

4.- El Método de Mínimos Cuadrados.

En este capítulo, estableceremos las ecuaciones que nos servirán para la compensación de poligonales cerradas utilizando el método de los mínimos cuadrados. En aras de la claridad, vamos a considerar una poligonal de cinco lados, aunque las fórmulas obtenidas al final serán aplicables a una poligonal cerrada de cualquier número de lados. Antes de iniciar con la deducción, estableceremos la notación que usaremos.

- Las estaciones serán numeradas en sentido anti-horario.
- Las longitudes de los lados se denotarán por la letra S , acompañada por un subíndice que indicará las estaciones que une.

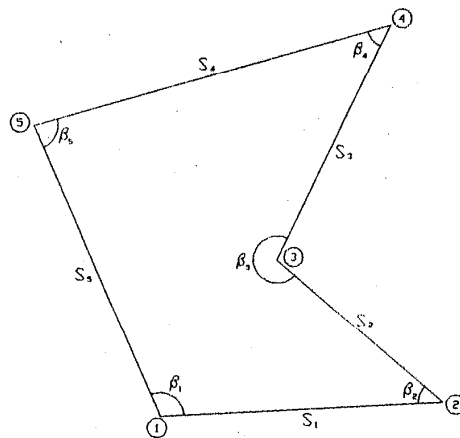
S_1 : une la Est.1 con la Est.2

S_2 : une la Est.2 con la Est.3 ...

- Los ángulos interiores observados se denotarán por la letra β , acompañada por un subíndice que indicará la estación a la que pertenece.

β_1 : áng. int. de la Est.1

β_2 : áng. int. de la Est.2 ...

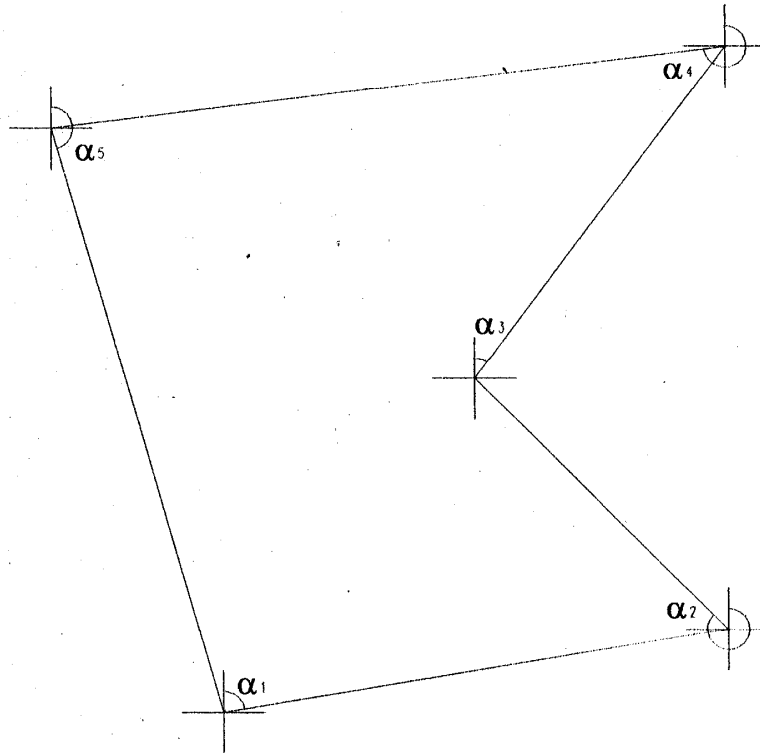


- Los acimutes calculados a partir de los ángulos β , se denotarán por la letra α , acompañada por un subíndice que indicará el lado al que pertenece.

α_1 : azimut de S_1

α_2 : azimut de S_2

...



- Las correcciones angulares se denotarán por la letra v , acompañada por un subíndice que indicará el ángulo al cual pertenece.

v_1 : corrección de β_1

v_2 : corrección de β_2

...

- Las correcciones lineales se denotarán por la letra λ , acompañada por un subíndice que indicará el lado al que pertenece.

λ_1 : corrección de S_1

λ_2 : corrección de S_2

...

- Una vez compensada la poligonal los acimutes se verán afectados, y denotaremos esa corrección con el símbolo $\Delta\alpha$, acompañado de un subíndice que indicará el azimut al que pertenece.

$\Delta\alpha_1$: corrección de α_1

$\Delta\alpha_2$: corrección de α_2

...

4.1.- Ecuaciones de Condición para una Poligonal Cerrada.

Una poligonal cerrada, debe de cumplir tres condiciones para que ésta sea geométrica y analíticamente perfecta. Estas condiciones están planteadas en las ecuaciones siguientes:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - \varepsilon_p = 0 \quad (\text{Ec. I})$$

$$(S_1 + \lambda_1) \cdot \text{Sen}(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) + (S_2 + \lambda_2) \cdot \text{Sen}(\alpha_2 + \Delta\alpha_2) + (S_3 + \lambda_3) \cdot \text{Sen}(\alpha_3 + \Delta\alpha_3) \\ + (S_4 + \lambda_4) \cdot \text{Sen}(\alpha_4 + \Delta\alpha_4) + (S_5 + \lambda_5) \cdot \text{Sen}(\alpha_5 + \Delta\alpha_5) = 0 \quad (\text{Ec. II})$$

$$(S_1 + \lambda_1) \cdot \text{Cos}(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) + (S_2 + \lambda_2) \cdot \text{Cos}(\alpha_2 + \Delta\alpha_2) + (S_3 + \lambda_3) \cdot \text{Cos}(\alpha_3 + \Delta\alpha_3) \\ + (S_4 + \lambda_4) \cdot \text{Cos}(\alpha_4 + \Delta\alpha_4) + (S_5 + \lambda_5) \cdot \text{Cos}(\alpha_5 + \Delta\alpha_5) = 0 \quad (\text{Ec. III})$$

La ecuación I, es la condición para las correcciones angulares. *La sumatoria de todas las correcciones angulares, menos el error de cierre angular, debe ser cero.*

La ecuación II, es la condición de cierre lineal sobre el eje X. Una vez modificadas las longitudes de la poligonal mediante las correcciones λ_i , y corregidos los acimutes, *la sumatoria de las proyecciones de los lados del polígono sobre el eje X, debe ser cero.*

La ecuación III, es la condición de cierre lineal sobre el eje Y. Una vez modificadas las longitudes de la poligonal mediante las correcciones λ_i , y corregidos los acimutes, *la sumatoria de las proyecciones de los lados del polígono sobre el eje Y, debe ser cero.*

Modificaremos las ecuaciones II y III para simplificarlas. Desarrollando los productos en la ecuación II de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& (S_1 + \lambda_1) \cdot \text{Sen}(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) \\
&= (S_1 + \lambda_1) \cdot (\text{Sen}\alpha_1 \cdot \text{Cos}\Delta\alpha_1 + \text{Sen}\Delta\alpha_1 \cdot \text{Cos}\alpha_1) \\
&= (S_1 \cdot \text{Sen}\alpha_1 \cdot \text{Cos}\Delta\alpha_1 + \lambda_1 \cdot \text{Sen}\alpha_1 \cdot \text{Cos}\Delta\alpha_1 + S_1 \cdot \text{Sen}\Delta\alpha_1 \cdot \text{Cos}\alpha_1 + \lambda_1 \cdot \text{Sen}\Delta\alpha_1 \cdot \text{Cos}\alpha_1) \\
&\text{donde: } \text{Cos}\Delta\alpha_1 \approx 1 \quad \text{Sen}\Delta\alpha_1 \approx \Delta\alpha_1 \quad \lambda_1 \cdot \text{Sen}\Delta\alpha_1 \approx 0 \\
&= \lambda_1 \cdot \text{Sen}\alpha_1 + S_1 \cdot \text{Cos}\alpha_1 \cdot \Delta\alpha_1 + S_1 \cdot \text{Sen}\alpha_1
\end{aligned}$$

y análogamente para los productos de la ecuación III, transformaremos las ecuaciones II y III:

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \cdot \text{Sen}\alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Sen}\alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Sen}\alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Sen}\alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Sen}\alpha_5 \\
& + S_1 \cdot \text{Cos}\alpha_1 \cdot \Delta\alpha_1 + S_2 \cdot \text{Cos}\alpha_2 \cdot \Delta\alpha_2 + S_3 \cdot \text{Cos}\alpha_3 \cdot \Delta\alpha_3 + S_4 \cdot \text{Cos}\alpha_4 \cdot \Delta\alpha_4 + S_5 \cdot \text{Cos}\alpha_5 \cdot \Delta\alpha_5 \\
& + [S \cdot \text{Sen}\alpha] = 0 \quad (\text{Ec. 1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \cdot \text{Cos}\alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Cos}\alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Cos}\alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Cos}\alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Cos}\alpha_5 \\
& - S_1 \cdot \text{Sen}\alpha_1 \cdot \Delta\alpha_1 - S_2 \cdot \text{Sen}\alpha_2 \cdot \Delta\alpha_2 - S_3 \cdot \text{Sen}\alpha_3 \cdot \Delta\alpha_3 - S_4 \cdot \text{Sen}\alpha_4 \cdot \Delta\alpha_4 - S_5 \cdot \text{Sen}\alpha_5 \cdot \Delta\alpha_5 \\
& + [S \cdot \text{Cos}\alpha] = 0 \quad (\text{Ec. 2})
\end{aligned}$$

donde los corchetes "[]", denotan sumatoria.

Si observamos que la corrección acimutal del primer lado es igual a la corrección angular del primer vértice, y que la corrección acimutal del segundo lado es la acumulación de la corrección angular del primer vértice con la del segundo, y así sucesivamente, tendremos las siguiente igualdades:

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha_1 &= v_1 \\
\Delta\alpha_2 &= v_1 + v_2 \\
\Delta\alpha_3 &= v_1 + v_2 + v_3 \\
\Delta\alpha_4 &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\
\Delta\alpha_5 &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5
\end{aligned}$$

que sustituyendo en las ecuaciones 1 y 2, obtendremos:

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \cdot \text{Sen } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Sen } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Sen } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Sen } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Sen } \alpha_5 \\
& + (S_1 \cdot \text{Cos } \alpha_1 + S_2 \cdot \text{Cos } \alpha_2 + S_3 \cdot \text{Cos } \alpha_3 + S_4 \cdot \text{Cos } \alpha_4 + S_5 \cdot \text{Cos } \alpha_5) \cdot v_1 \\
& + (S_2 \cdot \text{Cos } \alpha_2 + S_3 \cdot \text{Cos } \alpha_3 + S_4 \cdot \text{Cos } \alpha_4 + S_5 \cdot \text{Cos } \alpha_5) \cdot v_2 \\
& + (S_3 \cdot \text{Cos } \alpha_3 + S_4 \cdot \text{Cos } \alpha_4 + S_5 \cdot \text{Cos } \alpha_5) \cdot v_3 \\
& + (S_4 \cdot \text{Cos } \alpha_4 + S_5 \cdot \text{Cos } \alpha_5) \cdot v_4 \\
& + (S_5 \cdot \text{Cos } \alpha_5) \cdot v_5 \\
& + [S \cdot \text{Sen } \alpha] = 0 \quad (\text{Ec. 3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \cdot \text{Cos } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Cos } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Cos } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Cos } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Cos } \alpha_5 \\
& - (S_1 \cdot \text{Sen } \alpha_1 + S_2 \cdot \text{Sen } \alpha_2 + S_3 \cdot \text{Sen } \alpha_3 + S_4 \cdot \text{Sen } \alpha_4 + S_5 \cdot \text{Sen } \alpha_5) \cdot v_1 \\
& - (S_2 \cdot \text{Sen } \alpha_2 + S_3 \cdot \text{Sen } \alpha_3 + S_4 \cdot \text{Sen } \alpha_4 + S_5 \cdot \text{Sen } \alpha_5) \cdot v_2 \\
& - (S_3 \cdot \text{Sen } \alpha_3 + S_4 \cdot \text{Sen } \alpha_4 + S_5 \cdot \text{Sen } \alpha_5) \cdot v_3 \\
& - (S_4 \cdot \text{Sen } \alpha_4 + S_5 \cdot \text{Sen } \alpha_5) \cdot v_4 \\
& - (S_5 \cdot \text{Sen } \alpha_5) \cdot v_5 \\
& + [S \cdot \text{Cos } \alpha] = 0 \quad (\text{Ec. 4})
\end{aligned}$$

Si representamos las proyecciones de los lados mediante coordenadas, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n S_i \text{Sen } \alpha_i = X_{n+1} - X_1, \quad \sum_{i=2}^n S_i \text{Sen } \alpha_i = X_{n+1} - X_2, \quad \dots \\
& \text{y} \\
& \sum_{i=1}^n S_i \text{Cos } \alpha_i = Y_{n+1} - Y_1, \quad \sum_{i=2}^n S_i \text{Cos } \alpha_i = Y_{n+1} - Y_2, \quad \dots
\end{aligned}$$

introduciendo esas representaciones en las ecuaciones 3 y 4, obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \cdot \text{Sen } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Sen } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Sen } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Sen } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Sen } \alpha_5 \\
& + (Y_6 - Y_1) \cdot v_1 + (Y_6 - Y_2) \cdot v_2 + (Y_6 - Y_3) \cdot v_3 + (Y_6 - Y_4) \cdot v_4 + (Y_6 - Y_5) \cdot v_5 + [S \cdot \text{Sen } \alpha] = 0 \quad (\text{Ec. 5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \cdot \text{Cos } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Cos } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Cos } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Cos } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Cos } \alpha_5 \\
& - (X_6 - X_1) \cdot v_1 - (X_6 - X_2) \cdot v_2 - (X_6 - X_3) \cdot v_3 - (X_6 - X_4) \cdot v_4 - (X_6 - X_5) \cdot v_5 + [S \cdot \text{Cos } \alpha] = 0 \quad (\text{Ec. 6})
\end{aligned}$$

si definimos los errores de cierre lineal en cada uno de los ejes como:

$$e_x = [S \cdot \text{Sen } \alpha] \quad e_y = [S \cdot \text{Cos } \alpha]$$

y los sustituimos en las ecuaciones 5 y 6, para reescribir las tres ecuaciones de condición, tenemos:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - e_\beta = 0 \quad (\text{Ec. 7})$$

$$\lambda_1 \cdot \text{Sen } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Sen } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Sen } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Sen } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Sen } \alpha_5 + (Y_6 - Y_1) \cdot v_1 + (Y_6 - Y_2) \cdot v_2 + (Y_6 - Y_3) \cdot v_3 + (Y_6 - Y_4) \cdot v_4 + (Y_6 - Y_5) \cdot v_5 + e_x = 0 \quad (\text{Ec. 8})$$

$$\lambda_1 \cdot \text{Cos } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Cos } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Cos } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Cos } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Cos } \alpha_5 - (X_6 - X_1) \cdot v_1 - (X_6 - X_2) \cdot v_2 - (X_6 - X_3) \cdot v_3 - (X_6 - X_4) \cdot v_4 - (X_6 - X_5) \cdot v_5 + e_y = 0 \quad (\text{Ec. 9})$$

Aplicando la compensación por grupos, tomaremos como primer grupo a la ecuación 7 y distribuiremos, inicialmente, el error de cierre angular e_β por partes iguales entre todos los ángulos del polígono.

Con estas correcciones v , calculamos las ecuaciones 8 y 9, de tal modo que obtendremos:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 0 \quad (\text{Ec. 10})$$

$$\lambda_1 \cdot \text{Sen } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Sen } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Sen } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Sen } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Sen } \alpha_5 + (Y_6 - Y_1) \cdot v_1 + (Y_6 - Y_2) \cdot v_2 + (Y_6 - Y_3) \cdot v_3 + (Y_6 - Y_4) \cdot v_4 + (Y_6 - Y_5) \cdot v_5 + e_x = 0 \quad (\text{Ec. 11})$$

$$\lambda_1 \cdot \text{Cos } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Cos } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Cos } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Cos } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Cos } \alpha_5 - (X_6 - X_1) \cdot v_1 - (X_6 - X_2) \cdot v_2 - (X_6 - X_3) \cdot v_3 - (X_6 - X_4) \cdot v_4 - (X_6 - X_5) \cdot v_5 + e_y = 0 \quad (\text{Ec. 12})$$

Donde las v , representan una segunda corrección que se les aplicará a los ángulos y que junto con las anteriores, serán las correcciones angulares definitivas.

Definiendo las coordenadas del centroide del polígono, como los promedios de las coordenadas de cada uno de los vértices, para cambiar el sistema de referencia al centroide del polígono:

$$Y_0 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5}{5} \quad \text{y} \quad X_0 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$$

Ahora, multiplicaremos la ecuación 10, inicialmente por:

$$+(Y_0 - Y_6) \quad \text{y despues} \quad -(X_0 - X_6)$$

para obtener:

$$\begin{cases} + (Y_0 - Y_6)v_1 + (Y_0 - Y_6)v_2 + (Y_0 - Y_6)v_3 + (Y_0 - Y_6)v_4 + (Y_0 - Y_6)v_5 = 0 \\ -(X_0 - X_6)v_1 - (X_0 - X_6)v_2 - (X_0 - X_6)v_3 - (X_0 - X_6)v_4 - (X_0 - X_6)v_5 = 0 \end{cases} \quad (\text{Ecs. 13})$$

Sumamos estas ecuaciones a las ecuaciones 11 y 12, las cuales quedan referenciadas al centroide del polígono:

$$\lambda_1 \cdot \text{Sen } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Sen } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Sen } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Sen } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Sen } \alpha_5 + (Y_0 - Y_1) \cdot v_1 + (Y_0 - Y_2) \cdot v_2 + (Y_0 - Y_3) \cdot v_3 + (Y_0 - Y_4) \cdot v_4 + (Y_0 - Y_5) \cdot v_5 + e_x = 0 \quad (\text{Ec. 14})$$

$$\lambda_1 \cdot \text{Cos } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Cos } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Cos } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Cos } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Cos } \alpha_5 - (X_0 - X_1) \cdot v_1 - (X_0 - X_2) \cdot v_2 - (X_0 - X_3) \cdot v_3 - (X_0 - X_4) \cdot v_4 - (X_0 - X_5) \cdot v_5 + e_y = 0 \quad (\text{Ec. 15})$$

Si expresamos las coordenadas de los vértices con respecto a las coordenadas del centroide, obtendremos que:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= Y_1 - Y_0 & \eta_2 &= Y_2 - Y_0 & \dots & \eta_n &= Y_n - Y_0 \\ \epsilon_1 &= X_1 - X_0 & \epsilon_2 &= X_2 - X_0 & \dots & \epsilon_n &= X_n - X_0 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 14 y 15, respectivamente, y además utilizamos el factor de conversión de grados sexagesimales a radianes:

$$\frac{1}{\rho} \quad \text{donde} \quad \rho = \frac{180^\circ}{\pi}$$

tendremos las tres ecuaciones de condición expresadas de la siguiente forma:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 0 \quad (\text{Ec. 16})$$

$$\lambda_1 \cdot \text{Sen } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Sen } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Sen } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Sen } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Sen } \alpha_5 - \frac{\eta_1}{\rho} \cdot v_1 - \frac{\eta_2}{\rho} \cdot v_2 - \frac{\eta_3}{\rho} \cdot v_3 - \frac{\eta_4}{\rho} \cdot v_4 - \frac{\eta_5}{\rho} \cdot v_5 + e_x = 0 \quad (\text{Ec. 17})$$

$$\lambda_1 \cdot \text{Cos } \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \text{Cos } \alpha_2 + \lambda_3 \cdot \text{Cos } \alpha_3 + \lambda_4 \cdot \text{Cos } \alpha_4 + \lambda_5 \cdot \text{Cos } \alpha_5 + \frac{\epsilon_1}{\rho} \cdot v_1 + \frac{\epsilon_2}{\rho} \cdot v_2 + \frac{\epsilon_3}{\rho} \cdot v_3 + \frac{\epsilon_4}{\rho} \cdot v_4 + \frac{\epsilon_5}{\rho} \cdot v_5 + e_y = 0 \quad (\text{Ec. 18})$$

Estas ecuaciones son las que utilizaremos para calcular las correcciones angulares y lineales por el método de los mínimos cuadrados.

4.2.- Solución de las Ecuaciones de Condición con el Método de los Mínimos Cuadrados.

La teoría de los mínimos cuadrados, dice que para solucionar un sistema de ecuaciones de la forma:

$$A \cdot K = b$$

se tiene que transformar este sistema, a las ecuaciones normales del problema de los mínimos cuadrados, lo cual se logra haciendo:

$$(A^T \cdot A) \cdot K = A^T \cdot b$$

y si además se desea añadir pesos relativos a las mediciones, las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$P \cdot A \cdot K = b$$

$$(A^T \cdot P \cdot A) \cdot K = A^T \cdot b$$

Para nuestro caso en particular, tenemos que estas matrices son las siguientes:

$$A_{10 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & \text{Sen}\alpha_1 & \text{Cos}\alpha_1 \\ 0 & \text{Sen}\alpha_2 & \text{Cos}\alpha_2 \\ 0 & \text{Sen}\alpha_3 & \text{Cos}\alpha_3 \\ 0 & \text{Sen}\alpha_4 & \text{Cos}\alpha_4 \\ 0 & \text{Sen}\alpha_5 & \text{Cos}\alpha_5 \\ 1 & \frac{-\eta_1}{\rho} & \frac{\epsilon_1}{\rho} \\ 1 & \frac{-\eta_2}{\rho} & \frac{\epsilon_2}{\rho} \\ 1 & \frac{-\eta_3}{\rho} & \frac{\epsilon_3}{\rho} \\ 1 & \frac{-\eta_4}{\rho} & \frac{\epsilon_4}{\rho} \\ 1 & \frac{-\eta_5}{\rho} & \frac{\epsilon_5}{\rho} \end{bmatrix} K_{3 \times 1} \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = b_{10 \times 1} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$