Regla de resolución y Algoritmo de Davis-Putnam

Sesión 13

Edgar Andrade, PhD

Abril de 2019

Departmento de Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Presentación

En esta sesión estudiaremos:

1. Regla de resolución
2. Proposiciones equisatisfacibles
3. *Unit propagation* para eliminar cláusulas unitarias.
4. Regla para eliminar literales puros.
5. Algoritmo de Davis-Putnam.

Contenido

Definiciones previas (1/3)

Sea C una cláusula e I una interpretación. Decimos que I es un modelo de C sii existe un literal $\ell \in C$ tal que $I(\ell) = 1$.

Definiciones previas (1/3)

Sea C una cláusula e I una interpretación. Decimos que I es un modelo de C sii existe un literal $\ell \in C$ tal que $I(\ell) = 1$.

Sea S un conjunto de cláusulas e I una interpretación. Decimos que I es un modelo de S sii para todo $C \in S$, I es un modelo de C.

Definiciones previas (1/3)

Sea C una cláusula e I una interpretación. Decimos que I es un modelo de C sii existe un literal $\ell \in C$ tal que $I(\ell) = 1$.

Sea S un conjunto de cláusulas e I una interpretación. Decimos que I es un modelo de S sii para todo $C \in S$, I es un modelo de C.

☞ La cláusula vacía $\Box$ no tiene modelo.

Definiciones previas (1/3)

Sea C una cláusula e I una interpretación. Decimos que I es un modelo de C sii existe un literal $\ell \in C$ tal que $I(\ell) = 1$.

Sea S un conjunto de cláusulas e I una interpretación. Decimos que I es un modelo de S sii para todo $C \in S$, I es un modelo de C.

☞ La cláusula vacía $\square$ no tiene modelo.

☞ Cualquier interpretación I es un modelo de $\emptyset$ (el conjunto vacío de cláusulas).

Definiciones previas (2/3)

Sea ℓ un literal. Se define $\ell^c = \begin{cases} \overline{p}, & \text{si } \ell = p \text{ para algún } p \\ p, & \text{si } \ell = \overline{p} \text{ para algún } p \end{cases}$

Definiciones previas (2/3)

Sea ℓ un literal. Se define $\ell^c = \begin{cases} \overline{p}, & \text{si } \ell = p \text{ para algún } p \\ p, & \text{si } \ell = \overline{p} \text{ para algún } p \end{cases}$

Una cláusula C se dice trivial sii existe un literal ℓ tal que C contiene a ℓ y ℓ^c.

Definiciones previas (2/3)

Sea ℓ un literal. Se define $\ell^c = \begin{cases} \overline{p}, & \text{si } \ell = p \text{ para algún } p \\ p, & \text{si } \ell = \overline{p} \text{ para algún } p \end{cases}$

Una cláusula C se dice trivial sii existe un literal ℓ tal que C contiene a ℓ y ℓ^c.

Ejemplo: La cláusula $pq\bar{r}r$ es una cláusula trivial.

Definiciones previas (2/3)

Sea ℓ un literal. Se define $\ell^c = \begin{cases} \overline{p}, & \text{si } \ell = p \text{ para algún } p \\ p, & \text{si } \ell = \overline{p} \text{ para algún } p \end{cases}$

Una cláusula C se dice trivial sii existe un literal ℓ tal que C contiene a ℓ y ℓ^c.

Ejemplo: La cláusula $pq\bar{r}r$ es una cláusula trivial.

Lema: Si S es un conjunto de cláusulas y $C \in S$ es una cláusula trivial, entonces $S \equiv S - \{C\}$.

Definiciones previas (2/3)

Sea ℓ un literal. Se define $\ell^c = \begin{cases} \overline{p}, & \text{si } \ell = p \text{ para algún } p \\ p, & \text{si } \ell = \overline{p} \text{ para algún } p \end{cases}$

Una cláusula C se dice trivial sii existe un literal ℓ tal que C contiene a ℓ y ℓ^c.

Ejemplo: La cláusula $pq\bar{r}r$ es una cláusula trivial.

Lema: Si S es un conjunto de cláusulas y $C \in S$ es una cláusula trivial, entonces $S \equiv S - \{C\}$.

Demostración: Ejercicio 2

Definiciones previas (3/3)

Sean C_1 y C_2 cláusulas. Si ℓ hace parte de C_1 y ℓ^c hace parte de C_2, entonces decimos que C_1 y C_2 son cláusulas conflictivas, y que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c.

Definiciones previas (3/3)

Sean C_1 y C_2 cláusulas. Si ℓ hace parte de C_1 y ℓ^c hace parte de C_2, entonces decimos que C_1 y C_2 son cláusulas conflictivas, y que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c.

Ejemplo: Las cláusulas $pq\bar{r}$ y $r\bar{s}$ son conflictivas y conflictúan en el par $\bar{r}, r$.

Regla de Resolución

Definición: Sean C_1 y C_2 cláusulas que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c:

> El resolvente de C_1 y C_2, denotado por $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$, se define como la cláusula formada por C_1 quitandole ℓ, unida con C_2 quitándole ℓ^c.

Regla de Resolución

Definición: Sean C_1 y C_2 cláusulas que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c:

> El resolvente de C_1 y C_2, denotado por $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$, se define como la cláusula formada por C_1 quitandole ℓ, unida con C_2 quitándole ℓ^c.
>
> Ejemplo: El resolvente de $pq\bar{r}$ y $r\bar{s}$ es $pq\bar{s}$.

Regla de Resolución

Definición: Sean C_1 y C_2 cláusulas que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c:

> El resolvente de C_1 y C_2, denotado por $\text{Res}(C_1, C_2)$, se define como la cláusula formada por C_1 quitandole ℓ, unida con C_2 quitándole ℓ^c.
>
> Ejemplo: El resolvente de $pq\bar{r}$ y $r\bar{s}$ es $pq\bar{s}$.

Lema: Si C_1 y C_2 conflictúan en más de dos literales ℓ_1 y ℓ_2, entonces $\text{Res}(C_1, C_2)$ es una cláusula trivial.

Regla de Resolución

Definición: Sean C_1 y C_2 cláusulas que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c:

> El resolvente de C_1 y C_2, denotado por $\text{Res}(C_1, C_2)$, se define como la cláusula formada por C_1 quitandole ℓ, unida con C_2 quitándole ℓ^c.
>
> Ejemplo: El resolvente de $pq\bar{r}$ y $r\bar{s}$ es $pq\bar{s}$.

Lema: Si C_1 y C_2 conflictúan en más de dos literales ℓ_1 y ℓ_2, entonces $\text{Res}(C_1, C_2)$ es una cláusula trivial.

Demostración: Ejercicio 3

Regla de Resolución

Definición: Sean S_1 y S_2 conjuntos de cláusulas. Decimos que $S_1 \approx S_2$ sii S_1 es satisfacible si, y sólo si, S_2 es satisfacible.

Regla de Resolución

Definición: Sean S_1 y S_2 conjuntos de cláusulas. Decimos que $S_1 \approx S_2$ sii S_1 es satisfacible si, y sólo si, S_2 es satisfacible.

> Ejemplo: Sean $S_1 = \{pq\overline{r}, p\overline{q}, \overline{p}q\}$ y $S_2 = \{p\overline{q}, \overline{p}q\}$. Se tiene que $S_1 \approx S_2$, toda vez que ambas son satisfacibles por la interpretación I tal que $I(p) = I(q) = 1$.

Regla de Resolución

Definición: Sean S_1 y S_2 conjuntos de cláusulas. Decimos que $S_1 \approx S_2$ sii S_1 es satisfacible si, y sólo si, S_2 es satisfacible.

> Ejemplo: Sean $S_1 = \{pq\bar{r}, p\bar{q}, \bar{p}q\}$ y $S_2 = \{p\bar{q}, \bar{p}q\}$. Se tiene que $S_1 \approx S_2$, toda vez que ambas son satisfacibles por la interpretación I tal que $I(p) = I(q) = 1$.
>
> ☞ Observe que si $S_1 \equiv S_2$, entonces $S_1 \approx S_2$. No obstante, la recíproca no es cierta (ver ejemplo anterior).

Regla de Resolución

Teorema: Sean C_1 y C_2 que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c. Se tiene $\{C_1, C_2\} \approx \mathrm{Res}(C_1, C_2)$.

Regla de Resolución

Teorema: Sean C_1 y C_2 que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c. Se tiene $\{C_1, C_2\} \approx \mathrm{Res}(C_1, C_2)$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea I un modelo de $\{C_1, C_2\}$. Es decir. $V_I(C_1) = 1$ y $V_I(C_2) = 1$. Observe que o bien $V_I(\ell) = 1$ o bien $V_I(\ell^c) = 1$.

Regla de Resolución

Teorema: Sean C_1 y C_2 que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c. Se tiene $\{C_1, C_2\} \approx \mathrm{Res}(C_1, C_2)$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea I un modelo de $\{C_1, C_2\}$. Es decir. $V_I(C_1) = 1$ y $V_I(C_2) = 1$. Observe que o bien $V_I(\ell) = 1$ o bien $V_I(\ell^c) = 1$.

- Supongamos que $V_I(\ell) = 1$. Entonces $V_I(\ell^c) = 0$, pero como I es un modelo de C_2, debe existir un literal $\ell' \neq \ell^c$ en C_2 tal que $V_I(\ell') = 1$.

Regla de Resolución

Teorema: Sean C_1 y C_2 que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c. Se tiene $\{C_1, C_2\} \approx \mathrm{Res}(C_1, C_2)$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea I un modelo de $\{C_1, C_2\}$. Es decir. $V_I(C_1) = 1$ y $V_I(C_2) = 1$. Observe que o bien $V_I(\ell) = 1$ o bien $V_I(\ell^c) = 1$.

- Supongamos que $V_I(\ell) = 1$. Entonces $V_I(\ell^c) = 0$, pero como I es un modelo de C_2, debe existir un literal $\ell' \neq \ell^c$ en C_2 tal que $V_I(\ell') = 1$. Como ℓ' está en $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$, entonces I es un modelo para $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$.

Regla de Resolución

Teorema: Sean C_1 y C_2 que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c. Se tiene $\{C_1, C_2\} \approx \mathrm{Res}(C_1, C_2)$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea I un modelo de $\{C_1, C_2\}$. Es decir. $V_I(C_1) = 1$ y $V_I(C_2) = 1$. Observe que o bien $V_I(\ell) = 1$ o bien $V_I(\ell^c) = 1$.

- Supongamos que $V_I(\ell) = 1$. Entonces $V_I(\ell^c) = 0$, pero como I es un modelo de C_2, debe existir un literal $\ell' \neq \ell^c$ en C_2 tal que $V_I(\ell') = 1$. Como ℓ' está en $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$, entonces I es un modelo para $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$.
- Si $V_I(\ell^c) = 1$, la demostración es similar.

Regla de Resolución

Teorema: Sean C_1 y C_2 que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c. Se tiene $\{C_1, C_2\} \approx \mathrm{Res}(C_1, C_2)$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea I un modelo de $\{C_1, C_2\}$. Es decir. $V_I(C_1) = 1$ y $V_I(C_2) = 1$. Observe que o bien $V_I(\ell) = 1$ o bien $V_I(\ell^c) = 1$.

- Supongamos que $V_I(\ell) = 1$. Entonces $V_I(\ell^c) = 0$, pero como I es un modelo de C_2, debe existir un literal $\ell' \neq \ell^c$ en C_2 tal que $V_I(\ell') = 1$. Como ℓ' está en $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$, entonces I es un modelo para $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$.
- Si $V_I(\ell^c) = 1$, la demostración es similar.

En cualquier caso, I es un modelo para $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$.

Regla de Resolución

Teorema: Sean C_1 y C_2 que conflictúan en el par ℓ, ℓ^c. Se tiene $\{C_1, C_2\} \approx \mathrm{Res}(C_1, C_2)$.

Demostración:

$\Leftarrow$) Ejercicio 5

Algoritmo de resolución

Input: S, un conjunto de cláusulas (sin cláusulas triviales)

Output: S es satisfacible/S es insatisfacible

Mientras S tenga un par de cláusulas conflictuadas no marcadas:

Algoritmo de resolución

Input: S, un conjunto de cláusulas (sin cláusulas triviales)

Output: S es satisfacible/S es insatisfacible

Mientras S tenga un par de cláusulas conflictuadas no marcadas:

1. Escoger un par C_1, C_2 no marcado de cláusulas conflictuadas.

Algoritmo de resolución

Input: S, un conjunto de cláusulas (sin cláusulas triviales)

Output: S es satisfacible/S es insatisfacible

Mientras S tenga un par de cláusulas conflictuadas no marcadas:

1. Escoger un par C_1, C_2 no marcado de cláusulas conflictuadas.
2. Computar $C = \text{Res}(C_1, C_2)$.

Algoritmo de resolución

Input: S, un conjunto de cláusulas (sin cláusulas triviales)

Output: S es satisfacible/S es insatisfacible

Mientras S tenga un par de cláusulas conflictuadas no marcadas:

1. Escoger un par C_1, C_2 no marcado de cláusulas conflictuadas.
2. Computar $C = \text{Res}(C_1, C_2)$.
3. Si $C = \square$: Retornar "S no es satisfacible".

Algoritmo de resolución

Input: S, un conjunto de cláusulas (sin cláusulas triviales)

Output: S es satisfacible/S es insatisfacible

Mientras S tenga un par de cláusulas conflictuadas no marcadas:

1. Escoger un par C_1, C_2 no marcado de cláusulas conflictuadas.
2. Computar $C = \text{Res}(C_1, C_2)$.
3. Si $C = \square$: Retornar "S no es satisfacible".
4. Si no:
    a. Marque el par C_1, C_2.
    b. Si C no es trivial, incluya C en S.

Algoritmo de resolución

Input: S, un conjunto de cláusulas (sin cláusulas triviales)

Output: S es satisfacible/S es insatisfacible

Mientras S tenga un par de cláusulas conflictuadas no marcadas:

1. Escoger un par C_1, C_2 no marcado de cláusulas conflictuadas.
2. Computar $C = \text{Res}(C_1, C_2)$.
3. Si $C = \square$: Retornar "S no es satisfacible".
4. Si no:
    a. Marque el par C_1, C_2.
    b. Si C no es trivial, incluya C en S.

Retornar "S es satisfacible".

Algoritmo de resolución — Ejemplo

Sea $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r\}$.

Algoritmo de resolución — Ejemplo

Sea $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{r}$, $\overline{pq}r$ y se obtiene $\overline{pq}$.

Algoritmo de resolución — Ejemplo

Sea $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{r}$, $\overline{pq}r$ y se obtiene $\overline{pq}$.

Se marca el par $\overline{r}$, $\overline{pq}r$.

Algoritmo de resolución — Ejemplo

Sea $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{r}$, $\overline{pq}r$ y se obtiene $\overline{pq}$.

Se marca el par $\overline{r}$, $\overline{pq}r$.

Se incluye $\overline{pq}$ en S

Algoritmo de resolución — Ejemplo

Sea $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{r}$, $\overline{pq}r$ y se obtiene $\overline{pq}$.

Se marca el par $\overline{r}$, $\overline{pq}r$.

Se incluye $\overline{pq}$ en S ☞ $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r, \overline{pq}\}$.

Algoritmo de resolución — Ejemplo

Sea $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{r}$, $\overline{pq}r$ y se obtiene $\overline{pq}$.

Se marca el par $\overline{r}$, $\overline{pq}r$.

Se incluye $\overline{pq}$ en S ☞ $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r, \overline{pq}\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{p}q$, $\overline{pq}$ y se obtiene $\overline{p}$.

Algoritmo de resolución — Ejemplo

Sea $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{r}$, $\overline{pq}r$ y se obtiene $\overline{pq}$.

Se marca el par $\overline{r}$, $\overline{pq}r$.

Se incluye $\overline{pq}$ en S ☞ $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r, \overline{pq}\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{p}q$, $\overline{pq}$ y se obtiene $\overline{p}$.

Se marca el par $\overline{p}q$, $\overline{pq}$.

Algoritmo de resolución — Ejemplo

Sea $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{r}$, $\overline{pq}r$ y se obtiene $\overline{pq}$.

Se marca el par $\overline{r}$, $\overline{pq}r$.

Se incluye $\overline{pq}$ en S ☞ $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r, \overline{pq}\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{p}q$, $\overline{pq}$ y se obtiene $\overline{p}$.

Se marca el par $\overline{p}q$, $\overline{pq}$.

Se incluye $\overline{p}$ en S

Algoritmo de resolución — Ejemplo

Sea $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{r}$, $\overline{pq}r$ y se obtiene $\overline{pq}$.

Se marca el par $\overline{r}$, $\overline{pq}r$.

Se incluye $\overline{pq}$ en S ☞ $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r, \overline{pq}\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{p}q$, $\overline{pq}$ y se obtiene $\overline{p}$.

Se marca el par $\overline{p}q$, $\overline{pq}$.

Se incluye $\overline{p}$ en S ☞ $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r, \overline{pq}, \overline{p}\}$.

Algoritmo de resolución — Ejemplo

Sea $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{r}$, $\overline{pq}r$ y se obtiene $\overline{pq}$.

Se marca el par $\overline{r}$, $\overline{pq}r$.

Se incluye $\overline{pq}$ en S ☞ $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r, \overline{pq}\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{p}q$, $\overline{pq}$ y se obtiene $\overline{p}$.

Se marca el par $\overline{p}q$, $\overline{pq}$.

Se incluye $\overline{p}$ en S ☞ $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r, \overline{pq}, \overline{p}\}$.

Se toma el par no marcado p, $\overline{p}$ y se obtiene $\Box$.

Algoritmo de resolución — Ejemplo

Sea $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{r}$, $\overline{pq}r$ y se obtiene $\overline{pq}$.

Se marca el par $\overline{r}$, $\overline{pq}r$.

Se incluye $\overline{pq}$ en S ☞ $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r, \overline{pq}\}$.

Se toma el par no marcado $\overline{p}q$, $\overline{pq}$ y se obtiene $\overline{p}$.

Se marca el par $\overline{p}q$, $\overline{pq}$.

Se incluye $\overline{p}$ en S ☞ $S = \{p, \overline{p}q, \overline{r}, \overline{pq}r, \overline{pq}, \overline{p}\}$.

Se toma el par no marcado p, $\overline{p}$ y se obtiene $\Box$.

Se devuelve "S no es satisfacible".

Contenido

Unit propagation (1/4)

Definición

Una cláusula unitaria es una cláusula que sólo contiene un literal.

Unit propagation (1/4)

Definición

Una cláusula unitaria es una cláusula que sólo contiene un literal.

Ejemplo

La fórmula S, en forma clausal,

$$S = \{p\overline{q}, \overline{r}, \overline{r}p, \overline{p}r\}$$

contiene la cláusula unitaria $\overline{r}$.

Unit propagation (2/4)

Supongamos:

S es un conjunto de cláusulas,

ℓ es un literal/una cláusula unitaria,

$\ell \in S$.

Unit propagation (2/4)

Supongamos:

- S es un conjunto de cláusulas,
- ℓ es un literal/una cláusula unitaria,
- $\ell \in S$.

Definamos S':

- Eliminando $C \in S$ si $\ell \in C$,
- Eliminando ℓ^c de las demás cláusulas.

Unit propagation (3/4) —Ejemplo—

Sea $S = \{p\overline{q}, \overline{r}, \overline{r}p, \overline{p}r\}$

Eliminamos $\overline{r}$:

Unit propagation (3/4) —Ejemplo—

Sea $S = \{p\overline{q}, \overline{r}, \overline{r}p, \overline{p}r\}$

Eliminamos $\overline{r}$:

Eliminando $C \in S$ si $\ell \in C$...

Unit propagation (3/4) —Ejemplo—

Sea $S = \{p\overline{q}, \overline{r}, \overline{r}p, \overline{p}r\}$

Eliminamos $\overline{r}$:

$S' = \{p\overline{q}, \overline{p}r\}$

Unit propagation (3/4) —Ejemplo—

Sea $S = \{p\overline{q}, \overline{r}, \overline{r}p, \overline{p}r\}$

Eliminamos $\overline{r}$:

$S' = \{p\overline{q}, \overline{p}r\}$

Eliminando ℓ^c de las demás cláusulas...

Unit propagation (3/4) —Ejemplo—

Sea $S = \{p\overline{q}, \overline{r}, \overline{r}p, \overline{p}r\}$

Eliminamos $\overline{r}$:

$S' = \{p\overline{q}, \overline{p}\}$

Unit propagation (3/4) —Ejemplo—

Obtenemos una cláusula unitaria en el resultado:

$S' = \{p\overline{q}, \overline{p}\}$

Aplicamos de nuevo la regla.

Eliminamos $\overline{p}$:

Unit propagation (3/4) —Ejemplo—

Obtenemos una cláusula unitaria en el resultado:

$S' = \{p\overline{q}, \overline{p}\}$

Aplicamos de nuevo la regla.

Eliminamos $\overline{p}$:

Eliminando $C \in S$ si $\ell \in C$...

Unit propagation (3/4) —Ejemplo—

Obtenemos una cláusula unitaria
en el resultado:

$S' = \{p\overline{q}, \overline{p}\}$

Aplicamos de nuevo la regla.

Eliminamos $\overline{p}$:

$S'' = \{p\overline{q}\}$

Unit propagation (3/4) —Ejemplo—

Obtenemos una cláusula unitaria en el resultado:

$S' = \{p\overline{q}, \overline{p}\}$

Aplicamos de nuevo la regla.

Eliminamos $\overline{p}$:

$S'' = \{p\overline{q}\}$

Eliminando ℓ^c de las demás cláusulas...

Unit propagation (3/4) —Ejemplo—

Obtenemos una cláusula unitaria en el resultado:

$S' = \{p\overline{q}, \overline{p}\}$

Aplicamos de nuevo la regla.

Eliminamos $\overline{p}$:

$S'' = \{\overline{q}\}$

Unit propagation (4/4)

Teorema

Si S es un conjunto de cláusulas y S' es el resultado de *Unit propagation* aplicado a S, entonces $S \approx S'$.

Unit propagation (4/4)

Teorema

Si S es un conjunto de cláusulas y S' es el resultado de *Unit propagation* aplicado a S, entonces $S \approx S'$.

Demostración: Ejercicio 6

Contenido

Eliminación de literales puros (1/3)

Definición

Sea S un conjunto de cláusulas y ℓ un literal. Decimos que ℓ es un literal puro en S sii se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $\ell \in C$ para algún $C \in S$,
2. $\ell^c \notin C$ para todo $C \in S$.

Eliminación de literales puros (1/3)

Definición

Sea S un conjunto de cláusulas y ℓ un literal. Decimos que ℓ es un literal puro en S sii se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $\ell \in C$ para algún $C \in S$,
2. $\ell^c \notin C$ para todo $C \in S$.

Ejemplo

La fórmula S, en forma clausal,

$$S = \{p\overline{q}, \overline{r}, \overline{r}p, \overline{q}r, \overline{p}r\}$$

contiene el literal puro $\overline{q}$.

Eliminación de literales puros (2/3)

Teorema

Supongamos que S es un conjunto de cláusulas y ℓ es un literal puro en S. Sea S' el resultado de eliminar todas las $C \in S$ tales que $\ell \in C$. Entonces $S \approx S'$.

Eliminación de literales puros (2/3)

Teorema

Supongamos que S es un conjunto de cláusulas y ℓ es un literal puro en S. Sea S' el resultado de eliminar todas las $C \in S$ tales que $\ell \in C$. Entonces $S \approx S'$.

Demostración: Ejercicio 7

Eliminación de literales puros (3/3) —Ejemplo—

Sea $S = \{p\overline{q}, \overline{r}, \overline{r}p, \overline{q}r, \overline{p}r\}$

Eliminamos el literal puro $\overline{q}$:

Eliminación de literales puros (3/3) —Ejemplo—

Sea $S = \{p\overline{q}, \overline{r}, \overline{r}p, \overline{q}r, \overline{p}r\}$

Eliminamos el literal puro $\overline{q}$:

$S' = \{\overline{r}, \overline{r}p, \overline{p}r\}$

Contenido

Algoritmo de Davis-Putnam (2/2)

Input: Fórmula S en forma clausal sin cláusulas triviales

Output: Satisfacible/Insatisfacible

1. Ejecutar pasos (a) y (b) mientras sea posible:
   a) Unit propagation
   b) Eliminación de literales puros

Algoritmo de Davis-Putnam (2/2)

Input: Fórmula S en forma clausal sin cláusulas triviales
Output: Satisfacible/Insatisfacible

1. Ejecutar pasos (a) y (b) mientras sea posible:
   a) Unit propagation
   b) Eliminación de literales puros
2. Si no se puede ejecutar ni (a) ni (b):

   Escoger un literal ℓ.

   Encontrar los resolventes de todos los páres de cláusulas que conflictúen en ℓ y ℓ^c.

   Añadir a S los resolventes (no triviales).

   Borrar de S todas las cláusulas que contengan ℓ o ℓ^c.

Algoritmo de Davis-Putnam (2/2)

Input: Fórmula S en forma clausal sin cláusulas triviales

Output: Satisfacible/Insatisfacible

1. Ejecutar pasos (a) y (b) mientras sea posible:
   a) Unit propagation
   b) Eliminación de literales puros
2. Si no se puede ejecutar ni (a) ni (b):

   Escoger un literal ℓ.

   Encontrar los resolventes de todos los páres de cláusulas que conflictúen en ℓ y ℓ^c.

   Añadir a S los resolventes (no triviales).

   Borrar de S todas las cláusulas que contengan ℓ o ℓ^c.
3. Si durante la ejecución de 1 o 2 aparece la cláusula vacía, retornar "Insatisfacible".

Algoritmo de Davis-Putnam (2/2)

Input: Fórmula S en forma clausal sin cláusulas triviales

Output: Satisfacible/Insatisfacible

1. Ejecutar pasos (a) y (b) mientras sea posible:
   a) Unit propagation
   b) Eliminación de literales puros
2. Si no se puede ejecutar ni (a) ni (b):

   Escoger un literal ℓ.

   Encontrar los resolventes de todos los páres de cláusulas que conflictúen en ℓ y ℓ^c.

   Añadir a S los resolventes (no triviales).

   Borrar de S todas las cláusulas que contengan ℓ o ℓ^c.
3. Si durante la ejecución de 1 o 2 aparece la cláusula vacía, retornar "Insatisfacible".
4. Si no se puede ejecutar ninguna regla, retornar "Satisfacible".

Algoritmo de Davis-Putnam (1/2) —Ejemplo—

Sea $S_0 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q, \overline{pr}\}$

Algoritmo de Davis-Putnam (1/2) —Ejemplo—

Sea $S_0 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q, \overline{pr}\}$

Eliminamos el literal puro $\overline{r}$:

Algoritmo de Davis-Putnam (1/2) —Ejemplo—

Sea $S_0 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q, \overline{pr}\}$

Eliminamos el literal puro $\overline{r}$:

$S_1 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q\}$

Algoritmo de Davis-Putnam (1/2) —Ejemplo—

Sea $S_0 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q, \overline{pr}\}$

Eliminamos el literal puro $\overline{r}$:

$S_1 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q\}$

No hay cláusulas unitarias ni literales puros.

Algoritmo de Davis-Putnam (1/2) —Ejemplo—

Sea $S_0 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q, \overline{pr}\}$

Eliminamos el literal puro $\overline{r}$:

$S_1 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q\}$

No hay cláusulas unitarias ni literales puros.

Escogemos el literal q y aplicamos resolución sobre todas las parejas que conflictúen en q, $\overline{q}$

Algoritmo de Davis-Putnam (1/2) —Ejemplo—

Sea $S_0 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q, \overline{pr}\}$

Eliminamos el literal puro $\overline{r}$:

$S_1 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q\}$

No hay cláusulas unitarias ni literales puros.

Escogemos el literal q y aplicamos resolución sobre todas las parejas que conflictúen en q, $\overline{q}$ ☞ pq y $p\overline{q}$; $p\overline{q}$ y $\overline{p}q$.

Algoritmo de Davis-Putnam (1/2) —Ejemplo—

Sea $S_0 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q, \overline{pr}\}$

Eliminamos el literal puro $\overline{r}$:

$S_1 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q\}$

No hay cláusulas unitarias ni literales puros.

Escogemos el literal q y aplicamos resolución sobre todas las parejas que conflictúen en q, $\overline{q}$ ☞ pq y $p\overline{q}$; $p\overline{q}$ y $\overline{p}q$.

Nos quedamos con los resolventes no triviales y eliminamos todas las cláusulas con q o $\overline{q}$:

$S_2 = \{p\}$

Algoritmo de Davis-Putnam (1/2) —Ejemplo—

Sea $S_0 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q, \overline{pr}\}$

Eliminamos el literal puro $\overline{r}$:

$S_1 = \{pq, p\overline{q}, \overline{p}q\}$

No hay cláusulas unitarias ni literales puros.

Escogemos el literal q y aplicamos resolución sobre todas las parejas que conflictúen en q, $\overline{q}$ ☞ pq y $p\overline{q}$; $p\overline{q}$ y $\overline{p}q$.

Nos quedamos con los resolventes no triviales y eliminamos todas las cláusulas con q o $\overline{q}$:

$S_2 = \{p\}$

Hacemos *Unit propagation* sobre p:

$S_3 = \{\}$ ¡SATISFACIBLE!

Fin de la sesión 13

En esta sesión usted ha aprendido a:

1. Aplicar la regla de resolución.
2. Realizar el procedimiento de *Unit propagation*.
3. Eliminar literales puros.
4. Verificar si una formula es satisfacible mediante el algoritmo de Davis-Putnam.