Preparcial Primer Corte
Lógica para Ciencias de la Computación

Sean n, m números naturales. Defina las funciones $\text{Pred}[n]$ y $m - [n]$ de la siguiente manera:

```
DEF PRED[n]:
    SI n== 0:
        RETORNAR 0
    SI NO:
        RETORNAR n − 1
```

```
DEF m − [n]:
    SI n== 0:
        RETORNAR m
    SI NO:
        RETORNAR PRED[m − [PRED[n]]
```

PUNTO 1.

a) (0.5pts) Escriba el paso a paso de $3 - [2]$.

b) (0.5pts) Demuestre por inducción sobre n que $m-[n]$ devuelve el número $\max(0, m-n)$.

PUNTO 2. Sea A una fórmula.

a) (0.5pts) Defina de manera recursiva las funciones $P[A]$, la cual cuenta el número de letras proposicionales de A, $C(A)$, la cual cuenta el número de conectivos (incluyendo la negación) de A, y $S(A)$, la cual cuenta el número de subfórmulas de A.

b) (0.5pts) Demuestre por inducción estructural sobre A que $S[A] = P[A] + C[A]$.

Sean A, A' y B fórmulas. Recuerde que la definición de $\text{Sust}[B, A, A']$ es la siguiente:

```
DEF SUST[B, A, A']:
    SI A ∉ SUBFORMS[B]:
        RETORNAR B
    SI NO, SI B == A:
        RETORNAR A'
    SI NO, SI B.LABEL == ¬:
        RETORNAR TREE(¬, NULL, SUST[B.RIGHT, A, A'])
    SI NO, SI B.LABEL ∈ {∧, ∨ →, ↔}:
        RETORNAR TREE(B.LABEL, SUST[B.LEFT, A, A'], SUST[B.RIGHT, A, A'])
```

PUNTO 3 (1PT). Escriba el paso a paso de

$$\text{Sust}\Big[\neg((p \wedge q) \to (p \vee q)), \quad p \vee q, \quad \neg(\neg p \wedge \neg q)\Big]$$

Considere los siguientes lemas:

Lema 1. *Sea B una fórmula y $A \in$ Subforms(B). Sea A' una fórmula. Se tiene:*

$$\neg B\{A \leftarrow A'\} = \neg(B\{A \leftarrow A'\})$$

Lema 2. *Sea A una subfórmula de $B \odot C$. Sea A' una fórmula y $\odot \in \{\wedge, \vee \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Se tiene:*

$$(B \odot C)\{A \leftarrow A'\} = B\{A \leftarrow A'\} \odot C\{A \leftarrow A'\}$$

Lema 3. *Sean A y B fórmulas. Si $A \equiv B$, entonces $\neg A \equiv \neg B$.*

Lema 4. *Sean A, B A' y B' fórmulas. Si $A \equiv A'$ y $B \equiv B'$, entonces $A \odot B \equiv A' \odot B'$, para $\odot \in \{\wedge, \vee \rightarrow, \leftrightarrow\}$.*

PUNTO 4 (1PT). Demuestre el lema 4.

PUNTO 5 (1PT). Use inducción estructural sobre B, la definición de la función $\mathrm{Sust}(B, A, A')$ y los lemas 1 a 4 para demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1 (Sustitución *salva veritate*)**.** *Sea B una fórmula y $A \in$ Subforms(B). Sea A' una fórmula. Si $A \equiv A'$, entonces $B \equiv B\{A \leftarrow A'\}$.*