Probabilidad - II 2024
Universidad Nacional de Colombia - Nov 06

Tutor: Carlos E. Alonso–Malaver.

ö. **Para masticar-rumiar**:

La **Esperanza** es pasiva
El **Deseo** es constructivo.
Gabriel Rolón - Argentina

Probabilidad

1. **Independencia**
   Ejemplo 1:

   - $\mathbb{E}$: Lanzamiento de un dado, dos veces
   - $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{36}\}$, $\mathfrak{F} = 2^\Omega$
   - A: sale 3 en el primer lanzamiento.
   - B: sale 5 en el segundo lanzamiento.
   - Halla $P(A), P(B)$ y compara $P(A \cap B)$ con $P(A) * P(B)$.

   Ejemplo 2:

   - $\mathbb{E}$: Selección de una carta. Mazo de cartas de poker.
   - $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{52}\}$, $\mathfrak{F} = 2^\Omega$
   - C: sale una carta de pinta negra.
   - D: sale una letra $\{J, K, Q\}$.
   - Halla $P(C), P(D)$ y compara $P(C \cap D)$ con $P(C) * P(D)$.

2. Independencia: Definición

   - Soporte $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$
   - Dados $A, B \in \mathfrak{F}$
   - Se dice que $\{A, B\}$ son independientes sii

   $$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

   - Más adelante volveremos sobre éste ítem.

3. Independencia $\neq$ Disyunción

   - Asume $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ con $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathfrak{F} = 2^\Omega$ y P caracterizada por $\frac{1}{4} = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3, 4$.
   - Si definimos $A := \{\omega_1, \omega_2\}$, $B := \{\omega_1, \omega_3\}$ y $C := \{\omega_4\}$
   - Entonces:
     - $\{A, B\}$ comparten elementos y son independientes, verifica $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
     - $\{A, C\}$ **NO** comparten elementos y son Dependientes. Verifica $P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$, análogo ocurre con $\{B, C\}$.

   Ejercicios 3 y 5, Pág. 50, Degroot.

4. **Proposición**: Trabajando sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, si $\{A, B\} \subset \mathfrak{F}$ son independientes, entonces $\{A, B^c\}$ son independientes.
   Observa: $P(A) = P(AB) + P(AB^c)$, de donde:

   $$\begin{aligned} P(AB^c) &= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)\left[1 - P(B)\right] = P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

   De lo anterior se tiene que si A, B son eventos independientes entonces:

   - A y B^c son eventos independientes.
   - A^c y B son eventos independientes.
   - A^c y B^c son eventos independientes.

5. Independencia dos o más Eventos

- Soporte $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$
- Dada la secuencia $\{A_1, A_2, \ldots, A_K\} \subset \mathfrak{F}$
- Se dice que $\{A_1, A_2, \ldots, A_K\}$ son eventos independientes si dados $\{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_s}\}$ con $\{j_1, j_2, \ldots, j_s\} \subset \{1, 2, \ldots, K\}$ se tiene:

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_s}\} = \prod_{i=1}^{s} P(A_{j_i})$$

Indepencia dos a dos vs Independencia

- De nuevo, trabajando con $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ con $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathfrak{F} = 2^\Omega$ y P caracterizada por $\frac{1}{4} = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3, 4$.
- Si definimos $A := \{\omega_1, \omega_2\}$, $B := \{\omega_1, \omega_3\}$ y $C := \{\omega_1, \omega_4\}$
- Entonces:
  - $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ y $\{B, C\}$ son independientes dos a dos, verifica (Son Independientes dos - a - dos).
  - pero $\{A, B, C\}$ **NO** son independientes, Por qué?.
- Ejemplo 3, Pág. 47, Degroot
  Un máquina produce ítems defectuosos (D) con una tasa $p \in (0, 1)$, si se seleccionarán seis ítems de forma independiente, halla la probabilidad de:
  - Observar el arreglo (D, ND, D, ND, ND, ND).
  - Observar dos artículos defectuosos.
- Ejemplo 4, Pág. 48, Degroot.
  Se lanza de una moneda, con $P(C) = p \in (0, 1)$, hasta obtener la primera cara=C. Halla la probabilidad de necesitar exactamente cuatro lanzamientos para obtener la primera cara.
- Ejercicio 5, Pág. 55, Degroot
  Asume se tiene un juego en el que la probabilidad de ganar es $\frac{1}{50}$. Si una persona juega 50 veces éste juego cuál es la probabilidad de que gane al menos una vez.

Probabilidad Condicional

1. Ejemplo 6: Asume se tiene un experimento en el cual se observó la aparición de Infarto al Miocardio a 22071 personas[1], quienes fueron asignados al azar a tratamiento, ó, a control (Uso de Aspirina vs Placebo).

	Infarto de Miocardio			
	At. Fatal	At. No Fatal	No Ataque	Total
Placebo	18	171	10845	11034
Aspirina	5	99	10933	11037

A partir de los datos anteriores, dos preguntas relevantes son:

- Probabilidad de Ataque al Miocardio dentro de las personas que tomaron placebo.
- Probabilidad de Ataque al Miocardio dentro de las personas que tomaron Aspirina.
- Posteriormente lo lógico es comparar. Lo anterior, a partir de probabilidad, así[2]:
  - Asume que de las 22071 personas en la tabla anterior se escoge una al azar, y define:
    - A: La persona elegida padeció un Ataque al Miocardio.
    - B: La persona elegida tomó Placebo.
    - C: La persona elegida tomó Aspirina.
  - $P(A|B)$: Se debe leer-entender, como la probabilidad del evento A, asumiendo que el evento B ya sucedió (pasado).
  - De lo anterior, en el problema:
    - $P(A|B)$: Probabilidad de Ataque al Miocardio, dado que se conoce que la persona elegida tomó Placebo.
    - $P(A|C)$: Probabilidad de Ataque al Miocardio, dado que se conoce que la persona elegida tomó Aspirina.
  - $P(A|B) = \frac{18+171}{11034} = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} \approx 0.0171$
  - $P(A|C) = \frac{5+99}{11037} = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} \approx 0.0094$
  - Piensa en qué dice la cantidad[3]: $\lambda = \frac{P(A|B)}{P(A|C)} \approx 1.82$

[1] Agresti (2012)
[2] Luego podemos hablar del OR.
[3] Riesgo Relativo Directo.

2. Ejemplo 7: **para rumiar**: Pensemos en la siguiente situación:

   - Se va a seleccionar una carta de una baraja de poker (13 simbolos 1-10 y J,K,Q, en cuatro palos).
   - Inicialmente tú apuestas $10 a que sale el 7 de picas, ¿Cuál es tu probabilidad de ganar?
   - El Tallador saca la carta la mira y dice salió (tiempo pasado), un número par
   - Luego del anuncio del tallador, ¿cuál es la probabilidad de ganar dada tu apuesta inicial?

3. Ejemplo 8:

   - Piensa que tú entras en un juego den el que se lanzarán dos dados.
   - Inicialmente tú apuestas $10 a que la suma es un número menor a 7, ¿Cuál es tu probabilidad de ganar?
   - Se lanza el primer dado y sale 4, ¿cuál es la probabilidad de que ganes?

4. **Definición**-Probabilidad Condicional: Dados dos eventos, i.e. trabajando sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ se tiene $A, B \in \mathfrak{F}$, con $P(B) > 0$, se define la probabilidad de que ocurra A dado que (en el pasado) se observó B como:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

   Nota: Si $P(B) = 0$ la probabilidad condicional no está definida.

5. Trabajo en clase: Ejemplo 2, Pág. 58-59, Degroot.

6. Ejercicio 9:

   - Asume se tiene una urna con 6 balotas azules y 8 rojas, y se seleccionarán al azar 4 balotas al azar sin reemplazo.
   - Cuál es la probabilidad de: A:= La primera y la tercer balotas sean azules.
   - Cuál es la probabilidad de A, dado B:= Se han observado exactamente tres balotas azules en las cuatro elegidas.

Fin - Clase del día Miércoles Nov. 13

Regla para Probabilidades Condicionales

1. **Probabilidad Condicional** - Teorema: Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y sea $\{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathfrak{F}$ talque $P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) > 0$, entonces

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \ldots P(A_n|A_{n-1} \ldots A_1)$$

La demostración del teorema anterior no es compleja, aparece en el libro de Degroot, es parte de tu lectura.
Nota: Observa que dados $A, B \in \mathfrak{F}$, si $P(AB) > 0$ entonces $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$.

2. **Probabilidad Condicional - Bajo Independencia**: abre el ojo
Asume se tienen dos eventos independientes, $A, B \in \mathfrak{F}$, con $P(B) > 0$, de la definición de probabilidad condicional se tiene

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

De donde tenemos un segundo camino, un poco más apropiado, para entender que dos eventos son independientes. Es decir,
Dos eventos A, B (con $P(B) > 0$) son independientes sii la probabilidad de A no cambia al observar la ocurrencia de B, i.e.

$$P(A) = P(A|B).$$

Ejercicio 4, Pág. 63, Degroot.

Teorema de Bayes

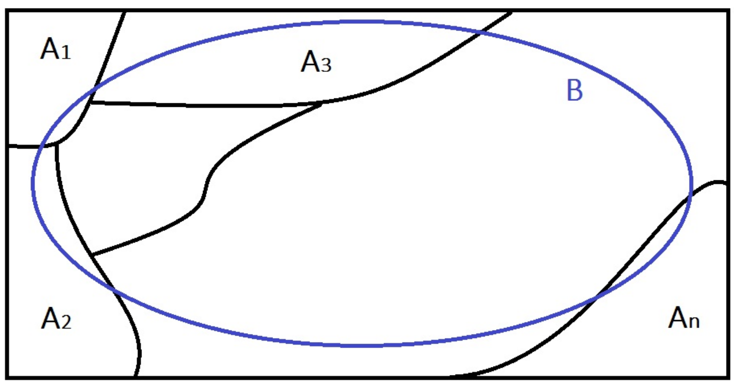
1. **Teorema de la Probabilidad Total**

   - Partición de un Espacio Muestral:
     Dado $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espacio de probabilidad, una secuencia $\{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathfrak{F}$ se dice es una partición de Ω si:
     - $A_j \cap A_i = \emptyset$ para todo $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$
     - $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega.$

- **Teorema de la Probabilidad Total**: Dados $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espacio de probabilidad, $\{A_j\}_{j=1}^n$ una partición de Ω y $B \in \mathfrak{F}$, se tiene

$$\begin{aligned} P(B) = P(B \cap \Omega) &= P\left(B\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j B\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j). \end{aligned} \tag{2}$$

  La igualdad en la Ecuación (2) se da si $P(A_j) > 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. De nuevo, la Ec. (2) es mejor entendida si observas la siguiente gráfica.



2. Teorema de Bayes: Dados $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espacio de probabilidad, $\{A_j\}_{j=1}^n$ una partición de Ω talque $P(A_j) > 0$ y $B \in \mathfrak{F}$ con $P(B) > 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} P(A_k|B) &= \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}. \end{aligned} \tag{3}$$

3. Ejemplo 10: Imagina lo que sigue. En un País llamado Locombia, en el año 2018 se tienen 7.2 % de hogares indigentes, 19.8 % de hogares pobres no indigentes y la población restante 73.0 % se ubica arriba de la línea de pobreza

(aquí hablamos de pobreza por ingresos). Unido a lo anterior se sabe que el 55.3 % de los hogares no pobres residen en una vivienda propia (pagada o que están pagando), el mismo porcentaje para hogares pobres (no indigentes) e indigentes son 22 % y 7 %, respectivamente.

Si se selecciona una o un jefe de hogar al azar de éste País y dice residir en una vivienda propia, cuál es la probabilidad de que viva en un hogar indigente?.

4. **Ejemplo** 3, Pág. 67, Degroot. Identificando la fuente de un defecto. Tres máquinas (M_1, M_2, M_3). Los porcentajes de producción 20, 30 y 50 %, porcentajes de defectuosos 1, 2, 3 % (respectivamente). Se selecciona de forma aleatoria un ítem y resulta defectuoso, Cuál es la probabilidad de que halla sido producido por la máquina M_2?.

5. **Ejercicio** 1, Pág. 70, Degroot. Se tiene una caja con: tres monedas marcadas con cara en cada lado, cuatro monedas marcadas con sello en cada lado, y dos monedas legales. Se toma una moneda al azar y se lanza al aire, Cuál es la probabilidad de obtener cara?.

6. **Ejercicio** 7, Pág. 71, Degroot. Un nuevo test se ha desarrollado para detectar un tipo de Cáncer.

7. **Bayes en dos etapas**: Actualización de las creencias. Piensa en lo que sigue:

   i.) En el momento t_0, se tiene la secuencia de probabilidades $\{p_j^{(0)} := P(A_j)\}_{j=1}^n$.

   ii.) En $t_1 > t_0$ se observa B, con $P(B) > 0$, la secuencia de probabilidades actualizada $\{p_k^{(1)} := P(A_k|B) =\}_{k=1}^n$, está dada por

   $$p_k^{(1)} = P(A_k|B) = \frac{p_k^{(0)} P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^n p_j^{(0)} P(B|A_j)}.$$

   iii.) En un tercer momento en $t_2 > t_1$ se observa C, con $P(C|B) > 0$. La secuencia de probabilidades actualizada $\{p_k^{(2)} := P(A_k|C \cap B)\}_{k=1}^n$, puede ser obtenida mediante la ecuación

   $$p_k^{(2)} = P(A_k|C \cap B) = \frac{p_k^{(1)} P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^n p_j^{(1)} P(B|A_j)}$$

8. **Aplicación**[4]: Volviendo al Ejercicio 1 (Pág. 70 Degroot). Se tiene una caja con tres monedas marcadas con cara en cada lado, cuatro monedas marcadas con sello en cada lado, y dos monedas legales. Se toma una moneda al azar, se lanza al aire dos veces y se obtienen dos sellos, Cómo cambian las probabilidades de M_1, M_2, M_3.
   El problema anterior se puede ver o trabajar en dos etapas, veámoslo

   - Sean B_1:= Sale sello en el primer lanzamiento y B_2:= Sale sello en el segundo lanzamiento.
   - Probabilidades iniciales, antes de sacar cualquier moneda, son $p_1^{(0)} = \frac{3}{9} \quad p_2^{(0)} = \frac{4}{9} \quad p_3^{(0)} = \frac{2}{9}$.
     Ahora en $t = 1$ salió sello (primer lanzamiento):

$$\begin{aligned} p_1^{(1)} &= P(M_1|B_1) \\ &= \frac{P(M_1)P(B_1|M_1)}{P(M_1)P(B_1|M_1) + P(M_2)P(B_1|M_2) + P(M_3)P(B_1|M_3)} \\ &= \frac{\frac{3}{9} \times 0}{P(M_1)P(B_1|M_1) + P(M_2)P(B_1|M_2) + P(M_3)P(B_1|M_3)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2^{(1)} &= P(M_2|B_1) \\ &= \frac{P(M_2)P(B_1|M_2)}{P(M_1)P(B_1|M_1) + P(M_2)P(B_1|M_2) + P(M_3)P(B_1|M_3)} \\ &= \frac{\frac{4}{9} \times 1}{0 + \frac{4}{9} \times 1 + \frac{2}{9} \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

     Por complemento $p_3^{(1)} = \frac{1}{5}$.
     En $t = 2$, salió sello (segundo lanzamiento), las probabilidades de inicio son $p_1^{(1)} = 0 \quad p_2^{(1)} = \frac{4}{5} \quad p_3^{(1)} = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} p_1^{(2)} &= P(M_1|B_1B_2) \\ &= \frac{p_1^{(1)}P(B_2|M_1)}{p_1^{(1)}P(B_2|M_1) + p_2^{(1)}P(B_2|M_2) + p_3^{(1)}P(B_2|M_3)} \\ &= \frac{0 \times 0}{p_1^{(1)}P(B_2|M_1) + p_2^{(1)}P(B_2|M_2) + p_3^{(1)}P(B_2|M_3)} = 0 \end{aligned}$$

[4] Volveremos sobre Teorema de Bayes en Distribuciones Conjuntas.

$$
\begin{aligned}
p_2^{(2)} &= P(M_2|B_1B_2)\\
&= \frac{p_2^{(1)}P(B_2|M_2)}{p_1^{(1)}P(B_2|M_1)+p_2^{(1)}P(B_2|M_2)+p_3^{(1)}P(B_2|M_3)}\\
&= \frac{\frac{4}{5}\times 1}{0+\frac{4}{5}\times 1+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}} = \frac{8}{9}.
\end{aligned}
$$

Por ende $p_3^{(1)} = \frac{1}{9}$

Fin - Clase del día Viernes Nov. 15