Procesos Estocásticos

V. Arunachalam (Arun)

Departamento de Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia.
varunachalam@unal.edu.co

2022

TOPICOS

- 1 -Conceptos Basicos : Procesos Estocásticos
- 2 - Cadena de Markov en Tiempo Discreto
- 4 - Proceso de Poisson
- 5- Cadena de Markov en Tiempo Continuo
- 6 - Martingalas
- 7 - El movimiento Browniano

TOPICOS

- 1 -Conceptos Basicos : Procesos Estocásticos
- 2 - Cadena de Markov en Tiempo Discreto
- 4 - Proceso de Poisson
- 5- Cadena de Markov en Tiempo Continuo
- 6 - Martingalas
- 7 - El movimiento Browniano

TOPICOS

- 1 -Conceptos Basicos : Procesos Estocásticos
- 2 - Cadena de Markov en Tiempo Discreto
- 4 - Proceso de Poisson
- 5- Cadena de Markov en Tiempo Continuo
- 6 - Martingalas
- 7 - El movimiento Browniano

TOPICOS

- 1 -Conceptos Basicos : Procesos Estocásticos
- 2 - Cadena de Markov en Tiempo Discreto
- 4 - Proceso de Poisson
- 5- Cadena de Markov en Tiempo Continuo
- 6 - Martingalas
- 7 - El movimiento Browniano

TOPICOS

- 1 -Conceptos Basicos : Procesos Estocásticos
- 2 - Cadena de Markov en Tiempo Discreto
- 4 - Proceso de Poisson
- 5- Cadena de Markov en Tiempo Continuo
- 6 - Martingalas
- 7 - El movimiento Browniano

TOPICOS

- 1 -Conceptos Basicos : Procesos Estocásticos
- 2 - Cadena de Markov en Tiempo Discreto
- 4 - Proceso de Poisson
- 5- Cadena de Markov en Tiempo Continuo
- 6 - Martingalas
- 7 - El movimiento Browniano

Introducción al Procesos Estocásticos

- Los procesos estocásticos son actualmente una rama importante de la matemáticas, con aplicaciones relevantes y cada día mayores dentro de las matemáticas y y otros disciplinas tales como ingeniería, economía, finanzas, biología y entre otros.
- Los procesos estocásticos son los modelos matemáticos que estudian los fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo.
- Su estudio principal incluye conceptos tales como la distribución del proceso la cual es la probabilidad de que en diversos instantes de tiempo el proceso se encuentre en un cierto conjuntos de estados.
- Más precisamente, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias, definidas sobre un espacio de probabilidad común $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$, que está indexada por un parámetro, como por ejemplo, el tiempo. La palabra estocástico significa aleatorio o al azar.

INTRODUCCIÓN AL PROCESOS ESTOCÁSTICOS

- Los procesos estocásticos son actualmente una rama importante de la matemáticas, con aplicaciones relevantes y cada día mayores dentro de las matemáticas y y otros disciplinas tales como ingeniería, economía, finanzas, biología y entre otros.
- Los procesos estocásticos son los modelos matemáticos que estudian los fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo.
- Su estudio principal incluye conceptos tales como la distribución del proceso la cual es la probabilidad de que en diversos instantes de tiempo el proceso se encuentre en un cierto conjuntos de estados.
- Más precisamente, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias, definidas sobre un espacio de probabilidad común $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$, que está indexada por un parámetro, como por ejemplo, el tiempo. La palabra estocástico significa aleatorio o al azar.

Introducción al Procesos Estocásticos

- Los procesos estocásticos son actualmente una rama importante de la matemáticas, con aplicaciones relevantes y cada día mayores dentro de las matemáticas y y otros disciplinas tales como ingeniería, economía, finanzas, biología y entre otros.
- Los procesos estocásticos son los modelos matemáticos que estudian los fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo.
- Su estudio principal incluye conceptos tales como la distribución del proceso la cual es la probabilidad de que en diversos instantes de tiempo el proceso se encuentre en un cierto conjuntos de estados.
- Más precisamente, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias, definidas sobre un espacio de probabilidad común $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$, que está indexada por un parámetro, como por ejemplo, el tiempo. La palabra estocástico significa aleatorio o al azar.

Introducción al Procesos Estocásticos

- Los procesos estocásticos son actualmente una rama importante de la matemáticas, con aplicaciones relevantes y cada día mayores dentro de las matemáticas y y otros disciplinas tales como ingeniería, economía, finanzas, biología y entre otros.
- Los procesos estocásticos son los modelos matemáticos que estudian los fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo.
- Su estudio principal incluye conceptos tales como la distribución del proceso la cual es la probabilidad de que en diversos instantes de tiempo el proceso se encuentre en un cierto conjuntos de estados.
- Más precisamente, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias, definidas sobre un espacio de probabilidad común $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$, que está indexada por un parámetro, como por ejemplo, el tiempo. La palabra estocástico significa aleatorio o al azar.

Los valores que toman las variables aleatorias $X(t)$ se llaman estados, y el conjunto de todos los posibles valores constituye el espacio de estados del proceso. El espacio de estados es discreto si es finito o numerable, en otro caso se dice que es continuo. Por comodidad, representaremos a los procesos discretos por $\{X_n, n = 0, 1, 2...\}$. En el caso continuo se usará indistintamente cualquiera de las dos siguientes representaciones: $\{X_t, t \in T\}$ y $\{X(t), t \in T\}$.

TEXTOS

Los procesos estocásticos pueden ser clasificados de la siguiente manera:

1. Tiempo discreto, espacio de estados discreto (PDED).
2. Tiempo discreto, espacio de estados continuo (PDEC).
3. Tiempo continuo, espacio de estados discreto (PCEC).
4. Tiempo continuo, espacio de estados continuo (PCEC).

TEXTOS

Los procesos estocásticos pueden ser clasificados de la siguiente manera:

1. Tiempo discreto, espacio de estados discreto (PDED).
2. Tiempo discreto, espacio de estados continuo (PDEC).
3. Tiempo continuo, espacio de estados discreto (PCEC).
4. Tiempo continuo, espacio de estados continuo (PCEC).

TEXTOS

Los procesos estocásticos pueden ser clasificados de la siguiente manera:

1. Tiempo discreto, espacio de estados discreto (PDED).
2. Tiempo discreto, espacio de estados continuo (PDEC).
3. Tiempo continuo, espacio de estados discreto (PCEC).
4. Tiempo continuo, espacio de estados continuo (PCEC).

TEXTOS

Los procesos estocásticos pueden ser clasificados de la siguiente manera:

1. Tiempo discreto, espacio de estados discreto (PDED).
2. Tiempo discreto, espacio de estados continuo (PDEC).
3. Tiempo continuo, espacio de estados discreto (PCEC).
4. Tiempo continuo, espacio de estados continuo (PCEC).

DEFINITION

Un *proceso estocástico* es una familia de v.a $X = \{X_t, t \in T\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad común $(\Omega, \Im, P)$ y con valores en un espacio medible $(S, \mathcal{S})$ llamado *espacio de estados.* El conjunto de parámetros T se llama *dominio de definición del proceso.*

Definition

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico

1. Decimos que X es *real* si las v.a. X_t son de valor real para todo $t \in T$
2. Decimos que X es *complejo* si las v.a. X_t son de valor complejo para todo $t \in T$
3. Si $T = N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ entonces el proceso se llama *proceso estocástico con parámetro de tiempo discreto.*
4. Si T es un intervalo de la recta real entonces el proceso se denomina *proceso con parámetro de tiempo continuo.*
5. Si $T \subseteq R^n$ con $n > 1$ entonces el proceso se denomina *campo aleatorio.*

Definition

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico

1. Decimos que X es *real* si las v.a. X_t son de valor real para todo $t \in T$
2. Decimos que X es *complejo* si las v.a. X_t son de valor complejo para todo $t \in T$
3. Si $T = N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ entonces el proceso se llama *proceso estocástico con parámetro de tiempo discreto.*
4. Si T es un intervalo de la recta real entonces el proceso se denomina *proceso con parámetro de tiempo continuo.*
5. Si $T \subseteq R^n$ con $n > 1$ entonces el proceso se denomina *campo aleatorio.*

Definition

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico

1. Decimos que X es *real* si las v.a. X_t son de valor real para todo $t \in T$
2. Decimos que X es *complejo* si las v.a. X_t son de valor complejo para todo $t \in T$
3. Si $T = N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ entonces el proceso se llama *proceso estocástico con parámetro de tiempo discreto.*
4. Si T es un intervalo de la recta real entonces el proceso se denomina *proceso con parámetro de tiempo continuo.*
5. Si $T \subseteq R^n$ con $n > 1$ entonces el proceso se denomina *campo aleatorio.*

Definition

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico

1. Decimos que X es *real* si las v.a. X_t son de valor real para todo $t \in T$
2. Decimos que X es *complejo* si las v.a. X_t son de valor complejo para todo $t \in T$
3. Si $T = N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ entonces el proceso se llama *proceso estocástico con parámetro de tiempo discreto.*
4. Si T es un intervalo de la recta real entonces el proceso se denomina *proceso con parámetro de tiempo continuo.*
5. Si $T \subseteq R^n$ con $n > 1$ entonces el proceso se denomina *campo aleatorio.*

DEFINITION

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico

1. Decimos que X es *real* si las v.a. X_t son de valor real para todo $t \in T$
2. Decimos que X es *complejo* si las v.a. X_t son de valor complejo para todo $t \in T$
3. Si $T = N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ entonces el proceso se llama *proceso estocástico con parámetro de tiempo discreto.*
4. Si T es un intervalo de la recta real entonces el proceso se denomina *proceso con parámetro de tiempo continuo.*
5. Si $T \subseteq R^n$ con $n > 1$ entonces el proceso se denomina *campo aleatorio.*

Definition

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico

1. Decimos que X es *real* si las v.a. X_t son de valor real para todo $t \in T$
2. Decimos que X es *complejo* si las v.a. X_t son de valor complejo para todo $t \in T$
3. Si $T = N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ entonces el proceso se llama *proceso estocástico con parámetro de tiempo discreto.*
4. Si T es un intervalo de la recta real entonces el proceso se denomina *proceso con parámetro de tiempo continuo.*
5. Si $T \subseteq R^n$ con $n > 1$ entonces el proceso se denomina *campo aleatorio.*

EXAMPLE

Preferencias de los consumidores observadas mensualmente-PDED.

EXAMPLE

Tiempo de espera hasta arriba el nth bus a un paradero - PDEC

EXAMPLE

Número de escolares esperando el bus en cualquier momento del día-PCED

EXAMPLE

Precio de un activo en cualquier intervalo de tiempo -PCEC.

Example

Preferencias de los consumidores observadas mensualmente-PDED.

Example

Tiempo de espera hasta arriba el nth bus a un paradero - PDEC

Example

Número de escolares esperando el bus en cualquier momento del día-PCED

Example

Precio de un activo en cualquier intervalo de tiempo -PCEC.

Example

Preferencias de los consumidores observadas mensualmente-PDED.

Example

Tiempo de espera hasta arriba el nth bus a un paradero - PDEC

Example

Número de escolares esperando el bus en cualquier momento del día-PCED

Example

Precio de un activo en cualquier intervalo de tiempo -PCEC.

Example

Preferencias de los consumidores observadas mensualmente-PDED.

Example

Tiempo de espera hasta arriba el nth bus a un paradero - PDEC

Example

Número de escolares esperando el bus en cualquier momento del día-PCED

Example

Precio de un activo en cualquier intervalo de tiempo -PCEC.

Definition

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico y sea $\omega \in \Omega$ fijo. La función $t \to X_t(\omega), \ t \in \mathbb{R}$, se llama *trayectoria de* ω o trayectoria o realización *del proceso estocástico* X .

La trayectoria del proceso asociada con ω provee un modelo matemático para un experimento aleatorio cuyo resultado puede ser observado continuamente en el tiempo, por ejemplo, el número de accidentes que ocurren en la intersección de dos vías principales, el precio de un activo financiero, el número de terremotos registrados en una determinada región, etc.

Definition

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico real y $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subset T$ donde $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ entonces la función

$F_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n) := P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n)$

se llama *función de distribución finito dimensional del proceso.*

DEFINITION

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico y sea $\omega \in \Omega$ fijo. La función $t \to X_t(\omega),\ t \in \mathbb{R}$, se llama *trayectoria de* ω o trayectoria o realización *del proceso estocástico* X .

La trayectoria del proceso asociada con ω provee un modelo matemático para un experimento aleatorio cuyo resultado puede ser observado continuamente en el tiempo, por ejemplo, el número de accidentes que ocurren en la intersección de dos vías principales, el precio de un activo financiero, el número de terremotos registrados en una determinada región, etc.

DEFINITION

Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico real y $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$ donde $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ entonces la función

$F_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) := P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$

se llama *función de distribución finito dimensional del proceso.*

Definition

Sean $X = \{X_t, t \in T\}$ y $Y = \{Y_t, t \in T\}$ dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, decimos:

1. X y Y son *iguales* si $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo $t \in T$ y para todo $\omega \in \Omega$.
2. X y Y son *estocásticamente equivalentes* si $P(X_t = Y_t) = 1$ para todo $t \in T$.
3. X y Y son *estocásticamente equivalentes en el sentido amplio* si para cada $n = 1, 2, \ldots$, para todo $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ y $\{B_1, \ldots, B_n\} \subset 2^{\Omega}$ se satisface:
   $P(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \cdots, X_{t_n} \in B_n) = P(Y_{t_1} \in B_1, Y_{t_2} \in B_2, \cdots, Y_{t_n} \in B_n)$
   Es claro que ii) implica iii) (¿Porqué?)
4. X y Y se dicen *indistinguibles* si casi todas sus trayectorias coinciden, esto es,
   $P(X_t = Y_t, t \in T) = 1$.

DEFINITION

Sean $X = \{X_t, t \in T\}$ y $Y = \{Y_t, t \in T\}$ dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, decimos:

1. X y Y son *iguales* si $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo $t \in T$ y para todo $\omega \in \Omega$.
2. X y Y son *estocásticamente equivalentes* si $P(X_t = Y_t) = 1$ para todo $t \in T$.
3. X y Y son *estocásticamente equivalentes en el sentido amplio* si para cada $n = 1, 2, \ldots$, para todo $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ y $\{B_1, \ldots, B_n\} \subset 2^{\Omega}$ se satisface: $P(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \cdots, X_{t_n} \in B_n) = P(Y_{t_1} \in B_1, Y_{t_2} \in B_2, \cdots, Y_{t_n} \in B_n)$
   Es claro que ii) implica iii) (¿Porqué?)
4. X y Y se dicen *indistinguibles* si casi todas sus trayectorias coinciden, esto es, $P(X_t = Y_t, t \in T) = 1$.

Definition

Sean $X = \{X_t, t \in T\}$ y $Y = \{Y_t, t \in T\}$ dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, decimos:

1. X y Y son *iguales* si $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo $t \in T$ y para todo $\omega \in \Omega$.
2. X y Y son *estocásticamente equivalentes* si $P(X_t = Y_t) = 1$ para todo $t \in T$.
3. X y Y son *estocásticamente equivalentes en el sentido amplio* si para cada $n = 1, 2, \ldots$, para todo $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ y $\{B_1, \ldots, B_n\} \subset 2^{\Omega}$ se satisface: $P(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \cdots, X_{t_n} \in B_n) = P(Y_{t_1} \in B_1, Y_{t_2} \in B_2, \cdots, Y_{t_n} \in B_n)$
   Es claro que ii) implica iii) (¿Porqué?)
4. X y Y se dicen *indistinguibles* si casi todas sus trayectorias coinciden, esto es, $P(X_t = Y_t, t \in T) = 1$.

Definition

Sean $X = \{X_t, t \in T\}$ y $Y = \{Y_t, t \in T\}$ dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, decimos:

1. X y Y son *iguales* si $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo $t \in T$ y para todo $\omega \in \Omega$.
2. X y Y son *estocásticamente equivalentes* si $P(X_t = Y_t) = 1$ para todo $t \in T$.
3. X y Y son *estocásticamente equivalentes en el sentido amplio* si para cada $n = 1, 2, \ldots$, para todo $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ y $\{B_1, \ldots, B_n\} \subset 2^\Omega$ se satisface:
   $P(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \cdots, X_{t_n} \in B_n) = P(Y_{t_1} \in B_1, Y_{t_2} \in B_2, \cdots, Y_{t_n} \in B_n)$
   Es claro que ii) implica iii) (¿Porqué?)
4. X y Y se dicen *indistinguibles* si casi todas sus trayectorias coinciden, esto es, $P(X_t = Y_t, t \in T) = 1$.

DEFINITION

Sean $X = \{X_t, t \in T\}$ y $Y = \{Y_t, t \in T\}$ dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, decimos:

1. X y Y son *iguales* si $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo $t \in T$ y para todo $\omega \in \Omega$.
2. X y Y son *estocásticamente equivalentes* si $P(X_t = Y_t) = 1$ para todo $t \in T$.
3. X y Y son *estocásticamente equivalentes en el sentido amplio* si para cada $n = 1, 2, \ldots$, para todo $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ y $\{B_1, \ldots, B_n\} \subset 2^{\Omega}$ se satisface:
   $P(X_{t_1} \in B_1, X_{t_2} \in B_2, \cdots, X_{t_n} \in B_n) = P(Y_{t_1} \in B_1, Y_{t_2} \in B_2, \cdots, Y_{t_n} \in B_n)$
   Es claro que ii) implica iii) (¿Porqué?)
4. X y Y se dicen *indistinguibles* si casi todas sus trayectorias coinciden, esto es,
   $P(X_t = Y_t, t \in T) = 1$.

Definition

Si para todo $t_1, t_2, ..., t_n$, $t_1 < t_2 < ... < t_n$, las variables aleatorias

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$$

son independientes, entonces se dice que el proceso $\{X(t), t \in T\}$ tiene incrementos independientes.

Definition

Si para todo $t_1, t_2, ..., t_n$ las distribuciones conjuntas de

$$(X(t_1), X(t_2)...,\ X(t_n)) \text{ y } (X(t_1+h), X(t_2+h)...,\ X(t_n+h))$$

son iguales para todo $h > 0$, entonces se dice que el proceso $\{X(t), t \in T\}$ es estacionario de orden n. Si el proceso es estacionario de orden n para todo n, entonces se dice que el proceso es estrictamente estacionario.

Definition

Si para todo $t_1, t_2, ..., t_n$, $t_1 < t_2 < ... < t_n$, las variables aleatorias

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$$

son independientes, entonces se dice que el proceso $\{X(t), t \in T\}$ tiene incrementos independientes.

Definition

Si para todo $t_1, t_2, ..., t_n$ las distribuciones conjuntas de

$$(X(t_1), X(t_2)...,\ X(t_n)) \text{ y } (X(t_1 + h), X(t_2 + h)...,\ X(t_n + h))$$

son iguales para todo $h > 0$, entonces se dice que el proceso $\{X(t), t \in T\}$ es estacionario de orden n. Si el proceso es estacionario de orden n para todo n, entonces se dice que el proceso es estrictamente estacionario.

Definition

Un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ se llama proceso de segundo orden o regular si $E\left[X_t\right]^2 < \infty$ para todo $t \in T$. Las funciones de media y de covarianza del proceso están definidas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(X_t) \\ C_X(s,t) &= Cov(X_s, X_t) \end{aligned}$$

Definition

Un proceso estocástico regular $\{X(t), t \in T\}$ se llama ortogonal si $E\left[X_t X_s\right] = 0$ para todo $t, s, \in T$ y $t \neq s$.

Definition

Un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ se llama proceso de segundo orden o regular si $E[X_t]^2 < \infty$ para todo $t \in T$. Las funciones de media y de covarianza del proceso están definidas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(X_t) \\ C_X(s,t) &= Cov(X_s, X_t) \end{aligned}$$

Definition

Un proceso estocástico regular $\{X(t), t \in T\}$ se llama ortogonal si $E[X_t X_s] = 0$ para todo $t, s, \in T$ y $t \neq s$.

DEFINITION

Un proceso de segundo orden se llama proceso con covarianza estacionaria o estacionario en sentido amplio o débilmente estacionario, si su función de media $m_X(t)$ es independiente de t y si su función de covarianza $C_X(s,t)$ es una función que depende sólo de $|t-s|$, para todo t,s,esto es,

$$C(s,t) = Cov(X(s),X(t)) = f(t-s).$$

Un proceso que no es estacionario se llama evolutivo.

PROCESO DE MARKOV

Si $\{X(t), t \in T\}$ es un proceso estocástico tal que dado el valor de $X(s)$, el valor de $X(t), t > s$, no depende de los valores de $X(u), u < s$, entonces el proceso se llama proceso de Markov. Un proceso de Markov con parámetro de tiempo discreto se llama cadena de Markov. A grosso modo se tiene que un proceso de Markov es un proceso estocástico con la propiedad de que dado el valor de X_t, los valores de X_u para $u > t$, no dependen de X_s para $s < t$. Esto es, si se conoce de manera exacta el presente entonces el conocimiento del pasado no tiene ninguna influencia en la estructura probabilística del futuro.

De manera más precisa:
Definición *El proceso estocástico real* $\{X_t : t \in T\}$ *es un proceso de Markov si para todo* $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$ y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *se satisface que:*

$$P\left(X_t \in B \mid X_{t_1},\ X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}\right) = P\left(X_t \in B \mid X_{t_n}\right)$$

o equivalentemente,

PROCESO DE MARKOV

Definición *El proceso estocástico real* $\{X_t : t \in T\}$ *es un proceso de Markov si para todo* $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$ y $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, *se satisface que:*

$$P\left(X_t \in (a,b] \mid X_{t_1} = x_1,\ X_{t_2} = x_2, \cdots, X_{t_n} = x_n\right) = P\left(X_t \in (a,b] \mid X_{t_n} = x_n\right)$$

Si el conjunto de estados es discreto y el conjunto de índices es un intervalo I de $\mathbb{R}$, entonces el proceso de Markov recibe el nombre de *cadena de Markov con parámetro de tiempo continuo.* Si tanto el conjunto de estados como el conjunto de índices son discretos entonces el proceso de Markov recibe el nombre de *cadena de Markov con parámetro de tiempo discreto.*