

3. Evaluar las siguientes integrales de trayectorias $\int_{\sigma} f(x, y, z) ds$, donde

(a) $f(x, y, z) = \exp \sqrt{z}$ y $\sigma: t \mapsto (1, 2, t^2)$, $t \in [0, 1]$

(b) $f(x, y, z) = yz$ y $\sigma: t \mapsto (t, 3t, 2t)$, $t \in [1, 3]$

(c) $f(x, y, z) = (x + y)/(y + z)$ y $\sigma: t \mapsto (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t)$, $t \in [1, 2]$

a. $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z}}$ o: $t \mapsto (1, 2, t^2)$, $t \in [0, 1]$

1. Parametrización:

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1, 2, t^2)$$

2. Derivadas:

$$x'(t) = 0 = y'(t) \quad z'(t) = 2t$$

3. Diferencial.

$$ds = (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)^{1/2} = 2t$$

4. Sustituimos:

$$\int_{\sigma} f(x, y, z) ds = \int_0^1 \exp(\sqrt{z}) ds = \int_0^1 e^{\sqrt{t^2}} 2t dt$$

Válor de la integral es igual $a = 2$.

$$2 \int_0^1 e^{+t} dt \quad u=t \quad du=dt \quad v=e^t \quad 2 \left[t \cdot e^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt$$

$$(2) (e^2 - (e^1 - 1)) = 2$$

b. $f(x, y, z) = yz$ o: $t \mapsto (t, 3t, 2t)$, $t \in (1, 3)$

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, 3t, 2t)$$

$$x'(t) = 1 \quad y'(t) = 3 \quad z'(t) = 2$$

$$ds = \sqrt{14} \quad 6 \int_1^3 t^2 \sqrt{14} dt = 6\sqrt{14} \quad \frac{t^3}{3} \Big|_1^3 = 6\sqrt{14} \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \right) = 2 \cdot 26 = 52\sqrt{14}$$

c. $f(x, y, z) = (x+y)/(y+z)$ o: $t \mapsto (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t)$, $t \in [1, 2]$

$$\sigma(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t) \quad x'(t) = 1 \quad y'(t) = t^{1/2} \quad z'(t) = 1 \quad ds = \sqrt{2+t}$$

$$\int_1^2 \frac{\frac{2}{3}t^{3/2} + t}{\frac{2}{3}t^{3/2} + t} \sqrt{2+t} dt = \frac{2(2+t)^{3/2}}{3} \Big|_1^2 = \frac{2 \cdot 8}{3} - \frac{2 \sqrt{27}}{3} = \frac{16}{3} - \frac{2(3\sqrt{3})}{3} = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 9 \\ \hline 3 \\ 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

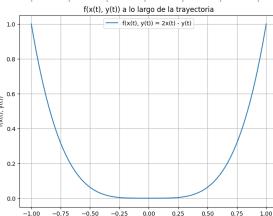
7. Sea $f(x, y) = 2x - y$, $x = t^4$, $y = t^4$, $-1 \leq t \leq 1$.

(a) Calcular la integral de f a lo largo de esta trayectoria e interpretar geométricamente la respuesta.

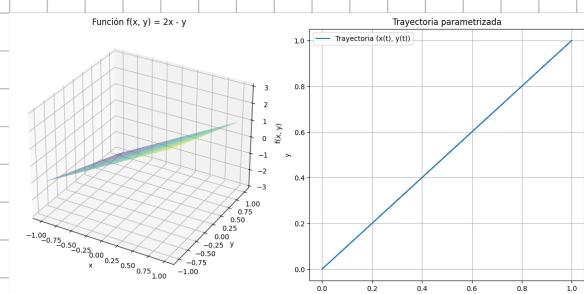
(b) Evaluar la función longitud de arco $s(t)$ y rehacer la parte (a) en términos de s (quizá convenga consultar el ejercicio 2 de la sección 3.2).

a. $f(x, y) = 2x - y$ $\sigma(t) = (t^4, t^4)$ $x'(t) = 4t^3$ $y'(t) = 4t^3$ $ds = \sqrt{16t^6 + 16t^6} dt$

$$4\sqrt{2} \int_{-1}^1 t^4 \cdot t^3 dt = 4\sqrt{2} \left[\frac{t^8}{8} \right]_{-1}^1 = 0$$



Geométricamente se entiende que nuestra trayectoria evaluada cancela sus volúmenes negativos con los positivos.



2. Longitud de arco:

$$s(t) = \int_a^t \left(x'(t)^2 + y'(t)^2 \right)^{1/2} dt = \int_0^t \sqrt{32t^4} dt = 4\sqrt{2} \frac{t^4}{4} \Big|_0^t = \sqrt{2} t^4$$

$$ds = 4\sqrt{2} t^3 dt$$

En los ejercicios 8 a 11 se trata la aplicación de la integral de trayectoria al problema de definir el valor promedio de una función escalar a lo largo de una trayectoria. Definir el número

$$\frac{\int_{\sigma} f(x, y, z) ds}{l(\sigma)}$$

$a=r$

$$\frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

$$\underline{l(\sigma)} = \underline{\pi r}$$

9. Hallar la coordenada y promedio de los puntos en el semicírculo parametrizado por $\rho: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\theta \mapsto (0, a \sin \theta, a \cos \theta)$; $a > 0$.

$$\frac{\int_0^\pi f(x, y, z) ds}{2a^2} = \frac{\int_0^\pi \sqrt{a \cos \theta^2 + a \sin \theta^2} d\theta}{2a^2} = \frac{\int_0^\pi a \sin \theta d\theta}{2a^2} = -a^2 \left[\cos \theta \right]_0^\pi = -a^2 (-1 - 1)$$

$$\text{Valor promedio } \bar{y} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}$$

13. Hallar la masa de un alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ si la densidad en (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$ gramos por unidad de longitud del alambre.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad x + y + z = 0$$

Traemos de parametrizar la curva.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x + y + z$$

$$\text{Vector en el plano} = (1, -1, 0) = V_1$$

$$\text{Norma} = (1, 1, 1)$$

$$\text{Vector ortogonal} = (-1, -1, 2)$$

Normalizamos:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = |V_1| \quad |V_2| = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\sigma(t) = (\cos t V_1 + \sin t V_2)$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin t, \frac{2}{\sqrt{6}} \sin t$$

$$x'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t - \frac{1}{\sqrt{6}} \cos t, y'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t - \frac{1}{\sqrt{6}} \cos t$$

$$z'(t) = \frac{2}{\sqrt{6}} \cos t$$

Planteamos:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}} \right)^2 dt \quad ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{2} - \frac{2 \sin t \cos t}{\sqrt{2} \sqrt{6}} + \frac{\sin^2 t}{6} dt$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$$

Sección 7.2

2. Evaluar cada una de las integrales siguientes:

(a) $\int_{\sigma} x \, dy - y \, dx$, $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(b) $\int_{\sigma} x \, dx + y \, dy$, $\sigma(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$, $0 \leq t \leq 2$

(c) $\int_{\sigma} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$, donde σ está formada por los segmentos de recta que unen a $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$

(d) $\int_{\sigma} x^2 \, dx - xy \, dy + dz$, donde σ es la parábola $z = x^2$, $y = 0$ de $(-1, 0, 1)$ a $(1, 0, 1)$.

a. $\int_{\sigma} x \, dy - y \, dx$ $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$
 $x'(t) = -\sin t$ $y'(t) = \cos t$
 $\int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t + \sin t \cdot \sin t \, dt = 2\pi$

b. $\int_{\sigma} x \, dx + y \, dy$ $\sigma(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ $0 \leq t \leq 2$
 $x'(t) = -\sin(\pi t)\pi$ $y'(t) = \cos(\pi t)\pi$
 $\int_0^2 \cos(\pi t) \sin(\pi t)\pi + \sin(\pi t) \cos(\pi t)\pi \, dt = \int_0^2 -\pi \{ \cos(\pi t) \sin(\pi t) - \sin(\pi t) \cos(\pi t) \} \, dt$

c. $\int_{\sigma} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$ σ recta
 $(1, 0, 0)$ $(0, 1, 0)$ $(0, 0, 1)$

- Integraremos en las tres rectas.

$$\sigma_1 \int_0^1 t(0)(-1) + 0 + 0 = 0$$

$$\sigma_2 \int_0^1 (1-t)t(0) + 0 + 0 = 0$$

$$\sigma_3 \int_0^1 (0)(1-t)(1) + 0 + 0 = 0$$

$$\int_{\sigma} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz = 0$$

$$\sigma_2(s) = (1, 0, 0) + (-1, 1, 0)s$$

$$(0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$$

$$(0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$$

Se entiende que
 es un conservativo
 y al ser un área
 cerrada nos da 0. } Forma diferencial
 exacta

d) $\int_{\sigma} x^2 \, dx - xy \, dy + dz$, σ $z = x^2$, $y = 0$ de $(-1, 0, 1)$ a $(1, 0, 1)$

$$\sigma(t) = (t, 0, t^2) \quad t \in [-1, 1]$$

$$x'(t) = 1 \quad y'(t) = 0 \quad z'(t) = 2t$$

$$\int_{-1}^1 t^2 + 2t \, dt = \frac{t^3}{3} + t^2 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3}$$

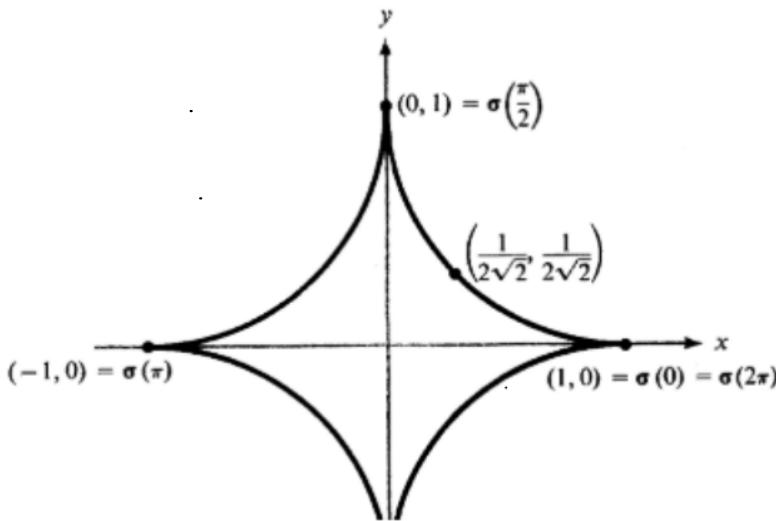
7. Evaluar $\int_{\sigma} y \, dx + (3y^3 - x) \, dy + z \, dz$ para cada una de las trayectorias $\sigma(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \leq t \leq 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\sigma(t) = (t, t^n, 0), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$x'(t) = 1 \quad y'(t) = nt^{n-1} \quad z'(t) = 0$$

$$\int_0^1 t^n + (3t^{3n} - t)(nt^{n-1}) \, dt = \int_0^1 t^n + 3nt^{4n-1} - nt^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{3nt^{4n}}{4n} - \frac{nt^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} + \frac{3n}{4n} - \frac{n}{n+1} = \frac{1-n}{n+1} + \frac{3}{4} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

9. La imagen de $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, en el plano se muestra en la figura 7.2.15. Evaluar la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = xi + yj$ alrededor de esta curva.



$$\sigma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad F(x, y) = xi + yj$$

$$x(t) = \cos^3 t \quad y(t) = \sin^3 t \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}) dt$$

$$P(x, y) = x \quad Q(x, y) = y$$

$$P(x(t), y(t)) = \cos^3 t \quad Q(x(t), y(t)) = \sin^3 t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d \cos^3 t}{dt} = 3 \cos^2 t (-\sin t) = -3 \cos^2 t \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d \sin^3 t}{dt} = 3 \sin^2 t (\cos t)$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^3 t (-3 \cos^2 t \sin t) + \sin^3 t (3 \sin^2 t \cos t)) dt$$

$$\int_0^{2\pi} (-3 \cos^5 t \sin t + 3 \sin^5 t \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 3 \cos t \sin t (\sin^4 t - \cos^4 t) dt = 0.$$

Dado el teorema de Green
 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ y la curva
 es cerrada, la circulación es
 nula.

Aplicando el teorema de Green

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dA,$$

$$P(x, y) = x \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dx}{dy} = 0 \quad \iint_R 0 \, dA = 0$$

Impar $f(-t) = -f(t)$
 Y $0, 2\pi$ hay simetría

15. Evaluar $\int_C 2xyz \, dx + x^2z \, dy + x^2y \, dz$, donde C es una curva orientada simple que conecta $(1, 1, 1)$ con $(1, 2, 4)$.

$$\sigma(t) = 1, 1, 1 + (0, 1, 3)t$$

$$x = 1 \quad y = 1+t \quad z = 1+3t$$

$$x'(t) = 0 \quad y'(t) = 1 \quad z'(t) = 3$$

¿Es conservativo?

$$F = (2xyz, x^2z, x^2y) \quad \nabla f = F$$

Toca mostrar que su rotacional es cero con el producto X

16. Suponer que $\nabla f(x, y, z) = 2xyze^{x^2}\mathbf{i} + ze^{x^2}\mathbf{j} + ye^{x^2}\mathbf{k}$. Si $f(0, 0, 0) = 5$, hallar $f(1, 1, 2)$.

$$\frac{df}{dx} = 2xyz e^{x^2} \quad f(x, y, z) = \int 2xyz e^{x^2} \, dx = yz e^{x^2} + h(y, z)$$

$$\frac{df}{dy} = ze^{x^2} \quad f(x, y, z) = \int ze^{x^2} \, dy = zye^{x^2} + g(x, z)$$

$$\frac{df}{dz} = ye^{x^2} \quad f(x, y, z) = \int ye^{x^2} \, dz = zye^{x^2} + w(x, y)$$

$$f(x, y, z) = zye^{x^2} + C$$

$$f(0, 0, 0) = 5 \quad 0 \cdot 0 \cdot e^0 + C \quad C = 5$$

$$f(x, y, z) = zye^{x^2} + 5$$

$$f(1, 1, 2) = 2e + 5$$

*18. Una ciclista sube una montaña a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura 7.2.16. Realiza una revolución alrededor de la montaña para llegar a la cima,

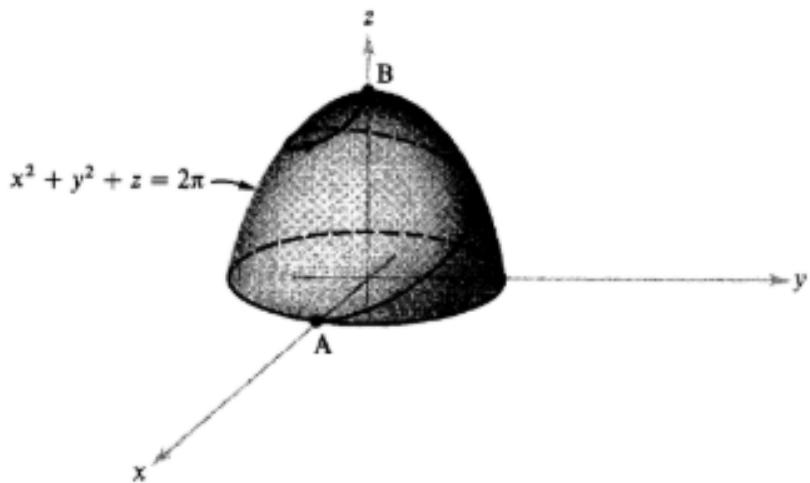


Figura 7.2.16 ¿Cuánto trabajo se realiza al subir en bicicleta esta montaña?

mientras que su velocidad de subida es constante. Durante el viaje, ella ejerce una fuerza descrita por el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$$

¿Cuál es el trabajo realizado por la ciclista al viajar de A a B?

Trabajo realizado para subir en bicicleta esta montaña:

$$W = M \cdot g \cdot h = m \cdot 9.81 \frac{m^2}{s} \cdot 2\pi \quad W = 70 \text{ Kg} (9.81 \frac{m}{s^2}) 2\pi = 4310.5 \text{ J}$$

$$h = 2\pi - 0$$

Trabajo realizado para la ciclista al viajar de A a B:

$$\int_0^{2\pi} 2r \cos(r^2) (1 - (2\pi - r^2)) (-2r) dr$$

$$\int_0^{2\pi} -4r^2 \cos(r^2) (1 - 2\pi + r^2) dr$$

$$\int_0^{2\pi} -4r^4 \cos(r^2) - 4(1-2\pi)r^2 \cos(r^2) dr$$

$$\int r^4 \cos(r^2) dr = r^4 \frac{\sin(r^2)}{2r} - \int \frac{\sin(r^2)}{2r} 4r^3 dr$$

$$\int r^2 \sin(r^2) = r^2 \left[\frac{-\cos(r^2)}{2r} \right] + \int \cos(r^2) 2r dr$$

Tomado de los apuntes de clase

Finalizó de Fizanell.

Sección 7.3

En los ejercicios 1 al 3, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie dada

3. $x = u^2, \quad y = u \operatorname{sen} e^v, \quad z = \frac{1}{3}u \cos e^v$, en $(13, -2, 1)$

Plano tangente:

$$x = u^2 \quad y = u \operatorname{sen} e^v \quad z = \frac{1}{3}u \cos e^v \quad \frac{dr}{du} = (2u, \operatorname{sen}(e^v), \frac{1}{3} \cos e^v)$$

$$U = \sqrt{13} \quad -2 = \sqrt{13} \operatorname{sen} e^v \quad \frac{dr}{dv} = (0, u((\cos e^v)e^v), \frac{1}{3}u(-\operatorname{sen}(e^v)e^v))$$

$$\frac{-2}{\sqrt{13}} = \operatorname{sen} e^v \quad \frac{3}{\sqrt{13}} = \cos e^v$$

$$\frac{dx}{du} = 2\sqrt{13} \quad \frac{dy}{du} = \frac{-2}{\sqrt{13}} \quad \frac{dz}{du} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{dx}{dv} = 0 \quad \frac{dy}{dv} = \sqrt{13} e^v \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 3e^v \quad \frac{dz}{dv} = \frac{-1}{3} \sqrt{13} \left(-\frac{2}{\sqrt{13}} e^v \right) = \frac{2}{3} e^v$$

$$r_u = \left(2\sqrt{13}, \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}} \right) \quad r_v = (0, 3e^v, \frac{2}{3}e^v)$$

$$\mathbf{n} = r_u \times r_v \quad \mathbf{n} = \left(\frac{-13}{3\sqrt{13}} e^v, \frac{-4\sqrt{13}}{3} e^v, 6\sqrt{13} e^v \right)$$

$$-\frac{13}{3\sqrt{13}} e^v (x-13) - \frac{4\sqrt{13}}{3} e^v (y+2) + 6\sqrt{13} e^v (z-1) = 0$$

$$-13(x-13) - 4\sqrt{13}(y+2) + 18\sqrt{13}(z-1) = 0$$

5. Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \cos v \operatorname{sen} u, \quad y = \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \quad z = \cos u$$

para u en $[0, \pi]$ y v en $[0, 2\pi]$. Identificar esta superficie.

$$x = \cos v \sin u \quad y = \sin v \sin u \quad z = \cos u$$

$$\frac{dx}{du} = \cos v \cos u \quad \frac{dy}{du} = \sin v \cos u \quad \frac{dz}{du} = -\sin u$$

$$\frac{dx}{dv} = -\sin v \sin u \quad \frac{dy}{dv} = \cos v \sin u \quad \frac{dz}{dv} = 0$$

Una esfera con radio 1

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v \sin u & \sin v \cos u & -\sin u \\ -\sin v \sin u & \cos v \sin u & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{n} = (\sin u \cos v \sin u) \mathbf{i} - (-\sin u \sin v \sin u) \mathbf{j} + (\cos v \cos u \cos v \sin u + \sin v \cos u \sin v \sin u) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = (\sin^2 u \cos v) \mathbf{i} + (\sin^2 u \sin v) \mathbf{j} + (\cos u \sin v) \mathbf{k}$$

Normalizamos: $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$

$$\|\mathbf{n}\| = \sin u$$

10. Hallar la ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto indicado.

(a) $x = u^2, y = v^2, z = u^2 + v^2, u = 1, v = 1$

(b) $z = 3x^2 + 8xy, x = 1, y = 0$

(c) $x^3 + 3xy + z^2 = 2, x = 1, y = \frac{1}{3}, z = 0$

a. $x = u^2 \quad y = v^2 \quad z = u^2 + v^2$
 $\frac{dx}{du} = 2u \quad \frac{dy}{du} = 0 \quad \frac{dz}{du} = 2u \quad (2, 0, 2) = \mathbf{r}_u(1, 1)$
 $\frac{dx}{dv} = 0 \quad \frac{dy}{dv} = 2v \quad \frac{dz}{dv} = 2v \quad (0, 2, 2) = \mathbf{r}_v(1, 1)$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \quad \begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 2 \\ & 2 & \end{matrix} = i(0 \cdot 2 - 4) - j(4) + k(4) = (-4, 4, 4)$$

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ -2(x - 1) - 2(y - 1) + 2(z - 2) &= 0 \\ -2x + 2 - 2y + 2 + 2z - 4 &= 0 \\ -2x - 2y + 2z &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

b. $z = 3x^2 + 8xy, \quad x = 1, \quad y = 0 \quad z = 3$

$$\frac{dz}{dx} = 6x + 8y \quad \frac{dz}{dy} = 8x \quad z - 3 = 6(x - 1) + 8(y)$$

$$(0, 0, 6) \quad (0, 0, 8) \quad z = 6x - 3 + 8y$$

c. $x^3 + 3xy + z^2 = 2 \quad x = 1, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = 0 \quad 4(x - 1) + 3(y - \frac{1}{3}) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dx} &= 3x^2 + 3y & 4 \\ \frac{dx}{dy} &= 3x & 3 \\ \frac{dx}{dz} &= 2z & 0 \end{aligned}$$

$$4x - 4 + 3y - 1 = 0$$

$$4x + 3y - 5 = 0$$

12. Dada una esfera de radio 2 con centro en el origen, hallar la ecuación para el plano que es tangente a ella en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$, considerando la esfera como:

- Una superficie parametrizada por $\Phi(\theta, \phi) = (2 \cos \theta \sin \phi, 2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \phi)$;
- Una superficie de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; y
- La gráfica de $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

a. $\Phi(\theta, \phi) = (2 \cos \theta \sin \phi, 2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \phi)$

$$\Phi_\theta = (-2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \theta \sin \phi, 0)$$

$$\Phi_\phi = (2 \cos \theta \cos \phi, -2 \sin \theta \cos \phi, -2 \sin \phi)$$

$$\Phi_\theta \times \Phi_\phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 \sin \theta \sin \phi & 2 \cos \theta \sin \phi & 0 \\ 2 \cos \theta \cos \phi & -2 \sin \theta \cos \phi & -2 \sin \phi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-\sqrt{2})^2 = 0$$

b. $x^2 + y^2 + z^2 = f(x, y, z)$

$$\Delta f = (2x, 2y, 2z)$$

$$\Delta f(1, 1, \sqrt{2}) = (2, 2, \sqrt{2})$$

$$2(x-1) + 2(y-1) + 2\sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0$$

$$2x + 2y + 2\sqrt{2}z - 8 = 0$$

$$x + y + \sqrt{2}z = 4$$

c. $z = g(x, y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{-2x}{2(4-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{-2y}{2(4-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$z - \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1)$$

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2\sqrt{2}$$

5. Sea $\Phi(u, v) = (u-v, u+v, uv)$ y sea D el disco unitario en el plano uv . Hallar el área de $\Phi(D)$.

Para encontrar el área total de la superficie $\Phi(D)$, integramos el área de estos pequeños parches sobre todo el dominio D :

$$\text{Área} = \iint_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du dv$$

$$\Phi(u, v) = (u-v, u+v, uv)$$

$$\frac{d\Phi(u, v)}{du} = (1, 1, v)$$

$$\frac{d\Phi(u, v)}{dv} = (-1, 1, u)$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & v \\ -1 & 1 & u \end{vmatrix} = (u-v, -u-v, 2) = N$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (2u^2 + 2v^2 + 4)^{\frac{1}{2}} du dv \quad \|N\| = \sqrt{(u-v)^2 + (-u-v)^2 + 4^2} = \sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r^2 + 4)^{\frac{1}{2}} r dr d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{\frac{1}{2}} dr d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{2r^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (6^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}) d\theta$$

$$u = 2r^2 + 4 \quad r = \sqrt{u-4}$$

$$du = 4r dr$$

$$\text{Área} = 2\pi \frac{1}{6} (6\sqrt{6} - 8) = \frac{\pi}{3} (6\sqrt{6} - 8)$$

7. Mostrar que la superficie $x = 1/\sqrt{y^2 + z^2}$, $1 \leq x < \infty$, ¡se puede llenar pero no pintar!

$$1. \text{ Volumen: } r^2 = y^2 + z^2 = x^{-2}$$

$$V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left(-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \pi$$

Razón
Finito.

2. Área:

$$r(x, \theta) = \left(x, \frac{\cos \theta}{x}, \frac{\sin \theta}{x} \right)$$

$$\frac{dr}{dx} = \left(1, \frac{-\cos \theta}{x^2}, \frac{\sin \theta}{x^2} \right) \quad \frac{dr}{d\theta} = \left(0, \frac{-\sin \theta}{x}, \frac{\cos \theta}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dx} \times \frac{dr}{d\theta} &= \left(\frac{\cos^2 \theta}{x^3} + \frac{\sin^2 \theta}{x^3}, \frac{\sin \theta}{x^2}, -\frac{\cos \theta}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{x^3}, \frac{\sin \theta}{x^2}, -\frac{\cos \theta}{x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\|N\| = \left(\frac{1}{x^6} + \frac{\sin^2 \theta}{x^4} + \frac{\cos^2 \theta}{x^4} \right)^{1/2} = \frac{(1+x^2)^{1/2}}{x^3}$$

$$A = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{1+(1/t)^2}}{t^3} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^5} dt}_{\text{Diverge}}$$

$t = \frac{1}{x} \quad dt = -\frac{1}{x^2} dx$

Se puede llenar porque la integral de su volumen converge
No se puede pintar porque la integral del área diverge

Comparación

$$\int_0^1 \frac{1}{t^5} dt = -t^{-4} \Big|_0^1$$

Diverge.

11. Hallar el área de la superficie obtenida al girar la curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, alrededor del eje y.

$$r(x) = (x, x^2)$$

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 x \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right)^{1/2} dx \quad u = 1+4x^2 \\ &\quad du = 8x dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x (1+4x^2)^{1/2} dx \\ &= 2\pi \int_1^5 \frac{du}{8} u^{1/2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{2u^{3/2}}{3} \Big|_1^5 \right) = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

13. Hallar el área de la superficie definida por $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

$$r(x, y) = (x, y, 1-x-y)$$

$$\frac{dr}{dx} = (1, 0, -1) \quad \frac{dr}{dy} = (0, 1, -1)$$

$$i \quad j \quad k$$

$$1 \quad 0 \quad -1$$

$$0 \quad 1 \quad -1 = (1, 1, 1)$$

$$|N| = \sqrt{3}$$

$$\iint_D \sqrt{3} \, dx dy = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{2}}^1 \frac{r}{\sqrt{2}} dr d\theta = \frac{(\sqrt{3} \cdot 2\pi)}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{6}}{2}$$

15. Calcular el área de la superficie dada por

$$x = r \cos \theta, \quad y = 2r \cos \theta, \quad z = \theta, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$L(r, \theta) = (r \cos \theta, 2r \cos \theta, \theta) \quad 0 \leq r \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\frac{dL}{dr} = (\cos \theta, 2\cos \theta, 0)$$

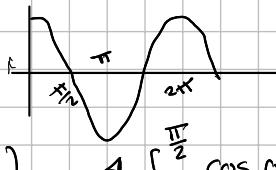
$$\frac{dL}{d\theta} = (-r \sin \theta, -2r \sin \theta, 1)$$

Valor absoluto

$$N = (2 \cos \theta, \cos \theta, -2r \sin \theta \cos \theta + 2r \cos \theta \sin \theta)$$

$$\|N\| = \sqrt{4 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta} = \sqrt{5} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\cos \theta| dr d\theta = 4\sqrt{5}$$

$$\|N\| = \sqrt{5} |\cos \theta|$$



$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta = 4 \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.4$$

20. Se perfora un hoyo cilíndrico de radio 1 a través de una bola sólida de radio 2 para formar un acoplador anular, como se muestra en la figura 7.4.10. Hallar el volumen y el área de la superficie exterior de este acoplador.

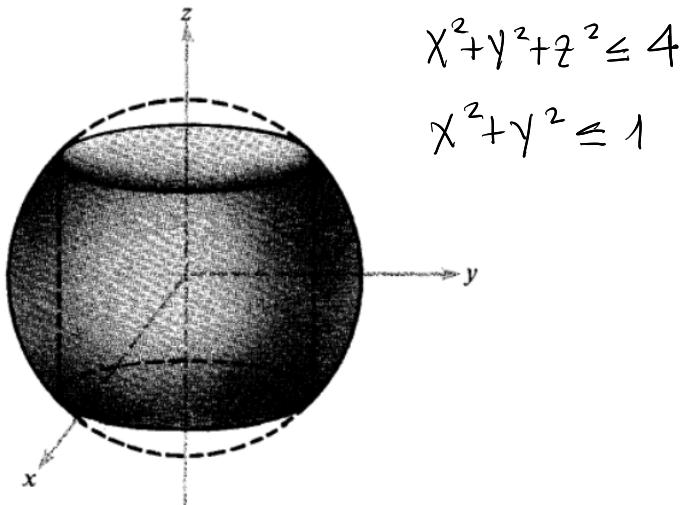


Figura 7.4.10 Hallar el área de la superficie y el volumen de la región sombreada.

$$L(r, \theta, z) =$$

$$\begin{aligned} r^2 + z^2 &\leq 4 \\ r^2 &= 1 \end{aligned} \quad V = \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz d\theta = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 4-z^2 - 1 = 2\pi \left(3z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$r \leq (4-z^2)^{1/2}$$

$$r \leq 1$$

$$1 \leq r = (4-z^2)^{1/2}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$-\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3}$$

Área de la superficie.

$$r = \sqrt{4-z^2}$$

$$\pi \left(3\sqrt{3} - \sqrt{3} - \left(-3\sqrt{3} + \sqrt{3} \right) \right) =$$

$$\pi (2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}\pi$$

$$L(\theta, z) = (\sqrt{4-z^2} \cos \theta, \sqrt{4-z^2} \sin \theta, z) \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad z \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dr \quad dA = \sqrt{1 + \left(\frac{-z}{(4-z^2)^{1/2}} \right)^2} r dr dz d\theta$$

$$dA = \sqrt{1 + \frac{z^2}{4-z^2}} r dz d\theta \quad dA = \sqrt{\frac{4}{4-z^2}} \cdot \sqrt{4z^2} dz d\theta = 2dz d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2dz d\theta = (2(2\sqrt{3})2\pi) = 8\pi\sqrt{3}$$

$$l(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) \quad z \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 1 dz d\theta = (2\sqrt{3})2\pi = 4\pi\sqrt{3}$$

$$4\pi\sqrt{3} + 8\pi\sqrt{3} = 12\pi\sqrt{3}$$

Sección 7.5

5. Evaluar $\int_S xyz dS$, donde S es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 1, 1)$.

$$(1, 0, 0) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}z$$

$$\Delta(t, z) = (1-t-z, 2t+z, z) \quad z \in [0, 1] \quad t \in [0, 1-z]$$

$$\begin{matrix} 0 = 1-t-z & \frac{\Delta}{dt} = (-1, 2, 0) \\ t = 1-z & \end{matrix} \quad N = (2, -1, 1) \quad \|N\| = \sqrt{6}$$

$$\frac{\Delta}{dz} = -1, 1, 1$$

$$\sqrt{6} \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-t-z)(2t+z)(z) dt dz = \sqrt{6} \int_0^1 \int_0^{1-z} 2zt+z^2 - 2zt^2 - z^2t - z^3 dt dz$$

$$\sqrt{6} \int_0^1 \left(\frac{2t^2z}{2} + z^2t - \frac{2zt^3}{3} - \frac{3z^2t^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) dz$$

$$\sqrt{6} \int_0^1 (1-z)^2 z + z^2(1-z) - \frac{2z(1-z)^3}{3} - \frac{3z^2(1-z)^2}{2} - \frac{z^4}{4} dz = \sqrt{6} \frac{1}{30} = \frac{1}{5\sqrt{6}}$$

7. Evaluar $\int_S z dS$, donde S es la superficie $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$l(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta, r^2) \quad r \in [0, 1] \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{L}{dr} = \cos\theta, \sin\theta, 2r$$

$$\frac{L}{d\theta} = -r \sin\theta, r \cos\theta, 0$$

$$N = (-2r^2 \cos\theta, -2r^2 \sin\theta, r \cos^2\theta + r \sin^2\theta)$$

$$\|N\| = (4r^4 + r^2)^{1/2} \quad \|N\| = r(4r^2 + 1)^{1/2} dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 (4r^2 + 1)^{1/2} dr d\theta \quad u = 4r^2 + 1 \quad du = 8r dr$$

$$\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{u(u-1)}{4} du d\theta$$

$$du = 8r dr$$

$$\frac{du}{8} = r dr$$

$$\frac{1}{32} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{5}{2} \frac{u^{5/2}}{2} \Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} \frac{5}{2} \Big|_0^1 d\theta = \frac{5}{32} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{5\pi}{32}$$

- 8.** Evaluar $\int_S z^2 dS$, donde S es la frontera del cubo $C = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$.
 (IDEA: Hacer cada cara por separado y sumar los resultados.)

$$((x, y) = (x, y, 1)) \quad ((x, y) = (x, y, -1))$$

Tareas en $x \in [-1, 1]$
 $y \in [-1, 1]$

$$\frac{dL}{dx} = (1, 0, 0)$$

$$\frac{dL}{dy} = (0, 1, 0) \quad N = (0, 0, 1) \quad \|N\| = 1$$

$$\frac{dL}{dz} = (0, 0, 1) \quad N = (0, 0, 1) \quad \|N\| = 1$$

$$\iiint_{-1}^1 1 dx dy = 4 \quad 4 \times 2 = 8 \quad \text{Ambas caras.}$$

Caras en $y \in [-1, 1]$

$$((x, z) = (x, 1, z)) \quad ((x, z) = (x, -1, z))$$

$$(1, 0, 0) \times (0, 0, 1) \quad (1, 0, 0) \times (0, 0, 1)$$

$$(0, 1, 0) \quad \|N\| = 1$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z^2 dz dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-1}^1 dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{3} dx = \frac{4}{3} \quad \text{Una cara.}$$

$$\underbrace{\frac{4}{3} \cdot 4}_{\text{Centro caras}} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Superficie total: } \frac{16}{3} + \frac{24}{3} = \frac{40}{3}$$

- 13.** Hallar las coordenadas x , y y z del centro de gravedad del octante de la esfera sólida de radio R , con centro en el origen, determinado por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. (IDEA: Escribir este octante como una superficie parametrizada —ver el ejemplo 3 de esta sección y el ejercicio 12.)

Centro de gravedad

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad \bar{x} = \iiint_V x dm \quad \bar{y} = \iiint_V y dm \quad \bar{z} = \iiint_V z dm$$

$$M = \iiint_V dm \quad x = r \cos \theta \sin \phi \quad y = r \sin \theta \cos \phi \quad z = r \cos \phi$$

$$dr = r^2 \sin \phi \ dr \ d\phi \ d\theta$$

Masa total:

$$M = \rho \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^3 \sin \phi \ d\theta \ d\phi \ dr = \frac{\rho \pi R^3}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \rho \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta = 1 \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \ d\phi = \frac{\pi}{4} \right) \left(\int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{4} \right)$$

$$\bar{x} = \frac{\rho \pi R^4}{\frac{16}{6} \rho \pi R^3} = \frac{3R}{8}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{3R}{8}, \frac{3R}{8}, \frac{3R}{8} \right)$$

*18. Sea S una esfera de radio r y p un punto dentro o fuera de la esfera (pero no en ella). Mostrar que

$$\int_S \frac{1}{\|x - p\|} dS = \begin{cases} 4\pi r & \text{si } p \text{ está dentro de } S \\ 4\pi r^2/d & \text{si } p \text{ está fuera de } S \end{cases}$$

donde d es la distancia de p al centro de la esfera y la integración es sobre S .

Promedio:

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_S \frac{1}{\|x - p\|} dS = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{si } p \text{ dentro} \\ \frac{1}{d} & \text{si } p \text{ fuera.} \end{cases} \quad \vec{\Phi}(0, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \\ \theta \in [0, 2\pi] \quad \phi \in [0, \pi]$$

$$\vec{\Phi}_0 \times \vec{\Phi}_p = r^2 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \\ \| \sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi \|$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vec{\Phi}(0, \phi)) \| \vec{\Phi}_0 \times \vec{\Phi}_p \| d\phi \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rp \cos \phi + p^2}} r^2 \sin \phi d\phi d\theta = 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi}{\sqrt{\frac{(r+p)^2}{(r-p)^2}}} d\phi \\ U = r^2 - 2rp \cos \phi + p^2 \quad d\phi = \frac{2\pi r^2}{2rp} \int_{(r-p)^2}^{(r+p)^2} \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{\pi r}{p} 2u^{1/2} \Big|_{(r-p)^2}^{(r+p)^2} \\ du = 2rp \sin \phi d\phi \quad \frac{2\pi r}{p} (\sqrt{(r+p)^2} - \sqrt{(r-p)^2}) = \frac{2\pi r}{p} (|r+p| - |r-p|) = \frac{2\pi r}{p} (r+p - \begin{cases} r-p & 0 < p < r \\ p-r & p > r \end{cases}) = \frac{4\pi r}{p} \quad 0 < p < r \\ \frac{4\pi r}{p} \quad p > r$$

Sección 7.6

1. Sea la temperatura de un punto en \mathbb{R}^3 dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, si $k = 1$.

Flujo de calor: $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$

$$\vec{\Phi} = \iint \nabla T \cdot N dS \quad \frac{dT}{dx} = 6x \quad \frac{dT}{dz} = 6z \quad L(\theta, \gamma) = (\sqrt{2} \cos \theta, \gamma, \sqrt{2} \sin \theta) \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6x, 0, 6z) \cdot (-\sqrt{2} \cos \theta, 0, -\sqrt{2} \sin \theta) dy d\theta \quad \frac{dL}{d\theta} = (-\sqrt{2} \sin \theta, 0, \sqrt{2} \cos \theta) \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -6\sqrt{2} (\cos^2 \theta, 0, \sin^2 \theta) dy d\theta \quad \frac{dL}{dy} = (0, 1, 0) \\ = -6\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 1 dy d\theta = -6\sqrt{2} \int_0^{2\pi} [\gamma]^2 d\theta = -6\sqrt{2} \int_0^{2\pi} 2 d\theta = -24\pi\sqrt{2}$$

3. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y su base $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Sea E el campo eléctrico definido por $E(x, y, z) = 2xi + 2yj + 2zk$. Hallar el flujo eléctrico a través de S . (IDEA: Romper S en dos partes S_1 y S_2 y evaluar $\int_{S_1} E \cdot dS$ y $\int_{S_2} E \cdot dS$ por separado.)

Teorema de la divergencia:

$$E(x, y, z) = 2z, 2y, 2z \quad \iiint_V \nabla \cdot E = \iint_{S_1} E \cdot dS + \iint_{S_2} E \cdot dS$$

$$\iint_S 4 dr = 4 \cdot \text{Área de la esfera} = 4 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

Media esfera

4. Sea el campo de velocidad de un fluido descrito por $\mathbf{F} = \sqrt{y}\mathbf{j}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo están cruzando la superficie $x^2 + z^2 = y$, $0 \leq y \leq 1$, en la dirección en que y crece.

$$\mathbf{L}(\theta, y) = (\sqrt{y} \cos \theta, y, \sqrt{y} \sin \theta)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{d\theta} = (-\sqrt{y} \sin \theta, 0, \sqrt{y} \cos \theta)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dy} = \left(\frac{1}{2} y^{-1/2} \cos \theta, 1, \frac{1}{2} y^{-1/2} \sin \theta \right)$$

$$\mathbf{N} = \left(\sqrt{y} \cos \theta, \frac{1}{2}, -\sqrt{y} \sin \theta \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (0, \frac{1}{2}, 0) \cdot (\sqrt{y} \cos \theta, \frac{1}{2}, -\sqrt{y} \sin \theta) dy d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{y} dy d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2y^{3/2}}{3} \Big|_0^1 d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

6. Evaluar $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ y S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$. (Hacer que n , la normal unitaria, apunte hacia arriba.)

$$\mathbf{L}(\theta, \phi) = (4 \cos \theta \sin \phi, 4 \sin \theta \sin \phi, 4 \cos \phi) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ x^2 + y - 4 & 3xy & 2xz + z^2 \end{vmatrix} = (0, (2z - 0), 3y - 1) = (0, 2z, 3y - 1)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{d\theta} = (-4 \sin \theta \cos \phi, 4 \cos \theta \sin \phi, 0)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{d\phi} = (4 \cos \theta \cos \phi, 4 \sin \theta \cos \phi, -4 \sin \phi)$$

$$\mathbf{N} = 16 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}) \quad d\phi d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (0, -2z, 3y - 1) \cdot (16 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k})) d\phi d\theta$$

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} -8 \cos \phi (16 \sin^2 \phi \sin \theta) + (12 \sin \phi \cos \phi - 1)(16 \sin \phi \cos \phi) d\phi d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (-128 \cos \phi \sin^2 \phi \sin \theta + 192 \sin \phi \sin^2 \phi \cos \phi - 16 \sin \phi \cos \phi) d\phi d\theta$$

$$-128 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin^2 \phi \sin \theta d\phi d\theta = -128 \int_0^{2\pi} \sin \theta \int_0^1 u^2 du = -128 \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \frac{1}{3} = 0$$

$$192 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin^2 \phi \cos \phi d\phi d\theta = 0$$

$$-16 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi d\phi d\theta = -16 \cdot 2\pi \int_0^1 u du = -16\pi$$

$$W = -16\pi$$

8. Están construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. Los planos del arquitecto se muestran en la figura 7.6.11.

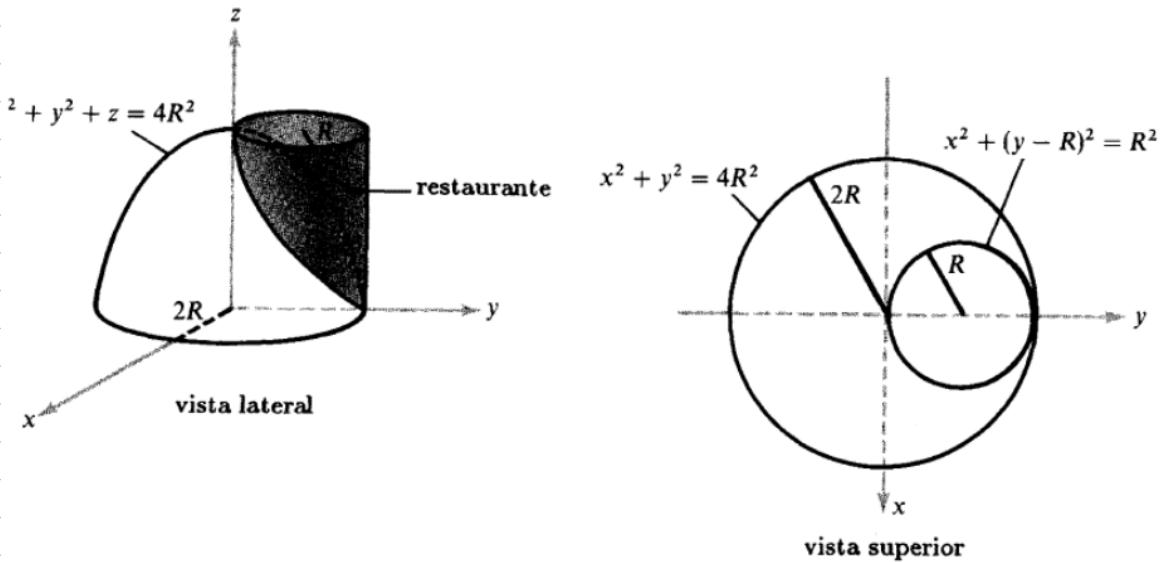


Figura 7.6.11 Planos del restaurante.

- (a) La pared vertical curvada del restaurante será hecha de vidrio. ¿Cuál será el área de superficie de esta pared?

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2 \quad x^2 + (y-R)^2 = R^2 \quad x = R\cos\theta \quad y - R = R\sin\theta$$

$$L(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta + R, z)$$

$$z = 4R^2 - (R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta + 2R^2\sin\theta + R^2)$$

$$z = 4R^2 - R^2 - R^2 + 2R^2\sin\theta$$

$$z = 2R^2 - 2R^2\sin\theta$$

$$2R^2 - 2R^2\sin\theta \leq z \leq 4R^2$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{R^2 - 2R^2\sin\theta}^{4R^2} R \, dz \, d\theta = R \int_0^{2\pi} 4R^2 - 2R^2 + 2R^2\sin\theta \, d\theta$$

$$r \, \theta = R(2\pi(2R^2 +$$

$$2R(0)) = 4\pi R^3$$

- (b) El ingeniero consultor informa al planificador que para ser costeable, el volumen del interior debe exceder $\pi R^4/2$. ¿Para qué R satisface este requerimiento la estructura propuesta?

$$L(\theta, r, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta + R, z) \quad r \in [0, R]$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$z \in [R^2 - 2R^2\sin\theta, 4R^2]$$

$$\text{Jacobiiano} = r + r\sin\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{R^2 - 2R^2\sin\theta}^{4R^2} r + r\sin\theta \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r + r\sin\theta)(4R^2 - 4R^2 + 2r^2 + 2r\sin\theta) \, dr \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R 4R^2r - 2r^3 - 2r^2\sin\theta + 4rR^2\sin\theta - 2r^2\sin^2\theta \, dr \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \left[2R^2r^2 - \frac{r^4}{2} - \frac{2r^3\sin\theta}{3} + 2r^2R^2\sin\theta - \frac{2r^3\sin^2\theta}{3} \right]_0^R \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \left[2R^4 - \frac{R^4}{2} - \frac{2R^3\sin\theta}{3} + 2R^4\sin\theta - \frac{2R^3\sin^2\theta}{3} \right] \, d\theta$$

$$\pi R^4 + \frac{2\pi R^4}{3} > \frac{\pi R^4}{2} \quad \frac{2\pi R}{3} > -\frac{\pi}{2} R^4 \left(\frac{2}{3} + \frac{R^3}{2} \right) \quad R > 0$$

$$R > 0.$$

(c) Durante un típico día de verano los alrededores del restaurante están sujetos a un campo de temperatura dado por

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2.$$

Una densidad de flujo de calor $\mathbf{V} = -k\nabla T$ (k es una constante que depende del grado de aislamiento a usarse) a través de todos los lados del restaurante (incluyendo el techo y el contacto con la montaña) produce un flujo de calor. ¿Cuál es el flujo total de calor? (La respuesta dependerá de R y k .)

Flujo de calor: $T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2$

$$\mathbf{F} = (6x, 2(y-R), 32z)$$

$$\mathbf{V} = -K \nabla T = -KF$$

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta + R, 4R^2) \quad 0 \leq r \leq R$$

$$\mathbf{E}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\Phi_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \quad N = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta$$

$$N = 0, 0, r$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R 32 \cdot 4R^2 r \ dr d\theta = -K \int_0^{2\pi} 64R^4 = -128K\pi R^4$$

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta + R, 4R^2 - (2r^2 + 2r \sin \theta))$$

$$\mathbf{E}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, -r \cos \theta)$$

$$\mathbf{E}_r = (\cos \theta, \sin \theta, -4r - 2 \sin \theta)$$

$$N = (-4r^2 \cos \theta, 2r + 4r^2 \sin \theta, r)$$

$$= -K \int_0^{2\pi} \int_0^R -24r^3 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin \theta + 8R^3 \sin^2 \theta + 128R^2 r - 64r^3 - 64r^3 - 64r^2 \sin \theta \ dr d\theta$$

$$= -K \int_0^R -24r^3 \pi + 8r^3 \pi + 256R^2 r \pi - 128r^3 \pi \ dr = -92R^4 \pi K$$

Pared.

$$= -K \int_0^{2\pi} \int_{2R^2 - 2r \sin \theta}^{4R^2} 5R^2 \cos^2 \theta + 2R^2 \sin^2 \theta \ dz d\theta$$

$$= -K \int_0^{2\pi} (4R^2 - 2R^2 - 2r \sin \theta) (5R^2 \cos^2 \theta + 2R^2 \sin^2 \theta) dz d\theta$$

$$= -20K\pi R^4$$

Flujo total: $-20K\pi R^4 - 92R^4 \pi K - 64\pi R^3 K - 112K\pi R^4$

15. Sea el campo de velocidad de un fluido, descrito por $\mathbf{F} = i + xj + zk$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan la superficie descrita por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

$$L(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$$

Radio unitario

$$N = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi) \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1, \cos \theta \sin \phi, \cos \phi) (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi) \ dr d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \phi + \sin^2 \phi \cos \theta \sin \theta + \cos^2 \phi d\phi d\theta$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos \theta \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi = 0 \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \int_0^{\pi/2} \sin^3 \phi d\phi d\theta = 0$$

$$I_3 = 2\pi \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \sin \phi d\phi \right) = 2\pi \left(\int_1^0 u^2 du \right) = \frac{2\pi}{3}$$

16. (a) Un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo (lluvia fuerte) se describe por el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Hallar el flujo total a través del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$L(\theta, R) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r) \quad R \in [0, 1]$$

$$\frac{dL}{d\theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

$$\frac{dL}{dr} = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$$

$$N = (r \cos \theta, r \sin \theta, -r \sin^2 \theta - r \cos^2 \theta) \\ (r \cos \theta, r \sin \theta, -r)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(i, i, -r \sin^2 \theta - r \cos^2 \theta)(0, 0, -1)}{r \sqrt{2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -\frac{1}{\sqrt{2}} r \sqrt{2} dr d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 -r dr d\theta = 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi.$$

(b) Debido al fuerte viento, la lluvia cae de lado, de manera que forma un ángulo de 45° , y se describe por $\mathbf{F}(x, y, z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. ¿Cuál es ahora el flujo a través del cono?

$$\iiint_V \nabla \cdot F dv = 0 \quad \text{Dado el teorema.}$$

$$\iint_{S_1 \cup S_2} F \cdot ds = 0 \quad \iint_{S_1} F \cdot ds + \iint_{S_2} F \cdot ds = 0 \quad \iint_{S_1} F \cdot ds = -\iint_{S_2} F \cdot ds$$

$$-\iint_{S_2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (0, 0, -1) dA = -\frac{\sqrt{2}}{2} N.$$

S_2 es la
tapa.

Sección 8.1

3. Verificar el teorema de Green para el disco D con centro $(0, 0)$ y radio R y las funciones:

- (a) $P(x, y) = xy^2, Q(x, y) = -yx^2$
- (b) $P(x, y) = x + y, Q(x, y) = y$
- (c) $P(x, y) = xy = Q(x, y)$
- (d) $P(x, y) = 2y, Q(x, y) = x$

Teorema de Green:

$$\oint F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Parametrizaciones: $(R \cos \theta, R \sin \theta, \sigma)$

a. $P(x, y) = xy^2 \quad Q(x, y) = -yx^2$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R (-2xy - 2xy) \cdot dxdy = -4 \int_0^{2\pi} \int_0^R R^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta = -R^4 \int_0^{2\pi} \int_0^R \cos \theta \sin \theta = 0$$

$$b. P(x,y) = x+y, Q(x,y) = y \quad c. P(x,y) = xy = Q(x,y)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R -1 \, dr = -\pi R^2 \quad \int_0^{2\pi} \int_0^R y-x \, dr = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 (\cos\theta - \sin\theta) \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3} (\cos\theta - \sin\theta) \, d\theta = 0$$

$$d. P(x,y) = 2y, Q(x,y) = x$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R 1 - 2 \, dr = -\pi R^2$$

12. Sea $P(x,y) = -y/(x^2+y^2)$, $Q(x,y) = x/(x^2+y^2)$. Suponiendo que D sea el disco unitario, investigar por qué falla el teorema de Green para esta P y Q .

$$D \quad r(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$F = (-y/x^2+y^2, x/x^2+y^2)$$

$$F_1 = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$x=0, y=0$ pertenecen a nuestro disco.

No hay derivadas parciales continuas en este punto.

Nuestro teorema de Green dice que tenemos que tener una función vectorial suave.

Con derivadas parciales continuas en el conjunto abierto que contiene a D .

18. Probar la identidad

$$\int_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_D (\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi) \, dA.$$

Dado un campo escalar $\phi(x,y)$, llegamos al campo vectorial:

$$F = \phi \nabla \phi$$

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

$$F = \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}, \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right), \quad \text{Teorema divergencia}$$

$$\int_{\partial D} F \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_D \nabla \cdot F \, dA$$

$$\int_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, ds \quad \nabla F = \frac{d}{dx} \left(\phi \frac{d\phi}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\phi \frac{d\phi}{dy} \right)$$

$$\nabla F = \phi \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \phi \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2$$

$$\text{Usando Laplaceano } \nabla^2 \phi = \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \phi}{dy^2}$$

$$\nabla \cdot F = \phi \nabla^2 \phi + |\nabla \phi|^2$$

Entonces.

$$\int_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_D (\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi) \, dA.$$

- 19.** Usar el teorema de Green para hallar el área de un lazo de la rosa de cuatro hojas
 $r = 3 \sin 2\theta$. (IDEA: $x dy - y dx = r^2 d\theta$.)

Área a partir del teorema de Green. $A = \iint_D dA$

$$P = -y/2 \quad Q = x/2$$

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{El área.}$$

Green expresa el área cuando $\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = 1$

$$r = 3 \sin(2\theta)$$

$$A = \oint \frac{1}{2} (x dy - y dx) = \oint \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta) d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} d\theta$$

$$\frac{9}{4} \left(\theta - \frac{\sin(4\theta)}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{8}$$

- 20.** Mostrar que si C es una curva cerrada simple que acota una región en la cual se aplica el teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por C es

$$A = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx.$$

$$P = 0 \quad Q = X$$

$$\frac{dQ}{dx} = 1$$

$$\frac{dP}{dy} = 0$$

$$dy$$

$$\theta(x, y) = (y, 0)$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad \frac{dP}{dy} = 1$$

$$\int_{\partial D} x dy = \iint_D dA = \text{Área } D.$$

$$\int_{\partial D} y dx = \iint_D -1 dA$$

$$= -\text{Área } D.$$

Sección 8.2

- 5.** Sea S la superficie cilíndrica con tapa mostrada en la figura 8.2.8. S es la unión de dos superficies S_1 y S_2 , donde S_1 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \geq 1$. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2 y + x)\mathbf{i} + (z^3 yx + y)\mathbf{j} + z^4 x^2 \mathbf{k}$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$. (IDEA: El teorema de Stokes se cumple para esta superficie.)

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Contorno parametrizado:

$$\mathbf{r}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$\int_0^{2\pi} (2\cos \theta + \sin \theta, \sin \theta, \cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} -2\cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

Intervalos completos de 0 a 2π para $\sin \theta$ y $\cos \theta$.

7. Evaluar la integral $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la parte de la superficie de una esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z \geq 1$, donde $\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{r} = xi + y\mathbf{j} + zk$.

Teorema de Stokes:

Parametrizar:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad y \quad x + y + z = 1$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t, \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t, \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos t + \sin t) \right)$$

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y-z, z-x, x-y)$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0, 0, 0$$

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

10. Hallar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ y $\mathbf{F} = (\sin xy)\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$.

Teorema de Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

No tiene frontera, entonces es

$$d\mathbf{S} = \emptyset$$

S es un elipsoide cerrado, dado eso por el teorema de la divergencia, su

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) dv$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin(xy) & e^x & -yz \end{vmatrix} = (-z-0), (0-0), (e^x - \cos(xy)x)$$

$$\nabla \cdot (-z-0), (0-0), (e^x - \cos(xy)x) = (0, 0, 0)$$

11. Sea $\mathbf{F} = yi - xj + zx^3y^2k$. Evaluar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot n dA$, donde S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$.

$$x^2 + y^2 = 1 \quad z = 0 \quad \text{Borde.}$$

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = 0$$

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = (-\sin t, \cos t, 0) dt \quad \text{en } C: \quad yi - xi + 0k = (\sin t i - \cos t j)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= (\sin t, -\cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \sin^2 t - \cos^2 t dt \end{aligned}$$

$$\oint_C \sin^2 t - \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t - \cos^2 t dt = \pi - \pi = 0$$

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot n dA = 0$$

Sección 8.3

3. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + \sin x)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$. Hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= 2xyz + \sin x \quad \text{Integramos } dx = x^2yz - \cos x + C(y, z) \quad \frac{d}{dy} x^2z + C \quad C(y, z) = 0 \\ \frac{df}{dy} &= x^2z \quad \text{Integramos } dy = x^2yz + C(x, z) \quad 2xyz \\ \frac{df}{dz} &= x^2y \quad \text{Integramos } dz = x^2yz + C(z, y) \\ &\quad x^2yz - \cos x\end{aligned}$$

9. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \sin y)\mathbf{i} + (e^x \cos y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Evaluar la integral $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot ds$, donde $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t^3, \exp \sqrt{t})$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= e^x \sin y \quad e^x \sin y + C(y, z) \quad f = \frac{z^3}{3} + e^x \sin y \quad \text{Punto inicial y final.} \\ \frac{df}{dy} &= e^x \cos y \quad \text{Integramos} \quad e^x \sin y + C(x, z) \\ \frac{df}{dz} &= z^2 \quad \frac{z^3}{3} + C(x, y) \\ &\quad \frac{e^3}{3} + e \sin(1) - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

11. La masa de la Tierra es aproximadamente 6×10^{27} g y la del Sol es 330,000 veces mayor. La constante gravitacional es $6.7 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}^2 \cdot \text{g}$. La distancia de la Tierra al Sol es alrededor de 1.5×10^{12} cm. Calcular, aproximadamente, el trabajo necesario para incrementar la distancia de la Tierra al Sol en 1 cm.

La energía potencial gravitacional U entre dos masas M y m separadas por una distancia r .

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad G = \text{Constante gravitacional}$$

El trabajo necesario para cambiar la distancia entre la tierra y el sol de r a $r + \Delta r$ es igual a.

$$W = \Delta U = U(r + \Delta r) - U(r)$$

Sustituyendo para U .

$$W = -\frac{6Nm}{r + \Delta r} + \frac{6Nm}{r}$$

Sustituimos:

$$\begin{aligned}M &= 330,000 \times 6 \times 10^{27} \text{ g} \\ m &= 6 \times 10^{27} \text{ g} \\ G &= 6.7 \times 10^{-8} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \cdot \text{g}} \\ r &= 1.5 \times 10^{12} \text{ cm} \\ \Delta r &= 1 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\text{Aproximando: } W = 6Nm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r} \right) \approx 6Nm \frac{\Delta r}{r^2}$$

$$W \approx (6.7 \times 10^{-8}) \times (330,000 \times 6 \times 10^{27}) \times (6 \times 10^{27}) \times \frac{1}{(1.5 \times 10^{12})^2}$$

$$\approx (6.7 \times 10^{-8}) \times (330,000 \times 6 \times 6) \times 10^{30}$$

$$\approx (6.7 \times 10^{-8}) \times (11,800,000) \times 10^{30}$$

$$\approx 6.7 \times 11,800,000 \times 10^{28}$$

$$\approx 79,596,000 \times 10^{28}$$

$$W \approx 7.96 \times 10^{35} \text{ ergios}$$

13. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales \mathbf{F} en el plano es el gradiente de una función escalar f . Si existe dicha f , hallarla.

- (a) $\mathbf{F}(x, y) = xi + yj$
- (b) $\mathbf{F}(x, y) = xyi + xyj$
- (c) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)i + 2xyj$

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

a. $\frac{dF}{dx} = x$ Integrando: $\frac{x^2}{2} + C(y)$
 $\frac{dF}{dy} = y$ Integrando: $\frac{y^2}{2} + C(x)$
 $f = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

b. $\frac{dF}{dx} = xy$ Integrando: $\frac{x^2y}{2} + C(y)$ $\nabla \times \mathbf{F} = \frac{d}{dx} xy - \frac{d}{dy} xy = y - x \neq 0$
 $\frac{dF}{dy} = xy$ Integrando: $\frac{xy^2}{2} + C(x)$

No es conservativo

c. $\frac{dF}{dx} = x^2 + y^2$ Integrando: $\frac{x^3}{3} + xy^2 + C(y)$ $\nabla \times \mathbf{F} = \frac{d}{dx} (2xy) - \frac{d}{dy} (x^2 + y^2)$
 $\frac{dF}{dy} = 2xy$ Integrando: $xy^2 + C(x)$ $\nabla \times \mathbf{F} = 2y - 2y = 0$
 $C(x) = \frac{x^3}{3}$

$$f = \frac{x^3}{3} + xy^2$$

15. Mostrar que los siguientes campos vectoriales son conservativos. Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para la curva dada.

- (a) $\mathbf{F} = (xy^2 + 3x^2y)i + (x+y)x^2j$; C es la curva que está formada por los segmentos de recta de $(1, 1)$ a $(0, 2)$ a $(3, 0)$.

a. $\mathbf{F} = \nabla f$ $\frac{dF}{dx} = xy^2 + 3x^2y$ Integrando: $\frac{x^2y^2}{2} + x^3y + C(y)$
 $\frac{dF}{dy} = x^3 + yx^2$ Integrando: $x^3y + \frac{yx^2}{2} + C(x)$
 $f = \frac{x^2y^2}{2} + x^3y$ $\left. \right|_{(1,1)} = 0 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{3}{2}$

(b) $\mathbf{F} = \frac{2x}{y^2+1}i - \frac{2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}j$; C está parametrizada por $x = t^3 - 1$, $y = t^6 - t$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\frac{dF}{dx} = \frac{2x}{y^2+1}$$
 Integrando: $\frac{x^2}{y^2+1} + C(y)$ $x^2(y^2+1)^{-1} = \frac{-x^2}{(y^2+1)^2} \cdot 2y$
 $\frac{dF}{dy} = -\frac{2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}$ Integrando: $\frac{(x^2+1)}{(y^2+1)} + C(x)$ $\frac{2x}{y^2+1}$
 $f = \frac{(x^2+1)}{(y^2+1)}$ $\left. \right|_{(-1,0)} = 1 - 2 = -1$ $C(y) = \frac{1}{y^2+1}$ $C(x) = C$.

(c) $\mathbf{F} = [\cos(xy^2) - xy^2 \sin(xy^2)]i - 2x^2y \sin(xy^2)j$; C es la curva (e^t, e^{t+1}) , $-1 \leq t \leq 0$.

$$\frac{dF}{dx} = \cos(xy^2) - xy^2 \sin(xy^2)$$
 Integrando: $x \cos(y^2x) + C(y)$
 $\frac{dF}{dy} = -2x^2y \sin(xy^2)$ Integrando: $x \cos(y^2x) + C(x)$

$$x \cos(y^2 z) \int_{(e^{-1}, 1)}^{(1, e^2)} = \cos(e^4) - \frac{\cos(1/e)}{e}$$

17. ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotacional de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

(a) $\mathbf{F} = xi + yj + zk$

$$\frac{dF_3}{dy} - \frac{dF_2}{dz} = x$$

$$\nabla F = 1+1+1=3 \neq 0$$

$$-\frac{dF_3}{dx} + \frac{dF_1}{dz} = y$$

El rotacional de cualquier campo vectorial siempre tiene divergencia 0.

$$\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} = z$$

No hay F .

(b) $\mathbf{F} = (x^2 + 1)i + (z - 2xy)j + yk$

$$\frac{dF_3}{dy} - \frac{dF_2}{dz} = x^2 + 1$$

Asumimos que $F_3 = 0$

$$\frac{dF_3}{dx} - \frac{dF_1}{dz} = z - 2xy$$

$$-\frac{dF_2}{dz} = x^2 + 1$$

Integramos

$$F_2 = -z(x^2 + 1) + C(x, y)$$

$$\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} = y$$

$$\frac{dF_1}{dz} = z - 2xy$$

$$F_1 = \frac{z^2}{2} - 2xyz + C(x, y)$$

$$(-2xz + \frac{C(x, y)}{dx}) + 2xz - \frac{C(x, y)}{dy} = y \quad C(x, y) = y$$

$$F_1 = \frac{1}{2}z^2 - 2xyz$$

$$F_2 = -(x^2 + 1)z + xyz$$

$$F_3 = 0$$

21. Sea $\mathbf{F} = (x \cos y)i - (\sin y)j + (\sin x)k$. Hallar \mathbf{G} tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

$$\frac{dF_3}{dy} - \frac{dF_2}{dz} = x \cos y$$

Asumimos $F_2 = 0$

$$-\frac{dF_1}{dz} + \frac{dF_3}{dx} = -\sin y$$

$$\frac{dF_3}{dy} = x \cos y$$

$$F_3 = x \sin y + C(x, z)$$

$$\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} = \sin x$$

$$\frac{dF_1}{dy} = -\sin x$$

$$F_1 = -y \sin x + C(x, z)$$

$$\left(\frac{x \sin y}{dx} + \frac{C(x, z)}{dx} \right) - \left(\frac{F_1}{dz} + \frac{C(x, z)}{dz} \right) = \sin y + \frac{C(x, z)}{dx} - \frac{C(x, z)}{dz} = -\sin y$$

constantes.

$$\mathbf{G} = (F_1, F_2, F_3) = (-y \sin x, 0, x \sin y)$$

Sección 8.4:

3. Evaluar $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = xi + yj + zk$ y Ω es el cubo unitario (en el primer octante). Realizar directamente los cálculos y verificar usando el teorema de la divergencia.

Seis caras:

1. Cara $x=0$ Vector normal = $-i$ 2. Cara $x=1$ Vector normal = i

$$\mathbf{F} \cdot (-i) = -x = 0$$

$$\mathbf{F} \cdot (i) = x = 1$$

$$\iiint_S^0 dy dz = 0$$

$$\int_0^1 \int_0^1 1 dy dz = 1$$

3. Cara $y=0$ Vector normal = $-j$ 4. Cara $y=1$ Vector normal = j

$$\mathbf{F} \cdot (-j) = -y = 0$$

$$\mathbf{F} \cdot (j) = y = 1$$

$$\iiint_S^0 dx dz = 0$$

$$\int_0^1 \int_0^1 1 dx dz = 1$$

5. Cara $z=0$ Vector normal = $-k$ 6. Cara $z=1$ Vector normal = k

$$\mathbf{F} \cdot (-k) = -z = 0$$

$$\mathbf{F} \cdot (k) = z = 1$$

$$\iiint_S^0 dx dy = 0$$

$$\int_0^1 \int_0^1 1 dx dy = 1$$

Suma de todas las integrales = 3

Teorema de la divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1+1+1=3$$

$$\iiint_{\Omega} 3 dv = 3 \times 1 = 3$$

5. Sea $\mathbf{F} = yi + zj + xk$. Evaluar $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para cada una de las siguientes regiones Ω :

- (a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$
- (b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ y $x \geq 0$
- (c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ y $x \leq 0$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dv \quad \text{Divergencia}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} = x$$

a. $\int x dv \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z$

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \quad 0 \leq r \leq \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 r^2 \cos \theta dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos \theta)(1 - R^2) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos \theta - r^4 \cos \theta dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \left(\int_0^1 r^2 - r^4 dr \right) d\theta = 0 \circ \left(\int_0^1 r^2 - r^4 dr \right) = 0$$

$$b. \quad R^2 \leq z \leq 1 \quad x > 0$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_{r^2}^1 r^2 \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cos \theta (1 - r^2) \, dr \, d\theta =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cos \theta - r^4 \cos \theta \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \int_0^1 r^2 - r^4 \, dr \, d\theta =$$

$$\operatorname{Sen} \theta \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{2 \cdot 2}{15} = \frac{4}{15}.$$

$$c. \quad r^2 \leq z \leq 1 \quad \theta \in [\pi/2, 3\pi/2] \quad \text{Para la integral}$$

$$\operatorname{Sen} \theta \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = -2 \quad -2 \cdot \frac{2}{15} = -\frac{4}{15} \quad \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \theta \, d\theta = 0$$

Es cero dado el producto.

Área positiva - Área negativa.

$$8. \quad \text{Evaluar } \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \text{ donde } \mathbf{F} = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k} \text{ y } S \text{ es la superficie de la esfera unitaria.}$$

Teorema de la divergencia:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, dv$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial 3xy^2}{\partial x} + \frac{\partial 3x^2y}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 3y^2 + 3x^2 + 3z^2$$

$$\int_V 3 \, dv = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

$$9. \quad \text{Evaluar } \iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA, \text{ donde } \mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k} \text{ y } W \text{ es el cubo unitario en el primer octante. Efectuar directamente los cálculos y verificar usando el teorema de la divergencia.}$$

$$\int_W \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_W \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv \quad \text{Teorema divergencia}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$\int_W 1 \, dv = 1. \quad \text{Volumen del cubo unitario}$$

$$10. \quad \text{Evaluar la integral de superficie } \iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA, \text{ donde } \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)^2 \mathbf{k} \text{ y } \partial S \text{ es la superficie del cilindro } x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1.$$

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 + 0 + (x^2 + y^2)^2$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 r^4 r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

15. Probar las identidades de Green

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \int_{\Omega} (f \nabla^2 g - \nabla f \cdot \nabla g) dV$$

y

$$\int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV.$$

1. Teorema de la divergencia:

Sea $\mathbf{F} = f \nabla g$. Establece que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

$$\nabla(f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla \cdot (\nabla g)$$

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \nabla(f \nabla g) dV$$

$$\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g$$

$$= \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g dV \quad \text{Es una suma, no una resta.}$$

2. Teorema divergencia.

Sea $\mathbf{F} = f \nabla g - g \nabla f$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

$$\nabla(f \nabla g - g \nabla f)$$

$$\int_{\Omega} f \nabla^2 g - g \nabla^2 f dV.$$

$$\nabla(f \nabla g) = \nabla f \nabla g + f \nabla \nabla g$$

$$\nabla(g \nabla f) = \nabla g \nabla f + g \nabla \nabla f$$

$$\nabla f \nabla g + f \nabla^2 g - \nabla g \nabla f - g \nabla^2 f =$$

$$f \nabla^2 g - g \nabla^2 f$$