**Enunciado:**

Resuelva los siguientes ejercicios sobre algoritmos de ordenamiento y de selección básicos. Analice el peor y el mejor casos para el tiempo de ejecución en los ejercicios que corresponda. Para realizar algunos de los ejercicios puede usar los siguientes tipos de dato: `int[]`, `std::vector<int>` o `std::vector<string>`, según corresponda.

1. Una **inversión** en un arreglo de números, $A$, se define como un par ordenado $(i, j)$ tal que, dado $i < j$, se satisface que $A_i > A_j$. Por ejemplo, el arreglo $A = \{1, 3, 2\}$ tiene una inversión: $(A_1, A_2)$; pero el arreglo $A = \{3, 1, 2\}$ tiene dos inversiones: $(3, 1)$ y $(3, 2)$. Pruebe que el número promedio de inversiones en un arreglo de $N$ elementos distintos es $N(N-1)/4$ y muestre también que $N(N-1)/4 = \Omega(N^2)$.

2. Demuestre que cualquier algoritmo que ordena por medio del intercambio de elementos contiguos requiere un tiempo de ejecución *promedio* que pertenece al conjunto de funciones $\Omega(N^2)$. Muestre que `bubble sort` satisface este teorema. ¿Para qué otros algoritmos de ordenamiento aplica el resultado? Explique.

3. Dado un arreglo de elementos $A = \{A[i]\}_{i=1,\dots,N}$, programe funciones o métodos que encuentran:

   *a*) El ítem mínimo $z$ tal que $z < A[i]$ para todo $i$.
   
   *b*) El ítem máximo $z$ tal que $z > A[i]$ para todo $i$.

   Analice el tiempo de ejecución de estas funciones usando el modelo RAM (y el modelo de comparaciones, si aplica). ¿Cuál es el número de comparaciones máximo que ejecuta sus algoritmos?

4. Usando *selection sort*, *insertion sort* y *bubble sort*, escriba un programa que encuentra la $k$-ésima estadística de orden (*k-th order statistics*), dado un arreglo de enteros $A$ de tamaño $N$. Proponga dos algoritmos con tiempos de ejecución:

   *a*) $O(N^2)$.
   
   *b*) $O(k \cdot N)$.

   Calculando el tiempo de ejecución para cada algoritmo $T(N)$ dentro del modelo RAM, demuestre que $T(N)$ pertenece a los conjuntos de funciones mencionados anteriormente.

5. Dado un arreglo $A = \{A[i]\}_{i=1,\dots,N}$ de números enteros, de longitud $N$, encuentre su media (*mean*) y mediana (*median*). La media $\overline{A}$ de un arreglo $A$ se define como

   $$\overline{A} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A[i]$$

   La mediana de un arreglo *ordenado* $A$ es definido como: el elemento del medio, cuando $N$ es impar; y como la media de los dos elementos del medio, cuando $N$ es par.

6. Considere un arreglo de $N$ números enteros. Diseñe un algoritmo que mueve todos los ceros, 0, al final del arreglo, manteniendo el orden de los elementos distintos de cero. La complejidad computacional del algoritmo debe ser $O(N)$ en tiempo de ejecución y $O(1)$ en almacenamiento en memoria, adicional al arreglo original.

   NOTA: Este problema puede resolverse recorriendo el arreglo una o dos veces.