Interpretaciones, satisfabilidad, validez y consecuencia

Sesión 3

Edgar Andrade, PhD

Enero de 2019

Departmento de Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Presentación

En esta sesión estudiaremos:

1. Interpretaciones
2. Clasificación de fórmulas de acuerdo a sus interpretaciones
3. Consecuencia lógica

Contenido

Interpretaciones

Determinar cuándo una proposición está en ‘concordancia’ con el mundo (es verdadera)

Interpretaciones

Determinar cuándo una proposición está en ‘concordancia’ con el mundo (es verdadera)

Conexión entre el lenguaje y el mundo

Interpretaciones

Determinar cuándo una proposición está en 'concordancia' con el mundo (es verdadera)

Conexión entre el lenguaje y el mundo

Mundo posible: estipulación de cuáles situaciones básicas del mundo 'acaecen' (son verdaderas)

Interpretaciones

Determinar cuándo una proposición está en ‘concordancia’ con el mundo (es verdadera)

Conexión entre el lenguaje y el mundo

Mundo posible: estipulación de cuáles situaciones básicas del mundo ‘acaecen’ (son verdaderas)

Interpretación: asignación de valores a los átomos del lenguaje

Interpretaciones

Determinar cuándo una proposición está en ‘concordancia’ con el mundo (es verdadera)

Conexión entre el lenguaje y el mundo

Mundo posible: estipulación de cuáles situaciones básicas del mundo ‘acaecen’ (son verdaderas)

Interpretación: asignación de valores a los átomos del lenguaje

Asignación de valor a las fórmulas complejas en función de los valores de sus átomos

Interpretación de los átomos

Sea f una fórmula. Definimos P_f como el conjunto de átomos de f.

Decimos que I es una interpretación de f si $I{:}P_f \to \{1, 0\}$. Es decir, I es una función que a cada átomo de f le asigna o bien el valor 1 o bien el 0.

Ejemplo

Suponga que f es la fórmula $(\neg p \vee q)$.

Claramente $P_f = \{p, q\}$.

Ejemplo

Suponga que f es la fórmula $(\neg p \vee q)$.

Claramente $P_f = \{p, q\}$.

Una interpretación I_1 de f puede ser:

Átomo	p	q
I_1	1	1

Ejemplo

Suponga que f es la fórmula $(\neg p \vee q)$.

Claramente $P_f = \{p, q\}$.

Una interpretación I_1 de f puede ser:

Átomo	p	q
I_1	1	1

Existen otras tres interpretaciones de f:

Átomo	p	q
I_2	1	0
I_3	0	1
I_4	0	0

Valor de una fórmula (1/6)

Sea f una fórmula e I una interpretación de f.

$\textsc{Def}\ V_I(f)$:

$\quad\textsc{Si}\ f.\textsc{right} == \textsc{null}$:

$\qquad\textsc{Retornar}\ I(f.\textsc{label})$

$\qquad\vdots$

Valor de una fórmula (1/6)

Sea f una fórmula e I una interpretación de f.

$\textsc{Def}$ $V_I(f)$:

  $\textsc{Si}$ $f.\textsc{right} == \textsc{null}$:

    $\textsc{Retornar}$ $I(f.\textsc{label})$

    $\vdots$

Ej: Sea

$I(p)=1$

$A=\textsc{Tree}(p, \textsc{null}, \textsc{null})$

Valor de una fórmula (1/6)

Sea f una fórmula e I una interpretación de f.

DEF $V_I(f)$:

  SI f.RIGHT == NULL:

    RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$

    $\vdots$

Ej: Sea

$I(p)=1$

$A=$TREE(p, NULL, NULL)

Valor de una fórmula (1/6)

Sea f una fórmula e I una interpretación de f.

DEF $V_I(f)$:

  SI f.RIGHT == NULL:

    RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$

    ⋮

Ej: Sea

$I(p)=1$

$A=\text{TREE}(p, \text{NULL}, \text{NULL})$

☞$V_I(A)=I(A.\text{LABEL})$

Valor de una fórmula (1/6)

Sea f una fórmula e I una interpretación de f.

DEF $V_I(f)$:

  SI f.RIGHT == NULL:

    RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$

    ⋮

Ej: Sea

$I(p)$=1

A=TREE(p, NULL, NULL)

☞$V_I(A) = I(p)$=1

Valor de una fórmula (2/6)

```
Def V_I(f):
    Si f.right == null:
        Retornar I(f.label)
```

Si no, si f.label == $\neg$:

  Retornar $1 - V_I(f.\text{right})$

  $\vdots$

Valor de una fórmula (2/6)

DEF $V_I(f)$:
  SI f.RIGHT == NULL:
    RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$

SI NO, SI f.LABEL == $\neg$:
  RETORNAR $1 - V_I(f.\text{RIGHT})$
  $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1

A=TREE(p, NULL, NULL); B=TREE($\neg$, NULL, A)

Valor de una fórmula (2/6)

$\textsc{Def}\ V_I(f)$:
$\quad\textsc{Si}\ f.\textsc{right} == \textsc{null}$:
$\quad\quad\textsc{Retornar}\ I(f.\textsc{label})$

$\textsc{Si no, si}\ f.\textsc{label} == \neg$:
$\quad\textsc{Retornar}\ 1 - V_I(f.\textsc{right})$
$\quad\vdots$

Ej: Sean

$I(p)=1$

$A=\textsc{Tree}(p, \textsc{null}, \textsc{null})$; $B=\textsc{Tree}(\neg, \textsc{null}, A)$

Valor de una fórmula (2/6)

DEF $V_I(f)$:
SI f.RIGHT == NULL:
RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$

SI NO, SI f.LABEL == $\neg$:
RETORNAR $1 - V_I(f.\text{RIGHT})$
$\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1

A=TREE(p, NULL, NULL); B=TREE($\neg$, NULL, A)

☞$V_I(B) = 1 - V_I(B.\text{RIGHT})$

Valor de una fórmula (2/6)

DEF $V_I(f)$:
  SI f.RIGHT == NULL:
    RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$

SI NO, SI f.LABEL == $\neg$:
  RETORNAR $1 - V_I(f.\text{RIGHT})$
  $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1

A=TREE(p, NULL, NULL); B=TREE($\neg$, NULL, A)

☞ $V_I(B) = 1 - V_I(A)$

Valor de una fórmula (2/6)

Def $V_I(f)$:
  Si f.right == null:
    Retornar $I(f.\text{label})$

Si no, si f.label == $\neg$:
  Retornar $1 - V_I(f.\text{right})$
  $\vdots$

☞ $V_I(B) = 1 - 1 = 0$

Valor de una fórmula (3/6)

Def $V_I(f)$:
  Si f.right == null:
    Retornar $I(f.\text{label})$
  Si no, si f.label == $\neg$:
    Retornar $1 - V_I(f.\text{right})$

Si no, si f.label == $\wedge$:
    Retornar $V_I(f.\text{left}) \times V_I(f.\text{right})$
    ⋮

Valor de una fórmula (3/6)

```
Def V_I(f):
    Si f.right == null:
        Retornar I(f.label)
    Si no, si f.label == ¬:
        Retornar 1 − V_I(f.right)
    Si no, si f.label == ∧:
        Retornar V_I(f.left) × V_I(f.right)
        ⋮
```

Ej: Sean

$I(p)=1$; $A=\text{Tree}(p, \text{null}, \text{null})$; $B=\text{Tree}(\neg, \text{null}, A)$

$C=\text{Tree}(\wedge, A, B)$

Valor de una fórmula (3/6)

DEF $V_I(f)$:
  SI f.RIGHT == NULL:
    RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$
  SI NO, SI f.LABEL == $\neg$:
    RETORNAR $1 - V_I(f.\text{RIGHT})$

SI NO, SI f.LABEL == $\wedge$:
    RETORNAR $V_I(f.\text{LEFT}) \times V_I(f.\text{RIGHT})$
    $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1; A=TREE(p, NULL, NULL); B=TREE($\neg$, NULL, A)

C=TREE($\wedge$, A, B)

Valor de una fórmula (3/6)

Def $V_I(f)$:
  Si f.right == null:
    Retornar $I(f.\text{label})$
  Si no, si f.label == $\neg$:
    Retornar $1 - V_I(f.\text{right})$

Si no, si f.label == $\wedge$:

Retornar $V_I(f.\text{left}) \times V_I(f.\text{right})$

$\vdots$

Ej: Sean

$I(p)=1$; $A=$Tree(p, null, null); $B=$Tree($\neg$, null, A)

$C=$Tree($\wedge$, A, B)

☞$V_I(C) = V_I(C.\text{left}) \times V_I(C.\text{right})$

Valor de una fórmula (3/6)

DEF $V_I(f)$:
SI f.RIGHT == NULL:
RETORNAR $I(f$.LABEL$)$
SI NO, SI f.LABEL == $\neg$:
RETORNAR $1 - V_I(f$.RIGHT$)$

SI NO, SI f.LABEL == $\wedge$:
RETORNAR $V_I(f.\text{LEFT}) \times V_I(f.\text{RIGHT})$
$\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1; A=TREE(p, NULL, NULL); B=TREE($\neg$, NULL, A)

C=TREE($\wedge$, A, B)

$V_I(C) = V_I(C.\text{LEFT}) \times V_I(C.\text{RIGHT})$

Valor de una fórmula (3/6)

Def $V_I(f)$:
  Si f.right == null:
    Retornar $I(f.\text{label})$
  Si no, si f.label == $\neg$:
    Retornar $1 - V_I(f.\text{right})$

Si no, si f.label == $\wedge$:
    Retornar $V_I(f.\text{left}) \times V_I(f.\text{right})$
    $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)=1$; A=Tree(p, null, null); B=Tree($\neg$, null, A)

C=Tree($\wedge$, A, B)

$V_I(C) = V_I(A) \times V_I(C.\text{right})$

Valor de una fórmula (3/6)

$\textsc{Def}\ V_I(f)$:
  $\textsc{Si}\ f.\textsc{right} == \textsc{null}$:
    $\textsc{Retornar}\ I(f.\textsc{label})$
  $\textsc{Si no, si}\ f.\textsc{label} == \neg$:
    $\textsc{Retornar}\ 1 - V_I(f.\textsc{right})$

$\textsc{Si no, si}\ f.\textsc{label} == \wedge$:
    $\textsc{Retornar}\ V_I(f.\textsc{left}) \times V_I(f.\textsc{right})$
    $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)=1$; $A=\textsc{Tree}(p, \textsc{null}, \textsc{null})$; $B=\textsc{Tree}(\neg, \textsc{null}, A)$

$C=\textsc{Tree}(\wedge, A, B)$

$V_I(C) = V_I(A) \times V_I(C.\textsc{right})$

Valor de una fórmula (3/6)

DEF $V_I(f)$:
    SI f.RIGHT == NULL:
        RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$
    SI NO, SI f.LABEL == $\neg$:
        RETORNAR $1 - V_I(f.\text{RIGHT})$

SI NO, SI f.LABEL == $\wedge$:
        RETORNAR $V_I(f.\text{LEFT}) \times V_I(f.\text{RIGHT})$
        $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1; A=TREE(p, NULL, NULL); B=TREE($\neg$, NULL, A)

C=TREE($\wedge$, A, B)

$V_I(C) = V_I(A) \times V_I(B)$

Valor de una fórmula (3/6)

Def $V_I(f)$:
  Si f.right == null:
    Retornar $I(f.\text{label})$
  Si no, si f.label == $\neg$:
    Retornar $1 - V_I(f.\text{right})$

Si no, si f.label == $\wedge$:
    Retornar $V_I(f.\text{left}) \times V_I(f.\text{right})$
    $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1; A=Tree(p, null, null); B=Tree($\neg$, null, A)

C=Tree($\wedge$, A, B)

$V_I(C) = 1 \times 0 = 0$

Valor de una fórmula (4/6)

DEF $V_I(f)$:
  SI f.RIGHT == NULL:
    RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$
  SI NO, SI f.LABEL == $\neg$:
    RETORNAR $1 - V_I(f.\text{RIGHT})$
  SI NO, SI f.LABEL == $\wedge$:
      4RETORNAR $V_I(f.\text{LEFT}) \times V_I(f.\text{RIGHT})$

SI NO, SI f.LABEL == $\vee$:
  RETORNAR MAX$\{V_I(f.\text{LEFT}), V_I(f.\text{RIGHT})\}$
  $\vdots$

Valor de una fórmula (4/6)

Def $V_I(f)$:
Si f.right == null:
Retornar $I(f.\text{label})$
Si no, si f.label == $\neg$:
Retornar $1 - V_I(f.\text{right})$
Si no, si f.label == $\wedge$:
4Retornar $V_I(f.\text{left}) \times V_I(f.\text{right})$

Si no, si f.label == $\vee$:
Retornar $\max\{V_I(f.\text{left}), V_I(f.\text{right})\}$
$\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1; A=Tree(p, null, null); B=Tree($\neg$, null, A)

C=Tree($\vee$, A, B)

Valor de una fórmula (4/6)

Def $V_I(f)$:
  Si f.right == null:
    Retornar $I(f.\text{label})$
  Si no, si f.label == $\neg$:
    Retornar $1 - V_I(f.\text{right})$
  Si no, si f.label == $\wedge$:
    4Retornar $V_I(f.\text{left}) \times V_I(f.\text{right})$

Si no, si f.label == $\vee$:
  Retornar $\max\{V_I(f.\text{left}), V_I(f.\text{right})\}$
  $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1; A=Tree(p, null, null); B=Tree($\neg$, null, A)

C=Tree($\vee$, A, B)

Valor de una fórmula (4/6)

DEF $V_I(f)$:
  SI f.RIGHT == NULL:
    RETORNAR $I(f$.LABEL$)$
  SI NO, SI f.LABEL == $\neg$:
    RETORNAR $1 - V_I(f$.RIGHT$)$
  SI NO, SI f.LABEL == $\wedge$:
      4RETORNAR $V_I(f$.LEFT$) \times V_I(f$.RIGHT$)$

SI NO, SI f.LABEL == $\vee$:
    RETORNAR MAX$\{V_I(f.\text{LEFT}), V_I(f.\text{RIGHT})\}$
    $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)=1$; $A=$TREE(p, NULL, NULL); $B=$TREE($\neg$, NULL, A)

$C=$TREE($\vee$, A, B)

☞ $V_I(C) = \max\{V_I(C.\text{LEFT}), V_I(C.\text{RIGHT})\}$

Valor de una fórmula (4/6)

DEF $V_I(f)$:
  SI f.RIGHT == NULL:
    RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$
  SI NO, SI f.LABEL == $\neg$:
    RETORNAR $1 - V_I(f.\text{RIGHT})$
  SI NO, SI f.LABEL == $\wedge$:
    4RETORNAR $V_I(f.\text{LEFT}) \times V_I(f.\text{RIGHT})$

SI NO, SI f.LABEL == $\vee$:
  RETORNAR $\max\{V_I(f.\text{LEFT}), V_I(f.\text{RIGHT})\}$
  $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1; A=TREE(p, NULL, NULL); B=TREE($\neg$, NULL, A)

C=TREE($\vee$, A, B)

$V_I(C) = \max\{V_I(C.\text{LEFT}), V_I(C.\text{RIGHT})\}$

Valor de una fórmula (4/6)

DEF $V_I(f)$:
    SI f.RIGHT == NULL:
        RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$
    SI NO, SI f.LABEL == $\neg$:
        RETORNAR $1 - V_I(f.\text{RIGHT})$
    SI NO, SI f.LABEL == $\wedge$:
        4RETORNAR $V_I(f.\text{LEFT}) \times V_I(f.\text{RIGHT})$

SI NO, SI f.LABEL == $\vee$:
        RETORNAR MAX$\{V_I(f.\text{LEFT}), V_I(f.\text{RIGHT})\}$
        $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)=1$; $A=$TREE(p, NULL, NULL); $B=$TREE($\neg$, NULL, A)

$C=$TREE($\vee$, A, B)

$V_I(C) = \max\{V_I(A), V_I(C.\text{RIGHT})\}$

Valor de una fórmula (4/6)

Def $V_I(f)$:
    Si f.right == null:
        Retornar $I(f.\text{label})$
    Si no, si f.label == $\neg$:
        Retornar $1 - V_I(f.\text{right})$
    Si no, si f.label == $\wedge$:
            4Retornar $V_I(f.\text{left}) \times V_I(f.\text{right})$

Si no, si f.label == $\vee$:
            Retornar $\max\{V_I(f.\text{left}), V_I(f.\text{right})\}$
            $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1; A=Tree(p, null, null); B=Tree($\neg$, null, A)

C=Tree($\vee$, A, B)

$V_I(C) = \max\{V_I(A), V_I(C.\text{right})\}$

Valor de una fórmula (4/6)

Def $V_I(f)$:
  Si f.right == null:
    Retornar $I(f.\text{label})$
  Si no, si f.label == $\neg$:
    Retornar $1 - V_I(f.\text{right})$
  Si no, si f.label == $\wedge$:
      4Retornar $V_I(f.\text{left}) \times V_I(f.\text{right})$

Si no, si f.label == $\vee$:
    Retornar $\max\{V_I(f.\text{left}), V_I(f.\text{right})\}$
    $\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1; A=Tree(p, null, null); B=Tree($\neg$, null, A)

C=Tree($\vee$, A, B)

$V_I(C) = \max\{V_I(A), V_I(B)\}$

Valor de una fórmula (4/6)

DEF $V_I(f)$:
SI f.RIGHT == NULL:
RETORNAR $I(f.\text{LABEL})$
SI NO, SI f.LABEL == $\neg$:
RETORNAR $1 - V_I(f.\text{RIGHT})$
SI NO, SI f.LABEL == $\wedge$:
4RETORNAR $V_I(f.\text{LEFT}) \times V_I(f.\text{RIGHT})$

SI NO, SI f.LABEL == $\vee$:
RETORNAR MAX$\{V_I(f.\text{LEFT}), V_I(f.\text{RIGHT})\}$
$\vdots$

Ej: Sean

$I(p)$=1; A=TREE(p, NULL, NULL); B=TREE($\neg$, NULL, A)

C=TREE($\vee$, A, B)

$V_I(C) = \max\{1, 0\} = 1$

Valor de una fórmula (5/6)

Def $V_I(f)$:

Si f.right == null:

Retornar $I(f\text{.label})$

Si no, si f.label == $\neg$:

Retornar $1 - V_I(f\text{.right})$

Si no, si f.label == $\wedge$:

Retornar $V_I(f\text{.left}) \times V_I(f\text{.right})$

Si no, si f.label == $\vee$:

Retornar $\max\{V_I(f\text{.left}), V_I(f\text{.right})\}$

Si no, si f.label == $\rightarrow$:

Retornar $\max\{1 - V_I(f\text{.left}), V_I(f\text{.right})\}$

$\vdots$

Valor de una fórmula (6/6)

Def $V_I(f)$:
    Si $f.\text{right} == \text{null}$:
        Retornar $I(f.\text{label})$
    Si no, si $f.\text{label} == \neg$:
        Retornar $1 - V_I(f.\text{right})$
    Si no, si $f.\text{label} == \wedge$:
        Retornar $V_I(f.\text{left}) \times V_I(f.\text{right})$
    Si no, si $f.\text{label} == \vee$:
        Retornar $\max\{V_I(f.\text{left}), V_I(f.\text{right})\}$
    Si no, si $f.\text{label} == \rightarrow$:
        Retornar $\max\{1 - V_I(f.\text{left}), V_I(f.\text{right})\}$

Si no, si $f.\text{label} == \leftrightarrow$:
    Retornar $1 - \big(V_I(f.\text{left}) - V_I(f.\text{right})\big)^2$

Contenido

Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de fórmulas

Sea A una fórmula.

> A es satisfacible sii existe una interpretación I tal que $V_I(A) = 1$.

Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de fórmulas

Sea A una fórmula.

A es satisfacible sii existe una interpretación I tal que $V_I(A) = 1$.

A es insatisfacible sii para toda interpretación I, $V_I(A) = 0$.

Ejemplo 3

Proposición: La fórmula $p \wedge q$ es satisfacible.

Sea I tal que $I(p) = 1$ y $I(q) = 1$. Luego $V_I(p \wedge q) = 1$.

Ejemplo 4

Proposición: La fórmula $p \land \neg p$ es insatisfacible.

Ejemplo 4

Proposición: La fórmula $p \wedge \neg p$ es insatisfacible.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Ejemplo 4

Proposición: La fórmula $p \wedge \neg p$ es insatisfacible.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = 0$. Luego $V_I(p \wedge \neg p) = 0$.

Ejemplo 4

Proposición: La fórmula $p \wedge \neg p$ es insatisfacible.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = 0$. Luego $V_I(p \wedge \neg p) = 0$.

Caso 2: $I(p) = 1$. Luego $V_I(\neg p) = 0$ y entonces $V_I(p \wedge \neg p) = 0$.

Ejemplo 4

Proposición: La fórmula $p \wedge \neg p$ es insatisfacible.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = 0$. Luego $V_I(p \wedge \neg p) = 0$.

Caso 2: $I(p) = 1$. Luego $V_I(\neg p) = 0$ y entonces $V_I(p \wedge \neg p) = 0$.

En cualquier caso, $V_I(p \wedge \neg p) = 0$. Como I es arbitraria, $p \wedge \neg p$ es insatisfacible.

Validez y falseabilidad de fórmulas

Sea A una fórmula.

A es válida sii para toda interpretación I, $V_I(A) = 1$.

Validez y falseabilidad de fórmulas

Sea A una fórmula.

A es válida sii para toda interpretación I, $V_I(A) = 1$.

A es falseable sii existe una interpretación I tal que $V_I(A) = 0$.

Ejemplo 5

Proposición: La fórmula $p \vee \neg p$ es válida.

Ejemplo 5

Proposición: La fórmula $p \vee \neg p$ es válida.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Ejemplo 5

Proposición: La fórmula $p \vee \neg p$ es válida.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = 1$. Luego $V_I(p \vee \neg p) = 1$.

Ejemplo 5

Proposición: La fórmula $p \vee \neg p$ es válida.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = 1$. Luego $V_I(p \vee \neg p) = 1$.

Caso 2: $I(p) = 0$. Luego $V_I(\neg p) = 1$ y entonces $V_I(p \vee \neg p) = 1$.

Ejemplo 5

Proposición: La fórmula $p \vee \neg p$ es válida.

Sea I una interpretación arbitraria. Tenemos dos casos:

Caso 1: $I(p) = 1$. Luego $V_I(p \vee \neg p) = 1$.

Caso 2: $I(p) = 0$. Luego $V_I(\neg p) = 1$ y entonces $V_I(p \vee \neg p) = 1$.

En cualquier caso, $V_I(p \vee \neg p) = 1$. Como I es arbitraria, $p \vee \neg p$ es válida.

Ejemplo 6

Proposición: La fórmula $p \wedge q$ es falseable.

Ejemplo 6

Proposición: La fórmula $p \wedge q$ es falseable.

Sea I tal que $I(p) = 0$. Luego $V_I(p \wedge q) = 0$.

Contingencia

Sea A una fórmula.

A es contingente sii A es satisfacible y falseable.

Ejemplo 7

Proposición: La fórmula $p \wedge q$ es contingente.

Ejemplo 7

Proposición: La fórmula $p \wedge q$ es contingente.

Ver ejemplos 3 y 6.

Clasificación de fórmulas (1/2)

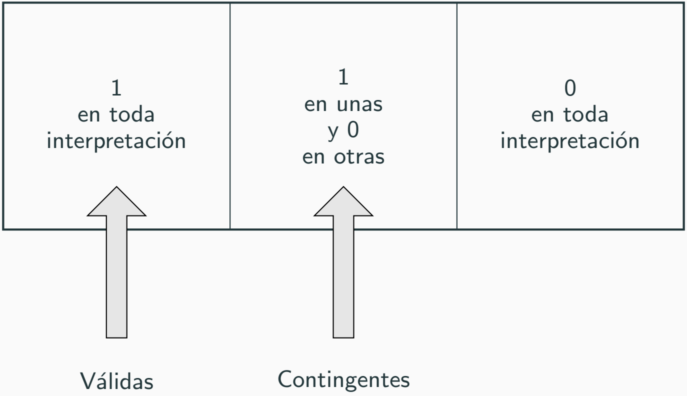
1 en toda interpretación	1 en unas y 0 en otras	0 en toda interpretación

Clasificación de fórmulas (1/2)

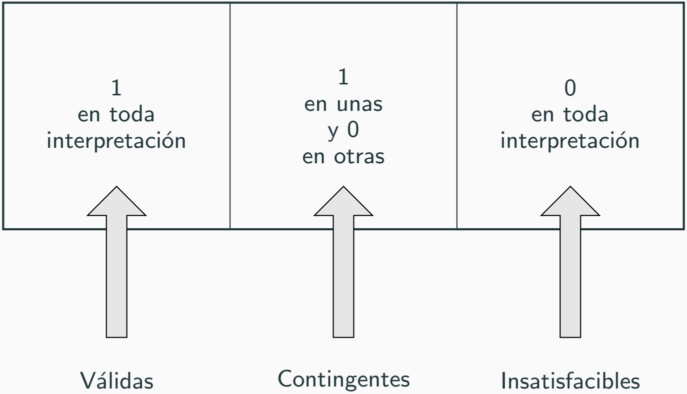
1 en toda interpretación	1 en unas y 0 en otras	0 en toda interpretación

Válidas

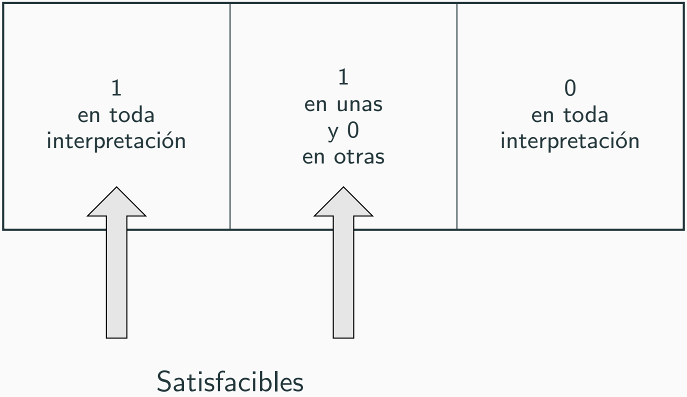
Clasificación de fórmulas (1/2)



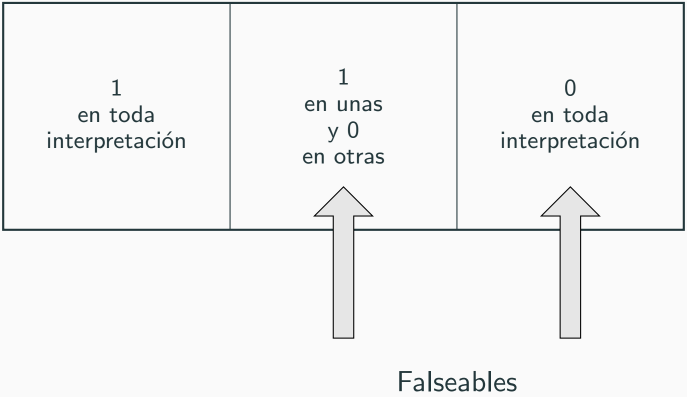
Clasificación de fórmulas (1/2)



Clasificación de fórmulas (2/2)



Clasificación de fórmulas (2/2)



Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de conjuntos

Sea $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

> U es satisfacible sii existe una interpretación I tal que para toda $A_i \in U$, $V_I(A_i) = 1$.

Satisfacibilidad e insatisfacibilidad de conjuntos

Sea $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

U es satisfacible sii existe una interpretación I tal que para toda $A_i \in U$, $V_I(A_i) = 1$.

U es insatisfacible sii para toda interpretación I, existe $A_i \in U$ tal que $V_I(A_i) = 0$.

Ejemplo 8

Proposición: El conjunto $U = \{p \vee r, q \vee r\}$ es satisfacible.

Sea I tal que $I(p) = 1$ y $I(q) = 1$. Luego $V_I(p \vee r) = 1$ y $V_I(q \vee r) = 1$.

Ejemplo 8

Proposición: El conjunto $U = \{p \vee r, q \vee r\}$ es satisfacible.

Sea I tal que $I(p) = 1$ y $I(q) = 1$. Luego $V_I(p \vee r) = 1$ y $V_I(q \vee r) = 1$.

NB: Observe que cualquiera sea el valor que I le da a r no se altera el hecho de que $V_I(p \vee r) = 1$ y $V_I(q \vee r) = 1$. Luego hay más de una tal I.

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que $V_I(A) = 0$. Tenemos varios casos:

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que $V_I(A) = 0$. Tenemos varios casos:

Caso 1: $I(p) = 0$. Luego sea $A = p$. Observe que $A \in U$ y que $V_I(A) = 0$.

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que $V_I(A) = 0$. Tenemos varios casos:

Caso 1: $I(p) = 0$. Luego sea $A = p$. Observe que $A \in U$ y que $V_I(A) = 0$.

Caso 2: $I(p) = 1$. Luego $V_I(\neg p) = 0$. Tenemos dos casos:

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que $V_I(A) = 0$. Tenemos varios casos:

Caso 1: $I(p) = 0$. Luego sea $A = p$. Observe que $A \in U$ y que $V_I(A) = 0$.

Caso 2: $I(p) = 1$. Luego $V_I(\neg p) = 0$. Tenemos dos casos:

Caso 2a: $I(q) = 1$. Luego sea $A = \neg q$. Observe que $A \in U$ y que $V_I(A) = 0$.

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que $V_I(A) = 0$. Tenemos varios casos:

Caso 1: $I(p) = 0$. Luego sea $A = p$. Observe que $A \in U$ y que $V_I(A) = 0$.

Caso 2: $I(p) = 1$. Luego $V_I(\neg p) = 0$. Tenemos dos casos:

- Caso 2a: $I(q) = 1$. Luego sea $A = \neg q$. Observe que $A \in U$ y que $V_I(A) = 0$.
- Caso 2b: $I(q) = 0$. Luego sea $A = \neg p \vee q$. Observe que $A \in U$ y que $V_I(A) = 0$, toda vez que $V_I(\neg p) = 0$ y que $V_I(q) = 0$.

Ejemplo 9

Proposición: El conjunto $U = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$ es insatisfacible.

Sea I arbitraria. Vamos a demostrar que existe una fórmula A en U tal que $V_I(A) = 0$. Tenemos varios casos:

Caso 1: $I(p) = 0$. Luego sea $A = p$. Observe que $A \in U$ y que $V_I(A) = 0$.

Caso 2: $I(p) = 1$. Luego $V_I(\neg p) = 0$. Tenemos dos casos:

- Caso 2a: $I(q) = 1$. Luego sea $A = \neg q$. Observe que $A \in U$ y que $V_I(A) = 0$.
- Caso 2b: $I(q) = 0$. Luego sea $A = \neg p \vee q$. Observe que $A \in U$ y que $V_I(A) = 0$, toda vez que $V_I(\neg p) = 0$ y que $V_I(q) = 0$.

En cualquier caso, existe una fórmula A en U tal que $V_I(A) = 0$. Como I es arbitraria, U es insatisfacible.

Teoremas

Sean B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si U es satisfacible, entonces $U - \{A_i\}$ es satisfacible, para cualquier $i = 1, \ldots, n$.

Teoremas

Sean B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si U es satisfacible, entonces $U - \{A_i\}$ es satisfacible, para cualquier $i = 1, \ldots, n$.
2. Si U es satisfacible y B es válida, entonces $U \cup \{B\}$ es satisfacible.

Teoremas

Sean B una fórmula y $U = \{A_1, \dots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si U es satisfacible, entonces $U - \{A_i\}$ es satisfacible, para cualquier $i = 1, \dots, n$.
2. Si U es satisfacible y B es válida, entonces $U \cup \{B\}$ es satisfacible.
3. Si U es insatisfacible, entonces $U \cup \{B\}$ es insatisfacible para cualquier fórmula B.

Teoremas

Sean B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si U es satisfacible, entonces $U - \{A_i\}$ es satisfacible, para cualquier $i = 1, \ldots, n$.
2. Si U es satisfacible y B es válida, entonces $U \cup \{B\}$ es satisfacible.
3. Si U es insatisfacible, entonces $U \cup \{B\}$ es insatisfacible para cualquier fórmula B.
4. Si U es insatisfacible y A_i es válida para algún i, entonces $U - \{A_i\}$ es insatisfacible.

Contenido

Implicación lógica (1/2)

Sea B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Definimos que B es una implicación lógica de U:

$U \models B$ sii para toda interpretación I,

si $V_I(A_i) = 1$ para todo $A_i \in U$,

entonces $V_I(B) = 1$.

Ejemplo 10

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p, p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \models B$.

Ejemplo 10

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p, p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \models B$.

Sea I una interpretación y supongamos que

$$V_I(p) = V_I(p \to r) = V_I(r \to q) = 1$$

Ejemplo 10

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p, p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \models B$.

Sea I una interpretación y supongamos que

$$V_I(p) = V_I(p \to r) = V_I(r \to q) = 1$$

Como $V_I(p) = 1$ y $V_I(p \to r) = 1$, entonces $V_I(r) = 1$.

Ejemplo 10

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p, p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \models B$.

Sea I una interpretación y supongamos que

$$V_I(p) = V_I(p \to r) = V_I(r \to q) = 1$$

Como $V_I(p) = 1$ y $V_I(p \to r) = 1$, entonces $V_I(r) = 1$.

Como $V_I(r) = 1$ y $V_I(r \to q) = 1$, entonces $V_I(q) = 1$.

Ejemplo 10

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p, p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \models B$.

Sea I una interpretación y supongamos que

$$V_I(p) = V_I(p \to r) = V_I(r \to q) = 1$$

Como $V_I(p) = 1$ y $V_I(p \to r) = 1$, entonces $V_I(r) = 1$.

Como $V_I(r) = 1$ y $V_I(r \to q) = 1$, entonces $V_I(q) = 1$.

En consecuencia, si $V_I(A_i) = 1$ para todo $A_i \in U$, entonces $V_I(B) = 1$. Por lo tanto $U \models B$.

Implicación lógica (2/2)

Observe que:

$U \not\models B$ sii existe una interpretación I tal que

$$V_I(A_i) = 1 \text{ para todo } A_i,$$
$$\text{pero } V_I(B) = 0.$$

Ejemplo 11

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \not\models B$.

Ejemplo 11

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \not\models B$.

Debemos encontrar una I tal que $V_I(p \to r) = V_I(r \to q) = 1$ y $V_I(q) = 0$.

Ejemplo 11

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \not\models B$.

Debemos encontrar una I tal que $V_I(p \to r) = V_I(r \to q) = 1$ y $V_I(q) = 0$.

Sea $I(p) = I(r) = I(q) = 0$.

Ejemplo 11

Proposición: Sea $B = q$ y $U = \{p \to r, r \to q\}$. Entonces $U \not\models B$.

Debemos encontrar una I tal que $V_I(p \to r) = V_I(r \to q) = 1$ y $V_I(q) = 0$.

Sea $I(p) = I(r) = I(q) = 0$.

Luego $V_I(p \to r) = 1$ y también $V_I(r \to q) = 1$. Además, $V_I(q) = 0$.

Teoremas

Sean B, C fórmulas y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si $U \models B$, entonces $U \cup \{C\} \models B$.

Teoremas

Sean B, C fórmulas y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas.

1. Si $U \models B$, entonces $U \cup \{C\} \models B$.
2. Si C es válida y $U \models B$, entonces $U - \{C\} \models B$.

Teorema

Proposición: Sea B una fórmula y $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de fórmulas:

$$U \models B \text{ sii } \big(A_1 \land \ldots \land A_n\big) \to B \text{ es válida.}$$

Demostración (1/2)

$\Rightarrow$) Supongamos que $U \models B$ y sea I una interpretación arbitraria. Debemos ver que $V_I(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \to B) = 1$. Tenemos dos casos:

Demostración (1/2)

$\Rightarrow$) Supongamos que $U \models B$ y sea I una interpretación arbitraria. Debemos ver que $V_I\big((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \to B) = 1$. Tenemos dos casos:

- ☞ Existe $A_i \in U$ tal que $V_I(A_i) = 0$. Luego $V_I(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) = 0$ y por lo tanto $V_I\big((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \to B) = 1$.

Demostración (1/2)

$\Rightarrow$) Supongamos que $U \models B$ y sea I una interpretación arbitraria. Debemos ver que $V_I(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B) = 1$. Tenemos dos casos:

☞ Existe $A_i \in U$ tal que $V_I(A_i) = 0$. Luego $V_I(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) = 0$ y por lo tanto $V_I(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B) = 1$.

☞ $V_I(A_i) = 1$ para todo $A_i \in U$. Como $U \models B$, entonces $V_I(B) = 1$ y por lo tanto $V_I(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B) = 1$.

Demostración (1/2)

$\Rightarrow$) Supongamos que $U \models B$ y sea I una interpretación arbitraria. Debemos ver que $V_I(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B) = 1$. Tenemos dos casos:

- ☞ Existe $A_i \in U$ tal que $V_I(A_i) = 0$. Luego $V_I(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) = 0$ y por lo tanto $V_I(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B) = 1$.

- ☞ $V_I(A_i) = 1$ para todo $A_i \in U$. Como $U \models B$, entonces $V_I(B) = 1$ y por lo tanto $V_I(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B) = 1$.

En cualquier caso, $V_I(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B) = 1$. Como I es arbitraria, $\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B$ es válida.

Demostración (2/2)

$\Leftarrow$) Supongamos que $\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B$ es válida y sea I tal que $V_I(A_i) = 1$ para todo $A_i \in U$. Debemos ver que $V_I(B) = 1$.

Demostración (2/2)

$\Leftarrow$) Supongamos que $\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B$ es válida y sea I tal que $V_I(A_i) = 1$ para todo $A_i \in U$. Debemos ver que $V_I(B) = 1$.

Esto es fácil, ya que $V_I(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) = 1$ y como $V_I(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B) = 1$, entonces $V_I(B) = 1$.

Demostración (2/2)

$\Leftarrow$) Supongamos que $\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B$ es válida y sea I tal que $V_I(A_i) = 1$ para todo $A_i \in U$. Debemos ver que $V_I(B) = 1$.

Esto es fácil, ya que $V_I(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) = 1$ y como $V_I(\big(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\big) \rightarrow B) = 1$, entonces $V_I(B) = 1$.

Por lo tanto $U \models B$.

Fin de la sesión 3

En esta sesión usted ha aprendido:

1. Interpretar de manera recursiva una fórmula de la lógica proposicional
2. Comprender las categorías de una fórmula de acuerdo a sus interpretaciones
3. Demostrar relaciones entre conceptos lógicos
4. Comprender una de las posibles formalizaciones de la noción de consecuencia lógica