# Forma normal conjuntiva, forma clausal, y transformación de Tseitin

Sesión 12

Edgar Andrade, PhD

Abril de 2019

Departmento de Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

# Presentación

En esta sesión estudiaremos:

1. Forma Normal Conjuntiva y Forma Clausal
2. Transformación de Tseitin
3. Obtener la forma clausal de una fórmula

# Contenido

# Forma Normal Conjuntiva: Motivación

1. Queremos construir un algoritmo eficiente para determinar si una fórmula es satisfacible.
2. Los algoritmos eficientes que resuelven este problema—llamados SAT-solvers—trabajan sobre fórmulas en FNC.
3. Debemos mostrar que el rango de los SAT-solvers no se reduce a fórmulas en FNC, sino que podemos considerar cuálquier fórmula arbitraria.

# Forma Normal Conjuntiva

Definiciones:

Una cláusula es una disyunción de literales.

# Forma Normal Conjuntiva

Definiciones:

Una cláusula es una disyunción de literales.

Una fórmula está en *forma normal conjuntiva* si es una conjunción de cláusulas.

# Forma Normal Conjuntiva

Definiciones:

- Una cláusula es una disyunción de literales.
- Una fórmula está en *forma normal conjuntiva* si es una conjunción de cláusulas.
- Ejemplo: $(p \vee q) \wedge r$ es una fórmula en FNC.

# Forma Normal Conjuntiva

Definiciones:

Una cláusula es una disyunción de literales.

Una fórmula está en *forma normal conjuntiva* si es una conjunción de cláusulas.

Ejemplo: $(p \vee q) \wedge r$ es una fórmula en FNC.

Teorema:

Para toda fórmula $A$, existe una fórmula $A'$ en forma normal conjuntiva tal que $A \equiv A'$.

# Forma Clausal

La forma clausal es una variación notacional para las fórmulas en FNC:

# Forma Clausal

La forma clausal es una variación notacional para las fórmulas en FNC:

Los literales negativos, digamos $\neg p$, se denotan como $\overline{p}$.

## Forma Clausal

La forma clausal es una variación notacional para las fórmulas en FNC:

- Los literales negativos, digamos $\neg p$, se denotan como $\overline{p}$.
- Las cláusulas, digamos $p \vee \neg q \vee r$, se denotan como secuencias de literales, es decir, $p\overline{q}r$.

# Forma Clausal

La forma clausal es una variación notacional para las fórmulas en FNC:

- Los literales negativos, digamos $\neg p$, se denotan como $\overline{p}$.
- Las cláusulas, digamos $p \vee \neg q \vee r$, se denotan como secuencias de literales, es decir, $p\overline{q}r$.
- Convención: La cláusula vacía (es decir, la secuencia vacía de literales) se denota por $\Box$.

# Forma Clausal

La forma clausal es una variación notacional para las fórmulas en FNC:

- Los literales negativos, digamos $\neg p$, se denotan como $\overline{p}$.
- Las cláusulas, digamos $p \vee \neg q \vee r$, se denotan como secuencias de literales, es decir, $p\overline{q}r$.
- Convención: La cláusula vacía (es decir, la secuencia vacía de literales) se denota por $\Box$.
- Una conjunción de cláusulas, digamos $(p \vee q) \wedge (r \vee \neg p)$ se denota como un conjunto de cláusulas, es decir, $\{pq, r\overline{p}\}$.

# Forma Clausal

La forma clausal es una variación notacional para las fórmulas en FNC:

- Los literales negativos, digamos $\neg p$, se denotan como $\overline{p}$.
- Las cláusulas, digamos $p \vee \neg q \vee r$, se denotan como secuencias de literales, es decir, $p\overline{q}r$.
- Convención: La cláusula vacía (es decir, la secuencia vacía de literales) se denota por $\square$.
- Una conjunción de cláusulas, digamos $(p \vee q) \wedge (r \vee \neg p)$ se denota como un conjunto de cláusulas, es decir, $\{pq, r\overline{p}\}$.
- Convención: El conjunto vacío de cláusulas se denota por $\emptyset$ y es distinto de $\square$, (pues podemos considerar $\{\square\}$).

# Datos importantes

Equivalencias útiles en Forma Normal Conjuntiva:

$$
\begin{array}{ccc}
p \leftrightarrow \neg q & \equiv & (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \\
p \leftrightarrow (q \wedge r) & \equiv & (q \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p) \\
p \leftrightarrow (q \vee r) & \equiv & (\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (q \vee r \vee \neg p) \\
p \leftrightarrow (q \rightarrow r) & \equiv & (q \vee p) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg p)
\end{array}
$$

# Datos importantes

Equivalencias útiles en Forma Clausal:

$$
\begin{array}{rcl}
p \leftrightarrow \neg q & \equiv & \{\overline{pq}, pq\} \\
p \leftrightarrow (q \wedge r) & \equiv & \{q\overline{p}, r\overline{p}, \overline{qr}p\} \\
p \leftrightarrow (q \vee r) & \equiv & \{\overline{q}p, \overline{r}p, qr\overline{p}\} \\
p \leftrightarrow (q \rightarrow r) & \equiv & \{qp, \overline{r}p, \overline{q}r\overline{p}\}
\end{array}
$$

# Datos importantes

Crecimiento exponencial de la transformación a FNC:

| Fórmula Inicial | FNC equivalente | Núm. Inicial de $\wedge$s | Núm. Cláusulas de la FNC |
|---|---|---|---|
| $p \wedge q$ | $p \wedge q$ | 1 | 2 |
| $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ | | | |

# Datos importantes

Crecimiento exponencial de la transformación a FNC:

| Fórmula Inicial | FNC equivalente | Núm. Inicial de $\wedge$s | Núm. Cláusulas de la FNC |
|---|---|---|---|
| $p \wedge q$ | $p \wedge q$ | 1 | 2 |
| $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ | $(p \vee r) \wedge (p \vee s)$ $\wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$ | 2 | 4 |

## Datos importantes

Crecimiento exponencial de la transformación a FNC:

| Fórmula Inicial | FNC equivalente | Núm. Inicial de $\wedge$s | Núm. Cláusulas de la FNC |
|---|---|---|---|
| $p \wedge q$ | $p \wedge q$ | 1 | 2 |
| $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ | $(p \vee r) \wedge (p \vee s)$ <br> $\wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$ | 2 | 4 |
| $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \vee (t \wedge u)$ | $(p \vee r \vee t) \wedge (p \vee r \vee u)$ <br> $\wedge (p \vee s \vee t) \wedge (p \vee s \vee u)$ <br> $\wedge (q \vee r \vee t) \wedge (q \vee r \vee u)$ <br> $\wedge (q \vee s \vee t) \wedge (q \vee s \vee u)$ | 3 | 8 |

# Datos importantes

Crecimiento exponencial en la transformación a FNC:

> Requerimos un procedimiento eficiente tal que, dada una fórmula $A$, nos proporcione una fórmula $A'$ que esté en FNC y sea equivalente a $A$.

## Datos importantes

Crecimiento exponencial en la transformación a FNC:

Requerimos un procedimiento eficiente tal que, dada una fórmula $A$, nos proporcione una fórmula $A'$ que esté en FNC y sea equivalente a $A$.

☞ No tenemos tal procedimiento eficiente (hasta ahora).

# Datos importantes

Crecimiento exponencial en la transformación a FNC:

Requerimos un procedimiento eficiente tal que, dada una fórmula $A$, nos proporcione una fórmula $A'$ que esté en FNC y sea equivalente a $A$.

- ☞ No tenemos tal procedimiento eficiente (hasta ahora).
- ☞ Tenemos una alternativa: la transformación de Tseitin.

# Contenido

# Transformación de Tseitin

Recorderis: Una interpretación $I$ es un modelo para una fórmula $A$ sii $V_I(A) = 1$.

# Transformación de Tseitin

Recorderis: Una interpretación $I$ es un modelo para una fórmula $A$ sii $V_I(A) = 1$.

Dada una fórmula $A$, necesitamos una fórmula en FNC que, aunque no sea equivalente a $A$, sea igualmente buena que $A$:

# Transformación de Tseitin

Recorderis: Una interpretación $I$ es un modelo para una fórmula $A$ sii $V_I(A) = 1$.

Dada una fórmula $A$, necesitamos una fórmula en FNC que, aunque no sea equivalente a $A$, sea igualmente buena que $A$:

> La relación que buscamos es: Si $I$ es modelo de $A'$, entonces $I$ es modelo de $A$.

# Transformación de Tseitin

Recorderis: Una interpretación $I$ es un modelo para una fórmula $A$ sii $V_I(A) = 1$.

Dada una fórmula $A$, necesitamos una fórmula en FNC que, aunque no sea equivalente a $A$, sea igualmente buena que $A$:

> La relación que buscamos es: Si $I$ es modelo de $A'$, entonces $I$ es modelo de $A$.
>
> Es decir, solucionar el problema para $A'$ me permite solucionar el problema para $A$.

# Transformación de Tseitin

Recorderis: Una interpretación $I$ es un modelo para una fórmula $A$ sii $V_I(A) = 1$.

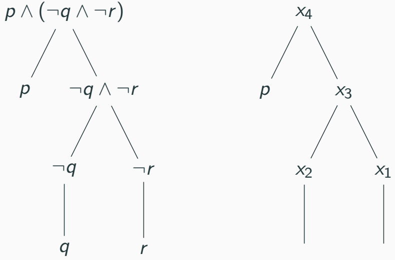
Dada una fórmula $A$, necesitamos una fórmula en FNC que, aunque no sea equivalente a $A$, sea igualmente buena que $A$:

- La relación que buscamos es: Si $I$ es modelo de $A'$, entonces $I$ es modelo de $A$.
- Es decir, solucionar el problema para $A'$ me permite solucionar el problema para $A$.
- Ejemplo: Todo modelo de $\big(r \to (p \vee q)\big) \wedge (p \leftrightarrow q)$ es modelo de $p \leftrightarrow q$ [Pero no viceversa].

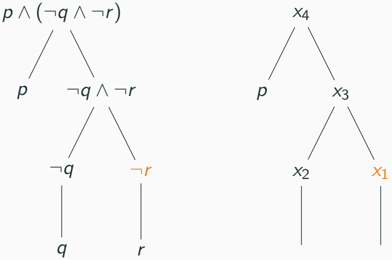
**Transformación de Tseitin:**

Sea $A$ una fórmula. G.S. Tseitin demostró en 1968 que $A$ puede transformarse eficientemente en una fórmula $A'$ en FNC de tal manera que si $I$ es un modelo para $A'$, entonces $I$ es un modelo para $A$.

# Pasos de la transformación —Ejemplo—

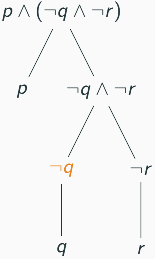


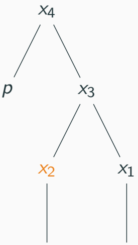
# Pasos de la transformación —Ejemplo—




$$x_1 \leftrightarrow \neg r$$

# Pasos de la transformación —Ejemplo—

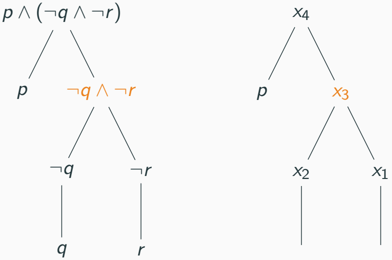



$$x_2 \leftrightarrow \neg q$$

$$x_1 \leftrightarrow \neg r$$

# Pasos de la transformación —Ejemplo—

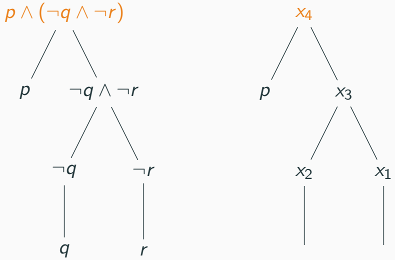



$$x_3 \leftrightarrow x_2 \wedge x_1$$

$$x_2 \leftrightarrow \neg q$$

$$x_1 \leftrightarrow \neg r$$

# Pasos de la transformación —Ejemplo—



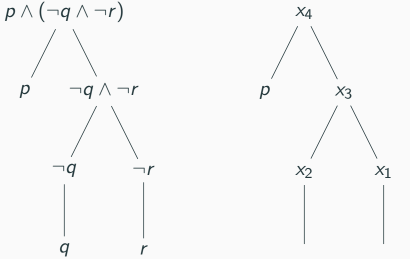

$$x_4 \leftrightarrow p \land x_3$$

$$x_3 \leftrightarrow x_2 \land x_1$$

$$x_2 \leftrightarrow \neg q$$

$$x_1 \leftrightarrow \neg r$$

# Pasos de la transformación —Ejemplo—




$$x_4 \leftrightarrow p \wedge x_3$$
$$x_3 \leftrightarrow x_2 \wedge x_1$$
$$x_2 \leftrightarrow \neg q$$
$$x_1 \leftrightarrow \neg r$$

La fórmula
$x_4 \wedge (x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) \wedge (x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)) \wedge (x_2 \leftrightarrow \neg q) \wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)$
es es tal que si $I$ es uno de sus modelos, entonces $I$ también es un modelo para $p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$.

# Transformación de Tseitin

La fórmula

$x_4 \wedge (x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) \wedge (x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)) \wedge (x_2 \leftrightarrow \neg q) \wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)$

es es tal que si $I$ es uno de sus modelos, entonces $I$ también es un modelo para $p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$.

1. Supongamos que $I$ es un modelo para la primera.

# Transformación de Tseitin

La fórmula
$x_4 \wedge (x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) \wedge (x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)) \wedge (x_2 \leftrightarrow \neg q) \wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)$
es es tal que si $I$ es uno de sus modelos, entonces $I$ también es un modelo para $p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$.

1. Supongamos que $I$ es un modelo para la primera.
2. Entonces todos los lados de las conjunciones son verdaderas.

## Transformación de Tseitin

La fórmula
$x_4 \wedge (x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) \wedge (x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)) \wedge (x_2 \leftrightarrow \neg q) \wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)$
es es tal que si $I$ es uno de sus modelos, entonces $I$ también es un modelo para $p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$.

1. Supongamos que $I$ es un modelo para la primera.
2. Entonces todos los lados de las conjunciones son verdaderas.
3. En particular, $V_I(x_4) = 1$ y $V_I(x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) = 1$.

# Transformación de Tseitin

La fórmula
$x_4 \wedge (x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) \wedge (x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)) \wedge (x_2 \leftrightarrow \neg q) \wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)$
es es tal que si $I$ es uno de sus modelos, entonces $I$ también es un modelo para $p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$.

1. Supongamos que $I$ es un modelo para la primera.
2. Entonces todos los lados de las conjunciones son verdaderas.
3. En particular, $V_I(x_4) = 1$ y $V_I(x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) = 1$.
4. Entonces $V_I(p \wedge x_3) = 1$, luego $V_I(p) = 1$ y $V_I(x_3) = 1$.

# Transformación de Tseitin

La fórmula
$x_4 \wedge (x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) \wedge (x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)) \wedge (x_2 \leftrightarrow \neg q) \wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)$
es es tal que si $I$ es uno de sus modelos, entonces $I$ también es un modelo para $p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$.

1. Supongamos que $I$ es un modelo para la primera.
2. Entonces todos los lados de las conjunciones son verdaderas.
3. En particular, $V_I(x_4) = 1$ y $V_I(x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) = 1$.
4. Entonces $V_I(p \wedge x_3) = 1$, luego $V_I(p) = 1$ y $V_I(x_3) = 1$.
5. Como $V_I(x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)) = 1$ y $V_I(x_3) = 1$, entonces $V_I(x_2 \wedge x_1) = 1$ y luego $V_I(x_2) = 1$ y $V_I(x_1) = 1$.

## Transformación de Tseitin

La fórmula

$x_4 \wedge (x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) \wedge (x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)) \wedge (x_2 \leftrightarrow \neg q) \wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)$

es es tal que si $I$ es uno de sus modelos, entonces $I$ también es un modelo para $p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$.

1. Supongamos que $I$ es un modelo para la primera.
2. Entonces todos los lados de las conjunciones son verdaderas.
3. En particular, $V_I(x_4) = 1$ y $V_I(x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) = 1$.
4. Entonces $V_I(p \wedge x_3) = 1$, luego $V_I(p) = 1$ y $V_I(x_3) = 1$.
5. Como $V_I(x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)) = 1$ y $V_I(x_3) = 1$, entonces $V_I(x_2 \wedge x_1) = 1$ y luego $V_I(x_2) = 1$ y $V_I(x_1) = 1$.
6. Por lo tanto $V_I(\neg q) = 1$ y $V_I(\neg r) = 1$.

# Transformación de Tseitin

La fórmula

$x_4 \land (x_4 \leftrightarrow (p \land x_3)) \land (x_3 \leftrightarrow (x_2 \land x_1)) \land (x_2 \leftrightarrow \neg q) \land (x_1 \leftrightarrow \neg r)$

es es tal que si $I$ es uno de sus modelos, entonces $I$ también es un modelo para $p \land (\neg q \land \neg r)$.

1. Supongamos que $I$ es un modelo para la primera.
2. Entonces todos los lados de las conjunciones son verdaderas.
3. En particular, $V_I(x_4) = 1$ y $V_I(x_4 \leftrightarrow (p \land x_3)) = 1$.
4. Entonces $V_I(p \land x_3) = 1$, luego $V_I(p) = 1$ y $V_I(x_3) = 1$.
5. Como $V_I(x_3 \leftrightarrow (x_2 \land x_1)) = 1$ y $V_I(x_3) = 1$, entonces $V_I(x_2 \land x_1) = 1$ y luego $V_I(x_2) = 1$ y $V_I(x_1) = 1$.
6. Por lo tanto $V_I(\neg q) = 1$ y $V_I(\neg r) = 1$.
7. En consecuencia, $V_I(p \land (\neg q \land \neg r)) = 1$, es decir $I$ es un modelo para la segunda.

# Transformación de Tseitin

Observe que si $I$ es una interpretación tal que $I(p) = 1$ e $I(q) = I(r) = I(x_4) = 0$, entonces $I$ es un modelo para $p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$, pero no es un modelo para $x_4 \wedge (x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) \wedge (x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)) \wedge (x_2 \leftrightarrow \neg q) \wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)$.

# Transformación de Tseitin

Paso final: reemplazar por FNC equivalente:

$$
\begin{aligned}
x_4 \wedge (x_4 \leftrightarrow (p \wedge x_3)) \\
\wedge (x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)) \\
\wedge (x_2 \leftrightarrow \neg q) \\
\wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)
\end{aligned}
$$

# Transformación de Tseitin

Paso final: reemplazar por FNC equivalente:

$$
\begin{aligned}
x_4 \wedge (p \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg p \vee \neg x_3 \vee x_4)& \\
\wedge (x_3 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1))& \\
\wedge (x_2 \leftrightarrow \neg q)& \\
\wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)&
\end{aligned}
$$

# Transformación de Tseitin

Paso final: reemplazar por FNC equivalente:

$$
\begin{aligned}
x_4 &\wedge (p \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg p \vee \neg x_3 \vee x_4) \\
&\wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1 \vee x_3) \\
&\wedge (x_2 \leftrightarrow \neg q) \\
&\wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)
\end{aligned}
$$

## Transformación de Tseitin

Paso final: reemplazar por FNC equivalente:

$$
\begin{aligned}
x_4 &\wedge (p \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg p \vee \neg x_3 \vee x_4) \\
&\wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1 \vee x_3) \\
&\wedge (\neg x_2 \vee \neg q) \wedge (x_2 \vee q) \\
&\wedge (x_1 \leftrightarrow \neg r)
\end{aligned}
$$

# Transformación de Tseitin

Paso final: reemplazar por FNC equivalente:

$$
\begin{aligned}
x_4 &\wedge (p \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg p \vee \neg x_3 \vee x_4) \\
&\wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1 \vee x_3) \\
&\wedge (\neg x_2 \vee \neg q) \wedge (x_2 \vee q) \\
&\wedge (\neg x_1 \vee \neg r) \wedge (x_1 \vee r)
\end{aligned}
$$

# Algoritmo transformación de Tseitin (1/5)

Suponga que $A$ es una fórmula tal que ...

# Algoritmo transformación de Tseitin (1/5)

Suponga que $A$ es una fórmula tal que ...

> ... no tiene dobles negaciones, ...

# Algoritmo transformación de Tseitin (1/5)

Suponga que $A$ es una fórmula tal que ...

... no tiene dobles negaciones, ...

... la consideramos como una cadena de símbolos, ...

# Algoritmo transformación de Tseitin (1/5)

Suponga que $A$ es una fórmula tal que ...

...no tiene dobles negaciones, ...

...la consideramos como una cadena de símbolos, ...

...las letras proposicionales de $A$ están en letrasProposicionalesA, la cual no tiene elementos en común con la lista letrasProposicionalesB.

# Algoritmo transformación de Tseitin (1/5)

Suponga que $A$ es una fórmula tal que ...

...no tiene dobles negaciones, ...

...la consideramos como una cadena de símbolos, ...

...las letras proposicionales de $A$ están en letrasProposicionalesA, la cual no tiene elementos en común con la lista letrasProposicionalesB.

letrasProposicionalesB = $[x_1, x_2, \ldots, x_{100}]$
L = [] # Inicializamos lista de conjunciones
Pila = [] # Inicializamos pila
i = -1 # Inicializamos contador de variables nuevas
s = A[0] # Inicializamos símbolo de trabajo
⋮

# Algoritmo transformación de Tseitin (2/5)

```
⋮
Mientras len(A) > 0:
        Si s es un atomo y Pila[-1] = '¬':
            i += 1
            atomo = letrasProposicionalesB[i]
            Pila = Pila[:-1]
            Pila.append(atomo)
            L.append(atomo ↔ ¬s)
            A = A[1:]
            s = A[0]
        ⋮
```

# Algoritmo transformación de Tseitin (2/5)

```
⋮
Mientras len(A) > 0:
        Si s es un atomo y Pila[-1] = '¬':
                i += 1
                atomo = letrasProposicionalesB[i]
                Pila = Pila[:-1]
                Pila.append(atomo)
                L.append(atomo ↔ ¬s)
                A = A[1:]
                s = A[0]
        ⋮
```

Observe que los átomos son los elementos de letrasProposicionalesA y de letrasProposicionalesB.

# Algoritmo transformación de Tseitin (3/5)

```
⋮
MIENTRAS len(A) > 0:
    ⋮
    SI NO, SI s = ')':
        w = PILA[-1]
        O = PILA[-2]
        v = PILA[-3]
        PILA = PILA[:len(PILA)-4]
        i += 1
        atomo = letrasProposicionalesB[i]
        L.append(atomo ↔(vOw))
        s = atomo
```

# Algoritmo transformación de Tseitin (4/5)

```
⋮
MIENTRAS LEN(A) > 0:
⋮
        SI NO:
            PILA.APPEND(S)
            A = A[1:]
            S = A[0]
```

## Algoritmo transformación de Tseitin (5/5)

```
⋮
B = ''
Si i < 0:
        atomo = Pila[-1]
Si no:
        atomo = letrasProposicionalesB[i]

For X in L:
      Y = X en su respectiva FNC
      B += ∧Y

B = atomo + B
retornar B
```

# Datos importantes

Comparación transformación a FNC y transformación de Tseitin:

| Fórmula Inicial | Núm. Inicial de $\wedge$s | Núm. Cláusulas de la FNC | Núm. Cláusulas Tseitin |
|---|---|---|---|
| $p \wedge q$ | 1 | 2 | 4 |
| $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ | 2 | 4 | 10 |
| $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \vee (t \wedge u)$ | 3 | 8 | 16 |
| $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \vee (t \wedge u) \vee (a \wedge b)$ | 4 | 16 | 22 |
| $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \vee (t \wedge u) \vee (a \wedge b) \vee (c \wedge d)$ | 5 | 32 | 28 |
| $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \vee (t \wedge u) \vee (a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge f)$ | 6 | 64 | 34 |

# Transformación de Tseitin

☞ Correr un ejemplo con una fórmula dada (ver ejercicios 3–5 del taller).

☞ Verificar que el algoritmo Tseitin devuelve una fórmula en FNC.

☞ Verificar que el algoritmo Tseitin no nos da una fórmula equivalente a $A$, pero nos da una fórmula $A'$ tal que si encontramos un modelo para esta, entonces encontramos un modelo para $A$.

☞ Verificar que el algoritmo Tseitin devuelve una fórmula cuya longitud está en proporción aritmética respecto a la fórmula original (ver ejercicio 6 del taller).

☞ Verificar que el algoritmo Tseitin es eficiente (es decir, pertenece a $O(N)$).

# Contenido

# Algoritmo de transformación de cláusulas — Clausula(C)

**Input:** C, una cláusula como lista de caracteres.

**Output:** Lista de literales.

# Algoritmo de transformación de cláusulas — Clausula(C)

**Input:** C, una cláusula como lista de caracteres.

**Output:** Lista de literales.

1. L = []
2. s = C[0]

# Algoritmo de transformación de cláusulas — Clausula(C)

**Input:** C, una cláusula como lista de caracteres.

**Output:** Lista de literales.

1. L = []
2. s = C[0]
3. Mientras longitud de C sea positiva, repetir:

# Algoritmo de transformación de cláusulas — Clausula(C)

**Input:** C, una cláusula como lista de caracteres.

**Output:** Lista de literales.

1. L = []
2. s = C[0]
3. Mientras longitud de C sea positiva, repetir:
4. ...si s es $\vee$: C = C[1:]

# Algoritmo de transformación de cláusulas — Clausula(C)

**Input:** C, una cláusula como lista de caracteres.

**Output:** Lista de literales.

1. L = []
2. s = C[0]
3. Mientras longitud de C sea positiva, repetir:
4. ...si s es $\vee$: C = C[1:]
5. ...si no, si s es $\neg$:
6. ......literal = s + C[1]
7. ......L.append(literal)
8. ......C = C[2:]

## Algoritmo de transformación de cláusulas — Clausula(C)

**Input:** C, una cláusula como lista de caracteres.

**Output:** Lista de literales.

1. L = []
2. s = C[0]
3. Mientras longitud de C sea positiva, repetir:
4. ...si s es $\vee$: C = C[1:]
5. ...si no, si s es $\neg$:
6. ......literal = s + C[1]
7. ......L.append(literal)
8. ......C = C[2:]
9. ...si no:
10. ......L.append(s)
11. ......C = C[1:]

# Algoritmo de transformación de cláusulas — Clausula(C)

**Input:** C, una cláusula como lista de caracteres.

**Output:** Lista de literales.

1. L = []
2. s = C[0]
3. Mientras longitud de C sea positiva, repetir:
4. ...si s es $\vee$: C = C[1:]
5. ...si no, si s es $\neg$:
6. ......literal = s + C[1]
7. ......L.append(literal)
8. ......C = C[2:]
9. ...si no:
10. ......L.append(s)
11. ......C = C[1:]
12. ...s = C[0]

# Algoritmo de transformación de cláusulas — Clausula(C)

**Input:** C, una cláusula como lista de caracteres.

**Output:** Lista de literales.

1. L = []
2. s = C[0]
3. Mientras longitud de C sea positiva, repetir:
4. ...si s es $\vee$: C = C[1:]
5. ...si no, si s es $\neg$:
6. ......literal = s + C[1]
7. ......L.append(literal)
8. ......C = C[2:]
9. ...si no:
10. ......L.append(s)
11. ......C = C[1:]
12. ...s = C[0]
13. Retornar L

# Algoritmo obtención forma clausal

**Input:** A, una fórmula en FNC como cadena de caracteres.

**Output:** Lista de listas de literales.

## Algoritmo obtención forma clausal

**Input:** A, una fórmula en FNC como cadena de caracteres.

**Output:** Lista de listas de literales.

1. L = []
2. i = 0

## Algoritmo obtención forma clausal

**Input:** A, una fórmula en FNC como cadena de caracteres.

**Output:** Lista de listas de literales.

1. L = []
2. i = 0
3. Mientras longitud de A sea positiva, repetir:

# Algoritmo obtención forma clausal

**Input:** A, una fórmula en FNC como cadena de caracteres.

**Output:** Lista de listas de literales.

1. L = []
2. i = 0
3. Mientras longitud de A sea positiva, repetir:
4. . . . si A[i] es $\wedge$:
5. . . . . . . L.append(Clausula(A[:i]))
6. . . . . . . A = A[i+1:]

# Algoritmo obtención forma clausal

**Input:** A, una fórmula en FNC como cadena de caracteres.

**Output:** Lista de listas de literales.

1. L = []
2. i = 0
3. Mientras longitud de A sea positiva, repetir:
4. ...si A[i] es $\wedge$:
5. ......L.append(Clausula(A[:i]))
6. ......A = A[i+1:]
7. ...si no:
8. ......i += 1

# Algoritmo obtención forma clausal

**Input:** A, una fórmula en FNC como cadena de caracteres.

**Output:** Lista de listas de literales.

1. L = []
2. i = 0
3. Mientras longitud de A sea positiva, repetir:
4. . . . si A[i] es $\wedge$:
5. . . . . . . L.append(Clausula(A[:i]))
6. . . . . . . A = A[i+1:]
7. . . . si no:
8. . . . . . . i += 1
9. Retornar L

# Fin de la sesión 12

En esta sesión usted ha aprendido a:

1. Dada una fórmula arbitraria, encontrar de manera eficiente una fórmula en FNC que es equisatisfacible.
2. Obtener la forma clausal de una fórmula en forma normal conjuntiva.