Taller 1

Los grupos 4, 8, 12, 16, 20, 24 y 28 deben realizar los ejercicios 8, 12, 16, 20, 22 y 26.

8. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Vamos a realizarlo por inducción matemática.

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$n=1$

$$\sum_{i=1}^{1}(a_i+b_i) = a_1+b_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i + \sum_{i=1}^{1} b_i$$

$n=K$ h.i

$$\sum_{i=1}^{K}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{K} a_i + \sum_{i=1}^{K} b_i$$

$n=K+1$

$$\sum_{i=1}^{K+1}(a_i+b_i) = (a_1+b_1)+\cdots+(a_K+b_K)+(a_{K+1}+b_{K+1})$$

$$(a_1+b_1)+\cdots+(a_K+b_K) = (a_1+\cdots+a_K)+(b_1+\cdots+b_K)$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{K+1}(a_i+b_i) = (a_1+b_1)+\cdots+(a_K+b_K)+(a_{K+1}+b_{K+1}) = \left(\sum_{i=1}^{K} a_i\right)+a_{K+1}+\left(\sum_{i=1}^{K} b_i\right)+b_{K+1} = \sum_{i=1}^{K+1} a_i + \sum_{i=1}^{K+1} b_i$$

16. Los coeficientes binomiales son números naturales.

📌 **Definición del coeficiente binomial:**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

donde:

- $n!$ es el factorial de n
- $k!$ es el factorial de k
- $(n-k)!$ es el factorial de $n-k$

Queremos probar:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}$$

Inducción:

- Caso base $n=0$ $\binom{K}{0} \in \mathbb{N}$ $\frac{K!}{K!} = 1 \in \mathbb{N}$.

  $n=K$ $\binom{K}{K} = \frac{K!}{K!(K-K)!} = 1 \in \mathbb{N}$

- hipotesis de inducción:

  $\binom{n}{K} \in \mathbb{N}$ $0 \le K \le n$ Tres casos: $\begin{cases} K=0 \\ K=N \end{cases}$ Ya mostrados $\in \mathbb{N}$.

  $0 < K < n \longrightarrow 1 \le K \le n$ $\in \mathbb{N}$ por hi.

- Paso inductivo

$¿\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}?$

Sumamos 0 y asociamos

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{((n+1-k)+(k))n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1-k)n! + kn!}{k!(n+1-k)!}$$

$$\frac{(n+1-k)n! + k\ n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{\cancel{(n+1-k)}n!}{k!\cancel{(n+1-k)}(n-k)!} + \frac{\cancel{k}n!}{\cancel{(k)}(k-1)!(n+1-k)!} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ Por hi

$\binom{n}{k-1}$ $\quad 0 \leq k-1 \leq n$

1. $0 < k-1 < n \longrightarrow$ $0 < 1 \leq k-1 < n$, $0 < k-1 < n$, $1 \leq k \leq n$ por hi, $k-1 \neq n$, $k \leq n$, $1 \leq k < n$ o $k = n$ por hi.

o

2. $\underbrace{0 \leq k-1 = n}_{\text{ya lo mostramos en nuestro caso base } \in \mathbb{N}}$

3. $\underbrace{0 = k-1 \leq n}_{\text{Caso base. } \in \mathbb{N}}$

$\binom{n}{k-1} \in \mathbb{N}$ ya que $0 < 1 \leq k-1 < n$, $0 < k-1 < n$, $1 \leq k \leq n$ por hi

22. Demostrar que no hay números naturales entre 0 y 1.

Sugerencia: Utilizar el PBO y propiedades de orden de $\mathbb{N}$.

Por contradicción:

"Hay al menos un natural entre 0 y 1"

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < 1\}$ $\quad$ A tiene un w mínimo elemento por PBO

w debe satisfacer $0 < w < 1$ $\quad$ w es $\mathbb{N}$ $\wedge$ $0 < m$, entonces $m \geq 1$ Contradicción $m < 1$.

12. $\prod_{i=1}^{n}(a_ib_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right).$

20. *Ley asociativa generalizada.* Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales con $n \geq 3$. Demuestre que dos maneras cualesquiera de sumar estos números tomados en ese orden, producen el mismo resultado.

22. Demostrar que no hay números naturales entre 0 y 1.

    Sugerencia: Utilizar el PBO y propiedades de orden de $\mathbb{N}$.

26. Para todo entero $n \geq 1$ y todo entero $m \geq 1$ se tiene que $u_n \mid u_{mn}$.