Probabilidad - II 2024
Universidad Nacional de Colombia - Nov 06

Tutor: Carlos E. Alonso–Malaver.

ö. **Para masticar-rumiar**:

You are free, and that's why...
you are lost.

Franz Kafka

Cadenas de Markov

1. Ejemplo 1:
   - El objetivo es hallar la probabilidad de transición entre estratos socio-económicos $(E_1, E_2, E_3, E_4)^1$.
   - $U = (\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espacio de probabilidad inicial.
   - Se tiene una secuencia de observaciones $X_1, X_2, X_3, \ldots$ sobre U
   - Donde X_j (objeto aleatorio) toma valores en $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, con E_j=Estrato socio-económico j-ésima.
   - El objetivo es calcular $P(X_t = E_k | X_{t-1} = E_{j_1}, X_{t-2} = E_{j_2} \ldots)$
2. **Algunas definiciones**:
   - La secuencia $\{X_1, X_2, X_3, \ldots\} = \{X_t : \; t \in \mathbb{N}\}$ se conoce como proceso estocástico, dado que $t \in \mathbb{N}$ se habla de un proceso de tiempo discreto.
   - Fijo $t = t_0$, el objeto X_{t_0} es una variable aleatoria.

[1] E_4:= Estratos 4, 5 y 6.

- Para X_1, v.a. asociada al estado inicial de la cadena, es de interés conocer la distribución de X_1, es decir se requiere $P(X_1 = E_j) = p_j; \quad j = 1, 2, 3, 4$.

3. **Proceso de Markov - Cadena de Markov** Una Cadena de Markov es un proceso estocástico $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ que dada una secuencia de estados $E_j, E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}$ se satisface:

$$P(X_t = E_j | X_{t-1} = E_{j_1}, \ldots, X_{t-n} = E_{j_n}) = P(X_t = E_j | X_{t-1} = E_{j_1})$$

   - Es decir toda información contenida en $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-n}$, sobre el comportamiento de X_t, ésta contenida en X_{t-1}.

   - Un camino alterno para entender lo anterior es: si queremos predecir (bajo incertidumbre) X_t basta conocer $X_{t-1} = E_{j_1}$.
     En la expresión anterior, por ejemplo
$$P(X_t = E_3 | X_{t-1} = E_2). \tag{1}$$

   - Es la probilidad de pasar de E_2 a E_3 en un período de tiempo, esto es:
     - En el problema de movilidad social (cambiar de estrato socio-económico), si pensamos en $\Delta t = t - (t-1)$=5 años (una unidad de tiempo es 5 años),
     - La expresión en la Ec. (1), es la probabilidad de que una familia pase del estrato 2 al estrato 3, en un período de 5 años.

   La forma de entender
$$P(X_t = E_3 | X_{t-1} = E_2) = 0.05$$
   Es:
     - De cada 100 hogares ubicados socioeconómicamente en el estrato 2 en el momento $t-1$, se espera que 5 pasen o se ubiquen en el estrato tres en el momento t.
     - Del restante 95 % no tenemos información, o mejor, tenemos información en las probabilidades de transición $P(X_t = E_j | X_{t-1} = E_2), \quad j = 1, 2, 4$.

En general se tiene que:

$$P(X_t = E_j | X_{t-1} = E_i)$$

es una probabilidad condicional:

- Probabilidad de condicional de que en el tiempo t se observe (futuro) $X_j = E_j$ dado que en el momento anterior $t-1$ se ha observado (pasado-asumido) $X_{t-1} = E_i$.
- Es conocida como Probabilidad de Transición

En el contexto anterior, si notamos:

$$p_{ij}^{(t)} = P(X_t = E_j | X_{t-1} = E_i)$$

Podemos pensar en la matriz

$$P_t = \{p_{ij}^{(t)}\}_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(t)} & p_{12}^{(t)} & p_{13}^{(t)} & p_{14}^{(t)} \\ p_{21}^{(t)} & p_{22}^{(t)} & p_{23}^{(t)} & p_{24}^{(t)} \\ p_{31}^{(t)} & p_{32}^{(t)} & p_{33}^{(t)} & p_{34}^{(t)} \\ p_{41}^{(t)} & p_{42}^{(t)} & p_{33}^{(t)} & p_{44}^{(t)} \end{pmatrix}$$

- P_t es conocida como la Matriz de Transición de la Cadena $\{X_t : t \in T\}$.
- Brinda toda información a cerca del comportamiento (estocástico) del proceso una vez se determina la distribución del estado inicial (Distribución de X_1).

Estado de Llegada $\quad t$

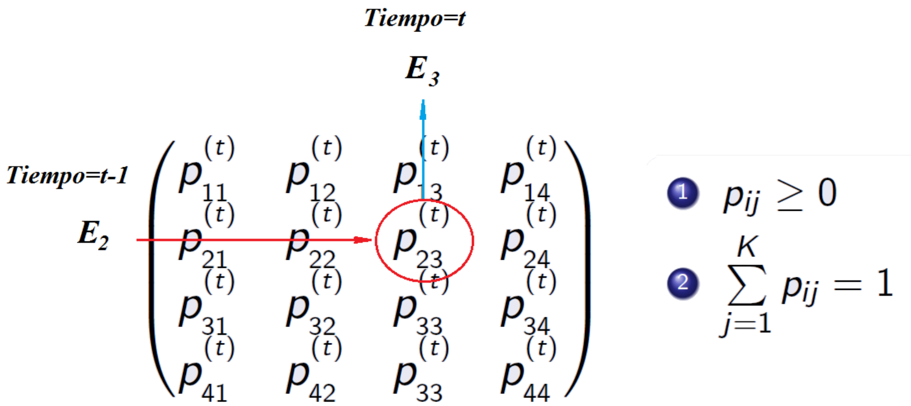
Estado Inicial $\quad t\text{-}1$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
p_{11}^{(t)} & p_{12}^{(t)} & p_{13}^{(t)} & p_{14}^{(t)} \\
p_{21}^{(t)} & p_{22}^{(t)} & p_{23}^{(t)} & p_{24}^{(t)} \\
p_{31}^{(t)} & p_{32}^{(t)} & p_{33}^{(t)} & p_{34}^{(t)} \\
p_{41}^{(t)} & p_{42}^{(t)} & p_{33}^{(t)} & p_{44}^{(t)}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Tiempo=t

Tiempo=t-1

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} & & E_3 & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ E_2 \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
p_{11}^{(t)} & p_{12}^{(t)} & p_{13}^{(t)} & p_{14}^{(t)} \\
p_{21}^{(t)} & p_{22}^{(t)} & p_{23}^{(t)} & p_{24}^{(t)} \\
p_{31}^{(t)} & p_{32}^{(t)} & p_{33}^{(t)} & p_{34}^{(t)} \\
p_{41}^{(t)} & p_{42}^{(t)} & p_{33}^{(t)} & p_{44}^{(t)}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



4. **Proceso de Markov No-homogéneo**:
   Si la matriz P_t depende de t, es decir

$$P(X_t = E_j | X_{t-1} = E_i) \neq P(X_{t+k} = E_j | X_{t+k-1} = E_i), \quad k \neq 0 \qquad (2)$$

   se habla de una Cadena de Markov No-homogénea.

5. **Proceso de Markov Homogéneo**
   La Cadena de Markov de interés en el curso es el caso en el que la matriz P_t NO depende de t, es decir

$$P(X_k = E_j | X_{k-1} = E_i) = P(X_2 = E_j | X_1 = E_i) = p_{ij}, \quad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2. \qquad (3)$$

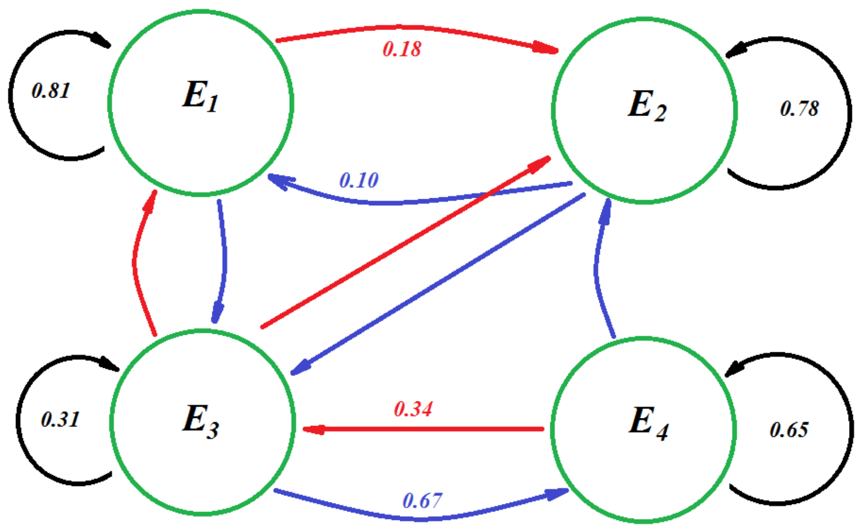
   i.e. la probabilidad de ir del estado E_i al estado E_j en un paso no depende del momento en el tiempo. Caso en el que se habla de una Cadena de Markov homogénea o de una Cadena de Markov con Probabilidades de Transición Estacionarias.

6. Ejemplo: Pensemos en Movilidad Social entre 1978 y 1998, asumiendo que la Cadena de Transición entre estratos es Estacionaria y bien modelada por la matriz,

$$P = \begin{pmatrix} 0.81 & 0.18 & 0.01 & 0.00 \\ 0.10 & 0.78 & 0.12 & 0.00 \\ 0.00 & 0.02 & 0.31 & 0.67 \\ 0.00 & 0.01 & 0.34 & 0.65 \end{pmatrix}$$

   Trabajando en la primera fila: asumiendo que el período de análisis es 5 años, se tiene que:
   De los hogares que se ubicaban en el Estrato Uno (E_1), en el año 0 ($t-1$)

- El 81 % permanecieron en el mismo estrato 5 años más tarde.
- El 18 % pasaban (pasaron) al Estrato Dos (E_2) y
- El restante 1 % pasó al Estrato Tres.
- El salto al estrato 4 es muy complicado en 5 años, aunque pudo darse.



Observa:

a) $p_{ij} \geq 0$

b) $\sum_{j=1}^{K} p_{ij} = 1$

7. Ahora piensa que deseamos saber cuál es la probabilidad de pasar de E_i a E_j en dos períodos, es decir queremos hallar el valor de $p_{ij}^{(2)} = P(X_t = E_j | X_{t-2} = E_i)$, i.e.

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(2)} &= P(X_t = E_j | X_{t-2} = E_i) \\
&= P\left(\{X_t = E_j\} \cap \bigcup_{l=1}^{4} \{X_{t-1} = E_k\} \middle| X_{t-2} = E_i \right) \\
&= P\left(\bigcup_{k=1}^{4} \{X_t = E_j\} \cap \{X_{t-1} = E_k\} \middle| X_{t-2} = E_i \right) \\
&= \sum_{k=1}^{4} P\left(\{X_t = E_j\} \cap \{X_{t-1} = E_k\} | X_{t-2} = E_i \right) \\
&= \sum_{k=1}^{4} P\left(X_{t-1} = E_k | X_{t-2} = E_i \right) P\left(X_t = E_j | X_{t-1} = E_k, X_{t-2} = E_i \right) \\
&= \sum_{k=1}^{4} p_{ik} p_{kj}
\end{aligned}$$

Lo anterior implica:

- Si notamos la matriz de transición en dos pasos con $P^{(2)}$, se cumple que
$$P^{(2)} = PP$$

- Por inducción, si notamos la matriz de transición en $k \geq 1$ pasos con $P^{(k)}$, entonces
$$P^{(k)} = P^k.$$
La matriz de transición en k pasos es igual a la matriz de transición en un paso a la potencia k.

8. Volviendo al ejercicio de Movilidad Social entre 1978 y 1998, se tiene (aprox.)

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.29 & 0.03 & 0.01 \\ 0.16 & 0.63 & 0.13 & 0.08 \\ 0.00 & 0.03 & 0.33 & 0.64 \\ 0.00 & 0.02 & 0.33 & 0.65 \end{pmatrix}$$

Trabajando en la segunda fila, se tiene: de los hogares que se ubicaban en el Estrato Dos (E_2), en el año 0 $t-2$

- El 16 % pasaron al Estrato 1, diez años después.
- El 63 % permanecieron en el mismo estrato (E_2).
- El 13 % pasó al Estrato Tres.
- El restante 8 % paso al Estrato 4.

Finalmente observa que pasar del estrato E_1 al estrato E_4 en diez años, tiene una probabilidad mayor que cero, 0.01.

9. **Distribución Esperada en Cada Período**.
Asume:

- Se conoce la distribución en el período inicial (X_1), esto es conocemos $\nu_i = P(X_1 = E_i) \quad i = 1, 2, 3, 4$.
- Se desea conocer cuál es distribución esperada de la poblacion en X_2

Lo anterior nos lleva a:

$$\begin{aligned}
\eta_j = P(X_2 = E_j) &= P\left(\{X_2 = E_j\} \cap \bigcup_{i=1}^{4}\{X_1 = E_i\}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{4}\{X_2 = E_j\} \cap \{X_1 = E_i\}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{4} P(\{X_2 = E_j\} \cap \{X_1 = E_i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{4} P(X_1 = E_i)P(X_2 = E_j | X_1 = E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{4} \nu_i p_{ij}
\end{aligned}$$

De donde se tiene que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta} &= (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \\
&= (P(X_2 = E_1), \ldots, P(X_2 = E_4)) \\
&= \boldsymbol{\nu} P
\end{aligned}$$

En el ejemplo de Movilidad Social, asumiendo[2] $\boldsymbol{\nu} = (0.21, 0.32, 0.29, 0.18)$ distribución por estrato en 1978, entonces

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\nu} P = (0.202, 0.295, 0.192, 0.311),$$

sería la distribución esperada en 1983. Los valores iniciales $\boldsymbol{\nu}, P$ son todos estimados con fines pedagógicos.

10. Se puede mostrar (no es complicado), que si desea la distribución esperada de X_{k+1}, es decir $\tau_j = P(X_{k+1} = E_j)$, se cumple

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \\ &= (P(X_{k+1} = E_1), \ldots, P(X_{k+1} = E_4)) \\ &= \boldsymbol{\nu} P^k \end{aligned}$$

Donde $\boldsymbol{\nu}$ es la distribución en el período inicial (X_1) y P es la matriz de transición de un paso (5 años).

11. **The gambler's ruin**: Lectura, para ello revisa la siguiente matriz:

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & i-2 & i-1 & i & i+1 & i+2 & i+3 \\ \hline i-2 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i-1 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ i+1 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ i+2 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \end{array}$$

Donde $q = 1 - p$.

Fin - Clase del día Miércoles Nov. 20

[2] https://www.larepublica.co/, martes, 15 de marzo de 2022