PROCESOS ESTOCÁSTICOS - CADENA DE MARKOV

V. Arunachalam (Arun)
varunachalam@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia

2022

ECUACIONES DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

Supóngase que interesa determinar la probabilidad de alcanzar el estado j después de n transiciones dado que el proceso se hallaba en el estado i en tiempo 0, esto es, deseamos calcular $P\left[X_n = j | X_0 = i\right]$. Es claro que si $0 < m < n$ entonces para todo par de estados $i, j \in \mathbb{S}$ se satisface lo siguiente:

$$P[X_n = j \mid X_0 = i] = \sum_k P[X_n = j \mid X_m = k] P[X_m = k \mid X_0 = i]$$

o

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in \mathbb{S}} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n-m)}$$

Demostración

Realizamos en clase

Como una consecuencia importante de la ecuación de Chapman-Kolmogorov se tiene el siguiente resultado en forma matricial:

$$p_{ij}^{(n)} = (P^n)_{ij}$$

Example

(Ruina del jugador) Supóngase que para simplicidad, la matriz de transición $\mathbf{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}24 & 0 & 0{,}16 & 0 \\ 0{,}36 & 0 & 0{,}48 & 0 & 0{,}16 \\ 0 & 0{,}36 & 0 & 0{,}24 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}87655 & 0{,}00032 & 0 & 0{,}00022 & 0{,}12291 \\ 0{,}69186 & 0 & 0{,}00065 & 0 & 0{,}30749 \\ 0{,}41842 & 0{,}00049 & 0 & 0{,}00032 & 0{,}58437 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

This Markov chain has period $d = 3$. One-step transitions between the states are possible in the order $\mathbf{Z}_1 = \{0, 1\} \to \mathbf{Z}_2 = \{2, 3\} \to \mathbf{Z}_1 = \{4, 5\} \to \mathbf{Z}_1$. The three-step transition matrix $\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{P}^3$ is

$$\mathbf{P}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/8 & 5/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 31/40 & 9/40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11/20 & 9/20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21/40 & 19/40 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Clasificación de estados de una Cadena de Markov

El comportamiento de una cadena de Markov depende de si la cadena vuelve a su estado de partida con probabilidad uno o no. Para poder este análisis requerimos hacer una clasificación de los estados de la cadena.

Clasificación de estados de una Cadena de Markov

El comportamiento de una cadena de Markov depende de si la cadena vuelve a su estado de partida con probabilidad uno o no. Para poder este análisis requerimos hacer una clasificación de los estados de la cadena.

Clasificación de estados de una Cadena de Markov

A. Se dice que un estado j es alcanzable a partir del estado i ($i \rightarrow j$) si es posible ir de i a j en un número finito de pasos (transiciones). Esto es, si $p_{ij}^{(n)}$ denota la probabilidad de ir del estado i al estado j en n transiciones, entonces $i \rightarrow j$, si y sólo si, existe un $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^{(n)} \geq 0$.

B. Se dice que el estado i está comunicado con el estado j y escribimos $i \leftrightarrow j$, si y sólo si, $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$

C. Es fácil verificar que la relación estar comunicado es una relación de equivalencia y por consiguiente, las clases de equivalencia

$$C(i) := \{j : i \leftrightarrow j\}, \ i \in S$$

forman una partición de S.

Clasificación de estados de una Cadena de Markov

A. Se dice que un estado j es alcanzable a partir del estado i ($i \rightarrow j$) si es posible ir de i a j en un número finito de pasos (transiciones). Esto es, si $p_{ij}^{(n)}$ denota la probabilidad de ir del estado i al estado j en n transiciones, entonces $i \rightarrow j$, si y sólo si, existe un $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^{(n)} \geq 0$.

B. Se dice que el estado i está comunicado con el estado j y escribimos $i \leftrightarrow j$, si y sólo si, $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$

C. Es fácil verificar que la relación estar comunicado es una relación de equivalencia y por consiguiente, las clases de equivalencia

$$C(i) := \{j : i \leftrightarrow j\}, \; i \in S$$

forman una partición de S.

Clasificación de estados de una Cadena de Markov

A. Se dice que un estado j es alcanzable a partir del estado i ($i \rightarrow j$) si es posible ir de i a j en un número finito de pasos (transiciones). Esto es, si $p_{ij}^{(n)}$ denota la probabilidad de ir del estado i al estado j en n transiciones, entonces $i \rightarrow j$, si y sólo si, existe un $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^{(n)} \geq 0$.

B. Se dice que el estado i está comunicado con el estado j y escribimos $i \leftrightarrow j$, si y sólo si, $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$

C. Es fácil verificar que la relación estar comunicado es una relación de equivalencia y por consiguiente, las clases de equivalencia

$$C(i) := \{j : i \leftrightarrow j\}, \ i \in S$$

forman una partición de S.

EXAMPLE

En el ejemplo de la ruina del jugador se tiene que el conjunto de estados queda particionada en tres clases:

$$C(0) = \{0\}, \; C(1) = \{1, 2, \cdots, a-1\}, \; C(a) = \{a\}$$

Obsérvese que en este caso $1 \rightharpoonup 0$ pero $0 \notin C(1)$.

DEFINITION

Una cadena de Markov se dice irreducible si posee una única clase de equivalencia, es decir, si todos los estados están comunicados entre si.

EXAMPLE

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{1, 2, 3\}$, distribución inicial $\pi = (1, 0, 0)$ y matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $C(1) = C(2) = C(3)$, esto es, la cadena es irreducible.

Definition

Una cadena de Markov se dice irreducible si posee una única clase de equivalencia, es decir, si todos los estados están comunicados entre si.

Example

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $S=\{1,2,3\}$, distribución inicial $\pi=(1,0,0)$ y matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $C(1)=C(2)=C(3)$, esto es, la cadena es irreducible.

DEFINITION

Un estado $i \in S$ se dice absorbente si $p_{ii}(1) = 1$. Esto es, i es un estado absorbente si él es el único miembro de $C(i)$ y ningún estado $j \neq i$ es alcanzable a partir de i.

EXAMPLE

En el ejemplo de la ruina del jugador se tiene que los estados 0 y a son estados absorbentes.

DEFINITION

Un estado $i \in S$ se dice absorbente si $p_{ii}(1) = 1$. Esto es, i es un estado absorbente si él es el único miembro de $C(i)$ y ningún estado $j \neq i$ es alcanzable a partir de i.

EXAMPLE

En el ejemplo de la ruina del jugador se tiene que los estados 0 y a son estados absorbentes.

- Consideremos una cadena de Markov $(X_n)_n$ que parte del estado i y sean τ_{ij} las variables aleatorias definidas como sigue $\tau_{ij} := \min\{n : X_n = j\}$ = *tiempo mínimo que requiere la cadena para que partiendo de i llegue a j*.Si $\{n : X_n = j\} = \emptyset$, entonces definimos τ_{ij} igual a infinito.
- A la variable aleatoria τ_{ii} se le llama **tiempo de recurrencia** del estado i,esto es, τ_{ii} es el número de transiciones requeridas para retornar al estado i luego de que la cadena ha salido de dicho estado.

- Consideremos una cadena de Markov $(X_n)_n$ que parte del estado i y sean τ_{ij} las variables aleatorias definidas como sigue $\tau_{ij} := \min\{n : X_n = j\} =$ *tiempo mínimo que requiere la cadena para que partiendo de i llegue a j*.Si $\{n : X_n = j\} = \emptyset$, entonces definimos τ_{ij} igual a infinito.
- A la variable aleatoria τ_{ii} se le llama **tiempo de recurrencia** del estado i,esto es, τ_{ii} es el número de transiciones requeridas para retornar al estado i luego de que la cadena ha salido de dicho estado.

La función densidad de probabilidad asociada a τ_{ij} es

$$f_{ij}^{(n)} = P[\tau_{ij} = n \mid X_0 = i],\ n \geq 1$$

esto es, $f_{ij}^{(n)}$ es la probabilidad de que partiendo de i la cadena visite, por primera vez, el estado j en el tiempo n. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(1)} &= P[\tau_{ij} = 1] = P[X_{n+1} = j\,|X_n = i] = p_{ij} \\ f_{ij}^{(2)} &= P[X_{n+2} = j\,|X_n = i, X_{n+1} \neq j] \end{aligned}$$

Se define para todo $i, j \in S$

$$f_{ij}^{(0)} := 0$$

Sea

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

Esto es, f_{ij} es la probabilidad de que, partiendo de i, la cadena alcance el estado j por lo menos una vez.

Definition

Un estado $i \in S$ se llama recurrente si $f_{ij} = 1$. Un estado i que no sea recurrente se llama transitorio.

En otras palabras, un estado j es recurrente si y sólo si, después de que la cadena sale del estado j, su eventual retorno al estado j ocurre con probabilidad 1.

Example

Sea $(X_n)_n$ una cadena de Markov con conjunto de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $C(0) = \{0, 2\}$, $C(1) = \{1\}$, $C(3) = \{3\}$. Los estados 0 y 2 son recurrentes y los estados 1 y 3 son transitorios.

EXAMPLE

Sea $(X_n)_n$ una cadena de Markov con conjunto de estados $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $C(1) = \{1, 3, 4\}$, $C(2) = \{2, 5\}$. Todos los estados son recurrentes.

Definition

Al valor esperado M_{ij} de la variable aleatoria τ_{ij} se le llama tiempo medio de la primera transición del estado i al estado j. Esto es,

$$M_{ij} = \mathrm{E}\left[\tau_{ij}\right] = \sum_{n-1}^{\infty} n f_{ij}(n)$$

A M_{ii} se le denomina tiempo medio de recurrencia.

Definition

Un estado recurrente $i \in S$ se llama recurrente positivo si $M_{ii} < \infty$ y recurrente nulo si $M_{ii} = \infty$.

Definition

Al valor esperado M_{ij} de la variable aleatoria τ_{ij} se le llama tiempo medio de la primera transición del estado i al estado j. Esto es,

$$M_{ij} = \mathrm{E}\left[\tau_{ij}\right] = \sum_{n-1}^{\infty} n f_{ij}(n)$$

A M_{ii} se le denomina tiempo medio de recurrencia.

Definition

Un estado recurrente $i \in S$ se llama recurrente positivo si $M_{ii} < \infty$ y recurrente nulo si $M_{ii} = \infty$.

Definition

Sea $i \in S$ fijo. El período de i está definido como sigue:

$$d(i) := MCD\,\{n \geq 1 \mid p_{ii}(n) > 0\}$$

Si $p_{ii}(n) = 0$ para todo $n \geq 1$, entonces definimos $d(i) = 0$.
Si $d(i) > 1$ entonces se dice que i es un estado periódico con período $\gamma = d(i)$.
Si $d(i) = 1$ entonces se dice que el estado i es **aperiódico**.

Example

En el ejemplo de la ruina del jugador se tiene que:

$$d\left(0\right) = MCD\left\{n \geq 1 \mid p_{00}(n) > 0\right\} = 1 = \left\{n \geq 1 \mid p_{aa}(n) > 0\right\} = d\left(a\right)$$

$$d\left(i\right) = MCD\left\{n \geq 1 \mid p_{ii}(n) > 0\right\} = 2 \text{ para todo } i \neq 0, a$$

Esto es los estados 0 y a son estados aperiódicos y los demás estados son periódicos con período 2.

EXAMPLE

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con conjunto de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Example

$$\begin{aligned} C(0) &= C(1) = \{0, 1\} \\ C(2) &= C(3) = \{2, 3\} \\ C(4) &= \{4\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(0) &= d(1) = 2 \\ d(2) &= d(3) = 1 \\ d(4) &= 0 \end{aligned}$$

DEFINITION

Un conjunto no vacio de estados se dice cerrado si no existen estados fuera del conjunto que sean alcanzables a partir de los estados del conjunto.

DEFINITION

Una clase comunicante cerrada es recurrente positiva si ella es finita.

Una clase comunicante cerrada infinita puede ser recurrente positiva, recurrente nula o no recurrente.

DEFINITION

Un conjunto no vacio de estados se dice cerrado si no existen estados fuera del conjunto que sean alcanzables a partir de los estados del conjunto.

DEFINITION

Una clase comunicante cerrada es recurrente positiva si ella es finita.

Una clase comunicante cerrada infinita puede ser recurrente positiva, recurrente nula o no recurrente.

El conjunto de estados de una cadena de Markov puede ser particionado como sigue:

DEFINITION

Un proceso de Markov que tiene y sólo una clase comunicante se llama irreducible.

DEFINITION

Se dice que un proceso irreducible es ergódico si es recurrente positivo y aperiódico.

El conjunto de estados de una cadena de Markov puede ser particionado como sigue:

Definition

Un proceso de Markov que tiene y sólo una clase comunicante se llama irreducible.

Definition

Se dice que un proceso irreducible es ergódico si es recurrente positivo y aperiódico.

Example

Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con conjunto de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

En este caso se tiene que $C(0) = \{0, 2\}$, $C(1) = \{1\}$ y $C(3) = \{3\}$. Los estados 0 y 2 son recurrentes y los estados 1 y 3 son transitorios.

EXAMPLE

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

En este caso se tiene que $C(0) = \{0, 1\}$, $C(2) = \{2, 3\}$ y $C(4) = \{4\}$. Los estados $0, 1, 2, 3$ son recurrentes y el estado 4 es transitorio.

EXAMPLE

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 0 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para este ejemplo se tiene que el estado 4 es absorbente, los estados 2 y 6 forman una clase periódica, los estados $1, 3, 5, 7$ y 8 son transitorios. El proceso completo no es ergódico.