Procesos Estocásticos - Cadena de Markov

V. Arunachalam (Arun)
varunachalam@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia

Agosto 2022

Agenda

1. Cadenas absorbantes
   - Cadenas de Markov finitas con estados recurrentes y transitorios

2. Medidas de probabilidad estacionarias

De lo desarrollado en la sección anterior se tiene que una cadena de Markov con conjunto de estados finito debe tener al menos un estado recurrente. Vamos a considerar ahora una cadena de Markov con m estados de los cuales r son recurrentes y $m-r$ son transitorios. En este caso la matriz de transición P puede expresarse como sigue:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ A & Q \end{pmatrix} \qquad (*)$$

donde P_1 es la matriz de transición entre estados recurrentes, A es la matriz cuyas componentes son las probabilidades de transición de los estados transitorios a los estados recurrentes, Q es la matriz de cuyas componentes son las probabilidades de transición entre estados transitorios y 0 denota la matriz nula de tamaño $r \times (m-r)$.

Supóngase que la matriz P tiene la representación dada en $(*)$. La matriz

$$M := (I - Q)^{-1}$$

donde I es la matriz identidad de orden $(m - r)$,se llama matriz fundamental.

El siguiente teorema garantiza que la matriz fundamental está bien definida.

Teorema:

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con conjunto de estados finito y con matriz de transición P particionada como en $(*)$. Entonces la matriz $(I - Q)$ es invertible y se satisface que:

$$(I - Q)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} Q^r = I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots$$

PROOF:

Se tiene que:

$$I - Q^n = (I - Q)\left(I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots + Q^{n-1}\right) \qquad (1)$$

Puesto que

$$Q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

entonces

$$\det\left(I - Q^n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Por lo tanto, para n suficientemente grande se tiene que

$$\det\left(I - Q^n\right) \neq 0$$

y en consecuencia

$$\det\left(I - Q\right)\left(I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots + Q^{n-1}\right) \neq 0$$

PROOF...

De donde se sigue que

$$\det(I - Q) \neq 0$$

y por lo tanto

$$(I - Q)^{-1} \text{ existe}$$

De la expresión dada en (1) se obtiene que:

$$\left(I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots + Q^{n-1}\right) = (I - Q)^{-1}(I - Q^n)$$

Al tomar límite cuando n tiende a ∞ se obtiene el resultado.$\triangle$

Definition

Sean $i, j \in S$ estados transitorios. Supóngase que la cadena parte de i y sea N_{ij} la variable aleatoria definida como sigue:

$$N_{ij} := \text{“número de veces que la cadena visita el estado } j \text{ antes de alcanzar (posiblemente) un estado recurrente”}$$

y sea

$$\mu_{ij} := E\left(N_{ij}\right)$$

Sea T el conjunto de estados transitorios. Entonces

$$M = \left(\mu_{ij}\right)_{i,j \in T}$$

donde $M = (I - Q)^{-1}$.

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con conjunto de estados $S = \{a, b, c, d\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$C(d) = \{c, d\}$$
$$C(a) = \{a, b\}$$

Los estados c y d son recurrentes y los estados a, b son transitorios.

La representación canónica de la matriz P es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$M = \begin{pmatrix} \frac{15}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{15}{13} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el número esperado de visitas que la cadena, habiendo partido de a, hace al estado a antes de alcanzar la clase recurrente es $\frac{15}{13}$.

EJEMPLO

Una consultoría de estadśtica emplea a tres tipos de estadísticos: estadístico asistentes, estadístico con experiencia y socios. Durante un año determinado hay una probabilidad de 0.15 que un estadístico asistente sea ascendido a estadístico con experiencia y una probabilidad de 0.05 que deje la consultoría sin ser socio. También hay una probabilidad de 0.20 que un estadístico con experiencia sea ascendido a socio y una probabilidad de 0.10 que deje la consultoría sin ser socio. También hay una probabilidad de 0.05 de que un socio deje la consultoría(sale siendo socio emérito). Determine:

A. ¿Cuál es la probabilidad de que un estadístico asistente joven recién contrado llegue a ser socio?

B. ¿Cuál es la duración promedio que pasa un socio en la consultoría?

EJEMPLO

Una consultoría de estadśtica emplea a tres tipos de estadísticos: estadístico asistentes, estadístico con experiencia y socios. Durante un año determinado hay una probabilidad de 0.15 que un estadístico asistente sea ascendido a estadístico con experiencia y una probabilidad de 0.05 que deje la consultoría sin ser socio. También hay una probabilidad de 0.20 que un estadístico con experiencia sea ascendido a socio y una probabilidad de 0.10 que deje la consultoría sin ser socio. También hay una probabilidad de 0.05 de que un socio deje la consultoría(sale siendo socio emérito). Determine:

A. ¿Cuál es la probabilidad de que un estadístico asistente joven recién contrado llegue a ser socio?

B. ¿Cuál es la duración promedio que pasa un socio en la consultoría?

DEFINITION

Sean i un estado transitorio y j un estado recurrente. Definimos la variable aleatoria

$$T_{ij} := \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = j \mid X_0 = i\}$$

es decir, T_{ij} denota el número mínimo de transiciones que requiere la cadena para, habiendo abandonado la clase transitoria alcanzar el estado recurrente j por primera vez en el tiempo n.

Sea $(X_n)_n$ una cadena de Markov con $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Se tiene que los estados 1 y 2 son recurrentes y los estados 3 y 4 transitorios. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} P(T_{32} = 2) &= P(X_2 = 2, X_1 = 3 \mid X_0 = 3) + P(X_2 = 2, X_1 = 4 \mid X_0 = 3) \\ &= P(X_2 = 2 \mid X_1 = 3)\, P(X_1 = 3 \mid X_0 = 3) \\ &\quad + P(X_2 = 2 \mid X_1 = 4)\, P(X_1 = 4 \mid X_0 = 3) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Sean

$$g_{ij}^{(n)} := P\left(T_{ij} = n\right)$$

$$g_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} g_{ij}^{(n)}$$

$=$ "Probabilidad de que habiendo abandonado la clase transitoria la cadena alcance el estado recurrente j por lo menos una vez."

y supóngase que

$$G^{(n)} = \left(g_{ij}^{(n)}\right)$$

y

$$G = (g_{ij})$$

$$G^{(n)} = Q^{n-1}A$$

$$G = MA$$

Se cumple que:

$$G^{(1)} = A$$

y

$$G^{(n)} = QG^{(n-1)}$$

ya que para i estado transitorio y j estado recurrente

$$g_{ij}^{(1)} = P_{ij}$$
$$g_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in \mathbf{T}} P_{ik} g_{kj}^{(n-1)}$$

donde $\mathbf{T}$ denota al conjunto de los estados transitorios.
Por lo tanto,

$$G^{(n)} = QG^{(n-1)} = QQG^{(n-2)} = \cdots = Q^{(n-1)}G^{(1)}$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
G &= \sum_{n=1}^{\infty} G^{(n)} \\
&= A + \sum_{n=2}^{\infty} Q^{(n-1)} A \\
&= A + QA + Q^2 A + \cdots \\
&= \left(I + Q + Q^2 + \cdots\right) A \\
&= MA
\end{aligned}
$$