Probabilidad - II 2024
Universidad Nacional de Colombia - Nov 06

Tutor: Carlos E. Alonso–Malaver.

La queja es la voz de la derrota.
La acción es la única forma
de avanzar hacia la victoria.
Que no siempre es segura.
España

Espacios de Muestrales Finitos

1. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ con $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$ y $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$.

2. La medida de probabilidad P se caracteriza completamente al especificar los valores $p_j := P(\{\omega_j\})$, $j = 1, 2, \ldots, K$.

3. Donde la secuencia $\{p_j\}_{j=1}^{K}$ satisface

   a) $p_j \geq 0$, y

   b) $\sum_{j=1}^{K} p_j = 1$

   Lo anterior es claro si piensas en $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$P(A) = \sum_{\omega_j \in A} p_j.$$

4. Ejemplo 1:

   - $\mathbb{E}_1$: Lanzamiento de un dado.
   - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, con $p_j = \frac{1}{6}$

- A: Sale un número mayor a 2, i.e. $A = \{5, 6\}$
- B: Sale un número multiplo a 3, i.e. $B = \{3, 6\}$

5. **Caballito de Troya** (Ejemplo 2).
   - $\mathbb{E}_2$: Lanzamiento de una moneda tres veces, moneda en la que $P(C) = p \in (0, 1)$.
   - $\Omega_{\mathbb{E}_2} = \{(C, C, C), (C, C, S), (C, S, C), \ldots, (S, S, S)\} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8\}$.
   - $p_j = p^r(1-p)^{3-r}$, $j = 1, 2, \ldots, 8$. donde r indica el número de caras en el array.

Espacios de Muestrales Laplacianos

1. **Definición**: Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ asociado a un experimento $\mathbb{E}$ con Ω conjunto finito, i.e $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$, se dice que $\mathbb{E}$ es un experimento de Laplace (Laplaciano), si $P(\omega_j) = \frac{1}{K} : \quad j = 1, 2, \ldots, K$.
   Nota: Dada la definción anterior, si se tiene un $A \in \mathcal{F}$

   $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

   Resultado que nos lleva a pensar que los insumos para llegar a $P(A)$ es hallar los cardinales de A y Ω, que es la misión principal de los métodos de conteo.

2. **Métodos de Conteo**

   a) **Trabajo en Clase**:
      - $\mathbb{E}$: Selección al azar de una carta de un mazo de poker.
      - Halla Ω y $|\Omega|$
      - Halla la probabilidad de:
        - A: Sale un as.
        - B: Sale un múltiplo de 4.
        - C: Sale un número menor a 7.

   b) **Regla de la Multiplicación**: Imagina se tiene un experimento aleatorio E que se realiza en dos etapas independientes E_1 y E_2, bajo las siguientes condiciones:
      - En la primera etapa los posibles resultados son: $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

- Independientemente de lo obtenido en la primera etapa en la segunda se puede obtener: $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

De lo anterior:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (x_1, y_1), & (x_1, y_2), & \ldots, & (x_1, y_n), \\ (x_2, y_1), & (x_2, y_2), & \ldots, & (x_2, y_n), \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_m, y_1), & (x_m, y_2), & \ldots, & (x_m, y_n) \end{array} \right\}$$

y $|\Omega| = mn$.

Ejemplos:

i. Lanzamiento k dados (seis caras, marcadas $1, 2, \ldots, 6$).

ii. Lanzamiento n monedas.

iii. Lanzamiento de un dado y una moneda.

iv. Juego de ruleta en varias ocasiones.

Escritura de los espacios muestrales para:

- Lanzamiento $k = 1, 2, 3$ dados.
- En cada caso hallar p_j (observa es un experimento Laplaciano).

c) **Permutaciones**:
Ejemplo 3

- $\mathbb{E}$:=Se tiene una baraja de pocker, 52 cartas distintas, de las cuales se seleccionaran aleatoriamente 5 y sin reemplazo (la carta extraída no se devuelve al mazo).
- Se desea calcular la probabilidad de: B := salen cinco cartas con pinta de diamante.
- Los pasos para resolver el problema anterior son:
  1. Determinar el tamaño del espacio muestral
  2. Determinar el tamaño del evento

  Hallar el tamaño del espacio muestral asociado a éste experimento es pensar en 5-casillas a llenar con el número de posibles resultados en cada etapa, i.e.

52	51	50	49	48

de donde $n(\Omega) = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48$.
Determinar el tamaño del evento, $B :=$ Salgan cinco cartas con pinta de diamante, se debe realizar un análisis análogo al anterior,

13	**12**	**11**	**10**	**9**

de donde $n(B) = 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9$. De lo anterior

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} \approx 0.00005$$

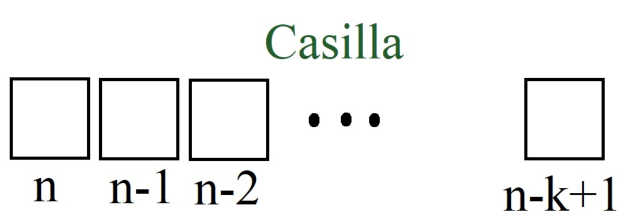
Ejemplo 4: Piensa en una rifa bajo las siguientes condiciones:

- Se tienen los números del 1 al 7.
- Se seleccionarán 3 al azar y sin reemplazo. Es decir se colocan en una bolsa negra 7 papeles marcados del uno al siete y se escoge el primero al azar se observa, se deja fuera de la bolsa y se escoge el siguiente, and so on... (selección al azar sin reemplazo).
- Importa el orden de salida, es decir $(3, 4, 1) \neq (1, 3, 4)$. Discusión Array vs Conjunto.
- Gana aquella persona que acierta la secuencia obtenida.
- Halla el tamaño de Ω y la probabilidad de ganar para cada permutación.

Permutaciones: Generalización: Asume se realizará un experimento con las siguientes características:

- Se tienen n objetos diferentes (diferenciables).
- Se seleccionarán k elementos al azar y sin reemplazo, de los n objetos antes mencionados ($k \leq n$).
- Importa el orden de elección de cada objeto.

Observa:



- El número total de arreglos o posibles resultados, bajo las condiciones anteriores es:
$$P_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1)$$
- Un concepto antes de continuar: **Factorial**.
$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$
  - $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
  - $0! = 1$. Consistencia: Observa $1 = 1! = 1 \times 0!$.
- Si lo anterior es claro, el número total de arreglos o posibles resultados, se puede escribir como:
$$P_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

.

Trabajo en clase.

Ejemplo 5: Imagina que se debe escoger el equipo que administrará un empresa y los cargos a ocupar son:

- Gerente General.
- Gerente Comercial.
- Gerente de Producción.
- Gerente de Financiero.
- Gerente de Comercial.

Cargos para los que se tienen 17 personas de las cuales 7 son mujeres. Si asumimos que la elección es al azar, y que la primera persona seleccionada será el gerente general, la segunda el gerente comercial and so on... Halla la probabilidad de:

- Todos los cargos sean ocupados por mujeres.
- Al menos dos de los cargos sean ocupados por mujeres.

Ejemplo 6: Birthday Problem.

- Se tienen n personas en un salón.
- Asume: cada día del año tiene la misma probabilidad de nacimiento.
- Probabilidad de que al menos 2 cumplan años el mismo día.

Fin - Clase del día Miércoles Nov. 06

d) **Combinaciones**:

Ejemplo 6: Piensa que se tiene el siguiente experimento:

- Del conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ se desea elegir tres de estos elementos al azar sin reemplazo y el orden de selección no importa.
- Bajo este esquema los siguientes resultados deben ser considerados como un solo resultado.

$$(a, c, f) = (a, f, c) = (a, f, c).$$

De forma análoga, se debe pensar para cualquier trío elegido.

- Para realizar el cálculo sin orden un camino es realizar el cálculo con orden y luego corregir este valor. Así tenemos:

$$P_{7,3} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210. \tag{1}$$

Por un momento piensa:

- Se obtiene el trío (a, b, e), lo que sigue es preguntarnos: ¿De cuántas formas diferentes se puede organizar éstos tres elementos?.
- En la primera casilla se tiene 3 opciones, en el segunda 2 y en la tercera 1, así se tiene

$$3 \times 2 \times 1 = 3!$$

formas de armar cada trío.

- Sólo debemos contar 1 por cada 3!
- Volviendo a la Ecuación (1), se debe corregir dividiendo por 3! el total de combinaciones (conjuntos sin orden serán)

$$C_{7,3} = \frac{P_{7,3}}{3!} = \frac{7!}{4!3!} = 35.$$

Ejemplo 7: Piensa en el baloto:

- Se tienen 43 números (1 al 43) de los cuales se eligen 5 números al azar sin reemplazo.
- No importa el orden de selección

Calcula: *i.)* el número de formas distintas que se pueden dar y *ii.)* la probabilidad de ganar si se compra un solo boleto.

Combinaciones: Generalización: Asume se realizará un experimento con las siguientes características:

- Se tienen n objetos diferentes (diferenciables).
- Se seleccionarán k elementos al azar y sin reemplazo, de los n objetos antes mencionados ($k \leq n$).
- **NO importa** el orden de selección de cada objeto.
- El número total de posibles resultados (conjuntos), bajo las condiciones anteriores es:

$$C_{n,k} = \frac{P_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Ejemplo 8: Imagina que se debe escoger un equipo de 5 personas que conformarán el equipo de analítica que apoyará la parte gerencial de una empresa.
Para dichos cargos se tienen 17 personas de las cuales 7 son mujeres. Si asumimos que la selección es al azar, halla la probabilidad de:

- Todos los cargos sean ocupados por mujeres.
- Al menos dos de los cargos sean ocupados por mujeres.

Trabajo en Clase.

- Ejercicios 4 y 9 libro Degroot página 25.

Ejemplo 9: Aplicación Combinaciones - Distribución Binomial.

- Imagina se tiene una población infinita donde cada elemento se puede clasificar en una de dos categorías disyuntas $\{Exito, Fracaso\} = \{E, F\}$, con $P(E) = p \in (0, 1)$.
- Se elegirán de forma aleatoria 7 elementos de la población, de forma independiente.
- Halla el número de arreglos para los cuales se tiene:
  - Se observan exactamente 2 éxitos.
  - Se observan exactamente 5 éxitos.
  - Se observan exactamente k éxitos.

Trabajo en Clase.

- Ejemplo 4, Degroot pág. 29.
- Ejercicio 10, Degroot pág. 31.

e) **Coeficientes Multinomiales**

Coeficientes Binomiales Tenemos:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

De donde se tiene:

- $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0.$

Trabajo en Clase. Revisar o realizar

- The Tennis Tournament
- Ejercicios 9 y 11, Degroot pág. 31.

Coeficientes Multinomiales:
Situación:

- Se tienen n objetos diferentes.
- Se desean ubicar de forma aleatoria esos n objetos en k grupos ($k \geq 2$).
- Se tiene una secuencia de enteros no negativos $n_1, n_2, \ldots, n_k$, con $\sum\limits_{j=0}^{k} n_j = n$.
- Se desea saber la cantidad de formas en las que puedo ubicar n_1 elementos al Grupo 1, n_2 elementos al Grupo 2, and so on...
- En la situación anterior, la cantidad de formas de ubicar dichos objetos en los grupos es:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \cdots \binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Trabajo en Clase

- Ejemplos 2 y 3, pág. 34 - 35 Degroot.
- Ejercicio 1, pág. 36 Degroot.

3. **Probabilidad de la Unión**: Dado $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espacio de probabilidad y A_1, A_2, A_3 eventos, entonces

a) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

b)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =& P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ & - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

c) En general si $\{A_1, A_2, \ldots, A_K\} \in \mathfrak{F}$ entonces

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \ldots$$

Veamos la demostración analítica, de que lo anterior se cumple.

a.) En el caso de dos conjuntos A_1, A_2 se tiene:

- $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2)$ y
- $A_2 = (A_1 \cap A2) \cup (A_1^c \cap A_2)$

De donde se tiene:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P\left[A_1 \cup (A_1^c \cap A_2)\right] = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

b.) En el caso de tres conjuntos aplicando el resultado anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P\left[(A_1 \cup A_2) \cap A_3\right] \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) \\ &- P\left[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)\right] \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ &- P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

Fin - Clase del día Viernes Nov. 08