Probabilidad - II 2024
Universidad Nacional de Colombia - Nov 06

Tutor: Carlos E. Alonso–Malaver.

***ö.* Para masticar-rumiar**:

Escuchar al otro,
Es parte de la ética de la responsabilidad
Hoy no tenemos tiempo para el otro
Por eso los lazos débiles predominan
Y ellos aceleran la comunicación...
Las cosas queridas son cada vez más raras.

Byung Chul Han

Variables Aleatorias

1. Caballito de Troya:

   a) $\mathbb{E}$: Lanzamiento de una moneda tres veces, con $P(C) = p \in (0,1)$.

   b) Definimos $U = (\Omega, \mathfrak{F}, P)$ con $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$ y P caracterizada por $P(\omega_i) = p^r(1-p)^{3-r}$ donde $r = 0,1,2,3$ es el número de caras en el arreglo ω_i.

   c) Sobre U se plantea la función X=Número de caras, que llamaremos variable aleatoria o función medible.

   d) Debes observar $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X = 0,1,2,3$.

   e) Objetivo: Llegar a $P(X = x) \quad x = 0,1,2,3$.

2. Pongamos todos los conceptos juntos,

   - $\mathbb{E}$: Lanzamiento de una moneda tres veces, con $P(C) = p \in (0,1)$.
   - $\Omega := \{(C,C,C),(C,C,S),\ldots,(S,S,S)\} = \{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_8\}$

- $P(\omega_3) = P((C,S,C)) = p^2(1-p)$, y en general $P(\omega_k) = p^r(1-p)^{3-r}$, r es el número de C's en el arreglo.
- En rigor $X : (\Omega, \mathfrak{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, donde $\mathfrak{B}$ es a σ-álgebra de Borel.
- Ahora,
  - $P_X(\{X = 0\}) = P(X^{-1}(\{0\})) = P(\{\omega_8\}) = (1-p)^3$.
  - $P_X(\{X = 1\}) = P(X^{-1}(\{1\})) = P(\{\omega_5, \omega_6, \omega_7\}) = 3p(1-p)^2$.
- Hemos transportado la probabilidad

3. **Función Medible**: Para sistematizar lo hecho en el ejemplo anterior y así poder extenderlo a cualquier variable aleatoria a continuación se presentan los rudimentos básicos de la teoría de soporte para ello.

4. **Conceptos Previos**:
   Sean:

   - $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espacio de probabilidad,
   - $X : \Omega \to \Lambda$, con X función.
   - $(\Lambda, \mathfrak{G})$ espacio medible.
     Dados los elementos anteriores, sea $B \in \mathfrak{G}$, se define
     $$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}. \tag{1}$$
     Observa que NO es la definición de función inversa dada en cálculo. El concepto en la Ec. (1) se extiende a una colección de conjuntos como sigue,

   - Dada una colección de conjuntos $\mathcal{C} \subset \mathfrak{G}$, la escritura
     $$X^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathfrak{F}.$$
     Indica que para todo $B \in \mathcal{C}$ se cumple
     $$X^{-1}(B) \in \mathfrak{F}.$$

5. **Función Medible** - Definición Dados $(\Omega, \mathfrak{F})$ y $(\Lambda, \mathfrak{G})$ espacio medibles. La función X con
   $$X : \Omega \to \Lambda,$$
   se dice es una función medible ($\mathfrak{F}|\mathfrak{G}$-medible) sii
   $$X^{-1}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{F}.$$

6. En el caso $(\Lambda, \mathfrak{G}) = (\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}^k)$

   - Para $k = 1$ se dice que X es una variable aleatoria.
   - En el caso $k \geq 2$ dice que X es un vector aleatorio.
   - En general si $(\Lambda, \mathfrak{G}) = (\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}^k)$, podemos hablar de X como un objeto aleatorio.

7. Ejemplos: función medible.

   - *Función indicadora o característica*: El ejemplo más sencillo de una variable aleatoria es un función indicadora, veamos
     - Sean $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espacio de probabilidad y $B \in \mathfrak{F}$
     - Sea $X = I_{B} : \Omega \to R$ donde

$$I_{B}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in B, \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin B \end{cases}$$

     - Para mostrar que X es medible ($\mathfrak{F}|\mathfrak{B}$-medible), basta mostrar que $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathfrak{F}$. Si pensamos un poco, no es complicado colegir:

$$X^{-1}\left((-\infty, a]\right) = \begin{cases} \emptyset \in \mathfrak{F} & \text{si} \quad a < 0, \\ B^c \in \mathfrak{F} & \text{si} \quad 0 \leq a < 1, \\ \Omega \in \mathfrak{F} & \text{si} \quad 1 \geq a, \end{cases}$$

   - *Función Simple*: El ejemplo que sigue, generaliza lo anterior
     - Dados $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espacio de probabilidad y $\{B_{1}, B_{2}, \ldots, B_{K}\}$ partición de Ω
     - Una función simple (variable aleatoria discreta) $X = \varphi$, es una función de la forma:

$$\varphi(\omega) = \sum_{j=1}^{K} b_j \left[I_{B_j}(\omega) \right].$$

       Donde $\{b_j\}_j$ es una secuencia de números reales. No se pierde generalidad al asumir $b_1 < b_2 < \ldots < b_K$.

Fin - Clase del día Miércoles Nov. 27

8. **Dos Propiedades**:

   i.) $X^{-1}[B^c] = [X^{-1}(B)]^c$

   ii.)

$$X^{-1}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i) \tag{2}$$

   Veamos *i.)*, dados $(\Omega, \mathfrak{F})$ y $(\Lambda, \mathfrak{G})$ espacios medibles, y $X : \Omega \to \Lambda$, observa:

$$\begin{aligned} x \in \left(X^{-1}(B)\right)^c &\Leftrightarrow x \notin X^{-1}(B) \\ \text{Def. Ec. (1)} &\Leftrightarrow x \notin \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \\ &\Leftrightarrow x \in \{\omega \in \Omega : X(\omega) \notin B\} \\ &= x \in \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B^c\} \\ &= X^{-1}(B^c) \end{aligned}$$

   Esto es: dado $B \subset \Lambda$ entonces

$$X^{-1}(B^c) = \left(X^{-1}(B)\right)^c \tag{3}$$

   Visualiza *ii.)*. Se revisa en clase.

9. Los resultados presentados en las Ecuaciones (2) y (3), nos permiten colegir:

   - Dados $(\Omega, \mathfrak{F})$ y $(\Lambda, \mathfrak{G})$ espacios medibles, y X función medible ($\mathfrak{F}|\mathfrak{G}$-medible), entonces:
     - $X^{-1}(\mathfrak{G})$: es $\sigma -$ álgebra
     - $X^{-1}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{F}$.

10. **Probabilidad Transportada**. Dados $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y $(\Lambda, \mathfrak{G})$ espacio de probabilidad y espacio medible, respectivamente, y, $X : \Omega \to \Lambda$, X $\mathfrak{F}|\mathfrak{G}$-medible. La función P_X definida como:

$$P_X(B) = P(\{X \in B\}) = P(X^{-1}(B)) \quad B \in \mathfrak{G},$$

   Es medida de probabilidad sobre $(\Lambda, \mathfrak{G})$. En el futuro trabajaremos, casi exclusivamente, sobre $(\Lambda, \mathfrak{G}, P_X)$.
   Demo:

   i.) $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \geq 0$, P medida de probabilidad.

ii.) $P_X(\Lambda) = P(X^{-1}(\Lambda)) = P(\Omega) = 1$, P medida de probabilidad en $(\Omega, \mathfrak{F})$.

iii.) Dada una secuencia de eventos $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{G}$ con $B_j \cap B_i = \emptyset$, se tiene

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_j B_j\right) &= P\left(X^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right)\right) = P\left(\bigcup_j X^{-1}(B_j)\right) \\ &= \sum_j P\left(X^{-1}(B_j)\right) = \sum_j P_X(B_j). \end{aligned}$$

11. **Notas**:

- A la probabilidad transportada $P_X(\cdot)$ se le conoce como distribución o ley de distribución de la v.a. X
- $P_X(\cdot)$ es el instrumento para conocer el comportamiento de X en el ecosistema de interés.

Lee:

- Degroot secciones 3.1. y 3.2.
- Blanco, Capítulo 2.

12. **Variables Aleatorias Discretas**:

- Función de Masa de Probabilidad - Definición: Sean X v.a. discreta y $x \in \mathbb{R}$, la función de masa de probabilidad de la v.a. X, que denotaremos por f_X, se define como:

$$f_X(x) = P_X(X = x).$$

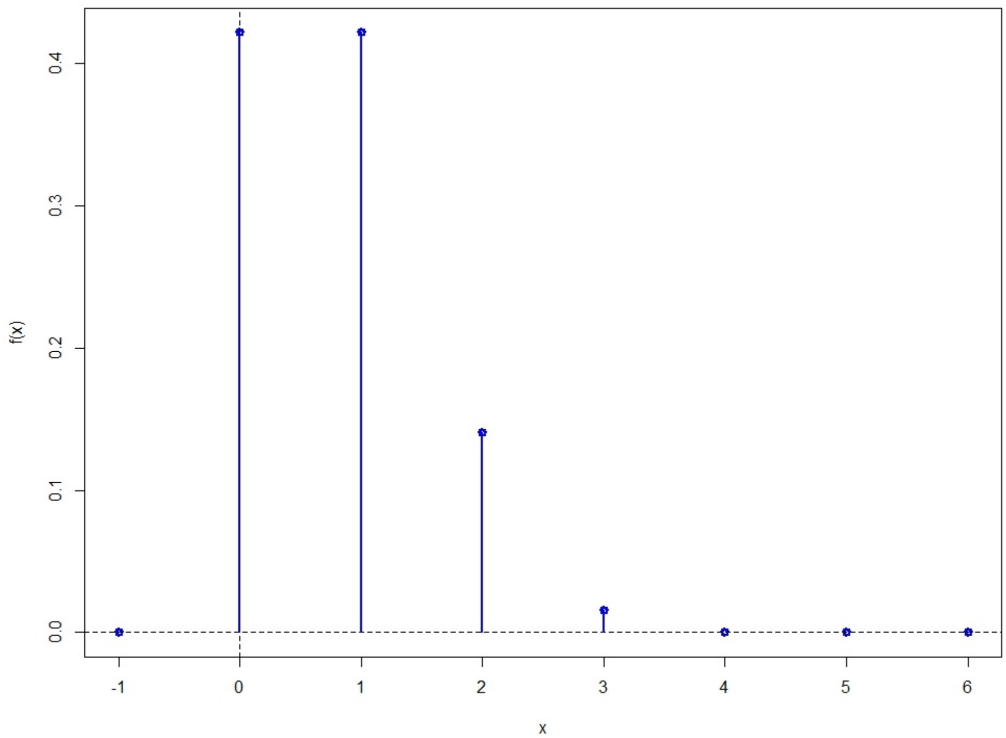
  Ésta definición sólo tiene sentido para variables aleatorias discretas.

- Caballito de Troya - Distribución Binomial
  a) $\mathbb{E}$: Lanzamiento de una moneda tres veces, con $P(C) = p \in (0, 1)$.
  b) Definimos $U = (\Omega, \mathfrak{F}, P)$ con $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$ y P caracterizada por $P(\omega_i) = p^r(1-p)^{3-r}$ donde $r = 0, 1, 2, 3$ es el número de caras en el arreglo ω_i.
  c) Sobre U se define X=Número de caras
  d) Objetivo: Hallar $F_X(x) = P(X \le x)$, $p = \frac{1}{4}$. Observa
    - $P(X = 0) = (1-p)^3 = (1 - \frac{1}{4})^3 = \frac{27}{64}$

- $P(X=1) = \binom{3}{1} p^1 (1-p)^{3-1} = 3\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})^2 = \frac{27}{64}$
- $P(X=2) = \binom{3}{2} p^2 (1-p)^{3-2} = 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 (1-\frac{1}{4}) = \frac{9}{64}$
- $P(X=3) = \binom{3}{3} p^3 (1-p)^{3-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

Lo anterior se escribe de la forma (Función de Masa de Probabilidad):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{27}{64} & \text{si} \quad x = 0, 1 \\ \frac{9}{64} & \text{si} \quad x = 2 \\ \frac{1}{64} & \text{si} \quad x = 3 \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$



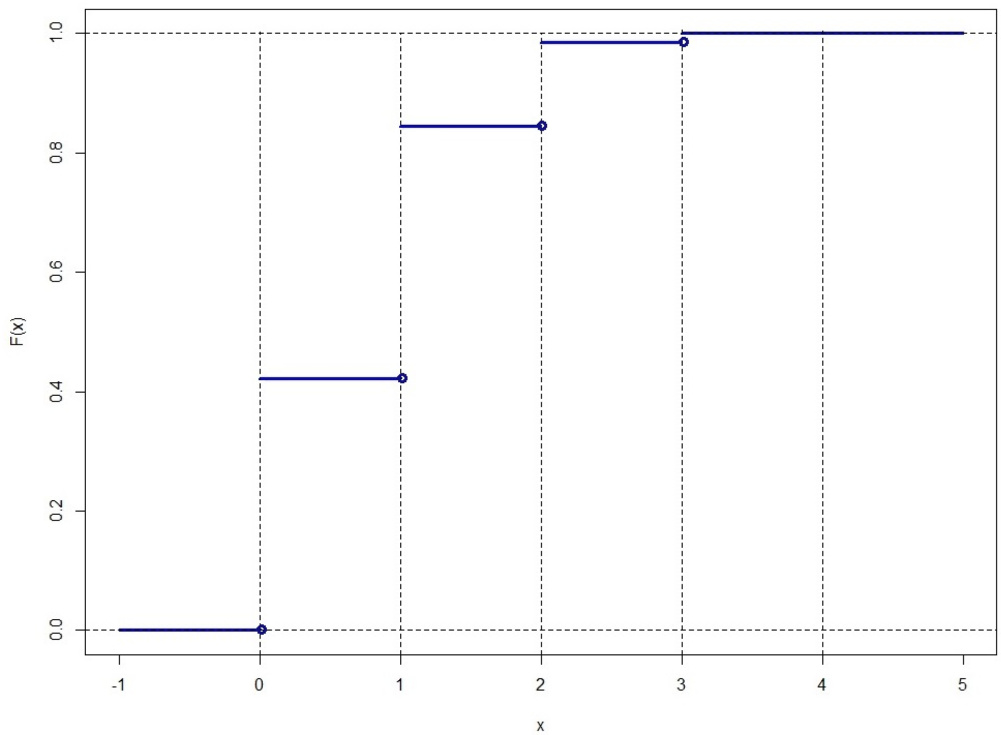
- Función de Distribución - Definición: Sean X v.a. y $x \in \mathbb{R}$. La función de distribución (acumulada) de una variable aleatoria X, que denotaremos por F_X, se define como:

$$F_X(x) = P_X((\infty, x]) := P(X \leq x).$$

Observa: No importa si la variable aleatoria es discreta o continua, la definición de f.d.a. aplica.

- En el ejemplo de caballito de troya, $p = \frac{1}{4}$, se tiene:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{27}{64} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{54}{64} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{63}{64} & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 \leq x \end{cases}$$



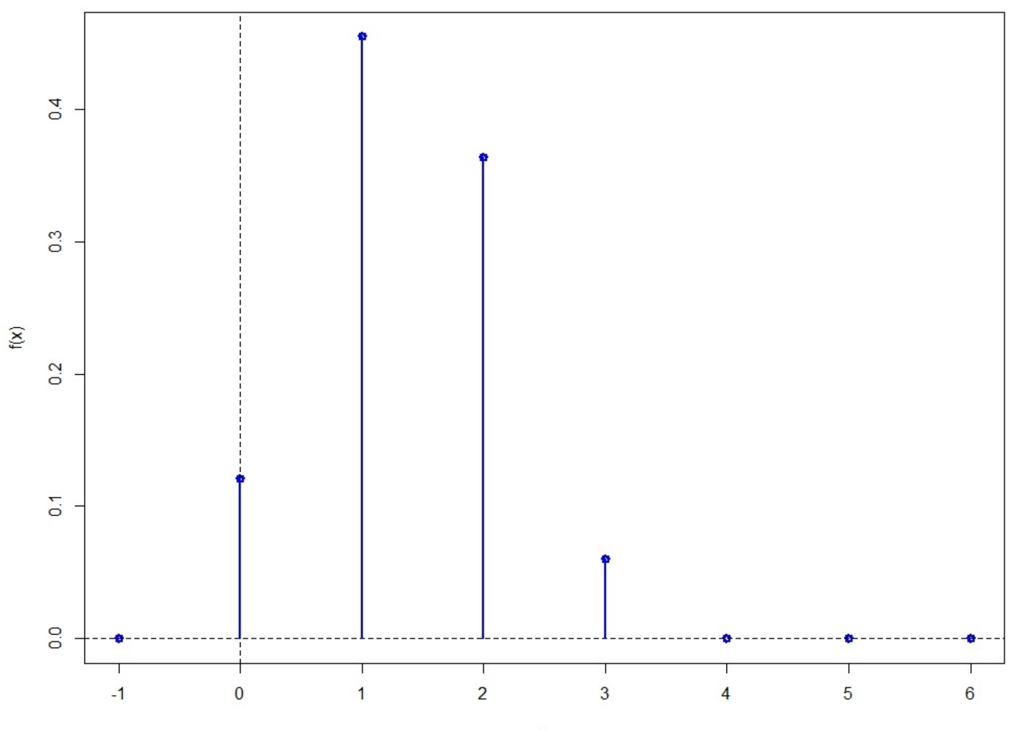
- Ejemplo 2 - Distribución Hipergeométrica.
$\mathbb{E}$: se tiene una caja con tres cartas rojas y ocho blancas, se seleccionarán cinco cartas al azar y sin reemplazo.
  a) $\Omega = \{(B, B, B, B, B), (B, B, B, B, R), \ldots, (B, B, R, R, R)\}$.
  b) Se tiene, por ejemplo Definimos $U = (\Omega, \mathfrak{F}, P)$ con $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$.
  c) Sobre U se define X=Número de cartas rojas seleccionadas.

Observa

- $P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{8}{5}}{\binom{13}{5}} = 0.1212$
- $P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{8}{4}}{\binom{13}{5}} = 0.4545$
- $P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{8}{3}}{\binom{13}{5}} = 0.3636$
- $P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{8}{2}}{\binom{13}{5}} = 0.0606$

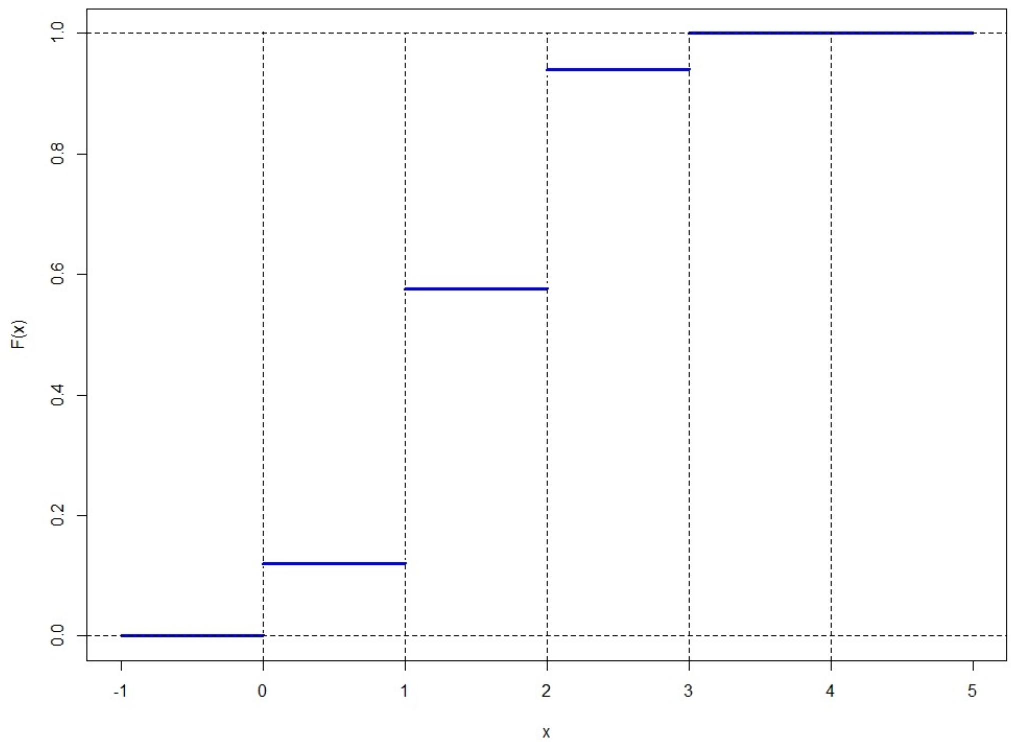
De donde, la función de masa de probabilidad, se puede escribir como:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.1212 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0.4545 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0.3636 & \text{si} \quad x = 2 \\ 0.0606 & \text{si} \quad x = 3 \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$



y por ende la función de distribución, es

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \\ 0.1212 \quad \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.5758 \quad \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.9394 \quad \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 \quad \text{si} \quad 3 \leq x \end{cases}$$



13. Variables Aleatorias Discretas - Generalizando: A partir de los ejemplos anteriores debes colegir: al pensar en una variable aleatoria discreta, X, podemos asumir que existe una secuencia de números $\{x_i\}_i$, tal que:

   - $f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$
   - Con $p_i \geq 0$ y
   - $\sum\limits_i P(X = x_i) = \sum\limits_i f(x_i) = 1.$

A la función $f(\cdot)$ se conoce como función de masa de probabilidad, de la que es importante que recuerdes:

- Dado un conjunto de borel $B \subset \mathbb{R}$, entonces $P(B) = \sum\limits_{x_i \in B} f(x_i)$
- La notación para función de masa de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} p_i & \text{si} \quad x = x_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4}$$

  La Ec. 4 es relevante porque debes darte cuenta que $f(\cdot)$ está definidad para todo número real.

- Ejemplo 3 Un ejemplo de lo anterior (tal vez el más sencillo), es la distribución uniforme discreta. En ésta distribución se tiene una variable aleatoria discreta X que toma los valores $x_{_1}, x_{_2}, \ldots, x_{_K}$, con $P(X = x_i) = \frac{1}{K}$

14. **Variables Aleatorias Continuas** El siguiente ejemplo presenta una v.a. continua, X, que puede pensarse como el tiempo de vida de un bombillo, i.e. se asume el bombillo se prende y permanece prendido hasta que falla (primera falla).
Una función (de densidad) que describe el comportamiento de X (en años), es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Cómo hacemos uso de la información anterior?

- Imagina por un momento que deseamos saber la probabilidad de que un bombillo tengan un tiempo de vida entre 0.5 y 2.5 años, se tiene

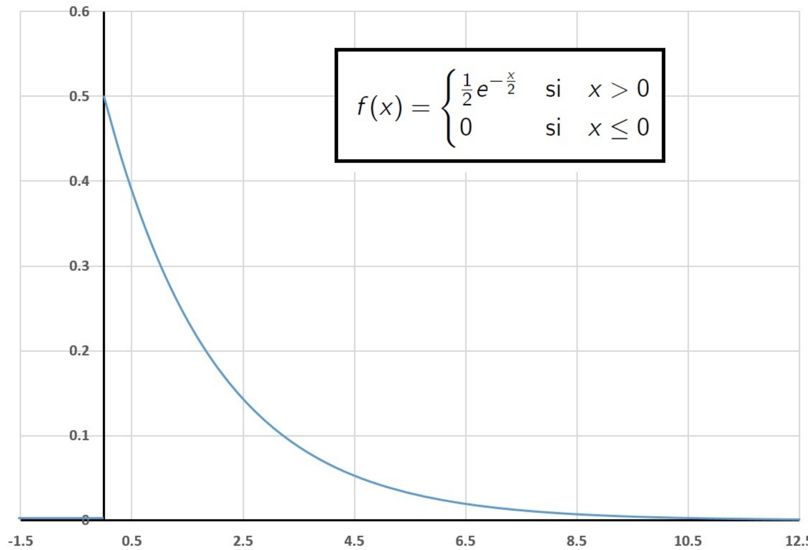
$$\begin{aligned} P(0.5 \leq X \leq 2.5) &= \int_{0.5}^{2.5} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0.5}^{2.5} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = -e^{-\frac{x}{2}}\Big|_{0.5}^{2.5} \\ &= -e^{-\frac{2.5}{2}} + e^{-\frac{0.5}{2}} = -0.287 + 0.779 = 0.492 \end{aligned}$$

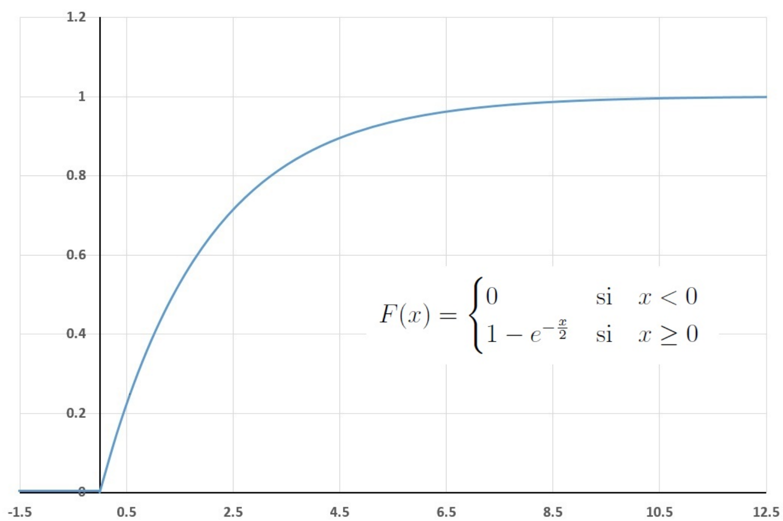
- Para llegar a $F(x)$, tenemos:

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t \\ &= -e^{-\frac{t}{2}}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

De donde, la escritura completa es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$





15. Al trabajar con variables aleatorias continuas es importante que recuerdes:

- Si $f_X(\cdot)$ es la función de densidad, entonces
    - $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
    - $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \mathrm{d}x = 1$
    - Dado $B \subset \mathbb{R}$, $P(X \in B) = \int_B f_X(x) \mathrm{d}x$
    - Visualiza, para todo $c \in \mathbb{R}$, $P(X = c) = 0$.

Fin - Clase del día Viernes Nov. 29