ 2)= $\frac{1}{210}+\frac{12}{105}+\frac{3}{7}$

P (X $\leq$ 2)= $\frac{23}{42}$.

P (X $\geq$ 2)= 1 - P (X $\leq$ 2)

P (X $\geq$ 2)= 1 - $\frac{23}{42}$

P (X $\geq$ 2)= $\frac{19}{42}$.

Ejercicio 3.

El espesor de un entablado de madera (en pulgadas) que algún cliente ordena es una v.a. X que tiene la siguiente f.d.a:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x < \frac{1}{8} \\ 0{,}2, \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{4} \\ 0{,}9, \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{8} \\ 1, x \geq \frac{3}{8} \end{cases}.$$

Determinar las siguientes probabilidades:

(a) *P* $(X \leq \frac{1}{8})$.

P $(X \leq \frac{1}{8})$= F $(\frac{1}{8})$
P $(X \leq \frac{1}{8})$= 0,2.

(b) *P* $(X \leq \frac{1}{4})$.

P $(X \leq \frac{1}{4})$= F $(\frac{1}{4})$
P $(X \leq \frac{1}{4})$= 0,9.

(c) *P* $(X \leq \frac{5}{16})$.

P $(X \leq \frac{5}{16})$= F $(\frac{5}{16})$
P $(X \leq \frac{5}{16})$= 0,9.

(d) *Hallar la función de distribución de probabilidad de X.*

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}2, x = \frac{1}{8} \\ 0{,}7, x = \frac{1}{4} \\ 0{,}1, x = \frac{3}{8} \\ 0, caso\ contrario \end{cases}.$$

Ejercicio 4.

La distribución de probabilidad de X: "número de imperfecciones por 10 metros de una tela sintética en rollos continuos de ancho uniforme" está dada por:

x	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***
f (x)	*0,41*	*0,37*	*0,16*	*0,05*	*0,01*

(a) *Hallar la función de distribución acumulada de X.*

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
F (x)	0,41	0,78	0,94	0,99	1

(b) *Determinar F (2) y F (3,1).*

F (2)= 0,94.

F (3,1)= F (3)
F (3,1)= 0,99.

Ejercicio 5.

Para las variables aleatorias de los Ejercicios 2 y 4, hallar E (X), E (X^2), V (X).

Ejercicio 2:

E (X)= $\frac{nM}{N}$
E (X)= $\frac{6*4}{10}$
E (X)= $\frac{12}{5}$
E (X)= 2,4.

E (X^2)= n $\frac{M}{N}$ $\frac{N-M}{N}$ $\frac{N-n}{N-1}$ + $(\frac{nM}{N})^2$
E (X^2)= 6 $\frac{4}{10}$ $\frac{10-4}{10}$ $\frac{10-6}{10-1}$ + $(\frac{6*4}{10})^2$
E (X^2)= 6 $\frac{4}{10}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{4}{9}$ + $(\frac{12}{5})^2$
E (X^2)= $\frac{16}{25}$ + $\frac{144}{25}$
E (X^2)= $\frac{32}{5}$.

V (X)= n $\frac{M}{N}$ $\frac{N-M}{N}$ $\frac{N-n}{N-1}$
V (X)= 6 $\frac{4}{10}$ $\frac{10-4}{10}$ $\frac{10-6}{10-1}$
V (X)= 6 $\frac{4}{10}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{4}{9}$
V (X)= $\frac{16}{25}$.

Ejercicio 4:

E (X)= $\sum_{i=0}^{4} x_i \, f\,(x_i)$
E (X)= 0 * 0,41 + 1 * 0,37 + 2 * 0,16 + 3 * 0,05 + 4 * 0,01
E (X)= 0,37 + 0,32 + 0,15 + 0,04
E (X)= 0,88.

E (X^2)= $\sum_{i=0}^{4} x_i^2 \, f\,(x_i)$
E (X^2)= 0^2 * 0,41 + 1^2 * 0,37 + 2^2 * 0,16 + 3^2 * 0,05 + 4^2 * 0,01
E (X^2)= 0 * 0,41 + 1 * 0,37 + 4 * 0,16 + 9 * 0,05 + 16 * 0,01
E (X^2)= 0,37 + 0,64 + 0,45 + 0,16
E (X^2)= 1,62.

V (X)= E (X^2) - $[E\,(X)]^2$
V (X)= 1,62 - $0,88^2$
V (X)= 1,62 - 0,7744
V (X)= 0,8456.

Ejercicio 6.

Una compañía de materiales químicos envía cierto disolvente en tambores de 10 galones. Sea X: "número de tambores pedidos por un cliente elegido aleatoriamente". Suponer que X tiene la f.d.p.:

x	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
p (x)	*0,4*	*0,2*	*0,2*	*0,1*	*0,1*

(a) *Hallar E (X), V (X) y desviación estándar de X.*

E (X)= $\sum_{i=1}^{5} x_i * f\ (x_i)$
E (X)= 1 * 0,4 + 2 * 0,2 + 3 * 0,2 + 4 * 0,1 + 5 * 0,1
E (X)= 0,4 + 0,4 + 0,6 + 0,4 + 0,5
E (X)= 2,3.

V (X)= E (X^2) - $[E\ (X)]^2$
V (X)= $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 * f\ (x_i)$ - $2{,}3^2$
V (X)= 1^2 * 0,4 + 2^2 * 0,2 + 3^2 * 0,2 + 4^2 * 0,1 + 5^2 * 0,1 - 5,29
V (X)= 1 * 0,4 + 4 * 0,2 + 9 * 0,2 + 16 * 0,1 + 25 * 0,1 - 5,29
V (X)= 0,4 + 0,8 + 1,8 + 1,6 + 2,5 - 5,29
V (X)= 0,4 + 0,8 + 1,8 + 1,6 + 2,5 - 5,29
V (X)= 7,1 - 5,29
V (X)= 1,81.

DE (X)= $\sqrt{V(X)}$
DE (X)= $\sqrt{1{,}81}$
DE (X)= 1,3454.

(b) *Sea Y: "número de galones ordenados".*

(i) *Hallar la f.d.p. de Y.*

Y= 10X.

y	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**
p (y)	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1

(ii) *Hallar E (Y), V (Y) y la desviación estándar de Y.*

E (Y)= E (10X)
E (Y)= 10 E (X)
E (Y)= 10 * 2,3
E (Y)= 23.

V (Y)= V (10X)
V (Y)= 10^2 V (X)
V (Y)= 100 * 1,81
V (Y)= 181.

DE (Y)= $\sqrt{V(Y)}$
DE (Y)= $\sqrt{181}$
DE (Y)= 13,454.

Ejercicio 7.

En cierto servicio telefónico, la probabilidad de que una llamada sea contestada en menos de 30 segundos es 0,75. Suponer que las llamadas son independientes.

(a) *Si una persona llama 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que, exactamente, 9 de las llamadas sean contestadas en un espacio de 30 segundos?*

X: “número de llamadas contestadas en menos de 30 segundos”.

X ~ B (n= 10, p= 0,75).

P (X= 9)= $\binom{n}{9} p^9 (1-p)^{n-9}$
P (X= 9)= $\binom{10}{9} 0{,}75^9 (1-0{,}75)^{10-9}$
P (X= 9)= $\frac{10!}{(10-9)!9!}$ * $0{,}075 * 0{,}25^1$
P (X= 9)= $\frac{10*9!}{1!9!}$ * 0,075 * 0,25
P (X= 9)= $\frac{10}{1}$ * 0,075 * 0,25
P (X= 9)= 10 * 0,075 * 0,25
P (X= 9)= 0,1877.

Por lo tanto, si una persona llama 10 veces, la probabilidad de que, exactamente, 9 de las llamadas sean contestadas en un espacio de 30 segundos es 0,1877.

(b) *Si una persona llama 20 veces, ¿cuál es la probabilidad de que, al menos, 16 de las llamadas sean contestadas en un espacio de 30 segundos?*

X ~ B (n= 20, p= 0,75).

P (X ≥ 16)= 1 - P (X ≤ 16)
P (X ≥ 16)= 1 - $\sum_{k=0}^{16} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
P (X ≥ 16)= 1 - $\sum_{k=0}^{16} \binom{20}{k} 0{,}75^k (1-0{,}75)^{20-k}$
P (X ≥ 16)= 1 - $\sum_{k=0}^{16} \binom{20}{k} 0{,}75^k 0{,}25^{20-k}$
P (X ≥ 16)= 1 - 0,775
P (X ≥ 16)= 0,225.

Por lo tanto, si una persona llama 20 veces, la probabilidad de que, al menos, 16 de las llamadas sean contestadas en un espacio de 30 segundos es 0,225.

(c) *Si una persona llama 20 veces, ¿cuál es el número promedio de llamadas que serán contestadas en menos de 30 segundos?*

E (X)= np
E (X)= 20 * 0,75
E (X)= 7,5.

Por lo tanto, si una persona llama 20 veces, el número promedio de llamadas que serán contestadas en menos de 30 segundos es 7,5.

Ejercicio 8.

Un amigo que trabaja en una gran ciudad tiene dos automóviles, uno pequeño y uno grande. Tres cuartas partes del tiempo utiliza el automóvil pequeño para ir trabajar y la cuarta parte restante usa el automóvil grande. Si utiliza el automóvil pequeño, por lo general, no tiene problemas para estacionarse y, por lo tanto, llega a su trabajo a tiempo con una probabilidad de 0,9. Si utiliza el automóvil grande, llega a tiempo su trabajo con una probabilidad de 0,6.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que llegue a tiempo al trabajo?*

X: "un amigo llega a su trabajo a tiempo en el automóvil pequeño".
Y: "un amigo llega a su trabajo a tiempo en el automóvil grande".

X ~ B (n= 1, p= 0,9).
Y ~ B (n= 1, p= 0,6).

Z: "un amigo llega a su trabajo a tiempo".

Z= 0,75X + 0,25Y.

E (Z)= E (0,75X + 0,25Y)
E (Z)= E (0,75X) + E (0,25Y)
E (Z)= 0,75 E (X) + 0,25 E (Y)
E (Z)= 0,75 * 0,9 + 0,25 * 0,6
E (Z)= 0,675 + 0,15
E (Z)= 0,825.

Z ~ B (n= 1, p= 0,825).

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que llegue a tiempo al trabajo en 6 de 10 mañanas, suponiendo que hay independencia entre un día y otro?*

P (Z= 6)= $\binom{n}{6} p^6 \ (1-p)^{n-6}$
P (Z= 6)= $\binom{10}{6} 0{,}825^6 \ (1-0{,}825)^{10-6}$
P (Z= 6)= $\frac{10!}{(10-6)!6!}$ * $0{,}315 * 0{,}175^4$
P (Z= 6)= $\frac{10*9*8*7*6!}{4!6!}$ * 0,315 * 0,0009
P (Z= 6)= $\frac{10*9*8*7}{24}$ * 0,315 * 0,0009
P (Z= 6)= 5 * 3 * 2 * 7 * 0,315 * 0,0009
P (Z= 6)= 0,0621.

Por lo tanto, la probabilidad de que llegue a tiempo al trabajo en 6 de 10 mañanas, suponiendo que hay independencia entre un día y otro, es 0,0621.

Ejercicio 9.

De un lote de 25 artículos, 5 de los cuales son defectuosos, se eligen 4 al azar. Sea X: "el número de artículos defectuosos entre los elegidos".

(a) *Obtener la función de distribución de probabilidad de X si los artículos se eligen con sustitución.*

X: "número de artículos defectuosos".

X ~ H (n= 4, M= 5, N= 25).

P (X= x)= $\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

P (X= x)= $\frac{\binom{5}{x}\binom{25-5}{4-x}}{\binom{25}{4}}$

P (X= x)= $\frac{\binom{5}{x}\binom{20}{4-x}}{\binom{25}{x}}$, donde x= 0, 1, 2, 3, 4.

(b) *¿Cuál es la E (X) y la V (X)?*

E (X)= $\frac{nM}{N}$

E (X)= $\frac{4*5}{25}$

E (X)= $\frac{4}{5}$.

V (X)= $\frac{nM}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}$

V (X)= $\frac{4*5}{25}\frac{25-5}{25}\frac{25-4}{25-1}$

V (X)= $\frac{4}{5}\frac{20}{25}\frac{21}{24}$

V (X)= $\frac{4}{5}\frac{4}{5}\frac{7}{8}$

V (X)= $\frac{14}{25}$.

Ejercicio 10.

Con los datos del Ejercicio 7, sea Y: "número de veces que hay que llamar hasta obtener la primer respuesta en menos de 30 segundos".

(a) *¿Cuál es la probabilidad de tener que llamar 4 veces para obtener la primera respuesta en menos de 30 segundos?*

Y: "número de veces que hay que llamar hasta obtener la primer respuesta en menos de 30 segundos".

Y ~ G (p= 0,75).

P (Y= 4)= p $(1-p)^{4-1}$
P (Y= 4)= 0,75 $(1-0{,}75)^{4-1}$
P (Y= 4)= 0,75 * $0{,}25^3$
P (Y= 4)= 0,75 * 0,015625
P (Y= 4)= 0,0117.

Por lo tanto, la probabilidad de tener que llamar 4 veces para obtener la primera respuesta en menos de 30 segundos es 0,0117.

(b) *¿Cuál es el número promedio de llamadas que hay que hacer hasta tener una respuesta en menos de 30 segundos?*

E (Y)= $\frac{1}{p}$
E (Y)= $\frac{1}{0{,}75}$
E (Y)= $1{,}\hat{3}$.

Por lo tanto, el número promedio de llamadas que hay que hace hasta tener una respuesta en menos de 30 segundos es $1{,}\hat{3}$.

Ejercicio 11.

La probabilidad de que una computadora que corre cierto sistema operativo se descomponga en determinado día es 0,1. Determinar la probabilidad de que la máquina se descomponga por primera vez en el duodécimo día, después de la instalación del sistema operativo, asumiendo independencia entre los días. Determinar la media y la varianza del número de días hasta que el sistema operativo se descompone.

X: "número de días hasta que el sistema operativo se descompone por primera vez".

X ~ G (p= 0,1).

P (X= 10)= 0,1 $(1-0{,}1)^{12-1}$
P (X= 10)= 0,1 * $0{,}9^{11}$
P (X= 10)= 0,1 * 0,3138
P (X= 10)= 0,03138.

E (X)= $\frac{1}{p}$
E (X)= $\frac{1}{0{,}1}$
E (X)= $1{,}\hat{1}$.

V (X)= $\frac{1-p}{p^2}$
V (X)= $\frac{1-0{,}1}{0{,}1^2}$
V (X)= $\frac{0{,}9}{0{,}01}$
V (X)= 90.

Ejercicio 12.

El número de solicitudes de asistencia recibido por un servicio de remolque de vehículos es un proceso de Poisson con tasa c= 4 por hora.

(a) *Calcular la probabilidad de que se reciban 10 solicitudes entre las 16 y las 17 hs.*

X: "número de solicitudes de asistencia recibido por un servicio de remolque de vehículos por hora (t= 1)".

X ~ P (ct= 4t).

P (X= 10)= $\frac{e^{-ct}(ct)^{10}}{10!}$
P (X= 10)= $\frac{e^{-4*1}(4*1)^{10}}{10!}$
P (X= 10)= $\frac{e^{-4}4^{10}}{10!}$
P (X= 10)= 0,0053.

Por lo tanto, la probabilidad de que se reciban 10 solicitudes entre las 16 y las 17 hs. es 0,0053.

(b) *Si los operadores de las grúas se toman un descanso de 30 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que no se pierda ninguna llamada de asistencia durante ese período?*

P (X= 0)= $\frac{e^{-ct}(ct)^{0}}{0!}$
P (X= 0)= $\frac{e^{-4*0,5}(4*0,5)^{0}}{0!}$
P (X= 0)= $\frac{e^{-2}2^{0}}{1}$
P (X= 0)= $e^{-2} * 1$
P (X= 0)= e^{-2}
P (X= 0)= 0,1353.

Por lo tanto, si los operadores de las grúas se toman un descanso de 30 minutos, la probabilidad de que no se pierda ninguna llamada de asistencia durante ese período es 0,1353.

Ejercicio 13.

El número de visitas realizadas en un día entre semana en una determinada página web se decide modelizar por una variable de Poisson de media 8.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que en un día se reciban más de 4 visitas? ¿Y entre 7 y 10 visitas (ambos incluídos)?*

X: "número de visitas realizadas entre semana en una determinada página web en un día (t= 1)".

X ~ P (λt= 8t).

P (X > 4)= 1 - P (X ≤ 4)
P (X > 4)= 1 - [P (X= 0) + P (X= 1) + P (X= 2) + P (X= 3) + P (X= 4)]
P (X > 4)= 1 - ($\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^4}{4!}$)
P (X > 4)= 1 - ($\frac{e^{-8}8^0}{0!} + \frac{e^{-8}8^1}{1!} + \frac{e^{-8}8^2}{2!} + \frac{e^{-8}8^3}{3!} + \frac{e^{-8}8^4}{4!}$)
P (X > 4)= 1 - ($\frac{e^{-8}*1}{1} + \frac{e^{-8}*8}{1} + \frac{e^{-8}*64}{2} + \frac{e^{-8}*512}{6} + \frac{e^{-8}*4096}{24}$)
P (X > 4)= 1 - (e^{-8} + 8e^{-8} + 32e^{-8} + $\frac{256}{3}$ e^{-8} + $\frac{512}{3}$ e^{-8})
P (X > 4)= 1 - (1 + 8 + 32 + $\frac{256}{3}$ + $\frac{512}{3}$) e^{-8}
P (X > 4)= 1 - $\frac{891}{3}$ e^{-8}
P (X > 4)= 1 - 0,0996
P (X > 4)= 0,9004.

P (7 ≤ X ≤ 10)= P (X ≤ 10) - P (X < 7)
P (7 ≤ X ≤ 10)= P (X ≤ 10) - P (X ≤ 6)
P (7 ≤ X ≤ 10)= 0,8159 - 0,3134
P (7 ≤ X ≤ 10)= 0,5025.

Por lo tanto, la probabilidad de que en un día se reciban más de 4 visitas es 0,9004 y, entre 7 y 10 visitas (ambos incluídos), es 0,5025.

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger al azar una semana laboral (de lunes a viernes), haya 3 días con más de 4 visitas? (Sugerencia: Considerar X: "número de días en la semana laboral con más de 4 visitas".).*

Y: "número de días en la semana laboral con más de 4 visitas".

Y ~ B (n= 5, p= 0,9004).

P (Y= 3)= $\binom{5}{3}$ $0{,}9004^3$ $(1 - 0{,}9004)^{5-3}$
P (Y= 3)= $\frac{5!}{(5-3)!3!}$ $*$ 0,723 $*$ $0{,}0996^2$

P (Y= 3)= $\frac{5*4*3!}{2!3!}$ * 0,723 * 0,0099
P (Y= 3)= $\frac{5*4}{2}$ * 0,723 * 0,0099
P (Y= 3)= 5 * 2 * 0,723 * 0,0099
P (Y= 3)= 0,0724.

Por lo tanto, la probabilidad de que, al escoger al azar una semana laboral (de lunes a viernes), haya 3 días con más de 4 visitas es 0,0724.

Ejercicio 14.

En un lote de 10 microcircuitos, 3 están defectuosos. Se elige, aleatoriamente, cuatro microcircuitos para ser probados. Sea X: "número de circuitos probados que son defectuosos".

(a) *Determinar P (X= 2).*

X: "número de circuitos probados defectuosos".

X ~ H (n= 4, M= 3, N= 10).

P (X= x)= $\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$, donde x= 1, 2, 3.

P (X= 2)= $\frac{\binom{M}{2}\binom{N-M}{n-2}}{\binom{N}{n}}$

P (X= 2)= $\frac{\binom{3}{2}\binom{10-3}{4-2}}{\binom{10}{4}}$

P (X= 2)= $\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}}$

P (X= 2)= $\frac{3*21}{210}$

P (X= 2)= $\frac{63}{210}$

P (X= 2)= $\frac{3}{10}$

P (X= 2)= 0,3.

(b) *Determinar E (X) y V (X).*

E (X)= $\frac{nM}{N}$

E (X)= $\frac{4*3}{10}$

E (X)= $\frac{2*3}{5}$

E (X)= $\frac{6}{5}$.

V (X)= $\frac{nM}{N} \frac{N-M}{N} \frac{N-n}{N-1}$

V (X)= $\frac{4*3}{10} \frac{10-3}{10} \frac{10-4}{10-1}$

V (X)= $\frac{2*3}{5} \frac{7}{10} \frac{6}{9}$

V (X)= $\frac{6}{5} \frac{7}{10} \frac{6}{9}$

V (X)= $\frac{14}{25}$.

Ejercicio 15.

En referencia al ejercicio anterior, suponer que el lote tiene 1000 microcircuitos, 300 defectuosos. Se elige, aleatoriamente, 4 microcircuitos para ser probados. Sea X: "número de circuitos probados que son defectuosos".

(a) *Determinar P (X= 2).*

X: "número de circuitos probados defectuosos".

X ~ H (n= 4, M= 300, N= 1000).

P (X= x)= $\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$, donde x= 1, 2, … , 300.

P (X= 2)= $\frac{\binom{M}{2}\binom{N-M}{n-2}}{\binom{N}{n}}$
P (X= 2)= $\frac{\binom{300}{2}\binom{1000-300}{4-2}}{\binom{1000}{4}}$
P (X= 2)= $\frac{\binom{300}{2}\binom{700}{2}}{\binom{1000}{4}}$
P (X= 2)= $\frac{44850*244650}{41417124750}$
P (X= 2)= $\frac{10972552500}{41417124750}$
P (X= 2)= $\frac{4876690}{18407611}$
P (X= 2)= 0,2649.

(b) *Considerar que hay independencia entre las extracciones, volver a calcular P (X= 2) usando distribución binomial, ¿qué se observa?*

X: "número de circuitos probados defectuosos".

X ~ B (n= 4, p= $\frac{M}{N}$= 0,3).

P (X= 2)= $\binom{n}{2}\ p^2\ (1-p)^{4-2}$
P (X= 2)= $\binom{4}{2}\ 0{,}3^2\ (1-0{,}3)^{4-2}$
P (X= 2)= $\frac{4!}{(4-2)!2!}$ * 0,09 * $0{,}7^2$
P (X= 2)= $\frac{4*3*2!}{2!2!}$ * 0,09 * 0,49
P (X= 2)= $\frac{4*3}{2}$ * 0,09 * 0,49
P (X= 2)= 2 * 3 * 0,09 * 0,49
P (X= 2)= 0,2646.

Por lo tanto, se observa que, cuando N se hace grande, para una fracción fija de defectuosos p= $\frac{M}{N}$, la función de probabilidad hipergeométrica converge a la función de probabilidad binomial.

Trabajo Práctico N° 4:
Variables Aleatorias Continuas. Funciones de Distribución de Probabilidad Uniforme, Exponencial, Normal.

Ejercicio 1.

El tiempo total, medido en unidades de 100 horas, que un adolescente utiliza su estéreo en un período de un año es una v.a. continua X con f.d.p. dada por:

$f(x)= \begin{cases} x, 0 < x < 1 \\ 2 - x, 1 \leq x < 2 \\ 0, caso\ contrario \end{cases}$.

Encontrar la probabilidad de que en un período de un año el adolescente utilice su estéreo:

(a) *menos de 120 horas.*

P (X < 1,2)= $\int_0^1 x\,dx$ + $\int_1^{1,2} 2 - x\,dx$
P (X < 1,2)= $\frac{x^2}{2}\,|_0^1$ + $\int_1^{1,2} 2\,dx$ + $\int_1^{1,2} -x\,dx$
P (X < 1,2)= $\frac{1}{2}$ (1^2 - 0^2) + 2 $\int_1^{1,2} dx$ - $\int_1^{1,2} x\,dx$
P (X < 1,2)= $\frac{1}{2}$ (1 - 0) + 2x $|_1^{1,2}$ - $\frac{x^2}{2}\,|_1^{1,2}$
P (X < 1,2)= $\frac{1}{2}$ * 1 + 2 (1,2 - 1) - $\frac{1}{2}$ ($1,2^2$ - 1^2)
P (X < 1,2)= $\frac{1}{2}$ + 2 * 0,2 - $\frac{1}{2}$ (1,44 - 1)
P (X < 1,2)= $\frac{1}{2}$ + 0,4 - $\frac{1}{2}$ * 0,44
P (X < 1,2)= $\frac{1}{2}$ + 0,4 - 0,22
P (X < 1,2)= 0,68.

(b) *entre 50 y 100 horas.*

P (0,5 < X < 1)= $\int_{0,5}^1 x\,dx$
P (0,5 < X < 1)= $\frac{x^2}{2}\,|_{0,5}^1$
P (0,5 < X < 1)= $\frac{1}{2}$ (1^2 - $0,5^2$)
P (0,5 < X < 1)= $\frac{1}{2}$ (1 - 0,25)
P (0,5 < X < 1)= $\frac{1}{2}$ * 0,75
P (0,5 < X < 1)= 0,375.

Ejercicio 2.

Suponer que la distancia X entre un blanco puntual y un disparo dirigido al punto, en un juego de tiro al blanco accionado por monedas, es una v.a. continua con f.d.p. dada por:

$f(x)= \begin{cases} 0{,}75(1-x^2), -1 < x < 1 \\ 0, caso\ contrario \end{cases}$.

(a) *Calcular P (X > 0).*

P (X > 0)= $\int_0^1 0{,}75(1-x^2)\,dx$
P (X > 0)= 0,75 $\int_0^1 1-x^2\,dx$
P (X > 0)= 0,75 ($\int_0^1 dx$ + $\int_0^1 -x^2\,dx$)
P (X > 0)= 0,75 (x $|_0^1$ - $\int_0^1 x^2\,dx$)
P (X > 0)= 0,75 [(1 - 0) - $\frac{x^3}{3}$ $|_0^1$]
P (X > 0)= 0,75 [1 - $\frac{1}{3}$ (1^3 - 0^3)]
P (X > 0)= 0,75 [1 - $\frac{1}{3}$ (1 - 0)]
P (X > 0)= 0,75 (1 - $\frac{1}{3}$ * 1)
P (X > 0)= 0,75 (1 - $\frac{1}{3}$)
P (X > 0)= 0,75 $\frac{2}{3}$
P (X > 0)= 0,5.

(b) *Calcular P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5).*

P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= $\int_{-0{,}5}^{0{,}5} 0{,}75(1-x^2)\,dx$
P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= 0,75 $\int_{-0{,}5}^{0{,}5} 1-x^2\,dx$
P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= 0,75 ($\int_{-0{,}5}^{0{,}5} dx$ + $\int_{-0{,}5}^{0{,}5} -x^2\,dx$)
P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= 0,75 (x $|_{-0{,}5}^{0{,}5}$ - $\int_{-0{,}5}^{0{,}5} x^2\,dx$)
P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= 0,75 {[0,5 - (-0,5)] - $\frac{x^3}{3}$ $|_{-0{,}5}^{0{,}5}$}
P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= 0,75 {(0,5 + 0,5) - $\frac{1}{3}$ [$0{,}5^3$ - $(-0{,}5)^3$]}
P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= 0,75 {1 - $\frac{1}{3}$ [0,16785 - (-0,16785)]}
P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= 0,75 [1 - $\frac{1}{3}$ (0,16785 + 0,16785)]
P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= 0,75 (1 - $\frac{1}{3}$ * 0,3357)
P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= 0,75 (1 - 0,1119)
P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= 0,75 * 0,8881
P (-0,5 ≤ X ≤ 0,5)= 0,666075.

(c) *Calcular P (X < -0,25 o X > 0,25).*

P (X < -0,25 o X > 0,25)= P (X < -0,25) + P (X > 0,25)
P (X < -0,25 o X > 0,25)= $\int_{-1}^{-0,25} 0,75(1-x^2)\, dx$ + $\int_{0,25}^{1} 0,75(1-x^2)\, dx$
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 $\int_{-1}^{-0,25} 1-x^2\, dx$ + 0,75 $\int_{0,25}^{1} 1-x^2\, dx$
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 ($\int_{-1}^{-0,25} 1-x^2\, dx$ + $\int_{0,25}^{1} 1-x^2\, dx$)
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 ($\int_{-1}^{-0,25} dx$ + $\int_{-1}^{-0,25} -x^2\, dx$ + $\int_{0,25}^{1} dx$ + $\int_{0,25}^{1} -x^2\, dx$)
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 (x $|_{-1}^{-0,25}$ - $\int_{-1}^{-0,25} x^2\, dx$ + x $|_{0,25}^{1}$ - $\int_{0,25}^{1} x^2\, dx$)
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 [(-0,25 - (-1)) - $\frac{x^3}{3}$ $|_{-1}^{-0,25}$ + (1 - 0,25) - $\frac{x^3}{3}$ $|_{0,25}^{1}$]
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 {(-0,25 + 1) - $\frac{1}{3}$ [$(-0,25)^3$ - $(-1)^3$] + 0,75 - $\frac{1}{3}$ (1^3 - $0,25^3$)}
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 {0,75 - $\frac{1}{3}$ [-0,15625 - (-1)] + 0,75 - $\frac{1}{3}$ (1 - 0,015625)}
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 [0,75 - $\frac{1}{3}$ (-0,015625 + 1) + 0,75 - $\frac{1}{3}$ * 0,984375]
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 (0,75 - $\frac{1}{3}$ * 0,984375 + 0,75 - $\frac{1}{3}$ * 0,984375)
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 (1,5 - $\frac{2}{3}$ * 0,984375)
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 (1,5 - 0,65625)
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,75 * 0,84375
P (X < -0,25 o X > 0,25)= 0,6328125.

(d) *Hallar la f.d.a. de X.*

F (x)= P (X ≤ x)
F (x)= $\int_{-\infty}^{x} 0,75(1-t^2)\, dt$
F (x)= $\int_{-1}^{x} 0,75(1-t^2)\, dt$
F (x)= 0,75 ($\int_{-1}^{x} dt$ + $\int_{-1}^{x} -t^2\, dt$)
F (x)= 0,75 (t $|_{-1}^{x}$ - $\int_{-1}^{x} t^2\, dt$)
F (x)= 0,75 {[x - (-1)] - $\frac{t^3}{3}$ $|_{-1}^{x}$}
F (x)= 0,75 {(x + 1) - $\frac{1}{3}$ [x^3 - (-1)]}
F (x)= 0,75 [(x + 1) - $\frac{1}{3}$ (x^3 + 1)]
F (x)= 0,75 (x + 1 - $\frac{1}{3}$ x^3 - $\frac{1}{3}$)
F (x)= 0,75 ($\frac{-1}{3}$ x^3 + x + $\frac{2}{3}$)
F (x)= $\frac{-1}{4}$ x^3 + $\frac{3}{4}$ x + $\frac{1}{2}$.

F (x)= $\begin{cases} 0, x \leq -1 \\ \frac{-1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}, -1 < x < 1. \\ 1, x \geq 1 \end{cases}$

Ejercicio 3.

Considerar la función de densidad:

f (x)= $\begin{cases} k\sqrt{x}, 0 < x < 1 \\ 0, caso\ contrario \end{cases}$.

(a) *Evaluar k.*

P (-∞ < X < +∞)= 1
$\int_{-\infty}^{+\infty} k\sqrt{x}\ dx$= 1
$\int_{0}^{1} k\sqrt{x}\ dx$= 1
k $\int_{0}^{x} \sqrt{x}\ dx$= 1
k $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\ |_0^1$= 1
$\frac{2}{3}$ k ($1^{\frac{3}{2}}$ - $0^{\frac{3}{2}}$)= 1
$\frac{2}{3}$ k (1 - 0)= 1
$\frac{2}{3}$ k * 1= 1
$\frac{2}{3}$ k= 1
k= $\frac{1}{\frac{2}{3}}$
k= $\frac{3}{2}$.

f (x)= $\begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}, 0 < x < 1 \\ 0, caso\ contrario \end{cases}$.

(b) *Encontrar F (x).*

F (x)= P (X ≤ x)
F (x)= $\int_{-\infty}^{x} \frac{3}{2}\sqrt{t}\ dt$
F (x)= $\int_{0}^{x} \frac{3}{2}\sqrt{t}\ dt$
F (x)= $\frac{3}{2} \int_{0}^{x} \sqrt{t}\ dt$
F (x)= $\frac{3}{2}\ \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\ |_0^x$
F (x)= $x^{\frac{3}{2}}$ - $0^{\frac{3}{2}}$
F (x)= $x^{\frac{3}{2}}$ - 0
F (x)= $x^{\frac{3}{2}}$.

F (x)= $\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ x^{\frac{3}{2}}, 0 < x < 1 \\ 1, x \geq 1 \end{cases}$.

(c) *Evaluar P (0,3 < X < 0,6) utilizando F (x).*

P (0,3 < X < 0,6)= F (0,6) - F (0,3)
P (0,3 < X < 0,6)= $0,6^{\frac{3}{2}}$ - $0,3^{\frac{3}{2}}$
P (0,3 < X < 0,6)= 0,4648 - 0,1643
P (0,3 < X < 0,6)= 0,3005.

Ejercicio 4.

Para las variables aleatorias de los ejercicios anteriores, hallar su esperanza y desviación estándar.

Ejercicio 1:

E (X)= $\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f\ (x)\ dx$
E (X)= $\int_0^1 xx\ dx$ + $\int_1^2 x(2-x)\ dx$
E (X)= $\int_0^1 x^2\ dx$ + $\int_1^2 2x - x^2\ dx$
E (X)= $\frac{x^3}{3}\ |_0^1$ + $\int_1^2 2x\ dx$ + $\int_1^2 -x^2\ dx$
E (X)= $\frac{1}{3}$ (1^3 - 0^3) + 2 $\int_1^2 x\ dx$ - $\int_1^2 x^2\ dx$
E (X)= $\frac{1}{3}$ (1 - 0) + 2 $\frac{x^2}{2}\ |_1^2$ - $\frac{x^3}{3}\ |_1^2$
E (X)= $\frac{1}{3}$ * 1 + (2^2 - 1^2) - $\frac{1}{3}$ (2^3 - 1^3)
E (X)= $\frac{1}{3}$ + (4 - 1) - $\frac{1}{3}$ (8 - 1)
E (X)= $\frac{1}{3}$ + 3 - $\frac{1}{3}$ * 7
E (X)= $\frac{1}{3}$ + 3 - $\frac{7}{3}$
E (X)= 1.

V (X)= $\int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^2\ f\ (x)\ dx$
V (X)= $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-1)^2\ f\ (x)\ dx$
V (X)= $\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2x + 1)\ f\ (x)\ dx$
V (X)= $\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)x\ dx$ + $\int_1^2 (x^2 - 2x + 1)(2 - x)\ dx$
V (X)= $\int_0^1 x^3 - 2x^2 + x\ dx$ + $\int_1^2 2x^2 - 4x + 2 - x^3 + 2x^2 - x\ dx$
V (X)= $\int_0^1 x^3\ dx$ + $\int_0^1 -2x^2\ dx$ + $\int_0^1 x\ dx$ + $\int_1^2 -x^3 + 4x^2 - 5x + 2\ dx$
V (X)= $\frac{x^4}{4}\ |_0^1$ - 2 $\int_0^1 x^2\ dx$ + $\frac{x^2}{2}\ |_0^1$ - $\int_1^2 x^3\ dx$ + 4 $\int_1^2 x^2\ dx$ + 5 $\int_1^2 x\ dx$ + 2 $\int_1^2 dx$
V (X)= $\frac{1}{4}$ (1^4 - 0^4) - 2 $\frac{x^3}{3}\ |_0^1$ + $\frac{1}{2}$ (1^2 - 0^2) - $\frac{x^4}{4}\ |_1^2$ + 4 $\frac{x^3}{3}\ |_1^2$ + 5 $\frac{x^2}{2}\ |_1^2$ + 2x $|_1^2$
V (X)= $\frac{1}{4}$ (1 - 0) - $\frac{2}{3}$ (1^3 - 0^3) + $\frac{1}{2}$ (1 - 0) - $\frac{1}{4}$ (2^4 - 1^4) + $\frac{4}{3}$ (2^3 - 1^3) + $\frac{5}{2}$ (2^2 - 1^2) + 2 (2 - 1)
V (X)= $\frac{1}{4}$ * 1 - $\frac{2}{3}$ (1 - 0) + $\frac{1}{2}$ * 1 - $\frac{1}{4}$ (16 - 1) + $\frac{4}{3}$ (8 - 1) + $\frac{5}{2}$ (4 - 1) + 2 * 1
V (X)= $\frac{1}{4}$ - $\frac{2}{3}$ * 1 + $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$ * 15 + $\frac{4}{3}$ * 7 + $\frac{5}{2}$ * 3 + 2
V (X)= $\frac{1}{4}$ - $\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{2}$ - $\frac{15}{4}$ + $\frac{28}{3}$ + $\frac{15}{2}$ + 2
V (X)= $\frac{3-8+6-45+112+90+24}{12}$
V (X)= $\frac{91}{6}$.

DE (X)= $\sqrt{V(X)}$
DE (X)= $\sqrt{\frac{91}{6}}$
DE (X)= 3,8944.

Ejercicio 2:

E (X)= $\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f\ (x)\ dx$
E (X)= $\int_{-1}^{1} x 0{,}75(1-x^2)\ dx$
E (X)= 0,75 $\int_{-1}^{1} x(1-x^2)\ dx$
E (X)= 0,75 $\int_{-1}^{1} x - x^3\ dx$
E (X)= 0,75 ($\int_{-1}^{1} x\ dx$ + $\int_{-1}^{1} -x^3\ dx$)
E (X)= 0,75 ($\frac{x^2}{2}$ $|_{-1}^{1}$ - $\int_{-1}^{1} x^3\ dx$)
E (X)= 0,75 {$\frac{1}{2}$ [1^2 - $(-1)^2$] - $\frac{x^4}{4}$ $|_{-1}^{1}$}
E (X)= 0,75 {$\frac{1}{2}$ (1 - 1) - $\frac{1}{4}$ [1^4 - $(-1)^4$]}
E (X)= 0,75 [$\frac{1}{2}$ (1 - 1) - $\frac{1}{4}$ (1 - 1)]
E (X)= 0,75 ($\frac{1}{2}$ * 0 - $\frac{1}{4}$ * 0)
E (X)= 0,75 (0 - 0)
E (X)= 0,75 * 0
E (X)= 0.

V (X)= $\int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^2\ f\ (x)\ dx$
V (X)= $\int_{-1}^{1} (x-0)^2 0{,}75(1-x^2)\ dx$
V (X)= 0,75 $\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\ dx$
V (X)= 0,75 $\int_{-1}^{1} x^2 - x^4\ dx$
V (X)= 0,75 ($\int_{-1}^{1} x^2\ dx$ + $\int_{-1}^{1} -x^4\ dx$)
V (X)= 0,75 ($\frac{x^3}{3}$ $|_{-1}^{1}$ - $\int_{-1}^{1} x^4\ dx$)
V (X)= 0,75 {$\frac{1}{3}$ [1^3 - $(-1)^3$] - $\frac{x^5}{5}$ $|_{-1}^{1}$}
V (X)= 0,75 {$\frac{1}{3}$ [1 - (-1)] - $\frac{1}{5}$ [1^5 - $(-1)^5$]}
V (X)= 0,75 {$\frac{1}{3}$ (1 + 1) - $\frac{1}{5}$ [1 - (-1)]}
V (X)= 0,75 [$\frac{1}{3}$ * 2 - $\frac{1}{5}$ (1 + 1)]
V (X)= 0,75 ($\frac{2}{3}$ - $\frac{1}{5}$ * 2)
V (X)= 0,75 ($\frac{2}{3}$ - $\frac{2}{5}$)
V (X)= 0,75 $\frac{4}{15}$
V (X)= 0,2.

DE (X)= $\sqrt{V(X)}$
DE (X)= $\sqrt{0{,}2}$
DE (X)= 0,4472.

Ejercicio 3:

E (X)= $\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f\ (x)\ dx$

E (X)= $\int_0^1 x\,\frac{3}{2}\sqrt{x}\;dx$

E (X)= $\frac{3}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\;dx$

E (X)= $\frac{3}{2}\,\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\;|_0^1$

E (X)= $\frac{3}{5}$ ($1^{\frac{5}{2}}$ - $0^{\frac{5}{2}}$)

E (X)= $\frac{3}{5}$ (1 - 0)

E (X)= $\frac{3}{5}$ * 1

E (X)= $\frac{3}{5}$.

V (X)= $\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(x)]^2\;f\;(x)\;dx$

V (X)= $\int_0^1(x-\frac{3}{5})^2\,\frac{3}{2}\sqrt{x}\;dx$

V (X)= $\frac{3}{2}\int_0^1(x^2-\frac{6}{5}x+\frac{9}{25})\sqrt{x}\;dx$

V (X)= $\frac{3}{2}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{3}{2}}+\frac{9}{25}\sqrt{x}\;dx$

V (X)= $\frac{3}{2}$ ($\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\;dx$ + $\int_0^1\frac{-6}{5}x^{\frac{3}{2}}\;dx$ + $\int_0^1\frac{9}{25}\sqrt{x}\;dx$)

V (X)= $\frac{3}{2}$ ($\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\;|_0^1$ - $\frac{6}{5}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\;dx$ + $\frac{9}{25}\int_0^1\sqrt{x}\;dx$)

V (X)= $\frac{3}{2}$ [$\frac{2}{7}$ ($1^{\frac{7}{2}}$ - $0^{\frac{7}{2}}$) - $\frac{6}{5}\,\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\;|_0^1$ + $\frac{9}{25}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\;|_0^1$]

V (X)= $\frac{3}{2}$ [$\frac{2}{7}$ (1 - 0) - $\frac{12}{25}$ ($1^{\frac{5}{2}}$ - $0^{\frac{5}{2}}$) + $\frac{18}{75}$ ($1^{\frac{3}{2}}$ - $0^{\frac{3}{2}}$)]

V (X)= $\frac{3}{2}$ [$\frac{2}{7}$ * 1 - $\frac{12}{25}$ (1 - 0) + $\frac{18}{75}$ (1 - 0)]

V (X)= $\frac{3}{2}$ ($\frac{2}{7}$ - $\frac{12}{25}$ * 1 + $\frac{18}{75}$ * 1)

V (X)= $\frac{3}{2}$ ($\frac{2}{7}$ - $\frac{12}{25}$ + $\frac{18}{75}$)

V (X)= $\frac{3}{2}\,\frac{600}{13125}$

V (X)= $\frac{12}{175}$.

DE (X)= $\sqrt{V(X)}$

DE (X)= $\sqrt{\frac{12}{175}}$

DE (X)= 0,2619.

Ejercicio 5.

Para la v.a. del Ejercicio 1, sea la v.a. Y el número de kilowatts-hora que el adolescente gasta al año, se tiene que Y= 60X^2 + 39X. Calcular la esperanza de Y. Explicar qué propiedad se utiliza.

E (Y)= E [Y (X)]
E (Y)= $\int_{-\infty}^{+\infty} y\ (x)\ f\ (x)\ dx$
E (Y)= $\int_0^1 (60x^2 + 39x)x\ dx$ + $\int_1^2 (60x^2 + 39x)(2 - x)dx$
E (Y)= $\int_0^1 60x^3 + 39x^2\ dx$ + $\int_1^2 120x^2 + 78x - 60x^3 - 39x^2\ dx$
E (Y)= $\int_0^1 60x^3\ dx$ + $\int_0^1 39x^2\ dx$ + $\int_1^2 -60x^3 + 81x^2 + 78x\ dx$
E (Y)= 60 $\int_0^1 x^3\ dx$ + 39 $\int_0^1 x^2\ dx$ + $\int_1^2 -60x^3\ dx$ + $\int_1^2 81x^2\ dx$ + $\int_1^2 78x\ dx$
E (Y)= 60 $\frac{x^4}{4}\ |_0^1$ + 39 $\frac{x^3}{3}\ |_0^1$ - 60 $\int_1^2 x^3\ dx$ + 81 $\int_1^2 x^2\ dx$ + 78 $\int_1^2 x\ dx$
E (Y)= 15 (1^4 - 0^4) + 13 (1^3 - 0^3) - 60 $\frac{x^4}{4}\ |_1^2$ + 81 $\frac{x^3}{3}\ |_1^2$ + 78 $\frac{x^2}{2}\ |_1^2$
E (Y)= 15 (1 - 0) + 13 (1 - 0) - 15 (2^4 - 1^4) + 27 (2^3 - 1^3) + 39 (2^2 - 1^2)
E (Y)= 15 * 1 + 13 * 1 - 15 (16 - 1) + 27 (8 - 1) + 39 (4 - 1)
E (Y)= 15 + 13 - 15 * 15 + 27 * 7 + 39 * 3
E (Y)= 15 + 13 - 225 + 189 + 117
E (Y)= 109.

La propiedad que se utiliza es:

"Si X es una v.a. continua con f.d.p. f (x) y h (X) es cualquier función de X, entonces, E [(h (X)]= $\int_{-\infty}^{+\infty} h\ (x)\ f\ (x)\ dx$."

Ejercicio 6.

Una barra de 12 pulgadas, que está sujeta por ambos extremos, debe someterse a un creciente cantidad de esfuerzo hasta que se rompa. Sea X: "distancia desde el extremo izquierdo en el que ocurre la rotura" y suponer que la f.d.p. de X es:

$f(x)= \begin{cases} \frac{1}{24}x(1-\frac{x}{12}), 0 < x < 12 \\ 0, caso\ contraio \end{cases}.$

Calcular:

(a) *La f.d.a. de X.*

F (x)= P (X ≤ x)
F (x)= $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{24}t(1-\frac{t}{12})\, dt$
F (x)= $\int_{0}^{x} \frac{1}{24}t(1-\frac{t}{12})\, dt$
F (x)= $\int_{0}^{x} \frac{1}{24}t - \frac{1}{288}t^2\, dt$
F (x)= $\int_{0}^{x} \frac{1}{24}t\, dt$ + $\int_{0}^{x} \frac{-1}{288}t^2\, dt$
F (x)= $\frac{1}{24}\int_{0}^{x} t\, dt$ - $\frac{1}{288}\int_{0}^{x} t^2\, dt$
F (x)= $\frac{1}{24}\frac{t^2}{2}\Big|_0^x$ - $\frac{1}{288}\frac{t^3}{3}\Big|_0^x$
F (x)= $\frac{1}{48}$ (x^2 - 0^2) - $\frac{1}{864}$ (x^3 - 0^3)
F (x)= $\frac{1}{48}$ (x^2 - 0) - $\frac{1}{864}$ (x^3 - 0)
F (x)= $\frac{1}{48}x^2$ - $\frac{1}{864}x^3$
F (x)= $\frac{-1}{864}x^3$ + $\frac{1}{48}x^2$.

F (x)= $\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{-1}{864}x^3 + \frac{1}{48}x^2, 0 < x < 12. \\ 1, x \geq 12 \end{cases}$

(b) *P (X ≤ 4), P (X > 6), P (4 < X < 6).*

P (X ≤ 4)= F (4)
P (X ≤ 4)= $\frac{-1}{864} * 4^3$ + $\frac{1}{48} * 4^2$
P (X ≤ 4)= $\frac{-1}{864} * 64$ + $\frac{1}{48} * 16$
P (X ≤ 4)= $\frac{-2}{27}$ + $\frac{1}{3}$
P (X ≤ 4)= $\frac{7}{27}$
P (X ≤ 4)= $0,\widehat{259}$.

(c) *E (X).*

E (X)= $\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f\ (x)\ dx$
E (X)= $\int_{0}^{12} x \frac{1}{24} x(1-\frac{x}{12})\ dx$
E (X)= $\int_{0}^{12} \frac{1}{24} x^2(1-\frac{x}{12})\ dx$
E (X)= $\int_{0}^{12} \frac{1}{24} x^2 - \frac{1}{288} x^3\ dx$
E (X)= $\int_{0}^{12} \frac{1}{24} x^2\ dx$ + $\int_{0}^{12} \frac{-1}{288} x^3\ dx$
E (X)= $\frac{1}{24} \int_{0}^{12} x^2\ dx$ - $\frac{1}{288} \int_{0}^{12} x^3\ dx$
E (X)= $\frac{1}{24} \frac{x^3}{3} |_0^{12}$ - $\frac{1}{288} \frac{x^4}{4} |_0^{12}$
E (X)= $\frac{1}{72}$ (12^3 - 0^3) - $\frac{1}{1152}$ (12^4 - 0^4)
E (X)= $\frac{1}{72}$ (1728 - 0) - $\frac{1}{1152}$ (20736 - 0)
E (X)= $\frac{1}{72}$ * 1728 - $\frac{1}{1152}$ * 20736
E (X)= 24 - 18
E (X)= 6.

(d) *La probabilidad de que el punto de ruptura ocurra a más de 2 pulgadas del punto esperado de ruptura.*

P (X $>$ E (X) + 2)= P (X $>$ 6 + 2)
P (X $>$ E (X) + 2)= P (X $>$ 8)
P (X $>$ E (X) + 2)= 1 - P (X $\leq$ 8)
P (X $>$ E (X) + 2)= 1 - F (8)
P (X $>$ E (X) + 2)= 1 - ($\frac{-1}{864}$ * 8^3 + $\frac{1}{48}$ * 8^2)
P (X $>$ E (X) + 2)= 1 - ($\frac{-1}{864}$ * 512 + $\frac{1}{48}$ * 64)
P (X $>$ E (X) + 2)= 1 - ($\frac{-16}{27}$ + $\frac{4}{3}$)
P (X $>$ E (X) + 2)= 1 - $\frac{20}{27}$
P (X $>$ E (X) + 2)= 1 - $0,\widehat{740}$
P (X $>$ E (X) + 2)= $0,\widehat{259}$.

Ejercicio 7.

La cantidad de café diaria, en litros, que sirve una máquina que se localiza en el vestíbulo de un aeropuerto es una v.a. X con distribución uniforme continua en (7, 10). Encontrar la probabilidad de que, en un día dado, la cantidad de café que sirve esta máquina sea:

(a) *a lo sumo, 8,8 litros.*

X: "cantidad de café diaria (en litros) que sirve una máquina que se localiza en el vestíbulo de un aeropuerto".

X ~ U (a= 7, b= 10).

F (x)= $\begin{cases} 0, x < 7 \\ \frac{x-7}{10-7} = \frac{x-7}{3}, 7 \leq x \leq 10 \\ 1, x > 10 \end{cases}$

P (X ≤ 8,8)= F (8,8)
P (X ≤ 8,8)= $\frac{8,8-7}{3}$
P (X ≤ 8,8)= $\frac{1,8}{3}$
P (X ≤ 8,8)= 0,6.

(b) *más de 7,4 litros, pero menos de 9,5 litros.*

P (7,4 < X < 9,5)= P (X < 9,5) - P (X ≤ 7,4)
P (7,4 < X < 9,5)= F (9,5) - F (7,4)
P (7,4 < X < 9,5)= $\frac{9,5-7}{3}$ - $\frac{7,4-7}{3}$
P (7,4 < X < 9,5)= $\frac{2,5}{3}$ - $\frac{0,4}{3}$
P (7,4 < X < 9,5)= $0,8\hat{3}$ - $0,1\hat{3}$
P (7,4 < X < 9,5)= 0,7.

(c) *al menos, 8,5 litros.*

P (X ≥ 8,5)= 1 - P (X < 8,5)
P (X ≥ 8,5)= 1 - F (8,5)
P (X ≥ 8,5)= 1 - $\frac{7,4-7}{3}$
P (X ≥ 8,5)= 1 - $\frac{0,4}{3}$
P (X ≥ 8,5)= 1 - $0,1\hat{3}$
P (X ≥ 8,5)= $0,8\hat{6}$.

(d) *Hallar E (X) y V (X).*

E (X)= $\frac{a+b}{2}$
E (X)= $\frac{7+10}{2}$
E (X)= $\frac{17}{2}$
E (X)= 8,5.

V (X)= $\frac{(b-a)^2}{12}$
V (X)= $\frac{(10-7)^2}{12}$
V (X)= $\frac{3^2}{12}$
V (X)= $\frac{9}{12}$
V (X)= $\frac{3}{4}$
V (X)= 0,75.

Ejercicio 8.

La variable Z tiene distribución normal estándar.

(a) *Calcular las siguientes probabilidades:*

(i) *P (Z ≤ 2,24).*

P (Z ≤ 2,24)= F (2,24)
P (Z ≤ 2,24)= 0,9875.

(ii) *P (Z > 1,36).*

P (Z > 1,36)= 1 - P (Z ≤ 1,36)
P (Z > 1,36)= 1 - F (1,36)
P (Z > 1,36)= 1 - 0,9131
P (Z > 1,36)= 0,0869.

(iii) *P (0 < Z < 1,5).*

P (0 < Z < 1,5)= P (Z < 1,5) - P (Z ≤ 0)
P (0 < Z < 1,5)= F (1,5) - F (0)
P (0 < Z < 1,5)= 0,9332 - 0,5
P (0 < Z < 1,5)= 0,4332.

(iv) *P (0,3 < Z < 1,56).*

P (0,3 < Z < 1,56)= P (Z < 1,56) - P (Z ≤ 0,3)
P (0,3 < Z < 1,56)= F (1,56) - F (0,3)
P (0,3 < Z < 1,56)= 0,9406 - 0,6179
P (0,3 < Z < 1,56)= 0,3227.

(v) *P (-0,51 < Z < 1,54).*

P (-0,51 < Z < 1,54)= P (Z < 1,54) - P (Z ≤ -0,51)
P (-0,51 < Z < 1,54)= F (1,54) - F (-0,51)
P (-0,51 < Z < 1,54)= 0,9382 - 0,305
P (-0,51 < Z < 1,54)= 0,6332.

(b) *Hallar los valores de z que verifiquen:*

(i) *P (Z > z)= 0,5.*

P (Z > z)= 0,5
1 - P (Z ≤ z)= 0,5
P (Z ≤ z)= 1 - 0,5
P (Z ≤ z)= 0,5
F (z)= 0,5
z= 0.

(ii) *P (Z < z)= 0,8485.*

P (Z < z)= 0,8485
F (z)= 0,8485
z= 1,03.

(iii) *P (Z < z)= 0,0054.*

P (Z < z)= 0,0054
F (z)= 0,0054
z= -2,55.

(iv) *P (-z < Z < z)= 0,9.*

P (-z < Z < z)= 0,9
P (Z < z) - P (Z ≤ -z)= 0,9
F (z) - F (-z)= 0,9
F (z) - [1 - F (z)]= 0,9
F (z) - 1 + F (z)= 0,9
2 F (z) - 1= 0,9
2 F (z)= 0,9 + 1
2 F (z)= 1,9
F (z)= $\frac{1,9}{2}$
F (z)= 0,95
z= 1,645.

Ejercicio 9.

Si X es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros μ= 10 y σ^2= 36, calcular:

(a) *P (X > 6,4).*

P (X > 6,4)= 1 - P (X ≤ 6,4)
P (X > 6,4)= 1 - P ($\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{6,4-10}{\sqrt{36}}$)
P (X > 6,4)= 1 - P (Z ≤ $\frac{-3,6}{6}$)
P (X > 6,4)= 1 - P (Z ≤ -0,6)
P (X > 6,4)= 1 - F (-0,6)
P (X > 6,4)= 1 - 0,2743
P (X > 6,4)= 0,7257.

(b) *P (4,2 < X < 16).*

P (4,2 < X < 16)= P (X < 16) - P (X ≤ 4,2)
P (4,2 < X < 16)= P ($\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} < \frac{16-10}{\sqrt{36}}$) - P ($\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{4,2-10}{\sqrt{36}}$)
P (4,2 < X < 16)= P (Z < $\frac{6}{6}$) - P (Z ≤ $\frac{-5,8}{6}$)
P (4,2 < X < 16)= P (Z < 1) - P (Z ≤ 0,9$\hat{6}$)
P (4,2 < X < 16)= F (1) - F (-0,97)
P (4,2 < X < 16)= 0,8413 - 0,166
P (4,2 < X < 16)= 0,6753.

(c) *P (X ≤ 8,14).*

P (X ≤ 8,14)= P ($\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{8,14-10}{\sqrt{36}}$)
P (X ≤ 8,14)= P (Z ≤ $\frac{-1,86}{6}$)
P (X ≤ 8,14)= P (Z ≤ -0,31)
P (X ≤ 8,14)= F (-0,31)
P (X ≤ 8,14)= 0,3783.

Ejercicio 10.

En la elaboración de un determinado medicamento en forma de comprimido interviene 1 producto químico cuya cantidad sigue, aproximadamente, una distribución normal con media 3 grs. y desviación estándar 0,05 grs.

(a) *Calcular la probabilidad de que un comprimido pese más de 3,025 grs.*

P (X $>$ 3,025)= 1 - P (X $\leq$ 3,025)
P (X $>$ 3,025)= 1 - P ($\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{3,025-3}{0,05}$)
P (X $>$ 3,025)= 1 - P (Z $\leq \frac{0,025}{0,05}$)
P (X $>$ 3,025)= 1 - P (Z $\leq$ 0,5)
P (X $>$ 3,025)= 1 - F (0,5)
P (X $>$ 3,025)= 1 - 0,6915
P (X $>$ 3,025)= 0,3085.

(b) *Un comprimido se considera defectuoso cuando su peso difiere de la media en más de 0,075 grs. Calcular la proporción de comprimidos defectuosos que se fabrican.*

P ($|X| > \mu$ + 0,075)= P ($|X| >$ 3 + 0,075)
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= P ($|X| >$ 3,075)
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 1 - P ($|X| \leq$ 3,075)
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 1 - P (-3,075 $\leq$ X $\leq$ 3,075)
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 1 - [P (X $\leq$ 3,075) - P (X $<$ -3,075)]
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 1 - {P (X $\leq$ 3,075) - [1 - P (X $<$ 3,075)]}
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 1 - [P (X $\leq$ 3,075) - 1 + P (X $<$ 3,075)]
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 1 - [2 P (X $\leq$ 3,075) - 1]
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 1 - 2 P (X $\leq$ 3,075) + 1
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 2 - 2 P (X $\leq$ 3,075)
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 2 [1 - P (X $\leq$ 3,075)]
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 2 [1 - P ($\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{3,075-3}{0,05}$)]
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 2 [1 - P (Z $\leq \frac{0,075}{0,05}$)]
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 2 [1 - P (Z $\leq$ 1,5)]
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 2 [1 - F (1,5)]
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 2 (1 - 0,9332)
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 2 * 0,0668
P ($|X| > \mu$ + 0,075)= 0,1336.

(c) *Estos comprimidos se envasan en cajas de 10 unidades. Si un envase contiene 2 o más comprimidos defectuosos, se elimina del mercado. Determinar el porcentaje de cajas que se retiran del mercado. (Sugerencia: Considerar X: "número de comprimidos defectuosos en una caja").*

X: “número de comprimidos defectuosos”.

X ~ B (n= 10, p= 0,1336).

P (X $\geq$ 2)= 1 - P (X $<$ 2)
P (X $\geq$ 2)= 1 - [P (X= 0) + P (X= 1)]
P (X $\geq$ 2)= 1 - [$\binom{10}{0}$ $0{,}1336^0$ $(1 - 0{,}1336)^{10-0}$ + $\binom{10}{1}$ $0{,}1336^1$ $(1 - 0{,}1336)^{10-1}$]
P (X $\geq$ 2)= 1 - [$\frac{10!}{(10-0)!0!}$ $* 1 * 0{,}8664^{10}$ + $\frac{10!}{(10-1)!1!}$ $* 0{,}1336 * 0{,}8664^9$]
P (X $\geq$ 2)= 1 - ($\frac{10!}{10!*1}$ * 1 * 0,2383 + $\frac{10*9!}{9!*1}$ * 0,1336 * 0,2751)
P (X $\geq$ 2)= 1 - (1 * 1 * 0,2383 + 10 * 0,1336 * 0,2751)
P (X $\geq$ 2)= 1 - (0,2383 + 0,3675)
P (X $\geq$ 2)= 1 - (0,2383 + 0,3675)
P (X $\geq$ 2)= 1 - 0,6058
P (X $\geq$ 2)= 0,3942.

Ejercicio 11.

Un estudio de cierto sistema de computadoras revela que el tiempo de respuesta, en segundos, tiene una distribución exponencial con una media de 3 segundos.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 5 segundos?*

X: "tiempo de respuesta (en segundos) de cierto sistema de computadoras".

X ~ Exp ($\lambda = \frac{1}{3}$).

P (X > 5)= 1 - P (X $\leq$ 5)
P (X > 5)= 1 - F (5)
P (X > 5)= 1 - (1 - $e^{-5\lambda}$)
P (X > 5)= 1 - (1 - $e^{-5\frac{1}{3}}$)
P (X > 5)= 1 - (1 - $e^{\frac{-5}{3}}$)
P (X > 5)= 1 - 1 + $e^{\frac{-5}{3}}$
P (X > 5)= $e^{\frac{-5}{3}}$
P (X > 5)= 0,1889.

Por lo tanto, la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 5 segundos es 0,1889.

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 10 segundos?*

P (X > 10)= 1 - P (X $\leq$ 10)
P (X > 10)= 1 - F (10)
P (X > 10)= 1 - (1 - $e^{-10\lambda}$)
P (X > 10)= 1 - (1 - $e^{-10\frac{1}{3}}$)
P (X > 10)= 1 - (1 - $e^{\frac{-10}{3}}$)
P (X > 10)= 1 - 1 + $e^{\frac{-10}{3}}$
P (X > 10)= $e^{\frac{-10}{3}}$
P (X > 10)= 0,0357.

Por lo tanto, la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 10 segundos es 0,0357.

Ejercicio 12.

El número de visitas a un sitio web sigue un proceso de Poisson con una razón de 3 por minuto.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que transcurra más de un minuto sin recibir una visita?*

X: "número de visitas a un sitio web por minuto (t= 1)".
Y: "tiempo (en minutos) que transcurre sin recibir una visita".

X ~ P (λt= 3t).
Y ~ Exp (λ= 3).

P (Y > 1)= 1 - P (Y ≤ 1)
P (Y > 1)= 1 - F (1)
P (Y > 1)= 1 - (1 - $e^{-1\lambda}$)
P (Y > 1)= 1 - (1 - e^{-1*3})
P (Y > 1)= 1 - (1 - e^{-3})
P (Y > 1)= 1 - 1 + e^{-3}
P (Y > 1)= e^{-3}
P (Y > 1)= 0,0498.

Por lo tanto, la probabilidad de que transcurra más de un minuto sin recibir una visita es 0,0498.

(b) *Si transcurren dos minutos sin una visita, ¿cuál es la probabilidad que se dé una visita en el siguiente minuto?*

P (Y < 3 | Y > 2)= $\frac{P(2<Y<3)}{P(Y>2)}$
P (Y < 3 | Y > 2)= $\frac{P(Y<3)-P(Y\leq2)}{1-P(Y\leq2)}$
P (Y < 3 | Y > 2)= $\frac{F(3)-F(2)}{1-F(2)}$
P (Y < 3 | Y > 2)= $\frac{(1-e^{-3\lambda})-(1-e^{-2\lambda})}{1-(1-e^{-2\lambda})}$
P (Y < 3 | Y > 2)= $\frac{(1-e^{-3*3})-(1-e^{-2*3})}{1-(1-e^{-2*3})}$
P (Y < 3 | Y > 2)= $\frac{(1-e^{-9})-(1-e^{-6})}{1-(1-e^{-6})}$
P (Y < 3 | Y > 2)= $\frac{1-e^{-9}-1+e^{-6}}{1-1+e^{-6}}$
P (Y < 3 | Y > 2)= $\frac{e^{-6}-e^{-9}}{e^{-6}}$
P (Y < 3 | Y > 2)= 1 - e^{-3}
P (Y < 3 | Y > 2)= 1 - 0,0498
P (Y < 3 | Y > 2)= 0,9502.

Por lo tanto, si transcurren dos minutos sin una visita, la probabilidad de que se dé una visita en el siguiente minuto es 0,9502.

Ejercicio 13.

El tiempo en horas empleado, diariamente, en transporte por los trabajadores de una gran ciudad es una v.a. continua con densidad exponencial con media 0,25.

(a) *Calcular la probabilidad de que un trabajador emplee más de media hora en transporte.*

X: "tiempo (en horas) empleado, diariamente, en transporte por los trabajadores de una gran ciudad".

X ~ Exp ($\lambda = \frac{1}{0{,}25} = 4$).

P (X > 0,5)= 1 - P (X ≤ 0,5)
P (X > 0,5)= 1 - F (0,5)
P (X > 0,5)= 1 - (1 - $e^{-0{,}5\lambda}$)
P (X > 0,5)= 1 - (1 - $e^{-0{,}5*4}$)
P (X > 0,5)= 1 - (1 - e^{-2})
P (X > 0,5)= 1 - 1 + e^{-2}
P (X > 0,5)= e^{-2}
P (X > 0,5)= 0,1353.

(b) *Si los trabajadores emplean, al menos, una hora, ¿cuál es la probabilidad de que no superen la hora y media?*

P (X < 1,5 | X ≥ 1)= $\frac{P(1 \leq X < 1{,}5)}{P(X \geq 1)}$
P (X < 1,5 | X ≥ 1)= $\frac{P(X<1{,}5)-P(X<1)}{1-P(X<1)}$
P (X < 1,5 | X ≥ 1)= $\frac{F(1{,}5)-F(1)}{1-F(1)}$
P (X < 1,5 | X ≥ 1)= $\frac{(1-e^{-1{,}5\lambda})-(1-e^{-1\lambda})}{1-(1-e^{-1\lambda})}$
P (X < 1,5 | X ≥ 1)= $\frac{(1-e^{-1{,}5*4})-(1-e^{-1*4})}{1-(1-e^{-1*4})}$
P (X < 1,5 | X ≥ 1)= $\frac{(1-e^{-6})-(1-e^{-4})}{1-(1-e^{-4})}$
P (X < 1,5 | X ≥ 1)= $\frac{1-e^{-6}-1+e^{-4}}{1-1+e^{-4}}$
P (X < 1,5 | X ≥ 1)= $\frac{e^{-4}-e^{-6}}{e^{-4}}$
P (X < 1,5 | X ≥ 1)= 1 - e^{-2}
P (X < 1,5 | X ≥ 1)= 1 - 0,1353
P (X < 1,5 | X ≥ 1)= 0,8647.

Por lo tanto, si los trabajadores emplean, al menos, una hora, la probabilidad de que superen la hora y media es 0,8647.

(c) *Hallar el tiempo mínimo que emplea el 50% de los trabajadores que más tiempo pierden en transporte.*

F (x)= 0,5
1 - $e^{-\lambda x}$= 0,5
1 - e^{-4x}= 0,5
e^{-4x}= 1 - 0,5
e^{-4x}= 0,5
ln e^{-4x}= ln 0,5
-4x ln e= -0,6931
-4x * 1= -0,6931
-4x= -0,6931
x= $\frac{-0,6931}{-4}$
x= 0,1733.

Ejercicio 14.

Cierto tipo de componente puede ser comprado nuevo o viejo. El 50% de los componentes nuevos duran más de 5 años, pero sólo 30% de los usados duran más de 5 años. ¿Sería posible que las duraciones de los componentes se distribuyan exponencialmente? Explicar.

Para determinar si sería posible que las duraciones de los componentes se distribuyan exponencialmente, se puede analizar si se cumplen las propiedades de la distribución exponencial en relación con los datos proporcionados. La distribución exponencial tiene la propiedad de la falta de memoria, lo que significa que la probabilidad de que un componente dure cierto tiempo no depende de cuánto tiempo ya haya durado. Esto implica que la probabilidad de que un componente sobreviva más allá de cierto tiempo es constante a lo largo del tiempo.

En este caso, la falta de memoria implicaría que la probabilidad de que un componente sobreviva más allá de 5 años debería ser la misma, independientemente de si éste es nuevo o usado. Sin embargo, según los datos proporcionados, el 50% de los componentes nuevos duran más de 5 años, mientras que sólo el 30% de los componentes usados lo hacen. Esto sugiere que las duraciones de los componentes no cumplen con la propiedad de falta de memoria necesaria para que se distribuyan exponencialmente.

Por lo tanto, no es posible que las duraciones de los componentes se distribuyan exponencialmente.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 5: Distribución Conjunta, Suma y Promedios de Variables Aleatorias. Ley de los Grandes Números. Teorema Central del Límite.

Ejercicio 1.

Se analizaron las longitudes y los anchos de la bandeja de plástico rectangular para un CD que está instalada en una computadora personal. Las mediciones se redondearon al milímetro más cercano. Sean X: "la longitud medida" e Y: "el ancho medido". La f.d.p. conjunta de (X , Y) está dada por:

Y | X	***129***	***130***	***131***
15	*0,12*	*0,42*	*0,06*
16	*0,08*	*0,28*	*0,04*

(a) *Determinar la probabilidad de que la cubierta del CD tenga una longitud de 129 mm.*

P (X= 129)= $\sum_{j=15}^{16} P\ (X = 129, Y = j)$
P (X= 129)= P (X= 129, Y= 15) + P (X= 129, Y= 16)
P (X= 129)= 0,12 + 0,08
P (X= 129)= 0,2.

(b) *Determinar la probabilidad de que una cubierta de CD tenga ancho de 16 mm.*

P (Y= 16)= $\sum_{i=129}^{131} P\ (X = i, Y = 16)$
P (Y= 16)= P (X= 129, Y= 16) + P (X= 130, Y= 16) + P (X= 131, Y= 16)
P (Y= 16)= 0,08 + 0,28 + 0,04
P (Y= 16)= 0,4.

(c) *Hallar las distribuciones marginales de X e Y.*

p (x_i)= P (X= x_i)
p (x_i)= $\sum_{j=15}^{16} P\ (x_i, y_j)$, i= 129, 130 , 131.

p (y_j)= P (Y= y_j)
p (y_j)= $\sum_{i=129}^{131} P\ (x_i, y_j)$, j= 15, 16.

(d) *Hallar E (X), E (Y), V (X), V (Y).*

E (X)= $\sum_{i=129}^{131} x_i \ p \ (x_i)$
E (X)= $\sum_{i=129}^{131} x_i \ P \ (X = x_i)$
E (X)= 129 (0,12 + 0,08) + 130 (0,42 + 0,28) + 131 (0,06 + 0,04)
E (X)= 129 * 0,2 + 130 * 0,7 + 131 * 0,1
E (X)= 25,8 + 91 + 13,1
E (X)= 129,9.

E (Y)= $\sum_{j=15}^{16} y_j \ p \ (y_j)$
E (Y)= $\sum_{j=15}^{16} y_j \ P \ (Y = y_j)$
E (Y)= 15 (0,12 + 0,42 + 0,06) + 16 (0,08 + 0,28 + 0,04)
E (Y)= 15 * 0,6 + 16 * 0,4
E (Y)= 9 + 6,4
E (Y)= 15,4.

E (X^2)= $\sum_{i=129}^{131} x_i^2 \ p \ (x_i)$
E (X^2)= $\sum_{i=129}^{131} x_i^2 \ P \ (X = x_i)$
E (X^2)= 129^2 (0,12 + 0,08) + 130^2 (0,42 + 0,28) + 131^2 (0,06 + 0,04)
E (X^2)= 16641 * 0,2 + 16900 * 0,7 + 17161 * 0,1
E (X^2)= 3328,2 + 11830 + 1716,1
E (X^2)= 16874,3.

V (X)= E (X^2) - $[E \ (X)]^2$
V (X)= 16874,3 - $129{,}9^2$
V (X)= 16874,3 - 16874,01
V (X)= 0,29.

E (Y^2)= $\sum_{j=15}^{16} y_i^2 \ p \ (y_i)$
E (Y^2)= $\sum_{j=15}^{16} y_i^2 \ P \ (Y = y_i)$
E (Y^2)= 15^2 (0,12 + 0,42 + 0,06) + 16^2 (0,08 + 0,28 + 0,04)
E (Y^2)= 225 * 0,6 + 256 * 0,4
E (Y^2)= 135 + 102,4
E (Y^2)= 237,4.

V (Y)= E (Y^2) - $[E \ (Y)]^2$
V (Y)= 237,4 - $15{,}4^2$
V (Y)= 237,4 - 237,16
V (Y)= 0,24.

Ejercicio 2.

En el ejercicio anterior, calcular la f.d.p. condicional $p_{y|x}$ (y | x= 130). ¿Son X e Y independientes? Explicar.

$p_{y|x}$ (y | x= 130)= $\frac{P(Y,X=130)}{P(X=130)}$
$p_{y|x}$ (y | x= 130)= $\frac{0,42}{0,7}$
$p_{y|x}$ (y | x= 130)= 0,6.

P (X= 129, Y= 15)= 0,12.
P (X= 129) P (Y= 15)= 0,2 * 0,6= 0,12.

P (X= 129, Y= 16)= 0,08.
P (X= 129) P (Y= 16)= 0,2 * 0,4= 0,08.

P (X= 130, Y= 15)= 0,42.
P (X= 130) P (Y= 15)= 0,7 * 0,6= 0,42.

P (X= 130, Y= 16)= 0,28.
P (X= 130) P (Y= 16)= 0,7 * 0,4= 0,28.

P (X= 131, Y= 15)= 0,06.
P (X= 131) P (Y= 15)= 0,1 * 0,6= 0,06.

P (X= 131, Y= 16)= 0,04.
P (X= 131) P (Y= 16)= 0,1 * 0,4= 0,04.

Por lo tanto, X e Y son independientes, ya que p (x_i, y_j)= p (x_i) p (y_i), ∀ (x_i, y_j).

Ejercicio 3.

Un software puede hacer llamadas a dos subrutinas A y B. En una ejecución elegida al azar, sean X: "número de llamadas hechas a la subrutina A", Y: "número de llamadas hechas a la subrutina B". La f.d.p. conjunta de (X , Y) está dada por:

X | Y	***1***	***2***	***3***
1	*0,15*	*0,1*	*0,1*
2	*0,1*	*0,2*	*0,15*
3	*0,05*	*0,05*	*0,1*

(a) *Determinar las f.d.p. marginales de X e Y.*

p (x_i)= P (X= x_i)
p (x_i)= $\sum_{j=1}^{3} P\ (x_i, y_j)$, i= 1, … , 3.

p (y_j)= P (Y= y_j)
p (y_j)= $\sum_{i=1}^{3} P\ (x_i, y_j)$, j= 1, … , 3.

(b) *Determinar E (X), E (Y), V (X), V (Y).*

E (X)= $\sum_{i=1}^{3} x_i\ p\ (x_i)$
E (X)= $\sum_{i=1}^{3} x_i\ P\ (X = x_i)$
E (X)= 1 (0,15 + 0,1 + 0,1) + 2 (0,1 + 0,2 + 0,15) + 3 (0,05 + 0,05 + 0,1)
E (X)= 1 * 0,35 + 2 * 0,45 + 3 * 0,2
E (X)= 0,35 + 0,9 + 0,6
E (X)= 1,85.

E (Y)= $\sum_{j=1}^{3} y_j\ p\ (y_j)$
E (Y)= $\sum_{j=1}^{3} y_j\ P\ (Y = y_j)$
E (Y)= 1 (0,15 + 0,1 + 0,05) + 2 (0,1 + 0,2 + 0,05) + 3 (0,1 + 0,15 + 0,1)
E (Y)= 1 * 0,3 + 2 * 0,35 + 3 * 0,35
E (Y)= 0,3 + 0,7 + 1,05
E (Y)= 2,05.

E (X^2)= $\sum_{i=1}^{3} x_i^2\ p\ (x_i)$
E (X^2)= $\sum_{i=1}^{3} x_i^2\ P\ (X = x_i)$
E (X^2)= 1^2 (0,15 + 0,1 + 0,1) + 2^2 (0,1 + 0,2 + 0,15) + 3^2 (0,05 + 0,05 + 0,1)
E (X^2)= 1 * 0,35 + 4 * 0,45 + 9 * 0,2
E (X^2)= 0,35 + 1,8 + 1,8
E (X^2)= 3,95.

V (X)= E (X^2) - $[E\ (X)]^2$
V (X)= 3,95 - $1,85^2$
V (X)= 3,95 - 3,4225

V (X)= 0,5275.

E (Y^2)= $\sum_{j=1}^{3} y_j^2\ p\ (y_j)$
E (Y^2)= $\sum_{j=1}^{3} y_j^2\ P\ (Y = y_j)$
E (Y^2)= 1^2 (0,15 + 0,1 + 0,05) + 2^2 (0,1 + 0,2 + 0,05) + 3^2 (0,1 + 0,15 + 0,1)
E (Y^2)= 1 * 0,3 + 4 * 0,35 + 9 * 0,35
E (Y^2)= 0,3 + 1,4 + 3,15
E (Y^2)= 4,85.

V (Y)= E (Y^2) - $[E\ (Y)]^2$
V (Y)= 4,85 - $2{,}05^2$
V (Y)= 4,85 - 4,2025
V (Y)= 0,6475.

(c) *Determinar Cov (X , Y).*

E (XY)= $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i y_i\ p\ (x_i, y_i)$
E (XY)= $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i y_i\ P\ (X = x_i, Y = y_i)$
E (XY)= 1 * 1 * 0,15 + 1 * 2 * 0,1 + 1 * 3 * 0,1 + 2 * 1 * 0,1 + 2 * 2 * 0,2 + 2 * 3 * 0,15 + 3 * 1 *0,05 + 3 * 2 * 0,05 + 3 * 3 * 0,1
E (XY)= 0,15 + 0,2 + 0,3 + 0,2 + 0,8 + 0,9 + 0,15 + 0,3 + 0,9
E (XY)= 3,9.

Cov (X, Y)= E (XY) - E (X) E (Y)
Cov (X, Y)= 3,9 - 1,85 * 2,05
Cov (X, Y)= 3,9 - 3,7925
Cov (X, Y)= 0,1075.

(d) *¿Son X e Y independientes? Explicar.*

Cov (X, Y)$\neq$ 0.

Por lo tanto, X e Y no son independientes.

Ejercicio 4.

Con referencia al ejercicio anterior:

(a) *Determinar E (X + Y).*

E (X + Y)= E (X) + E (Y)
E (X + Y)= 1,85 + 2,05
E (X + Y)= 3,9.

(b) *Determinar V (X + Y) y* σ_{X+Y}.

V (X + Y)= V (X) + V (Y) + 2 Cov (X, Y)
V (X + Y)= 0,5275 + 0,6475 + 2 * 0,1075
V (X + Y)= 0,5275 + 0,6475 + 0,215
V (X + Y)= 1,39.

$\sigma_{X+Y}= \sqrt{V(X+Y)}$
$\sigma_{X+Y}= \sqrt{1{,}39}$
$\sigma_{X+Y}= 1{,}179.$

(c) *Determinar P (X + Y = 4).*

P (X + Y = 4)= P (X= 1, Y= 3) + P (X= 2, Y= 2) + P (X= 3, Y= 1)
P (X + Y = 4)= 0,1 + 0,2 + 0,05
P (X + Y = 4)= 0,35.

(d) *Suponer que cada ejecución de la subrutina A tarda 100 ms y que cada ejecución de la subrutina B tarda 200 ms.*

(i) *Determinar el número medio de milisegundos de todas las llamadas realizadas a las dos subrutinas.*

E (100X + 200Y)= E (100X) + E (200Y)
E (100X + 200Y)= 100 E (X) + 200 E (Y)
E (100X + 200Y)= 100 * 1,85 + 200 * 2,05
E (100X + 200Y)= 185 + 410
E (100X + 200Y)= 595.

(ii) *Encontrar la desviación estándar del número medio de milisegundos de todas las llamadas realizadas a las dos subrutinas.*

V (100X + 200Y)= V (100X) + V (200Y) + 2 Cov (100X, 200Y)
V (100X + 200Y)= 100^2 V (X) + 200^2 V (Y) + 2 * 100 * 200 Cov (X, Y)
V (100X + 200Y)= 10000 * 0,5275 + 40000 * 0,6475 + 2 * 100 * 200 * 0,1075
V (100X + 200Y)= 5275 + 25900 + 4300
V (100X + 200Y)= 35475.

DE (100X + 200Y)= $\sqrt{V(100X + 200Y)}$
DE (100X + 200Y)= $\sqrt{35475}$
DE (100X + 200Y)= 188,348.

Ejercicio 5.

Dos computadoras trabajan en forma independiente. Sean X: "número de fallas semanales de la computadora 1" e Y: "número de fallas semanales de la computadora 2". Las distribuciones están dadas por:

x	***0***	***1***	***2***	***3***
p (x)	*0,25*	*0,25*	*0,3*	*0,2*

y	***0***	***1***	***2***	***3***
p (y)	*0,15*	*0,2*	*0,4*	*0,25*

(a) *Determinar P (X= Y), es decir, ambas computadoras tienen el mismo número de fallas.*

P (X= Y)= P (X= 0, Y= 0) + P (X= 1, Y= 1) + P (X= 2, Y= 2) + P (X= 3, Y= 3)
P (X= Y)= 0,25 * 0,15 + 0,25 * 0,2 + 0,3 * 0,4 + 0,2 * 0,25
P (X= Y)= 0,0375 + 0,05 + 0,12 + 0,05
P (X= Y)= 0,2575.

(b) *Determinar P (X > Y), es decir, el número de fallas de la computadora 1 es mayor que el de la computadora 2.*

P (X > Y)= P (X= 1, Y= 0) + P (X= 2, Y= 0) + P (X= 2, Y= 1) + P (X= 3, Y= 0) + P (X= 3, Y= 1) + P (X= 3, Y= 2)
P (X > Y)= 0,25 * 0,15 + 0,3 * 0,15 + 0,3 * 0,2 + 0,2 * 0,15 + 0,2 * 0,2 + 0,2 * 0,4
P (X > Y)= 0,0375 + 0,045 + 0,06 + 0,03 + 0,04 + 0,08
P (X > Y)= 0,2925.

Ejercicio 6.

El tiempo de vida de cierto componente, en años, tiene una función de densidad f (x)= e^{-x} si x > 0, 0 si x ≤ 0. Están disponibles dos de dichos componentes, cuyos tiempos de vida son independientes. Tan pronto como falle el primer componente, éste se reemplaza por el segundo. Sean las variables aleatorias: X: "tiempo de vida del primer componente" e Y: "tiempo de vida del segundo componente".

(a) *Determinar P (X ≤ 1, Y ≤ 1).*

P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= P (X ≤ 1) P (Y ≤ 1)
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= $\int_0^1 e^{-x}\,dx \int_0^1 e^{-y}\,dy$
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= (-e^{-x}) $|_0^1$ (-e^{-y}) $|_0^1$
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= -(e^{-1} - e^{-0}) [-(e^{-1} - e^{-0})]
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= -($\frac{1}{e}$ - e^0) [-($\frac{1}{e}$ - e^0)]
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= -($\frac{1}{e}$ - 1) [-($\frac{1}{e}$ - 1)]
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= -($\frac{1-e}{e}$) [-($\frac{1-e}{e}$)]
P (X ≤ 1, Y ≤ 1)= $(\frac{1-e}{e})^2$.

(b) *Determinar E (X) , E (Y).*

E (X)= $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}\,dx$
E (X)= $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$
E (X)= $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} \int_0^b xe^{-x}\,dx$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} [x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}dx]|_0^b$ (*)
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} [-xe^{-x} + \int e^{-x}dx]|_0^b$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} [-xe^{-x} + (-e^{-x})]|_0^b$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-xe^{-x} - e^{-x})|_0^b$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0e^{-0} - e^{-0})$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0e^{0} - e^{0})$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0 * 1 - 1)$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (0 - 1)$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-1)$
E (X)= $\lim_{b\to+\infty} -be^{-b} - e^{-b} + 1$
E (X)= 0 - 0 + 1
E (X)= 1.

(*) u= x; du= dx; dv= e^{-x} dx; v= -e^{-x}.

E (Y)= $\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y}\, dy$
E (Y)= $\int_{0}^{+\infty} ye^{-y}\, dx$
E (Y)= $\int_{0}^{+\infty} ye^{-y}\, dy$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} ye^{-y}\, dy$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} [y(-e^{-y}) - \int -e^{-y} dy]|_0^b$ (*)
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} [-ye^{-y} + \int e^{-y} dy]|_0^b$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} [-ye^{-y} + (-e^{-y})]|_0^b$
E (X)= $\lim_{b \to +\infty} (-ye^{-y} - e^{-y})|_0^b$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0e^{-0} - e^{-0})$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0e^{0} - e^{0})$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-0 * 1 - 1)$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (0 - 1)$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} (-be^{-b} - e^{-b}) - (-1)$
E (Y)= $\lim_{b \to +\infty} -be^{-b} - e^{-b} + 1$
E (Y)= 0 - 0 + 1
E (Y)= 1.

(*) u= y; du= dy; dv= e^{-y} dy; v= -e^{-y}.

(c) *Determinar E (X + Y).*

E (X + Y)= E (X) + E (Y)
E (X + Y)= 1 + 1
E (X + Y)= 2.

Ejercicio 7.

Una instalación de luz tiene dos focos A y B. La duración del foco A se puede considerar una v.a. X con distribución normal con media 800 hs. y desviación estándar de 100 hs. La duración del foco B se puede considerar una v.a. Y con distribución normal con media 900 hs. y desviación estándar de 150 hs. Suponer que las duraciones de los focos son independientes.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que el foco B dure más que el foco A? (Sugerencia: Pensar cómo interpretar el evento {Y - X > 0} y qué distribución tiene Y - X).*

X: "duración (en horas) de la instalación de luz con el foco A".
Y: "duración (en horas) de la instalación de luz con el foco B".
W: "diferencia de duración (en horas) de la instalación de luz con el foco B versus con el foco A".

X ~ $\mathcal{N}$ (μ_x= 800, σ_x^2= 100^2= 10000).
Y ~ $\mathcal{N}$ (μ_y= 900, σ_y^2= 150^2= 22500).
W= Y - X ~ $\mathcal{N}$ (μ_w= μ_y - μ_x= 900 - 800= 100, σ_w^2= σ_y^2 + σ_x^2= 22500 + 10000= 32500).

P (W > 0)= 1 - P (W ≤ 0)
P (W > 0)= 1 - P ($\frac{W-\mu_w}{\sqrt{\sigma_w^2}} \leq \frac{0-100}{\sqrt{32500}}$)
P (W > 0)= 1 - P (Z ≤ $\frac{-100}{180{,}278}$)
P (W > 0)= 1 - P (Z ≤ -0,555)
P (W > 0)= 1 - [1 - P (Z < 0,555)]
P (W > 0)= 1 - 1 + P (Z < 0,555)
P (W > 0)= P (Z < 0,555)
P (W > 0)= F (0,555)
P (W > 0)= 0,7088.

Por lo tanto, la probabilidad de que el foco B dure más que el foco A es 0,7088.

(b) *Otra instalación de luz tiene solo un foco. Se pone uno del tipo A y cuando se funde se instala otro de tipo B. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración total de ambos sea mayor que 2000 hs.? (Sugerencia: Pensar cómo interpretar el evento {Y + X > 2000} y qué distribución tiene Y + X).*

V: "suma de la duración (en horas) de la instalación de luz con el foco A y con el foco B".

V= Y + X ~ $\mathcal{N}$ (μ_v= μ_y + μ_x= 900 + 800= 1700, σ_v^2= σ_y^2 + σ_x^2= 22500 + 10000= 32500).

P (V > 2000)= 1 - P (V ≤ 2000)
P (V > 2000)= 1 - P ($\frac{V-\mu_v}{\sqrt{\sigma_v^2}} \leq \frac{2000-1700}{\sqrt{32500}}$)

P (V $>$ 2000)= 1 - P (Z $\leq \frac{300}{180{,}278}$)
P (V $>$ 2000)= 1 - P (Z $\leq$ 1,66)
P (V $>$ 2000)= 1 - F (1,66)
P (V $>$ 2000)= 1 - 0,9515
P (V $>$ 2000)= 0,0485.

Por lo tanto, la probabilidad de que la duración total de ambos sea mayor a 2000 hs. es 0,0485.

Ejercicio 8.

El peso de un caramelo pequeño tiene una distribución normal con media 2,835 gramos y desviación estándar de 0,2835 gramos. Suponer que se colocan 16 caramelos en un paquete y que los pesos de estos son independientes.

(a) *¿Cuáles son la media y la varianza del peso neto del paquete?*

X_i: "peso (en gramos) del i-ésimo caramelo pequeño", i= 1, 2, … , 16.
Y: "suma del peso (en gramos) de n caramelos pequeños".

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ_i= 2,835, σ_i^2= $0{,}2835^2$= 0,08037225), i= 1, 2, … , 16.
Y= $\sum_{i=1}^{16} X_i \sim \mathcal{N}$ (μ_y= nμ= 45,36, σ_y^2= nσ^2= 1,285956).

Por lo tanto, la media y la varianza del peso neto del paquete son 45,36 y 1,285956, respectivamente.

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que el peso neto del paquete sea menor que 45,5 gramos?*

P (Y ≤ 45,5)= P ($\frac{Y-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{45{,}5-16*2{,}835}{\sqrt{16}*0{,}2835}$)
P (Y ≤ 45,5)= P (Z ≤ $\frac{45{,}5-45{,}36}{4*0{,}2835}$)
P (Y ≤ 45,5)= P (Z ≤ $\frac{0{,}14}{1{,}134}$)
P (Y ≤ 45,5)= P (Z ≤ 0,12)
P (Y ≤ 45,5)= F (0,12)
P (Y ≤ 45,5)= 0,5478.

Por lo tanto, la probabilidad de que el peso neto del paquete sea menor que 45,5 gramos es 0,5478.

Ejercicio 9.

El tiempo para que un sistema automatizado localice una pieza en un almacén tiene una distribución normal con media de 45 segundos y desviación estándar de 30 segundos. Suponer que se hacen pedidos independientes por 10 piezas.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 60 segundos? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo total necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 600 segundos*?

X_i: "tiempo (en segundos) para que el sistema automatizado localice la i-ésima pieza en un almacén", i= 1, 2, … , 10.
Y: "tiempo (en segundos) promedio para que el sistema automatizado localice una pieza en un almacén de una muestra de n piezas".
W: "suma del tiempo (en segundos) para que el sistema automatizado localice n piezas".

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ_i= 45, σ_i^2= 30^2= 900), i= 1, 2, … , 10.
Y= $\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{n} \sim \mathcal{N}$ (μ_w= μ= 45, σ_w^2= $\frac{\sigma^2}{n}$= 90).
W= $\sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{N}$ (μ_y= nμ= 450, σ_y^2= nσ^2= 9000).

P (Y > 60)= 1 - P (Y ≤ 60)
P (Y > 60)= 1 - P ($\frac{Y-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{60-45}{\frac{30}{\sqrt{10}}}$)
P (Y > 60)= 1 - P (Z ≤ $\frac{15}{\frac{30}{3,1623}}$)
P (Y > 60)= 1 - P (Z ≤ $\frac{15}{9,4868}$)
P (Y > 60)= 1 - P (Z ≤ 1,58)
P (Y > 60)= 1 - F (1,58)
P (Y > 60)= 1 - 0,9429
P (Y > 60)= 0,0571.

P (W > 600)= 1 - P (W ≤ 600)
P (W > 600)= 1 - P ($\frac{W-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{600-10*45}{\sqrt{10}*30}$)
P (W > 600)= 1 - P (Z ≤ $\frac{600-450}{3,1623*30}$)
P (W > 600)= 1 - P (Z ≤ $\frac{150}{94,868}$)
P (W > 600)= 1 - P (Z ≤ 1,58)
P (W > 600)= 1 - F (1,58)
P (W > 600)= 1 - 0,9429
P (W > 600)= 0,0571.

Por lo tanto, la probabilidad de que el tiempo promedio necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 60 segundos es 0,0571 y la probabilidad de que el tiempo total necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 600 segundos es 0,0571.

(b) *Enunciar la propiedad teórica que se utiliza para resolver el inciso anterior.*

"Si $X_1, \dots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, i= 1, 2, … , n, entonces, $\bar{X}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$".

"Si $X_1, \dots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, i= 1, 2, … , n, entonces, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$".

Ejercicio 10.

El centro de cálculo de una universidad dispone de un servidor para gestionar las páginas web personales de profesores y alumnos. Suponer que la cantidad de memoria ocupada por una de estas páginas puede considerarse como una variable aleatoria con una media de 1,3 MB y una desviación estándar de 0,3. Si el servidor va a gestionar un total de 500 páginas, calcular, aproximadamente, la probabilidad de que la cantidad total de memoria necesaria supere los 660 MB. (Sugerencia: Considerar las v.a. X_i: "cantidad de memoria ocupada por la página i", i= 1, 2, … , 500).

X_i: "cantidad de memoria ocupada por la i-ésima página", i= 1, 2, … , 500.
Y: "suma de la cantidad de memoria ocupada por n páginas".

Y= $\sum_{i=1}^{500} X_i \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (μ_y= nμ= 650, σ_y^2= nσ^2= 45), por TCL.

P (Y $>$ 660)= 1 - P (Y $\leq$ 660)
P (Y $>$ 660)= 1 - P ($\frac{Y-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{660-500*1,3}{\sqrt{500}*0,3}$)
P (Y $>$ 660)≈ 1 - P (Z $\leq \frac{600-650}{22,36*0,3}$) por TCL
P (Y $>$ 660)≈ 1 - P (Z $\leq \frac{10}{6,708}$)
P (Y $>$ 660)≈ 1 - P (Z $\leq$ 1,49)
P (Y $>$ 660)≈ 1 - 0,9319
P (Y $>$ 660)≈ 0,0681.

Ejercicio 11.

El tiempo de vida (en horas) de un componente electrónico viene determinado por la siguiente función de densidad:

f (x)= $\begin{cases} 2ke^{\frac{-x}{5}}, x > 0 \\ 0, c.c. \end{cases}$.

(a) *Calcular k y la función de distribución acumulada asociada.*

P (-∞ $<$ X $<$ +∞)= 1
$\int_{-\infty}^{+\infty} 2ke^{\frac{-x}{5}}\, dx$= 1
$\int_{0}^{+\infty} 2ke^{\frac{-x}{5}}\, dx$= 1
2k $\int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-x}{5}}\, dx$= 1
2k $\lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{\frac{-x}{5}}\, dx$= 1
2k $\lim_{b \to +\infty} -5e^{\frac{-x}{5}}|_0^b$= 1
-10k $\lim_{b \to +\infty} e^{\frac{-b}{5}} - e^{\frac{-0}{5}}$= 1
-10k $\lim_{b \to +\infty} e^{\frac{-b}{5}} - e^{\frac{0}{5}}$= 1
-10k $\lim_{b \to +\infty} e^{\frac{-b}{5}} - e^{0}$= 1
-10k $\lim_{b \to +\infty} e^{\frac{-b}{5}} - 1$= 1
-10k (0 - 1)= 1
-10k (-1)= 1
10k= 1
k= $\frac{1}{10}$.

f (x)= $\begin{cases} \frac{1}{5} e^{\frac{-x}{5}}, x > 0 \\ 0, c.c. \end{cases}$.

X ~ Exp (λ= $\frac{1}{5}$).

(b) *¿Qué porcentaje de componentes de este tipo duran entre 2 y 10 horas? ¿Y más de un día? Determinar la esperanza y la varianza.*

P (2 ≤ X ≤ 10)= P (X ≤ 10) - P (X $<$ 2)
P (2 ≤ X ≤ 10)= F (10) - F (2)
P (2 ≤ X ≤ 10)= (1 - $e^{\frac{-1}{5}*10}$) - (1 - $e^{\frac{-1}{5}*2}$)
P (2 ≤ X ≤ 10)= (1 - e^{-2}) - (1 - $e^{\frac{-2}{5}}$)

P $(2 \leq X \leq 10)$= 1 - e^{-2} - 1 + $e^{\frac{-2}{5}}$
P $(2 \leq X \leq 10)$= e^{-2} + $e^{\frac{-2}{5}}$
P $(2 \leq X \leq 10)$= 0,135 + 0,67
P $(2 \leq X \leq 10)$= 0,805.

P $(X > 24)$= 1 - P $(X \leq 24)$
P $(X > 24)$= 1 - F (24)
P $(X > 24)$= 1 - (1 - $e^{\frac{-1}{5}*24}$)
P $(X > 24)$= 1 - (1 - $e^{\frac{-24}{5}}$)
P $(X > 24)$= 1 - 1 + $e^{\frac{-24}{5}}$
P $(X > 24)$= $e^{\frac{-24}{5}}$
P $(X > 24)$= 0,0082.

Por lo tanto, el porcentaje de componentes de este tipo que duran entre 2 y 10 horas es 0,805 y más de un día 0,0082.

E (X)= $\frac{1}{\lambda}$
E (X)= $\frac{1}{\frac{1}{5}}$
E (X)= 5.

V (X)= $\frac{1}{\lambda^2}$
V (X)= $\frac{1}{(\frac{1}{5})^2}$
V (X)= $\frac{1}{\frac{1}{25}}$
V (X)= 25.

(c) *Si se consideran 40 componentes del tipo anterior, obtener, aproximadamente, la probabilidad de que la vida media de los 40 componentes esté comprendida entre 2 y 10 horas. (Sugerencia: Considerar las v.a. X_i: "duración en horas del componente electrónico i", i= 1, 2, … , 40).*

X_i: "duración (en horas) del i-ésimo componente electrónico", i= 1, 2, … , 40.
$\bar{X}$: "duración (en horas) promedio de un componente electrónico de una muestra de n componentes electrónicos".

$\bar{X} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ ($\mu_{\bar{X}}$= μ= 5, $\sigma^2_{\bar{X}}$= $\frac{\sigma^2}{n}$= $\frac{5}{8}$), por TCL.

P $(2 \leq \bar{X} \leq 10)$= P $(\bar{X} \leq 10)$ - P $(\bar{X} < 2)$
P $(2 \leq \bar{X} \leq 10)$= P $(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{10-5}{\frac{5}{\sqrt{40}}})$ - P $(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{2-5}{\frac{5}{\sqrt{40}}})$
P $(2 \leq \bar{X} \leq 10)$= P $(Z \leq \frac{5}{\frac{5}{6,32}})$ - P $(Z < \frac{-3}{\frac{5}{6,325}})$ por TCL

P $(2 \leq \bar{X} \leq 10) \approx$ P (Z $\leq$ 6,32) - P (Z $<$ -3,79)
P $(2 \leq \bar{X} \leq 10) \approx$ F (6,32) - F (-3,79)
P $(2 \leq \bar{X} \leq 10) \approx$ 1 - 0
P $(2 \leq \bar{X} \leq 10) \approx$ 1.

Ejercicio 12.

La resistencia a la ruptura de un remache tiene un valor medio de 10000 lb/$pulg^2$ *y una desviación estándar de 500 lb/*$pulg^2$*.*

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia promedio a la ruptura de la muestra, para una muestra de 40 remaches, sea entre 9900 y 10200?*

X_i: "resistencia (en lb/pulg) a la ruptura del i-ésimo remache", i= 1, 2, … , 40.
$\bar{X}$: "resistencia (en lb/pulg) a la ruptura promedio de un remache de una muestra de n remaches".

$\bar{X} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ ($\mu_{\bar{X}}$= μ= 10000, $\sigma_{\bar{X}}^2$= $\frac{\sigma^2}{n}$= 6250), por TCL.

P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)= P ($\bar{X} \leq$ 10200) - P ($\bar{X} <$ 9900)
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)= P ($\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{10200-10000}{\frac{500}{\sqrt{40}}}$) - P ($\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{9900-10000}{\frac{500}{\sqrt{40}}}$)
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)≈ P (Z $\leq \frac{200}{\frac{500}{6,325}}$) - P (Z $< \frac{-100}{\frac{500}{6,325}}$) por TCL
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)≈ P (Z $\leq$ 2,53) - P (Z $<$ -1,26)
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)≈ F (2,53) - F (-1,26)
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)≈ 0,9941 - 0,1038
P (9900 $\leq \bar{X} \leq$ 10200)≈ 0,8903.

Por lo tanto, la probabilidad de que la resistencia promedio a la ruptura de la muestra, para una muestra de 40 remaches, sea entre 9900 y 10200 es, aproximadamente, 0,8903.

(b) *Si el tamaño de la muestra hubiera sido 15 en lugar de 40, ¿podría calcularse la probabilidad pedida en el inciso (a) a partir de la información dada?*

Si el tamaño de la muestra hubiera sido 15 en lugar de 40, no podría calcularse la probabilidad pedida en el inciso (a) a partir de la información, porque n $<$ 30 y, por lo tanto, no es posible aplicar el Teorema Central del Límite.

Ejercicio 13.

Si el 3% de las válvulas manufacturadas por una compañía son defectuosas, hallar la probabilidad de que en una muestra de 100 válvulas: (i) 0, (ii) más de 5, (iii) entre 1 y 3, sean defectuosas.

(a) *Usar la aproximación normal a la binomial.*

X: "número de válvulas manufacturadas defectuosas".

X ~ B (n= 100, p= 0,03).

P (X= 0)≈ P (X= 0 + 0,5) corrección por continuidad
P (X= 0)≈ P (X= 0,5)
P (X= 0)≈ P ($\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$= $\frac{0,5-100*0,03}{\sqrt{100*0,03(1-0,03)}}$)
P (X= 0)≈ P (Z= $\frac{0,5-3}{\sqrt{100*0,03*0,97}}$) por TCL (*)
P (X= 0)≈ P (Z= $\frac{-2,5}{\sqrt{2,91}}$)
P (X= 0)≈ P (Z= $\frac{-2,5}{1,706}$)
P (X= 0)≈ P (Z= -1,47)
P (X= 0)≈ 0.

P (X > 5)= 1 - P (X ≤ 5)
P (X > 5)≈ 1 - P (X ≤ 5 + 0,5) corrección por continuidad
P (X > 5)≈ 1 - P (X ≤ 5,5)
P (X > 5)≈ 1 - P ($\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{5,5-100*0,03}{\sqrt{100*0,03(1-0,03)}}$)
P (X > 5)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{5,5-100*0,03}{\sqrt{100*0,03*(1-0,03)}}$) por TCL (*)
P (X > 5)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{5,5-3}{\sqrt{100*0,03*0,97}}$)
P (X > 5)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{2,5}{\sqrt{2,91}}$)
P (X > 5)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{2,5}{1,706}$)
P (X > 5)≈ 1 - P (Z ≤ 1,47)
P (X > 5)≈ 1 - F (1,47)
P (X > 5)≈ 1 - 0,9292
P (X > 5)≈ 0,0708.

P (1 ≤ X ≤ 3)= P (X ≤ 3) - P (X < 1)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P (X ≤ 3 + 0,5) - P (X < 1 + 0,5)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P (X ≤ 3,5) - P (X < 1,5) corrección por continuidad
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P ($\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{3,5-100*0,03}{\sqrt{100*0,03(1-0,03)}}$) - P ($\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{1,5-100*0,03}{\sqrt{100*0,03(1-0,03)}}$)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P (Z ≤ $\frac{3,5-3}{\sqrt{100*0,03*0,97}}$) - P (Z ≤ $\frac{1,5-3}{\sqrt{100*0,03*0,97}}$) por TCL (*)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P (Z ≤ $\frac{0,5}{\sqrt{2,91}}$) - P (Z ≤ $\frac{-1,5}{\sqrt{2,91}}$)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P (Z ≤ $\frac{0,5}{1,706}$ - P (Z ≤ $\frac{-1,5}{1,706}$)

P (1 ≤ X ≤ 3)≈ P (Z ≤ 0,29) - P (Z ≤ -0,88)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ F (0,29) - F (-0,88)
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ 0,6141 - 0,1894
P (1 ≤ X ≤ 3)≈ 0,4247.

(*) np= 3 $<$ 10 y n (1 - p)= 97 $>$ 10 (no es tan efectivo aplicar esta aproximación).

(b) *Usar la distribución binomial y hacer el cálculo con la ayuda de un software de matemática (o una calculadora).*

P (X= 0)= $\binom{100}{0}$ $0{,}03^0$ $(1-0{,}03)^{100-0}$
P (X= 0)= 1 * 1 * $0{,}97^{100}$
P (X= 0)= 1 * 1 * 0,0476
P (X= 0)= 0,0476.

P (X $>$ 5)= 1 - P (X ≤ 5)
P (X $>$ 5)= 1 - 0,9192
P (X $>$ 5)= 0,0808.

P (1 ≤ X ≤ 3)= P (X ≤ 3) - P (X $<$ 1)
P (1 ≤ X ≤ 3)= 0,6472 - 0,0476
P (1 ≤ X ≤ 3)= 0,5996.

Ejercicio 14.

Una máquina fabrica piezas cuyas longitudes se distribuyen según una normal de media 32 y desviación estándar 0,3 milímetros, considerándose aceptables aquellas cuya medida se encuentra dentro del intervalo (31,1; 32,6).

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que una pieza fabricada por esta máquina sea defectuosa?*

X: "longitud (en milímetros) de una pieza fabricada por la máquina".

X ~ $\mathcal{N}$ (μ= 32, σ^2= $0,3^2$= 0,09).

P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - P (31,1 ≤ X ≤ 32,6)
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - (P (X ≤ 32,6) - P (X < 31,1))
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - [P ($\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{32,6-32}{0,3}$) - P ($\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{31,1-32}{0,3}$)]
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - [P (Z ≤ $\frac{0,6}{0,3}$) - P (Z < $\frac{-0,9}{0,3}$)]
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - [P (Z ≤ 2) - P (Z < -3)]
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1- [F (2) - F (-3)]
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - (0,9772 - 0,0013)
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 1 - 0,9759
P (X < 31,1) + P (X > 32,6)= 0,0241.

Por lo tanto, la probabilidad de que una pieza fabricada por esta máquina sea defectuosa es 0,0241.

(b) *Calcular la probabilidad de que un lote de 500 piezas contenga más de 15 defectuosas. (Sugerencia: Considerar la v.a. Y: "número de piezas defectuosas en el lote" y pensar qué distribución tiene Y).*

Y: "número de piezas defectuosas".

Y ~ B (n= 500, p= 0,0241).

P (Y > 15)= 1 - P (Y ≤ 15)
P (Y > 15)≈ 1 - P (Y ≤ 15 + 0,5) corrección por continuidad
P (Y > 15)≈ 1 - P (Y ≤ 15,5)
P (Y > 15)≈ 1 - P ($\frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{15,5-500*0,0241}{\sqrt{500*0,0241(1-0,0241)}}$)
P (Y > 15)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{15,5-12,05}{\sqrt{500*0,0241*0,9759}}$) por TCL (*)
P (Y > 15)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{3,45}{\sqrt{11,759595}}$)
P (Y > 15)≈ 1 - P (Z ≤ $\frac{3,45}{3,429}$)
P (Y > 15)≈ 1 - P (Z ≤ 1,01)
P (Y > 15)≈ 1 - F (1,01)

$P(Y > 15) \approx 1 - 0{,}8438$
$P(Y > 15) \approx 0{,}1562$.

(*) $np = 12{,}05 > 10$ y $n(1-p) = 487{,}95 > 10$ (es efectivo aplicar esta aproximación).

Trabajo Práctico N° 6: Estimación Puntual.

Ejercicio 1.

Suponer que se tiene una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población X, que E (X)= μ *y V (x)=* σ^2*. Sean*

$\bar{X}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ *y* $\bar{X}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

dos estimadores de μ*. ¿Cuál es el mejor estimador de* μ*? Explicar la elección.*

E ($\bar{X}_1$)= E ($\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i$)
E ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{n-1}$ E ($\sum_{i=1}^{n-1} X_i$)
E ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i)$ por (*)
E ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \mu$
E ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{n-1}$ (n - 1) μ
E ($\bar{X}_1$)= μ.

V ($\bar{X}_1$)= V ($\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i$)
V ($\bar{X}_1$)= $(\frac{1}{n-1})^2$ V ($\sum_{i=1}^{n-1} X_i$)
V ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} V(X_i)$ por (**)
V ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^2$
V ($\bar{X}_1$)= $\frac{1}{(n-1)^2}$ (n - 1) σ^2
V ($\bar{X}_1$)= $\frac{\sigma^2}{n-1}$.

ECM ($\bar{X}_1$)= $\{E[\bar{X}_1 - E(\bar{X}_1)]\}^2$+ V ($\bar{X}_1$)
ECM ($\bar{X}_1$)= $[E(\bar{X}_1 - \mu)]^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$
ECM ($\bar{X}_1$)= $[E(\bar{X}_1) - E(\mu)]^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$
ECM ($\bar{X}_1$)= $(\mu - \mu)^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$
ECM ($\bar{X}_1$)= $0^2 + \frac{\sigma^2}{n-1}$
ECM ($\bar{X}_1$)= $0 + \frac{\sigma^2}{n-1}$
ECM ($\bar{X}_1$)= $\frac{\sigma^2}{n-1}$.

E ($\bar{X}_2$)= E ($\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$)
E ($\bar{X}_2$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n} X_i$)
E ($\bar{X}_2$)= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ por (*)

E ($\bar{X}_2$)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu$
E ($\bar{X}_2$)= $\frac{1}{n}$ nμ
E ($\bar{X}_2$)= μ.

V ($\bar{X}_2$)= V ($\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$)
V ($\bar{X}_2$)= $(\frac{1}{n})^2$ V ($\sum_{i=1}^{n}X_i$)
V ($\bar{X}_2$)= $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)$ por (**)
V ($\bar{X}_2$)= $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2$
V ($\bar{X}_2$)= $\frac{1}{n^2}$ nσ^2
V ($\bar{X}_2$)= $\frac{\sigma^2}{n}$.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

ECM ($\bar{X}_2$)= $\{E[\bar{X}_2 - E(\bar{X}_2)]\}^2$+ V ($\bar{X}_2$)
ECM ($\bar{X}_2$)= $[E(\bar{X}_2 - \mu)]^2$ + $\frac{\sigma^2}{n}$
ECM ($\bar{X}_2$)= $[E(\bar{X}_2) - E(\mu)]^2$ + $\frac{\sigma^2}{n}$
ECM ($\bar{X}_2$)= $(\mu - \mu)^2$ + $\frac{\sigma^2}{n}$
ECM ($\bar{X}_2$)= 0^2 + $\frac{\sigma^2}{n}$
ECM ($\bar{X}_2$)= 0 + $\frac{\sigma^2}{n}$
ECM ($\bar{X}_2$)= $\frac{\sigma^2}{n-1}$.

ECM ($\bar{X}_1$)= $\frac{\sigma^2}{n-1} <$ ECM ($\bar{X}_2$)= $\frac{\sigma^2}{n}$.

Por lo tanto, el mejor estimador de μ es $\bar{X}_2$, ya que tiene menor error cuadrático medio.

Ejercicio 2.

Sea X_1, X_2, ... , X_7 una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2. Considerar los siguientes estimadores de μ:

$\widehat{\Theta}_1 = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_7}{7}$; $\widehat{\Theta}_2 = \frac{2X_1-X_6+X_4}{2}$; $\widehat{\Theta}_3 = \frac{2X_1-X_7+X_3}{3}$.

(a) *¿Alguno de estos estimadores es insesgado?*

E ($\widehat{\Theta}_1$)= E ($\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7}{7}$)
E ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{7}$ E (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7)
E ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{7}$ [E (X_1) + E (X_2) + E (X_3) + E (X_4) + E (X_5) + E (X_6) + E (X_7)] por (*)
E ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{7}$ 7 E (X_1)
E ($\widehat{\Theta}_1$)= μ.

E ($\widehat{\Theta}_2$)= E ($\frac{2X_1-X_6+X_4}{2}$)
E ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{1}{2}$ E (2X_1 - X_6 + X_4)
E ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{1}{2}$ [E (2X_1) - E (X_6) + E (X_4)] por (*)
E ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{1}{2}$ [2 E (X_1) - μ + μ]
E ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{1}{2}$ (2μ - μ + μ)
E ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{1}{2}$ 2μ
E ($\widehat{\Theta}_2$)= μ.

E ($\widehat{\Theta}_3$)= E ($\frac{2X_1-X_7+X_3}{3}$)
E ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{3}$ E (2X_1 - X_7 + X_3)
E ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{3}$ [E (2X_1) - E (X_7) + E (X_3)] por (*)
E ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{3}$ [2 E (X_1) - μ + μ]
E ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{3}$ (2μ - μ + μ)
E ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{2}{3}$ μ.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.

Por lo tanto, $\widehat{\Theta}_1$ y $\widehat{\Theta}_2$ son insesgados.

(b) *Hallar el error cuadrático medio de los estimadores.*

V ($\widehat{\Theta}_1$)= V ($\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7}{7}$)
V ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{49}$ V (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7)

V ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{49}$ [V (X_1) + V (X_2) + V (X_3) + V (X_4) + V (X_5) + V (X_6) + V (X_7)] por (**)
V ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{49}$ 7 V (X_1)
V ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{7}$ σ^2.

V ($\widehat{\Theta}_2$)= V ($\frac{2X_1-X_6+X_4}{2}$)
V ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{1}{4}$ V (2X_1 - X_6 + X_4)
V ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{1}{4}$ [V (2X_1) + V (X_6) + V (X_4)] por (**)
V ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{1}{4}$ [4 V (X_1) + σ^2 + σ^2]
V ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{1}{4}$ (4σ^2 + σ^2 + σ^2)
V ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{1}{4}$ 6σ^2
V ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{3}{2}$ σ^2.

V ($\widehat{\Theta}_3$)= V ($\frac{2X_1-X_7+X_3}{3}$)
V ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{9}$ V (2X_1 + X_7 + X_3)
V ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{9}$ [V (2X_1) + V (X_7) + V (X_3)] por (**)
V ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{9}$ [4 V (X_1) + σ^2 + σ^2]
V ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{9}$ (4σ^2 + σ^2 + σ^2)
V ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{9}$ 6σ^2
V ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{2}{3}$ σ^2.

(**) propiedad de la varianza e independencia.

ECM ($\widehat{\Theta}_1$)= $\{E[\widehat{\Theta}_1 - E(\widehat{\Theta}_1)]\}^2$+ V ($\widehat{\Theta}_1$)
ECM ($\widehat{\Theta}_1$)= $[E(\widehat{\Theta}_1 - \mu)]^2$ + $\frac{1}{7}$ σ^2
ECM ($\widehat{\Theta}_1$)= $[E(\widehat{\Theta}_1) - E(\mu)]^2$ + $\frac{1}{7}$ σ^2
ECM ($\widehat{\Theta}_1$)= $(\mu - \mu)^2$ + $\frac{1}{7}$ σ^2
ECM ($\widehat{\Theta}_1$)= 0^2 + $\frac{1}{7}$ σ^2
ECM ($\widehat{\Theta}_1$)= 0 + $\frac{1}{7}$ σ^2
ECM ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{7}$ σ^2.

ECM ($\widehat{\Theta}_2$)= $\{E[\widehat{\Theta}_2 - E(\widehat{\Theta}_2)]\}^2$+ V ($\widehat{\Theta}_2$)
ECM ($\widehat{\Theta}_2$)= $[E(\widehat{\Theta}_2 - \mu)]^2$ + $\frac{3}{2}$ σ^2
ECM ($\widehat{\Theta}_2$)= $[E(\widehat{\Theta}_2) - E(\mu)]^2$ + $\frac{3}{2}$ σ^2
ECM ($\widehat{\Theta}_2$)= $(\mu - \mu)^2$ + $\frac{3}{2}$ σ^2
ECM ($\widehat{\Theta}_2$)= 0^2 + $\frac{3}{2}$ σ^2
ECM ($\widehat{\Theta}_2$)= 0 + $\frac{3}{2}$ σ^2

ECM ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{3}{2}\,\sigma^2$.

ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $\{E[\widehat{\Theta}_3 - E(\widehat{\Theta}_3)]\}^2$+ V ($\widehat{\Theta}_3$)
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $[E(\widehat{\Theta}_3 - \mu)]^2 + \frac{2}{3}\,\sigma^2$
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $[E(\widehat{\Theta}_3) - E(\mu)]^2 + \frac{2}{3}\,\sigma^2$
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $(\frac{2}{3}\mu - \mu)^2 + \frac{2}{3}\,\sigma^2$
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $(\frac{-1}{3}\,\mu)^2 + \frac{2}{3}\,\sigma^2$
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{9}\,\mu + \frac{2}{3}\,\sigma^2$
ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{9}\,\mu + \frac{2}{3}\,\sigma^2$.

(c) *¿Cuál estimador es el "mejor"? ¿En qué sentido es mejor?*

ECM ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{7}\,\sigma^2 <$ ECM ($\widehat{\Theta}_2$)= $\frac{3}{2}\,\sigma^2$.
ECM ($\widehat{\Theta}_1$)= $\frac{1}{7}\,\sigma^2 <$ ECM ($\widehat{\Theta}_3$)= $\frac{1}{9}\,\mu + \frac{2}{3}\,\sigma^2$.

El "mejor" estimador es $\widehat{\Theta}_1$, ya que tiene menor error cuadrático medio.

Ejercicio 3.

Sea X_1, X_2, ... , X_n una muestra aleatoria de tamaño n.

(a) *Demostrar que $\bar{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2.*

Media poblacional de X_i, i= 1, 2, … , n: μ.
Varianza poblacional de X_i, i= 1, 2, … , n: σ^2.

E ($\bar{X}^2$)= V ($\bar{X}$) + $[E(\bar{X})]^2$
E ($\bar{X}^2$)= V ($\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$) + $[E(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})]^2$
E ($\bar{X}^2$)= $\frac{1}{n^2}$ V ($\sum_{i=1}^{n} X_i$) + $[\frac{1}{n} E(\sum_{i=1}^{n} X_i)]^2$
E ($\bar{X}^2$)= $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ + $[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)]^2$ por (*)
E ($\bar{X}^2$)= $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2$+ $[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu]^2$
E ($\bar{X}^2$)= $\frac{1}{n^2}$ n σ^2 + $(\frac{1}{n} n\mu)^2$
E ($\bar{X}^2$)= $\frac{\sigma^2}{n}$ + μ^2.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.

Por lo tanto, $\bar{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2.

(b) *Determinar la magnitud del sesgo de este estimador.*

Sesgo ($\bar{X}^2$)= E ($\bar{X}^2$) - μ^2
Sesgo ($\bar{X}^2$)= $\frac{\sigma^2}{n}$ + μ^2 - μ^2
Sesgo ($\bar{X}^2$)= $\frac{\sigma^2}{n}$.

(c) *¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño de n de la muestra?*

$\lim_{n \to +\infty} Sesgo\ (\bar{X}^2) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sigma^2}{n}$
$\lim_{n \to +\infty} Sesgo\ (\bar{X}^2) = 0.$

A medida que aumenta que aumenta el tamaño de n de la muestra, el sesgo tiende a cero.

Ejercicio 4.

El número diario de desconexiones accidentales de un servidor sigue una distribución de Poisson. En cinco días, se observan: 2, 5, 3, 3, 7 desconexiones accidentales.

(a) *Obtener el estimador de máxima verosimilitud de λ. ¿El estimador es insesgado? ¿Es consistente?*

L (λ)= $\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$
L (λ)= $\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$.

ln L (λ)= ln $(\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!})$
ln L (λ)= ln $(e^{-n\lambda})$ + ln $(\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i})$ - ln $(\prod_{i=1}^{n} x_i!)$
ln L (λ)= -nλ ln e + $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ln λ - $\sum_{i=1}^{n}$ ln $(x_i!)$
ln L (λ)= -nλ * 1 + $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ln λ - $\sum_{i=1}^{n}$ ln $(x_i!)$
ln L (λ)= -nλ + $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ln λ - $\sum_{i=1}^{n}$ ln $(x_i!)$.

$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda}$= 0
-n + $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}$= 0
$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}$= n
$\hat{\lambda}_{EMV}$= $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

E $(\hat{\lambda}_{EMV})$= E $(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n})$
E $(\hat{\lambda}_{EMV})$= $\frac{1}{n}$ E $(\sum_{i=1}^{n} x_i)$
E $(\hat{\lambda}_{EMV})$= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x_i)$ por (*)
E $(\hat{\lambda}_{EMV})$= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda$
E $(\hat{\lambda}_{EMV})$= $\frac{1}{n}$ nλ
E $(\hat{\lambda}_{EMV})$= λ.

V $(\hat{\lambda}_{EMV})$= V $(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n})$
V $(\hat{\lambda}_{EMV})$= $\frac{1}{n^2}$ V $(\sum_{i=1}^{n} x_i)$
V $(\hat{\lambda}_{EMV})$= $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(x_i)$ por (**)
V $(\hat{\lambda}_{EMV})$= $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \lambda$
V $(\hat{\lambda}_{EMV})$= $\frac{1}{n^2}$ nλ
V $(\hat{\lambda}_{EMV})$= $\frac{\lambda}{n}$.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

$\lim_{n \to +\infty} E(\hat{\lambda}_{EMV})= \lambda$.

$\lim_{n \to +\infty} V(\hat{\lambda}_{EMV})= 0$.

Por lo tanto, el estimador es insesgado (ya que E $(\hat{\lambda}_{EMV})= \lambda$) y consistente (ya que $\lim_{n \to +\infty} E(\hat{\lambda}_{EMV})= \lambda$ y $\lim_{n \to +\infty} V(\hat{\lambda}_{EMV})= 0$).

(b) *Obtener la estimación de λ a partir de la muestra dada.*

$\hat{\lambda}_{EMV}= \frac{2+5+3+3+7}{5}$
$\hat{\lambda}_{EMV}= \frac{20}{5}$
$\hat{\lambda}_{EMV}= 4$.

(c) *Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que ocurrirán 3 o más desconexiones accidentales y encontrar la estimación de dicha probabilidad a partir de los datos.*

P (X ≥ 3)= 1 - P (X < 3)
P (X ≥ 3)= 1 - [P (X= 0) + P (X= 1) + P (X= 2)]
P (X ≥ 3)= 1 - $(\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!})$
P (X ≥ 3)= 1 - $(\frac{e^{-\lambda} * 1}{1} + \frac{e^{-\lambda}\lambda}{1} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2})$
P (X ≥ 3)= 1 - $(e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\lambda + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2})$
P (X ≥ 3)= 1 - $e^{-\lambda}$ $(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2})$.

$\hat{P}_{EMV}$ (X ≥ 3 | $\hat{\lambda}_{EMV}$)= 1 - $e^{-\hat{\lambda}_{EMV}}$ $(1 + \hat{\lambda}_{EMV} + \frac{\hat{\lambda}_{EMV}^2}{2})$ por propiedad de invarianza
$\hat{P}_{EMV}$ (X ≥ 3 | $\hat{\lambda}_{EMV}$)= 1 - e^{-4} $(1 + 4 + \frac{4^2}{2})$
$\hat{P}_{EMV}$ (X ≥ 3 | $\hat{\lambda}_{EMV}$)= 1 - e^{-4} $(1 + 4 + \frac{16}{2})$
$\hat{P}_{EMV}$ (X ≥ 3 | $\hat{\lambda}_{EMV}$)= 1 - e^{-4} (1 + 4 + 8)
$\hat{P}_{EMV}$ (X ≥ 3 | $\hat{\lambda}_{EMV}$)= 1 - $13e^{-4}$
$\hat{P}_{EMV}$ (X ≥ 3 | $\hat{\lambda}_{EMV}$)= 1 - 13 * 0,018
$\hat{P}_{EMV}$ (X ≥ 3 | $\hat{\lambda}_{EMV}$)= 1 - 0,238
$\hat{P}_{EMV}$ (X ≥ 3 | $\hat{\lambda}_{EMV}$)= 0,762.

Ejercicio 5.

(a) *Sea* X_1, X_2, *...* , X_n *una muestra aleatoria de una v.a. B (1, p). Hallar un estimador de máxima verosimilitud (EMV) de p.*

L (p)= $\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$
L (p)= $p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

ln L (p)= ln $[p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}]$
ln L (p)= ln $(p^{\sum_{i=1}^{n} x_i})$ + ln $(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$
ln L (p)= $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ln p + (n - $\sum_{i=1}^{n} x_i$) ln (1 - p).

$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p}= 0$
$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} + \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$ (-1)= 0
$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}= 0$
$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}= \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$
$\frac{1-p}{p}= \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$
$\frac{1}{p}$ - 1= $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ - 1
$\frac{1}{p}= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$
$\hat{p}_{EMV}= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

(b) *Se selecciona una muestra aleatoria de n chips fabricados por cierta compañía. Sea X= el número entre los n que tienen defectos y p= P (el chip tiene defecto). Se supone que sólo se observa X (el número de chips con defectos).*

(i) *Si n= 100 y x= 5, ¿cuál es la estimación de p?*

$\hat{p}_{EMV}= \frac{5}{100}$
$\hat{p}_{EMV}= 0{,}05$.

Por lo tanto, si n= 100 y x= 5, la estimación de p es 0,05.

(ii) *Si n= 100 y x= 5, ¿cuál es el EMV de la probabilidad* $(1-p)^6$, *de que ninguno de los siguientes 6 chips que se examinen tenga defectos?*

$\hat{P}_{EMV}= (1-\hat{p}_{EMV})^6$ por propiedad de invarianza
$\hat{P}_{EMV}= (1-0{,}05)^6$
$\hat{P}_{EMV}= 0{,}95^6$

$\hat{P}_{EMV}$= 0,735.

Por lo tanto, si n= 100 y x= 5, el EMV de la probabilidad $(1-p)^6$ es 0,735.

Ejercicio 6.

Se denota por X la proporción de tiempo asignado que un estudiante seleccionado al azar emplea trabajando en cierta prueba de actitud, y se supone que la f.d.p. de X es:

f (x)= $\begin{cases} (2\theta+1)x^{2\theta}, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, c.c. \end{cases}$*, donde* $\theta > \frac{-1}{2}$.

Una muestra aleatoria de diez estudiantes produce la siguiente información: 0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94, 0.77.

(a) *Utilizar el método de los momentos para obtener un estimador de* θ *y, luego, calcular la estimación para esta información.*

$\mu= \int_{-\infty}^{+\infty} x(2\theta+1)x^{2\theta}\, dx$
$\mu= \int_0^1 (2\theta+1)x^{2\theta+1}\, dx$
$\mu= (2\theta + 1) \int_0^1 x^{2\theta+1}\, dx$
$\mu= (2\theta + 1) \frac{x^{2\theta+2}}{2\theta+2} |_0^1$
$\mu= \frac{2\theta+1}{2\theta+2} (1^{2\theta+2} - 0^{2\theta+2})$
$\mu= \frac{2\theta+1}{2\theta+2} (1 - 0)$
$\mu= \frac{2\theta+1}{2\theta+2} * 1$
$\mu= \frac{2\theta+1}{2\theta+2}$.

$M_1= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.

$\mu= M_1$
$\frac{2\theta+1}{2\theta+2}= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$
$2\theta + 1= (2\theta + 2) \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$
$2\theta + 1= 2\theta \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} + 2 \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$
$2\theta - 2\theta \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}= 2 \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - 1$
$\theta (2 - 2 \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n})= \frac{2\sum_{i=1}^n X_i - n}{n}$
$\frac{2n-2\sum_{i=1}^n X_i}{n} \theta= \frac{2\sum_{i=1}^n X_i - n}{n}$
$\theta= \frac{\frac{2\sum_{i=1}^n X_i - n}{n}}{\frac{2n-2\sum_{i=1}^n X_i}{n}}$
$\hat{\theta}_{MM}= \frac{2\sum_{i=1}^n X_i - n}{2(n-\sum_{i=1}^n X_i)}$.

$\hat{\theta}_{MM}= \frac{2*8-10}{2(10-8)}$
$\hat{\theta}_{MM}= \frac{16-10}{2*2}$

$\hat{\theta}_{MM}= \frac{6}{4}$
$\hat{\theta}_{MM}= \frac{3}{2}$
$\hat{\theta}_{MM}=$ 1,5.

(b) *Obtener el EMV de θ y, luego, calcular la estimación para la información dada.*

L $(\theta)= \prod_{i=1}^{n}(2\theta + 1)\, x_i^{2\theta}$
L $(\theta)= (2\theta + 1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{2\theta}$.

ln L (θ)= ln $[(2\theta + 1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{2\theta}]$
ln L (θ)= ln $(2\theta + 1)^n$ + ln $(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2\theta})$
ln L (θ)= n ln $(2\theta + 1)$ + $\sum_{i=1}^{n} \ln x_i^{2\theta}$
ln L (θ)= n ln $(2\theta + 1)$ + $2\theta \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$.

$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}= 0$
$\frac{n}{2\theta+1} * 2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i= 0$
$\frac{2n}{2\theta+1}= -2 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$
$2\theta + 1= \frac{2n}{-2\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$
$2\theta + 1= \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$
$2\theta= \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} - 1$
$\hat{\theta}_{EMV}= \frac{-n}{2\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} - \frac{1}{2}$.

$\hat{\theta}_{EMV}= \frac{-10}{2(-2,43)} - \frac{1}{2}$
$\hat{\theta}_{EMV}= \frac{-10}{-4,86} - \frac{1}{2}$
$\hat{\theta}_{EMV}= 2,06 - \frac{1}{2}$
$\hat{\theta}_{EMV}=$ 1,56.

Ejercicio 7.

Sea X_1, X_2, ... , X_n una muestra aleatoria de una v.a. $\mathcal{N}$ (μ, σ^2).

(a) *Hallar los estimadores de μ y σ^2 por el método de los momentos. ¿Los estimadores son insesgados?*

$\mu_1= M_1$
$\hat{\mu}_{EMM}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

$\sigma^2 + \mu^2= M_2$
$\sigma^2 + \mu^2= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$
$\sigma^2= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \hat{\mu}_{EMM}^2$
$\hat{\sigma}_{EMM}^2= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - (\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})^2$.

E $(\hat{\mu}_{EMM})$= E $(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})$
E $(\hat{\mu}_{EMM})$= $\frac{1}{n}$ E $(\sum_{i=1}^{n} X_i)$
E $(\hat{\mu}_{EMM})$= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ por (*)
E $(\hat{\mu}_{EMM})$= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu$
E $(\hat{\mu}_{EMM})$= $\frac{1}{n}$ nμ
E $(\hat{\mu}_{EMM})$= μ.

E $(\hat{\sigma}_{EMM}^2)$= E $[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - (\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})^2]$
E $(\hat{\sigma}_{EMM}^2)$= E $(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n})$ - E $[(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})^2]$ por (*)
E $(\hat{\sigma}_{EMM}^2)$= $\frac{1}{n}$ E $(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$ - {V $(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})$ + $[E(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})]^2$}
E $(\hat{\sigma}_{EMM}^2)$= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)$ - [$\frac{1}{n^2}$ V $(\sum_{i=1}^{n} X_i)$ + μ^2] por (*)
E $(\hat{\sigma}_{EMM}^2)$= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\sigma^2 + \mu^2)$ - [$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ + μ^2] por (**)
E $(\hat{\sigma}_{EMM}^2)$= $\frac{1}{n}$ n $(\sigma^2 + \mu^2)$ - ($\frac{1}{n^2}$ nσ^2 + μ^2)
E $(\hat{\sigma}_{EMM}^2)$= $\sigma^2 + \mu^2 - (\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)$
E $(\hat{\sigma}_{EMM}^2)$= $\sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2$
E $(\hat{\sigma}_{EMM}^2)$= $\frac{n-1}{n} \sigma^2$.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

Por lo tanto, el estimador EMM de μ es insesgado y el estimador EMM de σ^2 no es insesgado.

(b) *Hallar los estimadores de μ y σ^2 por el método de verosimilitud. ¿Los estimadores son insesgados?*

L (μ, σ^2)= $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
L (μ, σ^2)= $(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})^n\ e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{-(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
L (μ, σ^2)= $\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}\ e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$
L (μ, σ^2)= $(\sqrt{2\pi\sigma^2})^{-n}\ e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$
L (μ, σ^2)= $[(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}]^{-n}\ e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$
L (μ, σ^2)= $(2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}}\ e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$.

ln L (μ, σ^2)= ln $[(2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}}\ e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}]$
ln L (μ, σ^2)= ln $(2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}}$ + ln $[e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}]$
ln L (μ, σ^2)= $\frac{-n}{2}$ ln $2\pi\sigma^2$ + $[\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2]$ ln e
ln L (μ, σ^2)= $\frac{-n}{2}$ ln $2\pi\sigma^2$ - $\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ * 1
ln L (μ, σ^2)= $\frac{-n}{2}$ ln $2\pi\sigma^2$ - $\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}$= 0
$\frac{-2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$ (-1)= 0
$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$= 0
$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$= 0 * σ^2
$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$= 0
$\sum_{i=1}^{n}X_i$ - $\sum_{i=1}^{n}\mu$= 0
$\sum_{i=1}^{n}X_i$ - nμ= 0
nμ= $\sum_{i=1}^{n}X_i$
$\hat{\mu}_{EMV}$= $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$.

$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}$= 0
$\frac{-n}{2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}2\pi$ - $[\frac{-1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2]$= 0
$\frac{-n}{2\sigma^2}$ + $\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$= 0
$\frac{n}{2\sigma^2}$= $\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$
$\frac{2\sigma^4}{2\sigma^2}$= $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$
$\hat{\sigma}^2_{EMV}$= $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu}_{EMV})^2}{n}$.

E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= E $(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n})$
E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ E $(\sum_{i=1}^{n}X_i)$
E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$ por (*)

E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu$
E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= $\frac{1}{n}$ nμ
E ($\hat{\mu}_{EMV}$)= μ.

E ($\hat{\sigma}_{EMV}^2$)= E [$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu}_{EMV})^2}{n}$]
E ($\hat{\sigma}_{EMV}^2$)= $\frac{1}{n}$ E [$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu}_{EMV})^2$]
E ($\hat{\sigma}_{EMV}^2$)= $\frac{1}{n}$ E {$\sum_{i=1}^{n}[X_i^2-2X_i\hat{\mu}_{EMV}+\hat{\mu}_{EMV}^2]$}
E ($\hat{\sigma}_{EMV}^2$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ + $\sum_{i=1}^{n}-2X_i\hat{\mu}_{EMV}$ + $\sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}_{EMV}^2$)
E ($\hat{\sigma}_{EMV}^2$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ - 2$\hat{\mu}_{EMV}$ $\sum_{i=1}^{n}X_i$ + n$\hat{\mu}_{EMV}^2$)
E ($\hat{\sigma}_{EMV}^2$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ - 2$\hat{\mu}_{EMV}$n$\hat{\mu}_{EMV}$ + n$\hat{\mu}_{EMV}^2$)
E ($\hat{\sigma}_{EMV}^2$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ - 2n$\hat{\mu}_{EMV}^2$ + n$\hat{\mu}_{EMV}^2$)
E ($\hat{\sigma}_{EMV}^2$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ - n$\hat{\mu}_{EMV}^2$)
E ($\hat{\sigma}_{EMV}^2$)= E ($\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$ - $\hat{\mu}_{EMV}^2$)
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= E [$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$ - $(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n})^2$]
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= E ($\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$) - E [$(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n})^2$] por (*)
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= $\frac{1}{n}$ E ($\sum_{i=1}^{n}X_i^2$) - {V ($\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$) + $[E(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n})]^2$}
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)$ - [$\frac{1}{n^2}$ V ($\sum_{i=1}^{n}X_i$) + μ^2] por (*)
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)$ - [$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)$ + μ^2] por (**)
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= $\frac{1}{n}$ n (σ^2 + μ^2) - ($\frac{1}{n^2}$ nσ^2 + μ^2)
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= σ^2 + μ^2 - ($\frac{\sigma^2}{n}$ + μ^2)
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= σ^2 + μ^2 - $\frac{\sigma^2}{n}$ - μ^2
E ($\hat{\sigma}_{EMM}^2$)= $\frac{n-1}{n}$ σ^2.

(*) propiedad de linealidad de la esperanza.
(**) propiedad de la varianza e independencia.

Por lo tanto, el estimador EMV de μ es insesgado y el estimador EMV de σ^2 no es insesgado.

(c) *Se determina la resistencia al corte de cada una de diez soldaduras eléctricas por puntos de prueba, dando los siguientes datos (lb/plg2): 392, 376, 401, 367, 389, 362, 409, 415, 358, 375. Si se supone que la resistencia al corte está normalmente distribuida, estimar la verdadera media de resistencia al corte y desviación estándar de resistencia al corte usando el método de máxima verosimilitud y el método de momentos.*

X_i: "resistencia al corte de la i-ésima soldadura eléctrica", i= 1, 2, … , 10.

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ, σ^2).

EMM:

$\hat{\mu}_{EMM}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
$\hat{\mu}_{EMM}= \frac{3844}{10}$
$\hat{\mu}_{EMM}=$ 384,4.

$\hat{\sigma}_{EMM}^2= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$ - $(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})^2$
$\hat{\sigma}_{EMM}^2= \frac{1481190}{10}$ - $(\frac{3844}{10})^2$
$\hat{\sigma}_{EMM}^2=$ 148119 - $384{,}4^2$
$\hat{\sigma}_{EMM}^2=$ 148119 - 147763,36
$\hat{\sigma}_{EMM}^2=$ 355,64.

$\hat{\sigma}_{EMM}= \sqrt{\hat{\sigma}_{EMM}^2}$
$\hat{\sigma}_{EMM}= \sqrt{355{,}64}$
$\hat{\sigma}_{EMM}=$ 18,86.

EMV:

$\hat{\mu}_{EMV}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
$\hat{\mu}_{EMV}= \frac{3844}{10}$
$\hat{\mu}_{EMV}=$ 384,4.

$\hat{\sigma}_{EMV}^2= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu}_{EMV})^2}{n}$
$\hat{\sigma}_{EMV}^2= \frac{3556{,}4}{10}$
$\hat{\sigma}_{EMV}^2=$ 355,64.

$\hat{\sigma}_{EMV}= \sqrt{\hat{\sigma}_{EMV}^2}$
$\hat{\sigma}_{EMV}= \sqrt{355{,}64}$
$\hat{\sigma}_{EMV}=$ 18,86.

(d) *Estimar la probabilidad de que la resistencia al corte de una soldadura al azar sea menor que 420.*

$\hat{P}_{EMV}$ (X < 420)= P $(\frac{X-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} < \frac{420-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}})$
$\hat{P}_{EMV}$ (X < 420)= P (Z < $\frac{420-384{,}4}{18{,}86}$)
$\hat{P}_{EMV}$ (X < 420)= P (Z < $\frac{35{,}6}{18{,}86}$)
$\hat{P}_{EMV}$ (X < 420)= P (Z < 1,89)
$\hat{P}_{EMV}$ (X < 420)= F (1,89)
$\hat{P}_{EMV}$ (X < 420)= 0,9706.

Juan Menduiña

Trabajo Práctico N° 7: Intervalos de Confianza.

Ejercicio 1.

Un proceso novedoso para elaborar gasolina ecológica toma biomasa en la forma de sacarosa y la convierte en gasolina usando reacciones catalíticas. En un paso en un proceso de la planta piloto, un ingeniero químico mide la salida de cadenas de carbono de longitud tres. Nueve corridas con el mismo catalizador dieron los rendimientos (en galones): 0.62, 2.64, 1.85, 1.68, 1.09, 1.67, 0.73, 1.04, 0.68. Suponer que el rendimiento tiene una distribución normal.

(a) *¿Qué puede afirmar el ingeniero químico con 95% de confianza acerca del error máximo, si usa la media muestral para estimar el verdadero rendimiento medio?*

Modelización:

X_i: "rendimiento (en galones) de un catalizador en la i-ésima corrida", i= 1, 2, … , 9.

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, i= 1, 2, … , 9.

Error máximo:

$\bar{X}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
$\bar{X}= \frac{12}{9}$
$\bar{X}= \frac{4}{3}$
$\bar{X}= 1,\hat{3}$.

$S^2= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$
$S^2= \frac{3,6528}{9-1}$
$S^2= \frac{3,6528}{8}$
$S^2= 0,4566$.

S= $\sqrt{S^2}$
S= $\sqrt{0,4566}$
S= 0,6757.

$\frac{L}{2}= t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$
$\frac{L}{2}= 2,306 \frac{0,6757}{\sqrt{9}}$
$\frac{L}{2}= 2,306 \frac{0,6757}{3}$
$\frac{L}{2}= 2,306 * 0,2252$
$\frac{L}{2}= 0,5194$.

Por lo tanto, lo que puede afirmar el ingeniero químico con 95% de confianza acerca del error máximo, si usa la media muestral para estimar el verdadero rendimiento medio, es que este error es igual a 0,5194.

(b) *Obtener un intervalo de confianza del 95% para el verdadero rendimiento medio del proceso de la planta piloto.*

Modelización:

$\bar{X}$: "rendimiento (en galones) promedio de un catalizador de una muestra de n corridas".

$\bar{X} \sim \mathcal{N}\ (\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Pivote:

T= $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$.

Intervalo de confianza:

P (-$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ ≤ T ≤ $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$)= 1 - α
P (-$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ ≤ $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ ≤ $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$)= 1 - α
P (-$t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}$ - $\mu \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$)= 1 - α
P (-$\bar{X}$ - $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$ ≤ -μ ≤ -$\bar{X}$ + $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$)= 1 - α
P ($\bar{X}$ - $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}$ + $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$)= 1 - α.

$IC_{\mu}^{95\%}$= [1,$\hat{3}$ - $t_{0,025,8} \frac{0,6757}{\sqrt{9}}$; 1,$\hat{3}$ + $t_{0,025,8} \frac{0,6757}{\sqrt{9}}$]
$IC_{\mu}^{95\%}$= [1,$\hat{3}$ - 2,306 $\frac{0,6757}{3}$; 1,$\hat{3}$ + 2,306 $\frac{0,6757}{3}$]
$IC_{\mu}^{95\%}$= [1,$\hat{3}$ - 2,306 * 0,2252; 1,$\hat{3}$ + 2,306 * 0,2252]
$IC_{\mu}^{95\%}$= [1,$\hat{3}$ - 0,5194; 1,$\hat{3}$ + 0,5194]
$IC_{\mu}^{95\%}$= [-0,8139; 1,8527].

Ejercicio 2.

Se calculan tres intervalos de confianza para la media de la fuerza de corte (en ksi) de pernos de anclaje de un tipo dado, todos de la misma muestra. Los intervalos son: (4.01, 6.02); (4.20, 5.83) y (3.57, 6.46). Los niveles de los intervalos son 90%, 95% y 99%. ¿Qué intervalo tiene cada nivel? Justificar.

- El intervalo (4,01; 6,02) tiene el nivel de confianza de 95%.
- El intervalo (4,20; 5,83) tiene el nivel de confianza de 90%.
- El intervalo (3,57; 6,46) tiene el nivel de confianza de 99%.

La justificación se basa en la relación directa entre el nivel de confianza y la amplitud del intervalo de confianza. Cuanto mayor es el nivel de confianza, mayor es el intervalo necesario para cubrir el parámetro con la certeza deseada.

Ejercicio 3.

En una muestra aleatoria de 100 baterías producidas por cierto método, el promedio del tiempo de vida fue de 150 horas y la desviación estándar de 25 horas.

(a) *Determinar un intervalo de confianza de 95% para la media del tiempo de vida de las baterías producidas por este método.*

Modelización:

X_i: "tiempo de vida (en horas) de la i-ésima batería", i= 1, 2, … , 100.
$\bar{X}$: "tiempo de vida (en horas) promedio de una batería de una muestra de n baterías".

$\bar{X} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (μ, $\frac{\sigma^2}{n}$), por TCL.

Pivote:

Z= $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL.

Intervalo de confianza:

P ($-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq$ Z $\leq z_{\frac{\alpha}{2}}$)$\cong$ 1 - α
P ($-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$)$\cong$ 1 - α
P ($-z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}$ - $\mu \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$)$\cong$ 1 - α
P ($-\bar{X}$ - $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X}$ + $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$)$\cong$ 1 - α
P ($\bar{X}$ - $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}$ + $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$)$\cong$ 1 - α.

$IC_{\mu}^{\cong 95\%}$= [150 - $z_{0,025} \frac{25}{\sqrt{100}}$; 150 + $z_{0,025} \frac{25}{\sqrt{100}}$]
$IC_{\mu}^{\cong 95\%}$= [150 - 1,96 $\frac{25}{10}$; 150 + 1,96 $\frac{25}{10}$]
$IC_{\mu}^{\cong 95\%}$= [150 - 1,96 * 2,5; 150 + 1,96 * 2,5]
$IC_{\mu}^{\cong 95\%}$= [150 - 4,9; 150 + 4,9]
$IC_{\mu}^{\cong 95\%}$= [145,1; 154,9].

(b) *Un ingeniero afirma que la media del tiempo de vida está entre 147 y 153 horas. ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?*

$z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{L}{2}$
$z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{25}{\sqrt{100}} = \frac{153-147}{2}$
$z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{25}{10} = \frac{6}{2}$

$2{,}5 z_{\frac{\alpha}{2}} = 3$
$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{2{,}5}$
$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}2.$

P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)= P (Z $<$ 1,2) - P (Z $\leq$ -1,2)
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)= P (Z $<$ 1,2) - [1 - P (Z $\leq$ 1,2)]
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)= P (Z $<$ 1,2) - 1 + P (Z $\leq$ 1,2)
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)= 2 P (Z $\leq$ 1,2) - 1
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)= 2 F (1,2) - 1
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)$\cong$ 2 * 0,8849 - 1
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)$\cong$ 1,7698 - 1
P (-1,2 $<$ Z $<$ 1,2)$\cong$ 0,7698.

$IC_{\mu}^{\cong 76{,}98\%}$= [147, 153].

Por lo tanto, esta afirmación se puede hacer con, aproximadamente, 76,98% de confianza.

Ejercicio 4.

Las siguientes mediciones se registraron para el tiempo de secado, en horas, de cierta marca de pintura látex: 3.4, 2.5, 4.8, 2.9, 3.6, 2.8, 3.3, 5.6, 3.7, 2.8, 4.4, 4.0, 5.2, 3.0, 4.8. Suponiendo que las mediciones representan una muestra aleatoria de una población normal, encontrar un intervalo de confianza de nivel 99% para la media de los tiempos de secado.

Modelización:

X_i: "tiempo de secado (en horas) de cierta marca de pintura látex en la i-ésima medición", i= 1, 2, … , 15.
$\bar{X}$: "tiempo de secado (en horas) promedio de cierta marca de pintura látex de una muestra de n mediciones".

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, i= 1, 2, … , 15.
$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Pivote:

T= $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$.

Intervalo de confianza:

P $(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq T \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1})= 1 - \alpha$
P $(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1})= 1 - \alpha$
P $(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}})= 1 - \alpha$
P $(-\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}})= 1 - \alpha$
P $(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}})= 1 - \alpha$.

$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,78$\hat{6}$ - $t_{0,005,14} \frac{0,942\hat{6}}{\sqrt{15}}$; 3,78$\hat{6}$ + $t_{0,005,14} \frac{0,942\hat{6}}{\sqrt{15}}$]
$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,78$\hat{6}$ - 2,977 $\frac{0,942\hat{6}}{\sqrt{15}}$; 3,78$\hat{6}$ + 2,977 $\frac{0,942\hat{6}}{\sqrt{15}}$]
$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,78$\hat{6}$ - 2,977 $\frac{0,942\hat{6}}{3,873}$; 3,78$\hat{6}$ + 2,977 $\frac{0,942\hat{6}}{3,873}$]
$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,78$\hat{6}$ - 2,977 * 0,2434; 3,78$\hat{6}$ + 2,977 * 0,2434]
$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,78$\hat{6}$ - 0,7246; 3,78$\hat{6}$ + 0,7246]
$IC_{\mu}^{99\%}$= [3,0621; 4,5113].

Ejercicio 5.

Se prueban dos fórmulas diferentes de un combustible oxigenado para motor en cuanto al octanaje. La varianza del octanaje para la fórmula 1 es σ_1^2= 1,5, mientras que para la fórmula 2 es σ_2^2= 1,2. Se prueban dos muestras aleatorias de tamaño n_1= 15 y n_2= 20. Los octanajes promedio observados son $\bar{X}_1$= 89,6 y $\bar{X}_2$= 92,5. Suponer que las muestras provienen de poblaciones normales.

(a) *Construir un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en el octanaje promedio.*

Modelización:

$X_{1,i}$: "octanaje de un combustible oxigenado para el i-ésimo motor para la fórmula 1", i= 1, 2, … , 15.
$X_{2,i}$: "octanaje de un combustible oxigenado para el i-ésimo motor para la fórmula 2", i= 1, 2, … , 20.
$\bar{X}_1$: "octanaje promedio de un combustible oxigenado para motor para la fórmula 1 de una muestra de n motores".
$\bar{X}_2$: "octanaje promedio de un combustible oxigenado para motor para la fórmula 2 de una muestra de n motores".

$X_{1,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_1, σ_1^2), i= 1, 2, … , 15.
$X_{2,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_2, σ_2^2), i= 1, 2, … , 20.
$\bar{X}_1 \sim \mathcal{N}$ $(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$.
$\bar{X}_2 \sim \mathcal{N}$ $(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$.
$\bar{X}_1$ - $\bar{X}_2 \sim \mathcal{N}$ $(\mu_1$ - $\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

Pivote:

$$Z= \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}\ (0, 1).$$

Intervalo de confianza:

$$P\ (-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}})= 1 - \alpha$$
$$P\ (-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}})= 1 - \alpha$$
$$P\ (-z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})= 1 - \alpha$$
$$P\ (-(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq -(\mu_1 - \mu_2) \leq -(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})= 1 - \alpha$$

P $((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}) = 1 - \alpha$.

$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [(89,6 - 92,5) - $z_{0,025} \sqrt{\frac{1,5}{15} + \frac{1,2}{20}}$; (89,6 - 92,5) + $z_{0,025} \sqrt{\frac{1,5}{15} + \frac{1,2}{20}}$]
$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [-2,9 - 1,96 $\sqrt{0,1 + 0,06}$; -2,9 + 1,96 $\sqrt{0,1 + 0,06}$]
$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [-2,9 - 1,96 $\sqrt{0,16}$; -2,9 + 1,96 $\sqrt{0,16}$]
$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [-2,9 - 1,96 * 0,4; -2,9 + 1,96 * 0,4]
$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [-2,9 - 0,784; -2,9 + 0,784]
$IC_{\mu_1-\mu_2}^{95\%}$= [-3,684; -2,116].

(b) *Si se toma $n_1 = n_2$, ¿qué tamaño de muestra se necesitaría para que la longitud del intervalo se reduzca a la mitad del encontrado en (a)?*

L= $2z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
L= 2 * 1,96 $\sqrt{\frac{1,5}{15} + \frac{1,2}{20}}$
L= 2 * 1,96 $\sqrt{0,1 + 0,06}$
L= 2 * 1,96 $\sqrt{0,16}$
L= 2 * 1,96 * 0,4
L= 1,568.

l= $\frac{L}{2}$
l= $\frac{1,568}{2}$
l= 0,784.

$2z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \leq$ l
$2z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}} \leq$ l
$2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{n}} \leq$ l
$\sqrt{n} \geq \frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{l}$
n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{l})^2$.

n $\geq (\frac{2*1,96\sqrt{1,5+1,2}}{0,784})^2$
n $\geq (\frac{2*1,96\sqrt{2,7}}{0,784})^2$
n $\geq (\frac{2*1,96*1,643}{0,784})^2$
n $\geq (\frac{6,441}{0,784})^2$

n $\geq 8{,}216^2$
n $\geq$ 67,5.

Por lo tanto, si se toma $n_1 = n_2$, el tamaño de muestra que se necesitaría para que la longitud del intervalo se reduzca a la mitad del encontrado en (a) es 68.

Ejercicio 6.

Se comparan las resistencias de dos clases de hilo. Cincuenta piezas de cada clase de hilo se prueban bajo condiciones similares. La marca A tiene una resistencia a la tensión promedio de 78,3 kg con una desviación estándar de 5,6 kg; en tanto que la marca B tiene una resistencia a la tensión promedio de 87,2 kg con una desviación estándar de 6,3 kg. Construir un intervalo de confianza de 95% para la diferencia de las medias poblacionales.

Modelización

$X_{A,i}$: "resistencia a la tensión (en kg.) de la i-ésima pieza de hilo de la marca A", i= 1, 2, … , 50.
$X_{B,i}$: "resistencia a la tensión (en kg.) de la i-ésima pieza de hilo de la marca B", i= 1, 2, … , 50.
$\bar{X}_A$: "resistencia a la tensión (en kg.) promedio de una pieza de hilo de la marca A de una muestra de n piezas de hilo".
$\bar{X}_B$: "resistencia a la tensión (en kg.) promedio de una pieza de hilo de la marca B de una muestra de n piezas de hilo".

$\bar{X}_A \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_A, \frac{\sigma_A^2}{n_A})$, por TCL.

$\bar{X}_B \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_B, \frac{\sigma_B^2}{n_B})$, por TCL.

$\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_A - \mu_B, \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B})$, por TCL.

Pivote:

$Z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (0, 1)$, por TCL.

Intervalo de confianza:

$P\ (-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) \cong 1 - \alpha$

$P\ (-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) \cong 1 - \alpha$

$P\ (-z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B) \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}) \cong 1 - \alpha$

$P\ (-(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} \leq -(\mu_A - \mu_B) \leq -(\bar{X}_A - \bar{X}_B) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}) \cong 1 - \alpha$

$P\ ((\bar{X}_A - \bar{X}_B) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} \leq \mu_A - \mu_B \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}) \cong 1 - \alpha.$

$IC_{\mu_A - \mu_B}^{\cong 95\%} = [(78{,}3 - 87{,}2) - z_{0{,}025} \sqrt{\frac{5{,}6^2}{50} + \frac{6{,}3^2}{50}}; (78{,}3 - 87{,}2) + z_{0{,}025} \sqrt{\frac{5{,}6^2}{50} + \frac{6{,}3^2}{50}}]$

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-8,9 - 1,96 $\sqrt{\frac{31,6}{50}+\frac{39,69}{50}}$; -8,9 + 1,96 $\sqrt{\frac{31,6}{50}+\frac{39,69}{50}}$]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-8,9 - 1,96 $\sqrt{\frac{71,29}{50}}$; -8,9 + 1,96 $\sqrt{\frac{71,29}{50}}$]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-8,9 - 1,96 $\sqrt{1,4258}$; -8,9 + 1,96 $\sqrt{1,4258}$]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-8,9 - 1,96 * 1,1941; -8,9 + 1,96 * 1,1941]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-8,9 - 2,34; -8,9 + 2,34]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 95\%}$ = [-11,24; -6,56].

Ejercicio 7.

Una determinada empresa de material fungible puede adquirir los cartuchos de tóner de impresora de dos proveedores distintos. Con el fin de determinar a qué proveedor comprar se toma una muestra de tamaño 12 de cada uno de los proveedores obteniendo los siguientes resultados (número de hojas impresas):

- *Proveedor A:* $\bar{X}_A$*= 5459,* S_A^2*= 33703.*
- *Proveedor B:* $\bar{X}_B$*= 5162,* S_B^2*= 199928.*

Si se supone que las poblaciones son normales con varianzas iguales construir un intervalo de confianza de nivel 95% para la diferencia entre el número medio de hojas que imprime el cartucho de cada proveedor.

Modelización:

$X_{A,i}$: "número de hojas impresas del proveedor A en la i-ésima observación", i= 1, 2, … , 12.
$X_{B,i}$: "número de hojas impresas del proveedor B en la i-ésima observación", i= 1, 2, … , 12.
$\bar{X}_A$: "número de hojas impresas promedio del proveedor A de una muestra de n observaciones".
$\bar{X}_B$: "número de hojas impresas promedio del proveedor B de una muestra de n observaciones".

$X_{A,i} \sim \mathcal{N}\ (\mu_A, \sigma_A^2 = \sigma^2)$, i= 1, 2, … , 12.
$X_{B,i} \sim \mathcal{N}\ (\mu_B, \sigma_B^2 = \sigma^2)$, i= 1, 2, … , 12.
$\bar{X}_A \sim \mathcal{N}\ (\mu_A, \frac{\sigma_A^2}{n_A} = \frac{\sigma^2}{n_A})$.
$\bar{X}_B \sim \mathcal{N}\ (\mu_B, \frac{\sigma_B^2}{n_B} = \frac{\sigma^2}{n_B})$.
$\bar{X}_A - \bar{X}_B \sim \mathcal{N}\ (\mu_A - \mu_B, \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B} = \frac{\sigma^2}{n_A} + \frac{\sigma^2}{n_B})$.

Pivote:

$$T = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim t_{n_A + n_B - 2},$$

donde:

$$S_p^2 = \frac{(n_A - 1) S_A^2 + (n_B - 1) S_B^2}{n_A + n_B - 2}$$
$$S_p^2 = \frac{(12-1)*33703 + (12-1)*199928}{12+12-2}$$
$$S_p^2 = \frac{11*33703 + 11*199928}{22}$$
$$S_p^2 = \frac{11(33703 + 199928)}{22}$$
$$S_p^2 = \frac{33703 + 199928}{2}$$

$S_p^2 = \frac{233631}{2}$
$S_p^2 = 116815{,}5.$

$S_p = \sqrt{S_p^2}$
$S_p = \sqrt{116815{,}5}$
$S_p = 341{,}783.$

Intervalo de confianza:

P $(-t_{\frac{\alpha}{2}, n_A+n_B-2} \leq$ T $\leq t_{\frac{\alpha}{2}, n_A+n_B-2}) = 1 - \alpha$
P $(-t_{\frac{\alpha}{2}, n_A+n_B-2} \leq \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n_A+n_B-2}) = 1 - \alpha$
P $(-t_{\frac{\alpha}{2}, n_A+n_B-2}\ S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B) \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n_A+n_B-2}\ S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}) = 1 - \alpha$
P $(-(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - t_{\frac{\alpha}{2}, n_A+n_B-2}\ S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \leq -(\mu_A - \mu_B) \leq -(\bar{X}_A - \bar{X}_B) + t_{\frac{\alpha}{2}, n_A+n_B-2}\ S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}) = 1 - \alpha$
P $((\bar{X}_A - \bar{X}_B) - t_{\frac{\alpha}{2}, n_A+n_B-2}\ S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \leq \mu_A - \mu_B \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + t_{\frac{\alpha}{2}, n_A+n_B-2}\ S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}) = 1 - \alpha.$

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [(5459 - 5162) - t_{0,025,22} * 341{,}783 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}; (5459 - 5162) + t_{0,025,22} * 341{,}783 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [297 - 2{,}074 * 341{,}783 \sqrt{\frac{1}{6}}; 297 + 2{,}074 * 341{,}783 \sqrt{\frac{1}{6}}]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [297 - 2{,}074 * 341{,}783 * 0{,}408; 297 + 2{,}074 * 341{,}783 * 0{,}408]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [297 - 289{,}39; 297 + 289{,}39]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [7{,}61; 586{,}39].$

Ejercicio 8.

Dos empresas competidoras (A y B) en un mismo sector han puesto en marcha, casi simultáneamente, páginas de internet para la venta electrónica. Se han elegido al azar ocho clientes que han visitado la página A y, de manera independiente, otros ocho que han visitado la B y se ha medido el tiempo (en minutos) de la duración de la visita de cada cliente. Los resultados fueron los siguientes:

- *Página A: 2.3, 3.5, 4.2, 3.2, 4.4, 2.1, 1.6, 5.3.*
- *Página B: 1.3, 2.3, 4.4, 3.7, 2.8, 6.5, 3.6, 4.5.*

Suponer que los datos provienen de poblaciones normales. Construir un intervalo de confianza de nivel 99% para la diferencia entre los tiempos medios.

Modelización:

$X_{A,i}$: "tiempo (en minutos) de la duración de la visita del i-ésimo cliente en la página A", i= 1, 2, … , 8.
$X_{B,i}$: "tiempo (en minutos) de la duración de la visita del i-ésimo cliente en la página B", i= 1, 2, … , 8.
$\bar{X}_A$: "tiempo (en minutos) promedio de la duración de la visita de un cliente en la página A de una muestra de n clientes".
$\bar{X}_B$: "tiempo (en minutos) promedio de la duración de la visita de un cliente en la página B de una muestra de n clientes".

$X_{A,i} \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$, i= 1, 2, … , 8.
$X_{B,i} \sim \mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$, i= 1, 2, … , 8.
$\bar{X}_A \sim \mathcal{N}(\mu_A, \frac{\sigma_A^2}{n_A})$.
$\bar{X}_B \sim \mathcal{N}(\mu_B, \frac{\sigma_B^2}{n_B})$.
$\bar{X}_A - \bar{X}_B \sim \mathcal{N}(\mu_A - \mu_B, \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B})$.

Pivote:

$T= \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}} \sim^{aprox} t_v$, por v aproximado al entero más próximo,

donde:

$\bar{X}_A$= 3,325; S_A^2= 1,628; n_A= 8.
$\bar{X}_B$= 3,6375; S_B^2= 2,497; n_B= 8.

$$v= \frac{(\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B})^2}{\frac{(\frac{S_A^2}{n_A})^2}{n_A-1}+\frac{(\frac{S_B^2}{n_B})^2}{n_B-1}}$$

v= $\frac{(\frac{1,628}{8}+\frac{2,497}{8})^2}{\frac{(\frac{1,628}{8})^2}{8-1}+\frac{(\frac{2,497}{8})^2}{8-1}}$

v= $\frac{(0,2035+0,3121)^2}{\frac{0,2035^2}{7}+\frac{0,3121^2}{7}}$

v= $\frac{0,5156^2}{\frac{0,0414}{7}+\frac{0,0974}{7}}$

v= $\frac{0,2658}{\frac{0,1388}{7}}$

v= $\frac{0,2658}{0,0198}$

v= 13,4049.

Intervalo de confianza:

P ($-t_{\frac{\alpha}{2},v} \leq$ T $\leq t_{\frac{\alpha}{2},v}$)$\cong$ 1 - α

P ($-t_{\frac{\alpha}{2},v} \leq \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},v}$)$\cong$ 1 - α

P ($-t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}} \leq (\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B)$ - $(\mu_A$ - $\mu_B) \leq t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}$)$\cong$ 1 - α

P (-($\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B$) - $t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}} \leq$ -(μ_A - μ_B) $\leq$ -($\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B$) + $t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}$)$\cong$ 1 - α

P (($\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B$) - $t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}} \leq \mu_A$ - $\mu_B \leq$ ($\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B$) + $t_{\frac{\alpha}{2},v} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}$)$\cong$ 1 - α.

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [(3,325 - 3,6375) - $t_{0,005,13} \sqrt{\frac{1,628}{8}+\frac{2,497}{8}}$; (3,325 - 3,6375) + $t_{0,005,13} \sqrt{\frac{1,628}{8}+\frac{2,497}{8}}$]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [-0,3125 - 3,012 $\sqrt{\frac{4,125}{8}}$; -0,3125 + 3,012 $\sqrt{\frac{4,125}{8}}$]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [-0,3125 - 3,012 $\sqrt{0,515625}$; -0,3125 + 3,012 $\sqrt{0,515625}$]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [-0,3125 - 3,012 * 0,718; -0,3125 + 3,012 * 0,718]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [-0,3125 - 2,163; -0,3125 + 2,163]

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{\cong 99\%}$= [-2,4753; 1,8503].

Ejercicio 9.

Una muestra de 10 camiones diesel fue operada tanto caliente como fría para calcular la diferencia en el ahorro de combustible. Los resultados, en millas/galón, se presentan en la tabla siguiente:

Camión	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
caliente	*4,56*	*4,46*	*6,49*	*5,37*	*6,25*	*5,90*	*4,12*	*3,85*	*4,15*	*4,69*
frío	*4,26*	*4,08*	*5,83*	*4,96*	*5,87*	*5,32*	*3,92*	*3,69*	*3,74*	*4,19*

Determinar un intervalo de confianza de 98% para la diferencia en la media del millaje entre motores calientes y fríos. Asumir que la muestra de las diferencias entre motores calientes y fríos es aproximadamente normal.

Modelización:

$X_{c,i}$: "ahorro de combustible (en millas/galón) del i-ésimo camión diesel operado en caliente", i= 1, 2, … , 10.
$X_{f,i}$: "ahorro de combustible (en millas/galón) del i-ésimo camión diesel operado en frío", i= 1, 2, … , 10.
X_{Di}: "diferencia de ahorro de combustible (en millas/galón) del i-ésimo camión diesel operado en caliente versus operado en frío", i= 1, 2, … , 10.
$\bar{X}_D$: "diferencia de ahorro de combustible (en millas/galón) promedio de un camión diesel operado en caliente versus operado en frío de una muestra de n camiones diesel".

$X_{Di} \sim \mathcal{N}\ (\mu_D, \sigma_D^2)$.
$\bar{X}_D \sim \mathcal{N}\ (\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n})$.

Pivote:

T= $\frac{\bar{X}_D-\mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$,

donde:

Camión	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
caliente	4,56	4,46	6,49	5,37	6,25	5,90	4,12	3,85	4,15	4,69
frío	4,26	4,08	5,83	4,96	5,87	5,32	3,92	3,69	3,74	4,19
diferencia	0,3	0,38	0,66	0,41	0,38	0,58	0,2	0,16	0,41	0,5

$\bar{X}_D$= 0,398; S_D= 0,1558.

Intervalo de confianza:

P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq$ T $\leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$)= 1 - α
P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{\bar{X}_D-\mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$)= 1 - α

P ($-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_D - \mu_D \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$)= 1 - α
P ($-\bar{X}_D - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq -\mu_D \leq -\bar{X}_D + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$)= 1 - α
P ($\bar{X}_D - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{X}_D + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$)= 1 - α.

$IC_{\mu_D}^{98\%}$= [0,398 - $t_{0,01,9} \frac{0,1558}{\sqrt{10}}$; 0,398 + $t_{0,01,9} \frac{0,1558}{\sqrt{10}}$]
$IC_{\mu_D}^{98\%}$= [0,398 - 2,821 $\frac{0,1558}{3,1623}$; 0,398 + 2,821 $\frac{0,1558}{3,1623}$]
$IC_{\mu_D}^{98\%}$= [0,398 - 2,821 * 0,0493; 0,398 + 2,821 * 0,0493]
$IC_{\mu_D}^{98\%}$= [0,398 - 0,139; 0,398 + 0,139]
$IC_{\mu_D}^{98\%}$= [0,259; 0,537].

Ejercicio 10.

Para los datos del Ejercicio 4:

(a) *Construir un intervalo de confianza de 99% para la varianza del tiempo de secado real.*

Modelización:

X_i: "tiempo de secado (en horas) de cierta marca de pintura látex en la i-ésima medición", i= 1, 2, … , 15.

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, i= 1, 2, … , 15.

Pivote:

X= $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Intervalo de confianza para σ^2:

P $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq X \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1})$= 1 - α
P $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1})$= 1 - α
P $(\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)S^2})$= 1 - α
P $(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}})$= 1 - α.

$IC^{99\%}_{\sigma^2}$= $[\frac{(15-1)*0,9426^2}{\chi^2_{0,005,14}}; \frac{(15-1)*0,9426^2}{\chi^2_{0,995,14}}]$
$IC^{99\%}_{\sigma^2}$= $[\frac{14*0,8885}{31,3}; \frac{14*0,8885}{4,07}]$
$IC^{99\%}_{\sigma^2}$= $[\frac{12,439}{31,3}; \frac{12,439}{4,07}]$
$IC^{99\%}_{\sigma^2}$= [0,397; 3,056].

(b) *Construir un intervalo de confianza de 99% para la desviación estándar del tiempo de secado real.*

Intervalo de confianza para σ:

P $(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}})$= 1 - α.

$IC^{99\%}_{\sigma}$= $[\sqrt{0,397}; \sqrt{3,056}]$

$IC_{\sigma}^{99\%}$= [0,63; 1,748].

Ejercicio 11.

Para los datos del Ejercicio 8, hallar un intervalo de confianza de nivel de 95% para el cociente de las varianzas de los tiempos de visita.

Modelización:

$X_{A,i}$: "tiempo (en minutos) de la duración de la visita del i-ésimo cliente en la página A", i= 1, 2, … , 8.
$X_{B,i}$: "tiempo (en minutos) de la duración de la visita del i-ésimo cliente en la página B", i= 1, 2, … , 8.

$X_{A,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_A, σ_A^2), i= 1, 2, … , 8.
$X_{B,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_B, σ_B^2), i= 1, 2, … , 8.

Pivote:

F= $\frac{\frac{S_B^2}{\sigma_B^2}}{\frac{S_A^2}{\sigma_A^2}} \sim f_{n_B-1,n_A-1}$.

Intervalo de confianza:

P ($f_{1-\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1} \leq$ F $\leq f_{\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1}$)= 1 - α
P ($f_{1-\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1} \leq \frac{\frac{S_B^2}{\sigma_B^2}}{\frac{S_A^2}{\sigma_A^2}} \leq f_{\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1}$)= 1 - α
P ($f_{1-\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1} \frac{S_A^2}{S_B^2} \leq \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \leq f_{\frac{\alpha}{2},n_B-1,n_A-1} \frac{S_A^2}{S_B^2}$)= 1 - α.

$IC^{95\%}_{\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}$= [$f_{0,975,7,7} \frac{1,628}{2,497}$; $f_{0,025,7,7} \frac{1,628}{2,497}$]
$IC^{95\%}_{\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}$= [0,2 * 0,652; 4,99 * 0,652]
$IC^{95\%}_{\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}$= [0,13; 3,253].

Ejercicio 12.

Un fabricante de calculadoras electrónicas está interesado en estimar la fracción de unidades defectuosas que se producen. Una muestra aleatoria de 800 calculadoras incluye 18 defectuosas. Calcular un intervalo de confianza de nivel 99% para la verdadera fracción de unidades defectuosas.

Modelización:

X_i: "i-ésima calculadora electrónica producida defectuosa (1 si defectuosa, 0 c.c.)", i= 1, 2, … , 800.
$\hat{P}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$: "proporción de calculadoras electrónicas producidas defectuosas de una muestra de n calculadoras electrónicas producidas".

$X_i \sim$ B (1, p), i= 1, 2, … , 800.
$\hat{P} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p, $\frac{p(1-p)}{n}$), por TCL.

Pivote:

$Z= \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL,

donde:

$\hat{P}= \frac{18}{800}$
$\hat{P}$= 0,0225.

Intervalo de confianza:

P ($-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) \cong 1 - \alpha$
P ($-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) \cong 1 - \alpha$
P ($-z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq \hat{P}$ - p $\leq z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}) \cong 1 - \alpha$
P ($-\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq$ -p $\leq -\hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}) \cong 1 - \alpha$
P ($\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq$ p $\leq \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}) \cong 1 - \alpha$.

$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - $z_{0,005} \sqrt{\frac{0,0225(1-0,0225)}{800}}$; 0,0225 + $z_{0,005} \sqrt{\frac{0,0225(1-0,0225)}{800}}$]
$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - 2,575 $\sqrt{\frac{0,0225*0,9775}{800}}$; 0,0225 + 2,575 $\sqrt{\frac{0,0225*0,9775}{800}}$]
$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - 2,575 $\sqrt{\frac{0,02199375}{800}}$; 0,0225 + 2,575 $\sqrt{\frac{0,02199375}{800}}$]

$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - 2,575 $\sqrt{0,0000274921875}$; 0,0225 + 2,575 $\sqrt{0,0000274921875}$]
$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - 2,575 * 0,0052; 0,0225 + 2,575 * 0,0052]
$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,0225 - 0,0135; 0,0225 + 0,0135]
$IC_p^{\cong 99\%}$= [0,009; 0,99].

Ejercicio 13.

(a) *Suponer que se quiere estimar qué porcentaje de todos los conductores excede el límite de velocidad de 80 km/h en cierto tramo del camino. ¿Qué tan grande debe ser la muestra para tener, al menos, 99% de confianza de que el error de su estimación es, a lo sumo, de 3,5%?*

X_i: "i-ésimo conductor que excede el límite de velocidad de 80 km/h (1 si excede, 0 c.c.)", i= 1, 2, … , n.
$\hat{P}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$: "proporción de conductores que exceden el límite de velocidad de 80 km/h de una muestra de n conductores".

$X_i \sim$ B (1, p), i= 1, 2, … , n.
$\hat{P} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p, $\frac{p(1-p)}{n}$), por TCL.

$2z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq l$
$2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{\sqrt{n}} \leq l$
$\sqrt{n} \geq \frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{l}$
n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{l})^2$
n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2$ $\hat{P}$ (1 - $\hat{P}$)
n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2$ 0,5 (1 - 0,5)
n $\geq$ 4 $(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2$ 0,5 * 0,5
n $\geq$ 4 $(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2$ 0,25
n $\geq (\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2$.

n $\geq (\frac{2,575}{2*0,035})^2$
n $\geq (\frac{2,575}{0,07})^2$
n $\geq 36,79^2$
n $\geq$ 1353,19.

Por lo tanto, la muestra, para tener, al menos, 99% de confianza de que el error de su estimación es, a lo sumo, de 3,5% debe ser mayor o igual a 1354.

(b) *¿Cómo se vería afectado el tamaño de la muestra requerida, si se sabe que el porcentaje a estimar es, a lo sumo, de 40%?*

$2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq l$

$2z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{\sqrt{n}} \leq l$

$\sqrt{n} \geq \frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{l}$

n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{l})^2$

n $\geq (\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{l})^2\ \hat{P}$ (1 - $\hat{P}$).

n $\geq (\frac{2,575}{2*0,035})^2$ 0,4 (1 - 0,4)

n $\geq 36,79^2$ * 0,4 * 0,6

n ≥ 1353,19 * 0,4 * 0,6

n ≥ 324,77.

Por lo tamaño, si se sabe que el porcentaje a estimar es, a lo sumo, de 40%, el tamaño de la muestra requerida debe ser mayor o igual a 325.

Ejercicio 14.

En una prueba del efecto de la humedad en conexiones eléctricas, se probaron 100 conexiones eléctricas bajo condiciones húmedas y 150 en condiciones secas. Veinte de las primeras fallaron y sólo diez de las segundas no pasaron la prueba. Determinar un intervalo de confianza de 90% para la diferencia entre las proporciones de las conexiones que fallaron, húmedas y secas.

Modelización:

$X_{1,i}$: "i-ésima conexión eléctrica fallida bajo condiciones húmedas (1 si fallida, 0 c.c.)", i= 1, 2, … 100.
$X_{2,i}$: "i-ésima conexión eléctrica fallida bajo condiciones secas (1 si fallida, 0 c.c.)", i= 1, 2, … 150.
$\hat{P}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}}{n_1}$: "proporción de conexiones eléctricas fallidas bajo condiciones húmedas en una muestra de n conexiones eléctricas".
$\hat{P}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}}{n_2}$: "proporción de conexiones eléctricas fallidas bajo condiciones secas en una muestra de n conexiones eléctricas".

$X_{1,i} \sim$ B (1, p_1), i= 1, 2, … 100.
$X_{2,i} \sim$ B (1, p_2), i= 1, 2, … 150.
$\hat{P}_1 \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1})$, por TCL.
$\hat{P}_2 \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2})$, por TCL.
$\hat{P}_1$ - $\hat{P}_2 \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2})$, por TCL.

Pivote:

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (0, 1), \text{ por TCL,}$$

donde:

$\hat{P}_1 = \frac{20}{100}$
$\hat{P}_1$= 0,2.

$\hat{P}_2 = \frac{10}{150}$
$\hat{P}_2 = 0{,}0\hat{6}$.

Intervalo de confianza:

$$P\ (-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) \cong 1 - \alpha$$
$$P\ (-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) \cong 1 - \alpha$$

P ($-z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \leq (\hat{P}_1$ - $\hat{P}_2)$ - $(p_1$ - $p_2) \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}) \cong 1 - \alpha$

P ($-(\hat{P}_1$ - $\hat{P}_2)$ - $z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \leq -(p_1$ - $p_2) \leq -(\hat{P}_1$ - $\hat{P}_2)$ + $z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}) \cong$ 1 - α

P ($(\hat{P}_1$ - $\hat{P}_2)$ - $z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \leq p_1$ - $p_2 \leq (\hat{P}_1$ - $\hat{P}_2)$ + $z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}) \cong$ 1 - α.

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [(0,2 - 0,0$\hat{6}$) - $z_{0,05} \sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{100}+\frac{0,0\hat{6}(1-0,0\hat{6})}{150}}$; (0,2 - 0,0$\hat{6}$) + $z_{0,05} \sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{100}+\frac{0,0\hat{6}(1-0,0\hat{6})}{150}}$]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 1,645 $\sqrt{\frac{0,2*0,8}{100}+\frac{0,0\hat{6}*0,9\hat{3}}{150}}$; 0,1$\hat{3}$ + 1,645 $\sqrt{\frac{0,2*0,8}{100}+\frac{0,0\hat{6}*0,9\hat{3}}{150}}$]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 1,645 $\sqrt{\frac{0,16}{100}+\frac{0,06\hat{2}}{150}}$; 0,1$\hat{3}$ + 1,645 $\sqrt{\frac{0,16}{100}+\frac{0,06\hat{2}}{150}}$]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 1,645 $\sqrt{0,016+0,0004148}$; 0,1$\hat{3}$ + 1,645 $\sqrt{0,016+0,0004148}$]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 1,645 $\sqrt{0,0164148}$; 0,1$\hat{3}$ + 1,645 $\sqrt{0,0164148}$]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 1,645 * 0,1281; 0,1$\hat{3}$ + 1,645 * 0,1281]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [0,1$\hat{3}$ - 0,2108; 0,1$\hat{3}$ + 0,2108]

$IC_{p_1-p_2}^{\cong 90\%}$= [-0,077; 0,344].

Trabajo Práctico N° 8:
Test de Hipótesis.

Ejercicio 1.

Para cada una de las siguientes aseveraciones, expresar si es una hipótesis estadística legítima y por qué:

(a) *H:* $\sigma > 0$.

Sí, es una hipótesis estadística legítima. La hipótesis se refiere a la desviación estándar poblacional (σ), que es un parámetro poblacional.

(b) *H:* $s \leq 0,2$.

No, no es una hipótesis estadística legítima. La hipótesis se refiere a la desviación estándar muestral (s). Las hipótesis estadísticas deben referirse a parámetros poblacionales, no a estadísticos muestrales.

(c) *H:* $\bar{X} - \bar{Y} = 5$.

No, no es una hipótesis estadística legítima. La hipótesis se refiere a las medias muestrales ($\bar{X}$ y $\bar{Y}$). Las hipótesis estadísticas deben referirse a parámetros poblacionales, no a estadísticos muestrales.

(d) *H:* $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1$.

Sí, es una hipótesis estadística legítima. La hipótesis se refiere al cociente de desviaciones estándar poblacionales ($\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$), que es un parámetro poblacional.

(e) *H:* $\mu \leq 0,1$.

Sí, es una hipótesis estadística legítima. La hipótesis se refiere a la media poblacional (μ), que es un parámetro poblacional.

Ejercicio 2.

Sea el estadístico de prueba Z con una distribución normal estándar cuando H_0 es verdadera. Dar el nivel de significancia en cada una de las siguientes situaciones:

(a) H_1*:* $\mu > \mu_0$*, región de rechazo z ≥ 1,88.*

α= P (Z ≥ 1,88)
α= 1 - P (Z < 1,88)
α= 1 - F (1,88)
α= 1 - 0,9699
α= 0,0301.

(b) H_1*:* $\mu < \mu_0$*, región de rechazo z ≤ -2,75.*

α= P (Z ≤ -2,75)
α= F (-2,75)
α= 0,003.

(c) H_1*:* $\mu \neq \mu_0$*, región de rechazo z ≥ 2,88 o z ≤ -2,88.*

α= P (Z ≥ 2,88) + P (Z ≤ -2,88)
α= [1 - P (Z < 2,88)] + P (Z ≤ -2,88)
α= [1 - F (2,88)] + F (-2,88)
α= (1 - 0,998) + 0,002
α= 0,002 + 0,002
α= 0,004.

Ejercicio 3.

Se supone que una máquina que llena cajas de cereal está calibrada, por lo que la media del peso de llenado es de 340 gr. Sea μ la media verdadera del peso de llenado. Suponer que, en una prueba de hipótesis, H_0: μ= 340 contra H_1: $\mu \neq$ 340, el p-valor es 0,3.

(a) *¿Se debe rechazar H_0 con base en esta prueba? Explicar.*

Con base en esta prueba, no se debe rechazar H_0, ya que el p-valor es significativamente mayor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1), por lo que no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula H_0.

(b) *¿Se puede concluir que la máquina está calibrada y decir que la media del peso de llenado es de 340 gr.? Explicar.*

No, no se puede concluir que la máquina está calibrada y decir que la media del peso de llenado es de 340 gr., aunque no exista evidencia suficiente para rechazar esta hipótesis nula. El hecho de no rechazar H_0 no implica que H_0 sea verdadera, sino sólo que estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que la media verdadera del peso de llenado es diferente de 340 gr.

Ejercicio 4.

Un proceso de fabricación produce cojinetes de bola con diámetros que tienen una distribución normal y una desviación estándar de σ= 0,04 cm. Los cojinetes de bola que tienen diámetros que son muy pequeños o muy grandes son indeseables. Para poner a prueba la hipótesis nula de que μ= 0,5 cm. se selecciona al azar una muestra de 25 y se encuentra que la media muestral es 0,51.

(a) *Establecer las hipótesis nula y alternativa tales que el rechazo de la hipótesis nula implicará que los cojinetes de bola son indeseables.*

Modelización:

X_i: "diámetro del i-ésimo cojinete de bola", i= 1, 2, … , 25.
$\bar{X}$: "diámetro promedio de un cojinete de bola de una muestra de n cojinetes de bola".

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ, σ^2), i= 1, 2, … , 25.
$\bar{X} \sim \mathcal{N}$ $(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Hipótesis:

H_0: μ= 0,5.
H_1: $\mu \neq$ 0,5.

(b) *Con α= 0,02, ¿cuál es el valor crítico para el estadístico de prueba? Realizar el test.*

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}$ (0, 1), bajo H_0.

Valor observado:

$z_0 = \frac{0,51-0,5}{\frac{0,04}{\sqrt{25}}}$
$z_0 = \frac{0,01}{\frac{0,04}{5}}$
$z_0 = \frac{0,01}{0,008}$
z_0= 1,25.

Valor crítico:

$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,02}{2}}$
$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01}$
$z_{\frac{\alpha}{2}}$= 2,33.

Por lo tanto, el valor crítico para el estadístico de prueba es 2,33.

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,02, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que los cojinetes de bola son indeseables, ya que $|z_0|= |1{,}25|= 1{,}25 < z_{\frac{\alpha}{2}}$= 2,33.

Ejercicio 5.

Cuando está operando adecuadamente, una planta química tiene una media de producción diaria de, por lo menos, 740 toneladas. La producción se mide en una muestra aleatoria simple de 60 días. La muestra tenía una media de 715 toneladas por día y desviación estándar de 24 toneladas por día. Sea μ la media de la producción diaria de la planta. Un ingeniero prueba que: H_0: $\mu \geq 740$ contra H_1: $\mu < 740$.

(a) *Determinar el p-valor.*

Modelización:

X_i: "producción (en toneladas) del i-ésimo día de una planta química", i= 1, 2, … , 60.
$\bar{X}$: "producción (en toneladas) promedio diaria de una planta química de una muestra de n días".

$\bar{X} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ $(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, por TCL.

Hipótesis:

H_0: $\mu \geq 740$.
H_1: $\mu < 740$.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$z_0 = \frac{715-740}{\frac{24}{\sqrt{60}}}$
$z_0 = \frac{-25}{\frac{24}{7{,}746}}$
$z_0 = \frac{-25}{3{,}098}$
z_0= -8,069.

P-valor:

p-valor= P (Z $< z_0$)
p-valor= P (Z $<$ -8,069)
p-valor= F (-8,069)
p-valor$\cong$ 0.

(b) *¿Se piensa que es factible que la planta esté operando adecuadamente o se está convencido de que la planta no funciona en forma adecuada? Explicar el razonamiento.*

Estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que la planta química no está operando adecuadamente, ya que el p-valor (aproximado) es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

Ejercicio 6.

Probar la hipótesis de que el contenido medio de los envases de un lubricante específico es de 10 litros, si los contenidos de una muestra aleatoria de 10 envases son: 10.2, 9.7, 10.1, 10.3, 10.1, 9.8, 9.9, 10.4, 10.3, 9.8. Utilizar un nivel de significancia de 0,01 y suponer que la distribución del contenido es normal.

Modelización:

X_i: "contenido del i-ésimo envase de un lubricante específico", i= 1, 2, … , 10.
$\bar{X}$: "contenido promedio de un envase de un lubricante específico de una muestra de n envases".

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ, σ^2), i= 1, 2, … , 10.
$\bar{X} \sim \mathcal{N}$ $(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Hipótesis:

H_0: μ= 10.
H_1: $\mu \neq 10$.

Estadístico de prueba:

T= $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$, bajo H_0.

Valor observado:

$t_0= \frac{10,06-10}{\frac{0,246}{\sqrt{10}}}$
$t_0= \frac{0,06}{\frac{0,246}{3,162}}$
$t_0= \frac{0,06}{0,077}$
t_0= 0,772.

Valor crítico:

$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}= t_{\frac{0,01}{2},9}$
$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}= t_{0,005,9}$
$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= 3,25.

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,01, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que el contenido medio de un envase de un lubricante específico es distinto de 10 litros, ya que $|t_0|$= $|0,772|$= 0,772 $< t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= 3,25.

Ejercicio 7.

Para determinar el efecto del grado de combustible en la eficiencia del combustible, 80 nuevos automóviles de la misma marca, con motores idénticos, fueron conducidos cada uno durante 1000 millas. Cuarenta de los automóviles funcionaron con combustible regular y otros 40 con combustible de grado Premium; los primeros tenían una media de 27,2 milla/galón, con desviación estándar de 1,2 milla/galón. Los segundos tenían una media de 28,1 milla/galón y una desviación estándar de 2,0 milla/galón. ¿Se puede concluir que este tipo de automóvil tiene mejor millaje con combustible Premium? Utilizar el p-valor.

Modelización:

$X_{p,i}$: "milla/galón del i-ésimo automóvil que funciona con combustible premium", i= 1, 2, … , 40.
$X_{r,i}$: "milla/galón del i-ésimo automóvil que funciona con combustible regular", i= 1, 2, … , 40.
$\bar{X}_p$: "milla/galón promedio de un automóvil que funciona con combustible premium de una muestra de n automóviles".
$\bar{X}_r$: "milla/galón promedio de un automóvil que funciona con combustible regular de una muestra de n automóviles".

$\bar{X}_p \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_p, \frac{\sigma_p^2}{n_p})$, por TCL.
$\bar{X}_r \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_r, \frac{\sigma_r^2}{n_r})$, por TCL.
$\bar{X}_p$ - $\bar{X}_r \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_p - \mu_r, \frac{\sigma_p^2}{n_p} + \frac{\sigma_r^2}{n_r})$, por TCL.

Hipótesis:

H_0: μ_p - $\mu_r \leq 0$.
H_1: μ_p - $\mu_r > 0$.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{(\bar{X}_p - \bar{X}_r) - (\mu_{p_0} - \mu_{r_0})}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_p} + \frac{S_r^2}{n_r}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$z_0 = \frac{(28,1 - 27,2) - 0}{\sqrt{\frac{2^2}{40} + \frac{1,2^2}{40}}}$
$z_0 = \frac{0,9}{\sqrt{\frac{4}{40} + \frac{1,44}{40}}}$
$z_0 = \frac{0,9}{\sqrt{\frac{5,44}{40}}}$

$z_0 = \frac{0,9}{\sqrt{0,136}}$
$z_0 = \frac{0,9}{0,369}$
$z_0 = 2,44.$

P-valor:

p-valor= P ($Z > z_0$)
p-valor= 1 - P ($Z \leq z_0$)
p-valor= 1 - P ($Z \leq 2,44$)
p-valor= 1 - F (2,44)
p-valor$\cong$ 1 - 0,9927
p-valor$\cong$ 0,0073.

Conclusión:

Por lo tanto, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que este tipo de automóvil tiene mejor millaje con combustible Premium, ya que el p-valor (aproximado) es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

Ejercicio 8.

Se probó la velocidad en cierta aplicación de 50 chips nuevos de computadora, con otra cantidad igual de diseño viejo. La velocidad promedio, en MHz, de los nuevos chips fue de 495,6 y la desviación estándar de 19,4. La velocidad promedio de los chips viejos fue de 481,2 y la desviación estándar fue de 14,3.

(a) *¿Se puede concluir que la media de la velocidad de los nuevos es mayor que la de los chips viejos? Establecer las hipótesis nula y alternativa adecuadas y, después, encontrar el p-valor.*

Modelización:

$X_{n,i}$: "velocidad (en MHz) del i-ésimo chip nuevo de computadora en cierta aplicación", i= 1, 2, … , 50.
$X_{v,i}$: "velocidad (en MHz) del i-ésimo chip viejo de computadora en cierta aplicación", i= 1, 2, … , 50.
$\bar{X}_n$: "velocidad (en MHz) promedio de un chip nuevo de computadora en cierta aplicación de una muestra de n chips nuevos".
$\bar{X}_v$: "velocidad (en MHz) promedio de un chip viejo de computadora en cierta aplicación de una muestra de n chips viejos".

$\bar{X}_n \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_n, \frac{\sigma_n^2}{n_n})$, por TCL.
$\bar{X}_v \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_v, \frac{\sigma_v^2}{n_v})$, por TCL.
$\bar{X}_n$ - $\bar{X}_v \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_n - \mu_v, \frac{\sigma_n^2}{n_n} + \frac{\sigma_v^2}{n_v})$, por TCL.

Hipótesis:

H_0: μ_n - $\mu_v \leq 0$.
H_1: μ_n - $\mu_v > 0$.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{(\bar{X}_n - \bar{X}_v) - (\mu_{n_0} - \mu_{v_0})}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n_n} + \frac{S_v^2}{n_v}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$z_0 = \frac{(495{,}6 - 481{,}2) - 0}{\sqrt{\frac{19{,}4^2}{50} + \frac{14{,}3^2}{50}}}$
$z_0 = \frac{14{,}4}{\sqrt{\frac{376{,}36}{50} + \frac{204{,}49}{50}}}$
$z_0 = \frac{14{,}4}{\sqrt{\frac{580{,}85}{50}}}$

$z_0 = \frac{14,4}{\sqrt{11,617}}$
$z_0 = \frac{14,4}{3,408}$
$z_0 = 4,22$.

P-valor:

p-valor= P (Z $> z_0$)
p-valor= 1 - P (Z $\leq z_0$)
p-valor= 1 - P (Z $\leq$ 4,22)
p-valor= 1 - F (4,22)
p-valor$\cong$ 1 - 1
p-valor$\cong$ 0.

Conclusión:

Por lo tanto, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que la media de la velocidad (en MHz) de los chips nuevos es mayor que la de los chips viejos, ya que el p-valor (aproximado) es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

(b) *Una muestra de 60 chips aún más viejos tenía velocidad promedio de 391,2 MHz, con desviación estándar de 17,2 MHz. Alguien afirma que los nuevos chips tienen una velocidad promedio mayor a 100 MHz que los más viejos. ¿Los datos proporcionan evidencias convincentes para esta afirmación? Establecer las hipótesis nula y alternativa y, después, determinar el p-valor.*

Modelización:

$X_{mv,i}$: "velocidad (en MHz) del i-ésimo chip más viejo de computadora en cierta aplicación", i= 1, 2, … , 60.
$\bar{X}_{mv}$: "velocidad (en MHz) promedio de un chip más viejo de computadora en cierta aplicación de una muestra de n chips más viejos".

$\bar{X}_{mv} \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_{mv}, \frac{\sigma_{mv}^2}{n_{mv}})$, por TCL.
$\bar{X}_n$ - $\bar{X}_{mv} \sim^{aprox} \mathcal{N}\ (\mu_n - \mu_{mv}, \frac{\sigma_n^2}{n_n} + \frac{\sigma_{mv}^2}{n_{mv}})$, por TCL.

Hipótesis:

H_0: μ_n - $\mu_{mv} \leq 100$.
H_1: μ_n - $\mu_{mv} > 100$.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{(\bar{X}_n-\bar{X}_v)-(\mu_{n_0}-\mu_{mv_0})}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n_n}+\frac{S_{mv}^2}{n_{mv}}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$z_0= \frac{(495,6-391,2)-100}{\sqrt{\frac{19,4^2}{50}+\frac{17,2^2}{60}}}$
$z_0= \frac{104,4-100}{\sqrt{\frac{376,36}{50}+\frac{295,84}{60}}}$
$z_0= \frac{4,4}{\sqrt{7,5272+4,930\widehat{6}}}$
$z_0= \frac{4,4}{\sqrt{12,4578\widehat{6}}}$
$z_0= \frac{4,4}{3,5296}$
z_0= 1,25.

P-valor:

p-valor= P (Z $>$ z_0)
p-valor= 1 - P (Z $\leq$ z_0)
p-valor= 1 - P (Z $\leq$ 1,25)
p-valor= 1 - F (1,25)
p-valor≅ 1 - 0,8944
p-valor≅ 0,1056.

Conclusión:

Por lo tanto, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que los nuevos chips tienen una velocidad promedio mayor a 100 MHz que los chips más viejos, ya que el p-valor (aproximado) es mayor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

<u>Ejercicio 9.</u>

Se considera usar dos marcas diferentes de pintura látex. El tiempo de secado, en horas, se mide en especímenes de muestras del uso de las dos pinturas. Se seleccionan 15 especímenes de cada una y los tiempos de secado son los siguientes:

- *Pintura A: 3.5, 2.7, 3.9, 4.2, 3.6, 2.7, 3.3, 5.2, 4.2, 2.9, 4.4, 5.2, 4.0, 4.1, 3.4.*
- *Pintura B: 4.7, 3.9, 4.5, 5.5, 4.0, 5.3, 4.3, 6.0, 5.2, 3.7, 5.5, 6.2, 5.1, 5.4, 4.8.*

Suponer que el tiempo de secado se distribuye normalmente con $\sigma_A = \sigma_B$ y que ambos tiempos de secado son independientes.

(a) *Encontrar un intervalo de confianza para la diferencia de las medias de nivel 95%.*

<u>Modelización:</u>

$X_{A,i}$: "tiempo de secado (en horas) del i-ésimo espécimen de la pintura de la marca A", i= 1, 2, … , 15.
$X_{B,i}$: "tiempo de secado (en horas) del i-ésimo espécimen de la pintura de la marca B", i= 1, 2, … , 15.
$\bar{X}_A$: "tiempo de secado (en horas) promedio de la pintura de la marca A de una muestra de n especímenes".
$\bar{X}_B$: "tiempo de secado (en horas) promedio de la pintura de la marca B de una muestra de n especímenes".

$X_{A,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_A, $\sigma_A^2 = \sigma^2$).
$X_{B,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_B, $\sigma_B^2 = \sigma^2$).
$\bar{X}_A \sim \mathcal{N}$ (μ_A, $\frac{\sigma_A^2}{n_A} = \frac{\sigma^2}{n_A}$).
$\bar{X}_B \sim \mathcal{N}$ (μ_B, $\frac{\sigma_B^2}{n_B} = \frac{\sigma^2}{n_B}$).
$\bar{X}_A$ - $\bar{X}_B \sim \mathcal{N}$ (μ_A - μ_B, $\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B} = \frac{\sigma^2}{n_A} + \frac{\sigma^2}{n_B}$).

<u>Pivote:</u>

T= $\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim t_{n_A + n_B - 2}$,

donde:

$\bar{X}_A$= 3,82; S_A^2= 0,607; n_A= 15.
$\bar{X}_B$= 4,94; S_B^2= 0,568; n_B= 15.

$S_p^2 = \frac{(n_A - 1) S_A^2 + (n_B - 1) S_B^2}{n_A + n_B - 2}$
$S_p^2 = \frac{(15-1)*0,607 + (15-1)*0,568}{15+15-2}$
$S_p^2 = \frac{14*0,607 + 14*0,568}{28}$

$S_p^2 = \frac{14(0,607+0,568)}{28}$
$S_p^2 = \frac{0,607+0,568}{2}$
$S_p^2 = \frac{1,176}{2}$
$S_p^2 = 0,588.$

$S_p = \sqrt{S_p^2}$
$S_p = \sqrt{0,588}$
$S_p = 0,767.$

Intervalo de confianza:

$P(-t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2} \leq T \leq t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}) = 1 - \alpha$
$P(-t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2} \leq \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}) = 1 - \alpha$
$P(-t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}} \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B) \leq t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}) = 1 - \alpha$
$P(-(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}} \leq -(\mu_A - \mu_B) \leq -(\bar{X}_A - \bar{X}_B) + t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}) = 1 - \alpha$
$P((\bar{X}_A - \bar{X}_B) - t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}} \leq \mu_A - \mu_B \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + t_{\frac{\alpha}{2},n_A+n_B-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}) = 1 - \alpha.$

$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [(3,82 - 4,94) - t_{0,025,28} * 0,767 \sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}}; (3,82 - 4,94) + t_{0,025,28} * 0,767 \sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}}]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [-1,12 - 2,048 * 0,767 \sqrt{\frac{2}{15}}; -1,12 + 2,048 * 0,767 \sqrt{\frac{2}{15}}]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [-1,12 - 2,048 * 0,767 * 0,365; -1,12 + 2,048 * 0,767 * 0,365]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [-1,12 - 0,573; -1,12 + 0,573]$
$IC_{\mu_A-\mu_B}^{95\%} = [-1,693; -0,547].$

(b) *Utilizar el intervalo calculado en el inciso (a) para hacer un test para decidir si las medias difieren.*

Hipótesis:

H_0: $\mu_A - \mu_B = 0.$
H_1: $\mu_A - \mu_B \neq 0.$

Conclusión:

Por lo tanto, ya que el intervalo de confianza de 95% no incluye el valor 0, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que las medias de los tiempos de secado (en horas) difieren, considerando un nivel de significación del 5%.

Ejercicio 10.

Se estudia el flujo de tránsito en dos intersecciones transitadas entre las 4 P.M. y las 6 P.M. para determinar la posible necesidad de señales de vuelta. Se descubrió que, en 21 días laborales, hubo, en promedio, 247,3 automóviles que se aproximaron a la primera intersección desde el sur y dieron vuelta a la izquierda, mientras que, en 11 días laborales, hubo, en promedio, 254,1 automóviles que se aproximaron a la segunda intersección desde el sur y dieron vuelta a la izquierda. Las desviaciones estándar muestrales correspondientes son S_1= 15,2 y S_2= 18,7. Suponer que las distribuciones son normales y que hay independencia entre ambas muestras. Probar la hipótesis nula μ_1 - μ_2= 0 contra la alternativa μ_1 - $\mu_2 \neq 0$ con nivel de significancia α= 0,01.

Modelización:

$X_{1,i}$: "flujo de tránsito del i-ésimo día entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la primera intersección", i= 1, 2, … , 21.
$X_{2,i}$: "flujo de tránsito del i-ésimo día entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la segunda intersección", i= 1, 2, … , 11.
$\bar{X}_1$: "flujo de tránsito promedio diario entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la primera intersección de una muestra de n días".
$\bar{X}_2$: "flujo de tránsito promedio diario entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la segunda intersección de una muestra de n días".

$X_{1,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_1, σ_1^2), i= 1, 2, … , 21.
$X_{2,i} \sim \mathcal{N}$ (μ_2, σ_2^2), i= 1, 2, … , 11.
$\bar{X}_1 \sim \mathcal{N}$ $(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$.
$\bar{X}_2 \sim \mathcal{N}$ $(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$.
$\bar{X}_1$ - $\bar{X}_2 \sim \mathcal{N}$ $(\mu_1 + \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$.

Hipótesis:

H_0: μ_1 - μ_2= 0.
H_1: μ_1 - $\mu_2 \neq 0$.

Estadístico de prueba:

T= $\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_{1_0}-\mu_{2_0})}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \sim^{aprox} t_v$, por v aproximado al entero más próximo y bajo H_0.

Valor observado:

t_0= $\frac{(247,3-254,1)-0}{\sqrt{\frac{15,2^2}{21}+\frac{18,7^2}{11}}}$
t_0= $\frac{-6,8}{\sqrt{\frac{231,04}{21}+\frac{349,69}{11}}}$

$t_0 = \frac{-6,8}{\sqrt{11+31,79}}$
$t_0 = \frac{-6,8}{\sqrt{42,79}}$
$t_0 = \frac{-6,8}{6,541}$
t_0= -1,0395.

Valor crítico:

$v = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{(\frac{S_1^2}{n_1})^2}{n_1-1}+\frac{(\frac{S_2^2}{n_2})^2}{n_2-1}}$
$v = \frac{(\frac{15,2^2}{21}+\frac{18,7^2}{11})^2}{\frac{(\frac{15,2^2}{21})^2}{21-1}+\frac{(\frac{18,7^2}{11})^2}{11-1}}$
$v = \frac{(\frac{231,04}{21}+\frac{349,69}{11})^2}{\frac{(\frac{231,04}{21})^2}{20}+\frac{(\frac{349,69}{11})^2}{10}}$
$v = \frac{(11+31,79)^2}{\frac{11^2}{20}+\frac{31,79^2}{10}}$
$v = \frac{42,79^2}{\frac{121}{20}+\frac{1010,6041}{10}}$
$v = \frac{1830,9841}{6,05+101,06041}$
$v = \frac{1830,9841}{107,11401}$
v= 17,0938.

$t_{\frac{\alpha}{2},v} \cong t_{\frac{0,01}{2},17}$
$t_{\frac{\alpha}{2},v} \cong t_{0,005,17}$
$t_{\frac{\alpha}{2},v} \cong$ 2,898.

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,01, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que flujo de tránsito promedio entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en las dos intersecciones difiere, ya que $|t_0|= |-1,0395|$= 1,0395 $< t_{\frac{\alpha}{2},v} \cong$ 2,898.

Ejercicio 11.

La directiva de una compañía de taxis está tratando de decidir si debe cambiar de neumáticos normales a neumáticos radiales para mejorar el ahorro de combustible. Se equiparon cada uno de los diez taxis con uno de los dos tipos de neumáticos y se condujeron en una trayectoria de prueba. Sin cambiar de conductores, se seleccionó el tipo de neumáticos y se repitió la trayectoria de prueba. El ahorro de combustible (en milla/galón) para los diez automóviles es:

Automóvil	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
radial	*32,1*	*36,1*	*32,3*	*29,5*	*34,3*	*31,9*	*33,4*	*34,6*	*35,2*	*32,7*
normal	*27,1*	*31,5*	*30,4*	*26,9*	*29,9*	*28,7*	*30,2*	*31,8*	*33,6*	*29,9*

Asumir que la diferencia en ahorro de combustible entre ambos neumáticos es aproximadamente normal.

(a) *Debido a que el cambio de neumáticos en la flota de taxis es caro, la directiva no quiere cambiar a menos que una prueba de hipótesis proporcione evidencias de que mejorará el millaje. Establecer la hipótesis nula y alternativa adecuadas y encontrar el p-valor.*

Modelización:

$X_{r,i}$: "ahorro de combustible (en milla/galón) del i-ésimo taxi equipado con neumáticos radiales", i= 1, 2, … , 10.
$X_{n,i}$: "ahorro de combustible (en milla/galón) del i-ésimo taxi equipado con neumáticos normales", i= 1, 2, … , 10.
X_D: "diferencia de ahorro de combustible (en milla/galón) del i-ésimo taxi equipado con neumáticos radiales versus equipado con neumáticos normales", i= 1, 2, … , 10.
$\bar{X}_D$: "diferencia de ahorro de combustible (en milla/galón) promedio de un taxi equipado con neumáticos radiales versus equipado con neumáticos normales de una muestra de n taxis".

$X_D \sim \mathcal{N}\ (\mu_D, \sigma_D^2)$.
$\bar{X}_D \sim \mathcal{N}\ (\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n})$.

Cálculos:

Automóvil	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
radial	32,1	36,1	32,3	29,5	34,3	31,9	33,4	34,6	35,2	32,7
normal	27,1	31,5	30,4	26,9	29,9	28,7	30,2	31,8	33,6	29,9
diferencia	5	4,6	1,9	2,6	4,4	3,2	3,2	2,8	1,6	2,8

$\bar{X}_D$= 3,21; S_D= 1,134.

Hipótesis:

H_0: $\mu_D \leq 0$.

H_1: $\mu_D > 0$.

Estadístico de prueba:

T= $\frac{\bar{X}_D - \mu_{D_0}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$, bajo H_0.

Valor observado:

$t_0 = \frac{3{,}21 - 0}{\frac{1{,}134}{\sqrt{10}}}$
$t_0 = \frac{3{,}21}{\frac{1{,}134}{3{,}162}}$
$t_0 = \frac{3{,}21}{0{,}3585}$
t_0= 8,953.

P-valor:

p-valor= P (T $> t_0$)
p-valor= 1 - P (T $\leq t_0$)
p-valor= 1 - P (T $\leq$ 8,953)
p-valor= 1 - F (8,953)
p-valor$\cong$ 1 - 1
p-valor$\cong$ 0.

Conclusión:

Por lo tanto, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que el cambio de neumáticos normales a neumáticos radiales mejora el ahorro de combustible, ya que el p-valor es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

(b) *Un análisis costo-beneficio muestra que será provechoso cambiar a neumáticos radiales si la media de la mejora del millaje es mayor a dos millas/galón. Establecer la hipótesis nula y alternativa adecuadas y encontrar el p-valor, para una prueba de hipótesis diseñada como base de la decisión de cambiar.*

Hipótesis:

H_0: $\mu_D \leq 2$.
H_1: $\mu_D > 2$.

Estadístico de prueba:

T= $\frac{\bar{X}_D - \mu_{D_0}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$, bajo H_0.

Valor observado:

$t_0 = \frac{3{,}21-2}{\frac{1{,}134}{\sqrt{10}}}$

$t_0 = \frac{1{,}21}{\frac{1{,}134}{3{,}162}}$

$t_0 = \frac{1{,}21}{0{,}3585}$

t_0= 3,375.

P-valor:

p-valor= P (T $> t_0$)
p-valor= 1 - P (T $\leq t_0$)
p-valor= 1 - P (T $\leq$ 3,375)
p-valor= 1 - F (3,375)
p-valor= 1 - 0,9959
p-valor= 0,0041.

Conclusión:

Por lo tanto, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que la media de la mejora del millaje es mayor a dos millas/galón, ya que el p-valor es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).

Ejercicio 12.

El departamento de seguridad de un gran edificio de oficinas quiere probar la hipótesis nula de que σ= 2 minutos para el tiempo que tarda un guardia en realizar su rondín contra la hipótesis alternativa de que $\sigma \neq 2$ minutos. ¿Qué se puede concluir con un nivel de significancia de 0,01, si una muestra aleatoria de tamaño n= 31 da como resultado S= 1,8 minutos? Asumir que la muestra proviene de una distribución normal.

Modelización:

X_i: "tiempo (en minutos) del i-ésimo día que tarda un guardia en realizar su rondín", i= 1, 2, … , 31.

$X_i \sim \mathcal{N}$ (μ, σ^2), i= 1, 2, … , 31.

Hipótesis:

H_0: σ= 2.
H_1: $\sigma \neq$ 2.

Estadístico de prueba:

X= $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$, bajo H_0.

Valor observado:

x_0= $\frac{(31-1)*1,8^2}{2^2}$
x_0= $\frac{30*3,24}{4}$
x_0= $\frac{97,2}{4}$
x_0= 24,3.

Valores críticos:

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= $\chi^2_{\frac{0,01}{2},30}$
$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= $\chi^2_{0,005,30}$
$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= 53,7.

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$= $\chi^2_{1-\frac{0,01}{2},30}$
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$= $\chi^2_{1-0,005,30}$
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$= $\chi^2_{0,995,30}$
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$= 13,8.

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,01, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que la desviación estándar del tiempo (en minutos) que tarda un guardia en realizar su rondín es distinta de 2 minutos, ya que $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$= 13,8 $<$ x_0= 24,3 $<$ $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$= 53,7.

Ejercicio 13.

Con referencia al Ejercicio 10, usar el nivel de significancia de 0,05 para probar la afirmación de que existe una mayor variabilidad en el número de automóviles que dan vuelta a la izquierda aproximándose desde el sur entre 4 P.M. y 6 P.M. en la segunda intersección.

Modelización:

$X_{1,i}$: "flujo de tránsito del i-ésimo día entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la primera intersección", i= 1, 2, … , 21.
$X_{2,i}$: "flujo de tránsito del i-ésimo día entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la segunda intersección", i= 1, 2, … , 11.

$X_{1,i} \sim \mathcal{N}\ (\mu_1, \sigma_1^2)$, i= 1, 2, … , 21.
$X_{2,i} \sim \mathcal{N}\ (\mu_2, \sigma_2^2)$, i= 1, 2, … , 11.

Hipótesis:

H_0: $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$.
H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

Estadístico de prueba:

F= $\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$= $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim f_{n_1-1,n_2-1}$, bajo H_0.

Valor observado:

f_0= $\frac{15{,}2^2}{18{,}7^2}$
f_0= $\frac{231{,}04}{349{,}69}$
f_0= 0,661.

Valor crítico:

$f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$= $f_{1-0{,}05,20,10}$
$f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$= $f_{0{,}95,20,10}$
$f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$= 0,426.

Conclusión:

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,05, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que existe una mayor variabilidad en el número de automóviles que dan vuelta a la izquierda aproximándose desde el sur entre las 4 P.M. y las 6 P.M. en la segunda intersección, ya que f_0= 0,661 $> f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$= 0,426.

Ejercicio 14.

Un taller acaba de recibir una máquina nueva y busca ajustarla correctamente. Según el técnico vendedor de la máquina, la máquina está ajustada para que no produzca más de 4% de piezas defectuosas. Al tomar una muestra de 350 piezas producidas, encuentra 10 defectuosas. La empresa no puede permitirse un nivel de defectuosos mayor de 5%. Razonar qué tipo de test se debe realizar con el fin de determinar si la máquina se encuentra mal ajustada y realizar dicho contraste (tomar α= 0,05).

Modelización:

X_i: "i-ésima pieza producida defectuosa por una máquina nueva (1 si defectuosa, 0 c.c.)", i= 1, 2, … , 350.
$\hat{P}= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$: "proporción de piezas producidas defectuosas por una máquina nueva de una muestra de n piezas producidas".

$X_i \sim$ B (1, p), i= 1, 2, … , 350.
$\hat{P} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p, $\frac{p(1-p)}{n}$), por TCL.

Hipótesis:

H_0: p $\leq$ 0,05.
H_1: p $>$ 0,05.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{\hat{P}-p_0}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$z_0= \frac{\frac{10}{350}-0,05}{\sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{350}}}$
$z_0= \frac{0,0286-0,05}{\sqrt{\frac{0,05*0,95}{350}}}$
$z_0= \frac{-0,0214}{\sqrt{\frac{0,0475}{350}}}$
$z_0= \frac{-0,0214}{\sqrt{0,000136}}$
$z_0= \frac{-0,0214}{0,0116}$
z_0= -1,839.

Valor crítico:

$z_\alpha \cong z_{0,05}$
$z_\alpha \cong$ 1,645.

<u>Conclusión:</u>

Por lo tanto, con un nivel de significancia de α= 0,05, estos datos no aportan evidencia suficiente para indicar que la máquina se encuentra mal ajustada, ya que z_0= -1,839 $< z_\alpha$ $\cong$ 1,645.

Ejercicio 15.

En una muestra de 100 lotes de un producto químico comprado al distribuidor A, 70 satisfacen una especificación de pureza. En una muestra de 70 lotes comprada al distribuidor B, 61 satisfacen la especificación. ¿Se puede concluir que una proporción mayor de los lotes del distribuidor B satisface la especificación? Utilizar el p-valor.

Modelización:

$X_{A,i}$: "i-ésimo producto químico que satisface una especificación de pureza comprado al distribuidor A (1 si satisface, 0 c.c.)", i= 1, 2, … , 100.
$X_{B,i}$: "i-ésimo producto químico que satisface una especificación de pureza comprado al distribuidor B (1 si satisface, 0 c.c.)", i= 1, 2, … , 70.
$\hat{P}_A= \frac{\sum_{i=1}^{n_A} X_{Ai}}{n_A}$: "proporción de productos químicos que satisfacen una especificación de pureza comprados al distribuidor A de una muestra de n productos químicos".
$\hat{P}_B= \frac{\sum_{i=1}^{n_B} X_{Bi}}{n_B}$: "proporción de productos químicos que satisfacen una especificación de pureza comprado al distribuidor B de una muestra de n productos químicos".

$X_{A,i} \sim$ B (1, p_A), i= 1, 2, … , 100.
$X_{B,i} \sim$ B (1, p_B), i= 1, 2, … , 70.
$\hat{P}_A \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p_A, $\frac{p_A(1-p_A)}{n_A}$), por TCL.
$\hat{P}_B \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p_B, $\frac{p_B(1-p_B)}{n_B}$), por TCL.
$\hat{P}_A$ - $\hat{P}_B \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (p_A - p_B, $\frac{p_A(1-p_A)}{n_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{n_B}$), por TCL.

Hipótesis:

H_0: p_A - $p_B \geq 0$.
H_1: p_A - $p_B < 0$.

Estadístico de prueba:

Z= $\frac{(\hat{P}_A-\hat{P}_B)-(p_{A_0}-p_{B_0})}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B})}} \sim^{aprox} \mathcal{N}$ (0, 1), por TCL y bajo H_0.

Valor observado:

$\hat{P}= \frac{\sum_{i=1}^{n_A} X_{Ai}+\sum_{i=1}^{n_B} X_{Bi}}{n_A+n_B}$
$\hat{P}= \frac{70+61}{100+70}$
$\hat{P}= \frac{131}{170}$
$\hat{P} \cong 0{,}77$.

$z_0 = \frac{(0,7-0,871)-0}{\sqrt{0,77(1-0,77)(\frac{1}{100}+\frac{1}{70})}}$
$z_0 = \frac{-0,171}{\sqrt{0,77*0,23(0,01+0,014)}}$
$z_0 = \frac{-0,171}{\sqrt{0,77*0,23*0,024}}$
$z_0 = \frac{-0,171}{\sqrt{0,0043}}$
$z_0 = \frac{-0,171}{0,066}$
z_0= -2,62.

P-valor:

p-valor≅ P (Z $<$ z_0)
p-valor≅ P (Z $<$ -2,62)
p-valor≅ F (-2,62)
p-valor≅ 0,0044.

Conclusión:

Por lo tanto, estos datos aportan evidencia suficiente para indicar que una proporción mayor de los lotes del distribuidor B satisface la especificación de pureza, ya que el p-valor (aproximado) es significativamente menor que los niveles de significancia (α) usuales (0,01, 0,05, 0,1).