Tensor de Riemann-Christoffel

Juan José Fernández Morales

Los campos tensoriales son entidades algebráicas popularizadas por Tullio Levi-Civita con su publicación *Cálculo Diferencial Absoluto* y posteriormente por Albert Einstein en su teoría de la relatividad general. El póster consta de tres partes bien diferenciadas: en la primera se definen y clasifican los tensores, en la segunda se muestran ciertas propiedades que se usan en el cálculo tensorial y finalmente se define el Tensor de Riemman-Christoffel.

Tensor: escalar y vector

El tensor generaliza la idea de escalar o vector, independiente del sistema de coordenadas, con la capacidad de poder especificar cada una de las componentes del objeto. El tensor se puede clasificar por su orden, es decir, por el número de índices que necesita para determinar cada componente del tensor.

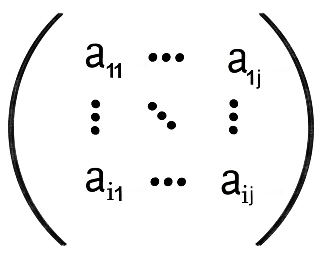

Figura 1: Forma común de expresar un tensor de orden 2 con ij elementos.

Un tensor de orden 0, comúnmente denominado escalar, no presenta ningún tipo de índice, un tensor de orden 1 se denomina vector y un tensor de orden 2 (Figura 1) se representa como una matriz cuadrada.

Ejemplo: Los libros de una estantería podrían formar un tensor de orden 2 (L_{ij}), de tal forma que el segundo libro de la tercera estantería sería la componente L_{32}.

Para el Tensor de Riemann-Christoffel, se trabajará con tensores en variedades pseudo-riemannianas. En estas variedades se puede conocer el número de elementos que presenta un tensor si se conocen las dimensiones del espacio y el orden del tensor.

En un espacio $\mathbb{R}^n$, un tensor de Riemann-Christoffel de orden m presenta n^m componentes.

Herramientas del cálculo tensorial

En este apartado se explican algunas herramientas que se usan para la introducción del Tensor de Riemann-Christoffel. En primer lugar, en el cálculo tensorial existe una distinción del uso del subíndice (e_j) y el superíndice (e^i) (también denominados covariante y contravariante respectivamente) ya que deben cumplir la siguiente relación:

$$e_j \cdot e^i = \delta^i_j \tag{1}$$

Donde δ^i_j es la delta de Kronecker

En segundo lugar, se define el tensor métrico como una función que establece la distancia entre elementos de un conjunto de vectores tangentes de una variedad diferenciable. En física se suele expresar como el cuadrado del arco entre dos elementos:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{2}$$

Ejemplo: de un elemento de arco en esféricas se puede obtener su tensor métrico:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta^2 d\phi^2 \rightarrow g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin\theta^2 \end{vmatrix}$$

Por último, la derivada covariante generaliza la derivada parcial. Se trata de una herramienta fundamental para el cálculo diferencial en variedades diferenciables. Se representa como ∇_i y se define como:

$$\nabla_i \vec{A} = \frac{\partial (A^j e_j)}{\partial x^i} = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} e_j + A^j \frac{\partial e_j}{\partial x^i} = (\partial_i A^j) e_j + A^j (\partial_i e_j) \tag{3}$$

La variación de un elemento de la base se define con los símbolos de Christoffel (Γ^k_{ij}), aunque estos símbolos también se pueden definir mediante la métrica:

$$\Gamma^k_{ij} = (\partial_i e_j) e^k; k = 1, \cdots, n \tag{4}$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} (\partial_j g_{mi} + \partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ji}) \tag{5}$$

Por lo que la derivada covariante también se puede expresar como:

$$\nabla_i \vec{A} = (\partial_i A^k + \Gamma^k_{ij} A^j) e_k \tag{6}$$

***Observación*: Si la base no varia con respecto a la coordenada i-ésima ($\Gamma^k_{ij} = 0$), entonces la derivada covariante se comporta igual que la derivada parcial convencional:**

$$\nabla_i \vec{A} = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} e_j$$

Tensor de Riemann-Christoffel

El Tensor de Riemann-Christoffel (R^i_{jkl}) es un tensor de orden 4, con 1 índice contravariante y 3 índices covariantes (de tipo $(1,3)$). Este objeto se emplea para obtener información de la curvatura de cualquier variedad riemanniana (o pseudoriemanniana) de un espacio n dimensional.

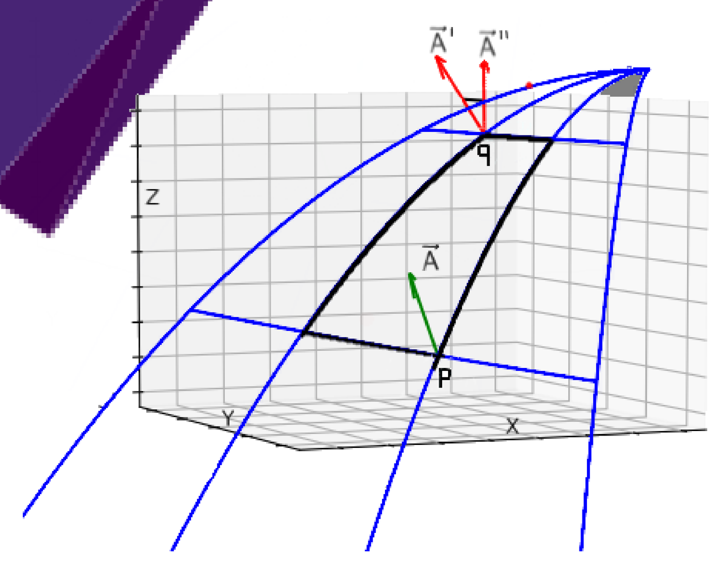

Figura 2: Transporte paralelo del vector $\vec{A}$ desde el punto p en una variedad (azul) a través de un trayectoria (negra)

Para mostrar como se comporta, que información da y como se obtiene se precede a realizar una pequeña demostración:

En una variedad diferenciable sin torsión de un espacio pseudoriemanniano n dimensional, se obtiene el tensor de Riemann-Christoffel como la diferencia de dos resultantes del transporte paralelo de un punto p a un punto q de un vector $\vec{A}$, por dos caminos distintos de una trayectoria cerrada que varía de forma bien definida por cada componente de la base de la variedad (Figura 2).

Si se expresa de forma matemática, en base a la notación de Einstein para la suma, se tendría que:

$$R^i_{jkl} A^j = \nabla_k \nabla_l A^i - \nabla_l \nabla_k A^i \tag{7}$$

Se estudia uno de los términos de la diferencia, ya que se trata de las mismas expresiones pero con las variables cambiadas. Si se usa la expresión obtenida en el apartado anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_l A^i = {} & \partial^2_{kl} A^i + (\partial_k \Gamma^i_{lj}) A^j + \Gamma^i_{lj} \partial_k A^j + \\ & + \Gamma^i_{kj} \partial_l A^j + \Gamma^i_{kj} \Gamma^j_{ln} A^n - \Gamma^j_{kl} \partial_j A^i - \Gamma^j_{kl} \Gamma^i_{jm} A^m \end{aligned} \tag{8}$$

Al sustituir en la diferencia, aplicar el Teorema de Schwarz ($\partial_i \partial_j A = \partial_j \partial_i A$) y suponer que los símbolos de Christoffel son simétricos ($\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$) queda la siguiente expresión:

$$R^i_{jkl} A^j = (\partial_k \Gamma^i_{lj} - \partial_l \Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{kn} \Gamma^n_{lj} - \Gamma^i_{ln} \Gamma^n_{kj}) A^j \tag{9}$$

Tensor de Ricci y curvatura escalar de Ricci

Como corolario se pueden obtener el Tensor de Ricci y la curvatura escalar de Ricci:

El tensor de Riemann-Christoffe se puede particularizar para variedades que se encuentren en un espacio de dimensión $n \leq 4$, al contraer un índice covariante y otro contravariante, en este caso al igualar el superíndice i con el subíndice k (con la suma que implica sobre el índice repetido). Esta particularización se denomina Tensor de Ricci.

$$R^k_{jkl} := R_{jl} \tag{10}$$

El Tensor de Ricci es un tensor de orden 2, tipo (0,2).

Como ejemplo, si se toma la expresión (9):

$$R^k_{jkl} = \partial_k \Gamma^k_{lj} - \partial_l \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kn} \Gamma^n_{lj} - \Gamma^k_{ln} \Gamma^n_{kj} \tag{11}$$

A su vez, en el Tensor de Ricci se pueden contraer los dos subíndices restantes. El parámetro que se obtiene permite definir la curvatura de una variedad de un espacio de dimensión $n \leq 2$. A este objeto se le denomina Escalar de Ricci.

$$R := g^{ij} R_{ij} \tag{12}$$

La curvatura escalar de Ricci es un tensor de orden 0, un escalar.

Una de las aplicaciones más populares de estos objetos es en la teoría de la Relatividad General de Einstein, por ejemplo, la ecuación del campo de Einstein se describe de la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Donde $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, R la curvatura escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ la métrica, λ la constante cosmológica, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, c la constante de la velocidad de la luz y G la constante gravitacional.

Referencias

[1] Bernan F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. (CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS), 2015.

[2] J. Lelong-Ferrand. *Géométrie Différentielle*. MASSON et Cie, 1963.

[3] David Lovelock and Hanno Rund. *Tensors, Differential Forms and Variational Principles* Dover, 1975.

[4] Javier Garcia (Canal de Youtube) 16 - Curso de Relatividad General [Tensor de Riemann], 2018.

[5] Dan Fleisch (Canal de Youtube). *What's a tensor?*, 2011.

[6] Ingeniero Electrónico (Canal de Youtube) 54 Cálculo Tensorial XIV. Tensor de Riemann, 2015.