Series de Tiempo 1

JIVB

“Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.”
— **John von Neumann**

1. Axiomas OLS
2. Ruido Blanco
3. Teorema de Wold
4. Procesos ARMA(p,q)
5. FAC & FACP
6. Metodología Box & Jenkins
7. Transformaciones Comunes
8. ARIMA(p,q,r)
9. Métricas de Performance

Supuestos OLS

Ruido Blanco

Teorema de Wold

Procesos ARMA

FAC & FACP

Repaso de Supuestos del Modelo OLS

Tenemos las siguientes condiciones:

1. Los ε_t tienen media cero $E(\varepsilon_t) = 0$

2. Homoscedasticidad $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$

3. Los ε_t tienen distribución normal $N \sim (0, \sigma^2)$

4. Los ε_t son independientes entre sí, y no están correlacionados con las covariables x_{it}.

Descomponiendo la autocorrelación en OLS

Sea un proceso autorregresivo AR(1) donde las innovaciones son ruido blanco, es decir,no están autocorrelacionadas):

$$X_t = \beta X_{t-1} + e_t$$

entonces por OLS obtenemos

$$\hat{\beta}_{OLS} = \frac{Cov\left(X_t, X_{t-1}\right)}{Var\left(X_{t-1}\right)} = \frac{\sum X_t X_{t-1}}{\sum X_{t-1}^2}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{OLS} &= \frac{\sum \left(\beta X_{t-1} + e_t\right) X_{t-1}}{\sum X_{t-1}^2} \\
&= \frac{\sum \left(\beta X_{t-1}^2 + e_t X_{t-1}\right)}{\sum X_{t-1}^2} \\
&= \frac{\sum \beta X_{t-1}^2}{\sum X_{t-1}^2} + \frac{\sum e_t X_{t-1}}{\sum X_{t-1}^2}
\end{aligned}$$

Descomponiendo la autocorrelación en OLS

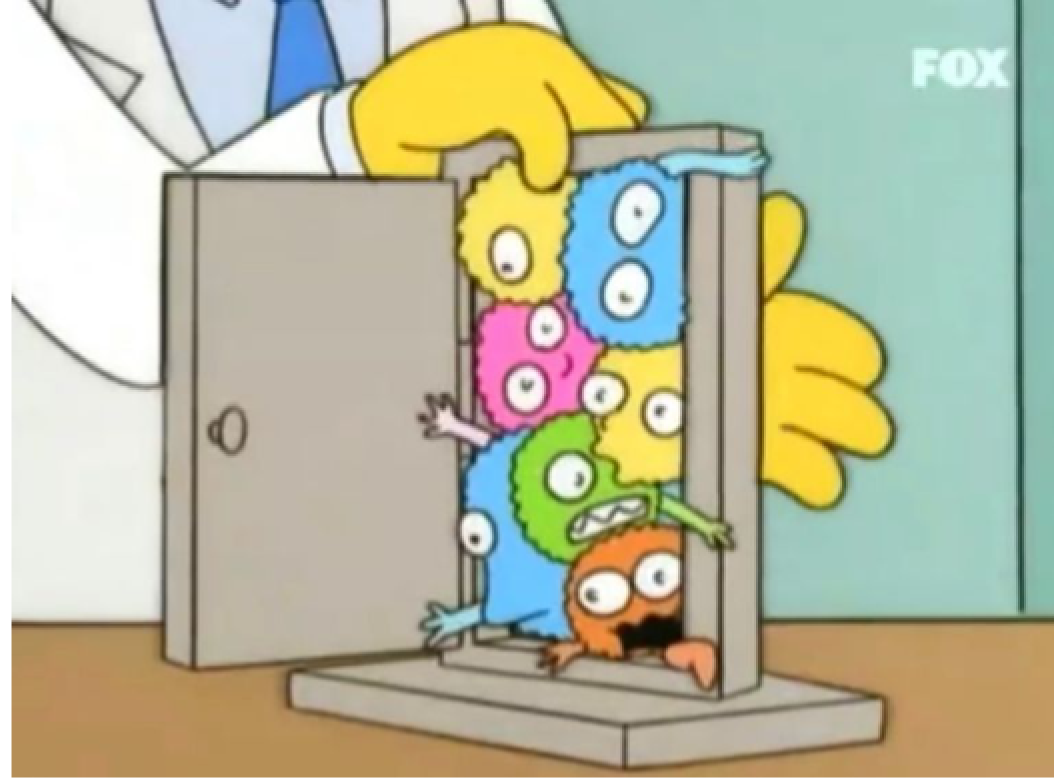
A partir de lo cual podemos ver que el estimador es consistente pero que tiene un sesgo:

$$\hat{\beta}_{OLS} = \beta \frac{\sum X_{t-1}^2}{\sum X_{t-1}^2} + \frac{\sum e_t X_{t-1}}{\sum X_{t-1}^2}$$

$$= \beta + \boxed{\frac{\sum e_t X_{t-1}}{\sum X_{t-1}^2}.}$$

Existe un sesgo, que tiende a 0 al crecer la muestra. Si los errores estuvieran autocorrelacionados, entonces el estimador también sería inconsistente (es decir, el sesgo no convergería a 0 al tender n a infinito.

El Síndrome de los 3 chiflados en OLS para AR (1)



Sea $$Y_t = \alpha + \lambda Y_{t-1} + U_t$$

Si las variables están correlacionadas con los lags de las U_t

El sesgo dinámico: $-(1 + 3\lambda)/T$

$$Y_t = \alpha^* + (\lambda + \rho\sigma_U/\sigma_Y)\, Y_{t-1} + S_t,$$

"The bias of the OLS estimator of a regression model with a lagged dependent variable and autocorrelated disturbances is determined by two effects, the **dynamic effect** and the **correlation effect**. The former is the OLS bias of the coefficient of the lagged dependent variable when the disturbances are i.i.d. normal; the latter is the effect that contaminates the same coefficient when the current disturbance term is correlated with the lagged dependent variable. When both the coefficient of the lagged dependent variable and the autocorrelation coefficient of AR(1) disturbance are positive, the two effects have opposite signs, thus making the OLS estimator perform well in terms of bias." Maeshiro

Supuestos OLS

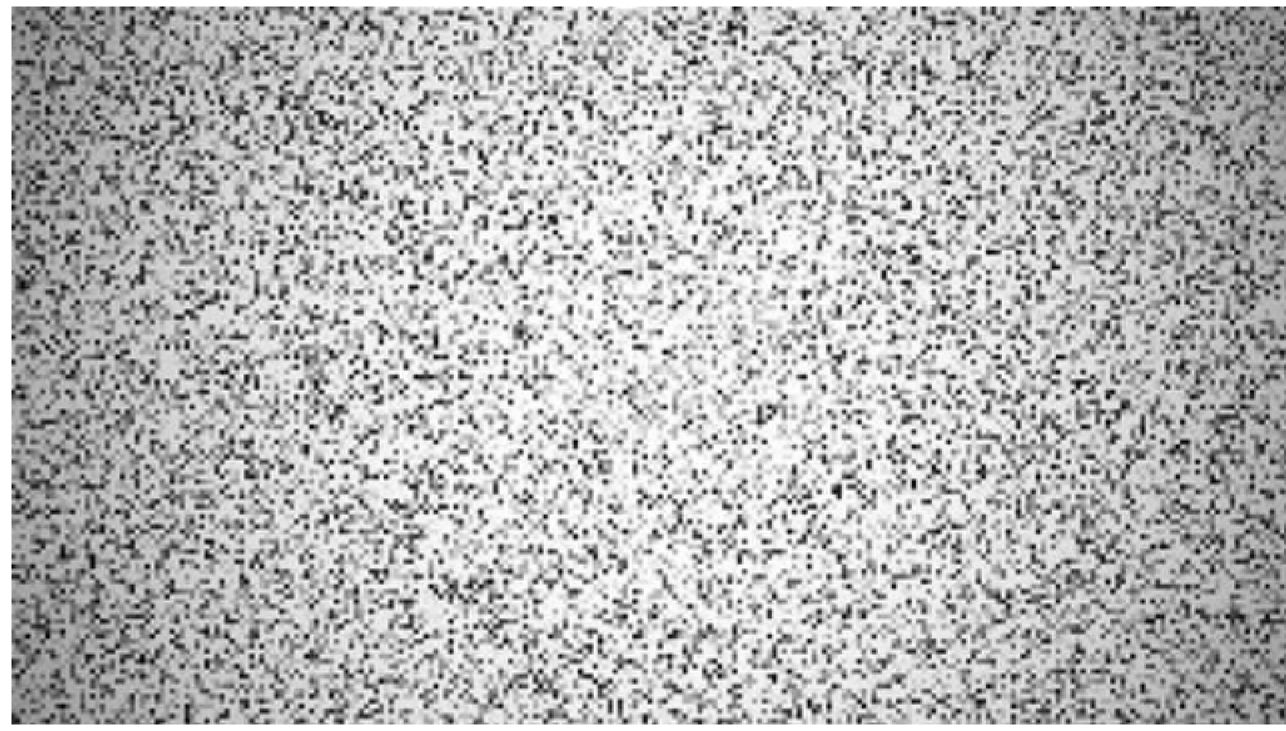
Ruido Blanco

Teorema de Wold

Procesos ARMA

FAC & FACP

Ruido Blanco

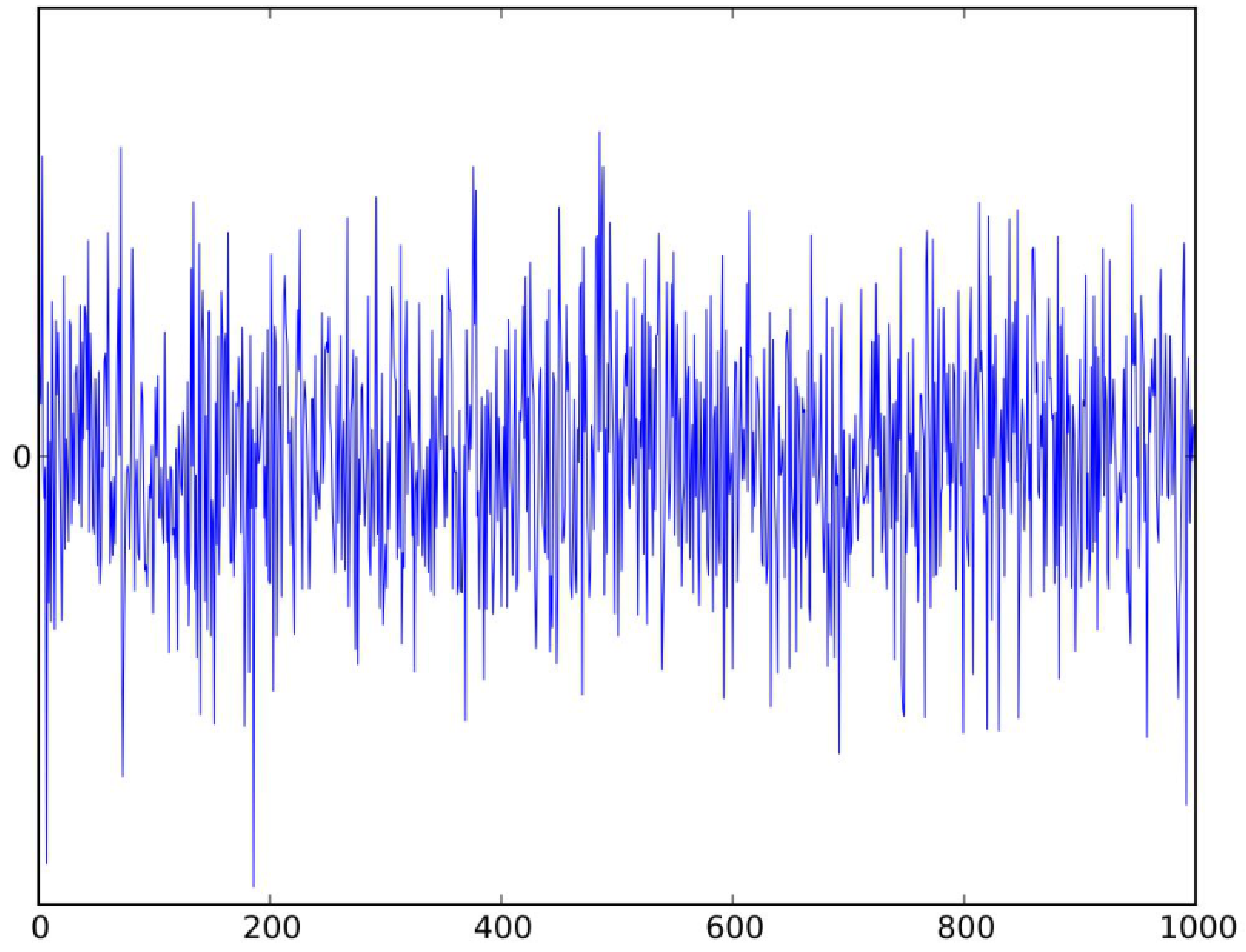


Nuestro objetivo al analizar una SdT es descomponer la serie en una parte autocorrelacionada y una parte puramente aleatoria o impredecible.

Sea $y_t = \boldsymbol{f}(y_{t-1}; \ldots; y_0) + a_{tf}$

Decimos que el proceso $\{a_t\}$ es Ruido Blanco cuando:

1. $E(a_t) = 0$
2. $Var(a_t) = \sigma^2$
3. **$Cov(a_t; a_{t-h}) = 0 \;\forall\; h$**



Supuestos OLS

Ruido Blanco

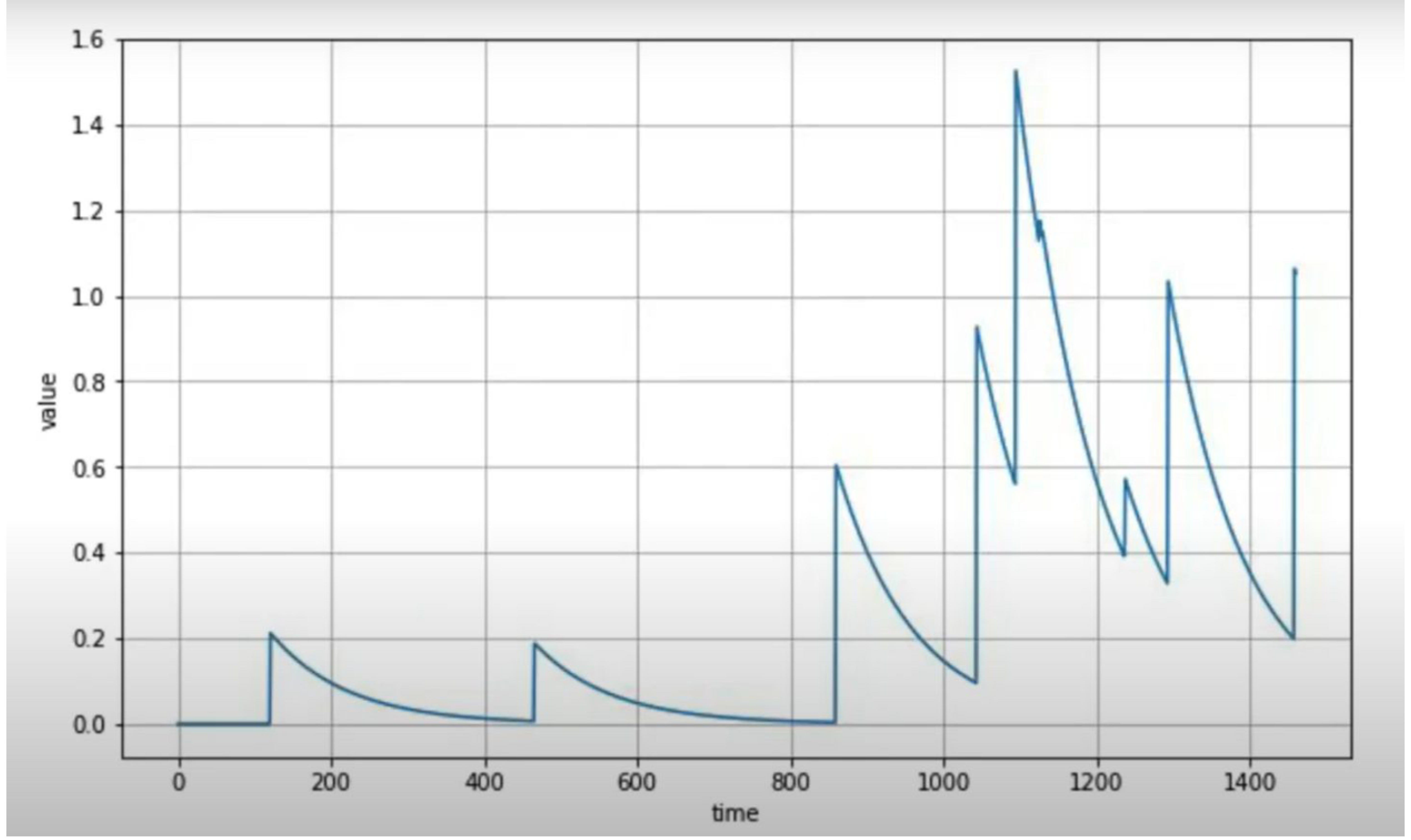
Teorema de Wold

Procesos ARMA

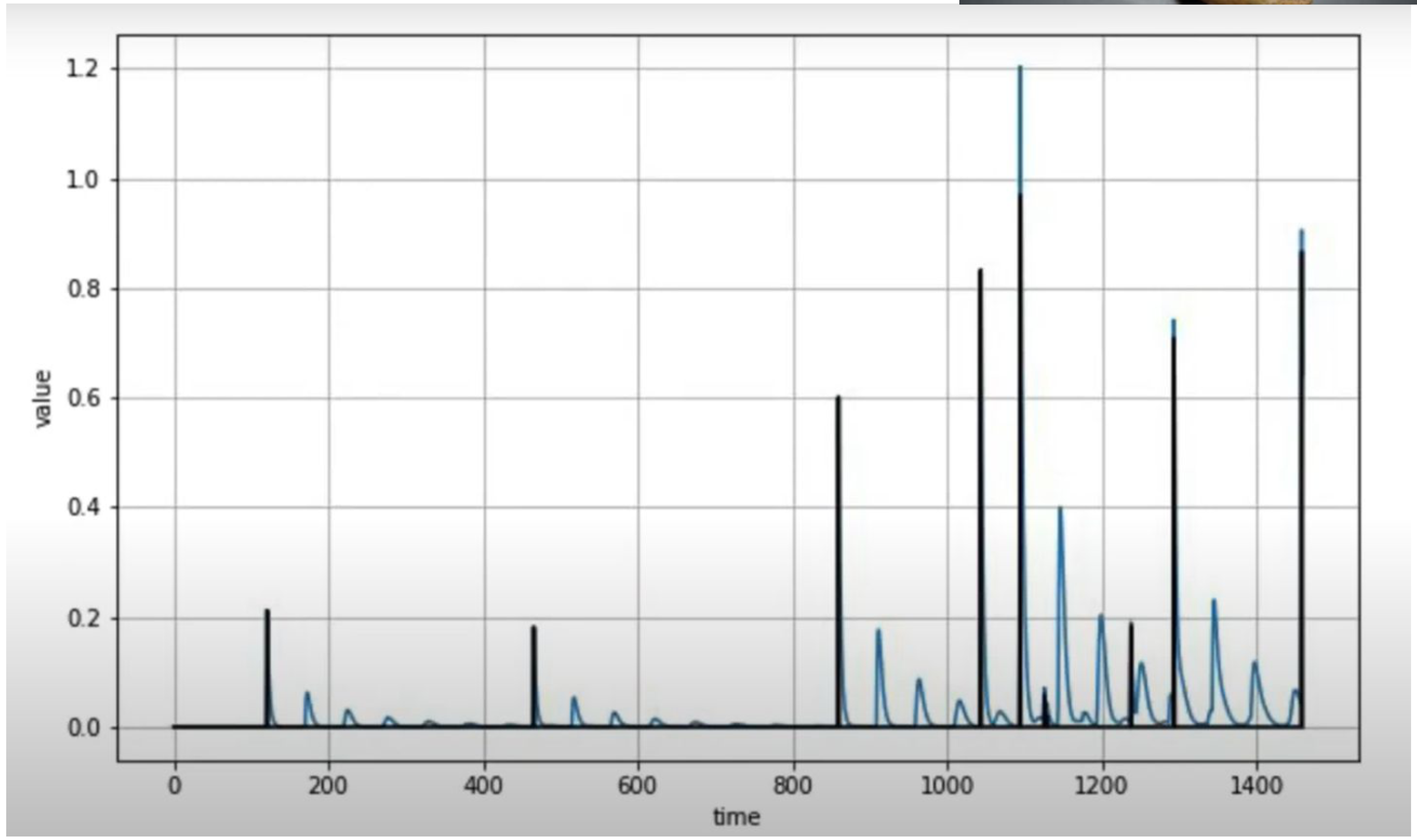
FAC & FACP

AR(p)

MA(q)



$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots + \beta_p X_{t-p} + e_t.$$



$$X_t = u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \ldots + \beta_q u_{t-q}$$

ARMA(p,q)

Podemos aproximar el espacio de procesos estacionarios a través de modelos ARMA(p,q), que es una combinación lineal de:

1. AR(p) un proceso autorregresivo de orden p
2. MA(q) un proceso autorregresivo de orden q

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + \beta_p X_{t-p} + u_t + \gamma_1 u_{t-1} + \gamma_1 u_{t-1} + \cdots + \gamma_q u_{t-q}.$$

Supuestos OLS

Ruido Blanco

Teorema de Wold

Procesos ARMA

FAC & FACP

Teorema de Wold

Todo proceso estocástico estacionario puede representarse como la suma de dos procesos:

$$x_t = d_t + u_t$$

Donde d_t es una parte determinista y u_t es un MA(∞) tal que:

$$u_t = \psi_t \,.\, \varepsilon_t + \psi_t \,.\, \varepsilon_{t-2} + \psi_{t-3} \,.\varepsilon_{t-3} + \psi_{t-4} \,.\varepsilon_{t-4} + \ldots$$

y donde ε_t es ruido blanco.

Teorema de Wold

1. Permite aproximar la dependencia dinámica de una variable mediante la representación de un modelo lineal.
2. Si asumimos que las innovaciones son independientes, entonces la representación lineal es la única posible.
3. Sin embargo, cuando las innovaciones son incorrelacionadas pero no independientes, el modelo lineal no es la única representación de la dependencia: pueden existir dependencias no lineales.

Teorema de Wold

La representación de **Wold necesita infinitos parámetros**.... no es operativa en la práctica.

Para modelar el espacio de procesos estacionarios posibles:

=> necesitamos poder combinar procesos autorregresivos y de medias móviles como una **aproximación parsimoniosa**.

Estabilidad

Estacionariedad

Invertibilidad

Ergodicidad

La condición de **invertibilidad**

sistema dinámico simple:

$$Y_t = a_1 * Y_{t-1}$$

sistema dinámico con aleatoriedad I :

$$Y_t = a_1 * Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

sistema dinámico con aleatoriedad II:

$$Y_t = b_1 * \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

sistema dinámico con aleatoriedad III:

$$Y_t = a_1 * Y_{t-1} + b_1 * \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

La condición de **invertibilidad**

Un proceso $\{y_t\}$ es invertible si puede representarse como un proceso autorregresivo convergente (de orden finito p).

Esta condición es para los procesos MA(q), lo que la estabilidad para los AR(p).

Supuestos OLS

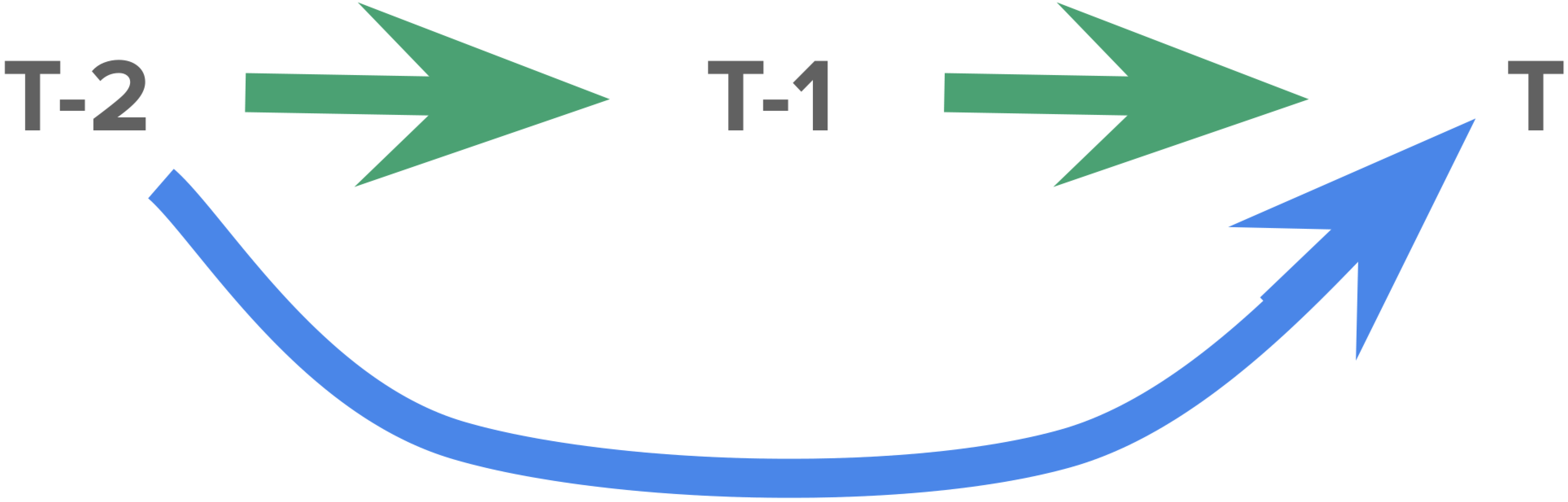
Ruido Blanco

Teorema de Wold

Procesos ARMA

FAC & FACP

FAC & FACP



La Función de Autocorrelación

Sea una serie $\{y_t\}$, la función de autocorrelación es :

$$\rho_s = \frac{cov(y_t, y_{t-s})}{var(y_t)}.$$

Como consideramos una SdT estacionaria, la función sólo depende del lag s y no de t.

$$corr(y_t, y_{t-s}) = cov(y_t, y_{t-s}) / \sqrt{var(y_t)var(y_{t-s})} = cov(y_t, y_{t-s}) / var(y_t) = \rho_s.$$

Estimamos la FAC muestral:

$$\hat{\rho}_s = \frac{\sum_{t=s+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-s} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2},$$

La Función de Autocorrelación Parcial

Con la FACP nos interesa ver los efectos directos de cada lag sobre la variable.

Sea

$$y_t = a_0 + \phi_{11} y_{t-1} + \varepsilon_t \,,$$

Es fácil observar que

$$\rho_1 = corr(y_t, y_{t-1}) = corr(a_0 + \phi_{11} y_{t-1} + \varepsilon_t, y_{t-1}) = \phi_{11} \,.$$

La Función de Autocorrelación Parcial

Veamos segundo caso:

$$y_t = a_0 + \phi_{21} y_{t-1} + \phi_{22} y_{t-2} + \varepsilon_t \,,$$

En este caso tenemos los valores de la FAC para s=1 y s=2:

$$\rho_1 = corr(y_t, y_{t-1}) = corr(a_0 + \phi_{21} y_{t-1} + \phi_{22} y_{t-2} + \varepsilon_t, y_{t-1}) = \phi_{21} + \phi_{22}\rho_1 \,,$$

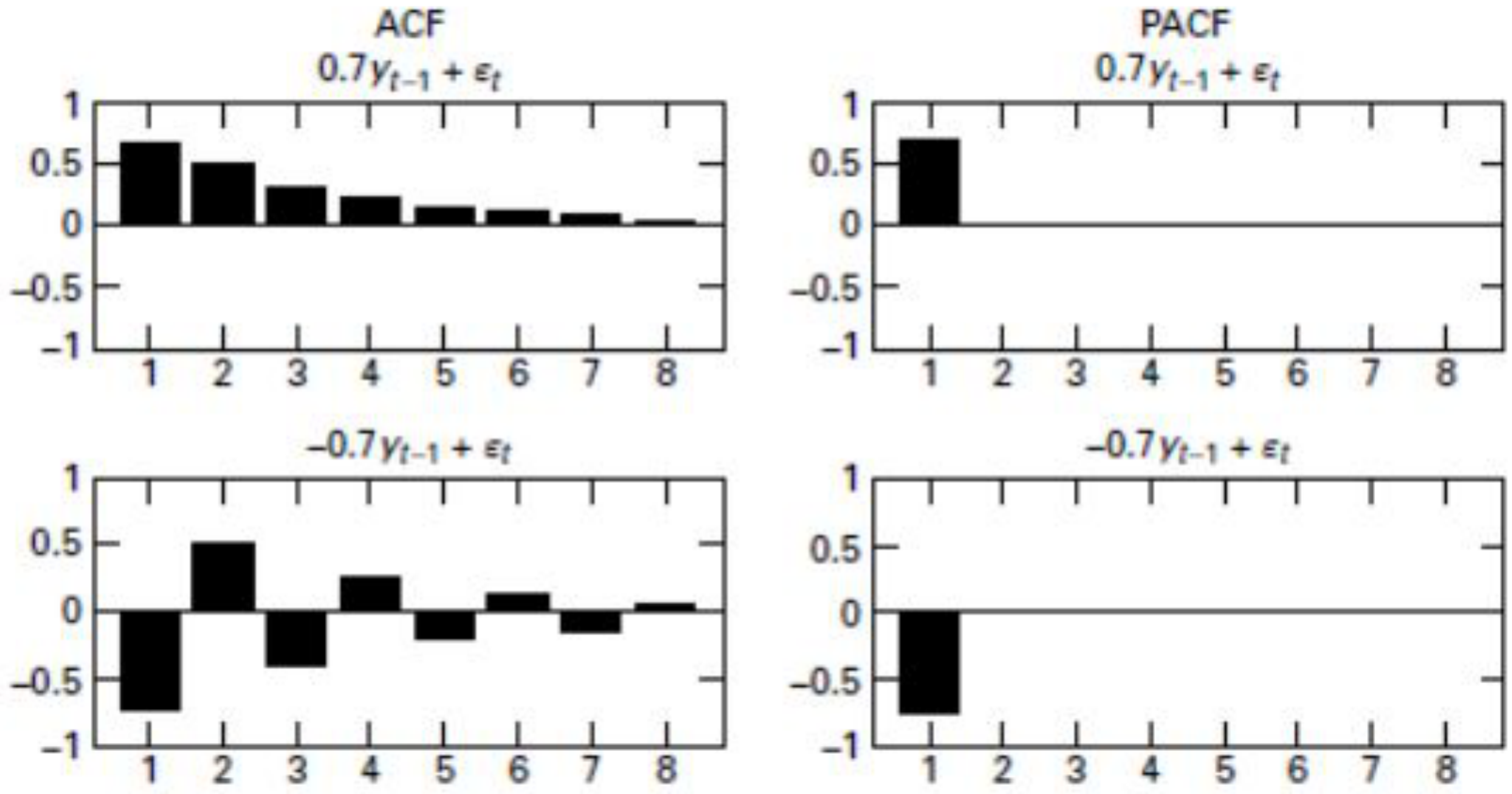
$$\rho_2 = corr(y_t, y_{t-2}) = corr(a_0 + \phi_{21} y_{t-1} + \phi_{22} y_{t-2} + \varepsilon_t, y_{t-2}) = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22} \,.$$

De donde obtenemos $\phi_{22} = (\rho_2 - \rho_1^2)/(1 - \rho_1^2).$

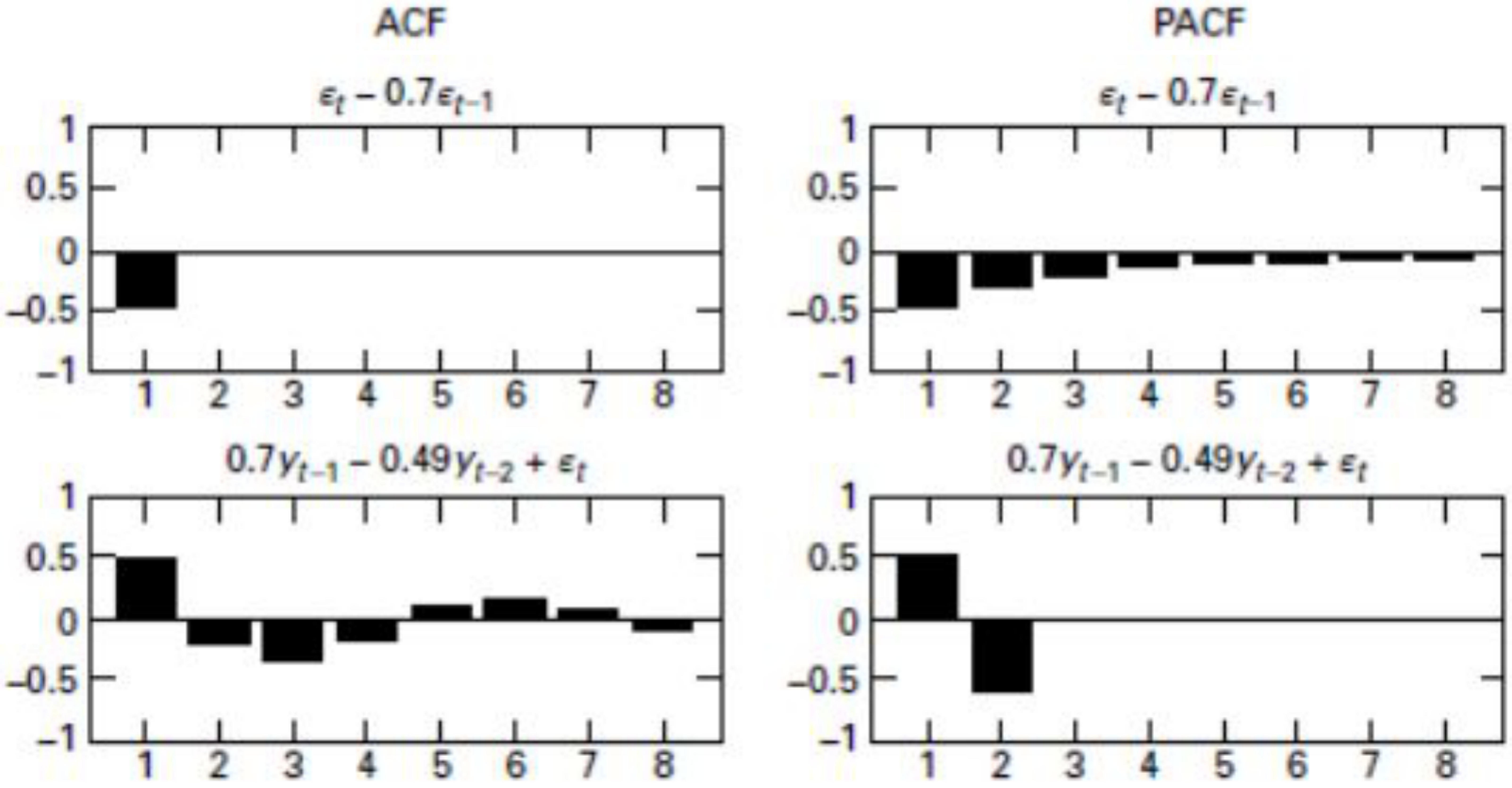
Generalizamos:

$$\phi_{ss} = \frac{\rho_s - \sum_{j=1}^{s-1} \phi_{s-1,j}\rho_{s-j}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} \phi_{s-1,j}\rho_j} \text{ for s > 2,}$$

CORRELOGRAMAS I



CORRELOGRAMAS II



CORRELOGRAMAS III