Series de Tiempo $_2$

JIVB - 2022

“... all models are approximations. Essentially, all models are wrong, but some are useful. However, the approximate nature of the model must always be borne in mind....”
— **George Box**

1. Repaso
2. Random Walk
3. Q-Tests
4. Box & Jenkins
5. Métricas de Ajuste
6. Métricas de Performance

Repaso

Random Walk

Q-Tests

Box & Jenkins

Métricas de Ajuste

Métricas de Performance

Repaso

1. Comentarios de las Presentaciones
    a. Cumplimiento de Consignas / Entregables / Plazos
    b. Estabilidad
        i. Raíces de Polinomio Característico de Matriz del Proceso Dinámico
        ii. Raíces de Polinomio Característico de Matriz del Proceso Dinámico expresado con operador L
        iii. Coeficientes del proceso autorregresivo AR(p) // Serie Geométrica / Convergente
    c. Estacionariedad
        i. Procesos No Estacionarios, Estacionarios Débiles, Estacionarios Estrictos
        ii. Débil / de Covarianzas != Fuerte / Estricta != Simple (?)
    d. Invertibilidad
        i. Wold no es una demostración
        ii. Aplica sólo a un
        iii. Es un análogo al requisito de estabilidad para los procesos MA(q)
    e. Ergodicidad
        i. Memoria Larga y AR(p)

Repaso

Random Walk

Q-Tests

Box & Jenkins

Métricas de Ajuste

Métricas de Performance

1905

Annus mirabilis

Annus mirabilis - 4 papers de Einstein

1. The first paper explained the photoelectric effect, which established the energy of the light quanta, and was the only specific discovery mentioned in the citation awarding Einstein the Nobel Prize in Physics.[1]
2. **The second paper explained Brownian motion, which established the Einstein relation and led reluctant physicists to accept the existence of atoms.**
3. The third paper introduced Einstein's theory of special relativity, which established the universal constant speed of light for all reference frames and a theory of spacetime.
4. The fourth, a consequence of the theory of special relativity, developed the principle of mass-energy equivalence, expressed in the famous equation and which led to the discovery and use of atomic energy.

Karl Pearson - 1905 - Revista Nature

The Problem of the Random Walk.

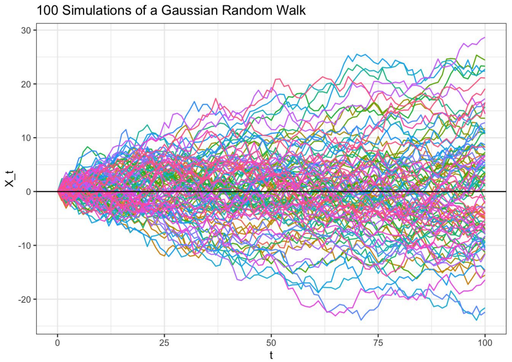
Can any of your readers refer me to a work wherein I should find a solution of the following problem, or failing the knowledge of any existing solution provide me with an original one? I should be extremely grateful for aid in the matter.

A man starts from a point O and walks l yards in a straight line; he then turns through any angle whatever and walks another l yards in a second straight line. He repeats this process n times. I require the probability that after these n stretches he is at a distance between r and $r + \delta r$ from his starting point, O.

The problem is one of considerable interest, but I have only succeeded in obtaining an integrated solution for *two* stretches. I think, however, that a solution ought to be found, if only in the form of a series in powers of $1/n$, when n is large.

Karl Pearson.

The Gables, East Ilsley, Berks.



Random Walk

$$X_t = X_{t-1} + e_t,$$

Si lo descomponemos

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + e_t \\ &= (X_{t-2} + e_{t-1}) + e_t. \end{aligned}$$

obtenemos que

$$X_t = X_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_{t-1} + e_t.$$

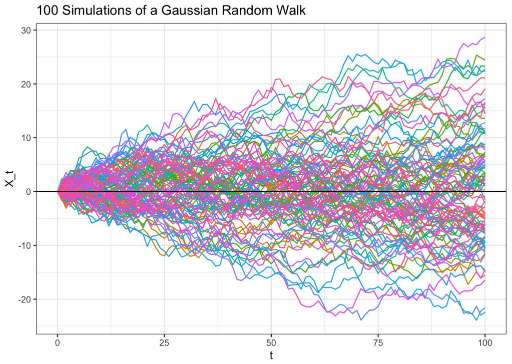
Con media

$$\begin{aligned} E(X_t \mid X_0) &= E\left(X_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_t \mid X_0\right) \\ &= X_0 + E\left(e_1 \mid X_0\right) + E\left(e_2 \mid X_0\right) + \ldots + E\left(e_t \mid X_0\right) \\ &= X_0. \end{aligned}$$

Y varianza

$$\begin{aligned} Var\left(X_t\right) &= Var\left(X_0\right) + Var\left(e_1\right) + Var\left(e_2\right) + \ldots + Var\left(e_{t-1}\right) + Var\left(e_t\right) \\ &= 0 + \sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2 + \sigma^2 \\ &= t\sigma^2. \end{aligned}$$

NO ESTACIONARIO



Random Walk

Si tomamos la primera diferencia de un proceso **RW**

$$X_t - X_{t-1} = X_{t-1} - X_{t-1} + e_t$$
$$Z_t = e_t,$$

obtenemos un proceso **WN** (Estacionario)

Repaso

Random Walk

Q-Tests

Box & Jenkins

Métricas de Ajuste

Métricas de Performance

Q - Tests : Box and Pierce, 1970

1 . **Box-Pierce Q-test**

$$Q = T\sum_{i=1}^{k}\hat{\rho}_i^2,$$

donde $\hat{\rho}_i$ son los elementos de la FAC muestral.

Bajo H_0 todos los $\hat{\rho}_i$ hasta k son iguales a cero.

El estadístico Q se distribuye asintóticamente como una chi cuadrado con k grados de libertad, siempre que la serie de tiempo sea generada por un proceso ARMA estacionario.

Q - Tests: Ljung and Box, 1978

2 . **Ljung-Box Q-test**

$$Q = T(T+2)\sum_{i=1}^{k}\frac{\hat{\rho}_i^2}{T-i},$$

donde $\hat{\rho}_i$ son los elementos de la FAC muestral.

Bajo H_0 todos los $\hat{\rho}_i$ hasta k son iguales a cero.

El estadístico Q se distribuye asintóticamente como una chi cuadrado con k grados de libertad, siempre que la serie de tiempo sea generada por un proceso ARMA estacionario.

¿Cómo implementarlos?

El test de Ljung Box se ajusta mejor que el de Box-Pierce a muestras de menor tamaño.

Al momento de buscar el lag k óptimo partimos de 1 hasta T/4 donde T es el tamaño de la muestra.

Si el estadístico supera el umbral χ_k^2 podemos decir que al menos una autocorrelación $\{\rho_i\}_{i=1}^{k}$ es (estadísticamente hablando) significativamente diferente de 0.

En la práctica, estos estadísticos se usan como umbrales de referencia para detectar los órdenes p y q, pero sólo se los toma considera estrictamente en resultados al momento de evaluar los residuos.

Repaso
Random Walk
Metodología B&J
Métricas de Ajuste
Métricas de Performance

El sentido de la metodología B&J

1. No busca ser
   a. un modelo causal
   b. identificar exactamente el proceso dinámico subyacente
2. Si busca
   a. **Parsimonia**
      i. en la selección de los parámetros
   b. **Rigor Estadístico**
      i. criterio en la selección del modelo (información estadística)
      ii. criterio en la evaluación de los residuos (tests de Q)

Pasos B&J

1. Transformaciones
    a. ¿El proceso es estacionario? ¿podemos hacerlo estacionario en diferencias?
        i. Muchas veces si podemos y necesitamos diferenciar la serie (d)
2. Identificación del proceso generador subyacente
    a. Exploración de correlogramas: FAC y FACP
    b. Definimos si es un AR(p) / un MA(q) o un ARMA(p,q)
3. Modelamos
    a. Estimación de Parámetros (i.e.: Yule - Walker)
4. Pruebas de Diagnóstico
    a. Criterio de Información (AIC, BIC)
5. Validación
    a. revisamos resultados, residuos, etc. ok...
    b. si los resultados no sirven: repetimos

Repaso

Random Walk

M. Box & Jenkins

Métricas de Ajuste

Métricas de Performance

Criterio de Información

Criterio de información de Akaike

$$\text{AIC} = \underbrace{-2\mathcal{L}}_{\text{“desajuste”}} + \underbrace{2K}_{\text{penalización}}$$

Criterio de información de Bayes

$$\text{BIC} = \underbrace{-2\mathcal{L}}_{\text{“desajuste”}} + \underbrace{\ln(T)K}_{\text{penalización}}$$

Ejemplo

AIC

	q=0	q=1	q=2
p=0	128.02	89.62	83.77
p=1	64.31	30.74	31.92
p=2	46.27	32.21	34.44
p=3	24.64	26.51	28.32
p=4	26.50	28.43	25.10

BIC

	q=0	q=1	q=2
p=0	134.22	98.92	96.17
p=1	73.61	43.14	47.42
p=2	58.67	47.71	53.04
p=3	40.14	45.11	50.02
p=4	45.10	50.13	49.90

Repaso

Random Walk

M. Box & Jenkins

Métricas de Ajuste

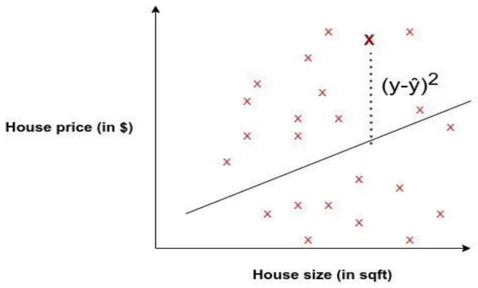
Métricas de Performance

Métricas de Performance Puntual

Scale Dependent Errors

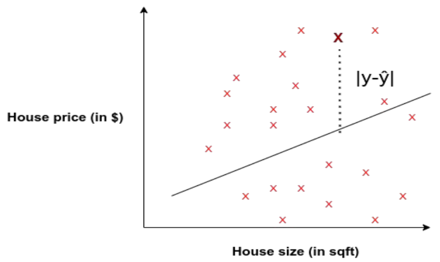
a. Mean Squared Error

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(y_j - \check{y}_j)^2$$



b. Mean Absolute Error

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|y_j - \check{y}_j|$$



c. Root Mean Squared Error

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(y_j - \check{y}_j)^2}$$

Métricas de Performance Puntual

Percentage Errors $$p_t = 100 e_t / y_t.$$

1. Mean Absolute Percentage Error

$$\text{MAPE} = \text{mean}(|p_t|).$$

2. Symmetric Mean Absolute Percentage Error

$$\text{sMAPE} = \text{mean}\left(200|y_t - \hat{y}_t| / (y_t + \hat{y}_t)\right).$$