Probabilidad - II 2024
Universidad Nacional de Colombia - Oct 30

Tutor: Carlos E. Alonso–Malaver.

To err is human, to forgive divine, but to include errors in your design is, ... it's statistical.
Leslie Kish

† **Máximas del curso** :

- El curso es más tuyo que mío.
- Las discusiones o explicaciones que se dan en el curso buscan aquello que desde la razón es más cercano al ecosistema (verdad) o permiten entender de mejor forma el ecosistema, NO se deben dar discusiones cuyo propósito sea ganar.
- Parte de ser inteligente es preguntar y es superior (sabio) si se hace en el momento oportuno.
  - Pero, ¿cómo preguntar sin haber estudiado?, es como intentar hablar de una película que nunca se ha visto.
- No poder hacer un ejercicio NO es indicio de fracaso, sí es indicio de que tal vez no eres un dios o un semi-dios.
  - En éste sentido, piensa ¿quién será más fuerte? quien hace sólo un ejercicio a la semana ó aquel que hace una docena de ejercicios/semana.
- La primera persona que gana cuando tú aprendes o entiendes un ítem mejor, eres tú.
- Durante todo el curso piensa que estás aprediendo a nadar.
- **Nota final**: Si estás en ésta asignatura por una nota, por favor cancela. Es demasiado pobre de tu parte que pienses así en un sitio tan rico como es la Universidad Nacional.

Un camino para seguir la asignatura:

Paso i.) **Estudio antes de cada Clase**.
Propósitos:

1. Familiariarse con el tema de la siguiente Clase.
2. Identificar en trazo grueso. Qué se desea mostrar-enseñar.
3. Identificar qué puntos del tema tengo claros y qué puntos me dan problemas.
4. Preparar preguntas y varios ejercicios.

Paso ii.) **En Clase**, discuto hasta entender, por qué.

1. El estudiante es el actor-constructor principal de su conocimiento.
2. La interacción te facilita el proceso de memorización y aprendizaje (activo). Tu memoria es visual.

Propósitos:

1. Aclarar dudas.
2. Hacer ejercicios.
3. Enriquecer lo aprendido.

Paso iii.) **Evalúo**, cómo va mi proceso de aprendizaje.
Propósitos:

1. Detectar fortalezas y debilidades.
2. Aclarar dudas.
3. Verificar si tengo los conceptos claros.

De lo anterior, recuerda:

- Estudiar antes de clase, a diario.
- En cada clase te voy a preguntar por el tema a revisar.

Rudimentos

1. Ejemplo 1:
   - $\mathbb{E}_1$: Lanzamiento de un dado.
   - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   - A: Sale un número mayor a 4, i.e. $A = \{5, 6\}$
   - B: Sale un número multiplo a 3, i.e. $B = \{3, 6\}$
2. **Caballito de Troya** (Ejemplo 2): Éste ejemplo se plantea porque si en algún momento te sientes perdido en ésta asignatura, puedes volver al mismo porque todos los elementos que se verán en el curso están presentes en él. Veamos:
   - $\mathbb{E}_2$: Lanzamiento de una moneda tres veces, moneda en la que $P(C) = p \in (0, 1)$.
   - $\Omega_{\mathbb{E}_2} = \{(C, C, C), (C, C, S), (C, S, C), (S, C, C), \ldots, (S, S, S)\}$.
     Eventos:
     - $A = \{(C, S, S)\}$
     - B: En los dos primeros lanzamientos sale cara, entonces $B = \{(C, C, S), (C, C, C)\}$

     Una estructura de soporte
   - Observa que los eventos no pertenecen a $\Omega_{\mathbb{E}_2}$, y por ende debemos definir una estructura que nos permita trabajar el concepto de probabilidad.
     La respuesta, a lo anterior, será una σ-álgebra, que en general denotaremos con la letra $\mathfrak{F}$. En éste ejemplo $\mathfrak{F} = 2^{\Omega_{\mathbb{E}_2}}$
3. Algunos Conceptos:
   - **Experimento Aleatorio**: Un **experimento aleatorio**, $\mathbb{E}$, es un mecanismo que nos permite tener un resultado que cumple las siguientes condiciones:
     - Se conocen todos los posibles resultados.
     - Previo al experimento, no se puede predecir con certeza cuál es el resultado que se ocurrirá.
   - Asociado a un experimento aleatorio, $\mathbb{E}$, se tiene el **espacio muestral**, Ω, que es el conjunto de todos los posibles resultados

- Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral[1], es decir si notamos un evento por A, entonces el primer requerimiento es $A \subset \Omega$.

4. **Primera Asignación**: Parte de tu trabajo ésta semana es revisar los conceptos de:

   - Pertenencia: Dado un elemento x, la afirmación x pertenece a un conjunto A se escribe:
   $$x \in A$$
   - Contenencia:Dados A, B conjuntos, se dice $A \subset B$ si para todo $x \in A \Rightarrow x \in B$
   - Operaciones entre conjuntos y su propiedades.
     - Complemento. A^c : Dado el conjunto $A \subset \Omega$, se define el conjunto A^c (complemento de A con respecto a Ω) como el conjunto de todos los elementos de Ω que no pertenecen a A.
     $$A^c := \{x \in \Omega : x \notin A\}$$
     Ejemplo 3: Volviendo a Caballito de Troya: $\mathbb{E}_2$: Lanzamiento de una moneda tres veces
       - $A = \{(C, S, S), (S, C, S), (S, S, C)\}$
       - $B = \{(C, C, S), (C, C, C)\}$

     De lo anterior:
       - $A^c = \{(C, C, C), (C, C, S), (C, S, C), (S, C, C), (S, S, S)\}$
       - $B^c = \{(S, C, C), (S, C, S), (C, S, C), (C, S, S), (S, S, C), (S, S, S)\}$

     Ejemplo 4: Imagina se está jugando a pegarle con un dardo al centro del cuadrado,
     $$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$
     Se cumple:
       - Siempre el dardo cae dentro del cuadrado
       - La probabilidad de darle a cualquier $A \subset \Omega$ es igual al área de A, i.e.
       $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = |A|$$

[1] Luego refinaremos éste concepto

En el ejemplo anterior, si

$$B := \{(x, y) \in \Omega : x \geq y, x \leq 2y\}$$

Su complemento está dado por:

$$B^c := \{(x, y) \in \Omega : x < y \quad \text{ó} \quad x > 2y\}$$

Propiedades:

a) Si $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$. Ejercicio en Clase.

b) Si $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$. Ejercicio.

c) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$. Ejercicio.

d) $(A^c)^c = A$

- $\emptyset^c = \Omega$, donde $\emptyset$:=Conjunto vacio.
- $\Omega^c = \emptyset$

e) En probabilidad todo evento A es subconjunto del espacio muestral Ω, i.e. $A \subset \Omega$

- Unión. $A \cup B$

Propiedades

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

c) $A \cup A = A$

d) $A \cup \emptyset = A$

e) Si $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$. **El más grande**

f) Si $A \cup A^c = \Omega$

- Intersección. $A \cap B$

Propiedades

a) $A \cap B = B \cap A$

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c) $A \cap A = A$

d) $A \cap \emptyset = \emptyset$

e) Si $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$. **El más pequeño**.

f) Si $A \cap A^c = \emptyset$.

- Diferencia de dos conjuntos $A \backslash B$

$$A \backslash B := \{x | \, x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

.

- Diferencia simétrica. $A \triangle B$.

$$A \triangle B := A \backslash B \cup B \backslash A$$

  Observa:
  - $A \backslash B := AB^c$.
  - $A \triangle B := (A \cup B) \backslash AB$
- **Leyes de De Morgan**: Trabajo en Clase

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c$$

  Veamos:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right)^c &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow x \notin A_k \ \forall k \\ &\Leftrightarrow x \in A_k^c \ \forall k = 1, 2, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c \end{aligned}$$

5. **Interpretaciones del Concepto de Probabilidad**

† Interpretación Clásica.

- Espacio muestral finito,
- Equiprobabilidad.

† Interpretación Frecuencialista.

- Experimentación,
- Frecuencia relativa.

† Interpretación Subjetiva

- Conocimientos: Educación - Experiencia.
- Percepción - Olfato.

Fin - Clase del día Miércoles Oct. 30

Teoría Moderna de Probabilidad

Espacios de Probabilidad

Espacio Muestral: El **espacio muestral** asociado a un experimento aleatorio, $\mathbb{E}$, se notará con la letra $\Omega_{\mathbb{E}}$ (S en Degroot).

Hacia el concepto de evento:
σ-**álgebra**: Dados un espacio muestral Ω y una colección $\mathfrak{F}$ de sub-conjuntos de Ω, se dice que $\mathfrak{F}$ es una σ-álgebra sobre Ω si:

1. $\Omega \in \mathfrak{F}$.
2. Si $A \in \mathfrak{F}$ entonces $A^c \in \mathfrak{F}$.
3. Dada una colección infinita de eventos $\{A_n\}_n \subset \mathfrak{F}$ entonces

$$\bigcup_n A_n \in \mathfrak{F}.$$

Ejemplos:
Dado Ω un conjunto arbitrario,

i.) $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathfrak{F}_0$ es σ-álgebra sobre Ω. σ-álgebra trivial.

ii.) Dado $A \subset \Omega$, $\mathfrak{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, $\mathfrak{F}_1$ es σ-álgebra sobre Ω. σ-álgebra asociada a una variable indicadora.

iii.) $\mathfrak{F}_F = 2^\Omega$ es σ-álgebra sobre Ω. σ-álgebra más grande.

iv.) Para toda σ-álgebra $\mathfrak{G}$ sobre Ω se tiene $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}_F$

Dado lo anterior, se tiene:

† A la pareja $(\Omega, \mathfrak{F})$ se conoce como **Espacio Medible**.

†† Dado un espacio medible $(\Omega, \mathfrak{F})$, A es un evento síí $A \in \mathfrak{F}$.

Entendiendo el concepto de σ-álgebra

- Qué es una σ-álgebra?
- Trabajo con Caballito de Troya

Dos resultados:

i.) Dado $B \subset \Omega$ el conjunto $G_{_B} := \{A \cap B : A \in \mathfrak{F}\}$, $G_{_B}$ es una σ-álgebra sobre B. Huella.

ii.) Dada $\{\mathfrak{F}_n\}_n$ una colección de σ-álgebras sobre Ω,

$$S = \bigcap_n \mathfrak{F}_n$$

es σ-álgebra sobre Ω (Trabajo en clase).

Mínima σ-**álgebra**

iii.) σ-**álgebra generada**. Dada una colección $\mathbf{C}$ de subconjuntos de Ω, se define: $\sigma(\mathbf{C})$:= mínima σ-álgebra que contiene a $\mathbf{C}$.

iv.) Si definimos $\mathcal{M} := \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F}\ \sigma - \text{álgebra y } \mathbf{C} \subset \mathfrak{F}\}$, entonces

$$\sigma(\mathbf{C}) = \bigcap_{\mathcal{M}} \mathfrak{F}$$

v.) σ-**álgebra de Borel**. Si el espacio muestral $\Omega = \mathbb{R}$, la σ-álgebra usual de soporte para éste espacio es la σ-álgebra de Borel, $\mathfrak{B}$, que se define como la σ-álgebra generada por el conjunto de los abiertos[2] en $\mathbb{R}$.
Un Resultado de interés para éste curso es:

- Dado $\mathbf{C}_{_0} := \{(-\infty, a] : a \in R\}$, entonces $\mathfrak{B} = \sigma(\mathbf{C}_{_0})$

Explicación
Asumiendo se desea trabajar sobre $\Omega = \mathbb{R}$, y se desea construir una σ-álgebra $\mathfrak{B}$ para tener un espacio medible de soporte $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ y luego un espacio de probabilidad, el Camino es:

i.) Definir $\mathcal{O} := \{A : A \subset \mathbb{R}, A \text{ abierto}\}$.

ii.) $\mathfrak{B} := \sigma(\mathcal{O})$.

iii.) Un camino alterno al anterior es:

1. Definir $\mathbf{C}_{_0} := \{(-\infty, a] : a \in R\}$
2. Se tiene $\mathfrak{B} := \sigma(\mathbf{C}_{_0})$.

[2]Análogo se hace en espacios topológicos más generales.

Espacio de Probabilidad - (Def.) Dados $(\Omega, \mathfrak{F})$, espacio de medible, y P una función de $\mathfrak{F}$ a valor real $(P : \mathfrak{F} \to \mathbb{R})$, P es una medida de probabilidad si satisface:

1. $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathfrak{F}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Dada una secuencia $\{A_n\}_n \subset \mathfrak{F}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$, entonces
$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n).$$

   A la tripla $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, se conoce como espacio de probabilidad.

Ejemplo 1: Caballito de troya.

- $P(Cara) = 1/4$.
- $P(Cara) = p \in (0, 1)$.

Ejemplo 2:
Trabajo en el conjunto $\Omega := \{(x, y) \in R^2 : 0 < x, y < 1\}$.

- Dado $A \subset \Omega$, $P(A) =$ Area de A.

Algunos Resultados Iniciales - Trabajo en Clase

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Dados $A, B \in \mathfrak{F}$ con $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
4. Si $A \subset B$ entonces:
   - $P(A) \leq P(B)$
   - $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.
   - Por ende $P(B) \leq 1$.
5. Dados $A, B \in \mathfrak{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ejercicios:

1. $\mathbb{E}$: Lanzamiento de un dado tres veces.
   Se definen:

- A: Sale 3 en el primer lanzamiento
- B: La suma de los valores observados en los tres lanzamientos es 12.
- C: La suma de los valores observados en los tres dados es mayor a 4

Halla:

- $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$, $P\left((A \cup B)^c\right)$ y $P(C)$.

Fin - Clase del día Viernes Nov. 01