Juan Pablo Sosa C.

3. Evaluar las siguientes integrales de trayectorias $\int_{\sigma} f(x,y,z)\,ds$, donde

(a) $f(x,y,z) = \exp\sqrt{z}$ y $\sigma\colon t \mapsto (1,2,t^2), t \in [0,1]$

$\boxed{\text{(b)}}$ $f(x,y,z) = yz$ y $\sigma\colon t \mapsto (t,3t,2t), t \in [1,3]$

(c) $f(x,y,z) = (x+y)/(y+z)$ y $\sigma\colon t \mapsto (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t), t \in [1,2]$

a. $f(x,y,z) = e^{\sqrt{z}}$ $\quad \sigma: t \mapsto (1,2,t^2),\ t \in [0,1]$

1. Parametrización:

$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1,2,t^2)$

2. Derivadas:

$x'(t) = 0 = y'(t) \quad z'(t) = 2t$

3. Diferencial.

$ds = (x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2)^{1/2} = 2t$

4. Sustituimos:

$\int_\sigma f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 \exp(\sqrt{z})\,ds = \int_0^1 e^{\sqrt{t^2}}\, 2t\,dt$

$2\int_0^1 e^t \cdot t \quad u = t \quad du = 1 \quad dv = e^t \quad v = e^t \quad 2\left| t.e^t \Big]_0^1 - \int_0^1 e^t \right|$

$(2)\left(\cancel{e} - (\cancel{e} - 1)\right) = 2$

Valor de la integral es igual a = 2.

b. $f(x,y,z) = yz \quad \sigma: t \mapsto (t,3t,2t),\ t \in (1,3)$

$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, 3t, 2t) \quad x'(t) = 1 \quad y'(t) = 3 \quad z'(t) = 2$

$ds = \sqrt{14} \quad 6\int_1^3 t^2\sqrt{14}\,dt = 6\sqrt{14}\ \frac{t^3}{3}\Big]_1^3 = 6\sqrt{14}\left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 26 = 52\sqrt{14}$

3. $f(x,y,z) = (x+y)/y+z) \quad \sigma: t \mapsto (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t),\ t \in [1,2]$

$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

$\sigma(t) = (t, \frac{2}{3}t^3, t) \quad x'(t) = 1 \quad y'(t) = t^{\frac{1}{2}} \quad z'(t) = 1 \quad ds = \sqrt{2+t}$

$\int_1^2 \frac{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + t}{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + t}\sqrt{2+t}\,dt = \frac{2(2+t)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big]_1^2 = \frac{2 \cdot 8}{3} - \frac{2\sqrt{27}}{3} = \frac{16}{3} - \frac{2(3\sqrt{3})}{3} = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

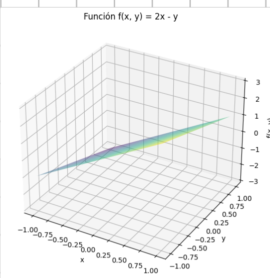
$\boxed{7.}$ Sea $f(x,y) = 2x - y$, $x = t^4$, $y = t^4$, $-1 \le t \le 1$.

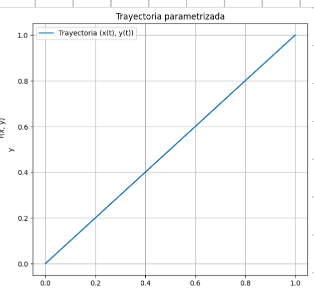
(a) Calcular la integral de f a lo largo de esta trayectoria e interpretar geométricamente la respuesta.

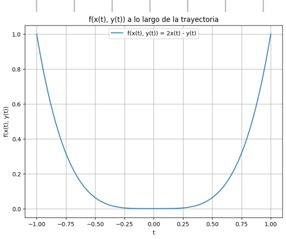
(b) Evaluar la función longitud de arco $s(t)$ y rehacer la parte (a) en términos de s (quizá convenga consultar el ejercicio 2 de la sección 3.2).

a. $f(x,y) = 2x - y \quad \sigma(t) = (t^4, t^4) \quad x'(t) = 4t^3 \quad y'(t) = 4t^3 \quad ds = \sqrt{16t^6 + 16t^6}$

$4\sqrt{2}\int_{-1}^1 t^4 \cdot t^3\,dt = 4\sqrt{2}\ \frac{t^8}{8}\Big]_{-1}^1 = 0$







Geometricamente se entiende que nuestra trayectoria evaluada cancela sus volumenes negativas con las positivas.

2. Longitud de arco:

$$S(t) = \int_a^t \left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{1/2} dt = \int_0^t \sqrt{32 t^6}\, dt = 4\sqrt{2}\, \frac{t^4}{4}\Big]_0^t = \sqrt{2}\, t^4$$

$$ds = 4\sqrt{2}\, t^3\, dt$$

En los ejercicios 8 a 11 se trata la aplicación de la integral de trayectoria al problema de definir el valor promedio de una función escalar a lo largo de una trayectoria. Definir el número

$$\frac{\int_\sigma f(x,y,z)\,ds}{l(\sigma)}$$

$a = r$

$\frac{2\pi r}{2} = \pi r$

$l(\sigma) = \pi a$

9. Hallar la coordenada y promedio de los puntos en el semicírculo parametrizado por $\rho\colon [0,\pi] \to \mathbf{R}^3$, $\theta \mapsto (0, a\,\mathrm{sen}\,\theta, a\cos\theta)$; $a > 0$.

$$\int_\sigma f(x,y,z)\,ds = \int_0^\pi \sqrt{a\cos\theta^2 + a\,\mathrm{sen}\,\theta^2}\, d\theta = \int_0^\pi a\; a\,\mathrm{sen}\,\theta\; d\theta = -a^2 \left(\cos\theta\Big]_0^\pi\right) = -a^2(-1-1)$$

$2a^2$

Valor promedio $\bar{y}$ $\qquad \bar{y} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}$

13. Hallar la masa de un alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ si la densidad en (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$ gramos por unidad de longitud del alambre.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad x + y + z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x + y + z$$

$$x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z = 1$$

$$x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) = 1$$

Tratamos de parametrizar la curva.

Vector en el plano $= (1,-1,0) = V_1$

Normal $= (1,1,1)$

Vector ortogonal: $(-1,-1,2)$

Normalizamos:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = |V_1| \qquad |V_2| = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\sigma(t) = (\cos t\, V_1 + \mathrm{sen}\, t\, V_2)$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{sen}\, t,\; -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{sen}\, t,\; \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathrm{sen}\, t$$

$$x'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\, t - \frac{1}{\sqrt{6}}\cos t,\quad y'(t) = +\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\, t - \frac{1}{\sqrt{6}}\cos t$$

$$z'(t) = \frac{2}{\sqrt{6}}\cos t$$

Planteamos:

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{sen}(t)}{\sqrt{6}}\right)^2 dt$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{2} - \cancel{\frac{2\,\mathrm{sen}\, t\cos t}{\sqrt{2}\sqrt{6}}}^{\,0} + \frac{\mathrm{sen}^2(t)}{6}\, dt$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$$

Seccion 7.2

2. Evaluar cada una de las integrales siguientes:

(a) $\int_{\sigma} x\,dy - y\,dx$, $\quad \sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$

(b) $\int_{\sigma} x\,dx + y\,dy$, $\quad \sigma(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t)$, $\quad 0 \le t \le 2$

$\boxed{(c)}$ $\int_{\sigma} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, donde σ está formada por los segmentos de recta que unen a $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$

(d) $\int_{\sigma} x^2\,dx - xy\,dy + dz$, donde σ es la parábola $z = x^2$, $y = 0$ de $(-1,0,1)$ a $(1,0,1)$.

a. $\int_{\sigma} x\,dy - y\,dx$ $\quad \sigma(t) = \cos t, \operatorname{sen} t \quad 0 \le t \le 2\pi$

$x'(t) = -\operatorname{sen} t \quad y'(t) = \cos t$

$$\int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} t \, dt = 2\pi$$

b. $\int_{\sigma} x\,dx + y\,dy$ $\quad \sigma(t) = \cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t) \quad 0 \le t \le 2$

$x'(t) = -\operatorname{sen}(\pi t)\pi \quad \cos(\pi t)\pi = y'(t)$

$$\int_0^2 -\cos(\pi t)\operatorname{sen}(\pi t)\pi + \operatorname{sen}(\pi t)\cos(\pi t)\pi \, dt = \int_0^2 -\pi\,|\cos(\pi t)\operatorname{sen}(\pi t) - \operatorname{sen}(\pi t)\cos(\pi t)\,dt$$

c. $\int_{\sigma} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

σ recta

$1,0,0 \quad 0,1,0 \quad 0,0,1$

- Integramos en las tres rectas.

$\sigma(t,s) = (1,0,0) + (-1,1,0)t + (-1,0,1)s$

Desglozamos en dos rectas.

$\sigma_1(t) = (1,0,0) + (-1,1,0)t$

$x(t) = 1-t \quad y(t) = t \quad z(t) = 0$

$x'(t) = -1 \quad y'(t) = 1 \quad z'(t) = 0$

$\sigma_1 \int_0^1 t(0)(-1) + 0 + 0 = 0$

$\sigma_2 \int_0^1 (1-t)(t)(0) + 0 + 0 = 0$

$\sigma_3 \int_0^1 (0)(1-t)(1) + 0 + 0 = 0$

$$\int_{\sigma} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz = 0$$

Se entiende que es un conservativo y al ser un area cerrada nos da 0. } Forma diferencial exacta

$\sigma_2(s) = (1,0,0) + (-1,0,1)s$

$(0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0)$

$(0,0,1) - (1,0,0) = (-1,0,1)$

d) $\int_{\sigma} x^2\,dx - xy\,dy + dz$, $\quad \sigma \quad z = x^2$, $y = 0$ de $(-1,0,1)$ a $(1,0,1)$

$\sigma(t) = (t, 0, t^2) \quad t \in [-1,1]$

$x'(t) = 1 \quad y'(t) = 0 \quad z'(t) = 2t$

$$\int_{-1}^1 t^2 + 2t \, dt = \left. \frac{t^3}{3} + t^2 \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{-1}{3} + 1\right) = \frac{2}{3}$$

7. Evaluar $\int_{\sigma} y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$ para cada una de las trayectorias $\sigma(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \le t \le 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

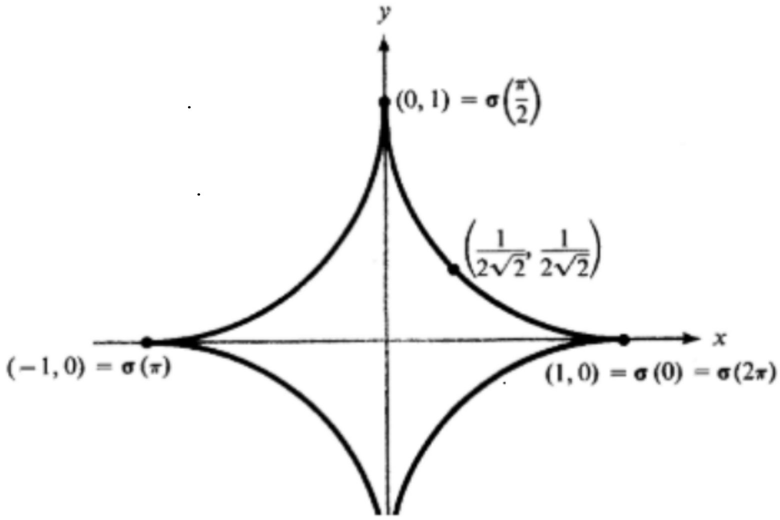
$\sigma(t) = (t, t^n, 0)$, $\quad 0 \le t \le 1 \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$x'(t) = 1 \quad y'(t) = n t^{n-1} \quad z'(t) = 0$

$$\int_0^1 t^n + (3t^{3n} - t)(n t^{n-1})\,dt = \int_0^1 t^n + 3n t^{4n-1} - n t^n\,dt = \left. \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{3n\,t^{4n}}{4n} - \frac{n\,t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{3n}{4n} - \frac{n}{n+1} = \frac{1-n}{n+1} + \frac{3}{4} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

9. La imagen de $t \mapsto (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $0 \le t \le 2\pi$, en el plano se muestra en la figura 7.2.15. Evaluar la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ alrededor de esta curva.



$\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t) \qquad 0 \le t \le 2\pi \qquad F(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$x(t) = \cos^3 t \qquad y(t) = \operatorname{sen}^3 t \qquad \int_C F \cdot dr = \int_a^b \left(P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + (Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt$

$P(x, y) = x \qquad Q(x, y) = y$

$P(x(t), y(t)) = \cos^3 t \qquad Q(x(t), y(t)) = \operatorname{sen}^3 t$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d \cos^3 t}{dt} = 3\cos^2 t\,(-\operatorname{sen} t) = -3\cos^2 t \operatorname{sen} t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d \operatorname{sen}^3 t}{dt} = 3\operatorname{sen}^2 t\,(\cos t)$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\cos^3 t\,(-3\cos^2 t \operatorname{sen} t) + \operatorname{sen}^3 t\,(3\operatorname{sen}^2 t \cos t) \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} (-3\cos^5 t \operatorname{sen} t) + (3\operatorname{sen}^5 t \cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} \underline{3\cos t \operatorname{sen} t\,(\operatorname{sen}^4 t - \cos^4 t)}\,dt = 0.$$

Impar $f(-t) = -f(t)$
y $0, 2\pi$ hay simetría

Dado el teorema de green
F tiene $\nabla \times F = 0$ y la curva
es cerrada, la circulación es
nula.

Aplicando el teorema de Green

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_R \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\,dA, \qquad \begin{array}{l} P(x,y) = x \\ Q(x,y) = y \end{array} \qquad \frac{dQ}{dx} = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \frac{dP}{dy} = \frac{dx}{dy} = 0 \quad \iint_R 0\,dA = 0$$

15. Evaluar $\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$, donde C es una curva orientada simple que conecta $(1,1,1)$ con $(1,2,4)$.

$\sigma(t) = 1,1,1 + (0,1,3)t$

$x = 1 \quad y = 1+t \quad z = 1+3t$

$x'(t) = 0 \quad y'(t) = 1 \quad z'(t) = 3$

$$\int_0^1 2(1+t)(1+3t)\cdot 0 + 1(1+3t) + 1(1+t)3\,dt =$$

$$\int_0^1 1+3t+3+3t\,dt = \int_0^1 4+6t\,dt = 4t+3t^2\Big]_0^1 = 7.$$

¿Es conservativo?

$F = (2xyz, x^2z, x^2y) \qquad \nabla f = F$

Toca mostrar que su rotacional es cero con el producto X

16. Suponer que $\nabla f(x,y,z) = 2xyze^{x^2}\mathbf{i} + ze^{x^2}\mathbf{j} + ye^{x^2}\mathbf{k}$. Si $f(0,0,0) = 5$, hallar $f(1,1,2)$.

$\frac{df}{dx} = 2xyze^{x^2} \qquad f(x,y,z) = \int 2xyze^{x^2}\,dx = yze^{x^2} + h(y,z)$

$\frac{df}{dy} = ze^{x^2} \qquad f(x,y,z) = \int ze^{x^2}\,dy = zye^{x^2} + g(x,z)$

$\frac{df}{dz} = ye^{x^2} \qquad f(x,y,z) = \int ye^{x^2}\,dz = zye^{x^2} + w(x,y)$

$f(x,y,z) = zye^{x^2} + C$

$f(0,0,0) = 5 \qquad 0\cdot 0\cdot e^0 + C \qquad C = 5$

$f(x,y,z) = zye^{x^2} + 5$

$f(1,1,2) = 2e + 5$

***18.** Una ciclista sube una montaña a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura 7.2.16. Realiza una revolución alrededor de la montaña para llegar a la cima,

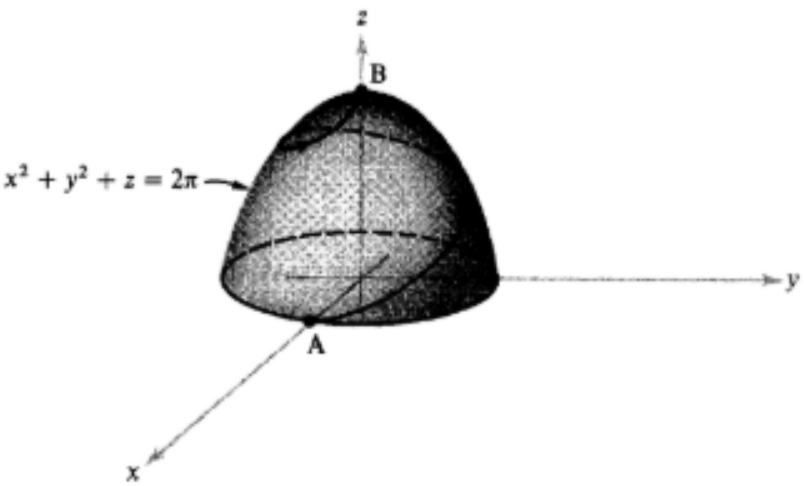


Figura 7.2.16 ¿Cuánto trabajo se realiza al subir en bicicleta esta montaña?

mientras que su velocidad de subida es constante. Durante el viaje, ella ejerce una fuerza descrita por el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = z^2\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}.$$

¿Cuál es el trabajo realizado por la ciclista al viajar de A a B?

Trabajo realizado para subir en bicicleta esta montaña:

$W = m \cdot g \cdot h = m \cdot 9.81 \frac{m^2}{s} \cdot 2\pi \qquad W = 70 Kg \left(9.81 \frac{m}{s^2}\right) 2\pi = 4310.5 \text{ J}$

$h = 2\pi - 0$

Trabajo ralizado para la ciclista al viajar de A a B:

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} 2r \cos(r^2)(1-(2\pi-r^2))(-2r)\,dr$$

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} -4r^2\cos(r^2)(1-2\pi+r^2)\,dr$$

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} -4r^4\cos(r^2) - 4(1-2\pi)r^2\cos r^2\,dr$$

$$\int r^4 \cos(r^2)\,dr = r^4 \frac{\operatorname{sen}(r^2)}{2r} - \int \frac{\operatorname{sen}(r^2)}{2r} 4r^3\,dr$$

$$\int r^2 \operatorname{sen}(r^2) = r^2\left[\frac{-\cos(r^2)}{2r}\right] + \underbrace{\int \cos(r^2)\,2r\,dr}_{\text{Función de Fresnel.}}$$

Tomado de los apuntes de clase.

Seccion 7.3

En los ejercicios 1 al 3, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie dada

3. $x = u^2, \quad y = u \operatorname{sen} e^v, \quad z = \frac{1}{3}u\cos e^v$, en $(13, -2, 1)$

Plano tangente:

$x = u^2 \quad y = u \operatorname{sen} e^v \quad z = \frac{1}{3} u \cos e^v \qquad \frac{dr}{du} = \left(2u, \operatorname{sen}(e^v), \frac{1}{3}\cos e^v\right)$

$u = \sqrt{13} \quad -2 = \sqrt{13} \operatorname{sen} e^v \quad z = \frac{1}{3}\sqrt{13}\cos e^v \qquad \frac{dr}{dv} = \left(0, u((\cos e^v)e^v), \frac{1}{3}u(-\operatorname{sen}(e^v)e^v)\right)$

$\frac{-2}{\sqrt{13}} = \operatorname{sen} e^v \qquad \frac{3}{\sqrt{13}} = \cos e^v$

$\frac{dx}{du} = 2\sqrt{13} \qquad \frac{dy}{du} = \frac{-2}{\sqrt{13}} \qquad \frac{dz}{du} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$

$\frac{dx}{dv} = 0 \qquad \frac{dy}{dv} = \sqrt{13}e^v \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 3e^v \qquad \frac{dz}{dv} = -\frac{1}{3}\sqrt{13}\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}e^v\right) = \frac{2}{3}e^v$

$r_u = \left(2\sqrt{13}, \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right) \qquad r_v = \left(0, 3e^v, \frac{2}{3}e^v\right)$

$n = r_u \times r_v \qquad n = \left(\frac{-13}{3\sqrt{13}}e^v, \frac{-4\sqrt{13}}{3}e^v, 6\sqrt{13}e^v\right)$

$$-\frac{13}{3\sqrt{13}}e^v(x-13) - \frac{4\sqrt{13}e^v}{3}(y+2) + 6\sqrt{13}e^v(z-1) = 0$$

$$-13(x-13) - 4\sqrt{13}(y+2) + 18\sqrt{13}(z-1) = 0$$

5. Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \cos v \operatorname{sen} u, \qquad y = \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \qquad z = \cos u$$

para u en $[0, \pi]$ y v en $[0, 2\pi]$. Identificar esta superficie.

$x = \cos v \operatorname{sen} u \quad y = \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \quad z = \cos u$

Una esfera con radio 1

$\frac{dx}{du} = \cos v \cos u \quad \frac{dy}{du} = \operatorname{sen} v \cos u \quad \frac{dz}{du} = -\operatorname{sen} u$

$\frac{dx}{dv} = -\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \quad \frac{dy}{dv} = \cos v \operatorname{sen} u \quad \frac{dz}{dv} = 0$

$$n = r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \cos v \operatorname{sen} u & \operatorname{sen} v \cos u & -\operatorname{sen} u \\ -\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u & \cos v \operatorname{sen} u & 0 \end{vmatrix}$$

$n = (\operatorname{sen} u \cos v \operatorname{sen} u)\, i - (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u)\, j + (\cos v \cos u \cos v \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v \cos u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u) K$

$n = (\operatorname{sen}^2 u \cos v)\, i + (\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v)\, j + (\cos u \operatorname{sen} u) K$

Normalizamos: $\hat{n} = \frac{n}{\|n\|} = (\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u)$

$\|n\| = \operatorname{sen} u$

10. Hallar la ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto indicado.

(a) $x = u^2, y = v^2, z = u^2 + v^2, u = 1, v = 1$

$\boxed{(b)}$ $z = 3x^2 + 8xy, x = 1, y = 0$

(c) $x^3 + 3xy + z^2 = 2, x = 1, y = \frac{1}{3}, z = 0$

a. $x = u^2 \quad y = v^2 \quad z = u^2 + v^2$

$\frac{dx}{du} = 2u \quad \frac{dy}{du} = 0 \quad \frac{dz}{du} = 2u \qquad (2,0,2) = r_u(1,1)$

$\frac{dx}{dv} = 0 \quad \frac{dy}{dv} = 2v \quad \frac{dz}{dv} = 2v \qquad (0,2,2) = r_v(1,1)$

$$N = r_u \times r_v \quad \begin{array}{ccc} i & j & K \\ 2 & 0 & 2 \\ & 2 & \end{array} = i(0.2-4) - j(4) + K(4) = (-4,4,4)$$

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$-2(x-1) - 2(y-1) + 2(z-2) = 0$

$-2x + 2 - 2y + 2 + 2z - 4 = 0$

$-2x - 2y + 2z = 0$

$-x - y + z = 0$

b. $z = 3x^2 + 8xy, \quad x = 1 \quad y = 0 \qquad z = 3$

$\frac{dz}{dx} = 6x + 8y \quad \frac{dz}{dy} = 8x \qquad z - 3 = 6(x-1) + 8(y)$

$(0,0,6) \quad (0,0,8) \qquad z = 6x - 3 + 8y$

c. $x^3 + 3xy + z^2 = 2 \qquad x = 1, y = \frac{1}{3}, z = 0 \qquad 4(x-1) + 3(y - \frac{1}{3}) = 0$

$\frac{d}{dx} = 3x^2 + 3y \qquad 4 \qquad 4x - 4 + 3y - 1 = 0$

$\frac{d}{dy} = 3x$ Validamos $3 \qquad 4x + 3y - 5 = 0$

$\frac{d}{dz} = 2z \qquad 0$

12. Dada una esfera de radio 2 con centro en el origen, hallar la ecuación para el plano que es tangente a ella en el punto $(1,1,\sqrt{2})$, considerando la esfera como:

(a) Una superficie parametrizada por $\Phi(\theta,\phi) = (2\cos\theta \operatorname{sen}\phi, 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 2\cos\phi)$;

(b) Una superficie de nivel de $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$; y

(c) La gráfica de $g(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

a. $\Phi(\theta,\phi) = (2\cos\theta \operatorname{sen}\phi, 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 2\cos\phi)$

$\Phi_\theta = (-2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 2\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0)$

$\Phi_\phi = (2\cos\theta\cos\phi, -2\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -2\operatorname{sen}\phi)$

Validamos en el punto. $(\theta,\phi) = \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Phi_\phi \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = (\qquad)$$

$$(x-1) + (y-1) + (z-\sqrt{2}) = 0$$

b. $x^2+y^2+z^2 = f(x,y,z)$

$\Delta f = (2x, 2y, 2z)$

$\Delta f(1,1,\sqrt{2}) = (2,2,\sqrt{2})$

$2(x-1) + 2(y-1) + 2\sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0$

$2x+2y+2\sqrt{2}z - 8 = 0$

$x + y + \sqrt{2}z = 4$

c. $z = g(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ $\qquad \frac{dg(x,y)}{dx} = \frac{-2x}{2(4-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}$ $\qquad \frac{dg(x,y)}{dy} = \frac{-2y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$\frac{dg(1,1)}{dx} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \frac{dg(1,1)}{dy} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z - \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1)$

$z = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2\sqrt{2}$

5. Sea $\Phi(u,v) = (u-v, u+v, uv)$ y sea D el disco unitario en el plano uv. Hallar el área de $\Phi(D)$.

Para encontrar el área total de la superficie $\Phi(D)$, integramos el área de estos pequeños parches sobre todo el dominio D:

$$\text{Área} = \iint_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du\,dv$$

$\Phi(u,v) = (u-v, u+v, uv)$

$\frac{d\Phi(u,v)}{du} = (1,1,v)$

$\frac{d\Phi(u,v)}{dv} = (-1,1,u)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & v \\ -1 & 1 & u \end{vmatrix} = (u-v, -u-v, 2) = N$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (2u^2+2v^2+4)^{1/2}\,du\,dv$$

$\|N\| = \sqrt{(u-v)^2 + (-u-v)^2 + 4}$

$= (2u^2+2v^2+4)^{1/2}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r^2+4)^{1/2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_4^6 u^{1/2}\,du\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{2u^{3/2}}{3}\Bigg]_4^6 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}\left(6^{3/2} - 4^{3/2}\right) d\theta$$

$u = 2r^2+4$

$du = 4r$

$$\text{Área} = 2\pi\,\frac{1}{6}(6\sqrt{6}-8) = \frac{\pi}{3}(6\sqrt{6}-8).$$

7. Mostrar que la superficie $x = 1/\sqrt{y^2+z^2}$, $1 \leq x < \infty$, ¡se puede llenar pero no pintar!

1. Volumen: $\quad r^2 = y^2 + z^2 = x^{-2}$

$$V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\left(-\frac{1}{x}\Big]_1^\infty\right) = \pi$$

Revolución

Finito.

2. Área:

$$r(x,\theta) = \left(x, \frac{\cos\theta}{x}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{x}\right)$$

$$\frac{dr}{dx} = \left(1, \frac{-\cos\theta}{x^2}, \frac{\cos\theta}{x^2}\right) \qquad \frac{dr}{d\theta} = \left(0, \frac{-\operatorname{sen}\theta}{x}, \frac{\cos\theta}{x}\right)$$

$$\frac{dr}{dx} \times \frac{dr}{d\theta} = \left(\frac{\cos^2\theta}{x^3} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{x^3}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{x^2}, \frac{-\cos\theta}{x^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x^3}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{x^2}, \frac{-\cos\theta}{x^2}\right)$$

$$\|N\| = \left(\frac{1}{x^6} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{x^4} + \frac{\cos^2\theta}{x^4}\right)^{1/2} = \frac{(1+x^2)^{1/2}}{x^3}$$

$$A = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}\, dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{1+(1/t)^2}}{t^3}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^5}\, dt}_{\text{Diverge}}$$

$$t = \frac{1}{x} \qquad dt = -\frac{1}{x^2}\, dx$$

Comparación

$$\int_0^1 \frac{1}{t^4}\, dt = -t^{-5}\Big]_0^1$$

Diverge.

Se puede llenar porque la integral de su volumen converge
No se puede pintar porque la integral del area diverge

11. Hallar el área de la superficie obtenida al girar la curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, alrededor del eje y.

$$r(x) = (x, x^2)$$

$$A = 2\pi \int_0^1 x \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2} dx \qquad \begin{aligned} u &= 1 + 4x^2 \\ du &= 8x\, dx \end{aligned}$$

$$2\pi \int_0^1 x\,(1+4x^2)^{1/2}\, dx$$

$$2\pi \int_1^5 \frac{du}{8}\, u^{1/2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2u^{3/2}}{3}\Big]_1^5\right) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

$\boxed{13.}$ Hallar el área de la superficie definida por $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

$$r(x,y) = (x, y, 1-x-y)$$

$$\frac{dr}{dx} = (1, 0, -1) \qquad \frac{dr}{dy} = (0, 1, -1)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1) \qquad |N| = \sqrt{3}$$

$$\iint_D \sqrt{3}\ dxdy = \sqrt{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2}}\, drd\theta = \frac{(\sqrt{3}\ 2\pi)}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{6}}{2}$$

15. Calcular el área de la superficie dada por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = 2r\cos\theta, \qquad z = \theta, \qquad 0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

$L(r,\theta) = (r\cos\theta,\ 2r\cos\theta,\ \theta) \qquad 0 \le r \le 1 \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ \frac{L}{dr} = (& \cos\theta, & 2\cos\theta, & 0) \\ \frac{L}{d\theta} = (& -r\,\text{sen}\,\theta, & -2r\,\text{sen}\,\theta, & 1) \end{array}$$

Valor absoluto

$N = (2\cos\theta,\ \cos\theta,\ \cancel{-2r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 2r\cos\theta\,\text{sen}\,\theta})$

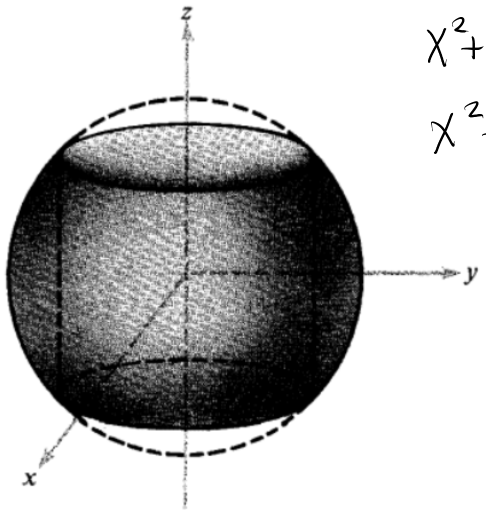
$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta = 4\,\text{sen}\,\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.4$

$\|N\| = \sqrt{4\cos^2\theta + \cos^2\theta}$

$\sqrt{5}\int_0^{2\pi}\int_0^1 |\cos\theta|\, drd\theta = 4\sqrt{5}$

$\|N\| = \sqrt{5}\,|\cos\theta|$

20. Se perfora un hoyo cilíndrico de radio 1 a traveś de una bola sólida de radio 2 para formar un acoplador anular, como se muestra en la figura 7.4.10. Hallar el volumen y el área de la superficie exterior de este acoplador.



$x^2 + y^2 + z^2 \le 4$

$x^2 + y^2 \le 1$

Figura 7.4.10 Hallar el área de la superficie y el volumen de la región sombreada.

$L(r,\theta,z) =$

$r^2 + z^2 \le 4$

$r^2 \le 1$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\, drdzd\theta = 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 4 - z^2 - 1 = 2\pi\left(3z - \frac{z^3}{3}\Big]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\right) =$$

$$\pi\left(3\sqrt{3} - \sqrt{3} - \left(-3\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)\right) =$$

$$\pi\left(2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}\pi$$

$r \le (4 - z^2)^{1/2}$

$r \le 1$

$1 \le r \le (4 - z^2)^{1/2}$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$-\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}$

Área de la superficie. $\qquad r = \sqrt{4 - z^2}$

$L(\theta, z) = (\sqrt{4-z^2}\cos\theta,\ \sqrt{4-z^2}\,\text{sen}\,\theta,\ z) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$\qquad z \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

$A = \int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dA \qquad dA = \sqrt{1 + \left(\frac{-z}{(4-z^2)^{1/2}}\right)^2}\ r\,dzd\theta$

$$dA = \sqrt{1+\frac{z^2}{4-z^2}}\, r\, dz\, d\theta \qquad dA = \sqrt{\frac{4}{\cancel{4-z^2}}}\cdot \cancel{\sqrt{4-z^2}}\, dz\, d\theta = 2\, dz\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\, dz\, d\theta = \left(2(2\sqrt{3})2\pi\right) = 8\pi\sqrt{3}$$

$$L(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z) \qquad z\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 1\, dz\, d\theta = (2\sqrt{3})\,2\pi = 4\pi\sqrt{3}$$

$$4\pi\sqrt{3} + 8\pi\sqrt{3} = 12\pi\sqrt{3}$$

Seccion 7.5

5. Evaluar $\int_S xyz\, dS$, donde S es el triángulo con vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,1,1)$.

$(1,0,0)$
$(0,2,0)$
$(0,1,1)$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}z$$

$$\Delta(t,z) = (1-t-z,\ 2t+z,\ z) \qquad z\in[0,1] \qquad t\in[0,1-z]$$

$$0 = 1-t-z \qquad t = 1-z$$

$$\frac{\Delta}{dt} = (-1, 2, 0) \qquad N = (2,-1,1)$$

$$\frac{\Delta}{dz} = -1, 1, 1 \qquad \|N\| = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{6}\int_0^1\int_0^{1-z} (1-t-z)(2t+z)(z)\, dt\, dz = \sqrt{6}\int_0^1\int_0^{1-z} 2zt + z^2 - 2zt^2 - z^2t - 2z^2t - z^3\, dt\, dz$$

$$\sqrt{6}\int_0^1\left(\frac{2t^2z}{2} + z^2t - \frac{2zt^3}{3} - \frac{3z^2t^2}{2} - \frac{z^4}{4}\Big]_0^{1-z}\right)dz$$

$$\sqrt{6}\int_0^1 (1-z)^2z + z^2(1-z) - \frac{2z(1-z)^3}{3} - \frac{3z^2(1-z)^2}{2} - \frac{z^4}{4}\, dz = \sqrt{6}\,\frac{1}{30} = \frac{1}{5\sqrt{6}}$$

$\boxed{7.}$ Evaluar $\int_S z\, dS$, donde S es la superficie $z = x^2+y^2$, $x^2+y^2 \le 1$.

$$L(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2) \qquad r\in[0,1] \quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$\frac{L}{dr} = \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2r$$

$$\frac{L}{d\theta} = -r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0$$

$$N = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\|N\| = (4r^4+r^2)^{1/2} \qquad \|N\| = r(4r^2+1)^{1/2}\, dr\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3(4r^2+1)^{1/2}\, dr\, d\theta \qquad u = 4r^2+1 \quad dr$$

$$du = 8r\,dr \qquad \frac{du}{8} = r\,dr$$

$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^1 u^{1/2}\frac{(u-1)}{4}\, du\, d\theta$$

$$\frac{1}{32}\int_0^{2\pi}\int_0^1 u^{3/2} - u\, du\, d\theta = \frac{1}{32}\int_0^{2\pi}\frac{5u^{5/2}}{2}\Big]_0^1 \cancel{d\theta} = \frac{1}{32}\int_0^{2\pi}\frac{5}{2}\, d\theta = \frac{5\pi}{32}$$

8. Evaluar $\int_S z^2\, dS$, donde S es la frontera del cubo $C = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$. (IDEA: Hacer cada cara por separado y sumar los resultados.)

Tapas en $z \pm 1$

$L(x,y) = (x, y, 1)$ $\quad$ $L(x,y) = (x, y, -1)$

$x \in [-1,1]$

$y \in [-1,1]$

$\frac{dL}{dx} = (1,0,0)$ $\quad N = (0,0,1)$ $\quad \|N\| = 1$ $\quad$ $\frac{dL}{dx} = (1,0,0)$ $\quad N = (0,0,1)$ $\quad \|N\| = 1$

$\frac{dL}{dy} = (0,1,0)$ $\quad$ $\frac{dL}{dy} = (0,1,0)$

$$\int_{-1}^{-1}\int_{-1}^{1} 1\, dx\,dy = 4 \qquad 4 \times 2 = 8 \text{ Ambas caras.}$$

Caras en $x \pm 1$, $y \pm 1$

$L(x,z) = (x, 1, z)$ $\quad$ $L(x,z) = (x,-1,z)$

$(1,0,0) \times (0,0,1)$ $\quad$ $(1,0,0) \times (0,0,1)$

$(0,1,0)$

$\|N\| = 1$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} z^2\, dz\,dx = \int_{-1}^{1} \left.\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{3}\, dx = \frac{4}{3} \text{ Una cara.}$$

$$\underbrace{\frac{4}{3}\cdot 4}_{\text{Cuatro caras}} = \frac{16}{3} \qquad \text{Superficie total: } \frac{16}{3} + \frac{24}{3} = \frac{40}{3}$$

13. Hallar las coordenadas x, y y z del centro de gravedad del octante de la esfera sólida de radio R, con centro en el origen, determinado por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. (IDEA: Escribir este octante como una superficie parametrizada —ver el ejemplo 3 de esta sección y el ejercicio 12.)

Centro de gravedad

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ $\quad \bar{x} = \iiint_V x\, dm \quad \bar{y} = \iiint_V y\, dm \quad \bar{z} = \iiint_V z\, dm$

$M = \iiint_V dm$ $\quad x = r\cos\theta\, r\operatorname{sen}\phi \quad y = r\operatorname{sen}\theta \cos\phi \quad z = r\cos\phi$

$dv = r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta$

Masa total:

$$M = \rho \int_0^R \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r^3 \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi\, dr = \frac{\rho\pi R^3}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\rho \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta = 1\right)\left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\phi\, d\phi = \frac{\pi}{4}\right)\left(\int_0^R r^3\, dr = \frac{R^4}{4}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{\rho\pi R^4}{16}}{\frac{\rho\pi R^3}{6}} = \frac{3R}{8} \qquad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{3R}{8}, \frac{3R}{8}, \frac{3R}{8}\right)$$

***18.** Sea S una esfera de radio r y $\mathbf{p}$ un punto dentro o fuera de la esfera (pero no en ella). Mostrar que

$$\int_S \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|}\,dS = \begin{cases} 4\pi r & \text{si} \quad \mathbf{p} \text{ está dentro de } S \\ 4\pi r^2/d & \text{si} \quad \mathbf{p} \text{ está fuera de } S \end{cases}$$

donde d es la distancia de $\mathbf{p}$ al centro de la esfera y la integración es sobre x.

Promedio:

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S \frac{1}{\|x-p\|}\,ds = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{si } p \text{ dentro} \\ \frac{1}{d} & \text{si } p \text{ fuera.} \end{cases}$$

$\Phi(\theta,\phi) = (r\,\text{sen}\phi\cos\theta,\ r\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta,\ r\cos\phi)$

$\theta \in [0, 2\pi]$ $\quad \phi \in [0, \pi]$

$$\Phi_\theta \times \Phi_\phi = \frac{r^2\,\text{sen}\phi\,(\text{sen}\phi\cos\theta,\ \text{sen}\phi\,\text{sen}\theta,\ \cos\phi)}{\|\text{sen}\phi\cos\theta,\ \text{sen}\phi\,\text{sen}\theta,\ \cos\phi\|}$$

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\Phi(\theta,\phi))\,\|\Phi_\theta\times\Phi_\phi\|\,d\theta\,d\phi$$

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2-2rp\cos\phi+p^2}}\,r^2\,\text{sen}\phi\,d\theta\,d\phi = 2\pi r^2\int_0^{2\pi}\frac{\text{sen}\phi}{\sqrt{r^2-2rp\cos\phi+p^2}}\,d\phi$$

$U = r^2 - 2rp\cos\phi + p^2$ $\quad d\phi$

$du = 2rp\,\text{sen}\phi\ \ d\phi$

$$= \frac{2\pi r^2}{2rp}\int_{(r-p)^2}^{(r+p)^2}\frac{du}{u^{1/2}} = \frac{\pi r}{p}\,2u^{1/2}\Big]_{(r-p)^2}^{(r+p)^2}$$

$$\frac{2\pi r}{p}\left(\sqrt{(r+p)^2}-\sqrt{(r-p)^2}\right) = \frac{2\pi r}{p}(|r+p|-|r-p|) = \frac{2\pi r}{p}\left(r+p-\begin{cases} r-p & 0<p<r \\ p-r & p>r\end{cases}\right) = \begin{cases} 4\pi r & 0<p<r \\ \frac{4\pi r^2}{p} & p>r\end{cases}$$

Seccion 7.6

$\boxed{1.}$ Sea la temperatura de un punto en $\mathbf{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = 3x^2+3z^2$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2+z^2=2$, $0\le y\le 2$, si $k=1$.

Flujo de calor: $\quad T(x,y,z) = 3x^2+3z^2$

$$\Phi = \iint \nabla T\cdot N\,ds \qquad \frac{dT}{dx} = 6x \quad \frac{dT}{dz} = 6z$$

$L(\theta,y) = (\sqrt{2}\cos\theta,\ y,\ \sqrt{2}\,\text{sen}\theta)$

$\frac{dL}{d\theta} = (-\sqrt{2}\,\text{sen}\theta,\ 0,\ \sqrt{2}\cos\theta)$

$\frac{dL}{dy} = (0, 1, 0)$

$N = (-\sqrt{2}\cos\theta,\ 0,\ -\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta)$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (6x,\ 0,\ 6z)\cdot(-\sqrt{2}\cos\theta, 0, -\sqrt{2}\,\text{sen}\theta)\,dy\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -6\sqrt{2}\,(\cos^2\theta,\ 0,\ \text{sen}^2\theta)\,dy\,d\theta$$

$$= -6\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 1\,dy\,d\theta = -6\sqrt{2}\int_0^{2\pi} y\Big]_0^2 d\theta = -6\sqrt{2}\int_0^{2\pi} 2\,d\theta = -24\pi\sqrt{2}$$

3. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$ y su base $x^2+y^2\le 1$ $z=0$. Sea $\mathbf{E}$ el campo eléctrico definido por $\mathbf{E}(x,y,z) = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$. Hallar el flujo eléctrico a través de S. (IDEA: Romper S en dos partes S_1 y S_2 y evaluar $\int_{S_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$ y $\int_{S_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$ por separado.)

Teorema de la divergencia:

$E(x,y,z) = 2z, 2y, 2z$

$\nabla\cdot E = 0, 2, 2 = 4$

$$\iiint_V \nabla\cdot E = \iint_{S_1} E\,ds + \iint_{S_2} E\,ds$$

$$\iiint_V 4\,dv = 4\cdot\text{Área de la esfera} = 4\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

Media esfera

4. Sea el campo de velocidad de un fluido descrito por $\mathbf{F} = \sqrt{y}\mathbf{j}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo están cruzando la superficie $x^2 + z^2 = y$, $0 \le y \le 1$, en la dirección en que y crece.

$L(\theta, y) = (\sqrt{y}\cos\theta, y, \sqrt{y}\,\text{sen}\,\theta)$

$\frac{dL}{d\theta} = (-\sqrt{y}\,\text{sen}\,\theta, 0, \sqrt{y}\cos\theta)$

$\frac{dL}{dy} = (\frac{1}{2}y^{-1/2}\cos\theta, 1, \frac{1}{2}y^{-1/2}\,\text{sen}\,\theta)$

$N = (\sqrt{y}\cos\theta, \frac{1}{2}, -\sqrt{y}\,\text{sen}\,\theta)$

$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (0, y^{1/2}, 0)(\sqrt{y}\cos\theta, \frac{1}{2}, -\sqrt{y}\,\text{sen}\,\theta)\,dy\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{y}\,dy\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2y^{3/2}}{3}\Big|_0^1 d\theta = \frac{2}{3}\pi$

$\boxed{6.}$ Evaluar $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ y S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \ge 0$. (Hacer que n, la normal unitaria, apunte hacia arriba.)

$L(\theta, \phi) = (4\cos\theta\,\text{sen}\,\phi, 4\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi, 4\cos\phi)$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi/2$

$\oint_C F\,dr = \iint_S (\nabla \times F)\,ds$

$\nabla \times F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ x^2+y-4 & 3xy & 2xz+z^2 \end{pmatrix} = (0, (2z - 0), 3y - 1) = (0, -2z, 3y - 1)$

$\frac{dL}{d\theta} = (-4\,\text{sen}\,\theta\cos\phi, 4\cos\theta\,\text{sen}\,\phi, 0)$

$\frac{dL}{d\phi} = (4\cos\theta\cos\phi, 4\,\text{sen}\,\theta\cos\phi, -4\,\text{sen}\,\phi)$

$N = 16\,\text{sen}\,\phi(\text{sen}\,\phi\cos\theta\,i + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,j + \cos\phi\,k)\,d\phi\,d\theta$

$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (0, -2z, 3y-1)\cdot(16\,\text{sen}\,\phi(\text{sen}\,\phi\cos\theta\,i + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,j + \cos\phi\,k))\,d\phi\,d\theta$

$W = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} -8\cos\phi(16\,\text{sen}^2\phi\,\text{sen}\,\theta) + (12\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi - 1)(16\,\text{sen}\,\phi\cos\phi)\,d\phi\,d\theta$

$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (-128\cos\phi\,\text{sen}^2\phi\,\text{sen}\,\theta + 192\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}^2\phi\cos\phi - 16\,\text{sen}\,\phi\cos\phi)\,d\phi\,d\theta$

$-128\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\phi\,\text{sen}^2\phi\,\text{sen}\,\theta\,d\phi\,d\theta = -128\int_0^{2\pi}\text{sen}\,\theta\int_0^1 u^2\,du = -128\int_0^{2\pi}\text{sen}\,\theta\,d\theta\,\frac{1}{3} = 0$

$192\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \text{sen}\,\theta\,\text{sen}^2\phi\cos\phi\,d\phi\,d\theta = 0$

$-16\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\phi\,\text{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta = -16 \cdot 2\pi\int_0^1 u\,du = -16\pi$

$W = -16\pi$

8. Están construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. Los planos del arquitecto se muestran en la figura 7.6.11.

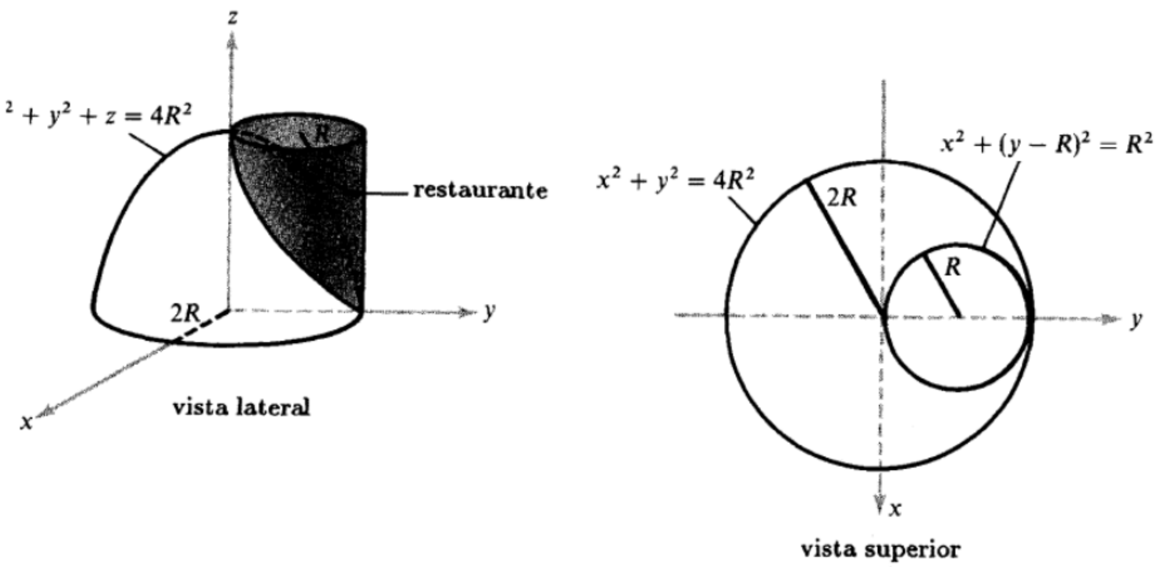


Figura 7.6.11 Planos del restaurante.

(a) La pared vertical curvada del restaurante será hecha de vidrio. ¿Cuál será el área de superficie de esta pared?

$X^2+Y^2+Z=4R^2 \qquad X^2+(Y-R)^2=R^2 \qquad X = R\cos\theta$

$Y-R = R\,\text{sen}\,\theta$

$L(\theta,Z) = (R\cos\theta,\ R\,\text{sen}\,\theta + R,\ Z)$

$Z = 4R^2 - (R^2\cos^2\theta + R^2\text{sen}^2\theta + 2R^2\text{sen}\,\theta + R^2)$

$Z = 4R^2 - R^2 - R^2 - 2R^2\text{sen}\,\theta$

$Z = 2R^2 - 2R^2\,\text{sen}\,\theta$

$2R^2 - 2R^2\text{sen}\,\theta \le Z \le 4R^2$

$$\int_0^{2\pi}\int_{R^2-2R^2\text{sen}\theta}^{4R^2} R\, dz\, d\theta = R\int_0^{2\pi} 4R^2 - 2R^2 + 2R\,\text{sen}\,\theta\ d\theta = R(2\pi(2R^2 + 2R(0)) = 4\pi R^3$$

(b) El ingeniero consultor informa al planificador que para ser costeable, el volumen del interior debe exceder $\pi R^4/2$. ¿Para qué R satisface este requerimiento la estructura propuesta?

$L(\theta,R,Z) = (R\cos\theta,\ R\,\text{sen}\,\theta + R,\ Z) \qquad R \in [0,R]$

$\theta \in [0,2\pi]$

Jacobiano $= r + r\,\text{sen}\,\theta \qquad Z \in [R^2 - 2R^2\text{sen}\,\theta,\ 4R^2]$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_{4R^2-(2r^2+2r\text{sen}\theta)}^{4R^2} r + r\,\text{sen}\,\theta\ dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R (r + r\,\text{sen}\,\theta)(4R^2 - 4R^2 + 2r^2 + 2r\,\text{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R 4R^2r - 2r^3 - 2r^2\text{sen}\,\theta + 4rR^2\text{sen}\,\theta - 2r^2\text{sen}^2\theta\ dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} 2R^2r^2 - \frac{r^4}{2} - \frac{2r^3\text{sen}\,\theta}{3} + 2r^2R^2\text{sen}\,\theta - \frac{2r^3\text{sen}^2\theta}{3}\Big]_0^R d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} 2R^4 - \frac{R^4}{2} - \frac{2R^3\text{sen}\,\theta}{3} + 2R^4\text{sen}\,\theta - \frac{2R^3\text{sen}^2\theta}{3}\ d\theta$$

$\pi R^4 + \frac{2}{3}\pi R > \frac{\pi R^4}{2} \qquad \frac{2}{3}\pi R > -\frac{\pi}{2}R^4 \qquad \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2}R^3\right)R > 0 \qquad R > 0.$

(c) **Durante un típico día de verano los alrededores del restaurante están sujetos a un campo de temperatura dado por**

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2.$$

Una densidad de flujo de calor $\mathbf{V} = -k\nabla T$ (k es una constante que depende del grado de aislamiento a usarse) a través de todos los lados del restaurante (incluyendo el techo y el contacto con la montaña) produce un flujo de calor. ¿Cuál es el flujo total de calor? (La respuesta dependerá de R y k.)

Flujo de calor: $T(X,Y,Z) = 3X^2 + (Y-R)^2 + 16Z^2$

Superior:

$F = (6X,\ 2(Y-R) + 32Z)$

$V = -K\nabla T = -KF$

$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta + R,\ 4R^2)$ $\quad 0 \le r \le R$, $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$\quad\quad i \quad\quad j \quad\quad k$

$\Phi_r = (\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$

$N = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta$

$\Phi_\theta = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\cos\theta,\ 0)$ $\quad N = 0, 0, r$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R 32\cdot 4R^2 r\, dr\, d\theta = -K\int_0^{2\pi} 64R^4 = -128K\pi R^4$$

Interior montaña: $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta + R,\ 4R^2 - (2r^2 + 2r\,\mathrm{sen}\,\theta))$

$\Phi_\theta = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\cos\theta,\ -r\cos\theta)$

$\Phi_r = (\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ -4r - 2\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$N = (-4r^2\cos\theta,\ 2r + 4r^2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r)$

$$= -K\int_0^{2\pi}\int_0^R -24r^3\cos^2\theta + 4r^2\,\mathrm{sen}\,\theta + 8R^3\,\mathrm{sen}^2\theta + 128R^2 r - 64r^3 - 64r^3 - 64r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\ d\theta\, dr$$

$$= -K\int_0^R -24r^3\pi + 8r^3\pi + 256R^2 r\pi - 128r^3\pi\ dr = -92R^4\pi K$$

Pared.

$$= -K\int_0^{2\pi}\int_{2R^2 - 2r\,\mathrm{sen}\,\theta}^{4R^2} 5R^2\cos^2\theta + 2R^2\,\mathrm{sen}^2\theta\ dz\, d\theta$$

$$= -K\int_0^{2\pi}(4R^2 - 2R^2 - 2r\,\mathrm{sen}\,\theta)(5R^2\cos^2\theta + 2R^2\,\mathrm{sen}^2\theta)\, dz\, d\theta$$

$= -20K\pi R^4$

Flujo total: $-20K\pi R^4 - 92R^4\pi K - 64\pi R^3 K - 112K\pi R^4$

15. **Sea el campo de velocidad de un fluido, descrito por $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan la superficie descrita por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$.**

$L(\theta,\phi) = (\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ \cos\phi)$

Radio unitario

$\theta \in [0, 2\pi]$

$\phi \in [0, \pi/2]$

$N = (\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ \cos\phi)$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (1,\ \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ \cos\phi)(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\ \ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi;\ \cos\phi)\ d\phi\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}^2\phi \cos\theta \operatorname{sen}\theta + \cos^2\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\phi = 0 \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\phi \, d\phi \, d\theta = 0$$

$$I_3 = 2\pi \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \right) = 2\pi \left(\int_1^0 u^2 \cdot du \right) = \frac{2\pi}{3}$$

16. (a) Un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo (lluvia fuerte) se describe por el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, , z) = (0, 0, -1)$. Hallar el flujo total a través del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

$L(\theta, R) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r)$ $\qquad R \in [0,1]$

$\frac{dL}{d\theta} = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$ $\qquad \theta \in [0, 2\pi]$.

$\frac{dL}{dr} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)$

$N: (r\cos\theta, +r\operatorname{sen}\theta, -r\operatorname{sen}^2\theta - r\cos^2\theta)$

$(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, -r)$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{(i, j, -r\operatorname{sen}^2\theta - r\cos^2\theta)}{r\sqrt{2}}(0,0,-1)\, ds\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{-1}{\sqrt{2}} r\sqrt{2}\, dr\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 -r\, dr\, d\theta = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi.$$

(b) Debido al fuerte viento, la lluvia cae de lado, de manera que forma un ángulo de 45°, y se describe por $\mathbf{F}(x, y, z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. ¿Cuál es ahora el flujo a través del cono?

$\iiint_V \nabla \cdot F \, dv = 0$ $\qquad$ Dado el teorema.

$\iint_{S_1 \cup S_2} F \cdot ds = 0 \qquad \iint_{S_1} F\cdot ds + \iint_{S_2} F \cdot ds = 0 \qquad \iint_{S_1} F \cdot ds = -\iint_{S_2} F \cdot ds$

$-\iint_{S_2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (0,0,-1)\, dA = \frac{-\sqrt{2}}{2}\pi.$ $\qquad$ S_2 es la tapa.

Seccion 8.1

3. Verificar el teorema de Green para el disco D con centro $(0, 0)$ y radio R y las funciones:

(a) $P(x, y) = xy^2, Q(x, y) = -yx^2$

$\boxed{\text{(b)}}$ $P(x, y) = x + y, Q(x, y) = y$

(c) $P(x, y) = xy = Q(x, y)$

(d) $P(x, y) = 2y, Q(x, y) = x$

Teorema de Green:

$$\oint F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) dA.$$

Parametrizamos: $(R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta, 0)$

a. $P(x,y) = xy^2 \qquad Q(x,y) = -yx^2$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R (-2xy - 2xy) \cdot dx\,dy = -4\int_0^{2\pi}\int_0^R R^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta = -R^4 \int_0^{2\pi}\int_0^R \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 0$$

b. $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = y$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R} -1 \, dA = -\pi R^2$$

c. $P(x,y) = xy = Q(x,y)$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R} y - x \, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^2(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 0$$

d. $P(x,y) = 2y$ $\quad Q(x,y) = x$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R} 1 - 2 \, dA = -\pi R^2$$

12. Sea $P(x,y) = -y/(x^2+y^2)$, $Q(x,y) = x/(x^2+y^2)$. Suponiendo que D sea el disco unitario, investigar por qué falla el teorema de Green para esta P y Q.

$D \quad r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$F = (-y/x^2+y^2, \; x/x^2+y^2)$

$F_1 = \dfrac{-y}{x^2+y} \qquad F_2 = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$x = 0$
$y = 0$ Pertenecen a nuestro disco.

No hay derivadas parciales continuas en este punto.

Nuesto teorema de Green dice que tenemos que tener una función vectorial suave.

Con derivadas parciales continuas en el conjunto abierto que contiene a D.

18. Probar la identidad

$$\int_{\partial D} \phi \nabla\phi \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_D (\phi\nabla^2\phi + \nabla\phi \cdot \nabla\phi)\, dA.$$

Dado un campo escalar $\phi(x,y)$, llegamos al campo vectorial:

$F = \phi \nabla \phi$

$\nabla\phi = \left(\dfrac{d\phi}{dx}, \dfrac{d\phi}{dy}\right)$

$F = \left(\phi \dfrac{d\phi}{dx}, \phi\dfrac{d\phi}{dy}\right)$, Teorema divergencia

$$\oint_{\partial D} F \cdot n\, ds = \int_D \nabla \cdot F \, dA$$

$\oint_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot n\, ds$

$$\nabla F = \frac{d}{dx}\left(\phi \frac{d}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\phi\frac{d}{dy}\right)$$

$$\nabla F = \phi \frac{d^2\phi}{dx^2} + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \phi\frac{d^2\phi}{dy} + \left(\frac{d\phi}{dy}\right)^2$$

Usando laplaciano $\nabla^2\phi = \dfrac{d^2\phi}{dx^2} + \dfrac{d^2\phi}{dy^2}$

$$\nabla \cdot F = \phi\nabla^2\phi + |\nabla\phi|^2$$

Entonces.

$$\oint_{\partial D} \phi\nabla\phi \cdot n\, ds = \int_D (\phi\nabla^2\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\phi)\, dA.$$

19. Usar el teorema de Green para hallar el área de un lazo de la rosa de cuatro hojas $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$. (IDEA: $x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$.)

Area a partir del teorema de Green. $A = \iint_D dA$

$P = -y/2 \qquad Q = x/2$

$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ El area.

Green expresa el area cuando $\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = 1$

$r = 3\operatorname{sen}(2\theta)$

$$A = \oint \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \oint \frac{1}{2} r^2\,d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)\,d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta$$

$$\frac{9}{4}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{4}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{9}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{8}$$

20. Mostrar que si C es una curva cerrada simple que acota una región en la cual se aplica el teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por C es

$$A = \int_{\partial D} x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx.$$

$P = 0 \quad Q = x$

$\frac{dQ}{dx} = 1$

$\frac{dP}{dy} = 0$

$\oint_{\partial D} x\,dy = \iint_D dA = \text{Area } D.$

$\theta(x, y) = (y, 0) \qquad \frac{dQ}{dx} = 0 \quad \frac{dP}{dy} = 1$

$\int_{\partial D} y\,dx = \iint_D -1\,dA = -\text{Area } D.$

Seccion 8.2

5. Sea S la superficie cilíndrica con tapa mostrada en la figura 8.2.8. S es la unión de dos superficies S_1 y S_2, donde S_1 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \geq 1$. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x)\mathbf{i} + (z^3yx + y)\mathbf{j} + z^4x^2\mathbf{k}$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$. (IDEA: El teorema de Stokes se cumple para esta superficie.)

$\iint_S (\nabla \times F)\,ds = \oint_{\partial S} F \cdot dr$

Contorno parametrizado:

$r(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$\frac{dr}{d\theta} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$

$$\int_0^{2\pi} (2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = 0$$

Intervalos completo de 0 a 2π para $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

7. Evaluar la integral $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la parte de la superficie de una esfera definida por $x^2+y^2+z^2=1$ y $x+y+z \geq 1$, donde $\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

Teorema de Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot ds = \oint_c F \cdot dr$$

$F = r \times (i+j+k)$

$$F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y-z, z-x, x-y)$$

$\nabla \times F = 0, 0, 0$

$$\iint_S \nabla \times F \, ds = 0$$

Parametrizar:

$x^2+y^2+z^2=1$ y $x+y+z=1$

$z = 1-x-y$

$$c(t) = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} t, \frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t+\operatorname{sen} t) \right)$$

$t \in [0, 2\pi]$

10. Hallar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ donde S es el elipsoide $x^2+y^2+2z^2=10$ y $\mathbf{F} = (\operatorname{sen} xy)\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$.

Teorema de Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot ds = \oint_c F \cdot dr$$

No tiene frontera, entonces es

$ds = \overset{0}{\phi}$

S es un elipsoide cerrado, dado eso por el teorema de la divergencia, su

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot ds = \iiint_V \nabla (\nabla \times F) \, dv$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ \operatorname{sen}(xy) & e^x & -yz \end{vmatrix} = (-z-0), (0-0), (e^x - \cos(xy)x)$$

$\nabla \, (-z-0), (0-0), (e^x - \cos(xy)x) = (0,0,0)$

11. Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$. Evaluar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dA$, donde S es la superficie $x^2+y^2+z^2=1$, $z \leq 0$.

$x^2+y^2=1 \quad z=0$ Borde.

$x = \cos t \quad y = \operatorname{sen} t \quad z = 0$

$dr = \frac{dr}{dt} dt = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) dt$ F en C: $yi - xj + 0k = (\operatorname{sen} t \, i - \cos t \, j)$

$F \cdot dr = (\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \, dt$
$= \operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t \, dt$

$$\oint_c \operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t \, dt = \pi - \pi = 0$$

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot n \, dA = 0$$

Seccion 8.3

3. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz + \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$. Hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

$\frac{df}{dx} = 2xyz + \operatorname{sen}(x)$ Integramos dx $= x^2yz - \cos(x) + C(y,z)$ $\frac{d}{dy}$ $x^2z + c$ $C(y,z) = 0$

$\frac{df}{dy} = x^2z$ Integramos dy $= x^2yz + C(x,z)$ $2xyz$

$\frac{df}{dz} = x^2y$ Integramos dz $= x^2yz + C(z,y)$

$x^2yz - \cos(x)$

9. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (e^x \cos y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Evaluar la integral $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t^3, \exp\sqrt{t})$, $0 \le t \le 1$.

$F = \nabla f$

$\frac{df}{dx} = e^x \operatorname{sen} y$ $\quad e^x \operatorname{sen} y + C(y,z)$ $\quad f = \frac{z^3}{3} + e^x \operatorname{sen} y$ Punto inicial y final.

$\frac{df}{dy} = e^x \cos y$ Integramos $e^x \operatorname{sen} y + C(x,z)$ $\quad I = (0,0,1)$

$F = (1,1,e)$

$\frac{df}{dz} = z^2$ $\quad \frac{z^3}{3} + C(x,y)$

$\frac{e^3}{3} + e \operatorname{sen}(1) - \frac{1}{3}$

11. La masa de la Tierra es aproximadamente 6×10^{27} g y la del Sol es 330,000 veces mayor. La constante gravitacional es $6.7 \times 10^{-8}\ \mathrm{m^3/s^2 \cdot g}$. La distancia de la Tierra al Sol es alrededor de 1.5×10^{12} cm. Calcular, aproximadamente, el trabajo necesario para incrementar la distancia de la Tierra al Sol en 1 cm.

La energía potencial gravitacional U entre dos masas M y m separadas por una distancia r.

$U = -\frac{GMm}{r}$ $\quad$ G: Constante gravitacional

El trabajo necesario para cambiar la distancia entre la tierra y el sol de r a $r+\Delta r$ es igual a.

$W = \Delta U = U(r+\Delta r) - U(r)$

Sustituyendo para U.

$W = \frac{-GMm}{r+\Delta r} + \frac{GMm}{r}$ $\quad$ Aproximando: $W = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\Delta r}\right) \approx GMm\,\frac{\Delta r}{r^2}$

Sustituimos:

Sol $M = 330{,}000 \times 6 \times 10^{27}$ g

Tierra $m = 6 \times 10^{27}$

$G = 6{,}7 \times 10^{-8}\ \frac{m^3}{s^2} \cdot g$

$r = 1.5 \times 10^{12}$ cm

$\Delta r = 1$ cm

$W \approx (6{,}7 \times 10^{-2}) \times (330{,}000 \times 6 \times 10^{27}) \times (6 \times 10^{27}) \times \frac{1}{(1.5 \times 10^{12})^2}$

$\approx (6{,}7 \times 10^{-2}) \times (330{,}000 \times 6 \times 6) \times 10^{30}$

$\approx (6{,}7 \times 10^{-2}) \times (11{,}800{,}000) \times 10^{30}$

$\approx 6{,}7 \times 11{,}800{,}000 \times 10^{28}$

$\approx 79{,}596{,}000 \times 10^{28}$

$W \approx 7{,}96 \times 10 \times 10^{35}$ ergios

13. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales **F** en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

(a) $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$\boxed{\text{(b)}}$ $\mathbf{F}(x,y) = xy\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{F}(x,y) = (x^2+y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$

$F = \nabla f$

a. $\frac{dF}{dx} = x$ Integramos: $\frac{x^2}{2} + C(y)$

$\frac{dF}{dy} = y$ $\frac{y^2}{2} + C(x)$

$f = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

b. $\frac{dF}{dx} = xy$ Integramos $\frac{x^2 y}{2} + C(y)$

$\frac{dF}{dy} = xy$ $\frac{xy^2}{2} + C(x)$

$\nabla \times F = \frac{d\, xy}{dx} - \frac{d\, yx}{dy} = y - x \neq 0$

No es conservativo

c. $\frac{dF}{dx} = x^2+y^2$ Integramos $\frac{x^3}{3} + xy^2 + C(y)$

$\frac{dF}{dy} = 2xy$ $xy^2 + C(x)$

$C(x) = \frac{x^3}{3}$

$\nabla \times F = \frac{d\,(2xy)}{dx} - \frac{d\,(x^2+y^2)}{dy}$

$\nabla \times F = 2y - 2y = 0$

$f = \frac{x^3}{3} + xy^2$

15. Mostrar que los siguientes campos vectoriales son conservativos. Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ para la curva dada.

(a) $\mathbf{F} = (xy^2+3x^2y)\mathbf{i} + (x+y)x^2\mathbf{j}$; C es la curva que está formada por los segmentos de recta de $(1,1)$ a $(0,2)$ a $(3,0)$.

a. $F = \nabla f$ $\frac{dF}{dx} = xy^2 + 3x^2y$ Integramos $\frac{x^2y^2}{2} + x^3y + C(y)$

$\frac{dF}{dy} = x^3 + yx^2$ $x^3y + \frac{y^2x^2}{2} + C(x)$

$f = \frac{x^2y^2}{2} + x^3y \Big]_{1,1}^{(3,0)} = 0 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{-3}{2}$

$\boxed{\text{(b)}}$ $\mathbf{F} = \frac{2x}{y^2+1}\mathbf{i} - \frac{2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}\mathbf{j}$; C está parametrizada por $x = t^3 - 1$, $y = t^6 - t$, $0 \le t \le 1$.

$\frac{dF}{dx} = \frac{2x}{y^2+1}$ Integramos $\frac{x^2}{y^2+1} + C(y)$ $x^2(y^2+1)^{-1} = \frac{-x^2}{(y^2+1)^2} \cdot 2y$

$\frac{dF}{dy} = \frac{-2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}$ $\frac{(x^2+1)}{(y^2+1)} + C(x)$ $\frac{2x}{y^2+1}$

$f = \frac{(x^2+1)}{(y^2+1)} \Big]_{(-1,0)}^{(0,0)} = 1 - 2 = -1$ $C(y) = \frac{1}{y^2+1}$ $C(x) = C.$

(c) $\mathbf{F} = [\cos(xy^2) - xy^2 \operatorname{sen}(xy^2)]\mathbf{i} - 2x^2y \operatorname{sen}(xy^2)\mathbf{j}$; C es la curva (e^t, e^{t+1}), $-1 \le t \le 0$.

$\frac{dF}{dx} = \cos(xy^2) - xy^2 \operatorname{sen}(xy^2)$ Integramos $x\cos(y^2x) + C(y)$

$\frac{dF}{dy} = -2x^2y \operatorname{sen}(xy^2)$ $x\cos(y^2x) + C(x)$

$$x\cos(y^2x)\Big]_{(e^{-1},1)}^{(1,e^2)} = \cos(e^4) - \frac{\cos(1/e)}{e}$$

17. ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotacional de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

(a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$\frac{dF_3}{dy} - \frac{dF_2}{dz} = x$$

$$-\frac{dF_3}{dx} + \frac{dF_1}{dz} = y$$

$$\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} = z$$

$\nabla F = 1+1+1 = 3 \neq 0$

El rotacional de cualquier campo vectorial siempre tiene divergencia 0.

No hay F.

(b) $\mathbf{F} = (x^2+1)\mathbf{i} + (z-2xy)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$

$$\frac{dF_3}{dy} - \frac{dF_2}{dz} = x^2+1$$

$$\frac{dF_3}{dx} - \frac{dF_1}{dz} = z - 2xy$$

$$\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} = y$$

Asumimos que $F_3 = 0$

$-\frac{F_2}{dz} = x^2+1$ Integramos F_2: $-z(x^2+1) + C(x,y)$

$\frac{dF_1}{dz} = z - 2xy$ F_1: $\frac{z^2}{2} - 2xyz + C_1(x,y)$

$$\left(-2zx + \frac{C(x,y)}{dx}\right) + 2xz - \frac{C_1(x,y)}{dy} = y \qquad C(x,y) = y$$

$F_1 = \frac{1}{2}z^2 - 2xyz$

$F_2 = -(x^2+1)z + xy$

$F_3 = 0$

21. Sea $\mathbf{F} = (x\cos y)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} y)\mathbf{j} + (\operatorname{sen} x)\mathbf{k}$. Hallar $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

$$\frac{dF_3}{dy} - \frac{dF_2}{dz} = x\cos y$$

$$-\frac{dF_1}{dz} + \frac{dF_3}{dx} = -\operatorname{sen} y$$

$$\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} = \operatorname{sen} x$$

Asumimo $F_2 = 0$

$\frac{dF_3}{dy} = x\cos y$ Integramos F_3: $x\operatorname{sen} y + C(x,z)$

$\frac{dF_1}{dy} = -\operatorname{sen} x$ F_1: $-y\operatorname{sen} x + C(x,z)$

$$\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{dx} + \frac{C(x,z)}{dx}\right) - \left(\frac{F_1}{dz} + \frac{C(x,z)}{dz}\right) = \operatorname{sen} y + \frac{C(x,z)}{dx} - \frac{C(x,z)}{dz} = -\operatorname{sen} y$$

constantes.

$G = (F_1, F_2, F_3) = (-y\operatorname{sen} x, 0, x\operatorname{sen} y)$

Seccion 8.4:

3. Evaluar $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y Ω es el cubo unitario (en el primer octante). Realizar directamente los cálculos y verificar usando el teorema de la divergencia.

Seis caras:

1. Cara $x=0$ Vector normal $: -i$

$F\cdot(-i) = -x = 0$

$\iint_S 0 \, dydz = 0$

2. Cara $x=1$ Vector normal $: i$

$F\cdot(i) = x = 1$

$\int_0^1\int_0^1 1 \, dydz = 1$

3. Cara $y=0$ Vector normal $: -j$

$F\cdot(-j) = -y = 0$

$\iint_S 0 \, dxdz = 0$

4. Cara $y=1$ Vector normal $: j$

$F\cdot(j) = y = 1$

$\int_0^1\int_0^1 1 \, dxdz = 1$

4. Cara $z=0$ Vector normal $: -K$

$F\cdot(-K) = -z = 0$

$\iint_S 0 \, dxdy = 0$

Cara $z=1$ Vector normal $: K$

$F\cdot(K) = z = 1$

$\int_0^1\int_0^1 1 \, dxdy = 1$

Suma de todas las integrales $= 3$

Teorema de la divergencia: $\nabla F = 1+1+1 = 3$

$\iiint_\Omega 3 \, dv = 3\times 1 = 3$

5. Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$. Evaluar $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ para cada una de las siguientes regiones Ω:
(a) $x^2+y^2 \le z \le 1$
(b) $x^2+y^2 \le z \le 1$ y $x \ge 0$
(c) $x^2+y^2 \le z \le 1$ y $x \le 0$

$\int_{d\Omega} F\cdot dS = \int_\Omega \nabla\cdot F \, dv$ Divergencia $\nabla\cdot F = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy} + \frac{dxz}{dz} = x$

a. $\int x \, dv$ $x = r\cos\theta$ $y = r\operatorname{sen}\theta$ z

$x^2+y^2 < z < 1$ $0 \le r \le$ $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r^2\cos\theta \, dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos\theta)(1-R^2) \, drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos\theta - r^4\cos\theta \, drd\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\left(\int_0^1 r^2 - r^4 \, dr\right) d\theta = 0\cdot\left(\int_0^1 r^2 - r^4 \, dr\right) = 0$$

b. $R^2 \leq z \leq 1 \quad x > 0$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1\int_{r^2}^1 r^2\cos\theta \, dz\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 r^2\cos\theta\,(1-r^2)\,dr\,d\theta =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 r^2\cos\theta - r^4\cos\theta \, dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\int_0^1 r^2 - r^4 \, dr\,d\theta =$$

$$\operatorname{Sen}\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 \qquad \frac{r^3}{3}\Big]_0^1 - \frac{r^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}.$$

C. $r^2 \leq z \leq 1 \quad \theta \in [\pi/2, \frac{3\pi}{2}]$

$$\operatorname{Sen}\theta\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = -2 \qquad -2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{-4}{15}$$

Pero la integral $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\theta\,d\theta = 0$ Es cero dado el producto.

Area positiva - Area negativa.

8. Evaluar $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ y S es la superficie de la esfera unitaria.

Teorema de la divergencia:

$$\int_S F\cdot ds = \int_V (\nabla\cdot F)\,dv \qquad \nabla\cdot F = \frac{d\,3xy^2}{dx} + \frac{d\,3x^2y}{dy} + \frac{dz^3}{dz}$$

$$\nabla\cdot F = 3y^2 + 3x^2 + 3z^2$$

$$\int_V 3(x^2+y^2+z^2)\,dv =$$

$$\int_V 3\,dv = 3\cdot\frac{4}{3}\pi = 4\pi$$

9. Evaluar $\iint_{\partial W}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$, donde $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ y W es el cubo unitario en el primer octante. Efectuar directamente los cálculos y verificar usando el teorema de la divergencia.

$$\int_W F\cdot n\,dA = \int_W \nabla\cdot F\,dv$$ Teorema divergencia

$$\nabla\cdot F = 1+1-1 = 1$$

$$\int_W 1\,dv = 1.$$ Volumen del cubo unitario

$\boxed{\textbf{10.}}$ Evaluar la integral de superficie $\iint_{\partial S}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$, donde $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}+\mathbf{j}+z(x^2+y^2)^2\mathbf{k}$ y ∂S es la superficie del cilindro $x^2+y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

$$\int_S F\cdot n\,dA = \int_V \nabla\cdot F\,dv \qquad \nabla\cdot F = 0 + 0 + (x^2+y^2)^2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 r^4\,r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

15. Probar las *identidades de Green*

$$\int_{\partial\Omega} f\nabla g\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} = \int_{\Omega}(f\nabla^2 g - \nabla f\cdot\nabla g)\,dV$$

y

$$\int_{\partial\Omega}(f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{\Omega}(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV.$$

1. Teorema de la divergencia:

Sea $F = f\nabla g$. Establece que

$$\int_{d\Omega} F\cdot n\cdot ds = \int_{\Omega}\nabla\cdot F\,dv$$

$$\nabla(f\nabla g) = \nabla f\cdot\nabla g + f\,\nabla\cdot(\nabla g)$$

$$\nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g$$

$$\int_{d\Omega} f\nabla g\, n\, ds = \int_{\Omega}\nabla(f\nabla g)\,dv$$

$$= \int_{\Omega}\nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g\,dv$$

Es una suma, no una resta.

2. Teorema divergencia.

Sea $F = f\nabla g - g\nabla f$

$$\int_{d\Omega} F\, n\, ds = \int_{\Omega}\nabla\cdot F\,dv$$

$$\int_{\Omega} f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\,dv.$$

$$\nabla(f\nabla g - g\nabla f)$$

$$\nabla(f\nabla g) = \nabla f\nabla g + f\nabla\nabla g$$

$$\nabla(g\nabla f) = \nabla g\nabla f + g\nabla\nabla f$$

$$\cancel{\nabla f\nabla g} + f\nabla^2 g - \cancel{\nabla g\nabla f} - g\nabla^2 f =$$

$$f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$$