



# Proyecto Final

## Lógica para ciencias de la computación

Salome Viana y Juanita Gómez

10 de noviembre de 2019

# 1. Planteamiento del Problema



## Teorema de los 4 colores

Dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas, este puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color.



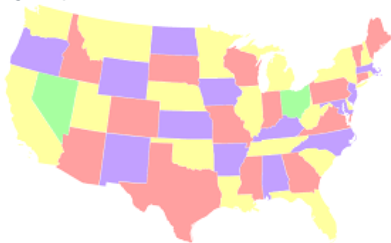
- ▶ Dos regiones son adyacentes si comparten un segmento de frontera en común, no una esquina donde se encuentran 3 o más regiones.
- ▶ Todas las regiones del mapa son conexas y contiguas, es decir no pueden estar divididas en 2 o más regiones.



## Formulación del problema

Dado un mapa determinado, se quiere encontrar una coloración del mismo, de tal manera que no haya regiones continuas con el mismo color, usando únicamente 4 colores.

### Ejemplo:



- En la figura, se puede observar cómo el mapa de Estados Unidos está coloreado con 4 colores distintos de tal manera que se cumplen las condiciones del problema.

## 2. Representación en Logica proposicional



Considere el siguiente mapa con 9 regiones.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

- En este mapa vamos a identificar las zonas con las letras A, B, C, D, E, F, G, H e I como se muestra en la figura.

Vamos a utilizar los colores **morado**, **naranja**, **azul** y **verde**



Para este problema, las letras proposicionales van a representar las posibles coloraciones de cada una de las regiones del mapa. Por ejemplo, las 36 letras proposicionales correspondientes a este mapa serían de la siguiente manera:

- ▶ **a:** A esta coloreada de morado.
- ▶ **b:** A esta coloreada de naranja.
- ▶ **c:** A esta coloreada de azul.
- ▶ **d:** A esta coloreada de verde.
- ▶ **e:** B esta coloreada de morado.
- ▶ **f:** B esta coloreada de naranja.
- ▶ **g:** B esta coloreada de azul.
- ▶ **h:** B esta coloreada de verde.
- ▶ **i:** C esta coloreada de morado.
- ▶ **j:** C esta coloreada de naranja.
- ▶ **k:** C esta coloreada de azul.
- ▶ **l:** C esta coloreada de verde.



- ▶ **m**: D esta coloreada de morado.
- ▶ **n**: D esta coloreada de naranja.
- ▶ **o**: D esta coloreada de azul.
- ▶ **p**: D esta coloreada de verde.
- ▶ **q**: E esta coloreada de morado.
- ▶ **r**: E esta coloreada de naranja.
- ▶ **s**: E esta coloreada de azul.
- ▶ **t**: E esta coloreada de verde.
- ▶ **u**: F esta coloreada de morado.
- ▶ **v**: F esta coloreada de naranja.
- ▶ **w**: F esta coloreada de azul.
- ▶ **x**: F esta coloreada de verde.



- ▶ y: G esta coloreada de morado.
- ▶ z: G esta coloreada de naranja.
- ▶ 0: G esta coloreada de azul.
- ▶ 1: G esta coloreada de verde.
- ▶ 2: H esta coloreada de morado.
- ▶ 3: H esta coloreada de naranja.
- ▶ 4: H esta coloreada de azul.
- ▶ 5: H esta coloreada de verde.
- ▶ 6: I esta coloreada de morado.
- ▶ 7: I esta coloreada de naranja.
- ▶ 8: I esta coloreada de azul.
- ▶ 9: I esta coloreada de verde.



De acuerdo con el planteamiento del problema podemos enunciar las siguientes reglas.

## Regla 1

Todas las regiones deben estar coloreadas de un único color.

**Ejemplo:**

$$(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (b \wedge \neg a \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (c \wedge \neg a \wedge \neg b \wedge \neg d) \vee (d \wedge \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$$





## Regla 2

Dos regiones adyacentes no pueden estar coloreadas del mismo color.

### Ejemplo:

- ▶  $a \rightarrow (-e \wedge -m)$
- ▶  $b \rightarrow (-f \wedge -n)$
- ▶  $c \rightarrow (-g \wedge -o)$
- ▶  $d \rightarrow (-h \wedge -p)$



Teniendo en cuenta las dos condiciones que deben cumplirse en este problema, la regla que lo va a dirigir es la conjunción de la regla 1 y la regla 2.



Considere por ejemplo la siguiente interpretación:

$\{ 'a:0', 'b:1', 'c:0', 'd:0', 'e:1', 'f:0', 'g:0', 'h:0', 'i:0', 'j:0', 'k:0', 'l:1', 'm:0', 'n:0', 'o:1', 'p:0', 'q:0', 'r:0', 's:0', 't:1', 'u:0', 'v:1', 'w:0', 'x:0', 'y:1', 'z:0', '0:0', '1:0', '2:0', '3:1', '4:0', '5:0', '6:0', '7:0', '8:1', '-9:0' \}$

Usando esta interpretación como ejemplo, vamos a construir una lista de literales de la siguiente manera: Sin pérdida de generalidad,

- ▶ Si  $I(p)=0$ , agregamos a la lista  $\neg p$
- ▶ Si  $I(p)=1$ , agregamos a la lista  $p$



Con el procedimiento anterior, obtenemos la siguiente lista, la cual usaremos para generar su coloración correspondiente utilizando el código de Python.

```
f = ['-a', 'b', '-c', '-d', 'e', '-f', '-g', '-h', '-i', '-j', '-k', 'l', '-m', '-n', 'o', '-p', '-q',  
'-r', '-s', 't', '-u', 'v', '-w', '-x', 'y', '-z', '-0', '-1', '-2', '3', '-4', '-5', '-6', '-7', '8',  
'-9']
```

Note que en esta lista, los primeros 8 literales significan que la casilla A esta coloreada de naranja (y no de morado, ni azul, ni verde) y que la casilla B esta coloreada de morado (y no de naranja, azul ni verde).

Así, los 36 literales dan la siguiente coloración, la cual se obtuvo con el código de Python adjunto:

A	B	C
D	E	F
G	H	I



- ▶ Creación de las reglas en lógica proposicional
- ▶ **Tseitin**: para obtener una formula en FNC que sea igualmente buena que la regla pero más corta (y fácil de trabajar)
- ▶ **DPLL**: para obtener una interpretación que haga verdadera la regla
- ▶ Representación gráfica de la solución

Representación de la situación sin condiciones iniciales.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Solución sin condiciones iniciales

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Representación de la situación con condiciones iniciales

- r: E está coloreado de naranja
- m: D está coloreado de morado
- x: F está coloreado de verde
- 8: I está coloreado de azul

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Solución sin condiciones iniciales

A	B	C
D	E	F
G	H	I