Teorías de Campos Bosónicos

Una introducción a los campos de Spin-1, Spin-2 y Kalb-Ramond

Por
Juan José Fernández Morales

Tutorizado por
Dr. Prof. Bert Janssen

Trabajo de Fin de Máster.

Universidad de Granada
Máster en Física y Matemáticas

December 1, 2023

D. Juan José Fernández Morales con DNI - garantiza al firmar este documento que en la realización del TFM que lleva por título *"Teorías de Campos Bosónicos: Una introducción a los campos de Spin-1, Spin-2 y Kalb-Ramond."* se han respetado todos los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

December 1, 2023 Fdo.:

Abstract

The present thesis aims to provide a comprehensive analysis of bosonic field theories, with a focus on the development of essential skills in the construction of such theories. Through the exploration of this topic, we seek to gain a deeper understanding of the current state of knowledge in the field and make significant contributions to our understanding of fundamental interactions.

The structure of the thesis is divided into several chapters. In the first chapter, three key concepts for the analysis of the theories presented in the following chapters are introduced: the Ostrogradsky theorem, Wigner classification, and Hodge dual. And in the following chapters, the study of spin-1, spin-2, and Kalb-Ramond fields is considered both in their massive and massless forms.

This work presents a methodology for the analysis of physical theories. The thesis focuses on the study of the degrees of freedom of the fields associated with the theories, examining both the physical and apparent degrees of freedom. The equation of motion is derived and the Hamiltonian of the theory is studied with the aim of verifying that it is free of Ostrogradsky instabilities. Additionally, the behavior of the spin of each individual component of the massless fields is analyzed, confirming that the fields exhibit the expected spin and identifying which components correspond to field degrees of freedom and the associated spin values.

In the case of spin-1 and spin-2 fields, the behavior of the fields is explored from a general perspective for both the massive and massless cases. These fields are interesting to study for their relationship with particle interactions and their importance in understanding gravity and related theories. On the other hand, in the case of Kalb-Ramond fields, we focus on their relationships with the other fields already studied, as well as the connection between spin and the massive or massless nature of the Kalb-Ramond field.

In summary, the thesis provides a comprehensive analysis of bosonic field theories, with a focus on developing essential skills in the construction of such theories. We aim to gain a deeper understanding of the current state of knowledge in the field and make significant contributions to our understanding of fundamental interactions.

Keywords: Bosonic field theories, Degrees of Freedom, Spin-1 field, Spin-2 field, Kalb-Ramond field.

Resumen

La presente tesis tiene como objetivo proporcionar un análisis exhaustivo de las teorías de campo bosónico, con un enfoque en el desarrollo de habilidades esenciales en la construcción de dichas teorías. A través de la exploración de este tema, se busca obtener una comprensión más profunda del estado actual del conocimiento en el campo y hacer contribuciones significativas en nuestra comprensión de las interacciones fundamentales.

La estructura de la tesis se divide en varios capítulos. En el primer capítulo, se introducen tres conceptos clave para el análisis de las teorías presentadas en los siguientes capítulos: el teorema de Ostrogradsky, la clasificación de Wigner y el dual de Hodge. En los capítulos siguientes, se considera el estudio de campos de spin-1, spin-2 y Kalb-Ramond tanto en su forma masiva como sin masa.

En este trabajo se presenta una metodología para el análisis de teorías físicas. La tesis se centra en el estudio de los grados de libertad de los campos asociados a las teorías, examinando tanto los grados de libertad físicos como los aparentes. Se deriva la ecuación de movimiento y se estudia el hamiltoniano de la teoría con el objetivo de comprobar que este se encuentra libre de inestabilidades de Ostrogradsky. Además, se analiza el comportamiento del spin de cada componente individual de los campos no masivos, confirmando que los campos exhiben el spin esperado y identificando qué componentes corresponden a grados de libertad del campo y los valores de spin asociados.

En el caso de los campos de spin-1 y spin-2, se explora el comportamiento de los campos desde una perspectiva general tanto para el caso masivo como sin masa. Estos campos son interesantes de estudiar por su relación con las interacciones entre partículas y su importancia en la comprensión de la gravedad y teorías relacionadas. Por otro lado, en el caso de los campos de Kalb-Ramond, nos centramos en sus relaciones con los otros campos ya estudiados, así como la conexión entre el spin y la naturaleza masiva o sin masa del campo de Kalb-Ramond.

En resumen, la tesis proporciona un análisis exhaustivo de las teorías de campo bosónico, con un enfoque en el desarrollo de habilidades esenciales en la construcción de tales teorías. Se busca obtener una comprensión más profunda del estado actual del conocimiento en el campo y hacer contribuciones significativas en nuestra comprensión de las interacciones fundamentales.

Keywords: Teorías de campo bosónico, Grados de Libertad, Campo de spin-1, Campo de spin-2 y Campo de Kalb-Ramond.

Contents

Chapter 1

Introducción.

Michael Faraday (1791-1869) introdujo innovadoramente el concepto de *campo* en la física. En lugar de concebir las interacciones magnéticas como fenómenos que suceden instantáneamente a distancia, Faraday postuló la existencia de un ente mediador que transfiere información entre los elementos interactuantes. En este marco conceptual, el emisor origina una perturbación en su campo circundante, siendo la propagación de dicha perturbación a través del campo lo que eventualmente alcanza los receptores.

La teoría clásica de campos, desarrollada entre finales del siglo XIX y principios del XX, impulsó significativamente nuestro entendimiento de la física. Este paradigma posibilita la modelización de las interacciones entre objetos a través de campos, conduciendo al desarrollo de la teoría del electromagnetismo en 1885 por James Clerk Maxwell (1831-1879) y, posteriormente en 1915, a la formulación de la teoría de la relatividad general por Albert Einstein (1879-1955). En términos generales, el concepto de campo ha sido un componente esencial en el progreso de la física moderna.

El spin es una característica inherente de los campos en el contexto de la relatividad especial, y la teoría de campos de spin es el paradigma que encapsula el estudio de este tipo de campos. Dicha teoría constituye un marco crucial para la modelización de sistemas físicos. La teoría cuántica de campos profundiza en esta conceptualización al aplicar las reglas de cuantización a los campos descritos por la teoría de campos de spin, permitiendo así describir el comportamiento de los campos cuánticos.

La teoría de campos de spin, en conjunto con la teoría cuántica de campos, proporciona un marco eficaz para la modelización del comportamiento de las partículas fundamentales. Dichos campos cuánticos se categorizan principalmente en dos tipos: los campos fermiónicos, constitutivos de la materia, los cuales exhiben un spin semi-entero; y los campos bosónicos, mediadores de interacciones, que presentan un spin entero. Cabe destacar que todas las interacciones, a excepción de la gravedad, están incorporadas en el modelo estándar de partículas y son precisamente representadas por los campos bosónicos. Este modelo nos ofrece una descripción detallada del funcionamiento de las fuerzas fundamentales y la interacción entre todas las partículas elementales, incluyendo los campos bosónicos de spin 0 [1], spin 1 no masivo [4, 30], y spin 1 masivo [11, 5].

La gravedad, que representa la única interacción no incorporada en el modelo estándar de física de partículas, se define primordialmente a través de la teoría de la relatividad general. Esta teoría se considerarse como una reinterpretación profunda de la gravedad newtoniana, al integrar la interacción gravitatoria dentro del marco de la teoría de la relatividad especial. En el contexto linealizado, la relatividad general muestra una similitud notable con el campo de spin-2, tal como se detalla en [34, 19], propuesto y descrito por Markus Eduard Fierz (1912 - 2006) y Wolfgang Ernst Pauli (1900 - 1958) en el año 1939 [14]. Este descubrimiento ha sido la base para la exploración y desarrollo de una teoría de la gravedad que se fundamenta en los campos de spin, con la posibilidad de conducir a una teoría cuántica de la gravedad.

Las teorías de campos de spin se presentan como un marco formidable para desvelar los fundamentos de la física contemporánea, permitiendo adentrarnos en la esencia de las interacciones más básicas. Estas teorías son también indispensables en nuestra continua búsqueda de respuestas a cuestionamientos aún sin resolver en la física teórica. Investigaciones *state-of-the-art* en el ámbito de nueva física, incluyendo la búsqueda de una partícula mediadora de la gravedad [35], la exploración de física más allá del modelo estándar, que podría incluir posibles partículas constituyentes de la materia oscura [13, 8], y el estudio del origen de la energía oscura [32], son claros testimonios de su relevancia. Adicionalmente, las teorías de campos de spin han probado ser una herramienta crucial en el progreso de nuestro entendimiento de las fuerzas y partículas fundamentales de la naturaleza, tal como se puede apreciar en el descubrimiento del bosón de Higgs [2] y en la confirmación de la existencia de ondas gravitacionales.

La investigación en la teoría de campos de spin resulta de primordial relevancia en el dominio de la física de interacciones fundamentales. Esta tesis aspira a ofrecer un análisis fundamental de las teorías de campo bosónico, poniendo énfasis en la adquisición y desarrollo de habilidades fundamentales para la construcción de dichas teorías. Con la inmersión en este tema, se busca profundizar nuestra comprensión de área de estudio y aportar contribuciones significativas en nuestro entendimiento de las interacciones fundamentales.

La estructura de la presente tesis es la siguiente: En el Capítulo 2, introducimos tres elementos conceptuales clave que son indispensables para el análisis de las teorías que se abordarán en los capítulos subsiguientes. Estos elementos son el teorema de Ostrogradsky, la clasificación de Wigner y el dual de Hodge. El teorema de Ostrogradsky nos brinda una herramienta para identificar posibles desviaciones anómalas de un modelo físico en comparación con las expectativas clásicas. La clasificación de Wigner nos proporciona un método para prever los grados de libertad de un campo de spin. Por otro lado, el dual de Hodge se trata de un operador matemático, este será utilizado en el análisis del campo de Kalb-Ramond. Estos conceptos constituyen pilares fundamentales para nuestro examen de las teorías expuestas en los capítulos venideros.

El objetivo de los capítulos sucesivos es elaborar y analizar los lagrangianos de varios campos bosónicos. En particular, nos enfocamos en tres categorías de campos tanto en sus formas masivas como no masivas. En principio, tras introducir los antecedentes necesarios en el segundo capítulo, nos enfocaremos en estudiar los campos de spin-1 con mayor profundidad.

En el Capítulo 3, examinamos el caso masivo del campo de spin-1, donde el campo se encuentra asociado a una masa no nula. Este capítulo nos brinda la oportunidad de explorar el comportamiento del campo desde la perspectiva más general y deducir que el lagrangiano de Proca es el único lagrangiano físicamente viable. En el Capítulo 4, desviamos nuestra atención hacia el caso sin masa, el cual se distingue por la ausencia de un término de masa en el lagrangiano del campo. Al igual que en el caso masivo, deduciremos que el único lagrangiano físicamente aceptable es el lagrangiano de Maxwell. Adicionalmente, investigaremos las simetrías y leyes de conservación que emergen en el caso no masivo, y cotejaremos el comportamiento de los campos de spin-1 masivos y sin masa.

En conjunto, estos capítulos proporcionan una comprensión integral de los campos de spin-1 y sus propiedades. Dado que estos dos casos son sencillos y bien conocidos en la comunidad científica, los utilizamos como punto de partida para introducir los conceptos fundamentales de la teoría de campos.

En segundo lugar, nos enfocaremos en los campos de spin-2 masivos y no masivos (Capítulos 5 y 6), los cuales, aunque más complejos, comparten numerosas similitudes con los campos de spin-1. Estos campos son de particular interés porque pueden utilizarse para describir las interacciones entre partículas con spin-2, como los teóricos gravitones. Adicionalmente, su comportamiento es esencial para entender las propiedades de ciertas teorías vinculadas con la gravedad, tales como la relatividad general, la gravedad masiva o incluso la teoría de cuerdas.

Finalmente, en nuestra investigación, nos adentramos en el estudio de los campos de Kalb-Ramond, que representan los ejemplos más complejos y abstractos abordados en esta tesis (Capítulos 7 y 8). En concreto, el estudio de los campos de Kalb-Ramond ilumina sobre las propiedades fundamentales de la teoría de cuerdas y sus aplicaciones en física. De manera específica, haremos uso de la relación entre los campos de Kalb-Ramond y el campo de spin 1, así como la conexión entre el spin y la naturaleza masiva o sin masa de estos campos.

La metodología empleada en el análisis de cada teoría es similar. La tesis presta especial atención al estudio de los grados de libertad de los campos asociados a las teorías, al examen de los grados de libertad aparentes, es decir no físicos, y a la búsqueda de restricciones que conduzcan al número de grados de libertad predicho por la clasificación de Wigner.

En cada capítulo derivamos la ecuación de movimiento para el sistema físico utilizando la ecuación de Euler-Lagrange y procedemos a realizar la transformada de Legendre para obtener el hamiltoniano de la teoría. A continuación, demostramos que el dominio del hamiltoniano se encuentra acotado con un límite inferio, lo que garantiza que el sistema no presenta inestabilidades de Ostrogradsky. Este último resultado es crucial para la estabilidad y predictibilidad del sistema.

Por último, analizamos el comportamiento del spin de cada componente individual de los campos no masivos. Resulta esencial para este estudio confirmar que los campos exhiben el spin esperado, así como identificar qué componentes corresponden a grados de libertad del campo y los valores de spin asociados.

Esta metodología nos permite analizar todos los sistemas físicos de cada capítulo, particularmente en tres aspectos: investigaremos la relación entre el carácter tensorial y el spin de un campo. Examinaremos los casos masivos y sin masa, comparando y contrastando sus diferencias y similitudes. Además, exploraremos cómo la conservación de una corriente que interactúa con el campo está relacionada con la simetría del sistema, y cómo estas simetrías pueden utilizarse para predecir la conservación de la carga en casos no masivos. Específicamente, investigaremos la conexión entre la conservación de una corriente física en los casos no masivos y las simetrías del sistema que este conlleva.

Notación y Convenios Utilizados

Con el propósito de establecer un marco interpretativo coherente, y facilitar la comprensión del contenido presentado en esta tesis, se adoptan ciertos convenios y notaciones convencionales en el ámbito de la física teórica.

Inicialmente, utilizamos el sistema de unidades naturales, en el cual la velocidad de la luz se establece en la unidad ($c = 1$). Por otro lado, se emplea la letra D para denotar el número de dimensiones de la variedad manifiesta; no obstante, gran parte de la tesis se centra en el caso específico de cuatro dimensiones ($D = 4$).

Adoptamos el convenio de signos de tiempo positivo para la métrica $(+, -, -, -)$. En relación con la notación de los índices, los índices griegos (α, β, γ ...) se utilizan para denotar índices espacio-temporales ($\alpha = 0, 1, \cdots, D$), mientras que los índices latinos (i, j, k ...) se reservan para representar exclusivamente las componentes espaciales ($i = 1, \cdots, D-1$). El valor 0 de los índices hace referencia a la dirección temporal.

Además, se adopta el convenio de simetrización y antisimetrización: $(a, b) = ab + ba$ denota la simetrización, y $[a, b] = ab - ba$ representa la antisimetrización.

En el contexto de los productos tensoriales, hay circunstancias en las que resulta crucial distinguir de manera explícita entre las componentes temporales y espaciales. A modo de ejemplo:

$$\Pi^{00i}\Pi_{00i} = \eta^{il}\,\Pi_{00i}\Pi_{00m} = -\delta^{il}\,\Pi_{00i}\Pi_{00m}, \tag{1.1}$$
$$\Pi^{0ij}\Pi_{0ij} = \eta^{il}\eta^{jm}\,\Pi_{0ij}\Pi_{0lm} = \delta^{il}\delta^{jm}\,\Pi_{0ij}\Pi_{0lm}, \tag{1.2}$$
$$\Pi^{ijk}\Pi_{ijk} = \eta^{il}\eta^{jm}\eta^{kn}\,\Pi_{ijk}\Pi_{lmn} = -\delta^{il}\delta^{jm}\delta^{kn}\,\Pi_{ijk}\Pi_{lmn}. \tag{1.3}$$

En este contexto, δ^{ij} representa el símbolo de Kronecker. Para el desarrollo de la tesis, es fundamental establecer una notación precisa, por ejemplo $(\Pi_{0ij})^2$, para manejar la parte estrictamente positiva de cada término, independientemente de los signos asociados a la métrica. Los casos anteriores se manejarían como sigue de acuerdo con este convenio:

$$(\Pi_{00i})^2 \equiv \delta^{il}\,\Pi_{00i}\Pi_{00m}, \tag{1.4}$$
$$(\Pi_{0ij})^2 \equiv \delta^{il}\delta^{jm}\,\Pi_{0ij}\Pi_{0lm}, \tag{1.5}$$
$$(\Pi_{ijk})^2 \equiv \delta^{il}\delta^{jm}\delta^{kn}\,\Pi_{ijk}\Pi_{lmn}. \tag{1.6}$$

Los convenios y notaciones anteriores serán utilizados de forma sistemática a lo largo de este trabajo, lo que garantiza una exposición del contenido que sea clara, precisa y académicamente rigurosa.

Chapter 2

Preliminar.

En este capítulo, introducimos tres conceptos teóricos clave que resultan necesarios para nuestro análisis de las teorías de campo de los capítulos siguientes. El primero es el teorema de Ostrogradsky, que utilizamos para examinar las inestabilidades potenciales de nuestras teorías en la Sección 2.1. A continuación, introducimos el operador de Hodge, que nos permite trabajar con tensores completamente anti-simétricos en la Sección 2.2. Por último, presentamos la clasificación de Wigner, que nos permite determinar de antemano el número de grados de libertad que deben tener los campos de en la Sección 2.3.

2.1 Teorema de Ostrogradsky.

En 1850, el matemático Mikhail Ostrogradsky (1801 - 1862) publicó un artículo [24] en el que revisaba la construcción del formalismo hamiltoniano a partir de una clase de lagrangianos no degenerados que tienen derivadas temporales de orden mayor que uno. El artículo de Ostrogradsky muestra que el hamiltoniano construido a partir de estos lagrangianos puede no estar acotado inferiormente, lo que puede dar lugar a inestabilidades en el sistema físico. Este descubrimiento pone de manifiesto la necesidad de evitar el uso de esta clase de lagrangianos para la descripción de una teoría física, ya que no nos permite expresar con rigurosidad y exactitud la realidad.

En esta sección, presentamos la construcción de Ostrogradsky del hamiltoniano para derivadas de orden n, la cual nos permite demostrar el resultado del teorema. El desarrollo matemático se basa en el artículo [37].

Se considera un sistema cuyo lagrangiano clásico L presenta dependencias en la coordenada x y en sus variaciones temporales hasta orden n, donde x presenta dependencia temporal

$$L\left(x(t),\, \dot{x}(t),\, \cdots,\, \frac{d^n}{dt^n}x(t) \equiv x^{(n)}\right). \tag{2.1}$$

Además, la única condición sobre este sistema es que se asumirá que el lagrangiano depende de forma no degenerativa de la n-ésima derivada, es decir

$$\frac{\partial^2 L}{\partial (x^{(n)})^2} \neq 0. \tag{2.2}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para lagrangianos con dependencias de orden n tiene la forma

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{d^i}{dt^i}\left(\frac{\partial L}{\partial x^{(i)}}\right) = 0. \tag{2.3}$$

Como se trata de un lagrangiano no degenerado, las ecuaciones forman un sistema que trabaja con derivadas temporales hasta orden $2n$. Es decir, que se puede expresar la solución de la $2n$-ésima derivada de la coordenada en función del resto de variaciones

$$x^{(2n)} = \mathcal{F}\left(x,\, \dot{x},\, \cdots,\, x^{(2n-1)}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = \mathcal{X}\left(t,\, x|_{t=0}\,,\, \dot{x}|_{t=0}\,,\cdots,\, x^{(2n)}\Big|_{t=0}\right), \tag{2.4}$$

donde la solución de la coordenada depende de $2n$ valores iniciales. Por tanto, el espacio de fase del sistema también debe componerse por $2n$ coordenadas. En el trabajo original de Ostrogradsky la elección de las nuevas coordenadas canónicas son de la forma

$$X_i \equiv x^{(i-1)}; \qquad\qquad i = 0, \cdots, n \tag{2.5}$$

$$P_i \equiv \sum_{j=i}^{n} (-1)^{(j-i)} \frac{d^{(j-i)}}{dt^{(j-i)}} \frac{\partial L}{\partial x^{(j)}}; \qquad i = 0, \cdots, n. \tag{2.6}$$

Entonces, el lagrangiano se pueden reexpresar en función de la nueva base de coordenadas

$$L = L\left(X_1,\, \cdots,\, X_n,\, x^{(n)}\right). \tag{2.7}$$

Si se toma la definición del n-ésimo momento canónico, teniendo en cuenta que el sistema es no degenerado y de las nuevas dependencias del lagrangiano, se puede expresar $x^{(n)}$ en función de las coordenadas $(X_1, \cdots, X_n)$ y P_n

$$P_n = \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^{(n)} = \mathcal{A}\left(X_1, \cdots,\, X_n,\, P_n\right) \qquad \Longrightarrow \qquad L = L\left(X_1, \cdots,\, X_n,\, \mathcal{A}\right). \tag{2.8}$$

Finalmente, el hamiltoniano de Ostrogradsky toma la forma

$$H = P_1 X_2 + P_2 X_3 + \cdots + P_{n-1} X_n + P_n \mathcal{A} - L\left(X_1, \cdots, X_n,\, \mathcal{A}\right), \tag{2.9}$$

y satisface las ecuaciones de evolución estacionaria

$$\dot{X}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \qquad\qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial X_i}. \tag{2.10}$$

El hamiltoniano del sistema no depende explícitamente del tiempo, lo que implica que la energía total del sistema se conserva. Como se ve en la Ec. (2.9), el hamiltoniano depende linealmente de los momentos canónicos, excepto para el n-ésimo momento que depende de la configuración de $\mathcal{A}$. Notablemente, las dependencias lineales no son necesariamente positivas para todas las configuraciones de los momentos conjugados, impidiendo afirmar la existencia de un límite inferior en la energía del sistema.

Las ecuaciones de este tipo pueden presentar un tipo específico de inestabilidad en mecánica clásica conocido como inestabilidades de Ostrogradsky. Estas inestabilidades se encuentran asociadas al espacio de fases de los momentos y se manifiestan en la dependencia temporal de la variable dinámica. En consecuencia, una región del campo puede ser estable en su entorno espacial, pero aún así ser susceptible de sufrir inestabilidades de Ostrogradsky en función de su trayectoria temporal. Esto contrasta con otros tipos de inestabilidades, que pueden identificarse encontrando regiones de máximos en el potencial de un sistema.

En general, las inestabilidades pueden ser muy variables y complejas, por lo que requieren un estudio minucioso para su comprensión y predicción. Las inestabilidades de Ostrogradsky no son una excepción y más cuando se caracterizan por esa dependencia especial del tiempo. En el caso de las teorías de campo continuo con inestabilidades de Ostrogradsky, las soluciones de vacío pueden convertirse en una combinación de estados energéticamente positivos y negativos arbitrarios siempre que satisfagan la conservación de la energía. Sin embargo, como no existe un límite inferior en el potencial, la generación de estados posibles es infinita. La descomposición de un estado de vacío en una combinación infinita de estados excitados se considera un resultado catastrófico para una teoría clásica, ya que no se observa en la realidad. Otras implicaciones de estas inestabilidades se discuten en [37].

2.2 Dual de Hodge.

El dual de Hodge se define como una operación sobre (pseudo-)tensores completamente antisimétricos y cuyo resultado es otro (pseudo-)tensor completamente antisimétricos. Más en específico, el dual actua sobre un tensor $A_{i_1,\cdots,i_m}$, con $m \leq D$ y completamente antisimétrico, se obtiene un tensor $\hat{A}_{i_{m+1},\cdots,i_D}$ de rango $(0, D-m)$ de la forma

$$\hat{A}_{i_{m+1},\cdots,i_D} = \frac{1}{m!}\varepsilon_{i_1,\cdots,i_D} A^{i_1,\cdots,i_m}, \tag{2.11}$$

donde $\varepsilon^{i_1,\cdots i_D}$ se denomina símbolo de Levi-Civita y se define

$$\varepsilon_{i_1,\cdots i_D} = \begin{cases} +1, \text{si } (i_1,\cdots i_D) \text{ es una permutación par de } (1,2,3,\cdots,D) \\ -1, \text{si } (i_1,\cdots i_D) \text{ es una permutación impar de } (1,2,3,\cdots,D) \\ 0, \text{si dos o más índices se repiten} \end{cases} . \tag{2.12}$$

El operador dual de Hodge muestra la equivalencia entre un tensor antisimétrico de rango $(0, m)$ y otro de tamaño $(0, D-m)$ también antisimétrico. Es decir, a pesar de que el tamaño de los tensores sean distintos, ambos presentan el mismo número de grados de libertad, ambos objetos contienen la misma información.

Gracias al dual de Hodge, para el caso de $D = 4$ se puede generar la siguiente clase de equivalencias:

$$(0,0) \iff (0,4), \quad (0,1) \iff (0,3), \quad (0,2) \iff (0,2). \tag{2.13}$$

2.3 La Clasificación de Wigner.

En este trabajo, todas las teorías de campo se consideran en el espacio de Minkowski de 4 dimensiones ($\mathcal{M}_4$). Cualquier campo definido en esta variedad debe transformarse covariantemente bajo el grupo de simetría de $\mathcal{M}_4$, que se conoce como grupo de isometría o *grupo de Poincaré.*

Una de las principales herramientas que utilizamos en este trabajo es la clasificación de Wigner de las representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré. Esta clasificación juega un papel crucial en el estudio de las simetrías en las teorías de campos, ya que nos permite organizar los diferentes tipos de campos que pueden existir en $\mathcal{M}_4$ según sus propiedades de transformación bajo el grupo de Poincaré. Mostraremos cómo esta clasificación puede utilizarse para derivar nuevos resultados sobre el comportamiento de los campos en $\mathcal{M}_4$ y para comprender mejor sus propiedades fundamentales.

El *grupo de Poincaré* tiene dos operadores invariantes de Casimir

$$P^2 = P_\mu P^\mu = m^2 \mathbb{1} \quad \left[P^2, P_\mu\right] = 0 \quad \left[P^2, L_{\mu\nu}\right] = 0, \tag{2.14}$$

$$W^2 = W_\mu W^\mu = m^2 s\,(s+1) \mathbb{1} \quad \left[W^2, P_\mu\right] = 0 \quad \left[W^2, L_{\mu\nu}\right] = 0, \tag{2.15}$$

donde m es la masa y se define como un parámetro no negativo, s es el número cuántico de spin asociado al operador de momento de spin J, y $\mathbb{1}$ es el operador identidad en cuatro dimensiones. P_μ es el generador infinitesimal de traslaciones, y $L_{\mu\nu}$ es el generador de transformaciones de Lorentz. W_μ es el pseudovector Pauli-Lubański, que es el dual de Hodge del tensor producto $P^\nu L^{\rho\lambda}$

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}P^\nu L^{\rho\lambda}. \tag{2.16}$$

Los vectores asociados a los operadores de Casimir, W_μ y P_μ, son ortogonales entre sí

$$W^\mu P_\mu = 0. \tag{2.17}$$

En 1939, Eugene Paul Wigner (1902 - 1995) clasificó las representaciones irreducibles del *grupo de Poincaré* [36]. La clasificación se basa en los dos parámetros asociados a los operadores de Casimir: la masa m y el spin j. De los muchos grupos posibles presentados en la clasificación ([19] Capítulo 22), en este trabajo nos centraremos en dos: los que consideraremos en nuestro análisis.

- **Partícula sin masa y energía positiva:** En este caso, la masa presenta un valor nulo, $m = 0$. Esto significa que el vector P^μ también es un nulo. Puesto que el vector W_μ, también se encuentra definido como un vector nulo y resulta ortogonal a P_μ, ambos vectores deben ser proporcionales

$$W^\mu - hP^\mu = 0; \qquad h = \frac{(\vec{j}\cdot\vec{p})}{||\vec{p}||}. \tag{2.18}$$

  Por lo tanto, este tipo de sistema físico se determina por un único término: la helicidad h. Este parámetro se encuentra relacionado con el valor propio del spin j, que puede tomar valores enteros y semienteros no negativos. Bajo la transformación de paridad de la expresión (2.18), la fórmula es válida para valores $\pm j$. Esto significa que la representación presenta dos grados de libertad asociados a j, para cualquier partícula no masiva de cualquier spin.

- **Partícula masiva y energía positiva:** En el caso de una partícula masiva, es posible considerar un sistema en el que la partícula se encuentra en reposo. Las únicas componentes no triviales de W_μ son las asociadas al momento de spin J, de la partícula, con valores propios j.

$$\text{Sistema en reposo: } W^2 = m^2\, j(j+1). \tag{2.19}$$

  El estudio del momento de spin J, bajo estas condiciones en mecánica cuántica es bien conocido. Para un spin j dado, la representación del sistema presenta $(2j+1)$ grados de libertad, que se caracterizan por el número cuántico j_3. Los valores de este segundo número cuántico vienen dados por $-j, -j+1, \ldots, j-1, j$".

Los grupos restantes de la clasificación no resultan relevantes para este trabajo. Esto incluye el caso del vacío y otros casos exóticos que no presentan relación con la realidad, como campos asociados a energía negativa. La clasificación de Wigner proporciona una mejor comprensión de las conexiones entre las teorías de campo en el espacio de Minkowski, y permite entender mejor la relación entre los grados de libertad de un campo, su masa y su spin.

Una de las principales ventajas de la clasificación de Wigner es que proporciona un método claro y consistente para etiquetar las distintas representaciones del grupo de Poincaré. Conocer de antemano el número de grados de libertad para los casos masivo y sin masa nos permite estudiar las propiedades de los campos de forma sistemática y organizada, y comparar los resultados obtenidos campos de distinto spin, tanto masivos como sin masa. En este trabajo demostraremos la utilidad de la clasificación de Wigner aplicándola a varias teorías de campo en $\mathcal{M}_4$.

Chapter 3

Campo de spin-1 con masa.

El campo de spin-1 es de gran relevancia en la física conocida, ya que se utiliza a menudo para describir interacciones fundamentales a bajas energías. Por ejemplo, la interacción electromagnética está mediada por un campo de spin-1 en forma de fotones, los gluones, que son las partículas que median la fuerza nuclear fuerte, también son bosones de spin-1. En esta tesis, el estudio de los campos de spin-1 sirve como punto de partida para la exploración de los campos de los capítulos venideros.

Este capítulo se centra específicamente en el campo masivo de spin-1, ya que es una teoría bien conocida y estudiada. Hay varias razones de peso para estudiar este tipo de campo, como su aplicación a la interacción débil y sus partículas mediadoras, los bosones W y Z (para más información, véase [31]).

En este capítulo, analizamos el campo masivo de spin-1 a través de los siguientes pasos: en la Sec. 3.1 presentaremos el lagrangiano con el que trabajaremos, seguido de un cálculo de los grados de libertad y la ecuación de movimiento en la Sec. 3.2. El capítulo concluye con la presentación del hamiltoniano de la teoría en la Sec. 3.3.

3.1 Lagrangiano.

En este estudio se quiere crear un modelo matemático que describa el comportamiento de un campo A_μ de spin-1 y con masa. Para simplificar, supondremos que vive en una variedad de Minkowski de cuatro dimensiones $(\mathcal{M}_4, \eta)$. Además, se toman otros dos supuestos iniciales para contribuir a la teoría: la localidad y la invariancia de Lorentz de la acción, esenciales para cualquier teoría clásica relativista.

La característica de masa en las partículas afecta a la cinemática de la partícula, y por tanto se tiene que ver reflejado en la acción del sistema. El término del lagrangiano asociado a la masa m del campo viene dado por una autointeracción del propio campo masivo

$$m^2 A_\mu A^\mu. \tag{3.1}$$

El lagrangiano más general que se puede describir bajo estas condiciones establecidas tiene la forma

$$\mathcal{L}_m^{\text{spin}-1} = -\frac{1}{2}\,\partial_\mu A_\nu\,\partial^\mu A^\nu + \lambda_2\,\partial_\mu A^\mu\,\partial_\nu A^\nu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu B^\mu, \tag{3.2}$$

donde m es la masa en reposo del campo y los factores $\frac{1}{2}$ se escogen por el convenio de la normalización canónica[1]. El lector puede sentir curiosidad por la posible existencia de otro término cinético, como el

[1] La normalización canónica es una condición arbitraria arrastrada de la mecánica clásica, se impone que la componente cinética del lagrangiano tenga un prefactor $\frac{1}{2}$.

término $\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu$, de tal forma que satisfaga las condiciones discutidas en el párrafo anterior. Pero, podemos comprobar que este término no resulta independiente, equivale al segundo sumando de $\mathcal{L}_m^{\text{spin}-1}$ y un término de frontera

$$\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu = \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \mathcal{L}_{\text{Boundary}}. \tag{3.3}$$

Esta igualdad sugiere que ambas expresiones dan la misma ecuación de movimiento ($\partial_\alpha \partial_\nu A^\nu = 0$) y, en consecuencia, describen los mismos fenómenos físicos.

3.2 Grados de Libertad.

Al realizar un cálculo previo de los grados de libertad presentes en el campo, podemos tomar dos enfoques. Por un lado, podemos tener en cuenta el orden tensorial del campo. El campo A_μ se representa como un tensor de orden uno, un campo vectorial lorentziano. Este tipo de tensor se caracteriza por tener un máximo de cuatro grados de libertad.

Las simetrías rotacionales asociados al campo vectorial lorentziano vienen dado por la representación irreducible del grupo $SO(3)$ y cuya álgebra asociada la denotamos por $\mathfrak{so}(3)$. Para el caso de un campo de spin-1 con cuatro grados de libertad, la representación irreducible de $\mathfrak{so}(3)$ es de la forma $(1 \oplus 0)$. El conjunto de segundos números cuánticos asociados a la representación $(1 \oplus 0)$ es el triplete de spin-1 y el singlete de spin-0 respectivamente, en conjunto se representan como $\{(-1, 0, 1), (0)\}$. De esta forma se permite identificar de forma inequívoca la helicidad de cada componente del campo A_μ.

Por otro lado, la clasificación de Wigner (descrita en la sección 2.3) nos permite caracterizar los campos que viven en $\mathcal{M}_4$. El campo de este capítulo se ajusta a la descripción del grupo de campos con masa y spin, para los que la clasificación de Wigner predice $2j + 1$ grados de libertad del sistema, donde j se define como el spin del campo. En el caso de un campo con masa y spin-1 hay tres grados de libertad. La clasificación de Wigner también permite relacionar los grados de libertad con los valores del segundo número cuántico, en este caso $(-1, 0, 1)$.

Podemos apreciar que existe una pequeña discrepancia entre los grados de libertad de A_μ y los grados de libertad predichos por la clasificación de Wigner: sobra un grado de libertad de los asociados al vector lorentziano. Esto sugiere que debe haber alguna restricción impuesta en la teoría. La clasificación de Wigner arroja más información y nos permite identificar que el grado de libertad sobrante está relacionado con el singlete de spin-0.

Este problema con los grados de libertad motiva un estudio más profundo del lagrangiano, así como la búsqueda de esta condición límite. Este desarrollo se basa en el paper de Claudia de Rham [10], aunque existen múltiples desarrollos conocidos sobre este tema.

3.2.1 Eliminación del *ghost*.

Para analizar el lagrangiano primero proponemos aislar la componente de spin-0 de la representación del singlete. Para ello, expresamos uno de estos grados de libertad del campo A_μ como una componente χ aislada del campo vectorial

$$A_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \chi. \tag{3.4}$$

El campo escalar χ posee un único grado de libertad, mientras que el campo $\mathcal{A}_\mu$ porta los tres grados de libertad restantes correspondientes a la representación de un triplete de spin. Para asegurarnos de que $\mathcal{A}_\mu$ efectivamente posee estos tres grados de libertad, debemos imponer una restricción a alguna de sus componentes. Aunque hay varias restricciones posibles a considerar, en la siguiente sección demostraremos que la ecuación de movimiento conduce naturalmente a una condición que es necesaria y suficiente para que $\mathcal{A}_\mu$ presente el número deseado de grados de libertad.

Queremos analizar en mayor profundidad el comportamiento que presenta el campo χ, para ello substituimos la Ec. (3.4) en Ec. (3.2) y obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{m}^{\text{spin}-1} = -\frac{1}{2}\,\partial_\mu\mathcal{A}_\nu\,\partial^\mu\mathcal{A}^{\,\nu} + \lambda_2\,\partial_\mu\mathcal{A}^{\,\mu}\,\partial_\nu\mathcal{A}^{\,\nu} + 2\left(\lambda_2 - \frac{1}{2}\right)\partial_\mu\mathcal{A}_\nu\,\partial^\mu\partial^\nu\chi \\ + \left(\lambda_2 - \frac{1}{2}\right)\partial_\mu\partial_\nu\chi\,\partial^\mu\partial^\nu\chi + \frac{1}{2}m^2\left(\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^{\,\mu} + 2\mathcal{A}_\mu\partial^\mu\chi + \partial_\mu\chi\partial^\mu\chi\right),\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde el término cinético del campo χ del lagrangiano presenta derivadas temporales de orden dos

$$\mathcal{L}_{m,\,\chi}^{\text{spin}-1} = \left(\lambda_2 - \frac{1}{2}\right)\partial_\mu\partial_\nu\chi\,\partial^\mu\partial^\nu\chi. \tag{3.6}$$

Un lagrangiano con estas características se asemeja al caso analizado en el teorema de Ostrogradsky (Sección 2.1) y es un posible candidato para generar inestabilidades de Ostrogradsky. Esta similitud nos motiva verificar si efectivamente la energía de $\mathcal{L}_{m,\,\chi}^{\text{spin}-1}$ no presenta una cota inferior bien definida. El hamiltoniano asociado presenta la forma

$$\mathcal{H}_{m,\,\chi}^{\text{spin}-1} = (\lambda_2 - \frac{1}{2})\left[(\partial_0\partial_0\chi)^2 - (\partial_j\partial_i\chi)^2\right], \tag{3.7}$$

donde $(\partial_i\partial_j\chi)^2$ es definido completamente positivo y desprovisto de los signos asociados a los términos de la métrica,

$$(\partial_i\partial_j\chi)^2 = \delta^{il}\delta^{jm}\,\partial_i\partial_j\chi\,\partial_l\partial_m\chi. \tag{3.8}$$

Por lo tanto, al examinar la ecuación (3.7), identificamos configuraciones de campo que posibilitan la obtención de un valor arbitrariamente bajo de este hamiltoniano. Los campos que exhiben esta peculiaridad se conocen como *ghosts*. En el presente caso, el término $\mathcal{H}_{m,\,\chi}^{\text{spin}-1}$ posibilita que el campo χ manifieste una conducta característica de un *ghost*.

El teorema de Ostrogradsky, discutido en la sección 2.1 y con mayor detalle en la referencia [37], proporciona una comprensión de los posibles problemas que pueden surgir al incluir un campo de tipo "fantasma" en un lagrangiano. Específicamente, este teorema demuestra que la presencia de campos fantasma puede llevar a inestabilidades en la cinemática del sistema, haciendo que el lagrangiano no sea capaz de describir de manera precisa un sistema físico realista. Por tanto, es importante tener en cuenta las implicaciones del teorema de Ostrogradsky cuando se trabaja con lagrangianos que contienen campos de este tipo.

La presencia del término $\mathcal{L}_{m,\chi}^{\text{spin}-1}$ presenta un impacto negativo en el sistema completo debido a que forma parte de la energía total del sistema. Esto hace que el hamiltoniano total de la teoría no se encuentre acotado inferiormente, lo que puede conducir a comportamientos indeseables en el sistema físico descrito por la teoría. Para evitar esto, resulta necesario imponer una condición que prohíba la actuación del término problemático. En este caso imponemos:

$$\lambda_2 - \frac{1}{2} = 0 \tag{3.9}$$

Esta condición hace que $\mathcal{H}^{\text{spin}-1}_{m,\chi}$ sea nula para cualquier configuración del campo χ. Si imponemos esta condición sobre la ecuación (3.5) no deja al lagrangiano del sistema de la forma

$$\mathcal{L}^{\text{spin}-1}_{m} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu\, \partial^\mu \mathcal{A}^{\,\nu} - \partial_\mu \mathcal{A}^{\,\mu}\, \partial_\nu \mathcal{A}^{\,\nu}\right) + \frac{1}{2}m^2\left(\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^{\,\mu} + 2\mathcal{A}_\mu \partial^\mu \chi + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi\right), \tag{3.10}$$

donde $\mathcal{L}^{\text{spin}-1}_{m}$ queda libre del término $\mathcal{L}^{\text{spin}-1}_{m,\chi}$ y por tanto, de las posibles inestabilidades de Ostrogradsky. La condición sobre λ_2 implica que el campo χ desaparece en los términos dinámicos del lagrangiano. Sin embargo, podemos observar que aún aparece en el término de masa. Esta afirmación será relevante para el caso no masivo.

El lagrangiano se puede volver a expresar en función del campo A_μ de la forma

$$\mathcal{L}^{\text{spin}-1}_{m} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A^\mu\, \partial_\nu A^\nu\right) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \tag{3.11}$$

porque definir el pre-factor λ_2 nos asegura la desaparición de las posibles inestabilidades de Ostrogradsky. Este lagrangiano se le denomina acción de Proca en nombre de Alexandru Proca (1987 - 1955) [25].

En la bibliografía, y de forma análoga al campo de spin-1 no masivo, el lagrangiano se suele expresar en función del campo de fuerza $F_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}^{\text{spin}-1}_{m} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \quad \text{donde } F_{\mu\nu} \equiv \partial_{[\mu} A_{\nu]}. \tag{3.12}$$

Un tensor de orden dos antisimétrico y que, por la propia definición del campo de fuerza, $F_{\mu\nu}$ cumple con la identidad de Bianchi

$$\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu} \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \tag{3.13}$$

3.2.2 Ecuación de movimiento.

A pesar de sanar al sistema, la condición (3.10) no contribuye con una ligadura al campo de spin. El siguiente paso es el estudiar la ecuación de movimiento y comprobar si se obtiene alguna restricción sobre el campo. Para ello se aplica la ecuación de Euler-Lagrange al lagrangiano y se obtiene la ecuación de movimiento

$$0 = m^2 A^\beta + \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha, \tag{3.14}$$

que si se expresa en función del campo físico $F_{\mu\nu}$ queda

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -m^2 A^\beta. \tag{3.15}$$

Se puede añadir una derivada extra a la Ec. (3.15) y obtener una condición interna

$$0 = \partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = m^2 \partial_\beta A^\beta \quad \xrightarrow{\forall m} \quad \partial_\beta A^\beta = 0. \tag{3.16}$$

A la condición (3.16) se le conoce como condición de Lorenz. Se trata de una ligadura que permite fijar una componente del campo en función del resto de componentes, típicamente la componente temporal. Por tanto, de las cuatro componentes totales del vector, quedan tres únicamente independientes. Si se aplica sobre la ecuación de movimiento (3.14) se obtiene

$$m^2 A^\beta + \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = 0, \tag{3.17}$$

que se trata de un resultado conocido como ecuación de Proca, una solución de tipo onda masiva relativista. El obtener una solución de este tipo, nos permite afirmar que el campo A_μ respeta el comportamiento local y relativista esperado por una teoría física.

3.2.3 Grados de libertad.

La condición de Lorenz permite afirmar que el campo A_μ presenta efectivamente tres grados de libertad, se ha encontrado una ligadura que permite extraer del campo presenta un grado de libertad sobrante, lo que ha permitido ajustar el número de grados de libertad de manera que coincidan con los esperados por la clasificación de Wigner. Esto es esencial para asegurar la consistencia del modelo y poder utilizarlo en la descripción de sistemas físicos.

Además, como se mencionó anteriormente en el análisis de la ecuación (3.4), la condición (3.16) también implica que el campo $\mathcal{A}_\mu$ presenta efectivamente tres grados de libertad. Una de las componentes del campo $\mathcal{A}_\mu$ se puede fijar en función del campo χ y de las demás componentes del campo $\mathcal{A}_\mu$. Por ejemplo, en el caso de la componente temporal:

$$\partial_0 \mathcal{A}^0 = \partial_\alpha \partial^\alpha \chi - \partial_i \mathcal{A}^i. \tag{3.18}$$

En esta sección, hemos avanzado en la comprensión del comportamiento de nuestro sistema. Analizando las propiedades del campo hemos sido capaces de derivar del caso más general al lagrangiano de Proca, el único lagrangiano posible que es libre de fantasmas para el sistema. Esto implica que el lagrangiano de Proca es fundamental para describir el comportamiento de cualquier campo de spin-1 masivo.

Utilizando este lagrangiano, pudimos calcular la ecuación de movimiento del sistema y obtener la condición de Lorenz. Esto nos permitió determinar el exceso de grados de libertad en el sistema y confirmar que coinciden con los esperados por la clasificación de Wigner.

La obtención exitosa del lagrangiano de Proca, el cálculo de su ecuación de movimiento y la confirmación del número correcto de grados de libertad del campo mediante la condición de Lorenz son logros importantes que han mejorado nuestra comprensión del sistema. Estos resultados sientan las bases de los próximos capítulos.

En la última sección de este capítulo examinaremos el hamiltoniano del sistema. Demostraremos que este objeto se encuentra definido de tal manera que presenta una cota inferior, lo que garantiza que el sistema está libre de inestabilidades de Ostrogradsky. Esto completará nuestra confirmación de que el sistema está libre de inestabilidades de Ostrogradsky.

3.3 Hamiltoniano.

El hamiltoniano es una herramienta matemática esencial para el estudio de la mecánica clásica y cuántica. Se utiliza para describir la evolución de los sistemas físicos en el tiempo y juega un papel fundamental en la comprensión de estos sistemas. En esta sección final del capítulo, demostraremos que el hamiltoniano de nuestro sistema tiene un límite inferior, lo que garantiza su estabilidad y asegura que no muestra comportamientos inestables o de tipo *ghost* Esto completará nuestro análisis del sistema y confirmará que se comporta de manera consistente y físicamente razonable. Demostrando que el hamiltoniano tiene un límite inferior, podemos estar seguros de que el sistema se encuentra libre de inestabilidades de Ostrogradsky.

Además, en el estudio de los grados de libertad del campo que nos ocupa, se ha asumido que se trata de un conjunto de partículas masivas y energía positiva (ver Sec. 2.3). Estas son uno de los pocos tipos de partículas que el paradigma actual de la física considera, a diferencia de otros casos como los taquiones. Por lo tanto, no solo es necesario comprobar que el hamiltoniano tiene un límite inferior, sino también que se encuentra definido positivamente. Por lo tanto, para concluir con el caso masivo de spin-1, se analiza su hamiltoniano total.

Se hace la transformada de Legendre sobre $\mathcal{L}_m^{\text{spin}-1}$ para obtener el hamiltoniano

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_m^{\text{spin-1}} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}_m^{\text{spin-1}}}{\partial\left(\partial_0 A_\alpha\right)}\,\partial_0 A_\alpha - \mathcal{L}_m^{\text{spin-1}} = -\left(\partial^0 A^\alpha - \partial^\alpha A^0\right)\partial_0 A_\alpha - \mathcal{L}_m^{\text{spin-1}} = \\
&= -F^{0\alpha}F_{0\alpha} - F^{0\alpha}\partial_\alpha A_0 + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu = \\
&= -\frac{1}{2}F^{0i}F_{0i} + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} + \left(\partial_\alpha F^{0\alpha}\right)A_0 - \partial_\alpha\left(F^{0\alpha}A_0\right) - \frac{1}{2}m^2(A_0)^2 + \frac{1}{2}m^2(A_i)^2 = \\
&= \frac{1}{2}\left(F_{0i}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(F_{ij}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\left(A_0\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\left(A_i\right)^2 + \mathcal{H}_{\text{Boundary}}.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Al alcanzar la última igualdad, incorporamos la ecuación de movimiento (3.17) para llegar al resultado del hamiltoniano *on shell* o "en la capa de masas". Este resultado implica que el hamiltoniano se encuentra condicionado por la ecuación de movimiento y no representa simplemente el hamiltoniano genérico de cualquier campo de orden dos antisimétrico. Además, se requiere que el campo obedezca a la Ec. (3.14). El hamiltoniano *on shell* es instrumental para calcular la dinámica del sistema en un espacio de fase particular y para analizar la estabilidad del sistema.

Es importante mencionar que los términos cuadráticos, tales como $\left(F_{0i}\right)^2$, se presentan bajo el convenio establecido en el Capítulo 1 definidos positivos. Por tanto, se puede observar de la ecuación resultante que todas las contribuciones están definidas positivamente. De tal modo, se puede afirmar que el hamiltoniano es positivamente definido y presenta una cota inferior para cualquier valor del campo A_μ, lo que concuerda con la clasificación de Wigner. El único término que no se define positivamente es el término de frontera $\mathcal{H}_{\text{Boundary}}$, que, a diferencia del lagrangiano, no puede ser omitido. No obstante, es factible imponer condiciones de contorno que cancelen este término.

Chapter 4

Campo de spin-1 sin masa.

En este capítulo, se lleva a cabo un análisis del caso no masivo del campo de spin-1. Este tipo de teoría ha sido ampliamente estudiada debido a su relación con la realidad física, ya que los campos de spin-1 no masivos se encuentran en las teorías de campos bosónicos de dos de las fuerzas fundamentales de la física, el electromagnetismo y la fuerza nuclear fuerte. Las motivaciones físicas resultan suficientes para estudiar el caso sin masa del campo de spin-1.

Al igual que en los capítulos anteriores relacionados con casos no masivos, este capítulo presenta un análisis de la teoría del campo de spin-1 no masivo, junto con una sección final en la que se examinan las helicidades de cada una de las componentes del campo de estudio. Para llevar a cabo este análisis, nos basaremos en los resultados obtenidos en el Capítulo 3, que trata el caso de masa finita del campo de spin-1.

4.1 Lagrangiano

Estamos interesados en crear un modelo análogo al capítulo anterior, salvo que en esta teoría no se contempla el posible efecto masivo del campo. Es decir, buscamos modelar el comportamiento de un campo A_μ de spin-1 y sin masa, que vive en $\mathcal{M}_4$, y cuya acción sea local e invariante Lorentz.

El lagrangiano más general que se puede describir bajo estas condiciones es de la forma

$$\mathcal{L}^{\,\text{spin}-1} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu\, \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A^\mu\, \partial_\nu A^\nu\right), \tag{4.1}$$

y resulta análogo al lagrangiano de Proca, expresado en la Ec. (3.11), salvo por el término masivo. Debido a su enorme relevancia en la física de partículas, y de forma histórica con la interacción electromagnética, este lagrangiano también presentan nombre propio: se define como la acción de Maxwell, en nombre de James Clerk Maxwell.

El primer prefactor se define bajo el paradigma de la normalización canónica, mientras que para la elección del segundo prefactor se toma en cuenta el análisis realizado en el Apto. 3.2.1: la elección $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ previene las posibles inestabilidades de Ostrogradsky visualizadas en los términos dinámicos de este lagrangiano, al igual que también los previó en $\mathcal{L}^{\,\text{spin}-1}_{m}$.

Ante la idea de añadir posibles términos adicionales - por ejemplo $\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$ - podemos afirmar que se encuentran relacionados a los términos ya expuestos salvo un término de derivada total, como ocurre en la Ec. (3.3) para el caso del capítulo anterior.

Además, se puede definir el tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ como un tensor de orden dos, antisimétrico y que cumple la identidad de Bianchi

$$\varepsilon^{\lambda\rho\mu\nu}\partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \tag{4.2}$$

El tensor de Faraday se expresa en función del campo A_μ y se define como

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{[\mu}A_{\nu]} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{\text{ spin}-1} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{4.3}$$

4.2 Grados de Libertad.

Una vez expuesto el lagrangiano, procedemos a analizar sus grados de libertad. Por un lado, el campo A_μ se comporta de forma análoga al campo del capítulo anterior: es un vector lorentziano con un máximo de cuatro grados de libertad, cuya álgebra de Lorentz asociada al campo de spin-1 en la representación irreducible de $\mathfrak{so}\,3$ es $(1 \oplus 0)$ y cuya representación de segundos números cuánticos viene dada por $\{(-1, 0, 1), (0)\}$.

Por el otro lado, la clasificación de Wigner (ver Sección 2.3) prevé dos grados de libertad para cualquier campo bosónico no masivo, independientemente de su spin. Además, como el campo A_μ tiene spin 1, las representaciones de los dos grados de libertad deben estar relacionadas con las helicidades ± 1.

La diferencia en los grados de libertad entre el campo A_μ y los previstos por la clasificación de Wigner puede explicarse deduciendo que hay dos restricciones en la teoría. Según la imposición de Wigner, estas dos restricciones deben estar relacionadas con las dos representaciones de spin 0. Esta discrepancia en los grados de libertad nos lleva a profundizar en nuestro estudio del lagrangiano y a buscar sus condiciones de contorno para analizarla más a fondo.

En este contexto, es importante señalar que la primera diferencia que hemos encontrado entre el caso masivo y A_μ radica en el número de grados de libertad esperados por la clasificación de Wigner. En el caso masivo se espera un grado de libertad adicional al campo de esta sección. Esta desigualdad en los grados de libertad es un punto de inflexión clave entre ambas teorías. Además, es importante tener en cuenta que esta diferencia no desaparece a medida que se toma el límite $m \to 0^+$ del caso masivo. Es decir, la discrepancia se debe a que el planteamiento de una teoría masiva o no masiva ya condiciona los grados de libertad, independientemente del valor de la masa.

4.2.1 Invarianza *gauge.*

En este capítulo hemos obtenido la acción de Maxwell como la única opción posible que se encuentra libre de *ghosts*. Para ello, se ha definido el prefactor de $\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu$ en el lagrangiano. Esta elección se ha definido de tal manera que no aparezcan términos con derivadas temporales de orden dos cuando se realiza una descomposición del tipo

$$A_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \chi. \tag{4.4}$$

Como ya se analizó en el capítulo anterior en las ecuaciones (3.6) y (3.7), el lagrangiano presentado no incluye términos dinámicos relacionados con el campo χ de la descomposición (4.4). En otras palabras, el campo escalar desaparece trivialmente del lagrangiano $\mathcal{L}^{\text{ spin}-1}$ al elegir el prefactor $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Y por tanto, podemos afirmar que el lagrangiano de Maxwell resulta invariante bajo transformaciones *gauge* del campo A_μ del tipo

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{\text{ spin}-1}(A_\mu) = \mathcal{L}^{\text{ spin}-1}\left(A'_\mu\right), \tag{4.5}$$

donde ξ es un parámetro escalar libre. Por tanto, La invariancia del lagrangiano de Maxwell ante transformaciones del tipo descritas en la ecuación (4.5) permite redefinir el campo de la teoría de forma arbitraria sin afectar el sistema físico resultante.

La invariancia bajo transformaciones *gauge* es una propiedad que no se presenta en el lagrangiano de Proca, como se puede ver en la ecuación (3.10). Esto se debe a que la invariancia de $\mathcal{L}_m^{\text{spin}-1}$ no se cumple en el término de masa. No obstante, es posible encontrar extensiones de la teoría de spin-1 masiva que permiten que los campos masivos vectoriales tengan invariancia bajo transformaciones gauge mediante el uso de un campo auxiliar, como ocurre en la acción de Stueckelberg [27].

Esta elección *ad hoc* del campo nos otorga la posibilidad de restringir un grado de libertad al campo del sistema. El campo χ no aparece en el lagrangiano de Maxwell. Por tanto, su grado de libertad no se encuentra reflejado en la dinámica del sistema. Este resultado nos permite restringirlo, si substituimos la descomposición (4.4) sobre el campo A'_μ obtenido en la transformación *gauge* (4.5), de esta forma conseguimos describir al nuevo campo como

$$A'_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu (\chi + \xi) . \tag{4.6}$$

En la descomposición de este nuevo campo se puede observar que la nueva componente escalar ($\chi' \equiv \chi + \xi$) sí depende de nuestra elección arbitraria. La componente escalar del campo sigue sin aparecer en la dinámica del sistema - es por ello que podemos realizar estas transformaciones - pero su valor, ahora sí, se encuentra restringido a la elección del autor, por lo que ya no es un grado de libertad de A'_μ.

En el contexto de la teoría del campo de spin-1 no masivo, no existe experiencia empírica que permita medir directamente el campo A_μ. Esto significa que cualquiera de los infinitos campos A'_μ resultantes de una transformación *gauge* son igualmente válidos para expresar dicha teoría. Además, la presencia de una restricción en el campo A_μ que depende de una elección *ad hoc* sugiere que este campo no es una entidad física real, sino más bien un artefacto matemático o un campo auxiliar que nos permite estudiar la realidad física de manera más efectiva.

4.2.2 Ecuación de movimiento y Elección del *gauge*.

En esta sección se examina la ecuación de movimiento correspondiente a un campo de spin-1 no masivo. Para diversificar el análisis y evitar una repetición del cálculo relacionado al caso masivo, se explorará una situación distinta al caso libre que plantemos en el capítulo anterior 3.2.2. Para esta ocasión, tomaremos el lagrangiano general de spin-1 acoplado a una corriente y observaremos como deducimos las condiciones del lagrangiano de Maxwell. Este análisis permitirá introducir el teorema de Noether, ya que nos permitirá observar como la conservación de la corriente tiene una relación directa con las simetrías observadas anteriormente

Para llevar a cabo este análisis, se empleará un lagrangiano más general que el de Maxwell, que incluye el término λ_2 aún sin definir, y una interacción del campo A_μ con una corriente j_μ, como se ilustra a continuación

$$\mathcal{L}^{\text{ spin}-1} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \, \partial^\mu A^\nu + \lambda_2 \, \partial_\mu A^\mu \, \partial_\nu A^\nu - A_\mu j^\mu . \tag{4.7}$$

La cinemática de este sistema se obtiene a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange y da lugar a

$$-j^\alpha - 2\lambda_2 \partial_\beta \partial^\alpha A^\beta + \partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = 0. \tag{4.8}$$

Si asumimos conservación de la corriente ($\partial_\beta j^\beta = 0$), podemos extraer del resultado la condición sobre el prefractor λ_2

$$(2\lambda_2 - 1) \, \partial_\alpha \partial^\alpha \partial_\beta A^\beta = \partial_\beta j^\beta = 0 \quad \xrightarrow{\forall A^\beta} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \tag{4.9}$$

que coincide con el valor predispuesto en la Ec. (4.1). De esta forma, la ecuación de movimiento del campo A_μ se expresa como

$$\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha - \partial_\beta \partial^\alpha A^\beta \equiv \partial_\beta F^{\beta\alpha} = j^\alpha. \tag{4.10}$$

A partir de estos resultados, es evidente que la conservación de la corriente j^a implica una restricción específica sobre el parámetro λ_2, lo que lleva a la conclusión de que el lagrangiano de Maxwell es el único candidato viable dentro del espectro de posibilidades planteadas al inicio de esta subsección. En este sentido, se manifiesta en el sistema una correspondencia entre la conservación de la corriente j^a y la simetría 4.5 presente en el lagrangiano, este resultado se encuentra en consonancia con las implicaciones del teorema de Noether.

Con estos resultados, apreciamos que la conservación de la corriente j^a implica la imposición de una condición sobre el parámetro λ_2, lo que deja al lagrangiano de Maxwell como único candidato del abaníco de posibilidades ofrecidos al comienzo de esta subseción. Por tanto, podemos observar en este sistema una relación entre la conservación de la corriente j^a y la simetría debida a la invarianza 4.5 del lagrangiano, como expresa el teorema de Noether.

A pesar de haber encontrado un ejemplo claro de las consecuencias del teorema de Noether, aún no hemos podido establecer ninguna condición que nos permita restringir el segundo grado del campo A_μ. Para lograrlo, debemos imponer una condición adicional que cumpla con los siguientes requisitos: no debe cancelar la condición obtenida bajo la invarianza (4.5), y debe estar relacionada con una componente del campo A_μ que se corresponda con la representación de spin-0. En la bibliografía, este proceso se conoce como elección o fijación del *gauge*.

Existen muchas restricciones que permiten obtener dicha condición, como pueden ser el *gauge* de Coulomb, el *gauge* de Weyl o el conjunto de *gauges* R_ξ. A pesar del abanico de posibilidades, en el comienzo de la teoría decidimos imponer que se tratase de un modelo relativista, de los *gauges* posibles existe uno que resulta manifiestamente invariante Lorentz y que además presenta relación con el caso masivo: el *gauge* de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{4.11}$$

A este *gauge* se le denomina incompleto, esto se debe a que la elección de esta condición no permite fijar directamente el término ξ de la transformación *gauge* de la Ec. (4.5).

La elección del gauge de Lorenz es análoga a la condición obtenida en el caso masivo en la ecuación (3.16), de tal forma que podemos afirmar que esta condición es capaz de restringir un grado de libertad al campo A_μ (como observamos en el ejemplo 3.18). Además, esta condición nos permite simplificar la ecuación de movimiento (4.10), para el caso sin corriente j^μ la ecuación de movimiento se presenta como

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0, \tag{4.12}$$

una solución de tipo relativista e invariante Lorentz.

4.2.3 Grados de libertad.

En esta sección, se ha demostrado que el campo de spin-1 sin masa presenta dos grados de libertad, lo que concuerda con la clasificación de Wigner para esta clase de partículas. La invariancia *gauge* (4.5) y la elección del *gauge* (4.11) de Lorenz restringen un grado de libertad cada uno. En la sección 4.4, se lleva a cabo un análisis detallado del campo que confirma esta afirmación y muestra la relación entre las componentes del campo y la helicidad de las mismas.

En este trabajo hemos podido examinar el parentesco entre los campos vectoriales de spin-1 en el caso no masivo y masivo. Se utilizó el caso masivo como guía para facilitar los cálculos realizados en el caso no masivo. Esto nos permitió evitar posibles inestabilidades en el lagrangiano al plantearlo, dando lugar al lagrangiano de Maxwell como la única solución posible para un campo vectorial sin masa y con spin-1. Además, el lagrangiano de Proca y su condición de Lorenz nos guió para establecer el *gauge* adecuado para que la ecuación de movimiento cumpliera con las condiciones previamente establecidas en la teoría, como la necesidad de que la solución sea relativista.

Finalmente, llegamos a la conclusión de que los campos vectoriales de spin-1 solo pueden ser descritos por dos tipos de lagrangianos: el lagrangiano de Proca para el caso masivo y el lagrangiano de Maxwell para el caso no masivo.

4.3 Hamiltoniano.

En estos capítulos se han mencionado los problemas de inestabilidad de Ostrogradsky, es decir, que el hamiltoniano del sistema no tenga una cota inferior bien definida. Resulta fundamental que las teorías clásicas se encuentre bien descritas, y una de estas condiciones es que el sistema tenga un estado fundamental de mínima energía.

En nuestra teoría de campos de spin-1, es importante analizar el hamiltoniano para asegurar la conformidad con el grupo de clasificación de Wigner asociado a energía positiva. Es decir, es crucial verificar que existe una cota inferior del hamiltoniano y que éste se encuentra definido positivamente. Por lo tanto, se hace necesario calcular y analizar el hamiltoniano de $\mathcal{L}^{\text{ spin}-1}$.

El hamiltoniano se puede obtener de forma análoga al caso masivo en el desarrollo (3.19), en este caso el resultado es

$$\mathcal{H}^{\text{ spin-1}} = \frac{1}{2}\left(F_{0i}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(F_{ij}\right)^2 + \mathcal{H}_{\text{Boundary}}. \tag{4.13}$$

Donde $(F_{0i})^2$ y $(F_{ij})^2$ son definidos completamente positivos por convenio. El cálculo del hamiltoniano del campo de spin-1 se ha llevado a cabo mediante la consideración de la ecuación de movimiento (4.12). Como resultado, se ha obtenido un hamiltoniano definido positivamente, con excepción de un término de frontera que depende de las condiciones de contorno aplicadas. Este hallazgo se ha realizado en la capa de masas del sistema.

El lagrangiano utilizado en este análisis parece ser una opción adecuada para modelizar el comportamiento del campo físico en cuestión, ya que presenta los grados de libertad apropiados y un hamiltoniano y ecuación de movimiento definidos. En el siguiente apartado, se analizará el comportamiento específico del campo de spin-1, examinando cómo se manifiestan sus comportamientos de spin.

4.4 Helicidad.

En este capítulo, nuestro objetivo final es demostrar que el campo A_μ presenta un comportamiento de spin-1. Para lograrlo, utilizaremos los resultados obtenidos a lo largo del capítulo para aplicarlos de forma práctica a nuestro campo de estudio. El procedimiento que seguiremos es análogo al presentado en el capítulo 17 del libro [19].

4.4.1 Primera restricción.

En el Apto. 6.2.2 argumentamos que en este modelo se tomaría el *gauge* de Lorenz (4.11), de esta forma la ecuación de movimiento resulta en una ecuación de ondas relativista cuya solución es una combinación lineal de ondas planas. Para simplificar, en este apartado asumiremos que la solución es de la forma

$$A_\mu = C_\mu e^{ik_\lambda x^\lambda}, \tag{4.14}$$

donde las componentes de la amplitud C_μ son constantes y k_μ el vector de onda. La nueva expresión del campo permite visualizar mejor cómo el *gauge* de Lorenz elimina un grado de libertad.

- Si se aplica la condición *gauge* (4.11) sobre el campo

$$0 = \partial_\mu A^\mu = C_\mu \partial_\mu \left(e^{ik_\lambda x^\lambda}\right) = iC_\mu k^\mu e^{ik_\lambda x^\lambda} \iff C_\mu k^\mu = 0, \tag{4.15}$$

  observarmos que la amplitud y el vector de onda resultan perpendiculares entre ellos.

- Si se aplica la ecuación de movimiento (4.12) se obtiene que el vector de onda k_μ es nulo

$$0 = \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = C_\mu \partial_\nu \, \partial^\nu \left(e^{ik_\lambda x^\lambda}\right) = -C_\mu k_\nu \, k^\nu e^{ik_\lambda x^\lambda} \iff k_\nu k^\nu = 0, \tag{4.16}$$

  y por tanto la velocidad de propagación del campo sobre el espacio-tiempo es a velocidad de la luz.

Aunque las ecuaciones (4.15) y (4.16) se traten de dos condiciones distintas en conjunto se comporta como una ligadura sobre una de las componentes de A_μ. Con ambas condiciones se pueden fijar una componente de k_μ y de C_μ - por ejemplo, la componente temporal - y dejarlas en función de las otras tres coordenadas.

Si por ejemplo se tomara la cuarta componente de k_μ como la única dirección espacial arbitraria del vector de onda, la única configuración posible para que el vector de onda sea nulo es

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

y en consecuencia, la Ec. (4.15) sería de la forma

$$k\,(C_0 + C_3) = 0 \qquad \iff \qquad C_0 = -C_3. \tag{4.18}$$

Estos dos últimos resultados dejan a la componente A_0 completamente atada a la componente A_3

$$(A_\mu) = (-A_3,\, A_1,\, A_2,\, A_3). \tag{4.19}$$

En general, se puede dejar a una de las componentes del campo A_μ completamente determinada por el resto componentes, mostrando que el *gauge* de Lorenz reduce al campo un grado de libertad. Para nuestro caso, el campo A_μ queda con los tres grados de libertad asociados a las componentes espaciales.

4.4.2 Segunda restricción.

Como se mencionó en la Sección 6.2.2, la transformación de Lorenz no determina completamente el gauge. Aún subsiste libre el término ξ en la transformación gauge (4.5). Una elección adecuada de este parámetro permitiría ajustar el grado de libertad adicional al que pronosticamos con la clasificación de Wigner. Para lograrlo, empleamos la siguiente transformación en el campo A_μ:

$$\left.\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu + \partial_\mu \xi \\ \xi &= iU\, e^{ik_\lambda x^\lambda} \end{aligned}\right\} \implies A'_\mu = (C_\mu - k_\mu U)\; e^{ik_\lambda x^\lambda} \equiv C'_\mu\, e^{ik_\lambda x^\lambda}, \tag{4.20}$$

donde la amplitud U es una constante indefinida. Resaltamos que esta particular elección de ξ garantiza que el nuevo campo transformado aún cumpla con la condición *gauge* de Lorenz

$$\partial_\mu A'^\mu = 0, \tag{4.21}$$

En consecuencia, esta elección de ξ permite que la transformación mantenga los resultados (4.15) y (4.16).

Si volvemos a considerar un desplazamiento del campo solamente en la última coordenada espacial, la amplitud de A'_μ adopta la forma

$$(C'_\mu) = (-(C_3 + kU),\ C_1,\ C_2,\ C_3 + kU)\,, \tag{4.22}$$

perdiendo nuevamente un grado de libertad, en este caso asociado a la componente temporal. Nuevamente, observamos que la selección de la dirección de k_μ del campo, en conjunto con los resultados de las ondas relativistas ((4.15) y (4.16)), indica que la componente temporal se encuentra ligada a la última componente espacial. Esto sugiere que el campo no puede ser libremente configurado y que estas componentes se encuentran interrelacionadas. Esto concuerda con lo esperado por la Ec. (4.19).

En comparación con la subsección anterior, este nuevo caso es notable debido al campo transformado. Esta nueva perspectiva altera la configuración de las componentes interdependientes de A'_μ, ya que la última componente no depende solamente de la amplitud C_3, sino también del parámetro U no definido. La tentación es clara, si relacionamos U con la amplitud de la última componente espacial, nos permitiría la eliminación de dos componentes de A'_μ

$$U = -k^{-1} C_3 \quad \implies \quad (C'_\mu) = (0,\ C_1,\ C_2,\ 0)\,. \tag{4.23}$$

Finalmente, obtenemos una representación visual que confirma que los grados de libertad del campo A'_μ son dos, tal como se discutió en la sección 4.2 y se pronosticó en la Sec. 2.3. Gracias a este desarrollo, se hace evidente que las componentes del campo que persisten son aquellas perpendiculares al vector de onda, en nuestro caso específico: perpendiculares a la tercera componente espacial.

4.4.3 Helicidides del campo de spin-1.

Queda comprobar que efectivamente las componentes del campo A'_μ asociadas a los grados de libertad también son las que presentan las helicidades ± 1. La visualización de estas helicidades viene dado por la aplicación de una rotación al campo bajo el grupo de transformaciones de Lorentz. Si la transformación de campo al rotar presenta la forma

$$A''_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu A'_\nu = e^{ih\theta} A'_\mu, \tag{4.24}$$

donde $(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}$ representa la rotación del campo alrededor de la dirección de propagación, y θ se define como el ángulo de rotación de dicha rotación. Definiremos h como la helicidad de cada una de las componentes del campo. En nuestro caso, el campo transforma bajo una rotación de un ángulo θ en el plano $x_1 x_2$. El tensor de transformación se expresa

$$(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

Si se aplica la transformación en las componentes del campo que no presentan los grados de libertad podemos observar que resultan invariantes bajo esta transformación

$$C_0'' = C_0', \qquad C_3'' = C_3', \tag{4.26}$$

es decir, que la helicidad de ambos es 0, se trata de los spin-0 de las representaciones del triplete y el singlete. Las otras dos componentes del campo quedan al transformase de la siguiente forma

$$C_1'' = C_1' \cos(\theta) - C_2' \sin(\theta), \tag{4.27}$$

$$C_2'' = C_1' \sin(\theta) + C_2' \cos(\theta). \tag{4.28}$$

A primera vista, no se percibe claramente la helicidad de cada una de las componentes. Sin embargo, es posible redefinir nuevas componentes para el campo A'_{μ}:

$$\begin{array}{ccc} C_R' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(C_1' + iC_2') & & C_R'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(C_1'' + iC_2'') = e^{i\theta} C_R' \\ & \Longleftrightarrow & \\ C_L' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(C_1' - iC_2') & & C_L'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(C_1'' - iC_2'') = e^{-i\theta} C_R'. \end{array} \tag{4.29}$$

Estas nuevas componentes, denominadas polarizaciones circulares, reflejan las helicidades del sistema. En esta base, las helicidades de las componentes, C_R' y C_L', son apreciables, presentando helicidades de 1 y -1, respectivamente.

Los resultados obtenidos indican que las helicidades del campo de spin-1 son consistentes con las predicciones de la representación de spin. Asimismo, se encuentran distribuidas en conformidad con la clasificación de Wigner, con componentes de helicidad ± 1 asociadas a los grados de libertad del sistema. La coherencia en el comportamiento de las helicidades de estos campos avala la conclusión del análisis del lagrangiano del spin-1 sin masa.

Es relevante destacar no solo el análisis teórico, si no la correlación con lo observado fenomenológicamente: como por ejemplo el campo electromagnético, que se ajusta a este patrón. La helicidad de los fotones ha sido extensamente estudiada, lo cual nos permite distinguir dos subtipos de partículas en función de su helicidad: fotones levógiros y fotones dextrógiros (consulte [38] para más información).

En conclusión, el estudio de los campos de spin-1 es crucial para comprender el comportamiento de estas partículas y sus interacciones con otros campos. Los campos de spin-1 masivos y los de spin-1 no masivos exhiben comportamientos distintos y requieren enfoques diferentes para su estudio, aunque se encuentran estrechamente relacionados. Los resultados obtenidos en ambos análisis respaldan la consistencia y previsibilidad de estos campos, proporcionando información valiosa sobre su estructura y propiedades.

Chapter 5

Campo de spin-2 con masa.

En los siguientes dos capítulos se aborda el estudio del campo de spin-2, más en concreto, en este capítulo nos enfocamos en su forma masiva. A diferencia de los casos tratados en los capítulos anteriores, el análisis de este tipo de campo es puramente teórico, ya que aún no existen evidencias de la existencia de partículas fundamentales asociadas a un campo de spin-2.

Sin embargo, esto no impide que existan motivaciones para su estudio. En primer lugar, gran parte de las interacciones en el universo se encuentran descritas a través de campos de spin, por lo que el conocimiento de este paradigma resulta beneficioso para comprender mejor este tipo de interacciones. En segundo lugar, la búsqueda de teorías más allá de los campos conocidos puede beneficiarse del conocimiento matemático del comportamiento de los campos de spin, ya que podría permitir relacionar estos modelos matemáticos con nuevas teorías físicas, como la física más allá del Modelo Estándar. Y por último, aunque la Relatividad General es la única interacción que no se encuentra descrita bajo una teoría de campo de spin, presenta un comportamiento de spin-2 en su régimen lineal.

El campo de spin-2 masivo presenta una connotación ambicioso en la física y se encuentra íntimamente ligado a las teorías de gravedad modificada. En las últimas décadas ha adquirido un papel importante en las teorías de gravedad masiva (e.g. [21, 22]), especialmente en los modelos dRGT [10]. Obtener una mayor comprensión de este modelo de campo nos permitirá comprender mejor las descripciones de estas, entre otras, novedosas y avanzadas teorías.

5.1 Lagrangiano

En este estudio, se desea crear un modelo matemático que describa el comportamiento de un campo de spin-2 $h_{\mu\nu}$, que es simétrico y tiene masa, en una variedad de Minkowski de cuatro dimensiones $(\mathcal{M}_4, \eta)$. Además, al igual que ocurren en los capítulos de spin-1, se asume la localidad y la invariancia de Lorentz de la acción para que se comporte como una teoría dentro del marco de la relatividad especial.

De igual forma que el caso de spin-1 masivo, la masa del campo afecta a la cinemática, es decir, al lagrangiano del sistema. El término del lagrangiano asociado a la masa m del campo viene dado por la autointeracción del propio campo masivo. En el caso de un campo de spin-2, este término se puede expresar de dos formas distintas

$$m^2 \left(h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \lambda_5 \, h^2 \right), \tag{5.1}$$

donde m^2 es la masa asociada a la autointeración $h_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$, h^2 es el cuadrado de las trazas del campo

$$h^2 \equiv h^\mu{}_\mu h^\nu{}_\nu, \tag{5.2}$$

y λ_5 es un parámetro adimensional que permite diferenciar al prefactor asociado a la segunda auto-interacción de la masa del primero.

En base a las características de nuestro modelo, el lagrangiano más general para el campo de spin-2 masivo presenta la forma

$$\mathcal{L}_m^{\,\text{spin2}} = \frac{1}{4}\partial_\mu h_{\nu\rho}\,\partial^\mu h^{\nu\rho} + \lambda_2\,\partial_\mu h_{\nu\rho}\,\partial^\nu h^{\rho\mu} + \lambda_3\,\partial_\mu h\,\partial_\rho\,h^{\mu\rho} + \lambda_4\,\partial_\mu h\,\partial^\mu h + \frac{1}{4}m^2\left(b_{\mu\nu}b^{\mu\nu} + \lambda_5\,b^2\right), \tag{5.3}$$

donde $h = \eta^{\mu\nu}b_{\mu\nu} = h^\nu{}_\nu$.

Este lagrangiano presenta cuatro términos dinámicos independientes entre sí, y el prefactor $\frac{1}{4}$ se debe a la imposición de la normalización canónica del lagrangiano. Otros términos posibles, como $\partial_\mu b^{\mu\rho}\,\partial_\nu b_{\nu\rho}$, son equivalentes a los términos dinámicos mencionados anteriormente, excepto por un eventual término de derivada total. Un ejemplo de un término dinámico que no aparece en el lagrangiano puede ser

$$\partial_\mu h^{\mu\rho}\,\partial^\nu h_{\nu\rho} = \partial_\mu h_{\nu\rho}\,\partial^\nu h^{\mu\rho} + \mathcal{L}_{\text{Boundary}}. \tag{5.4}$$

Una vez que hemos definido el lagrangiano, el siguiente paso en nuestro estudio es analizar los grados de libertad del sistema. En la sección 5.2, profundizaremos más en estos conceptos y examinaremos cómo se relacionan con el lagrangiano que hemos definido.

5.2 Grados de Libertad.

En un análisis previo, hemos estudiado el campo de spin-1, el cual se caracteriza por tener un máximo de cuatro grados de libertad. Sin embargo, en este estudio, nos centraremos en un campo completamente diferente: un campo simétrico de spin-2 representado por el tensor $h_{\mu\nu}$. Este tipo de campo tiene un máximo de 10 grados de libertad ($D(D+1)/2$, con $D = 4$), lo que lo diferencia significativamente del campo de spin-1 que estudiamos anteriormente.

Por un lado, la representación irreducible de $\mathfrak{so},(3)$ para un campo de spin-2 con 10 grados de libertad puede tener la forma $(2 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0)$. El conjunto de segundos números cuánticos asociados a la representación (2) es el quintuplete de spin $\{2, -1, 0, 1, 2\}$, mientras que el resto de segundos números cuánticos son un triplete de spin-1 y dos singletes de spin-0.

Por otro lado, según la clasificación de Wigner, el campo $h_{\mu\nu}$ debe presentar 5 grados de libertad, ya que en los casos de campos masivos, los grados de libertad se determinan con la fórmula $2j + 1$, donde j es el spin del campo. Además, estas representaciones deben relacionarse con el mayor subconjunto de representación de Lorentz, en este caso, el quintuplete de spin-2.

Entonces, resulta evidente que existen ciertos grados de libertad sobrantes en este campo. De esta forma conocemos de antemano que debemos buscar un total de 5 ligaduras en el campo $h_{\mu\nu}$, y que se encuentran en las helicidades correspondientes a las representaciones $(1 \oplus 0 \oplus 0)$. Nuestra tarea en esta sección será identificar estos grados de libertad y analizar las ligaduras necesarias para eliminarlos. Esto será llevado a cabo siguiendo una metodología similar a la utilizada en los dos capítulos anteriores.

5.2.1 Eliminación de los *ghosts*.

Para este estudio, dividiremos el análisis en dos partes. En primer lugar, examinaremos el término de masa del lagrangiano. Como es conocido en la literatura, en los términos de masa nos encontramos ante un *ghost* conocido como el *ghost* escalar de Boulware-Deser [7]. En el trabajo original [10], se demuestra cómo este ghost presenta problemas en el sistema físico y no permite definir una cota inferior de la energía.

A modo de ejemplo, podemos observar que al realizar una descomposición del tipo

$$h_{\mu\nu} = \mathfrak{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \chi, \tag{5.5}$$

las componentes masivas del lagrangiano quedan descritas de la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} m^2 \left(b_{\mu\nu} b^{\mu\nu} + \lambda_5 \, b^2 \right) = \frac{1}{4} m^2 \Big(& \left[\mathfrak{h}_{\mu\nu} \, \mathfrak{h}^{\mu\nu} + \lambda_5 \, (\mathfrak{h})^2 \right] \\ & + \left[\mathfrak{h}_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \chi + \lambda_5 \, \mathfrak{h} \, \partial_\alpha \partial^\alpha \chi \right] + (1 + \lambda_5) \left(\partial_\mu \partial_\nu \chi \right)^2 \Big) + \mathcal{L}_{\text{Boundary}}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^\mu{}_\mu$ y $\left(\partial_\mu \partial_\nu \chi \right)^2 = \partial_\mu \partial_\nu \, \chi \partial^\mu \partial^\nu \chi$.

Al igual que ocurre con el término (3.6) para los campos de spin-1, los términos de lagrangiano de spin-2 asociado a la masa presenta derivadas temporales de orden dos en el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{m,\,\chi}^{\,\text{spin2}} = (1 + \lambda_5) \, \partial_\mu \partial_\nu \chi \, \partial^\mu \partial^\nu \chi, \tag{5.7}$$

y su hamiltoniano asociado solo se puede definir positivo para ciertos valores de λ_5

$$\mathcal{H}_{m,\,\chi}^{\,\text{spin2}} = (1 + \lambda_5) \left(\left(\partial_0 \partial_0 \chi \right)^2 - \left(\partial_i \partial_j \chi \right)^2 \right). \tag{5.8}$$

Se trata del mismo problema que se encuentra en la ecuación (3.7), con los términos completamente definidos positivos, existe configuraciones del campo χ que permite definir este hamiltoniano arbitrariamente negativo. Por tanto la solución pasa por el mismo planteamiento que en el caso de (3.7): la elección precisa de λ_5, de tal forma que permite definir el lagrangiano sin la presencia de campos fantasmas que generen problemas. En este caso debemos tomar

$$\lambda_5 = -1. \tag{5.9}$$

A esta condición se denomina el afinado (de *tuning* en inglés) de Fierz-Pauli, elección que toman en sus trabajos originales. Si se aplica la condición, el lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L}_{m}^{\,\text{spin2}} = \frac{1}{4} \partial_\mu h_{\nu\rho} \, \partial^\mu h^{\nu\rho} + \lambda_2 \, \partial_\mu h_{\nu\rho} \, \partial^\nu h^{\rho\mu} + \lambda_3 \, \partial_\mu h \, \partial_\rho \, h^{\mu\rho} + \lambda_4 \, \partial_\mu h \, \partial^\mu h + \frac{1}{4} m^2 \left(b_{\mu\nu} b^{\mu\nu} - \, b^2 \right). \tag{5.10}$$

para un estudio más detallado de este ghost se recomienda mirar [18, 33].

En segundo lugar, tras analizar el términos de masas del lagrangiano, también es importante analizar la componente dinámica del lagrangiano. Al igual que en el capítulo anterior (capítulo 3), el objetivo es descomponer el campo en dos partes: una con los 5 grados de libertad físicos y otra con los otros 5 grados asociados a las representaciones de spin-1 y a las dos representaciones de spin-0.

En este capítulo, recogemos los resultados obtenidos en el análisis del campo de spin-1. Sabemos que un campo vectorial A_μ presenta hasta cuatro grados de libertad y que estos están asociados a la representación $(1 \oplus 0)$ de $\mathfrak{so}\,(3)$. Además, sabemos que un campo escalar χ tiene un grado de libertad asociado al singlete de spin-0. Por tanto, la descomposición del campo de spin-2 viene dado como

$$h_{\mu\nu} = \mathrm{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{(\mu}A_{\nu)} + \partial_\mu\partial_\nu\chi. \tag{5.11}$$

Sin embargo, a pesar de que podemos afirmar que controlamos el número de grados de libertad y las helicidades de los campos A_μ y χ, no ocurre lo mismo con el nuevo campo $\mathrm{h}_{\mu\nu}$. En este caso, en principio no hemos impuesto ninguna restricción que asegure que este campo presente los cinco grados de libertad correspondientes. Podríamos imponer ligaduras *ad hoc*, pero al igual que en la descomposición (3.4) para el caso de spin-1 masivo, observaremos como tras la obtención de la ecuación de movimiento, surgen de forma natural restricciones al campo $\mathrm{h}_{\mu\nu}$ que fijan sus números de grados de libertad al esperado.

Al sustituir la descomposición presentada en la ecuación (5.11) en el lagrangiano del sistema, seguido de un proceso de simplificación y agrupamiento, obtenemos el lagrangiano resultante:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m^{\text{spin2}} =& \frac{1}{4}\partial_\mu \mathrm{h}_{\nu\rho}\,\partial^\mu \mathrm{h}^{\nu\rho} + \lambda_2\,\partial_\mu \mathrm{h}_{\nu\rho}\,\partial^\rho \mathrm{h}^{\nu\mu} + \lambda_3\,\partial_\rho \mathrm{h}^\nu{}_\nu\,\partial^\mu \mathrm{h}_{\mu\rho} + \lambda_4\,\partial_\rho \mathrm{h}^\mu{}_\mu\,\partial^\rho \mathrm{h}^\nu{}_\nu \\ &+ (\lambda_2+\lambda_3)\,\partial_\mu \mathrm{h}_{\nu\rho}\,\partial^\rho\partial^\nu A_\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\lambda_2\right)\partial_\mu \mathrm{h}_{\nu\rho}\,\partial^\mu\partial^{(\rho}A^{\nu)} + (\lambda_3+2\lambda_4)\,\partial_\mu \mathrm{h}^\nu{}_\nu\,\partial^\mu\partial_\rho A^\rho \\ &+ \left(\frac{1}{2}+2\lambda_2+\lambda_3\right)\partial_\mu \mathrm{h}_{\nu\rho}\,\partial^\mu\partial^\nu\partial^\rho\chi \\ &+ (\lambda_3+2\lambda_4)\,\partial_\mu \mathrm{h}^\nu{}_\nu\,\partial_\rho\partial^\rho\partial^\mu\chi + 2\left(\frac{1}{4}+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\right)\partial_\mu\partial_\rho A_\nu\,\partial^\mu\partial^\nu\partial^\rho\chi \\ &+ \left(\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\right)\partial_\mu\partial_\rho A_\nu\,\partial^\mu\partial^\nu A^\rho + \frac{1}{8}\,(1+2\lambda_2)\,\partial_\mu\partial_\rho A_\nu\,\partial^\mu\partial^\rho A^\nu \\ &+ \left(\frac{1}{4}+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\right)\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\chi\,\partial^\mu\partial^\nu\partial^\rho\chi.\end{aligned} \tag{5.12}$$

En el análisis anterior, notamos que en las dos últimas líneas del lagrangiano describen los términos dinámicos de los campos A_μ y χ. Estos términos manifiestan derivadas temporales de segundo y tercer orden respectivamente y por tanto merece una exploración más profunda. Para obtener una comprensión más completa de estas estructuras, de forma análoga al caso (3.5), realizamos un análisis exhaustivo de sus respectivos hamiltonianos:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{m,A}^{\text{spin2}} \propto& \left(\frac{1}{2}+\lambda_2\right)\left((\partial_0\partial_0A_0)^2 - (\partial_0\partial_0A_i)^2 - (\partial_0\partial_iA_j)^2 + (\partial_i\partial_jA_k)^2\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2}+3\lambda_2+4\lambda_3+4\lambda_4\right)\Big((\partial_0\partial_0A_0)^2 + (\partial_i\partial_0A_0)^2 + \partial^0\partial^iA^j\partial_0\partial_jA_i \\ &\qquad -2\partial^i\partial^jA^0\partial_i\partial_0A_j - \partial^i\partial^jA^k\partial_i\partial_kA_j\Big),\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\mathcal{H}_{m,\chi}^{\text{spin2}} \propto \left(\frac{1}{4}+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\right)\left((\partial_0\partial_0\partial_0\chi)^2 - (\partial_0\partial_0\partial_i\chi)^2 - (\partial_0\partial_i\partial_j\chi)^2 + (\partial_i\partial_j\partial_k\chi)^2\right), \tag{5.14}$$

donde los términos cuadráticos, del estilo $(\partial_0\partial_0 A_i)^2$ o $(\partial_0\partial_0\partial_i\chi)^2$, son definidos positivos bajo el convenio tomado por este trabajo, más detalles en el capítulo 1. A modo de ejemplo,

$$(\partial_0\partial_0 A_i)^2 = \delta^{il}\,\partial_0\partial_0 A_i\,\partial_0\partial_0 A_l, \tag{5.15}$$

$$\partial_0\partial_0\partial_i\chi)^2 = \delta^{il}\,\partial_0\partial_0\partial_i\chi\,\partial_0\partial_0\partial_l\chi. \tag{5.16}$$

De estos análisis, observamos que los límites inferiores de ambos hamiltonianos, $\mathcal{H}^{\text{spin2}}_{m,\,A}$ y $\mathcal{H}^{\text{spin2}}_{,\chi}$, no están bien definidos. Por un lado, si observamos el primer hamiltoniano podemos observar que en el primer sumando es posible obtener cualquier valor arbitrariamente configurando las componentes del campo. En el segundo sumando, a pesar de que aparecen términos cuadráticos positivos, la última componente, $\partial^i\partial^j A^{T,k}\,\partial_i\partial_k A^T j$, contiene términos cuadráticos con un signo negativo (e.g. $-(\partial_1\partial_1 A_1)^2$) que nos sigue permitiendo obtener el valor indefinidamente negativo que queramos.

Por el otro lado, el resultado de $\mathcal{H}^{\text{spin2}}_{m,\,\chi}$ es equivalente al primer conjunto de $\mathcal{H}^{\text{spin2}}_{m,\,A}$, y también se visualiza la falta de un límite inferior en los posibles valores de este hamiltoniano.

Debido a estos resultados negativos, como se mencionó en la sección 2.1, debemos evitar que aparezcan en nuestra teoría. La eliminación de estos términos se logra mediante la elección cuidadosa de los valores de los prefactores $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Al tener que eliminar los tres términos del hamiltoniano, tenemos tres ecuaciones sobre los prefactores, lo que nos permite determinalos con valores:

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{4}. \tag{5.17}$$

Con estos resultados, el lagrangiano $\mathcal{L}^{\text{spin2}}_{m}$ libre de *ghosts* es de la forma

$$\mathcal{L}^{\text{spin2}}_{m} = \frac{1}{4}\partial_\mu h_{\nu\rho}\,\partial^\mu h^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\,\partial_\mu h_{\nu\rho}\,\partial^\nu h^{\rho\mu} + \frac{1}{2}\,\partial_\mu h\,\partial_\rho\,h^{\mu\rho} - \frac{1}{4}\,\partial_\mu h\,\partial^\mu h + \frac{1}{4}m^2\left(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \,h^2\right). \tag{5.18}$$

Es importante destacar que de entre todas las opciones para definir el lagrangiano de un campo de spin-2 masivo, el lagrangiano libre de *ghost* es único. Este lagrangiano se conoce como la acción de Fierz-Pauli masiva, en honor a los físicos Markus Eduard Fierz (1912-2006) y Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958).

5.2.2 Ecuación de movimiento.

A pesar de evitar posibles inestabilidades de Ostrogradsky, la condición (5.17) no aporta una ligadura del campo de spin. Siguiendo con los pasos dados en el campo de spin-1 en el apartado 3.2.2, el siguiente paso es analizar la ecuación de movimiento y comprobar si se obtienen algunas restricciones sobre el campo $h_{\mu\nu}$.

Para ello, se aplica la ecuación de Euler-Lagrange sobre el lagrangiano (5.18), tras unas ciertas simplificaciones se obtiene la ecuación correspondiente

$$\partial_\gamma\partial^\gamma h^{\alpha\beta} - \partial_\gamma\partial^\alpha h^{\beta\gamma} - \partial_\gamma\partial^\beta h^{\alpha\gamma} + \partial^\alpha\partial^\beta h + \eta^{\alpha\beta}\partial_\gamma\left(\partial_\rho h^{\gamma\rho} - \partial^\gamma h\right) = m^2\left(h^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta}h\right). \tag{5.19}$$

Al derivar la ecuación de movimiento con respecto a uno de los índices libres, se observa tras un breve cálculo que los términos relacionados con la dinámica del lagrangiano de Fierz-Pauli en el lado izquierdo de la ecuación se cancelan. Por lo tanto, la derivada de la ecuación de movimiento deja como resultado la condición

$$m^2\left(\partial_\alpha h^{\alpha\beta} - \partial^\beta h\right) = 0 \;\; \xrightarrow{\forall m} \;\; \partial_\alpha h^{\alpha\beta} - \partial^\beta h = 0. \tag{5.20}$$

Este resultado simplifica la ecuación de movimiento de la forma

$$\partial_\gamma \partial^\gamma h^{\alpha\beta} - \partial_\gamma \partial^\alpha h^{\beta\gamma} = m^2 \left(h^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} h \right). \tag{5.21}$$

La segunda condición sobre el campo se obtiene al realizar la traza de la ecuación de movimiento actual, y teniendo siempre en cuenta la condición (5.20). Tras unas simplificaciones obtenemos que

$$m^2 h = 0 \quad \xrightarrow{\forall m} \quad h = 0. \tag{5.22}$$

El campo de spin-2 masivo es un campo sin traza, lo que significa que no tiene una componente diagonal en su tensor de energía-momento. Esta condición permite restringir un grado de libertad, permitiendo que una de las componentes de la diagonal principal dependa del resto de las componentes de la misma diagonal. Además, esto permite simplificar la condición (5.20) a

$$\partial_\alpha h^{\alpha\beta} = 0, \tag{5.23}$$

una condición parecida a la condición Lorenz (3.16) pero para el campo de spin-2. Esta restricción impone restricciones sobre el campo $h_{\mu\nu}$, limitando sus grados de libertad a solo cuatro de los diez totales. Las condiciones (5.22) y (5.23) reducen los grados de libertad del campo $h_{\mu\nu}$ a solo cinco, lo cual coincide con el número de grados predichos por la Clasificación de Wigner.

Para finalizar con este apartado, aplicamos estas dos últimas condiciones del campo sobre la ecuación de movimiento (5.21) para obtener la ecuación de Fierz-Pauli masiva

$$\partial_\gamma \partial^\gamma h_{\alpha\beta} = m^2 h_{\alpha\beta}, \tag{5.24}$$

esta solución respeta las condiciones impuestas en la teoría, se trata de ecuación cuya solución es una onda relativista, lo que permite que se encuentre dentro del marco de la relatividad especial y sea local.

5.2.3 Grados de libertad.

Las condiciones (5.22) y (5.23) permiten describir el campo $h_{\mu\nu}$ en función de únicamente de cinco grados de libertad. Pero además, también resuelven la discrepancia del número de grados de libertad del campo $\mathrm{h}_{\mu\nu}$ de la descomposición (5.11), estas condciiones nos permite expresar hasta cincon componentes de este campo en función de las otras componentes de $\mathrm{h}_{\mu\nu}$ y del resto de campos de la descomposición, A_μ y χ. Por ejemplo, tomando estas condiciones

$$\partial_0 \mathrm{h}^{0\nu} = -\, \partial_i \mathrm{h}^{i\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^{(\mu} A^{\nu)} - \partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu \chi, \tag{5.25}$$

$$\mathrm{h}^0{}_0 = -\, \mathrm{h}^i{}_i - \partial^\mu A_\mu - \partial^\mu \partial_\mu \chi. \tag{5.26}$$

De esta forma podemos afirmar que $\mathrm{h}_{\mu\nu}$ pierde estos cinco grados de libertad que inicialmente se le podría atribuir, dejándole con los cinco restantes como asumimos en la descomposición.

En este apartado, hemos progresado en nuestra comprensión del comportamiento del sistema. A través del análisis de las propiedades del campo, hemos derivado el lagrangiano de Fierz-Pauli, el único lagrangiano viable que es libre de fantasmas para el sistema de spin-2 masivo. Esto significa que el lagrangiano (5.18) resulta esencial para describir el comportamiento de cualquier campo de spin-2 masivo descrito por un tensor $h_{\mu\nu}$.

Utilizando este lagrangiano, hemos logrado calcular la ecuación de movimiento del sistema y obtener dos condiciones sobre el campo: una que indica que el campo es sin traza y otra condición de tipo Lorenz. Esto nos ha permitido descartar los grados de libertad no físicos y comprobar el número final de grados de libertad coinciden con los previstos por la clasificación de Wigner para el caso de un campo masivo de spin-2.

La obtención exitosa del lagrangiano de Fierz-Pauli, el cálculo de su ecuación de movimiento y la confirmación del número adecuado de grados de libertad del campo mediante estas dos condiciones son logros en gran parte debido a los análisis ya realizados en los capítulos previos para el caso de spin-1. Podemos confirmar que el análisis de los lagrangianos de Proca y Maxwell ha sentado las bases para este estudio, dando un mejor entendimiento de como estudiar los grados de libertad.

5.3 Hamiltoniano.

El hamiltoniano puede ser una gran herramienta para el entendimiento de nuestra teoría y resulta esencial para comprender cómo el sistema cambia en el tiempo. En esta sección, continuamos con el análisis del lagrangiano presentado en al comienzo del capítulo mediante el estudio del hamiltoniano del sistema de un campo de spin-2 masivo.

Además, siguiendo la metodología utilizada en los capítulos anteriores, demostraremos que el hamiltoniano de nuestro sistema tiene un límite mínimo que garantiza su estabilidad y evita la aparición de inestabilidades de Ostrogradsky. Así como que su valor es positivo para cualquier valor del campo $h_{\mu\nu}$, como venimos afirmando con la clasificación de Wigner.

Cabe destacar que el análisis del hamiltoniano para el caso de spin-2 masivo es más complejo que el realizado para el caso de spin-1 masivo en la sección 3.3. Mientras que el cálculo del hamiltoniano en el caso de spin-1 es relativamente sencillo y se puede resolver con pocos pasos, en el caso de spin-2 requiere de un mayor nivel de consideraciones matemáticas debido a la mayor complejidad del sistema y a las interacciones más complejas entre el propio campo. Sin embargo, al igual que en el caso de spin-1, se espera que el hamiltoniano tenga un límite inferior y que se encuentre definido positivamente, lo que garantiza la estabilidad del sistema y su comportamiento físicamente razonable.

Para facilitar el cálculo en el análisis del hamiltoniano, es importante definir previamente el siguiente tensor

$$\pi^{\gamma\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}_m^{\text{spin2}}}{\partial \left(\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\right)} = \frac{1}{2}\left(\partial^\gamma h^{\alpha\beta} - \partial^{(\alpha} h^{\beta)\gamma}\right). \tag{5.27}$$

Cabe destacar que la equivalencia obtenida de este tensor en cuestión se encuentra en un estado *on shell*, lo cual se debe a que se han aplicado las condiciones extraídas de la ecuación de movimiento (5.22). Es importante mencionar que el nuevo tensor presenta las siguientes propiedades:

$$\pi^{\gamma\alpha\beta} = \pi^{\gamma\beta\alpha}, \tag{5.28}$$

$$\partial_\alpha \pi^{\gamma\alpha\beta} = -\frac{1}{2} m^2 h^{\gamma\beta}. \tag{5.29}$$

Para la segunda propiedad hemos vuelto a hacer uso de soluciones dentro de la capa de masa, en este caso de la condición (5.23) y de la misma ecuación de movimiento (5.24). Ambas propiedades del tensor $\pi^{\gamma\alpha\beta}$ resultan crucial para este análisis.

Tomamos al hamiltoniano del sistema mediante la transformada de Legendre del lagrangiano (5.18). Si se aplica la condición sin traza del campo $h_{\mu\nu}$ a este lagrangiano, obtenemos el hamiltoniano *on shell* del sistema. Este hamiltoniano se puede expresar en función de nuestro nuevo tensor de la forma

$$\mathcal{H}_m^{\text{spin2}} = \frac{1}{2}\pi^{0\alpha\beta}\partial_0 h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi^{i\alpha\beta}\partial_i h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}m^2 h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}. \tag{5.30}$$

Luego completamos el hamiltoniano con productos del tipo $\pi^{\mu\nu\rho}\pi_{\alpha\beta\gamma}$, de tal forma que se ve como

$$\mathcal{H}_m^{\text{spin2}} = \pi^{0\alpha\beta}\pi_{0\alpha\beta} - \pi^{i\alpha\beta}\pi_{i\alpha\beta} + \frac{1}{2}\pi^{0\alpha\beta}\partial_{(\alpha}h_{\beta)0} - \frac{1}{2}\pi^{i\alpha\beta}\partial_{(\alpha}h_{\beta)i} - \frac{1}{4}m^2 h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}. \tag{5.31}$$

Gracias a unos términos de derivadas totales que agruparemos en el término $\mathcal{H}_{\text{Boundary}}$, podemos reexpresar los términos mixtos

$$\mathcal{H}_m^{\text{spin2}} = \pi^{0\alpha\beta}\pi_{0\alpha\beta} - \pi^{i\alpha\beta}\pi_{i\alpha\beta} - \partial_\alpha\pi^{0\alpha\beta}h_{\beta 0} + \partial_\alpha\pi^{i\alpha\beta}h_{\beta i} - \frac{1}{4}m^2 h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} + \mathcal{H}_{\text{Boundary}}, \tag{5.32}$$

y así hacer uso de la propiedad (5.29) del tensor $\pi_{\gamma\alpha\beta}$. Si descomponemos todos los términos en sus componentes espaciales y temporales y simplificamos podemos expresar al hamiltoniano como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = (\pi_{000})^2 + (\pi_{0ij})^2 + (\pi_{i00})^2 + (\pi_{ijk})^2 + 2\pi^{0i0}\pi_{0i0} - 2\pi^{ij0}\pi_{ij0} \\ + \frac{1}{4}m^2(h_{00})^2 + \frac{1}{2}m^2(h_{i0})^2 - \frac{3}{4}m^2 h_{ij}h^{ij} + \mathcal{H}_{\text{Boundary}}\end{aligned} \tag{5.33}$$

Lamentablemente, al observar el hamiltoniano obtenido, podemos constatar que no se encuentra positívamente definido debido a la falta de tres términos. Para simplificar y acabar con los términos aparentemente problemáticos hacemos uso de las siguiente lista de substituciones:

$$(\pi_{000})^2 = -\frac{1}{4}m^2(h_{00})^2 + (\pi_{0i0})^2, \tag{5.34}$$

$$(\pi_{i00})^2 = (\pi_{0i0})^2 + 4(\pi_{000})^2 + (\partial_0 h_{0i})^2, \tag{5.35}$$

$$(\pi_{ijk})^2 = \frac{3}{4}(\partial_i h_{jk})^2 - \frac{1}{2}(\partial_0 h_{0i})^2, \tag{5.36}$$

$$(\pi_{0ij})^2 = 2(\pi_{000})^2 + \frac{1}{4}(\partial_0 h_{ij})^2 + \frac{1}{2}(\partial_0 h_{0j})^2 - \frac{1}{2}m^2(h_{0j})^2. \tag{5.37}$$

En todas ellas hemos obviado los términos de derivadas totales, estas contribuyen al término $\mathcal{H}_{\text{Boundary}}$ del hamiltoniano. De esta forma el hamiltoniano queda expresado como:

$$\mathcal{H} = 10(\partial_0 h_{00})^2 + \frac{1}{2}(\partial_0 h_{ij}) + m^2(h_{i0})^2 + \mathcal{H}_{\text{Boundary}}. \tag{5.38}$$

A partir de los resultados obtenidos, podemos afirmar con certeza que el hamiltoniano del campo de spin-2 masivo se encuentra definido positivamente para cualquier valor del campo $h_{\mu\nu}$. Esta conclusión nos permite afirmar que el sistema analizado en este capítulo está libre de inestabilidades de Ostrogradsky, más información ver la sección 2.1. Además, el sistema se encuentra dentro del grupo de la clasificación de Wigner de campos masivos con energía positiva, tal y como se menciona en la sección 2.3.

De esta forma queda concluido el análisis del campo de spin-2 masivo. A través de nuestra metodología, hemos comprobado correctamente los grados de libertad del sistema en cuestión. Esto nos ha permitido determinar la ecuación de movimiento, que es esencial para entender cómo se podría comportar las partículas en el campo de spin-2 masivo. Además, hemos calculado el valor del hamiltoniano, lo cual nos permitiría profundizar y analizar el comportamiento energético del sistema.

Los resultados obtenidos en este trabajo son de gran importancia para nuestro entendimiento de la física teórica, como por ejemplo de modelos de gravedad masiva. Estos hallazgos no solo proporcionan una comprensión más profunda del campo de spin-2 masivo, sino que también pueden ser utilizados como punto de partida para futuras investigaciones en este ámbito.

En el próximo capítulo, continuaremos nuestro estudio analizando el campo de spin-2 no masivo, el cual presenta características diferentes a las del campo de spin-2 masivo. Los resultados obtenidos en este capítulo serán de gran utilidad en este nuevo análisis, como el campo de Proca lo fue al campo de Maxwell.

Chapter 6

Campo de spin-2 sin masa.

En este capítulo, se realizar el segundo caso del campo de spin-2, el caso no masivo. Este tipo de teoría ha sido objeto de gran interés debido a su relación con la gravedad. A pesar de la falta de evidencias empíricas, las motivaciones físicas resultan suficientes para estudiar el caso sin masa del campo de spin-2.

El hecho más relevante para estudiar este campo es que el espacio-tiempo que describe Einstein se comporta en el régimen lineal como si fuera un campo de spin-2 no masivo [34, 19]. Este hallazgo motiva a los físicos teóricos a investigar y trabajar en torno al paradigma del campo de spin-2, con el objetivo de encontrar resultados que permitan avanzar en el entendimiento de la gravedad. Por ejemplo, el campo de spin-2 se emplea en gravedad modificada, como podría ser *bigravity* [29], o en aproximaciones cuánticas, como puede ser la cuantización canónica [28, 35, 15]. También permite estudiar a la relatividad general en regímenes de campo débil, como por ejemplo con las ondas gravitatorias [6, 12].

En este estudio, se presenta un análisis detallado de la teoría del campo de spin-2 no masivo, junto con una sección final en la que se analizan las propiedades de cada una de las componentes del campo. Para llevar a cabo este análisis, nos basaremos en los resultados obtenidos en el capítulos previo, que trata el caso de masa finita del campo de spin-2.

6.1 Lagrangiano

Este capítulo nos basamos en el mismo campo que para el caso masivo, un campo que pueda ser descrito por un tensor simétrico de orden 2, $h_{\mu\nu}$, y que presente un spin-2 y sin masa. Con la base de que este campo reside en un espacio-tiempo de 4 dimensiones y que su acción debe local y relativista. De esta forma, llegamos a la conclusión de que el lagrangiano más general para estas características es

$$\mathcal{L}^{\,\text{spin}-2} = \frac{1}{4}\partial_\mu h_{\nu\rho}\,\partial^\mu h^{\nu\rho} + \lambda_2\,\partial_\mu h_{\nu\rho}\,\partial^\nu h^{\rho\mu} + \lambda_3\,\partial_\mu h\,\partial_\rho\, h^{\mu\rho} + \lambda_4\,\partial_\mu h\,\partial^\mu h, \tag{6.1}$$

donde $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ y el prefactor $\frac{1}{4}$ del primer sumando procede de la imposición de la normalización canónica sobre el lagrangiano.

Los términos del lagrangiano presentado en este estudio coinciden con la parte dinámica del lagrangiano del campo de spin-2 con masa, mostrado en la ecuación (5.10). Por lo tanto, utilizaremos los resultados obtenidos en el capítulo anterior, específicamente en lo relacioando a la búsqueda de las posibles partículas fantasma de la sección 5.2.1. En el estudio que realizamos en el capítulo anterior, comprobamos que resultado crucial realizar un ajuste preciso en los prefactores para evitar inestabilidades de Ostrogradsky en el sistema. Por ello, debemos cumplir la condición (5.17)

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{4}, \tag{6.2}$$

y substituirlos en nuestro lagrangiano

$$\mathcal{L}^{\text{ spin}-2} = \frac{1}{4}\partial_\mu h_{\nu\rho}\,\partial^\mu h^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\,\partial_\mu h_{\nu\rho}\,\partial^\nu h^{\rho\mu} + \frac{1}{2}\,\partial_\mu h\,\partial_\rho\, h^{\mu\rho} - \frac{1}{4}\,\partial_\mu h\,\partial^\mu h. \tag{6.3}$$

El lagrangiano de Fierz-Pauli es el único lagrangiano libre de términos que no permiten la existencia de campos fantasmales para un campo $h_{\mu\nu}$. Este lagrangiano fue presentado originalmente por Fierz y Pauli en su artículo [14], por ello se le denomina como acción de Fierz-Pauli. Para un análisis más general del mismo, se recomienda revisar el artículo de Van Nieuwenhuizen [33].

6.2 Grados de Libertad.

En el apartado anterior, hemos aprovechado las analogías entre los campos sin masa y con masa, así como el entendimiento de los campos de spin-1. Del mismo modo, al calcular los grados de libertad, partimos del campo simétrico $h_{\mu\nu}$, que es el mismo campo que el campo de spin-2 masivo. Por tanto, ya sabemos que presenta un máximo de diez grados de libertad, cuya álgebra de Lorentz asociada en la representación irreducible de $\mathfrak{so}(3)$ es $(2 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0)$ y cuya representación de los segundos números cuánticos está dada por $\{(-2,-1,0,1,2),(-1,0,1),(0),(0)\}$.

El uso de la clasificación de Wigner permite conocer la discrepancia existente entre el número máximo de grados de libertad posibles del campo $h_{\mu\nu}$ y los grados de libertad reales. Como sabemos de la sección 2.3 y como también ocurre en el campo de spin-1 no masivo, el campo de spin-2 no masivo solo presenta dos grados de libertad, los cuales están asociados a las helicidades ± 2 del quintuplete de spin.

Por lo tanto, es necesario encontrar hasta ocho restricciones sobre el campo de spin-2 para que las previsiones teóricas coincidan con los grados de libertad del campo observado. Esto se debe a que, en el caso de campos no masivos, se observa que a medida que aumenta el orden del tensor con el que se desea describir el campo, el número de restricciones se incrementa significativamente. Esto se debe a que, para un espacio de dimensión D, el número de componentes de un campo de orden n es de D^n, pero para todos los casos no masivos (exceptuando el caso de spin-0), el número de componentes que deben ser libres son únicamente dos. Es decir, que para dicho campo deben existir $D^n - 2$ restricciones.

6.2.1 Invarianza *gauge.*

Tal como ocurre con el lagrangiano de Maxwell, el lagrangiano de Fierz-Pauli se encuentra libre de campos fantasmas debido a la selección de prefactores gracias a los lagrangianos estudiados en los correspondientes casos masasivos. De esta forma, en el lagrangiano de Fierz-Pauli no masivo, y en la parte dinámica del lagrangiano de Fierz-Pauli masivo, no aparece el campo A_μ de la descomposición

$$h_{\mu\nu} = \mathrm{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{(\mu}A_{\nu)}. \tag{6.4}$$

O lo que es lo mismo, el lagrangiano resulta invariante frente a transformaciones del campo del estilo

$$h_{\mu\nu} \to h^{'}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{\text{ spin}-2}\left(h_{\mu\nu}\right) = \mathcal{L}^{\text{ spin}-2}\left(h^{'}_{\mu\nu}\right). \tag{6.5}$$

Esta invarianza *gauge* del lagrangiano nos permite seleccionar el campo $h_{\mu\nu}$ con el que deseamos trabajar en nuestro sistema físico. La independencia en la elección del campo en esta teoría nos indica que el campo $h_{\mu\nu}$ no es un campo físico medible, sino más bien un campo auxiliar utilizado para realizar los cálculos matemáticos de nuestro modelo. Además, la transformación nos permite fijar hasta un total de cuatro componentes del campo transformado

$$h^{'}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\partial_{(\mu}A_{\nu)} + \partial_{(\mu}\xi_{\nu)}\right) = \mathrm{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{(\mu}A'_{\nu)}. \tag{6.6}$$

Las transformaciones de *gauge* permiten vincular hasta cuatro componentes del campo $h_{\mu\nu}$. Es decir, que de los diez grados de libertad originales del tensor simétrico, seis quedan restantes. Lo podemos considerar como si al campo de spin-2 no masivo se le pudiera configurar un campo de spin-1 a elección. Esto se debe a que la invarianza no solo implica que en el lagrangiano aparezca la descomposición A_μ, sino que también, gracias a las transformaciones de *gauge*, podemos dar el valor deseado a la nueva descomposición A'_μ.

De esta forma concluimos que la invarianza *gauge* del campo de spin-2 es esencial para el estudio del campo de spin-2 no masivo. Esta propiedad de independencia del campo con respecto a las transformaciones de tipo *gauge* nos permite reducir el número de grados de libertad totales del campo $h_{\mu\nu}$ a seis.

6.2.2 Ecuación de movimiento y Elección del *gauge*.

En los capítulos previos, hemos demostrado mediante el uso de la ecuación de movimiento que es posible obtener condiciones precisas sobre el campo para los casos masivos. Sin embargo, en el caso del campo de spin-1 no masivo, a pesar de los esfuerzos realizados, no hemos logrado reducir el número de grados de libertad del campo en cuestión.

Sin embargo, el conocimiento de la ecuación de movimiento del campo que estamos analizando nos permite tener una mejor comprensión del sistema y una mayor comprensión del campo de spin-2. A través de la solución de la ecuación de movimiento es posible obtener información valiosa sobre las características del campo, como su comportamiento en diferentes condiciones o incluso su interacción con otros campos.

De manera similar a como hemos obtenido la ecuación de movimiento del campo de spin-1, para esta ocasión abordaremos la ecuación de movimiento desde un caso distinto al que realizamos con el campo masivo (apartado 5.2.2). En esta ocasión, nos enfocaremos en el estudio de nuestro campo $h_{\mu\nu}$ asociado a una corriente $T_{\mu\nu}$. En particular, partiremos del lagrangiano más general para un campo de spin-2 no masivo (6.3) como base para analizar la dinámica del campo

$$\mathcal{L}^{\text{ spin}-2} = \frac{1}{4}\partial_\mu h_{\nu\rho}\,\partial^\mu h^{\nu\rho} + \lambda_2\,\partial_\mu h_{\nu\rho}\,\partial^\nu h^{\rho\mu} + \lambda_3\,\partial_\mu h\,\partial_\rho\, h^{\mu\rho} + \lambda_4\,\partial_\mu h\,\partial^\mu h, - h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \tag{6.7}$$

Debido a lo conocido por la relatividad general, en el marco de la gravedad cuántica se considera el tensor de energía-momento canónico como la corriente física asociada al campo $h_{\mu\nu}$. Este tensor juega un papel fundamental en la descripción de la dinámica de los campos interactuantes y en la distribución de energía y momento en un sistema físico [1]. Obtenemos la ecuación de movimiento de este nuevo sistema a partir de la ecuación de Euler-Lagrange para obtener

$$\frac{1}{2}\partial_\gamma\partial^\gamma h^{\alpha\beta} + \lambda_2\,\partial_\gamma\partial^{(\alpha}h^{\beta)\gamma} + \lambda_3\,\left(\eta^{\alpha\beta}\,\partial_\gamma\partial_\rho h^{\gamma\rho} + \partial^\alpha\partial^\beta h\right) + 2\lambda_4\,\eta^{\alpha\beta}\partial_\gamma\partial^\gamma h = -T^{\alpha\beta}. \tag{6.8}$$

[1] En este ejercicio consideramos a la corriente $T_{\mu\nu}$ como una corriente independiente del campo $h_{\mu\nu}$. Por lo tanto, se asume que es constante frente a las variaciones del campo. Sin embargo, si tomáramos en cuenta que $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento del sistema, tendríamos que tener en cuenta que el campo $h_{\mu\nu}$ contribuiría al mismo. Como resultado, la ecuación de movimiento sería distinta. Para profundizar más leer [19] capítulo 26.

Si asumimos que la corriente se conserva mediante la ecuación $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, podremos observar que aparecen las condiciones que originan la simetría del lagrangiano con respecto al campo $h_{\mu\nu}$. Al aplicar la derivada a ambos lados de la ecuación, y luego simplificar, llegamos a la condición deseada

$$\left(\frac{1}{2} + \lambda_2\right) \partial_\gamma \partial^\gamma \partial_\alpha h^{\alpha\beta} + (\lambda_2 + \lambda_3)\, \partial^\beta \partial_\alpha \partial_\gamma h^{\alpha\gamma} + (\lambda_3 + 2\lambda_4)\, \partial_\alpha \partial^\alpha \partial^\beta h = 0 \xrightarrow{\forall h_{\mu\nu}} \tag{6.9}$$

$$\xrightarrow{\forall h_{\mu\nu}} \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{4}.$$

Las condiciones presentadas en este análisis coinciden con las impuestas sobre el lagrangiano de Fierz-Pauli que se mencionaron al inicio del capítulo. Nuevamente, el teorema de Noether demuestra su importancia en la física teórica. La conservación de la corriente física sugiere la existencia de simetrías en el sistema, lo que permite que el lagrangiano sea descrito de manera tal que sea invariante a las transformaciones *gauge* (6.5) discutidas en el apartado anterior.

Si sustituimos la condición (6.9) sobre la ecuación de movimiento (6.8) obtenemos

$$\partial_\gamma \partial^\gamma h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\gamma \partial^{(\alpha} h^{\beta)\gamma} + \partial^\alpha \partial^\beta h + \eta^{\alpha\beta} \left(\partial_\gamma \partial_\rho h^{\gamma\rho} - \partial_\gamma \partial^\gamma h\right) = -T^{\alpha\beta}, \tag{6.10}$$

y la solución sin traza es de la forma

$$\partial_\gamma \partial^\gamma h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\gamma \partial^{(\alpha} h^{\beta)\gamma} + \partial^\alpha \partial^\beta h = -\left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} T^\gamma{}_\gamma\right). \tag{6.11}$$

Sin embargo, a pesar de haber utilizado la ecuación de movimiento, no hemos encontrado ninguna restricción que permita simplificar aún más los grados de libertad del campo de spin-2 no masivo. Por lo tanto, proponemos adoptar una condición adicional *ad hoc* que restrinja los cuatro grados de libertad restantes, asegurando que esta restricción no interfiera con las restricciones de la invarianza *gauge* del sistema. Al igual que en el caso del spin-1, existe una variedad de *gauges* disponibles para elegir. Teniendo en cuenta que buscamos una teoría relativista e invariante Lorentz, elegiremos el *gauge* armónico como nuestra opción

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial^\nu h. \tag{6.12}$$

Se trata de una condición que, al igual que el *gauge* de Lorenz, no determina completamente la invarianza *gauge*. Esta condición, como se verá en la sección de 6.4, reduce otros cuatro grados de libertad del campo $h_{\mu\nu}$, dejándole un total de dos grados de libertad, el número esperado por la clasificación de Wigner. Además, permite simplificar aún más la ecuación de movimiento (6.13). De tal forma que se puede expresar como

$$\partial_\gamma \partial^\gamma h^{\alpha\beta} = -\left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} T^\gamma{}_\gamma\right), \tag{6.13}$$

y la deja como una ecuación de ondas relativista inhomogenea, respetando el comportamiento relativista y local exigido en todos los modelos de esta tesis.

En el caso de un sistema sin corriente, la ecuación de movimiento que obtendríamos es de la forma

$$\partial_\gamma \partial^\gamma h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta}\, \partial_\gamma \partial^\gamma h = 0. \tag{6.14}$$

6.2.3 Grados de libertad.

En esta sección, se ha estudiado los grados de libertad del campo de spin-2 sin masa. Además, se ha observado cómo obligar al campo de la teoría a conservar una corriente asociada a este implica la invariancia gauge del propio lagrangiano. La elección del gauge armónico nos permite restringir un total de cuatro grados de libertad, lo que junto con la invariancia deja al campo con los dos grados de libertad predichos para un campo no masivo. Lo cual concuerda con la clasificación de Wigner para esta clase de partículas. En la sección 6.4, se lleva a cabo un análisis detallado del campo, el cual reconfirma el número de grados de libertad y muestra la relación entre las componentes del campo y la helicidad de las mismas.

En el campo de spin-2, se ha comprobado que solo existen dos posibles lagrangianos: uno para el caso no masivo y otro para el caso de masa finita. A pesar de que la parte dinámica del lagrangiano de ambas teorías sea igual, la analogía entre el caso masivo y sin masa es menos evidente. Las condiciones sobre el campo obtenidas en ambos casos son distintas, a diferencia del caso de spin-1, lo cual presenta consecuencias tanto en la ecuación de movimiento como en el hamiltoniano, como se observará en el capítulo siguiente.

En cuanto al campo de spin-2, hemos comprobado que solo existen dos posibles lagrangianos para este tipo de campo, uno para el caso no masivo y otro para el caso de masa finita. Aun así, a pesar de que la parte dinámica del lagrangiano de ambas teorías sea igual, la analogía entre el caso masivo y sin masa es menos evidente con en los casos de Proca y Maxwell. Las condiciones sobre el campo obtenidos en ambos casos resultan distintos, no como en el caso de spin-1, y esto presenta consecuencias tanto en la ecuación de movimiento como en el hamiltoniano, como observaremos en la siguiente sección.

Estas discrepancias entre el caso no masivo y el de masa finita son conocidas y bien estudiadas, el ejemplo más famoso ocurre con la discontinuidad cDVZ, descubierta por Hendrik van Dam y Martinus J. G. Veltman, y también por Valentin I. Zakharov en los años 70 [9, 39]. Esta discontinuidad muestra que existen diferencias entre las interacciones dadas por ambos casos, y que, por ejemplo, mientras que a pequeñas escalas ambos casos se recupera la ley gravitacional de Newton, en el caso masivo la curvatura de la luz solo es tres cuartos del resultado obtenido por el caso sin masa (para mayor información véase [17, 26]).

6.3 Hamiltoniano.

En este capítulo, consideramos el hamiltoniano asociado al campo de spin-2 sin masa. Utilizando la experiencia adquirida en el caso masivo, recurrimos al mismo tensor definido en la ecuación (6.15).

$$\pi^{\gamma\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial^{\gamma} h^{\alpha\beta} - \partial^{(\alpha} h^{\beta)\gamma}\right). \tag{6.15}$$

Sin embargo, a diferencia del caso masivo, la segunda propiedad (5.29) no se cumple debido a que se encuentra dentro de la masa de capas del campo masivo. A pesar de las similitudes entre los lagrangianos, las condiciones sobre el campo obtenidas no son equivalentes. Por lo tanto, en lugar de considerar la condición utilizada en el capítulo anterior, debemos tener en cuenta la condición específica para este campo, el *gauge* armónico (6.12), y la ecuación de movimiento correspondiente (6.14).

$$\pi^{\gamma\alpha\beta} = \pi^{\gamma\beta\alpha}, \tag{6.16}$$

$$\partial_{\alpha}\pi^{\gamma\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\eta^{\beta\gamma}\,\partial_{\mu}\partial^{\mu} h. \tag{6.17}$$

Una vez redefinido este tensor, expresamos el hamiltoniano. Al igual que ocurre para el caso masivo, podemos expresar al hamiltoniano *on shell* en función de este tensor de la forma

$$\mathcal{H}^{\text{ spin2}} = \frac{1}{2}\pi^{0\alpha\beta}\partial_0 h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi^{i\alpha\beta}\partial_i h_{\alpha\beta}. \tag{6.18}$$

Y continuando de forma análoga al caso del capítulo anterior, completamos el hamiltoniano para obtener productos del estilo $\pi^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}$ y a los términos mixtos resultantes pasamos la derivada parcial al tensor $\pi^{\gamma\alpha\beta}$. De esta forma, el lagrangiano queda de la forma

$$\mathcal{H}^{\text{ spin2}} = \pi^{0\alpha\beta\gamma}\pi_{0\alpha\beta\gamma} - \pi^{i\alpha\beta\gamma}\pi_{i\alpha\beta\gamma} - \partial_\alpha\pi^{0\alpha\beta}h_{0\beta} + \partial_\alpha\pi^{i\alpha\beta}h_{i\beta} + \mathcal{H}_{\text{Boundary}}. \tag{6.19}$$

Hasta este momento, el desarrollo realizado es equivalente al ocurrido en el caso masivo. Hacemos uso de la propiedad (6.17) y la substituimos en el hamiltoniano para dar

$$\mathcal{H}^{\text{ spin2}} = \pi^{0\alpha\beta\gamma}\pi_{0\alpha\beta\gamma} - \pi^{i\alpha\beta\gamma}\pi_{i\alpha\beta\gamma} - \partial_\mu h\partial^\mu h + \mathcal{H}_{\text{Boundary}}. \tag{6.20}$$

El último término obtenido $\partial_\mu h\partial^\mu h$ equivale al producto $\pi^{\alpha\beta\gamma}pi_{\alpha\beta\gamma}$. Si hacemos la substitución y separamos las componentes espaciales y temporales, el hamiltoniano se puede describe como

$$\mathcal{H}^{\text{ spin2}} = -2\pi^{i\alpha\beta\gamma}\pi_{i\alpha\beta\gamma} = 2\left((\pi_{i00})^2 - 2\pi^{ij0}\pi_{ij0} + (\pi_{ijk})^2\right). \tag{6.21}$$

Nuevamente, nos encontramos ante un término no definido estrictamente positivo $-2\pi^{ij0}\pi_{ij0}$. Por tanto, hacemos uso de las siguientes equivalencias

$$(\pi_{i00})^2 = \frac{1}{4}(\partial_i h_{00})^2 + (\partial_0 h_{i0})^2, \tag{6.22}$$

$$(\pi_{ij0})^2 = \frac{1}{2}(\partial_0 h_{i0})^2 - \frac{1}{8}(\partial_0 h)^2 - \frac{1}{2}(\partial_0 h_{00})^2 - \frac{1}{4}(\partial_0 h_{ij})^2, \tag{6.23}$$

$$\mathcal{H}^{\text{ spin2}} = \frac{1}{2}(\partial_i h_{00})^2 + \frac{1}{2}(\partial_0 h)^2 + 2(\partial_0 h_{00})^2 + (\partial_0 h_{ij})^2 + 2(\pi_{ijk})^2. \tag{6.24}$$

En el estudio del spin-2 no masivo, hemos obtenido un hamiltoniano definido positivamente para cualquier valor de los componentes del campo $h_{\mu\nu}$. Esto implica que nuestro hamiltoniano tiene una cota inferior bien definida, lo cual es esencial para garantizar la estabilidad del sistema.

Como se discutió en el capítulo 2, las inestabilidades de Ostrogradsky son un problema recurrente en teorías clásicas, ya que suelen carecer de una cota inferior bien definida en su hamiltoniano. Sin embargo, en el caso del spin-2 no masivo, hemos comprobado que nuestro hamiltoniano cumple con el grupo de clasificación de Wigner correspondiente a energía positiva. Esto garantiza la estabilidad del sistema y nos permite afirmar que la teoría está bien descrita.

En resumen, el análisis del hamiltoniano es fundamental para garantizar la estabilidad de las teorías clásicas. En el caso del spin-2 no masivo, se ha demostrado que el hamiltoniano cumple con los requisitos necesarios para garantizar la estabilidad del sistema, lo que es esencial para asegurar que la teoría está bien descrita.

6.4 Helicidad.

En este apartado se demuestra que el campo en cuestión se comporta efectivamente como un campo de spin-2. Para ello, se hace uso de las condiciones obtenidas en esta sección, la invariancia de *gauge* (6.5) y la condición del *gauge* armónico (6.12). El procedimiento es análogo al presentado en el capítulo anterior (Aptdo. 4.4), así como al descrito en [19], en el capítulo 17.

6.4.1 Primera restricción.

La filosofía subyacente a la teoría de este capítulo es análoga a la que fundamenta el campo de spin-1, un modelo relativista Lorentz y con una acción local. Es decir, nuestro campo debe encontrarse dentro del marco de la relatividad especial. Por este motivo el *gauge* elegido es el *gauge* armónico.

En el caso del sistema libre de interacciones, el *gauge* permite simplificar las ecuaciones de movimiento a la expresión (6.14). Si redefinimos la expresión en función de un nuevo campo $\bar{h}_{\mu\nu}$, podemos obtener una ecuación de movimiento del tipo onda relativista

$$\partial_\gamma \partial^\gamma \left(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h \right) \equiv \partial_\gamma \partial^\gamma \bar{h}_{\alpha\beta} = 0. \tag{6.25}$$

La solución propuesta permite afirmar que nuestra teoría del campo de spin-2 se encuentra dentro del marco de la relatividad especial. Además, se trata de un campo cuya transmisión de fluctuaciones no supera la velocidad de la luz, lo que nos permite afirmar que su acción es local. La solución de este tipo de ecuaciones es conocida como una combinación lineal de ondas planas, pero por simplicidad, tomaremos $\bar{h}_{\mu\nu}$ como una única onda plana

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \mathcal{C}_{\mu\nu}\, e^{ik_\lambda x^\lambda}, \qquad (\mathcal{C}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{00} & \mathcal{C}_{01} & \mathcal{C}_{02} & \mathcal{C}_{03} \\ & \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & \mathcal{C}_{13} \\ & \cdots & \mathcal{C}_{22} & \mathcal{C}_{23} \\ & & & \mathcal{C}_{33} \end{pmatrix}, \tag{6.26}$$

donde se define k_μ como el vector de onda y $\mathcal{C}_{\mu\nu}$ como la amplitud de cada componente. Este último es un tensor de orden dos simétrico, como también ocurre con $\bar{h}_{\mu\nu}$. Con esta nueva redefinición y las condiciones (6.12) y (6.25) podemos extraer dos nuevas condiciones sobre el campo

- Se se impone la condición del *gauge* armónico sobre la ecuación de onda plana obtenemos

$$\partial^\mu \left(\mathcal{C}_{\mu\nu}\, e^{ik_\lambda x^\lambda} \right) = \frac{1}{2}\partial_\nu \left(\mathcal{C}_\mu{}^\mu\, e^{ik_\lambda x^\lambda} \right) \iff k^\mu\, \mathcal{C}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} k_\nu\, \mathcal{C}_\mu{}^\mu. \tag{6.27}$$

- Si se impone que la onda plana cumpla la ecuación de movimiento (6.25) se obtiene que el vector de onda k_μ debe ser nulo, como en la Ec. (4.16) para el caso de spin-1,

$$0 = \partial_\rho \partial^\rho \left(\mathcal{C}_{\mu\nu}\, e^{ik_\lambda x^\lambda} \right) = -\mathcal{C}_{\mu\nu}\, k_\rho k^\rho e^{ik_\lambda x^\lambda} \iff k_\rho k^\rho = 0. \tag{6.28}$$

A pesar de aparentar ser dos condiciones aisladas, las ecuaciones (1) y (2) forman en realidad una única ligadura. El poder definir al campo como una onda plana simplifica y acota el espectro de posibilidades del campo, pero a su vez dobla los grados de libertad: el vector de onda k_μ y la amplitud de la onda $\mathcal{C}_{\mu\nu}$. Por este motivo, deben aparecer el doble de condiciones. Hasta este punto del análisis de la helicidad, la analogía con el realizado para el campo de spin-1 es 1 : 1.

Las condiciones se pueden expresar de la forma

$$k_0 = k_0(\vec{k}), \qquad \mathcal{C}_{00} = \frac{2k^i}{k^0}\, \mathcal{C}_{0i} + \mathcal{C}_i{}^i, \qquad \mathcal{C}_{0i} = \frac{1}{k^0} \left(k^j \mathcal{C}_{0j} + \frac{k_j}{2} \mathcal{C}_\mu{}^\mu \right). \tag{6.29}$$

Para simplificar, a partir de este momento supondremos que la onda se propaga en una dirección espacial arbitraria, más en concreto en la última componente espacial. Las componentes de la amplitud que consideramos dependen del resto son ($\mathcal{C}_{03}$, $\mathcal{C}_{13}$, $\mathcal{C}_{22}$, $\mathcal{C}_{23}$)

$$\mathcal{C}_{03} = -\frac{1}{2}\left(\mathcal{C}_{00} + \mathcal{C}_{33} \right), \qquad \mathcal{C}_{13} = -\mathcal{C}_{01}, \qquad \mathcal{C}_{23} = -\mathcal{C}_{02}, \qquad \mathcal{C}_{22} = -\mathcal{C}_{11}, \tag{6.30}$$

si se expresan de forma matricial

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \qquad (\mathcal{C}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{00} & \mathcal{C}_{01} & \mathcal{C}_{02} & -\frac{1}{2}\left(\mathcal{C}_{00} + \mathcal{C}_{33}\right) \\ & \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & -\mathcal{C}_{01} \\ & \ddots & -\mathcal{C}_{11} & -\mathcal{C}_{02} \\ & & & \mathcal{C}_{33} \end{pmatrix}. \tag{6.31}$$

Por tanto, podemos observar que las ecuaciones (6.27) y (6.28) permiten determinar hasta cuatro componentes en función del resto de componentes. O lo que es lo mismo, el *gauge* armónico restringe cuatro grados de libertad sobre el campo $h_{\mu\nu}$.

6.4.2 Segunda restricción.

Al fijar cuatro grados de libertad del tensor simétrico, que presenta un total de diez grados de libertad, nos quedan seis grados de libertad disponibles ($\mathcal{C}_{00}$, $\mathcal{C}_{01}$, $\mathcal{C}_{02}$, $\mathcal{C}_{11}$, $\mathcal{C}_{12}$, $\mathcal{C}_{33}$,). A pesar de haber considerado el *gauge* armónico en el procedimiento, todavía debemos definir por completo la condición *gauge* y así restringir los cuatro grados de libertad restantes.

Si definimos el parámetro ξ de la transformación (6.5) dejamos el *gauge* determinado, lo que nos permite aplicar las condiciones ligaduras intrínsecas a la condición

$$\xi_\mu = iU_\mu e^{ik_\lambda x^\lambda} \quad \Longrightarrow \quad h_{\mu\nu} \to h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + ik_{(\mu}U_{\nu)}e^{ik_\lambda x^\lambda}, \tag{6.32}$$

donde U_μ es únicamente una constante. El planteamiento es el mismo que en el caso de spin-1: las nuevas componentes del campo transformado no afecta la forma de las condiciones obtenidas previamente. Es más, el hecho de que en la transformada aparezca el vector de onda garantiza que en cualquier operación relacionada con derivadas, este término desaparezca. Como se cumple la ecuación (6.25), el campo $\bar{h}_{\mu\nu}$ sigue siendo una solución de onda plana. Esta vez lo expresamos como

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \left(\mathcal{C}_{\mu\nu} + k_{(\mu}U_{\nu)}\right) e^{ik_\lambda x^\lambda}. \tag{6.33}$$

Según el argumento presentado en la ecuación de movimiento, las condiciones (6.27) y (6.28) continúan cumpliéndose. En otras palabras, se pueden establecer las mismas componentes que en la ecuación (6.30). Sin embargo, lo que se modifica es el tensor de amplitud que ahora queda se expresa como

$$\left(\mathcal{C}_{\mu\nu} + k_{(\mu}U_{\nu)}\right) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{00} + 2kU_0 & \mathcal{C}_{01} + kU_1 & \mathcal{C}_{02} + kU_2 & -\frac{1}{2}\left(\mathcal{C}_{00} + 2kU_0 + \mathcal{C}_{33} + 2kU_3\right) \\ & \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & -\left(\mathcal{C}_{01} + kU_1\right) \\ & \ddots & -\mathcal{C}_{11} & -\left(\mathcal{C}_{02} + kU_2\right) \\ & & & \mathcal{C}_{33} + 2kU_3 \end{pmatrix}. \tag{6.34}$$

A partir del resultado obtenido, podemos observar que se presentan las cuatro componentes del vector U_μ. Estas componentes se encuentran en una configuración libre, específicamente en ($\mathcal{C}_{00}$, $\mathcal{C}_{01}$, $\mathcal{C}_{02}$, $\mathcal{C}_{33}$,). Sin embargo, es importante mencionar que las componentes de U_μ no están previamente definidas. La elección del valor de sus componentes se determina mediante el *gauge*, una condición que se impone de forma arbitraria.

Por tanto, si se define U_μ con el objetivo de anular las cuatro componentes que se le relacionan, la amplitud queda de la forma

$$(U_\mu) = k^{-1}\left(-\frac{1}{2}\mathcal{C}_{00},\, \mathcal{C}_{01},\, \mathcal{C}_{02},\, -\frac{1}{2}\mathcal{C}_{00},\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\mathcal{C}_{\mu\nu} + k_{(\mu}U_{\nu)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_{12} & -\mathcal{C}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.35}$$

Una vez determinadas las componentes de $\bar{h}_{\mu\nu}$, podemos afirmar que la clasificación de Wigner se cumple para este caso. El campo de spin-2 no masivo presenta dos grados de libertad. Las restricciones impuestas sobre las componentes restantes se encuentran asociadas a la naturaleza simétrica del tensor, a la invariancia de *gauge* mediante la ecuación (6.5) del lagrangiano de Fierz-Pauli y a la condición del *gauge* armónico mediante la ecuación (6.12). Sin embargo, todavía nos queda por demostrar cuál es el spin del campo.

6.4.3 Helicidades del campo de spin-2.

Se estudia las helicidades de las componentes de h, para ello se aplica una transformación asociado a una rotación con el tensor (4.25). Al aplicarse sobre un tensor de orden 2, el campo se transforma como

$$h^{'}_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\nu}\, h_{\alpha\beta}. \tag{6.36}$$

De forma análoga al caso de spin-1, asociaremos a las componentes del campo una helicidad (h) cuando al transformar el campo bajo una rotación de ángulo θ aparezca una relación del tipo

$$h^{'}_{\mu\nu} = e^{i\mathrm{h}\theta} h_{\alpha\beta}. \tag{6.37}$$

En el capítulo anterior, tras el estudio del caso masivo (ver Sec. 3.2), llegamos a entrever que las ligaduras asociadas a la condición *gauge* se encuentran asociadas a la mayor de las representaciones de Lorentz. Para el caso de campo vectorial A_μ afirmamos que la condición *gauge* eliminaba el spin-0 del triplete, y la ecuación de movimiento el singlete.

Por este motivo, nos proponemos estudiar las helicidades de las componentes que quedaron libre tras imponer la condición de movimiento (Ec. (6.30)), es decir $(\mathcal{C}_{00},\, \mathcal{C}_{01},\, \mathcal{C}_{02},\, \mathcal{C}_{11},\, \mathcal{C}_{12},\, \mathcal{C}_{33},)$. Si tomamos como premisa el caso de spin-1, en estas componentes deberíamos encontrarnos las helicididas asociadas al quintuplete y una extra.

Se estudia la transformación (6.36) sobre las componentes libres de $h_{\mu\nu}$ en la Ec. (6.31)

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}^{'}_{00} = \mathcal{C}_{00}, \qquad && \mathcal{C}^{'}_{01} = C_{01}\cos(\theta) - C_{02}\sin(\theta), \qquad && \mathcal{C}^{'}_{11} = \mathcal{C}_{11}\cos(2\theta) - \mathcal{C}_{12}\sin(2\theta), \\ &\mathcal{C}^{'}_{33} = \mathcal{C}_{33}, && \mathcal{C}^{'}_{02} = C_{01}\sin(\theta) + C_{02}\cos(\theta), && \mathcal{C}^{'}_{12} = \mathcal{C}_{11}\sin(2\theta) + \mathcal{C}_{12}\cos(2\theta). \end{aligned} \tag{6.38}$$

En el estudio de la helicidad en las componentes $\mathcal{C}$, se ha observado que las componentes $\mathcal{C}_{00}$ y $\mathcal{C}_{33}$ presentan una helicidad nula. Sin embargo, el comportamiento de las demás componentes se asemeja al caso descrito en la ecuación (4.27). Aunque no sea evidente a simple vista, estas componentes también poseen helicidad. Por ello, se propone realizar dos transformaciones similares al cambio de base descrito en (4.29), con el fin de poder visualizar las helicidades de las componentes.

Se re-definen las componentes de $\mathcal{C}_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_R &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{C}_{01} + i\mathcal{C}_{02}\right), \qquad & \mathcal{C}_R &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{C}_{11} + i\mathcal{C}_{12}\right), \\ \mathcal{V}_L &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{C}_{01} - i\mathcal{C}_{02}\right), & \mathcal{C}_L &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{C}_{11} - i\mathcal{C}_{12}\right). \end{aligned} \tag{6.39}$$

Gracias a esta recombinación, se puede apreciar las helicidades que estamos estudiando

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_{00}^{'} = \mathcal{C}_{00}, \qquad &\mathcal{V}_{R}^{'} = e^{i\theta}\mathcal{V}_{R}, \qquad &\mathcal{C}_{R}^{'} = e^{i2\theta}\mathcal{C}_{R}, \\ &\mathcal{C}_{33}^{'} = \mathcal{C}_{33}, \qquad &\mathcal{V}_{L}^{'} = e^{-i\theta}\mathcal{V}_{R}, \qquad &\mathcal{C}_{L}^{'} = e^{-i2\theta}\mathcal{C}_{L}. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Efectivamente, se puede observar como aparecen las helicidades esperadas de un campo de spin-2: $0, \pm 1, \pm 2$. Además, las componentes asociadas a las helicidades de ± 2 son las mismas que presentan los grados de libertad del sistema: $\mathcal{C}_{11}$ y $\mathcal{C}_{12}$. Llegados a este punto, podríamos estar satisfechos por haber desarrollado las bases de una teoría que modela un campo de spin-2.

Chapter 7

Campo de Kalb-Ramond con masa.

En los capítulos siguientes nos enfocaremos en el estudio del campo de Kalb-Ramond, propuesto por Michael Kalb y Pierre Ramond en 1974 en el artículo [20]. Este campo desempeña un papel importante en la teoría de cuerdas, ya que permite describir de manera consistente un campo de spin-1. Además, su uso en la teoría de cuerdas, por ejemplo el campo de Kalb-Ramond se utiliza para describir las fluctuaciones de las cuerdas en el espacio-tiempo, véase por ejemplo [23].

Nuestra motivación para estudiar este campo se basa en su estructura tensorial, ya que el campo de Kalb-Ramond se define como un campo de tensor dos antisimétrico, en contraposición del campo de spin-2 de Fierz-Pauli que es de orden dos pero simétrico. En este capítulo, nos centraremos en el análisis del campo de Kalb-Ramond masivo, estudiaremos la dinámica a través de su lagrangiano. Estudiaremos los grados de libertad, haremos uso de las propiedades propias de los tensores antisimétricos, analizaremos las ecuaciones de movimiento que se derivan de este lagrangiano y así como el dominio de su hamiltoniano. Finalmente, con el objetivo de profundizar en la naturaleza del spin de este campo, comprobaremos el campo de Kalb-Ramond masivo es dual al campo descrito por la acción de Proca.

7.1 Lagrangiano

En la introducción de este capítulo, se mencionó que el campo escogido se basa en su estructura tensorial, en lugar de su spin. En contraposición a la descripción simétrica del campo de Fierz-Pauli, definimos el campo de Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$ como un tensor de orden dos y antisimétrico

$$B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}. \tag{7.1}$$

Además, como en otros modelos, suponemos que este campo vive en una variedad cuatro-dimensional de Minkowski $(\mathcal{M}_4, \eta)$ y que cuya acción debe ser relativista y local. Además, como condición previa para este capítulo, exigimos que el campo sea masivo. Es decir, que su lagrangiano debe presenta una autointeracción del estilo

$$m^2 B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \tag{7.2}$$

donde m es la masa no nula del campo. A diferencia de los términos masivos del caso de Fierz-Pauli, definidos inicialmente en la ecuación (5.1), el campo de Kalb-Ramond solo presenta un único término relacionado con la masa, debido a que como es antisimétrico, su traza es nula

$$B = \eta^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = B^{\nu}{}_{\nu} = 0. \tag{7.3}$$

Junto con el término de masa, el lagrangiano propuesto por el campo de Kalb-ramond es de la forma

$$\mathcal{L}^{\mathrm{KR}} = \frac{1}{4}\partial_\mu B_{\nu\rho}\partial^\mu B^{\nu\rho} + \frac{1}{2}\partial_\mu B_{\nu\rho}\partial^\nu B^{\rho\mu} + \frac{1}{4}m^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \tag{7.4}$$

donde el primer prefactor es escogidos en función de la normalización canónica exigida a lo largo de esta tesis, y el resto vienen dados por el artículo original de Kalb y Ramond [20]. De esta forma, podemos afirmar que e lagrangiano se encuentra completamente descrito y definido. Se trata de una acción que no deja cabida a la elección de prefactores, ya que se encuentra descrito de tal manera que no aparezcan términos con derivadas temporales de orden dos en descomposiciones del campo del estilo:

$$B_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\chi_{\nu]}. \tag{7.5}$$

Por tanto, en un principio el lagrangiano se encuentra libre de posibles acciones fantasmales, aunque ya delantamos la importancia del análisis del hamiltoniano para comprobar que nuestro sistema se encuentra libre de inestabilidades de Ostrogradsky.

7.1.1 Campo de fuerza $H_{\mu\nu\rho}$

El campo fundamental de Kalb-Ramond se relaciona con un campo de fuerza $H_{\mu\nu\rho}$, que se define mediante

$$H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_{[\mu}B_{\nu\rho]} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\rho\mu}. \tag{7.6}$$

De esta manera, el lagrangiano de la acción de Kalb-Ramond se puede expresar en términos del campo $H_{\mu\nu\rho}$,

$$\mathcal{L}^{\mathrm{KR}} = \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{4}m^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \tag{7.7}$$

Debido a que el campo $B_{\mu\nu}$ es antisimétrico, $H_{\mu\nu\rho}$ es completamente antisimétrico, por lo que satisface

$$H_{\mu\nu\rho} = -H_{\mu\rho\nu}, \qquad H_{\mu\nu\rho} = -H_{\nu\rho\mu} \qquad H_{\mu\nu\rho} = H_{\rho\nu\mu}. \tag{7.8}$$

Además, como se menciona en el capítulo 2, los tensores completamente antisimétricos están asociados a un tensor dual, también antisimétrico, gracias al operador del dual de Hodge (véase el apartado 2.2). En este caso, definimos al tensor dual $\bar{H}$ como

$$\bar{H}^\lambda = \frac{1}{3!}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}H_{\mu\nu\rho}, \tag{7.9}$$

lo que permite reducir un tensor de orden tres a un vector, tal y como se ilustra en las clases de equivalencia (2.13). Esta equivalencia resulta de crucial importancia para entender el paralelismo entre la teoría de Kalb-Ramond y la acción de Proca.

7.2 Grados de Libertad

En la sección anterior se estableció que el campo de esta teoría se describe mediante un tensor antisimétrico de orden dos en una variedad de dimensión cuatro. El número máximo de grados de libertad asociados a este tipo de tensores es de seis ($D\,(D-1)\,/2$, con $D=4$).

Para el caso de Kalb-Ramond, nos encontramos ante una propiedad hasta ahora no vista de un campo, ya que el spin de Kalb-Ramond varía dependiendo de si se trata de un campo masivo o no. El salto de spin (del inglés, *spin jumping*) del campo de Kalb-Ramond es un fenómeno interesante y novedoso en esta tesis. Esta capacidad de cambiar el spin dependiendo de si el campo presenta masa o no, permite la generación de nuevas soluciones y da pie a la exploración de nuevos fenómenos físicos.

Para el caso masivo, el campo de Kalb-Ramond se comporta como un campo de spin-1. Este tipo de campos ya lo hemos estudiado en el caso del lagrangiano de Proca en el apartado 3.2, y por tanto, conocemos que el número de grados de libertad físicos es de tres asociados a las helicidades del triplete de spin $\{-1, 0, 1\}$.

En resumen, el número de grados de libertad del tensor es mayor al número de grados de libertad físicos predichos por la clasificación de Wigner. Esto se podría explicar con la existencia de condiciones de ligadura extras que permiten eliminar los grados de libertad extras. En el caso del campo de Kalb-Ramond masivo, estas condiciones son necesarias para garantizar la estabilidad y la coherencia de las soluciones de acuerdo con la bibliografía existente.

7.3 Ecuación de movimiento.

En esta sección, analizaremos la ecuación de movimiento del sistema con el objetivo de obtener una condición que restrinja el campo de Kalb-Ramond. Para ello, primero comenzaremos con la obtención de la ecuación de movimiento a través de la ecuación de Euler-Lagrange. Variando con respecto al campo fundamental $B_{\mu\nu}$ el lagrangiano y simplificando, obtenemos

$$\partial_\gamma \partial^{[\gamma} B^{\alpha\beta]} = m^2 B^{\alpha\beta}, \tag{7.10}$$

o expresado en función del tensor de fuerza

$$\partial_\gamma H^{\gamma\alpha\beta} = m^2 B^{\alpha\beta}. \tag{7.11}$$

Esta ecuación de movimiento nos permite entender la cinemática del sistema, pero también la utilizaremos para extraer una condición sobre el campo de Kalb-Ramond. Realizaremos una derivada parcial a ambos lados de la igualdad para llegar a

$$0 = \partial_\alpha \partial_\gamma H^{\gamma\alpha\beta} = m^2 \partial_\alpha B^{\alpha\beta} \quad \xrightarrow{\forall m} \quad \partial_\alpha B^{\alpha\beta} = 0. \tag{7.12}$$

El término de la derecha se elimina trivialmente debido a que el tensor $H_{\mu\nu\rho}$ es completamente antisimétrico. De esta forma, hemos obtenido una condición del tipo condición de Lorenz. Para un campo antisimétrico de orden dos, esta condición restringe un total de tres grados de libertad, ya que desde un principio las componentes del campo relacionadas con la diagonal del tensor se encuentra completamente determinada.

Si aplicamos la condición sobre la ecuación de movimiento del sistema, simplificamos dos de los tres términos que hay en el lado derecho, lo que nos lleva a

$$\partial_\gamma \partial^\gamma B^{\alpha\beta} = m^2 B^{\alpha\beta}, \tag{7.13}$$

es decir, a una ecuación de tipo onda masiva relativista. Esta solución respeta las imposiciones del comienzo del capítulo, ya que es un campo que resulta invariante Lorenz y cuyo acción es local.

En este apartado, hemos establecido que el campo en cuestión posee tres grados de libertad, lo que lo convierte en un candidato ideal para ser un campo masivo de spin-1, tal como lo predice la clasificación de Wigner. En la sección 7.5, profundizaremos en un breve análisis para demostrar que el campo de Kalb-Ramond masivo es en realidad dual a un campo de Proca, como el presentado en el capítulo 3.

A lo largo de esta tesis, hemos llevado a cabo un total de tres estudios de campos masivos. En cada uno de ellos, hemos observado que el número de grados de libertad físicos difiere del número de grados de libertad original del campo. Pero, para determinar el total de las restricciones necesarias en cada uno de los casos masivos hemos podido utilizar la ecuación de movimiento.

Por tanto, estos resultados dan a entender que la masa es un factor clave en la obtención de restricciones en los campos masivos, ya que presenta una ventaja significativa en comparación con los campos no masivos. No es solo que el número de restricciones necesarias es menor en los campos masivos debido a que la clasificación de Wigner brinda una mayor cantidad de grados de libertad a los casos masivos. Si no que en la ecuación de movimiento nos permite apoyarnos en el término relacionado con la masa para encontrar restricciones sobre el campo.

7.4 Hamiltoniano

En la sección anterior 7.2, analizamos los grados de libertad del lagrangiano de Kalb-Ramond. Sin embargo, no se llevó a cabo un estudio detallado sobre las posibles componentes *ghost* que este lagrangiano podría presentar. Esto es en parte debido a la falta de prefactores abiertos que permitieran realizar una restricción del sistema.

A pesar de ello, es crucial destacar que el hamiltoniano debe cumplir con las propiedades exigidas para considerar este sistema físico como un candidato válido para modelar la realidad. En particular, el hamiltoniano debe presentar una cota inferior y, dado que se trata de un sistema libre de interacciones, debe ser definido como positivo. Por lo tanto, es fundamental llevar a cabo un análisis detallado del hamiltoniano del lagrangiano de Kalb-Ramond para verificar si cumple con estas propiedades.

Para calcular el campo de Kalb-Ramond, al igual que en el caso de spin-2, definimos un nuevo tensor en la ecuación con el objetivo de facilitar el cálculo del hamiltoniano. De forma análoga al tensor descrito en la ecuación (6.15) del capítulo de Fierz-Pauli masivo, definimos

$$\Pi^{\gamma\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}^{KR}}{\partial\left(\partial_\gamma B_{\alpha\beta}\right)} = \frac{1}{2}\partial^{[\gamma}B^{\alpha\beta]} = \frac{1}{2}H^{\gamma\alpha\beta}. \tag{7.14}$$

La necesidad de definir un tensor de este estilo se debe a que el desarrollo que empleamos para analizar este hamiltoniano es un proceso análogo al realizado en el campo de spin-2, que a su vez procede de forma similar al caso de spin-1. De esta manera, podemos comprobar que la base obtenida a lo largo de este trabajo resulta útil para la exploración de nuevos campos.

A continuación, expresamos el hamiltoniano como la transformada de Legendre del lagrangiano en la siguiente expresión

$$\mathcal{H}^{KR} = \Pi^{0\alpha\beta}\partial_0 B_{\alpha\beta} - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4}m^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \tag{7.15}$$

Substituimos el tensor $\Pi^{0\alpha\beta}$ con la ecuación (7.14) y completamos el hamiltoniano para obtener un producto del estilo $\Pi^{0\alpha\beta}\Pi_{0\alpha\beta}$. Por tanto, el hamiltoniano lo encontramos de la forma

$$\mathcal{H}^{KR} = \frac{1}{2}H^{0\alpha\beta}H_{0\alpha\beta} - \frac{1}{2}H^{0\alpha\beta}(\partial_\beta B_{0\alpha} - \partial_\alpha B_{\beta 0}) - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{4}m^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \tag{7.16}$$

Para continuar, hacemos uso de la regla de Leibniz sobre la derivada para poder calcular la derivada parcial en los productos mixtos del tensor $H^{0\alpha\beta}$. Al conjunto de términos relacionados con derivadas totales, los agregamos en el término $\mathcal{H}_{\text{Boundary}}$. Utilizando la ecuación de movimiento (7.11), obtenemos

$$\mathcal{H}^{KR} = \frac{5}{12}H^{0\alpha\beta}H_{0\alpha\beta} - \frac{1}{12}H_{i\nu\rho}H^{i\nu\rho} + m^2 B_{\beta 0}B^{\beta 0} - \frac{1}{4}m^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \mathcal{H}_{\text{Boundary}}. \tag{7.17}$$

Hacemos una descomposición de los índices entre la componente temporal y la componentes espaciales

$$\mathcal{H}^{KR} = \frac{7}{12}(H^{0ij})^2 + \frac{1}{12}(H^{ijk})^2 + \frac{1}{2}m^2 B_{i0}B^{i0} - \frac{1}{4}m^2 B_{ij}B^{ij} + \mathcal{H}_{\text{Boundary}}. \tag{7.18}$$

Y, para comprobar que el hamiltoniano es positivo, hacemos uso de las equivalencias

$$(H_{0ij})^2 = (\partial_0 B_{ij})^2 + 2(\partial_i B_{j0})^2 + (\partial_0 B_{i0})^2, \tag{7.19}$$
$$(H_{ijk})^2 = 3(\partial_i B_{jk})^2 + 6(\partial_0 B_{i0})^2, \tag{7.20}$$
$$m^2 B_{i0}B^{i0} = (\partial_0 B_{i0})^2 - (\partial_j B_{i0})^2, \tag{7.21}$$
$$m^2 B_{ij}B^{ij} = (\partial_k B_{ij})^2 - (\partial_0 B_{ij})^2. \tag{7.22}$$
$$\tag{7.23}$$

En todas las equivalencias se han omitido los términos de derivadas total, y se integran el término $\mathcal{H}_{\text{Boundary}}$ del hamiltoniano. Finalmente, comprobamos que el hamiltoniano *on shell* se encuentra positivo

$$\mathcal{H}^{KR} = \frac{5}{6}(\partial_0 B_{ij})^2 + \frac{2}{3}(\partial_i B_{j0})^2 + \frac{19}{12}(\partial_0 B_{i0})^2 + \mathcal{H}_{\text{Boundary}}. \tag{7.24}$$

Gracias a este resultado, podemos afirmar que el sistema se encuentra libre de inestabilidades de Ostrogradsky. Y en realidad, es importante destacarlo porque se trata del primer campo estudiado que se encuentra desligado de las interacciones fundamentales del Modelo Estándar, o de la Relatividad General. El hecho de que el campo se encuentre libre de este tipo de inestabilidades es esencial para su consideración como candidato para un campo físico. Recordemos, que estas inestabilidades son un problema común en los sistemas hamiltonianos con más de un grado de libertad y pueden llevar a comportamientos no deseados en el sistema.

Por tanto, podemos confirmar que efectivamente el campo de Kalb-Ramond cumple con las expectativas teóricas para considerarlo como un candidato a un posible campo físico. Se trata de un campo que se encuentra dentro del marco de la relatividad y cuya acción es local, como observamos en su ecuación de movimiento (7.13). Además, podemos afirmar que presenta un número de grados de libertad reducidos, equivalente a un campo de spin-1, como indicaba la bibliografía. También, podemos afirmar que no presenta inestabilidades de Ostrogradsky y que su energía se encuentra acotada inferiormente y positiva para cualquier valor del campo $B_{\mu\nu}$.

7.5 Dualidad.

Para concluir con este capítulo, dedicaremos una sección a la verificación del campo de Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$ como un dual del campo de spin-1 masivo analizado en el capítulo 3. Con esto, buscamos mostrar desde un nuevo punto de vista la naturaleza del spin del campo de Kalb-Ramond masivo. Para este desarrollo nos basaremos en el trabajo de Lavinia Heisenberg y Georg Trenkler en [16].

Para esta demostración, proponemos un nuevo lagrangiano para el campo $H_{\mu\nu\rho}$ y el campo antisimétrico $B_{\mu\nu}$, ambos totalmente independientes entre ellos. El lagrangiano que proponemos es definido como

$$\mathcal{L}^{KR}_{\text{Dual}}(H_{\mu\nu\rho}, B_{\mu\nu}) = -\frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4}m^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{6}H_{\mu\nu\rho}\partial^{[\mu}B^{\nu\rho]}. \tag{7.25}$$

Con este lagrangiano buscamos un sistema físico que resulte equivalente al que describe nuestro lagrangiano (7.4) en la capa de masa. Si estudiamos la variación de ambos campos obtenemos las dos siguientes relaciones

$$H_{\gamma\alpha\beta} = \partial_{[\gamma}B_{\alpha\beta]}, \tag{7.26}$$
$$\partial_\gamma H^{\gamma\alpha\beta} = m^2 B^{\alpha\beta}. \tag{7.27}$$

La primera solución relaciona al campo de Kalb-Ramond con $H_{\mu\nu\rho}$ como el tensor de fuerza descrito en (7.6). La segunda solución es la ecuación de movimiento (7.11). Al juntar estas dos soluciones, obtenemos

$$\partial_\gamma \partial^{[\gamma}B^{\alpha\beta]} = m^2 B^{\alpha\beta}, \tag{7.28}$$

que es la ecuación de movimiento original del lagrangiano del sistema. Por lo tanto, podemos afirmar que este sistema se comporta de forma equivalente al lagrangiano original *on shell*. Al reemplazar las ecuaciones (7.26) y (7.27) en el lagrangiano propuesto en esta sección dejamos al lagrangiano como

$$\mathcal{L}^{KR}_{\text{Dual}}\left(H_{\mu\nu\rho}\right) = \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{4m^2}\partial_\mu H^{\mu\nu\rho}\partial^\gamma H_{\gamma\nu\rho}. \tag{7.29}$$

Se trata de un lagrangiano que ahora se expresa únicamente en función del tensor $H_{\mu\nu\rho}$. Dado que este tensor es completamente antisimétrico, podemos hacer uso de su campo dual $\bar{H}_\mu$ definido en la ecuación (7.9)

$$\bar{H}^\lambda = \frac{1}{3!}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}H_{\mu\nu\rho} \iff H^{\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\bar{H}_\lambda, \tag{7.30}$$

para reexpresar el lagrangiano y que quede de la forma

$$\mathcal{L}^{KR}_{\text{Dual}}\left(\bar{H}_\mu\right) = \frac{1}{12}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon_{\mu\nu\rho\gamma}\bar{H}_\lambda\bar{H}^\gamma - \frac{1}{4m^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon_{\gamma\nu\rho\delta}\partial_\mu\bar{H}_\lambda\partial^\gamma\bar{H}^\delta. \tag{7.31}$$

Finalmente, haciendo uso de las propiedades del tensor de Levi-Civita, obtenemos

$$\mathcal{L}^{KR}_{\text{Dual}}\left(\bar{H}_\mu\right) = \frac{1}{6}\bar{H}_\mu\bar{H}^\mu - \frac{1}{m^2}\left(\partial_\mu\bar{H}_\nu\partial^\mu\bar{H}^\nu - \partial_\mu\bar{H}_\nu\partial^\nu\bar{H}^\mu\right). \tag{7.32}$$

En este punto ya podemos observar la equivalencia con el lagrangiano de Proca. Pero para finalizar, si reajustamos el campo y reexpresamos el término de masa podemos obtener que efectivamente Kalb-Ramond es dual al lagrangiano de Proca

$$A_\mu = \frac{1}{m\sqrt{2}}\bar{H}_\mu \tag{7.33}$$
$$\mathcal{L}^{KR}_{\text{Dual}}\left(A_\mu\right) = M^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu\right) = \mathcal{L}^{\text{spin}-1}_{m}, \tag{7.34}$$

donde $M = \frac{m}{\sqrt{3}}$. De esta forma podemos confirmar que el campo de Kalb-Ramond masivo es dual a un campo de spin-1 masivo como el campo de Proca.

Por tanto, damos por concluido este primer análisis del campo de Kalb-Ramond masivo. A lo largo de este capítulo, se ha calculado sus grados de libertad, expresado su ecuación de movimiento y estudiado su hamiltoniano. Se ha comprobado que la ecuación de movimiento es local y relativista, y que el hamiltoniano presenta un límite inferior, lo que lo hace libre de inestabilidades de Ostrogradsky. Además, se ha demostrado cómo este campo se comporta de forma dual a un campo de spin-1 masivo, lo que representa un importante avance en la comprensión del uso de las dualidades en las teorías de campos de spin.

El campo de Kalb-Ramond es un campo interesante debido a sus propiedades relacionadas con la antisimetría de su tensor. Al analizarlo, hemos podido observar que existe la posibilidad de describir un campo de spin-1 a través de un tensor de orden dos, al menos en el caso masivo. Este estudio resulta fundamental para poder entender posibles descripciones de candidatas a nuevas partículas o incluso a cuerdas, que puedan ser descritas por este tipo de modelos.

En el siguiente capítulo, se procederá a analizar el modelo no masivo del campo de Kalb-Ramond. Se realizará el mismo estudio realizado para el resto de campos no masivos, y se comprobará que el spin de la siguiente teoría no coincide con el spin del caso masivo del Kalb-Ramond, dando lugar a una diferencia entre los casos masivos y no masivos del mismo campo.

Chapter 8

Campo de Kalb-Ramond sin masa.

El estudio finaliza con este capítulo, dedicado al caso no masivo del campo Kalb-Ramond. Al igual que comentamos en el capítulo anterior, este campo resulta de gran interés en este trabajo por su estructura tensorial, y las consecuencias que este tiene en cuanto a su spin. Este hecho hace que el campo resulte ser un análisis diferente al de los campos hasta ahora tratados.

En el capítulo anterior se estudió el caso masivo del campo Kalb-Ramond y se comprobó que este se comporta como un campo de spin-1. Sin embargo, en este capítulo se demostrará que el campo Kalb-Ramond en su versión no masiva es un campo de spin-0.

Para llevar a cabo este estudio, se utilizará el caso no masivo del lagrangiano original propuesto por Kalb y Ramond en su trabajo [20]. A partir de este lagrangiano se analizarán las propiedades del modelo, se estudiarán los grados de libertad, se obtendrá la ecuación de movimiento y el hamiltoniano, y finalmente a través del análisis de las helicidades del campo, podremos determinar el spin del campo. De forma similar a lo realizado en los capítulos anteriores, se comenzará con el análisis de las propiedades del modelo.

8.1 Lagrangiano.

Definimos el campo fundamental del campo como el descrito para el caso masivo: se trata de un tensor de orden dos $B_{\mu\nu}$ antisimétrico. Este campo debe vivir en la variedad $(\mathcal{M}_4, \eta)$, y además, debe ser invariante bajo transformaciones de Lorentz y su acción, al igual que en el resto de campos estudiados, debe ser local.

Además, presentamos el mismo tensor de fuerza $H_{\mu\nu\rho}$ que en el capítulo anterior, el cual se describe como

$$H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\rho\mu}. \tag{8.1}$$

Se trata de un campo descrito por un tensor de orden tres completamente antisimétrico. Por tanto, el campo presenta las mismas propiedades observadas en el capítulo anterior, así como que también tiene un tensor dual a este

$$\bar{H}^\lambda = \frac{1}{3!} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} H_{\mu\nu\rho}. \tag{8.2}$$

El lagrangiano de Kalb-Ramond no masivo es el lagrangiano del capítulo anterior, salvo por el término de masa. De esta forma, podemos expresar el lagrangiano de nuestro sistema como la parte puramente dinámica del lagrangiano propuesto por Kalb-Ramond. Es decir,

$$\mathcal{L}^{KR} = \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4} \partial_\mu B_{\nu\rho} \partial^\mu B^{\nu\rho} + \frac{1}{2} \partial_\mu B_{\nu\rho} \partial^\nu B^{\rho\mu}, \tag{8.3}$$

donde el factor $\frac{1}{12}$ viene dado por el convenio de normalización canónica.

8.2 Grados de Libertad.

En primer lugar, el campo $B_{\mu\nu}$ se ha descrito inicialmente como el campo del capítulo anterior. Por lo tanto, el número de grados de libertad del tensor es conocido: seis grados de libertad debido a que es un tensor antisimétrico que vive en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones ($D(D-1)/2$, con $D=4$).

Por otro lado, del capítulo anterior conocemos el spin del campo de Kalb-Ramond masivo. Se trata de un campo de spin-1, y de acuerdo con la clasificación de Wigner, sabemos que el número de grados de libertad asociado a este tipo de campos masivos es tres. Por extensión, se podría pensar que el campo de Kalb-Ramond no masivo, el caso que nos interesa en este capítulo, debería comportarse como un campo de spin-1 no masivo, pero no es así. En cambio, en el caso de este capítulo, sabemos de la bibliografía que el campo de Kalb-Ramond se caracteriza por presentar un salto de spin entre los casos masivos y no masivos, de tal forma que el caso no masivo se comporta como un campo de spin-0.

Según la clasificación de Wigner, los campos de spin-0 presentan un único grado de libertad, un grado asociado al singlete de spin. De esta forma, podemos estar seguros de que el número de restricciones que debemos obtener sobre el campo de Kalb-Ramond debe ser de un total de cinco restricciones. El hecho de tener una discrepancia en el número de grados de libertad, así como el hecho de no tener de antemano el spin al que se le asocia este campo, es motivación suficiente para realizar un estudio de los grados de libertad del campo.

8.2.1 Invarianza *gauge.*

En el campo de Kalb-Ramond no masivo, no es necesaria la búsqueda de campos de tipo fantasmas. Como ya se comprobó en el capítulo anterior, el lagrangiano ya está definido de tal manera que no aparecen términos dinámicos con derivadas temporales de orden superior a dos. Esto significa que, al realizar una descomposición del estilo

$$B_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\chi_{\nu]}, \tag{8.4}$$

en el lagrangiano no aparece la componente asociada al campo χ. En otras palabras, el lagrangiano resulta invariante a este tipo de transformaciones. Por lo tanto, es posible realizar una transformación del campo como

$$B_{\mu\nu} \to B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\xi_{\nu]} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{KR}\left(B_{\mu\nu}\right) = \mathcal{L}^{KR}\left(B_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\xi_{\nu]}\right), \tag{8.5}$$

sin que el lagrangiano, la cinemática o la física del sistema varíen. Esta posibilidad permite elegir el campo $B_{\mu\nu}$ que se desea utilizar de forma arbitraria sin que ello afecte al sistema físico. Esto nos indica que nuestro campo fundamental no es un campo físico en sí mismo, sino más bien un campo auxiliar con el que generar un modelo. Al campo de Kalb-Ramond le está asociado un campo de fuerza $H_{\mu\nu\rho}$, el cual es invariante a las transformaciones mencionadas anteriormente y con el que sí se puede medir y hacer física.

$$H_{\mu\nu\rho}\left(B_{\mu\nu}\right) = H_{\mu\nu\rho}\left(B_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\xi_{\nu]}\right). \tag{8.6}$$

Esta situación es similar a la que ocurre en el electromagnetismo entre el campo de spin-1 A_μ y el campo electromagnético $F_{\mu\nu}$.

La invarianza mencionada anteriormente es similar a la utilizada en el campo de spin-2 (véase la ecuación (6.5)), pero es antisimétrica. Esta observación tiene interesantes consecuencias. El hecho de ser antisimétrica no permite que la descomposición del campo sea de campos escalares, como sucede en la ecuación (5.5). Al tratarse de un campo vectorial de la forma de un campo de spin-1, y sin posibilidad de eliminar las componentes escalares, es probable que esté relacionado con las representaciones del triplete de spin.

En cualquier caso, al igual que ocurre con el resto de casos estudiados, el hecho de que el sistema físico resulte invariante frente a campos del tipo $B_{\mu\nu}$ implica que podríamos escoger un nuevo campo $B'_{\mu\nu}$ de tal forma que no solo el campo vectorial no aparezca, sino que además podamos asignarle el valor que deseemos. Tomando nuestro nuevo campo la forma:

En cualquier caso, al igual que ocurre con el resto de casos estudiados. El hecho de que el sistema físico resulte invariante frente a este tipo de campos implica que podríamos escoger un nuevo campo $B'_{\mu\nu}$ de tal forma que no solo el campo vectorial no aparezca, si no que tome el valor que deseemos. Tomando nuestro nuevo campo la forma

$$B'_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\left(\chi_{\nu]} + \xi_{\nu]}\right). \tag{8.7}$$

El nuevo campo vectorial ($\chi'_\mu = \chi_\mu + \xi_\mu$) es elegido, y por tanto podemos restringir sus grados de libertad a voluntad. Como se trata de un vector, podríamos considerar que esta invariancia *gauge* restringe cuatro grados de libertad, de forma análoga al campo de spin-2. Sin embargo, el caracter antisimétrico del campo $B_{\mu\nu}$ implica que siempre existe una componente de la diagonal principal que es definida como nula. Por tanto, esta simetría del sistema nos permite reducir hasta en tres los grados de libertad que originalmente presenta el campo $B_{\mu\nu}$, dejándolo únicamente con tres grados de libertad.

8.2.2 Ecuación de movimiento y Elección del *gauge*.

A lo largo de este trabajo, ya hemos adquirido experiencia en el estudio de campos no masivos. La comprensión de la cinemática del sistema es esencial para el desarrollo de nuestra teoría, aunque ya conocemos que en los casos no masivos no obtenemos ninguna condición específica del campo de estudio. En cualquier caso, la ecuación de movimiento nos permite entender qué tipo de restricción o elección del *gauge* debemos seleccionar para que el campo cumpla con las condiciones de invariancia de Lorenz y localidad.

La ecuación de Euler-Lagrange nos permite obtener la ecuación de movimiento, aunque como su formulación es análoga a la realizada para el caso masivo podemos hacer uso de dicho cálculo. La ecuación de movimiento de este sistema se expresa como

$$\partial_\gamma \partial^{(\gamma} B^{\alpha\beta)} = \partial_\gamma \partial^\gamma B^{\alpha\beta} + \partial_\gamma \partial^{[\alpha} B^{\beta]\gamma} = 0. \tag{8.8}$$

O expresado en función del campo $H_{\mu\nu\rho}$

$$\partial_\gamma H^{\gamma\alpha\beta} = 0. \tag{8.9}$$

Por un lado, podemos observar que el resultado obtenido no necesariamente cumple con las condiciones necesarias para encontrarse dentro del marco de la relatividad especial. Sin embargo, en la solución se encuentra un término asociado a una solución de tipo onda relativista. Si pudiéramos restringir las componentes no asociadas a la solución de onda relativista, confirmaríamos que nuestro modelo se encuentra dentro del marco de la relatividad especial.

Por otro lado, es importante reexpresar la idea de que la ecuación de movimiento no presenta ninguna condición sobre el campo. Al igual que ha ocurrido en otros casos de campos no masivos, la solución pasa por la elección de una condición extra, conocida como gauge. Esta condición debe cumplir con dos requisitos fundamentales: no debe interponerse ni violar la simetría presente en el lagrangiano del sistema, y debe eliminar el número de grados de libertad esperado.

Por tanto, en este caso en particular, tomamos una elección del gauge del tipo condición de Lorenz, que cumple con estas condiciones y nos permite obtener una solución consistente dentro del marco de la relatividad especial.

$$\partial_\alpha B^{\alpha\beta} = 0. \tag{8.10}$$

De esta forma podemos asegurarnos que ahora la ecuación de movimiento expresa la cinemática de un campo relativista y local

$$\partial_\gamma \partial^\gamma B^{\alpha\beta} = 0. \tag{8.11}$$

Además de ser una condición que restringe los grados de libertad del campo $B_{\mu\nu}$, es importante señalar que en un principio podría parecer que el número de restricciones que ofrece son hasta cuatro, siendo superior a las restricciones impuestas a los propios grados de libertad. Sin embargo, como comprobaremos en la sección 8.3 en la que analizamos la helicidad del campo, esta condición reduce un máximo de dos grados de libertad del conjunto de grados de libertad restantes. Por tanto, el campo cumple con el número de grados de libertad esperado para un campo de spin-0.

8.2.3 Hamiltoniano.

Para el campo de Kalb-Ramond no masivo hemos determinado que existe un único grado de libertad, siendo el campo de spin-0 el único candidato para este tipo de campos. Además, debido a la invariancia *gauge* del sistema, se ha comprobado que el lagrangiano no presenta inestabilidades de Ostrogradsky. Sin embargo, para asegurarnos de ello, es necesario analizar el hamiltoniano del sistema y comprobar que presenta un límite inferior acotado, así como que la energía del campo de Kalb-Ramond es definida y positiva para cualquier configuración del campo.

Para calcular el hamiltoniano de esta teoría, se utilizará el tensor definido para el caso masivo del capítulo anterior (ecuación (7.14)). Se define el tensor $\Pi^{\gamma\alpha\beta}$ como

$$\Pi^{\gamma\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}^{KR}}{\partial\left(\partial_\gamma B_{\alpha\beta}\right)} = \frac{1}{2}\partial^{(\gamma} B^{\alpha\beta)} = \frac{1}{2} H^{\gamma\alpha\beta}. \tag{8.12}$$

Para facilitar aún más el desarrollo matemático de esta ocasión, hacemos uso de la misma ecuación de movimiento (8.9) para obtener la siguiente relación

$$2\,\partial_0 \Pi^{0\alpha\beta} = \partial_i H^{i\alpha\beta}. \tag{8.13}$$

De esta forma el hamiltoniano se puede expresar como la transformación de Legendre de la forma:

$$\mathcal{H}^{KR} = \frac{1}{2} H^{0\alpha\beta}\partial_0 B_{\alpha\beta} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}. \tag{8.14}$$

Finalmente, mediante la manipulación ya expresada en los capítulos anteriores, se completa el hamiltoniano para obtener los términos $H^{0\alpha\beta}H_{0\alpha\beta}$, aplicando la regla de Leibniz y recogiendo las derivadas totales en el término H_{Boundary}. Además, se hace uso de la ecuación de movimiento y se separan las componentes temporales y espaciales.

$$\mathcal{H}^{KR} = \frac{1}{2}\left(H^{0\alpha\beta}H_{0\alpha\beta} - H^{0\alpha\beta}\left(\partial_\beta B_{0\alpha} + \partial_\alpha B_{\beta 0}\right) - \frac{1}{6}\left(H^{0\nu\rho}H_{0\nu\rho} + H^{i\nu\rho}H_{i\nu\rho}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(5H^{0\alpha\beta}H_{0\alpha\beta} - H^{i\nu\rho}H_{i\nu\rho} - 12\,\cancel{\partial_\beta H^{0\alpha\beta}}B_{0\alpha}\right) + \mathcal{H}_{\text{Boundary}} = \tag{8.15}$$

$$= \frac{1}{4}\left(H_{0ij}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(H_{ijk}\right)^2 + \mathcal{H}_{\text{Boundary}}$$

Se observa que en este caso aparece el resultado completamente positivo sin necesidad de mayor manipulación. Por tanto, se puede confirmar que se trata de un hamiltoniano positivo para cualquier valor de cualquier componente del campo de Kalb-Ramond. De esta forma, se puede asegurar que el sistema se encuentra libre de inestabilidades de Ostrogradsky y que además se trata de un campo de energía positiva de cara a la clasificación de Wigner.

8.3 Helicidad.

En el campo de Kalb-Ramond, la diferencia entre los grados de libertad masivos y no masivos es esencial. A pesar de que el campo de Kalb-Ramond presenta una dualidad con la acción de Proca en el caso masivo, presenta una dualidad con el campo de spin-0 en el caso no masivo. En esta sección, investigaremos cómo el número de grados de libertad se reduce a uno y cómo se relaciona con la helicidad.

Utilizaremos una metodología análoga a la utilizada en los capítulos anteriores (secciones 4.4 y 6.4). Haremos uso de la invariancia de *gauge* del campo y de la elección de *gauge* que hemos realizado.

8.3.1 Primera restricción.

Nuestro objetivo al elegir el gauge fue el de lograr que el campo de Kalb-Ramond se comportara bajo el marco de la relatividad especial. La solución a este problema requería que la ecuación de movimiento fuera un resultado del estilo onda relativista. Por este motivo, en el apartado 8.2.2, elegimos un gauge de tipo Lorenz tal que

$$\partial_\mu B'^{\mu\nu} = 0. \tag{8.16}$$

El cual nos resulta familiar debido a su similitud con los casos anteriores, ya que también puede ser considerado como el caso antisimétrico del gauge armónico, Ec. (6.12). Y, como ya observamos en el apartado 8.2.2, esta decisión simplificó la ecuación de movimiento en la forma

$$\partial_\gamma \partial^\gamma B'^{\,\alpha\beta} = 0. \tag{8.17}$$

Se trata de una solución cuya solución es conocida, una combinación de ondas relativistas. De esta forma, podemos asumir que el campo de Kalb-Ramond se comporta, por simplificidad, como una de estas:

$$B'_{\alpha\beta} = \mathsf{C}_{\alpha\beta}\, e^{ik_\lambda x^\lambda}, \qquad (\mathsf{C}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{C}_{01} & \mathsf{C}_{02} & \mathsf{C}_{03} \\ & 0 & \mathsf{C}_{12} & \mathsf{C}_{13} \\ & \cdots & 0 & \mathsf{C}_{23} \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.18}$$

donde la amplitud $\mathsf{C}_{\alpha\beta}$ es antisimétrica y cuenta con hasta seis componentes libres. La solución de onda plana junto con las ecuaciones (8.16) y (8.17) nos permite extraer las dos siguientes condiciones

$$k^\mu \mathsf{C}_{\mu\nu} = 0, \quad k_\mu k^\mu = 0. \tag{8.19}$$

El primer resultado nos muestra la perpendicularidad entre la amplitud y el vector de onda del campo. Mientras que el segundo resultado nos informa de que el vector de onda es de tipo luz, es decir, que el desplazamiento de las perturbaciones del campo son relativistas. Aunque se traten de dos soluciones, el potencial para ejercer como ligaduras a las componentes del campo es en su conjunto.

Para facilitar el cálculo, supondremos que nos encontramos en un sistema de referencia arbitrario, de tal forma que el vector de desplazamiento se encuentra en una dirección privilegiada. En este caso, tomaremos que el vector de onda se define para la última componente espacial. Al ser de tipo luz, el vector se debe definir como

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \tag{8.20}$$

lo que permite simplificar a la segunda condición del campo a

$$k\left(\mathsf{C}_{0\nu} + \mathsf{C}_{3\nu}\right) = 0. \tag{8.21}$$

Si se estudian las componentes de la amplitud que aun quedan libres, podemos sacar las siguientes tres relaciones

$$\mathsf{C}_{03} = \mathsf{C}_{00} = 0, \quad \mathsf{C}_{13} = \mathsf{C}_{01}, \quad \mathsf{C}_{23} = \mathsf{C}_{02} \quad \Longrightarrow \quad (\mathsf{C}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{C}_{01} & \mathsf{C}_{02} & 0 \\ & 0 & \mathsf{C}_{12} & \mathsf{C}_{01} \\ & \cdots & 0 & \mathsf{C}_{02} \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.22}$$

En realidad, la condición (8.21) permite determinar hasta cuatro ecuaciones. Restringir hasta cuatro componentes del campo $\mathsf{C}_{\mu\nu}$, pero el carácter antisimétrico del campo hace que las componentes relacionadas con la diagonal principal resulten trivial. Por tanto, podemos afirmar que efectivamente la elección del *gauge*, o la condición de tipo Lorenz, permite restringir el valor de tres componentes del campo, dejando al campo de Kalb-Ramond con tres grados independientes $(\mathsf{C}_{01}, \mathsf{C}_{02}, \mathsf{C}_{12})$

8.3.2 Segunda restricción.

La elección del *gauge* no fija el *gauge* en sí, es decir, que el campo aún puede sufrir transformaciones del tipo (8.5). Además, el campo todavía presenta tres grados de libertad. Como el gauge aún no se encuentra definido, se puede aplicar con el objetivo de eliminar los dos grados de libertad sobrantes.

Si tomamos la transformación

$$B_{\mu\nu} \to B^{'}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + ik_{[\mu}U_{\nu]}e^{ik_\lambda x^\lambda}, \tag{8.23}$$

nos podemos dar cuenta de que las condiciones que se imponen sobre el campo $B'_{\mu\nu}$ no varían. Por tanto, el campo se sigue comportando como una solución de tipo onda relativista. Por tanto, tomaremos por simplicidad, la solución de una única onda plana como

$$B'_{\alpha\beta} = \left(\mathsf{C}_{\alpha\beta} + k_{[\alpha}U_{\beta]}\right) e^{ik_\lambda x^\lambda}. \tag{8.24}$$

De igual forma, podemos seguir trabajando con las condiciones (8.19). Nos acordamos de que seguimos tomando al vector de onda k_μ con su dirección privilegiada, y entonces la condición (8.21) se sigue cumpliendo. Si aplicamos ambas restricciones a la amplitud del campo $B'_{\mu\nu}$ las componentes son

$$(k^\lambda) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \quad \wedge \quad k\,(\mathsf{C}_{0\nu} + \mathsf{C}_{3\nu}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\mathsf{C}_{\mu\nu} + k_{[\mu}U_{\nu]}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{C}_{01} + kU_1 & \mathsf{C}_{02} + kU_2 & 0 \\ & 0 & \mathsf{C}_{12} & \mathsf{C}_{01} + kU_1 \\ & \cdots & 0 & \mathsf{C}_{02} + kU_2 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.25}$$

Análogas a las obtenidas en la ecuación (8.22). Es decir, seguimos teniendo tres grados de libertad, menos por la salvedad de que en esta ocasión presentamos a las componentes del vector U, que son arbitrarias. Y como no afectan a la física del lagrangiano porque este resulta invariante frente a este tipo de transformaciones, podemos tomar el valor del vector U que deseemos. Como el vector se encuentra en dos de los tres grados de libertad restantes, podemos realizar un ajuste fino del vector de tal forma que eliminen dichas componentes. Una posible elección es

$$(U) = -\frac{1}{k}\,(0, \mathsf{C}_{01}, \mathsf{C}_{02}, 0) \quad \Longrightarrow \quad (\mathsf{C}_{\mu\nu} + k_{[\mu}U_{\nu]}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{C}_{12} & 0 \\ 0 & -\mathsf{C}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.26}$$

De esta forma, el lagrangiano pierde dos grados de libertad por la simetría del lagrangiano. Y deja al campo de Kalb-Ramond no masivo solo con una única componente como su único grado de libertad. El único campo de spin que se encuentra bajo esta descripción es el campo de spin-0. A continuación, se finaliza este apartado con el cálculo de helicidad, para verificar que efectivamente se trata de un campo de spin-0.

8.3.3 Helicidades del campo de Kalb-Ramond.

Para el cálculo de la helicidad, no trabajaremos con el campo completamente determinado de la ecuación (8.26). En su lugar, tomaremos al campo antes de tener definido el *gauge*, el descrito en la ecuación (8.22). De esta forma, podremos estudiar la helicidad de las componentes restantes del campo, aparte de la asociada al grado de libertad.

Para estudiar las helicidades de las componentes, realizaremos una transformación del campo $B'\mu\nu$ del tipo rotación espacial. Al ser un tensor de orden dos, el campo se transforma bajo una rotación de acuerdo a

$$B''_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\mu} (\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\nu}\, B'_{\alpha\beta}, \tag{8.27}$$

donde $\Lambda\alpha\beta$ es el objeto asociado a las transformaciones de Lorentz. Para el caso de una rotación de un ángulo θ en la misma dirección espacial en la que se define el vector k_μ, el operador se describe como en la ecuación (4.25), y el campo tras rotar se presenta como

$$\left(\mathsf{C}'_{\mu\nu}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \mathsf{C}_{01}\cos(\theta) - \mathsf{C}_{02}\sin(\theta) & \mathsf{C}_{01}\sin(\theta) + \mathsf{C}_{02}\cos(\theta) & 0 \\ & 0 & \mathsf{C}_{12} & \mathsf{C}_{01}\cos(\theta) - \mathsf{C}_{02}\sin(\theta) \\ & \cdots & 0 & \mathsf{C}_{01}\sin(\theta) + \mathsf{C}_{02}\cos(\theta) \\ & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.28}$$

Nos centraremos en las componentes de libre configuración (i.e. C01, C02 y C_{12}), al menos hasta aplicar la condición gauge. Con la experiencia adquirida en los capítulos anteriores, podemos identificar que las dos primeras componentes se pueden asociar a las helicidades ± 1. Para ello, necesitaremos realizar el mismo cambio de base propuesto en la ecuación (4.29), obteniendo

$$\begin{aligned} \mathsf{C}_R &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathsf{C}_1 + i\mathsf{C}_2\right) & & \mathsf{C}'_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathsf{C}'_1 + i\mathsf{C}'_2\right) = e^{i\theta}\mathsf{C}_R \\ & & \Longleftrightarrow & \\ \mathsf{C}_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathsf{C}_1 - i\mathsf{C}_2\right) & & \mathsf{C}'_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathsf{C}'_1 - i\mathsf{C}'_2\right) = e^{-i\theta}\mathsf{C}_R. \end{aligned} \tag{8.29}$$

De acuerdo con el convenio que hemos establecido (ver la expresión (6.37)), las componentes $\mathsf{C}R$ y $\mathsf{C}L$ presentan una helicidad ± 1. Sin embargo, al imponer la condición gauge (ecuación (8.23)), estas dos componentes se anulan, tal como ocurre en la ecuación (8.26). Este resultado confirma la idea expresada en el apartado 7.5 de que el gauge de este sistema está relacionado con los grados de libertad asociados al triplete de spin.

Finalmente, se puede observar que el único grado de libertad del campo $B'_{\mu\nu}$ se transforma como un campo de spin-0 mediante la siguiente ecuación:

$$\mathsf{C}'_{12} = \mathsf{C}_{12} \tag{8.30}$$

Luegode analizar las helicidades del campo, y comprobar que la helicidad del único grado de libertad es nula, se puede afirmar que el campo $B'_{\mu\nu}$ se comporta como un campo de spin-0 no masivo.

Chapter 9

Conclusión

En este trabajo de fin de máster, se ha llevado a cabo un estudio exhaustivo de las teorías de campo bosónico. Se ha desarrollado una metodología efectiva para su análisis y construcción, mediante la exploración de los conceptos clave y el examen de los grados de libertad de los campos bosónicos. Como resultado, se ha obtenido una comprensión más profunda de estas teorías, lo que permitirá avances significativos en la comprensión de las interacciones fundamentales. Este trabajo cumplió con su objetivo de proporcionar un análisis y brindar habilidades esenciales en la construcción de teorías de campo bosónico.

9.1 Recapitulación de los objetivos y alcances de la tesis.

La tesis tiene como objetivo principal proporcionar una evaluación exhaustiva de las teorías de campo bosónico, con un énfasis en el desarrollo de habilidades esenciales para construir estas teorías. La estructura de la tesis está organizada en varios capítulos, cada uno de los cuales se centra en un aspecto específico del estudio.

El primer capítulo introduce tres conceptos clave para el análisis de las teorías en los capítulos posteriores: el teorema de Ostrogradsky, la clasificación de Wigner y el dual de Hodge. Los siguientes capítulos examinan el estudio de los campos de spin-1, spin-2 y Kalb-Ramond tanto con masa como sin masa. Por lo tanto, esta tesis aborda un total de seis modelos matemáticos de teorías de campos con spin.

La metodología para el análisis de teorías físicas se presenta en los siguientes capítulos, enfocándose en el estudio de los grados de libertad de los campos asociados con las teorías. La ecuación de movimiento se deriva y se examina el hamiltoniano de la teoría para garantizar que esté libre de inestabilidades de Ostrogradsky. Además, se analiza el comportamiento del spin de cada componente individual de los campos sin masa, confirmando que los campos exhiben el spin esperado y identificando cuáles son los componentes correspondientes a los grados de libertad del campo y los valores de spin asociados.

La tesis demuestra haber cumplido con sus objetivos y alcances previstos. Se realizó una evaluación exhaustiva de las teorías de campos bosónicos, y los resultados aportan un conocimiento valioso y significativo para tener un mejor entendimiento del marco teórico actual de los campos con spin, así como de una base para todos los posibles marco de investigación que actualmente hacen uso. En general, la tesis contribuye a ampliar nuestra comprensión, y nos permite cimentar las bases para un el futuro ámbito de la investigación.

9.2 Discusión de los resultados.

Los resultados obtenidos en la tesis demuestran la eficacia de la metodología propuesta para el análisis. En cada campo, se ha realizado un análisis de los grados de libertad, cumpliendo con la clasificación de Wigner. Se ha derivado la ecuación de movimiento y se ha estudiado con éxito el hamiltoniano de la teoría, verificando que está libre de inestabilidades de Ostrogradsky en todos los campos. Además, se ha analizado el comportamiento del spin de cada componente individual en los campos no masivos, confirmando el spin esperado y identificando los componentes que corresponden a los grados de libertad del campo y sus valores de helicidad.

En los resultados, se pueden comparar las discrepancias y similitudes entre los casos masivos y no masivos de una teoría, destacando el campo de Kalb-Ramond, en el que se ha analizado cómo la teoría presenta un salto de spin entre el caso masivo y el no masivo. Se ha estudiado la relación entre la estructura tensorial del campo y su spin y grados de libertad según la clasificación de Wigner.

La investigación sobre las restricciones de los grados de libertad aparentes del campo ha permitido observar diferencias entre los campos masivos y no masivos. Por ejemplo, el término de masa en el lagrangiano permite obtener las condiciones necesarias, pero rompe con la simetría *gauge* del sistema, mientras que en el caso no masivo, la simetría *gauge* está presente, pero no es suficiente para determinar todos los grados de libertad no físicos del sistema. Además, se ha observado en los tres campos no masivos cómo una buena elección del *gauge* permite no solo restringir los grados de libertad aparentes, sino también obtener una ecuación de movimiento de tipo onda relativista que garantice el comportamiento local y relativista requerido y cumplido en cada modelo.

En este trabajo, se investigó el lagrangiano más general para los campos de spin-1 y spin-2 masivos. Se comprobó que las familias de lagrangianos convergían a uno único para cada campo, después de cumplir la condición de ser libre de ”ghosts”. Por lo tanto, se puede afirmar que las acciones de Proca y Fierz-Pauli masivo son los únicos lagrangianos libres de fantasmas para cada uno de los campos correspondientes. Esto también se aplica a los campos de Maxwell y Fierz-Pauli no masivo, los cuales se basaron en los resultados obtenidos de sus contrapartes masivas.

Después de identificar los grados de libertad, se estudió el hamiltoniano de cada sistema y se verificó que todos tienen un límite inferior en su dominio, lo que indica que están libres de inestabilidades de Ostrogradsky y tienen un dominio positivo, clasificándose dentro de los dos grupos de la clasificación de Wigner.

Para los casos no masivos de cada uno de los capítulos, se obtuvo un resultado final, que consistió en el estudio de la helicidad de cada una de las componentes de cada campo. Este análisis nos permitió aprovechar los resultados previos obtenidos en cada capítulo, ofreciendo una síntesis y un buen uso de los resultados de cada modelo no masivo. Asimismo, se verificó efectivamente cómo el análisis de los grados de libertad coincide con los resultados obtenidos en la sección de helicidad de cada capítulo.

Por último, el capítulo de Kalb-Ramond masivo presentó un resultado adicional, y se demostró que este lagrangiano es dual a la acción de Proca. Esto aclaró cualquier duda sobre la naturaleza de su spin, y proporcionó un primer resultado sobre las dualidades entre teorías.

En conclusión, todos los resultados fueron los esperados en un primer momento. Esta capacidad de obtener resultados en diversos campos fortalece nuestra comprensión del marco de campos de spin, y nos brinda una base sólida de conocimiento para diferentes ámbitos de la física teórica, física de partículas y física de altas energías.

9.3 Posibles continuaciones y conclusión final.

Este trabajo contribuye con una amplia comprensión fundamental para futuros avances en el ámbito de la investigación. La teoría de campos bosónicos es un marco teórico diverso y extenso que abarca gran parte de la física fundamental actual. Esta teoría es una herramienta efectiva para describir comportamientos relativistas y locales, como las interacciones fundamentales.

Este trabajo permite establecer dos posibles direcciones de investigación. Por un lado, podemos continuar el estudio de los campos bosónicos, incluyendo la generalización y análisis de los campos de spin mayor a dos o con diferentes estructuras tensoriales. Por otro lado, podemos profundizar en alguno de los campos establecidos, dada la correlación establecida en el trabajo entre la física teórica y los distintos campos investigados, como el campo de spin-1 relacionado con las interacciones del modelo estándar, el campo de spin-2 con la gravedad y el campo de Kalb-Ramond con las teorías de cuerdas.

Este trabajo ha sido un camino de exploración y comprensión de las teorías bosónicas, una introducción satisfactoria a la teoría de campos de spin y un importante avance en el conocimiento del autor. Gracias a este trabajo de fin de máster, se ha podido aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera y el máster para avanzar en la trayectoria investigadora. Este trabajo nos ha permitido responder preguntas y tener una mejor comprensión de la física actual, y se presenta como una fuente de inspiración para futuras investigaciones más profundas y complejas. En resumen, este trabajo es un paso importante en el camino hacia un conocimiento más completo y profundo de la física.

References

[1] Georges Aad et al. “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”. In: *Phys. Lett. B* 716 (2012), pp. 1–29. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.08.020. arXiv: 1207.7214 [hep-ex].

[2] Georges Aad et al. “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”. In: *Phys. Lett. B* 716 (2012), pp. 1–29. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.08.020. arXiv: 1207.7214 [hep-ex].

[3] B. P. Abbott et al. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. In: *Phys. Rev. Lett.* 116.6 (2016), p. 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv: 1602.03837 [gr-qc].

[4] Andreas W. Aste and G. Scharf. “NonAbelian gauge theories as a consequence of perturbative quantum gauge invariance”. In: *Int. J. Mod. Phys. A* 14 (1999), pp. 3421–3434. DOI: 10.1142/S0217751X99001573. arXiv: hep-th/9803011.

[5] Andreas W. Aste, Gunter Scharf, and Michael Duetsch. “Perturbative gauge invariance: Electroweak theory. II”. In: *Annalen Phys.* 8 (1999), pp. 389–404. DOI: 10.1002/(SICI)1521-3889(199905)8:5<389::AID-ANDP389>3.0.CO;2-A. arXiv: hep-th/9702053.

[6] Edmund Bertschinger. “Gravitation in the Weak-Field Limit”. In: *Massachusetts Institute of Technology* (2000), p. 18.

[7] D. G. Boulware and Stanley Deser. “Can gravitation have a finite range?” In: *Phys. Rev. D* 6 (1972), pp. 3368–3382. DOI: 10.1103/PhysRevD.6.3368.

[8] Susana Cebrián. “Review on dark matter searches”. In: *10th Symposium on Large TPCs for Low-Energy Rare Event Detection.* May 2022. arXiv: 2205.06833 [physics.ins-det].

[9] H. van Dam and M. J. G. Veltman. “Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields”. In: *Nucl. Phys. B* 22 (1970), pp. 397–411. DOI: 10.1016/0550-3213(70)90416-5.

[10] Claudia de Rham. “Massive Gravity”. In: *Living Reviews in Relativity* 17.1, 7 (Dec. 2014), p. 7. DOI: 10.12942/lrr-2014-7. arXiv: 1401.4173 [hep-th].

[11] Luigi Di Lella and Carlo Rubbia. “The Discovery of the W and Z Particles”. In: *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* 23 (2015), pp. 137–163. DOI: 10.1142/9789814644150_0006.

[12] Alain Dirkes. “Gravitational waves — A review on the theoretical foundations of gravitational radiation”. In: *Int. J. Mod. Phys. A* 33.14n15 (2018), p. 1830013. DOI: 10.1142/S0217751X18300132. arXiv: 1802.05958 [gr-qc].

[13] Jonathan L. Feng. “Dark Matter Candidates from Particle Physics and Methods of Detection”. In: *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 48 (2010), pp. 495–545. DOI: 10.1146/annurev-astro-082708-101659. arXiv: 1003.0904 [astro-ph.CO].

[14] M. Fierz and W. Pauli. “On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field”. In: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 173 (1939), pp. 211–232. DOI: 10.1098/rspa.1939.0140.

[15] Suraj N Gupta. “Quantization of Einstein's Gravitational Field: Linear Approximation”. In: *Proceedings of the Physical Society. Section A* 65.3 (1952), pp. 161–169. DOI: 10.1088/0370-1298/65/3/301. URL: https://doi.org/10.1088/0370-1298/65/3/301.

[16] Lavinia Heisenberg and Georg Trenkler. “Generalization of the 2-form interactions”. In: *JCAP* 05 (2020), p. 019. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/05/019. arXiv: 1908.09328 [hep-th].

[17] Kurt Hinterbichler. “Theoretical Aspects of Massive Gravity”. In: *Rev. Mod. Phys.* 84 (2012), pp. 671–710. DOI: 10.1103/RevModPhys.84.671. arXiv: 1105.3735 [hep-th].

[18] Maud Jaccard, Michele Maggiore, and Ermis Mitsou. "Bardeen variables and hidden gauge symmetries in linearized massive gravity". In: *Phys. Rev. D* 87.4 (2013), p. 044017. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.044017. arXiv: 1211.1562 [hep-th].

[19] Bert Janssen. *Gravitación y Geometría*. 1st ed. Universidad de Granada, 2022.

[20] Michael Kalb and Pierre Ramond. "Classical direct interstring action". In: *Phys. Rev. D* 9 (1974), pp. 2273–2284. DOI: 10.1103/PhysRevD.9.2273.

[21] Sobhan Kazempour, Yuan-Chuan Zou, and Amin Rezaei Akbarieh. "Analysis of accretion disk around a black hole in dRGT massive gravity". In: *Eur. Phys. J. C* 82.3 (2022), p. 190. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10153-y. arXiv: 2203.05190 [gr-qc].

[22] M. Mousavi and K. Atazadeh. "Cosmological future singularities in massive gravity and massive bigravity". In: *Phys. Dark Univ.* 35 (2022), p. 100942. DOI: 10.1016/j.dark.2021.100942. arXiv: 2201.00633 [gr-qc].

[23] Tomás Ortín. *Gravity and Strings*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004. DOI: 10.1017/CBO9780511616563.

[24] M. Ostrogradsky. "Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres". In: *Mem. Acad. St. Petersbourg* 6.4 (1850), pp. 385–517.

[25] Dorin N. Poenaru. "Alexandru Proca (1897–1955) the Great Physicist". In: *arXiv e-prints*, physics/0508195 (Aug. 2005), physics/0508195. arXiv: physics/0508195 [physics.hist-ph].

[26] V. A. Rubakov. "Lorentz-violating graviton masses: Getting around ghosts, low strong coupling scale and VDVZ discontinuity". In: (July 2004). arXiv: hep-th/0407104.

[27] Henri Ruegg and Marti Ruiz-Altaba. "The Stueckelberg field". In: *Int. J. Mod. Phys. A* 19 (2004), pp. 3265–3348. DOI: 10.1142/S0217751X04019755. arXiv: hep-th/0304245.

[28] Kian Salimkhani. "The dynamical approach to spin-2 gravity". In: *Stud. Hist. Phil. Sci. B* 72 (2020), pp. 29–45. DOI: 10.1016/j.shpsb.2020.05.002.

[29] Angnis Schmidt-May and Mikael von Strauss. "Recent developments in bimetric theory". In: *J. Phys. A* 49.18 (2016), p. 183001. DOI: 10.1088/1751-8113/49/18/183001. arXiv: 1512.00021 [hep-th].

[30] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, Mar. 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0, 978-1-107-03473-0.

[31] J. C. Taylor. *Gauge Theories of Weak Interactions*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, Feb. 1979. ISBN: 978-0-521-29518-5.

[32] Shinji Tsujikawa. "Quintessence: A Review". In: *Class. Quant. Grav.* 30 (2013), p. 214003. DOI: 10.1088/0264-9381/30/21/214003. arXiv: 1304.1961 [gr-qc].

[33] P. Van Nieuwenhuizen. "On ghost-free tensor lagrangians and linearized gravitation". In: *Nucl. Phys. B* 60 (1973), pp. 478–492. DOI: 10.1016/0550-3213(73)90194-6.

[34] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984. DOI: 10.7208/chicago/9780226870373.001.0001.

[35] Mark Wellmann. "Gravity as the spin-2 quantum gauge theory". Other thesis. Mar. 2001. arXiv: hep-th/0103034.

[36] Eugene P. Wigner. "On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group". In: *Annals Math.* 40 (1939). Ed. by Y. S. Kim and W. W. Zachary, pp. 149–204. DOI: 10.2307/1968551.

[37] R. P. Woodard. "The Theorem of Ostrogradsky". In: *arXiv e-prints*, arXiv:1506.02210 (June 2015), arXiv:1506.02210. arXiv: 1506.02210 [hep-th].

[38] Li-Ping Yang, Farhad. Khosravi, and Zubin Jacob. "Quantum field theory for spin operator of the photon". In: *Phys. Rev. Res.* 4 (2022), p. 023165. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.4.023165. arXiv: 2004.03771 [quant-ph].

[39] V. I. Zakharov. "Linearized gravitation theory and the graviton mass". In: *JETP Lett.* 12 (1970), p. 312.