Probabilidad - II 2024
Universidad Nacional de Colombia - Nov 06

Tutor: Carlos E. Alonso–Malaver.

ö. **Para masticar-rumiar**:

No hay nada,
Más importante en tu éxito (alcanzarlo)
que la imagen, que tú tengas,
De ti mismo, de ti misma...
Mario Alonso Puig

Variables Aleatorias Continuas

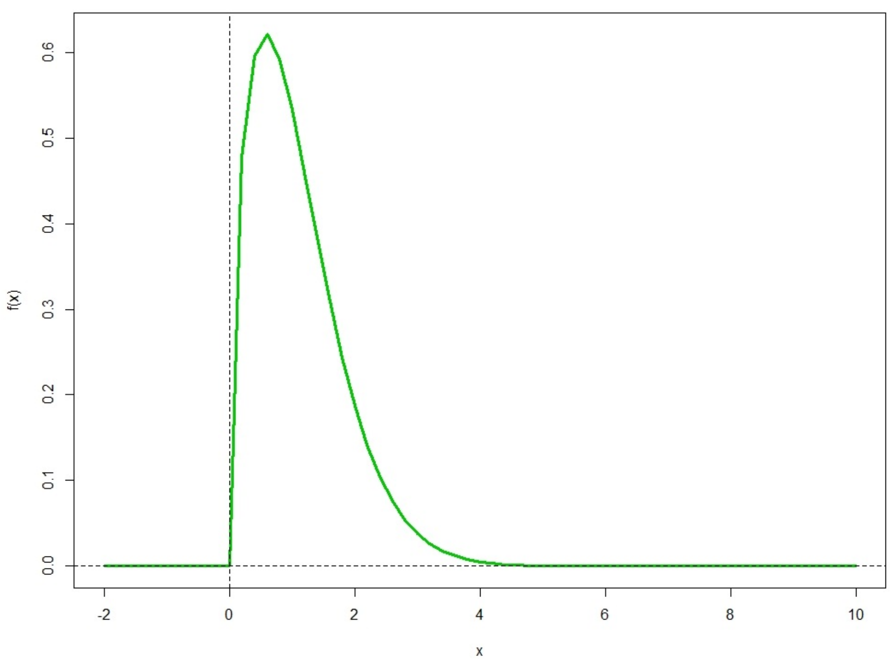
1. Rebobinando v.a. continuas: Imagina que una variable X puede tomar cualquier valor en el intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, i.e $P(X \in (a, b)) = 1$.

   - Cuántos valores posibles puede tomar?, o mejor cuál es el cardinal del intervalo (a, b).
   - De lo anterior cuál crees es la probabilidad de un valor fijo $x_0 \in (a, b)$?
     RTA: Si X es una variable aleatoria continua (absolutamente continua), entonces para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que $P(X = x_0) = 0$.
   - De lo anterior se define una función de densidad f_X a partir de la cual, dado un conjunto $B \in \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$: σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$),

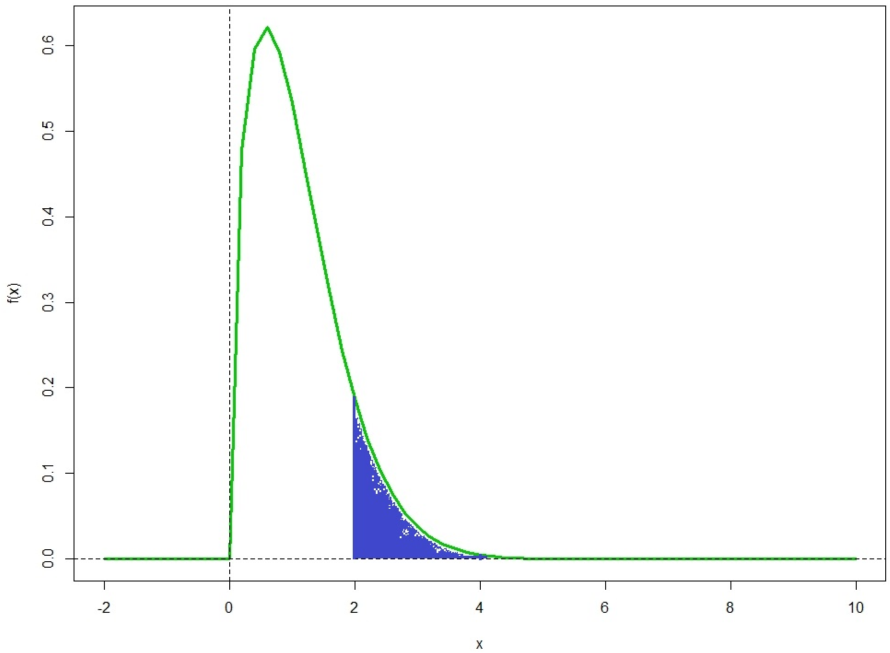
$$P_X(B) = P(X \in B) = \int_B f_X(x)\mathrm{d}x$$

2. Ejemplo 1.: Vamos a un ejemplo más cercano a lo que se hace en el campo aplicado, X: Tiempo de sobrevida. Asume:

   - Estamos desarrollando un nuevo tipo de batería para celular.
   - De acuerdo a los primeros ensayos el tiempo de duración (antes de la primera falla) de éste elemento es bien ajustado por una distribución Weibull de parámetros $\lambda = 1.2$ (en 10 miles de horas) y $\kappa = 1.5$.
   - La función que describe el comportamiento de X (en forma general) está dada por:
   $$f_X(x) = \frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\kappa-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\kappa}} I_{(0,\infty)}(x)$$
   Donde $\lambda > 0$ es el parámetro de escala y $\kappa > o$ es el parámetro de forma.



   - Imagina se desea calcular $P(2 \leq X \leq 4)$



$$
\begin{aligned}
P(2 \leq X \leq 4) &= \int_{2}^{4} \frac{1.5}{1.2}\left(\frac{x}{1.2}\right)^{1.5-1} e^{-\left(\frac{x}{1.2}\right)^{1.5}} \mathrm{d}x \\
&= -e^{-\left(\frac{x}{1.2}\right)^{1.5}}\Big|_{2}^{4} = e^{-\left(\frac{2}{1.2}\right)^{1.5}} - e^{-\left(\frac{4}{1.2}\right)^{1.5}} \\
&= 0.1163 - 0.0023 = 0.1140
\end{aligned}
$$

Un camino alterno para no estar calculando cada vez la integral es $P(2 \leq X \leq 4) = F_X(4) - F_X(2)$. Camino que veremos a continuación.

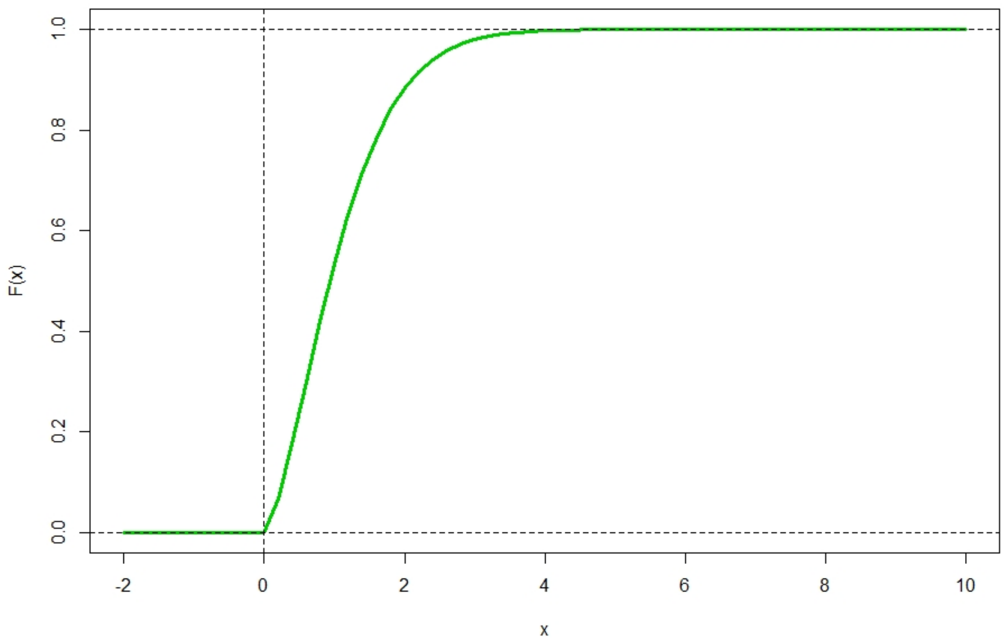
- **Función de Distribución** - Familia Weibull. Siguiendo la definición de función de distribución acumulada se tiene:

$$
F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{0}^{x} \frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa}} \mathrm{d}t \tag{1}
$$

  - Haciendo: $u = \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa}$
  - Se tiene: $\mathrm{d}u = \frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa-1} \mathrm{d}u$

- La Ec. (1) se transforma en:

$$F_X(x) = -e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa}}\Big|_0^x = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\kappa}} \tag{2}$$



Volviendo al problema de la duración de una batería se tiene:

$$P(2 \leq X \leq 4) = F_X(4) - F_X(2) = e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\kappa}} - e^{-\left(\frac{4}{\lambda}\right)^{\kappa}}$$

Observa, que en éste caso:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{1.2}\right)^{1.5}} \tag{3}$$

De donde

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 4) &= F_X(4) - F_X(2) \\ &= \left[1 - e^{-\left(\frac{4}{1.2}\right)^{1.5}}\right] - \left[1 - e^{-\left(\frac{2}{1.2}\right)^{1.5}}\right] \end{aligned}$$

3. **Variables Aleatorias Continuas: Generalización**: Al trabajar con una variable aleatoria continua X, se tiene:

   i. Una función de densidad f_X que cumple dos condiciones

   - $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
   - $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$

   ii. Dadas las propiedades anteriores tiene sentido:

   - $P(X \in B) = \int\limits_{B} f_X(x)\mathrm{d}x$, donde B es un Boreliano.
   - En particular:
     $F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x$, para todo $x \in \mathbb{R}$

4. Ejemplo 2.: Dada X variable aleatoria, se dice que tiene distribución uniforme continua en el intervalo (a, b), $X \sim U(a, b)$, si su función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x).$$

   No es complicado mostrar, que su función de distribución (acumulada) está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \quad \text{si} \quad a \leq x < b \\ 1 \quad \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

5. **Función de Distribución Acumulada** - Propiedades:
   Para lo que sigue, asume $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espacio de probabilidad y $X : \Omega \to \mathbb{R}$, X función de Borel (es decir variable aleatoria)

   i. F_X es una función no-decreciente, es decir dados $x_1 < x_2$ entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.
   Demo:
   Observa: $A_1 = X^{-1}(-\infty, x_1] \subset X^{-1}(-\infty, x_2] = A_2$ entonces $P(A_1) \leq P(A_2)$, y

$$\begin{aligned} F_X(x_1) &= P_X\left((-\infty, x_1]\right) = P(A_1) \\ &\leq P(A_2) = P_X\left((-\infty, x_2]\right) = F_X(x_2) \end{aligned}$$

ii. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

Demo:

o. Define $A_n = (-\infty, x_n]$ con $x_n \downarrow -\infty$, observa $X^{-1}(A_n) \downarrow \emptyset$. De donde

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} F_X(x) &= \lim_{n \to \infty} P\left(X^{-1}(A_n)\right) \\
&= P\left(\lim_{n \to \infty} X^{-1}(A_n)\right) = P(\emptyset) = 0
\end{aligned}
$$

oo. Ident: si $A_n = (-\infty, x_n]$ con $x_n \uparrow \infty$, entonces $X^{-1}(A_n) \uparrow \Omega$, y

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = P(\Omega) = 1$$

Otras propiedades,

iii. F_X es una función continua a derecha, $\lim_{y \to x^+} F_X(y) = F(x^+) = F_X(x)$.

iv. $\lim_{y \to x^-} F_X(y) = F_X(x^-) \leq F_X(x)$.

v. $P(X > x) = 1 - F_X(x)$.

vi. $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.

vii. $P(X < x) = F_X(x^-)$.

viii. $P(X = x) = F_X(x^+) - F_X(x^-)$.

6. Trabajo en Casa: Asume que, X, la resistencia a la fatiga de filamentos kevlar (49/epoxy) sometidos a una presión constante a nivel de estrés del 90 % se comporta de acuerdo a distribución de Rayleigh, i.e.

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} I_{(0,\infty)}(x).$$

Para la distribución anterior

- Compara ésta distribución con la distribución de Weibull.
- Halla la función de distribución acumulada (f.d.a.) F_X.
- Asumiendo $\sigma = 1.25$ Halla.
  - $P(X > 2)$.
  - $P(1 \leq X \leq 1.5)$.

- $P(-2 \leq X \leq 0.5)$.

7. Trabajo en Clase: Asume la densidad asociada a la distribución de X v.a. es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \tag{4}$$

Halla:

- $P\left(X \leq \frac{\pi}{4}\right)$
- $P\left(0.1\pi \leq X \leq 0.2\pi\right)$

Fin - Clase del día Miércoles Dic. 06

Distribuciones Bivariadas

i.) Asume se tienen dos variables X, Y y se desea conocer el comportamiento bivariado o conjunto del vector (X, Y)

ii.) Lo anterior equivale a (es el propósito de la sección que sigue), se desea hallar $P(X \in A, Y \in B) = P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\})$, ésto para todo A y B de Borel.

Distribución Conjunta Discreta

1. Ejemplo 3: Distribución de la Población de Quibdo por:
   - X: Número de Cuartos que dispone el hogar para dormir (incluye Sala y Comedor),
   - Y: Número de personas en el Hogar.
   - Unidad de Observación: Hogar.

	Y: Personas					
X: Cuartos	1	2	3	4	5	6
1	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
2	0.03	0.01	0.03	0.03	0.02	0.00
3	0.08	0.10	0.08	0.08	0.03	0.05
4	0.04	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
5	0.00	0.01	0.01	0.04	0.02	0.02

Cuadro 1: Fuente: GEIH Diciembre - 2019

A partir de la tabla anterior, asumiendo que se va a elegir al azar un hogar de la Ciudad de Quibdo, se desea calcular las siguientes probabilidades:

a) El hogar elegido tiene una persona y tres cuartos

b) El hogar elegido tiene más de 4 personas y menos de 3 cuartos

c) El hogar elegido tiene el mismo número de cuartos y personas.

d) El hogar elegido tiene más personas que cuartos

El valores asociados a los eventos anteriores son:

1. $f_{X,Y}(3,1) = P(X = 3, Y = 1) = 0.08$

2.

$$\begin{aligned}
P(X<3,Y>4) &= P(X=1,Y>4)+P(X=2,Y>4)\\
&= P(X=1,Y=5)+P(X=1,Y=6)\\
&+ P(X=2,Y=5)+P(X=2,Y=6)\\
&= 0.00+0.00+0.02+0.00
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)+\\
&\ldots+P(X=5,Y=5)\\
&= 0.00+0.01+0.08+0.06+0.02
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
P(X<Y) &= P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)\\
&+\ldots+P(X=1,Y=6)
\end{aligned}$$

Distribuciones Marginales

2. La función de distribución conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ nos brinda información sobre:
   - El comportamiento conjunto de X y Y, (del vector $\mathbf{X}=(X,Y)$).
   - Distribución univariada de X (análogo de Y), veamos

$$\begin{aligned}
f_X(2) = P(X=2) &= P\left(\{X=2\}\bigcap_{j=1}^{6}\{Y=j\}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{6} P(X=2,Y=j) = \sum_{j=1}^{6} f_{X,Y}(2,j)\\
&= 0.12
\end{aligned}$$

   Siguiendo un razonamiento análogo al anterior,

$$\begin{aligned}
f_Y(4) = P(Y=4) &= P\left(\{Y=4\}\bigcap_{j=1}^{5}\{X=j\}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{5} P(X=j,Y=4) = \sum_{j=1}^{5} f_{X,Y}(j,4)\\
&= 0.21
\end{aligned}$$

Lo que debes observar es:

- La distribución de X es la suma por cada fila, si ves la Tabla 2 es la marginal a derecha.
- La distribución de Y es la suma por cada columna, es decir la marginal inferior, ver Tabla 2.

	Y: Personas						
X:	1	2	3	4	5	6	$f_X(x)$
1	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.02
2	0.03	0.01	0.03	0.03	0.02	0.00	0.12
3	0.08	0.10	0.08	0.08	0.03	0.05	0.42
4	0.04	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.34
5	0.00	0.01	0.01	0.04	0.02	0.02	0.10
$f_Y(y)$	0.15	0.19	0.19	0.21	0.13	0.13	1.00

Cuadro 2: 2. Fuente: GEIH Diciembre - 2019

Distribuciones Condicionales

3. Unido a las distribuciones marginales f_X y f_Y, la distribución conjunta nos permite responder preguntas sobre la distribución de X, asumiendo que $Y = k$, que se conoce como distribución condicional, veamos:

$$\begin{aligned} g_{X|Y=2}(3) = P(X=3|Y=2) &= \frac{P(X=3, Y=2)}{P(Y=2)} \\ &= \frac{f_{X,Y}(3,2)}{f_Y(2)} \\ &= \frac{0.10}{0.19} = 0.526 \end{aligned}$$

   Cómo se interpreta el número anterior?: Dentro de los hogares con 2 personas, la probabilidad de hallar un hogar con tres cuartos es 0.526.

4. Análogo podemos pensar en la distribucíon de Y, asumiendo que $X = k$,

distribucón condicional de Y dado X, veamos:

$$
\begin{aligned}
g_{Y|X=3}(4) = P(Y=4|X=3) &= \frac{P(X=3, Y=4)}{P(X=3)} \\
&= \frac{f_{X,Y}(3,4)}{f_X(3)} \\
&= \frac{0.08}{0.42} = 0.190
\end{aligned}
$$

Interpretación: dentro de los hogares que tienen 3 cuartos, la probabilidad de hallar un hogar con 4 personas es 0.190.

5. **En resumen**: Si conocemos la distribución conjunta del vector discreto $\mathbf{X} = (X, Y)$, $f_{X,Y}(x, y)$, entonces podemos obtener:

   - La distribución marginal (univariada) de X,

   $$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y)$$

   - La distribución marginal (univariada) de Y,

   $$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y)$$

   - La distribución condicional (univariada) de Y dado X,

   $$g_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)},$$

   para $f_X(x) > 0$.

   - La distribución condicional (univariada) de X dado Y,

   $$g_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

   para $f_Y(y) > 0$.

Distribución Conjunta Continua

1. Análogo a lo hecho anteriormente, el propósito de lo que sigue es mostrar una distribución conjunta para un vector continuo $\mathbf{X} = (X, Y)$ y desarrollar las funciones de densidad marginal (univariada) y la función de densidad condicional (univariada).

2. Si $f_{X,Y}(x, y)$ es una función de densidad conjunta se tiene:

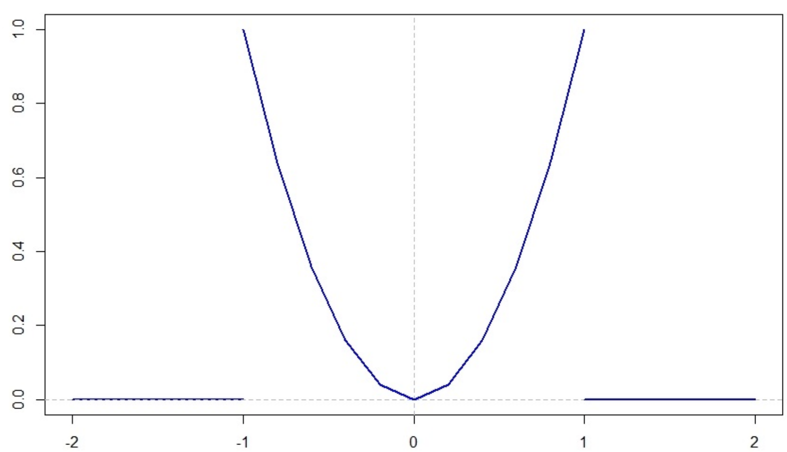
   i.) $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

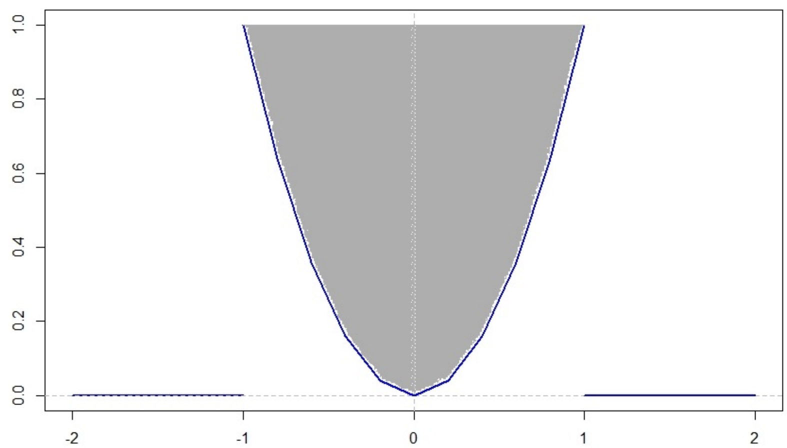
   ii.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 1$

   iii.) $P((X, Y) \in B) = \int \int\limits_{B} f_{X,Y}(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, donde $B \subset \mathbb{R}^2$.

3. **Distribución Conjunta**: Asume se tiene dos variables aleatorias continuas X, Y, con función de distribución conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) := \begin{cases} cx^2 y & \text{si } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \tag{5}$$





Si observas $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 0$, y

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} x^2 y \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} cx^2 \frac{y^2}{2}\bigg|_{x^2}^{1} \mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^4)\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{4c}{21}
\end{aligned}
$$

De donde $c = 21/4$. De lo anterior:

$$
f_{X,Y}(x,y) := \begin{cases} \frac{21}{4}x^2 y & \text{si } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \tag{6}
$$

4. **Distribuciones Marginales**: Dado lo anterior se tiene que las funciones de densidad marginal f_X y f_Y están dadas por:

$$
f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y
$$

y

$$
f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x.
$$

Resultados que aplicados al ejemplo que se viene desarrollando, nos llevaa,

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = \int_{x^2}^{1} \frac{21}{4}x^2 y \mathrm{d}y \\
&= \frac{21}{8}x^2(1-x^4)I_{(-1,1)}(x). \qquad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4}x^2 y \mathrm{d}x \\
&= \frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}I_{(0,1)}(y). \qquad (8)
\end{aligned}$$

5. **Distribuciones Condicionales**: Lo primero que debes recordar es que las funciones de densidad condicional para vectores aleatorios continuos no se desarrollan como en el caso discreto, sino que se definen.
Así, dadas:

   - $f_{X,Y}(x,y)$ función de distribución conjunta del vector (X,Y),
   - $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ funciones de densidad univariadas de X y Y, resp.

   La función de densidad condicional $g_{X|Y=y}(x)$ se define como

$$g_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad (9)$$

   Para todo $y \in \mathbb{R}$ talque $f_Y(y) > 0$. Por simetría en la definición:

$$g_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \qquad (10)$$

   Para todo $x \in \mathbb{R}$ talque $f_X(x) > 0$.

6. Volviendo al Ejemplo:

$$\begin{aligned}
g_{X|y}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{21}{4}x^2 y}{\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{3}{2}\frac{x^2}{y^{\frac{3}{2}}}I_{\{x^2<y\}}(x), \quad 0<y<1. \qquad (11)
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} g_{Y|x}(y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{21}{4}x^2 y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)} \\ &= 2\frac{y}{1-x^4} I_{\{x^2<y\}}(y), \quad -1<x<1. \end{aligned} \tag{12}$$

Partiendo de la Ec. (11), si deseamos la distribución condicional de X dado $Y=\frac{1}{4}$, se tiene

$$g_{X|\frac{1}{4}}(x) = \frac{3}{2}\frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} I_{\{x^2<\frac{1}{4}\}}(x) = 12x^2 I_{\{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\}}(x). \tag{13}$$

Finalmente podemos comparar $P\left(X<-\frac{1}{2}\right)$ vs $P\left(X<\frac{1}{2}|Y=\frac{1}{4}\right)$. La probabilidad No condicionada es:

$$\begin{aligned} P\left(X<-\frac{1}{2}\right) &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{21}{8}x^2(1-x^4)\mathrm{d}x \\ &= \frac{21}{8}\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\times\frac{503}{128} \end{aligned} \tag{14}$$

De otro lado, se tiene

$$P\left(X<-\frac{1}{2}|Y=\frac{1}{4}\right) = 0 \tag{15}$$

7. **Observa - Colige**:

   - Dada X v.a. continua (absolutamente), con funciones de distribución y de densidad dadas por F_X y f_X, se tiene

     $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t \quad \text{y} \quad f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}.$$

   - Análogo se tiene para un vector aleatorio $\mathbf{X}=(X,Y)$ continuo (absolutamente), cuyas funciones de distribución y de densidad conjuntas dadas por $F_{X,Y}$ y $f_{X,Y}$ (resp.), se tiene

     $$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(t,\nu)\mathrm{d}t\mathrm{d}\nu \quad \text{y} \quad f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

8. **Variables Aleatorias Independientes**:

   - Dado $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad, sabemos (definición) que dados dos eventos $A, B \in \mathfrak{F}$, se dice que son independientes sii $P(AB) = P(A)P(B)$.
   - Llevando, de forma rápida, lo anterior a variables aleatorias se puede pensar que dadas X, Y v.a., éstas son variables aleatorias independientes sii
   $$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B),$$
   lo que es absolutamente correcto,
   - Pero debemos definir algunos elementos previamente, para que ésta definición sea exacta.

9. Ingredientes: En lo que sigue estamos trabajando sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, espacio de probabilidad.

   - Asume se tiene una colección de eventos $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_J\}$, se dice que éstos eventos son independientes si
   $$P\left(\bigcap_j A_j\right) = \prod_{j=1}^{J} P(A_j).$$
   - Ahora, dadas dos σ-álgebras $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$, con $\mathfrak{A}_j \subset \mathfrak{F}, \quad j = 1, 2$. Se dice que $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ son σ-álgebras independientes si dados $A \in \mathfrak{A}_1$ y $B \in \mathfrak{A}_2$, se tiene
   $$P(AB) = P(A)P(B).$$
   - Recuerda que dadas dos v.a. X, Y definidas sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ (espacio de probabilidad), se tiene que $\sigma(X) \subset \mathfrak{F}$ y $\sigma(Y) \subset \mathfrak{F}$.
     - Dadas dos v.a. X, Y, se dice son v.a. aleatorias independientes si sus respectivas σ-álgebras ($\sigma(X)$, $\sigma(Y)$) son independientes.
     - Lo anterior conlleva a que dados dos conjuntos de Borel, A y B, se tiene
     $$\begin{aligned} P_{X,Y}(A, B) &= P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) \\ &= P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A))P(Y^{-1}(B)) \\ &= P_X(A)P_Y(B). \end{aligned}$$

- A nivel aplicado, la independencia de dos v.a. X, Y, conlleva a:
  - $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F_X(x)F_Y(y)$
  - Del punto anterior se colige,

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = f_X(x) f_Y(y) \end{aligned}$$

  - Y por ende, la condicional de X dado $Y = y$ cumple:

$$\begin{aligned} g_{X|y}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x) \end{aligned}$$

- **Nota**: observa, que para cualquier pareja de v.a. X, Y:
  - Por definición

$$g_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad \text{y} \quad g_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

  - De donde:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_Y(y) g_{X|Y=y}(x) = f_X(x) g_{Y|X=x}(y)$$

10. Ejemplo 4: Veamos lo anterior aplicado a estadística bayesiana. Asume que se está realizando un proceso de control de calidad y nuestro interés es determinar (en estadística se habla de estimar) el porcentaje $\boldsymbol{\theta}$ de ítems defectuosos en una línea de producción .
    - Para lograr el propósito anterior, cada semana se toma al azar 25 unidades y se le somete a inspección.
    - Es decir tenemos una v.a. X, que indica ausencia - presencia de defecto.
    - Asumiremos que una vez observado $\boldsymbol{\theta} = \theta$ entonces $X \sim Binomial\,(\theta)$, $\theta \in [0, 1]$.
    - De acuerdo a información previa: $\boldsymbol{\theta} \sim Gamma(\alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

Lo anterior significa:
1.
$$g_{X|\boldsymbol{\theta}=\theta}(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}I_{\{x=1,\ldots,n\}}(x).$$
2.
$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{1-\alpha}e^{-\beta\theta}I_{\{\theta>0\}}(\theta).$$
Lo que nos permite llegar a:
$$f_{\boldsymbol{\theta},X}(\theta,x) = f_{\boldsymbol{\theta}}(\theta)\; g_{X|\boldsymbol{\theta}=\theta}(x) \tag{16}$$

Notas:

- La Ecuación (16) es la densidad asociada a la función de distribución conjunta de las v.a. $\boldsymbol{\theta}$ y X.
- La función $f_{\boldsymbol{\theta}}(\theta)$ se conoce como función de densidad de la distribución apriori. En ella se resume el conocimiento previo a la toma de la muestra
- El objetivo es hallar la función de densidad de la distribución aposteriori, i.e.
$$g_{\boldsymbol{\theta}|X=x}(\theta)$$
- En general el camino utilizado, es:
$$g_{\boldsymbol{\theta}|X=x}(\theta) = \frac{f_{\boldsymbol{\theta},X}(\theta,x)}{f_X(x)} \propto f_{\boldsymbol{\theta},X}(\theta,x),$$
sobre lo anterior se puede volver cuando tengamos los insumos necesarios, i.e. conocimiento de la distribución *Gamma*, Degroot(1986) pp. 286 - 289.

Fin - Clase del día Miércoles Dic. 11