Proyecto Final

Lógica para ciencias de la computación

Salome Viana y Juanita Gómez

24 de mayo de 2019

1. Planteamiento del Problema

Teorema de los 4 colores

Dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas, este puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color.

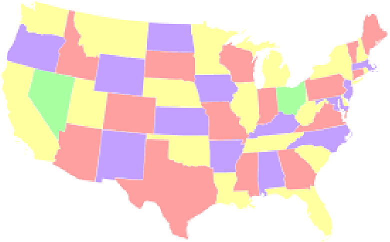
- Dos regiones son adyacentes si comparten un segmento de frontera en común, no una esquina donde se encuentran 3 o más regiones.
- Todas las regiones del mapa son conexas y contiguas, es decir no pueden estar divididas en 2 o más regiones.

Problema

Formulación del problema

Dado un mapa determinado, se quiere encontrar una coloración del mismo, de tal manera que no haya regiones continuas con el mismo color, usando únicamente 4 colores.

Ejemplo:



- En la figura, se puede observar cómo el mapa de Estados Unidos está coloreado con 4 colores distintos de tal manera que se cumplen las condiciones del problema.

2. Representación en Logica proposicional

Considere el siguiente mapa con 9 regiones.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

- En este mapa vamos a identificar las zonas con las letras A, B, C, D, E, F, G, H e I como se muestra en la figura.

  Vamos a utilizar los colores morado, naranja, azul y verde

Letras Proposicionales

Para este problema, las letras proposicionales van a representar las posibles coloraciones de cada una de las regiones del mapa. Por ejemplo, las 36 letras proposicionales correspondientes a este mapa serían de la siguiente manera:

- **a**: A esta coloreada de morado.
- **b**: A esta coloreada de naranja.
- **c**: A esta coloreada de azul.
- **d**: A esta coloreada de verde.
- **e**: B esta coloreada de morado.
- **f**: B esta coloreada de naranja.
- **g**: B esta coloreada de azul.
- **h**: B esta coloreada de verde.
- **i**: C esta coloreada de morado.
- **j**: C esta coloreada de naranja.
- **k**: C esta coloreada de azul.
- **l**: C esta coloreada de verde.

- **m**: D esta coloreada de morado.
- **n**: D esta coloreada de naranja.
- **o**: D esta coloreada de azul.
- **p**: D esta coloreada de verde.
- **q**: E esta coloreada de morado.
- **r**: E esta coloreada de naranja.
- **s**: E esta coloreada de azul.
- **t**: E esta coloreada de verde.
- **u**: F esta coloreada de morado.
- **v**: F esta coloreada de naranja.
- **w**: F esta coloreada de azul.
- **x**: F esta coloreada de verde.

- **y**: G esta coloreada de morado.
- **z**: G esta coloreada de naranja.
- **0**: G esta coloreada de azul.
- **1**: G esta coloreada de verde.
- **2**: H esta coloreada de morado.
- **3**: H esta coloreada de naranja.
- **4**: H esta coloreada de azul.
- **5**: H esta coloreada de verde.
- **6**: I esta coloreada de morado.
- **7**: I esta coloreada de naranja.
- **8**: I esta coloreada de azul.
- **9**: I esta coloreada de verde.

Reglas

De acuerdo con el planteamiento del problema podemos enunciar las siguientes reglas.

Regla 1

Todas las regiones deben estar coloreadas de un único color.

Ejemplo:

$$(a \wedge -b \wedge -c \wedge -d) \vee (b \wedge -a \wedge -c \wedge -d) \vee (c \wedge -a \wedge -b \wedge -d) \vee (d \wedge -a \wedge -b \wedge -c)$$

Regla 2

Dos regiones adyacentes no pueden estar coloreadas del mismo color.

Ejemplo:

- $a \rightarrow (-e \wedge -m)$
- $b \rightarrow (-f \wedge -n)$
- $c \rightarrow (-g \wedge -o)$
- $d \rightarrow (-h \wedge -p)$

Regla

Teniendo en cuenta las dos condiciones que deben cumplirse en este problema, la regla que lo va a dirigir es la conjunción de la regla 1 y la regla 2.

Representación Gráfica de Soluciones

Considere por ejemplo la siguiente interpretación:

{'a:0', 'b:1', 'c:0', 'd:0', 'e:1', 'f:0', 'g:0', 'h:0', 'i:0','j:0', 'k:0', 'l:1', 'm:0', 'n:0', 'o:1', 'p:0', 'q:0', 'r:0', 's:0','t:1', 'u:0', 'v:1', 'w:0', 'x:0', 'y:1', 'z:0', '0:0', '1:0', '2:0','3:1', '4:0', '5:0', '6:0', '7:0', '8:1', '-9:0'}

Usando esta interpretación como ejemplo, vamos a construir una lista de literales de la siguiente manera: Sin pérdida de generalidad,

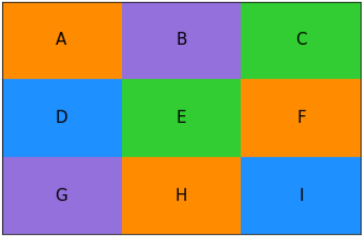
- Si I(p)=0, agregamos a la lista $\neg$p
- Si I(p)=1, agregamos a la lista p

Representación Gráfica de Soluciones

Con el procedimiento anterior, obtenemos la siguiente lista, la cual usaremos para generar su coloración correspondiente utilizando el código de Python.

f = ['-a', 'b', '-c', '-d', 'e', '-f', '-g', '-h', '-i','-j', '-k', 'l', '-m', '-n', 'o', '-p', '-q', '-r', '-s','t', '-u', 'v', '-w', '-x', 'y', '-z', '-0', '-1', '-2','3', '-4', '-5', '-6', '-7' , '8', '-9']

Note que en esta lista, los primeros 8 literales significan que la casilla A esta coloreada de naranja (y no de morado, ni azul, ni verde) y que la casilla B esta coloreada de morado (y no de naranja, azul ni verde). Así, los 36 literales dan la siguiente coloración, la cual se obtuvo con el código de Python adjunto:



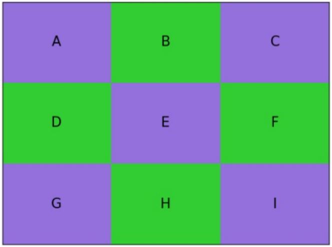
Resolución del problema

- Creación de las reglas en lógica proposicional
- **Tseitin**: para obtener una formula en FNC que sea igualmente buena que la regla pero más corta (y fácil de trabajar)
- **DPLL**: para obtener una interpretación que haga verdadera la regla
- Representación gráfica de la solución

Representación de la situación sin condiciones iniciales.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

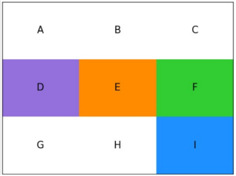
Solución sin condiciones iniciales



Soluciones

Representación de la situación con condiciones iniciales

- r: E está coloreado de naranja
- m: D está coloreado de morado
- x: F está coloreado de verde
- 8: I está coloreado de azul



Solución sin condiciones iniciales