# Procesos Estocásticos - Cadena de Markov

V. Arunachalam (Arun)
varunachalam@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia

2022

# Cadena de Markov

Supòngase que se lanza una moneda corriente infinidad de veces y considèrese la variable aleatoria $X_n$ definida como sigue:

$$X_n := \text{Nùmero de caras obtenidas en los primeros } n \text{ lanzamientos}$$

Es claro que el nùmero de caras obtenidas en los primeros $(n+1)-$ lanzamientos depende sòlo del conocimiento del nùmero de caras obtenidas en los primeros $n$ lanzamientos, esto es,

$$P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1\right) = P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right)$$

para todo $n$ y para todo $i, j, i_1, ..., i_{n-1}$.
Un proceso estocàstico que satisface la condiciòn anterior se llama cadena de Markov.

**DEFINITION**

El proceso estocàstico $\{X_n, n = 0, 1, 2, ...\}$ se llama cadena de Markov, sii, para todo $j, k, j_1, j_2, ..., j_{n-1} \in N$ , se satisface la siguiente condiciòn

$$P\{X_n = k \mid X_{n-1} = j, X_{n-2} = j_1, ..., X_0 = j_{n-1}\} = P\{X_n = k \mid X_{n-1} = j\}$$

*siempre y cuando las probabilidades condicionales estèn definidas.*

El conjunto de valores que toman las variables aleatorias $X_n$ se conoce como conjunto de estados de la cadena y sus elementos se llaman simplemente estados de la cadena de Markov.

Cuando $X_n = i$ se dice que la cadena se encuentra en el tiempo $n$en el estado $i$.

## Lemma

*Si $\{X_n, n = 0, 1, 2, ...\}$ es una cadena de Markov, entonces se tiene para todo $n$ y para todo $i_0, ..., i_n$ en el conjunto de estados, lo siguiente:*

$$P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0)\, P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \ldots P\left(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\right)$$

## Demostración.

$$\begin{aligned}
& P(X_0 = i_0)\, P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \ldots P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \\
= \; & P(X_0 = i_0) \frac{P(X_1 = i_1, X_0 = i_0)}{P(X_0 = i_0)} \frac{P(X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0)}{P(X_1 = i_1, X_0 = i_0)} \ldots \\
& \frac{P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)}{P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})} \\
= \; & P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)
\end{aligned}$$

$\square$

## LEMMA

*Si $\{X_n, n = 0, 1, 2, ...\}$ es una cadena de Markov, entonces se tiene para todo $n$ y para todo $i_0, ..., i_n$ en el conjunto de estados, lo siguiente:*

$$P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0)\, P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \ldots P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})$$

## DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
& P(X_0 = i_0)\, P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \ldots P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \\
= \quad & P(X_0 = i_0) \frac{P(X_1 = i_1, X_0 = i_0)}{P(X_0 = i_0)} \frac{P(X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0)}{P(X_1 = i_1, X_0 = i_0)} \ldots \\
& \frac{P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n)}{P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = i_{n-1})} \\
= \quad & P(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n)
\end{aligned}$$

□

### Definition

Si $\{X_n, n = 0, 1, 2, ...\}$ es una cadena de Markov, entonces, las probabilidades

$$p_{ij} := P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

se llaman **probabilidades de transiciòn.**

Las probabilidades de transiciòn pueden ser o no ser independientes de $n$. Si la probabilidad de transiciòn $p_{ij}$ es independiente de $n$, se dice que la cadena de Markov es homògenea, en caso contrario se dice que la cadena es no homògenea.

De ahora en adelante, y mientras no se establezca lo contrario, se trabajaràn con cadenas de Markov homògeneas.

Por otra parte, se tiene que las probabilidades de transiciòn $p_{jk}$ satisfacen las siguientes condiciones:

$$p_{ij} \geq 0, \qquad \sum_j p_{ij} = 1 \quad \text{para todo } i. \tag{1}$$

Esto es, la matriz

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}. \tag{2}$$

es una matriz estocàstica llamada *matriz de transiciòn* de la cadena.

Si además la matriz satisface la condición $\sum_j p_{ij} = 1$ para todo $j$, es decir, cuando la suma por columnas también es uno, entonces la matiz se llaman doblemente estocástica.

**DEFINITION**

La probabilidad

$$p_{ij}(n) = P\{X_n = j \mid X_0 = i\} = P\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\}. \quad (3)$$

*donde $m$ es un nùmero natural e $j$ y $i$ son estados, se llama probabilidad de transiciòn de $i$ a $j$ en $n$ pasos*. Se define ademàs

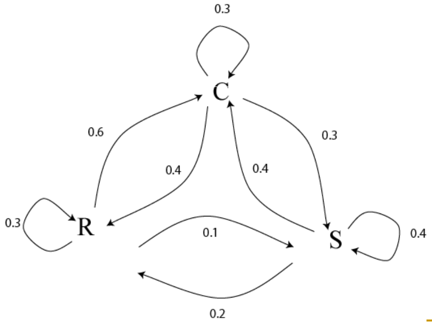
$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases} =: \delta_{ij}$$

**DEFINITION**

La medida de probabilidad $p = (p_i)_i$ donde $p_i := P(X_0 = i)$ se llama distribuciòn inicial de la cadena.

Por lo tanto, el lema anterior establece que si se conoce la matriz de transiciòn y la distribuciòn inicial de una cadena de Markov, entonces se conoce la distribuciòn conjunta de las variables aleatorias $X_{j_1}, ..., X_{j_l}$ para cualquier $n$ y para cualquier subconjunto de ìndices $\{j_1, j_2, ..., j_l\}$con $j_1 < j_2 < ... < j_l$ , $l = 1, 2, ..., n$, esto es, se tiene toda la informaciòn acerca de la cadena.

Example: Suppose today's weather tells us something about tomorrow's weather (but yesterday's weather does not tell us anything about tomorrow's weather). Suppose that the weather can either be Sunny, Cloudy or Raining (soleado, nublado, lluvioso )




$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Arun

### EXAMPLE

Credit ratings are published in a timely manner by rating agencies, and they provide investors invaluable information to assess firms' abilities to meet their debt obligations. For many reasons, however, credit ratings changes time to time to reflect firms' unpredictable credit risk. Markov chain model to describe the dynamics of a firm's credit rating as a indicator of the likelihood of default.
Example of an transition matrix for credit ratings published by Standard & Poors.

Average One-Year Transition Rates (%)

| | Rating at year-end | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rating | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | D | N.R. |
| AAA | 89.37 | 6.04 | 0.44 | 0.14 | 0.05 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 3.97 |
| AA | 0.57 | 87.76 | 7.30 | 0.59 | 0.06 | 0.11 | 0.02 | 0.01 | 3.58 |
| A | 0.05 | 2.01 | 87.62 | 5.37 | 0.45 | 0.18 | 0.04 | 0.05 | 4.22 |
| BBB | 0.03 | 0.21 | 4.15 | 84.44 | 4.39 | 0.89 | 0.26 | 0.37 | 5.26 |
| BB | 0.03 | 0.08 | 0.40 | 5.50 | 76.44 | 7.14 | 1.11 | 1.38 | 7.92 |
| B | 0.00 | 0.07 | 0.26 | 0.36 | 4.74 | 74.12 | 4.37 | 6.20 | 9.87 |
| CCC | 0.09 | 0.00 | 0.28 | 0.56 | 1.39 | 8.80 | 49.72 | 27.87 | 11.30 |

**EXAMPLE**

(Ruina del jugador) Supòngase que se tienen dos jugadores $A$ y $B$ y que al comienzo del juego el jugador $A$ tiene un capital de $x \in \mathbb{Z}^+$ y el jugador un capital de $y \in \mathbb{Z}^+$. Sea $a := x + y$. En cada ronda del juego o bien le gana $A$ a $B$ una unidad monetaria con probabilidad $p$ o bien le gana $B$ a $A$ una unidad monetaria con probabilidad $q = 1 - p$. El juego continua hasta que uno de los dos jugadores pierde su capital, es decir, hasta que $X_n = 0$ o $X_n = a$, siendo $X_n :=$ *capital del jugador* $A$ *luego de la n-èsima ronda de juego*. En este caso se tiene que $T = \mathbb{N}$ y $S = \{0, 1, 2, \cdots, a\}$.

Es fàcil verificar que $(X_n)_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov con distribuciòn inicial

$$\pi = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$$

donde $1$ aparece ubicado en la $x$-èsima componente. La matriz de transiciòn de està cadena es

$$P = (p_{ij})_{i,j\in S}$$

con

$p_{00} = 1,\ p_{aa} = 1,\ p_{i,i-1} = q,\ p_{i,i+1} = p$ y $p_{i,j} = 0$ para todo $j \neq i-1, i+1$.

Una caminata aleatoria simple sobre el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, ...\}$ que evoluciona como se muestra en la figura. Es decir, iniciando en el estado 0, al siguiente tiempo el proceso puede pasar al estado +1 con probabilidad p, o al estado -1 con probabilidad q, en donde p + q = 1. Se usa la misma regla para los siguientes tiempos, es decir, pasa al estado de la derecha con probabilidad p, o al estado de la izquierda con probabilidad q. El valor de $X_n$ es el estado del proceso al tiempo n. Este proceso cambia de un estado a otro en dos tiempos consecutivos de acuerdo a las probabilidades de transición que se muestran en la Figura válidas para cualquier $n \geq 0$, y para cualquier enteros $i$ y $j$

$$P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1, \\ q & \text{si } j = i-1, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

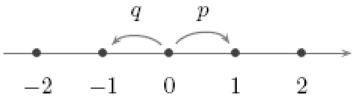



FIGURA:

Dado que estas probabilidades no dependen de n, se dice que son homogéneas en el tiempo, es decir, son las mismas para cualquier valor de n. A partir de estas consideraciones, es intuitivamente claro que este proceso cumple la propiedad de Markov, es decir, el estado futuro del proceso depende únicamente del estado presente y no de los estados previamente visitados.

# INCOME CLASS

## EXAMPLE

Suppose that from one generation to the next families their income group Low, Middle, or high according to the following Markov Chain

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} & L & M & H \\ L & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ M & 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ H & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Do the fractions of the population in the three income classes stabilize as time goes on?
How can we compute the limit proportions from the transition matriz?

**DEFINITION**

Se dice que una cadena de Markov $\{X_n\}$ es de orden $r \ (r = 1, 2, 3...)$, si para todo $n$,

$$\begin{aligned} P\{X_n &= k \mid X_{n-1} = j, X_{n-2} = j_1, ..., X_{n-r} = j_{r-1}, ...\} \\ &= P\{X_n = k \mid X_{n-1} = j, X_{n-2} = j_1, ..., X_{n-r} = j_{r-1}\} \end{aligned} \quad (4)$$

siempre y cuando las probabilidades condicionales estèn definidas.