

Gráficos de flujo de señal

El diagrama de bloques es útil para la representación gráfica de sistemas de control dinámico y se utiliza extensamente en el análisis y diseño de sistemas de control. Otro procedimiento alternativo para representar gráficamente la dinámica del sistema de control, es el método de los gráficos de flujo de señal, atribuido a S.J. Mason.

Un gráfico de flujo de señal es un diagrama que representa un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas. Al aplicar el método de gráficos de flujo de señal al análisis de sistemas de control, primero hay que transformar las ecuaciones diferenciales lineales en ecuaciones algebraicas en s .

Un gráfico de flujo de señal consiste en una red en la cual los nodos están conectados por ramas con dirección y sentido. Cada nodo representa una variable del sistema y cada rama conectada entre dos nodos, actúa como un multiplicador de señal. Nótese que la señal fluye solamente en un sentido. El sentido del flujo de señal se indica por una flecha ubicada en la rama y el factor de multiplicación aparece a lo largo de la rama. El gráfico de flujo de señal despliega el flujo de señales de un punto de un sistema a otro y da las relaciones entre las señales.

Como se indicó anteriormente, un gráfico de flujo de señal contiene esencialmente la misma información que un diagrama de bloques.

Fórmula de ganancia de Mason, se utiliza para obtener las relaciones entre las variables del sistema sin necesidad de efectuar la reducción del gráfico.

Definiciones.

Nodo. Un nodo es un punto que representa una variable o señal.

Transmitancia. Es la ganancia entre dos nodos. Tales ganancias pueden expresarse en términos de la función de transferencia entre dos nodos.

Rama. Una rama es un segmento de línea con dirección y sentido, que une dos nodos. La ganancia de una rama es una *transmitancia*.

Nodo de entrada o fuente. Nodo de entrada o fuente es un nodo que sólo tiene ramas que salen. Esto corresponde a una variable independiente.

Nodo de salida o sumidero. Un nodo de salida o sumidero es un nodo que sólo tiene ramas de entrada. Esto corresponde a una variable dependiente.

Nodo mixto. Nodo mixto es un nodo que tiene tanto ramas que llegan, como ramas que salen.

Camino o trayecto. Camino o trayecto es un recorrido de ramas conectadas en el sentido de las flechas de las ramas. Si no se cruza ningún nodo más de una vez, el camino o trayecto es abierto. Si el camino o trayecto finaliza en el mismo nodo del cual partió, y no cruza ningún otro más de una vez, es un camino o trayecto cerrado.

Lazo. Un lazo es un camino o trayecto cerrado.

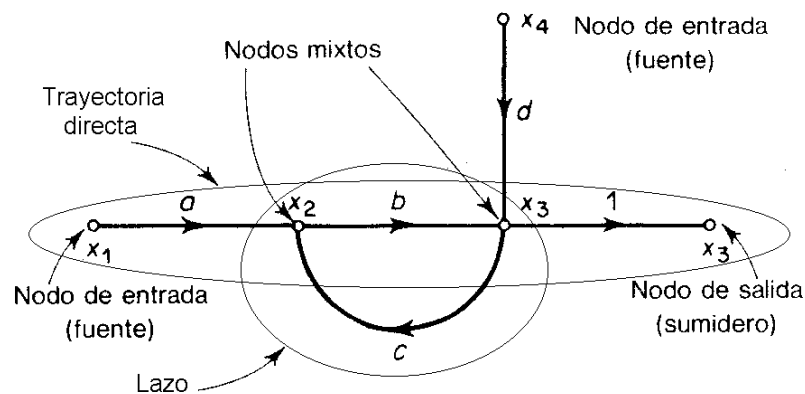
Ganancia de lazo. La ganancia de lazo es el producto de las ganancias de ramas de un lazo.

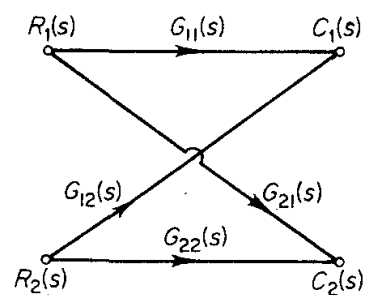
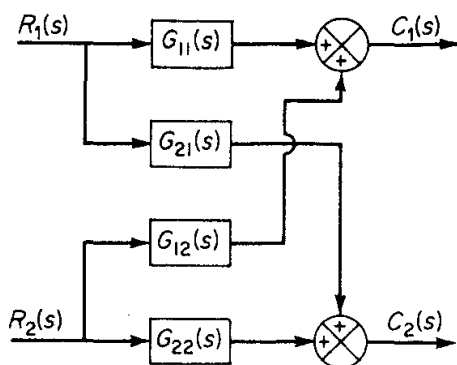
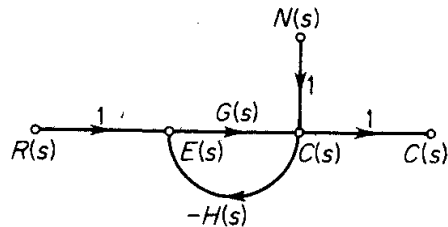
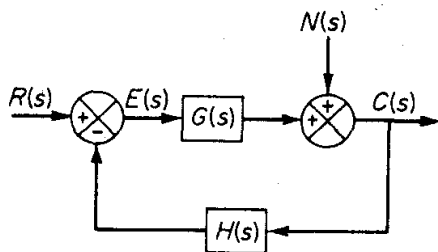
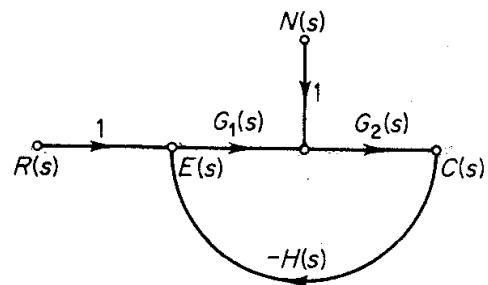
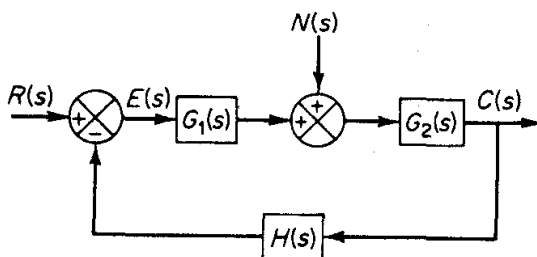
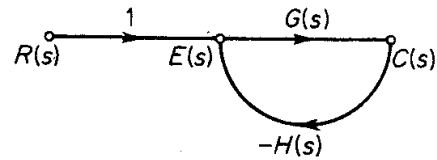
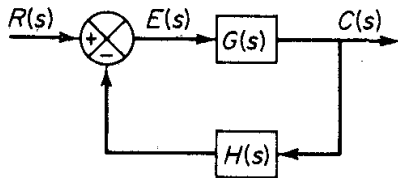
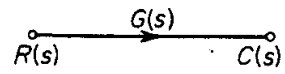
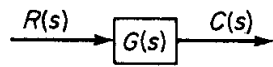
Lazos disjuntos. Son disjuntos los lazos que no tienen ningún nodo común.

Trayecto o camino directo. Trayecto directo es el camino o trayecto de un nodo de entrada (fuente) a un nodo de salida (sumidero), sin cruzar ningún nodo más de una vez.

Ganancia de trayecto directo. La ganancia de trayecto directo es el producto de las ganancias de rama de un camino o trayecto directo.

Un nodo suma las señales de todas las ramas de entrada y transmite esa suma a todas las ramas de salida.





Fórmula de ganancia de Mason para gráficos de flujo de señal

En muchos casos prácticos se desea determinar la relación entre una variable de entrada y una variable de salida en el gráfico de flujo de señal. La ganancia entre un nodo de entrada y un nodo de salida es la ganancia total, entre esos dos nodos.

La fórmula de ganancia de Mason, que es aplicable a la ganancia total, está dada por

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$$

donde

P_k = ganancia de la k -ésima trayectoria directa

Δ = determinante del gráfico

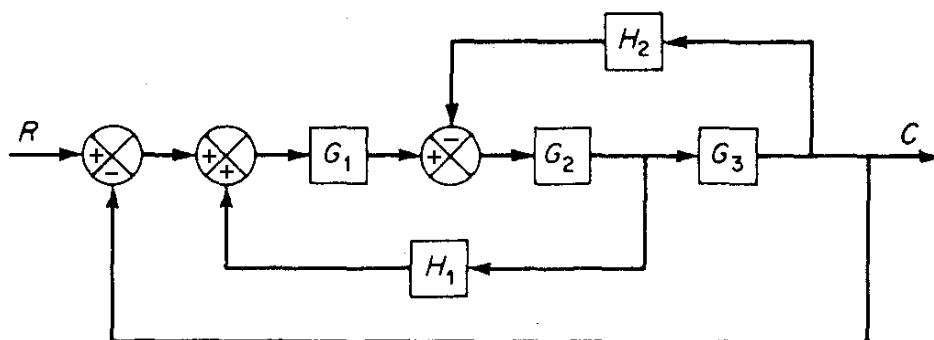
= 1-(suma de todos los lazos de ganancias individuales) + (suma de los productos de ganancia de todas las combinaciones posibles de dos lazos disjuntos) - (suma de los productos de ganancia de todas las combinaciones posibles de tres lazos disjuntos) +.....

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

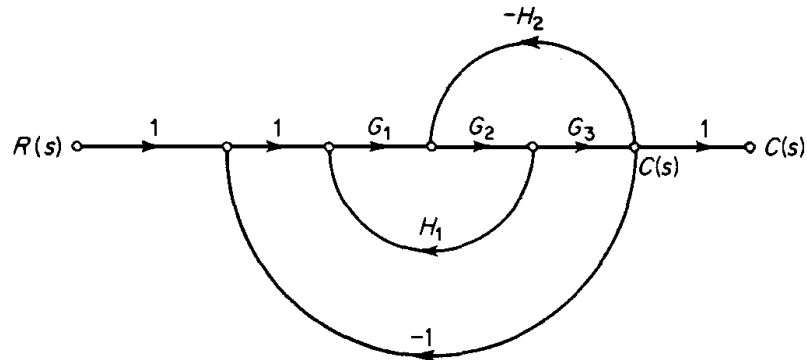
Δ_k = cofactor del determinante de la k -ésima trayectoria directa del gráfico con los lazos que tocan la k -ésima trayectoria directa eliminados, el cofactor Δ_k se obtiene a partir de Δ , quitando los lazos que tocan la trayectoria P_k .

Ejemplo 1

Obtener la función de transferencia $C(s)/R(s)$ del siguiente diagrama de bloques, utilizando la formula de Mason.



El gráfico de flujo de señal de este diagrama de bloques es



En este sistema hay una sola trayectoria directa entre la entrada $R(s)$ y la salida $C(s)$. La ganancia de trayectoria directa es

$$P_1 = G_1 G_2 G_3$$

Existen tres lazos, cuyas ganancias son

$$L_1 = G_1 G_2 H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_3 H_2$$

$$L_3 = -G_1 G_2 G_3$$

Para ser lazos disjuntos estos lazos no deben de tener ni ramas ni nodos en común, por lo que no existen lazos disjuntos.

El determinante Δ es

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3$$

El número de cofactores del determinante es el número de trayectorias directas entre la entrada y la salida, como en este sistema solo hay una trayectoria directa, solo existe un cofactor del determinante.

Se obtiene el cofactor del determinante a lo largo del trayecto directo que conecta el nodo de entrada con el nodo de salida, retirando los lazos que tocan este trayecto. Como el trayecto P_1 toca los tres lazos, se obtiene

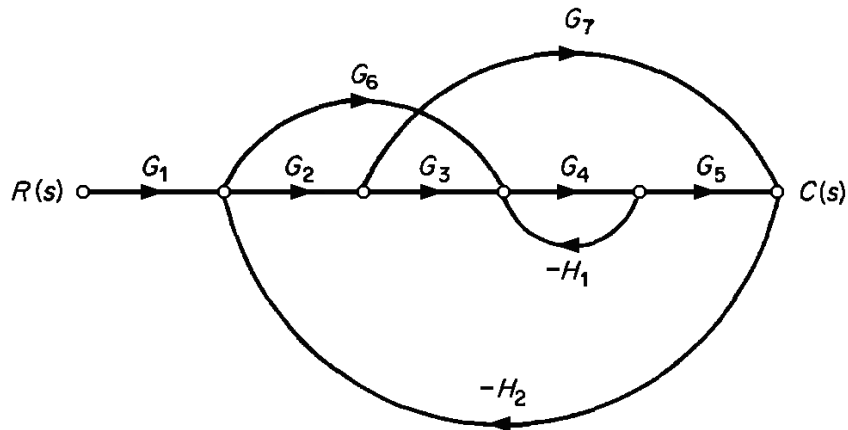
$$\Delta_1 = 1$$

Por tanto, la ganancia total entre la entrada $R(s)$ y la salida $C(s)$ o función de transferencia de lazo cerrado, está dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}$$

Ejemplo 2

Hallar la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$ del siguiente sistema, utilizando la fórmula de Mason.



En este sistema hay tres trayectorias directas entre la entrada $R(s)$ y la salida $C(s)$. Las ganancias de las trayectorias directas son

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5$$

$$P_3 = G_1 G_2 G_7$$

Hay cuatro lazos individuales. Las ganancias de esos lazos son

$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_7 H_2$$

$$L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_2$$

$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

El lazo L_1 no toca al lazo L_2 , (lazos disjuntos). Por tanto, el determinante Δ está dado por

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2$$

El cofactor Δ_1 se obtiene de Δ eliminando los lazos que tocan la trayectoria P_1 . Por tanto, quitando L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , y $L_1 L_2$

$$\Delta_1 = 1$$

En forma similar, el cofactor Δ_2 se obtiene de Δ eliminando los lazos que tocan la trayectoria P_2 , lazos L_1, L_2, L_3, L_4 , y L_1L_2

$$\Delta_2 = 1$$

El cofactor Δ_3 obtiene de Δ eliminando los lazos que tocan la trayectoria P_2 . Lazos L_2, L_3, L_4 , y L_1L_2

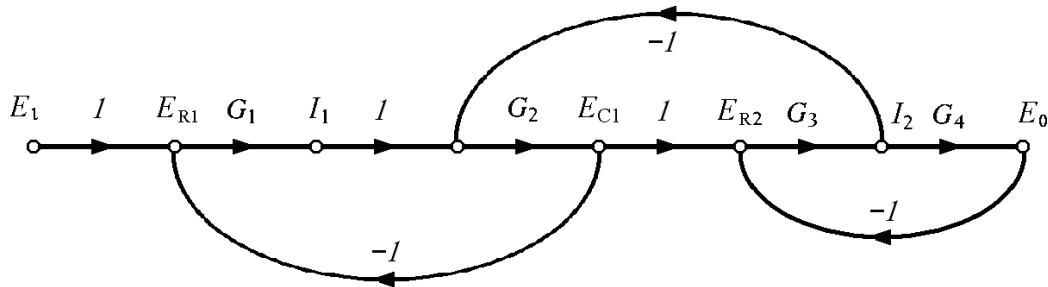
$$\Delta_3 = 1 - L_1$$

La función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$ es

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= P = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_6 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 H_1 G_2 G_7 H_2} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Hallar la función de transferencia de lazo cerrado $E_0(s)/E_i(s)$ del siguiente sistema, utilizando la fórmula de Mason. Considerar las demás señales como salidas.



Hay tres lazos individuales. Las ganancias de esos lazos son

$$L_1 = -G_1G_2$$

$$L_2 = -G_3G_4$$

$$L_3 = -G_2G_3$$

El lazo L_1 no toca al lazo L_2 , (lazos disjuntos). Por tanto, el determinante Δ está dado por

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_2$$

$$\Delta = 1 + G_1G_2 + G_3G_4 + G_2G_3 + G_1G_2G_3G_4$$

Considerando $E_0 = \text{Señal de salida}$, $E_i = \text{Señal de entrada}$

En este sistema hay una trayectoria directa entre la entrada E_i y la salida E_0 . La ganancia de la trayectoria directa es

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4$$

El cofactor Δ_1 se obtiene de Δ eliminando los lazos que tocan la trayectoria P_1 . Los tres lazos tocan la trayectoria P_1

$$\Delta_1 = 1$$

La función de transferencia de lazo cerrado sería

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_1G_2 + G_3G_4 + G_2G_3 + G_1G_2G_3G_4}$$

Considerando $I_2 = \text{Señal de salida}$, $E_i = \text{Señal de entrada}$

En este sistema hay una trayectoria directa entre la entrada E_i y la salida I_2 . La ganancia de la trayectoria directa es

$$P_1 = G_1 G_2 G_3$$

El cofactor Δ_1 se obtiene de Δ eliminando los lazos que tocan la trayectoria P_1 . Los tres lazos tocan la trayectoria P_1

$$\Delta_1 = 1$$

La función de transferencia de lazo cerrado sería

$$\frac{I_2(s)}{E_i(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

Considerando $E_{r2} = \text{Señal de salida}$, $E_i = \text{Señal de entrada}$

En este sistema hay una trayectoria directa entre la entrada E_i y la salida E_{r2} . La ganancia de la trayectoria directa es

$$P_1 = G_1 G_2$$

El cofactor Δ_1 se obtiene de Δ eliminando los lazos que tocan la trayectoria P_1 . Los tres lazos tocan la trayectoria P_1

$$\Delta_1 = 1$$

La función de transferencia de lazo cerrado sería

$$\frac{E_{r2}(s)}{E_i(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

Considerando $E_{c1} = \text{Señal de salida}$, $E_i = \text{Señal de entrada}$

En este sistema hay una trayectoria directa entre la entrada E_i y la salida E_{c1} . La ganancia de la trayectoria directa es

$$P_1 = G_1 G_2$$

El cofactor Δ_1 se obtiene de Δ eliminando los lazos que tocan la trayectoria P_1 . El lazo L_2 no toca la trayectoria P_1 , los lazos L_1 y L_3 si tocan la trayectoria P_1 .

$$\Delta_1 = 1 - L_2$$

La función de transferencia de lazo cerrado sería

$$\frac{E_{c1}(s)}{E_i(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 (1 + G_3 G_4)}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

Considerando $I_1 = \text{Señal de salida}$, $E_i = \text{Señal de entrada}$

En este sistema hay una trayectoria directa entre la entrada E_i y la salida I_1 . La ganancia de la trayectoria directa es

$$P_1 = G_1$$

El cofactor Δ_1 se obtiene de Δ eliminando los lazos que tocan la trayectoria P_1 . El lazo L_2 y L_3 no toca la trayectoria P_1 , el lazo L_1 si toca la trayectoria P_1 .

$$\Delta_1 = 1 - L_2 - L_3$$

La función de transferencia de lazo cerrado sería

$$\frac{I_1(s)}{E_i(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 (1 + G_3 G_4 + G_2 G_3)}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

Considerando $E_{r1} = \text{Señal de salida}$, $E_i = \text{Señal de entrada}$

En este sistema hay una trayectoria directa entre la entrada E_i y la salida E_{r1} . La ganancia de la trayectoria directa es

$$P_1 = 1$$

El cofactor Δ_1 se obtiene de Δ eliminando los lazos que tocan la trayectoria P_1 . El lazo L_2 y L_3 no toca la trayectoria P_1 , el lazo L_1 si toca la trayectoria P_1 .

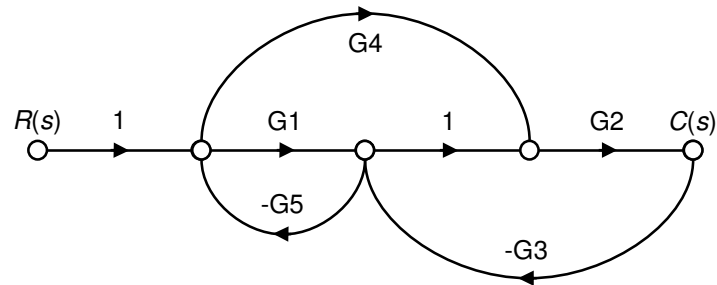
$$\Delta_1 = 1 - L_2 - L_3$$

La función de transferencia de lazo cerrado sería

$$\frac{E_{r1}(s)}{E_i(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{(1 + G_3 G_4 + G_2 G_3)}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

**Ejemplo 4**

Hallar la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$ del siguiente sistema, utilizando la fórmula de Mason.

**Problemas**