



**UNIVERSIDAD  
DE GRANADA**

---

Facultad de Ciencias

GRADO EN FISICA

TRABAJO FIN DE GRADO

**IMPLEMENTACIÓN DE  
MÉTODOS  
EN DIFERENCIAS FINITAS  
EN GPU<sub>s</sub>**

Presentado por:

**D. JUAN JOSÉ SALAZAR LÓPEZ**

Curso Académico 2021/2022

## **Resumen**

En el siguiente TFG se procede a presentar las ventajas de aplicar el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) en GPU, a diferencia del modo de aplicación usual el cual se lleva a cabo usando la potencia de cálculo de las CPUs. La principal diferencia radica en el poder de paralelización de las GPUs, el cual nos proporciona al implementar el método en  $\mathbb{R}^2$  una disminución en el tiempo de cálculo de las ecuaciones de Maxwell de aproximadamente un orden de magnitud.

## **Abstract**

In the following TFG it is shown the advantages of implementing the finite difference time domain method (FDTD) in GPU, instead of using the calculus power of CPUs. The principal difference is the parallelization power of the GPUs which allows us to decrease the calculus time to solve the Maxwell equations in about one order of magnitude when we implement the method in  $\mathbb{R}^2$ .

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Metodología</b>	<b>4</b>
2.1	El método de diferencias finitas en el dominio del tiempo . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Metodología</b>	<b>4</b>
3.1	El método de diferencias finitas en el dominio del tiempo . . . . .	4
3.2	GPU . . . . .	8
3.3	GPU . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Algoritmo</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Implementación</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>14</b>
6.1	Dependencia del tiempo de cálculo con el número de pasos temporales . .	15
6.2	Variación del tiempo de cálculo al variar la densidad de puntos . . . . .	15
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>16</b>
	<b>Referencias</b>	<b>17</b>

## 1 Introducción

El método numérico de las diferencias finitas es usado en muchos campos para la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden [3]. En particular, el método de la diferencia central finita cobra especial importancia en la electrodinámica computacional donde se emplea para resolver las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo, discretizando tiempo y espacio para poder implementar la solución en un algoritmo. Actualmente su uso está muy extendido ya que posibilita el estudio de la propagación de señales electromagnéticas por diversos medios. En particular puede usarse para determinar la radiación que actúa sobre una cabeza humana producida por un teléfono móvil o la propagación de una señal en el uso de radares marítimos entre otras aplicaciones.

Desde que se desarrolló el método y se generaron los primeros algoritmos se ha hecho uso del poder de cómputo que nos proporcionan las CPUs, el cual ha ido creciendo con el paso de los años. No obstante, al aumentar el tamaño del modelo también aumenta el tiempo necesario para obtener la solución dado que se debe calcular punto a punto los valores de los campos al aplicar el método. Este problema puede solventarse haciendo uso del poder de paralelización que nos ofrecen las tarjetas gráficas (GPUs), pudiendo hacer simultáneamente, hasta cierto límite, todas las operaciones necesarias en cada coordenada de la dimensión espacial. Proceso que se consigue implementando los algoritmos FDTD en el lenguaje CUDA, con el cual podemos determinar un conjunto de hilos para realizar los cálculos simultáneamente.

<https://github.com/juanjo1213/TFG-FDTD>

## 2 Metodología

### 2.1 El método de diferencias finitas en el dominio del tiempo

El método numérico de las diferencias finitas se emplea en la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden, en particular, el método de la diferencia central finita se basa en aproximar de forma sencilla la derivada de una función en un punto como la diferencia de dicha función evaluada en dos puntos equidistantes al mismo. Haciendo uso del desarrollo en serie de Taylor y aproximando a segundo orden obtenemos:

$$f(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) \quad (2.1)$$

$$f(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) \quad (2.2)$$

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (2.3)$$

Donde hemos despejado el valor de la derivada de la función en un punto mediante su desarrollo en serie en  $(x+h)$  y  $(x-h)$ .

Recordando la expresión de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, haciendo uso del vector campo  $D$ .

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \nabla \times H \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times E \quad (2.5)$$

$$D(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r^*(\omega) E(\omega) \quad (2.6)$$

Podemos observar que están expresadas en el dominio de la frecuencia para poder aplicarlas a medios cuya constante dieléctrica dependa de la misma. Resaltar que  $\varepsilon_0$  y  $\varepsilon_r$  corresponden con las constantes dieléctricas del vacío y del medio respectivamente, y  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío.

Para simplificar el formalismo es conveniente normalizar las ecuaciones haciendo uso de las constantes dieléctrica y permeabilidad magnética del vacío.

$$\tilde{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E \quad (2.7)$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} D \quad (2.8)$$

De este modo podemos expresar las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético como:

$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \nabla \times H \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \nabla \times E \quad (2.10)$$

$$\tilde{D}(\omega) = \varepsilon_r^*(\omega) \tilde{E}(\omega) \quad (2.11)$$

En  $\mathbb{R}^3$  tenemos 3 componentes para el campo eléctrico y 3 para el magnético  $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z, H_x, H_y, H_z$ , por lo que, si queremos aplicar un modelo en dos dimensiones debemos elegir uno de los dos grupos de tres vectores, (i) el transversal magnético, formado por  $\tilde{E}_z, H_x, H_y$ , o (ii) el transversal eléctrico, compuesto por los vectores  $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y$  y  $H_z$ .

Usaremos el modo transversal magnético y utilizaremos directamente las letras E y D sin tildar para nombrar a las componentes normalizadas de los campos:

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (2.12)$$

$$D(\omega) = \varepsilon_r^*(\omega) E(\omega) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Estas son las ecuaciones de una onda plana moviéndose en la dirección  $x$  e  $y$  con el campo eléctrico orientado en la dirección  $z$  y el magnético en las direcciones  $x$  e  $y$ . Las componentes a calcular son ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo que, aplicando el método de la diferencia central finita componente a componente obtenemos.

$$\frac{D_z^{n+1/2}(i,j) - D_z^{n-1/2}(i,j)}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left[ \frac{H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \right] - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left[ \frac{H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^n(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \quad (2.15)$$

$$\frac{H_x^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^n(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left[ \frac{E_z^{n+1/2}(i, j + 1) - E_z^{n+1/2}(i, j)}{\Delta x} \right] \quad (2.16)$$

$$\frac{H_y^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^n(i + \frac{1}{2}, j)}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left[ \frac{E_z^{n+1/2}(i + 1, j) - E_z^{n+1/2}(i, j)}{\Delta x} \right] \quad (2.17)$$

En estas ecuaciones el tiempo se especifica con el superíndice, donde  $n$  es el paso temporal, de modo que  $t = \Delta t \cdot n$ . En los paréntesis utilizamos los valores de  $i, j$  para determinar la posición, sin olvidar que el campo eléctrico y el magnético están intercalados en tiempo y espacio, lo cual se especifica con la suma y resta de valores  $\frac{1}{2}$  en los superíndices y paréntesis. En la figura 1 se muestra el intercalado de los campos en el espacio.

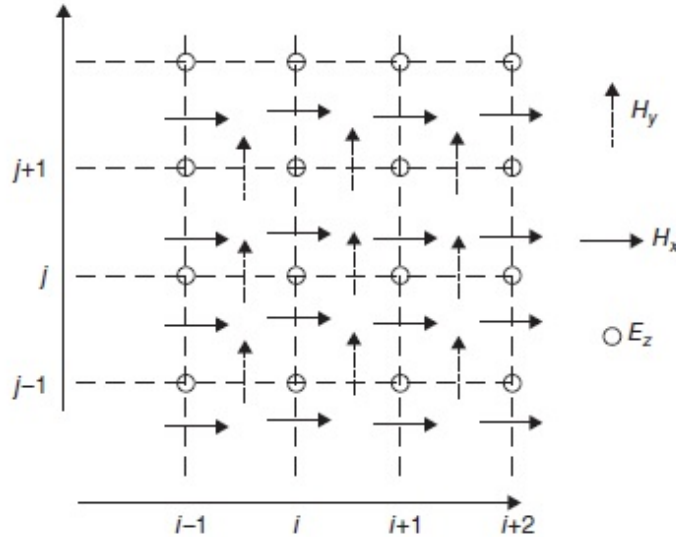


Figura 1: Campos  $E_z$ ,  $H_x$  y  $H_y$  intercalados [1].

Utilizaremos  $\Delta x = \Delta y$ , por lo que al haber elegido el tamaño de celda ( $\Delta x \cdot \Delta y$ ), podemos calcular el salto temporal como:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \cdot c_0} \quad (2.18)$$

Donde  $c_0$  es la velocidad de la luz en el vacío. Recordando que  $\varepsilon_0\mu_0 = 1/(c_0)^2$  y teniendo en cuenta la normalización utilizada:

$$\frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\Delta x} = \frac{\Delta x}{2 \cdot c_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\Delta x} = \frac{1}{2} \quad (2.19)$$

Lo que nos permite, junto a las expresiones discretizadas en tiempo y espacio de las ecuaciones de Maxwell y la normalización empleada, generar un algoritmo de forma sencilla para calcular los campos:

$$\begin{aligned} dz[i, j] &= dz[i, j] + 0.5 * (hy[i, j] - hy[i - 1, j] - hx[i, j] + hx[i, j - 1]) \\ ez[i, j] &= gaz[i, j] * dz[i, j] \\ hx[i, j] &= hx[i, j] + 0.5 * (ez[i, j] - ez[i, j + 1]) \\ hy[i, j] &= hy[i, j] + 0.5 * (ez[i + 1, j] - ez[i, j]) \end{aligned} \quad (2.20)$$

El valor  $gaz[i, j]$  depende de las características del medio, por lo que si suponemos vacío su valor es 1. De este modo las ecuaciones (3.20) corresponden a los vectores necesarios para determinar los campos en  $\mathbb{R}^2$ , donde solo es necesario conocer el valor de la fuente que genera la radiación, ya sea cualquier tipo de fuente, sinusoidal o un pulso entre otros.

En general, para conocer el valor del campo en todo el espacio es necesario calcular su componente punto a punto pero utilizando la paralelización de la GPU podemos calcularlos todos los valores de los vectores a la vez.

## 2.2 GPU

A lo largo de los años, debido a la necesidad de procesar gráficos de alta definición al instante, las tarjetas gráficas se han convertido en sistemas multinúcleo con la capacidad de multiproceso paralelizado. Las unidades de procesamiento de gráficos (GPUs) proporcionan más rendimiento y ancho de banda de memoria que las CPUs al mismo precio. Muchas aplicaciones aprovechan esta ventaja para ejecutarse más rápido en GPU que en CPU. La diferencia de potencia de las GPUs y las CPUs se basa en el propósito para el que fueron diseñadas las mismas. Las CPUs se crearon para que, con los pocos núcleos con que se construyen, ejecuten cálculos de forma secuencial en el menor tiempo posible. No obstante, las GPUs se crearon con miles de núcleos para que trabajen todos a la vez, realizando todos los cálculos paralelamente en vez de usar una metodología secuencial.

En la figura 3.3 se muestra la diferencia de estructura entre CPU y GPU, variando la cantidad de núcleos de la misma según el modelo de dispositivos utilizados. En general, dada la necesidad de ejecutar procesos tanto secuenciales como paralelos los sistemas están diseñados para poder mezclar los atributos de las CPUs y las GPUs maximizando así el rendimiento de los algoritmos [4].

Para generar soluciones que utilicen la paralelización de las tarjetas gráficas Nvidia ha desarrollado CUDA, un lenguaje de programación basado en C, el cual comparte sintaxis en muchos aspectos con este último lenguaje. En CUDA distinguimos dos tipos de procesos, los llevados a cabo en la CPU o 'host' y los ejecutados desde la GPU o

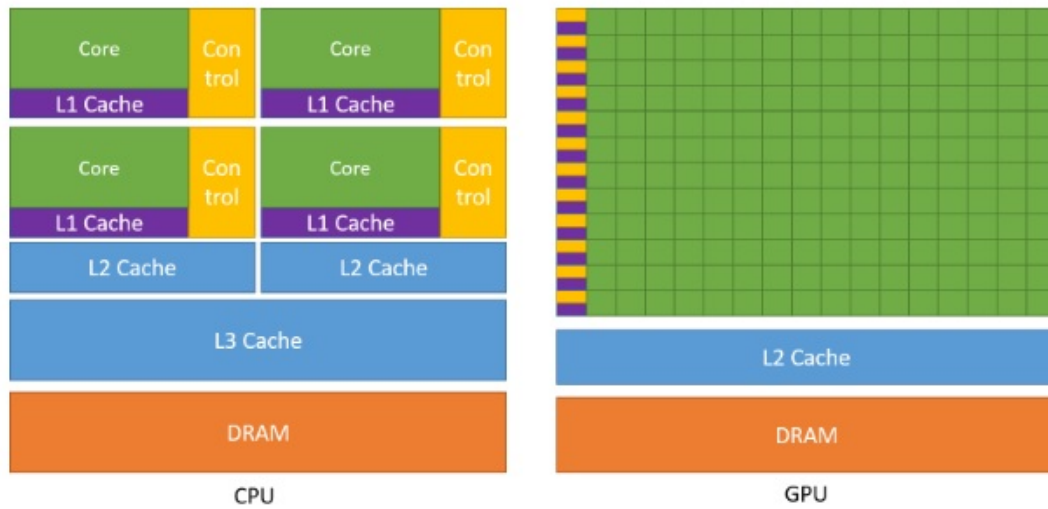


Figura 2: Diferencia de arquitectura entre CPU (izquierda) y GPU (derecha) [4].

'device', teniendo acceso ambos dispositivos a dos tipos de memoria, global y constante. En la figura 3.3 se muestra la estructura del device y cómo ambos comparten memoria. Para identificar el lugar de ejecución de cada función CUDA ha nombrado como `__host__` a las aplicaciones ejecutadas en CPU y `__global__` a las ejecutadas en GPU.

Cada tarjeta gráfica tiene un número determinado de threads o hilos, los cuales pueden realizar un cálculo concreto simultáneamente cuando son llamados por una función global (desde el device). Para realizar esta llamada CUDA divide los núcleos en bloques y mallas como se puede ver en la figura 4, donde se muestra una malla de dos bloques y dos hilos en cada bloque, siendo 4 los hilos totales. Destacar que en general el número de hilos tiene que coincidir necesariamente con el número de núcleos ya que, como ocurre en las CPUs, puede haber varios hilos en un mismo núcleo. Esto significa que dentro de un mismo núcleo pueden realizarse tantos cálculos simultáneos como hilos tenga dicho procesador, no obstante la diferencia de hilos entre un procesador y una gráfica es de varios órdenes de magnitud, pudiendo ser 6 en una CPU y miles en una GPU.

Al implementar una solución, desde el host se selecciona el número de hilos a utilizar teniendo en cuenta las limitaciones de hilos por bloques y bloques por mallas de la tarjeta gráfica que se esté utilizando y desde la función global (en el device) se determinan las operaciones a realizar por cada hilo. Es decir, antes de ejecutar la función `__global__` se debe conocer el número de hilos y bloques a utilizar por la GPU, pudiendo lanzar un número determinado de estos en las tres dimensiones del espacio (x,y,z).

Dadas las variables a utilizar, hilos, bloques y mallas, es necesario identificar el hilo que se quiere utilizar para ejecutar el cálculo. Conceptualmente podemos ver una malla como una matriz, dividida por bloques e hilos dentro de estos bloques como se muestra en la figura ???. En ella podemos ver una malla compuesta por 60 hilos, dividida por 4 bloques, dos en la dimensión x denotada por `'gridDim.x'`, dos en la dimensión y denotada por `'gridDim.y'`, estando cada bloque compuesto de 15 hilos.

No obstante, la división que hace CUDA de los hilos es lineal como se muestra en la figura ???. En ella podemos ver separados por franjas claras y oscuras el paso de un



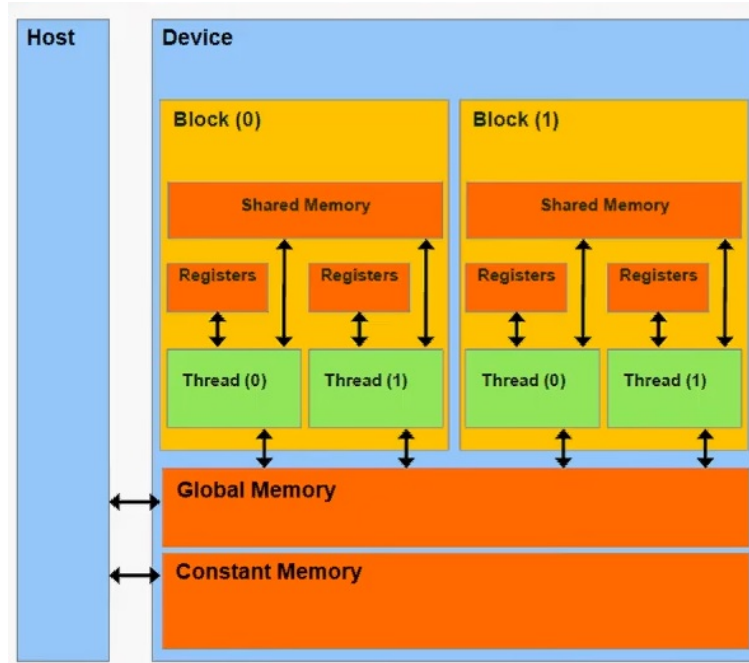


Figura 3: Estructura del Host ([4]).

bloque a otro. De modo que, para poder identificar un hilo podemos concebir la malla como una matriz donde las filas determinan el bloque y las columnas los hilos. Así, se distingue unívocamente cada hilo multiplicando las columnas totales por el número del bloque donde está el hilo y sumándole la posición que ocupa en el.

En nuestro caso, debido a las necesidades del problema necesitamos identificar los hilos de una malla lanzada con hilos y bloques en dos dimensiones. Por lo que necesitamos identificar qué son las filas y las columnas en nuestra función `__global__`. Esta identificación la conseguimos usando las palabras reservadas que nos proporciona CUDA:

```
int fil = blockIdx.y * blockDim.y + threadIdx.y;
int col = blockIdx.x * blockDim.x + threadIdx.x;
```

Es necesario resaltar la necesidad de seleccionar la cantidad de hilos y bloques acorde a la capacidad de la gráfica y las necesidades del problema. En específico, para la resolución de las ecuaciones de Maxwell en dos dimensiones para un mallado de un millón de puntos, dividido en 1000 posiciones en la dimensión  $x$  y 1000 posiciones en la dimensión  $y$ , con la gráfica utilizada en este TFG (la cual permite 1024 hilos por bloque), es necesario utilizar un mínimo de 977 bloques de 1024 hilos cada uno.

Finalmente, para medir el tiempo de cálculo en el device CUDA nos proporciona la función `'cudaEvent'`, con la cual se establecen dos marcas de tiempo en el algoritmo y se calcula el tiempo como la resta de estas mismas, siendo la diferencia el tiempo transcurrido en el device al realizar las operaciones. Para calcular el tiempo en el host se ha utilizado la función `'clock_t'` y de la misma forma se han creado dos marcas temporales y se ha calculado la diferencia. En ambos casos se han dividido los resultados entre las cuentas por segundo dentro del procesador y la tarjeta gráfica para obtener el tiempo en segundos.

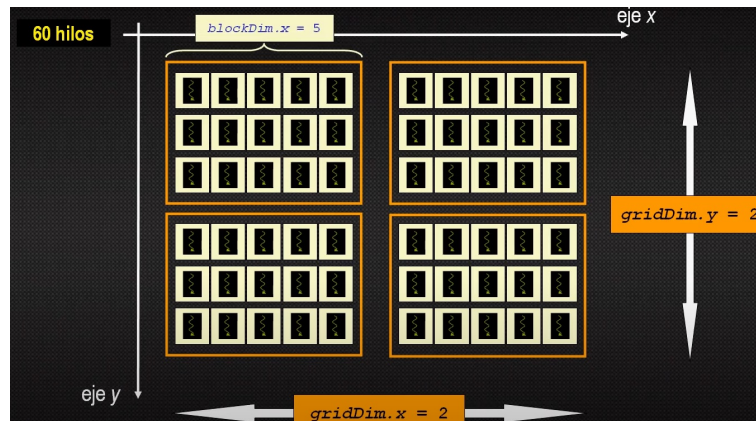


Figura 4: Topología dentro de hilos, bloques y mallas (Documentación de Nvidia [3])

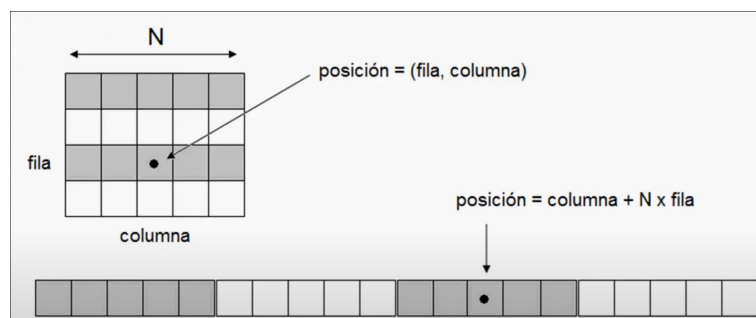


Figura 5: Identificación de hilo dentro de una malla.

### 3 Implementación

<https://github.com/juanjo1213/TFG-FDTD>

En el mismo están los algoritmos utilizados para la solución en 2D implementada tanto en la cpu y en la gpu. La implementación de la solución en el device está nombrada como 'fd2d\_simp.cu' y la ejecutada en el host como 'HOST\_FD2D\_SIMP.cu'.

```
__host__ void check_CUDA_Error(const char* mensaje)
{
    cudaError_t error;
    cudaDeviceSynchronize();
    error = cudaGetLastError();
    if (error != cudaSuccess)
    {
        printf("ERROR %d: %s (%s)\n", error, cudaGetErrorString(error), mensaje);
        printf("\npulsa INTRO para finalizar...");
        fflush(stdin);
        char tecla = getchar();
    }
    exit(-1);
}
```

Para la ejecución de los algoritmos se ha utilizado un procesador i7-6700K procesador

de 4 núcleos y 8 hilos con una frecuencia máxima de 4.2 GHz por núcleo y una tarjeta gráfica GTX 1070 con 8GB de memoria RAM y un total de 1920 núcleos CUDA.

A continuación se muestra la función `_host_` generada para el cálculo de las ecuaciones 3.20, esta es llamada desde el host y recibe como parámetro un 'struct' que contiene los vectores campo a calcular. En ella se ejecutan varios bucles para el cálculo secuencial de los campos punto a punto y para mayor similitud, se han almacenado las matrices como vectores de dimensión  $dimx \cdot dimy$  y se ha determinado cada componente a calcular como se expuso en la sección 3.3.

```
void FD2D(FDTDDData* field, int xdim, int ydim, int nsteps)
{
    int ic = int(xdim / 2),
        jc = int(ydim / 2);

    //Medium conditions
    double* gaz;

    gaz = (double*)malloc(xdim * ydim * sizeof(double));

    for (int j = 0; j < ydim; j++) {
        for (int i = 0; i < xdim; i++) {
            gaz[j * xdim + i] = 1.0;
        }
    }

    double ddx = 0.01,          //cell size
           dt = ddx / 6e8,      //Time step size
           epsz = 8.854e-12;    //Dielectric profile

    //Pulse parameters
    double t0 = 20.0,
           spread = 6.0;

    //Main loop
    for (int time_step = 1; time_step < nsteps + 1; time_step++)
    {
        //Calculate Dz
        for (int j = 1; j < ydim; j++) {
            for (int i = 1; i < xdim; i++) {
                field[j*xdim+i].dz = field[j * xdim + i].dz +
                                     0.5*(field[j*xdim+i].hy - field[j * xdim + i-1].hy -
                                     field[j*xdim+i].hx + field[(j-1) * xdim + i].hx);
            }
        }
    }
}
```

```

//Gaussian pulse in the middle
double pulse = exp(-0.5 *
    ((t0 - time_step) / spread) * ((t0 - time_step) / spread));
field[jc * xdim + ic].dz = pulse;

//Calculate the Ez field from Dz
for (int j = 1; j < ydim; j++) {
    for (int i = 1; i < xdim; i++) {
        field[j * xdim + i].ez = gaz[j * xdim + i] * field[j * xdim + i].dz;
    }
}

//Calculate the Hx field
for (int j = 0; j < ydim-1; j++) {
    for (int i = 0; i < xdim-1; i++) {
        field[j * xdim + i].hx = field[j * xdim + i].hx +
            0.5 * (field[j * xdim + i].ez - field[(j + 1) * xdim + i].ez);
    }
}

//Calculate the Hy field
//Calculate the Hx field
for (int j = 0; j < ydim - 1; j++) {
    for (int i = 0; i < xdim - 1; i++) {
        field[j * xdim + i].hy = field[j * xdim + i].hy +
            0.5 * (field[j * xdim + i + 1].ez - field[j * xdim + i].ez);
    }
}

}

}

```

En el siguiente algoritmo se muestra la función `__global__` generada para realizar los cálculos de forma paralela. En ella podemos ver como se determinan las filas y las columnas utilizadas para determinar los hilos a utilizar como se explicó en la sección 3.3. La función, al igual que la función anterior, recibe como parámetro un struct que contiene los vectores a calcular, las dimensiones  $x$  e  $y$  del problema y el paso temporal que se está ejecutando. Al existir la posibilidad de reservar más bloques e hilos de los necesarios para realizar los cálculos, se usa el condicional 'if' para especificar el número de hilos a utilizar.

```

__global__ void FD2D(FDTDData* field, int xdim, int ydim, int ts)
{

```

```

int fil = blockIdx.y * blockDim.y + threadIdx.y;
int col = blockIdx.x * blockDim.x + threadIdx.x;

int ic = int(xdim / 2),
    jc = int(ydim / 2);

double ddx = 0.01,
    dt = ddx / 6e8,
    epsz = 8.854e-12;

//pulse parameters
double t0 = 20.0,
    spread = 6.0;

//Calculate Dz
if (0 < fil && fil < ydim && 0 < col && col < xdim) {
    field[fil * xdim + col].dz += 0.5 *
        (field[fil * xdim + col].hy - field[fil * xdim + col - 1].hy -
         field[fil * xdim + col].hx + field[(fil - 1) * xdim + col].hx);
}
__syncthreads();

//Gaussian pulse in the middle
double pulse = exp(-0.5 * ((t0 - ts) / spread) * ((t0 - ts) / spread));
field[jc * xdim + ic].dz = pulse;
__syncthreads();

//Calculate the Ez field from Dz
if (0 < fil && fil < ydim && 0 < col && col < xdim) {
    field[fil * xdim + col].ez = field[fil * xdim + col].gaz *
        field[fil * xdim + col].dz;
}
__syncthreads();

//Calculate the Hx field
if (fil < ydim - 1 && col < xdim - 1) {
    field[fil * xdim + col].hx += 0.5 * (field[fil * xdim + col].ez -
        field[(fil + 1) * xdim + col].ez);
}
__syncthreads();

//Calculate the Hy field
if (fil < ydim - 1 && col < xdim - 1) {
    field[fil * xdim + col].hy += 0.5 *
        (field[fil * xdim + col + 1].ez - field[fil * xdim + col].ez);
}

```

}

En ambas funciones se emplea un bucle ya sea dentro o fuera de la función para especificar el número de pasos temporales a realizar, además de utilizar como fuente de los campos un pulso gaussiano, denotado en ambas funciones como 'pulse' y generado en el centro del espacio.

## 4 Resultados

Al resolver las ecuaciones 3.20, como cabe esperar, obtenemos una onda electromagnética propagándose por el espacio, la cual es generada por un pulso gaussiano como fuente. La figura ?? muestra la propagación del campo eléctrico ( $E_z$ ) en un espacio de 3600 puntos y 20, 30, 40, 50 pasos temporales. Como podemos ver, la onda generada en el centro se propaga en las direcciones  $x$  e  $y$ .

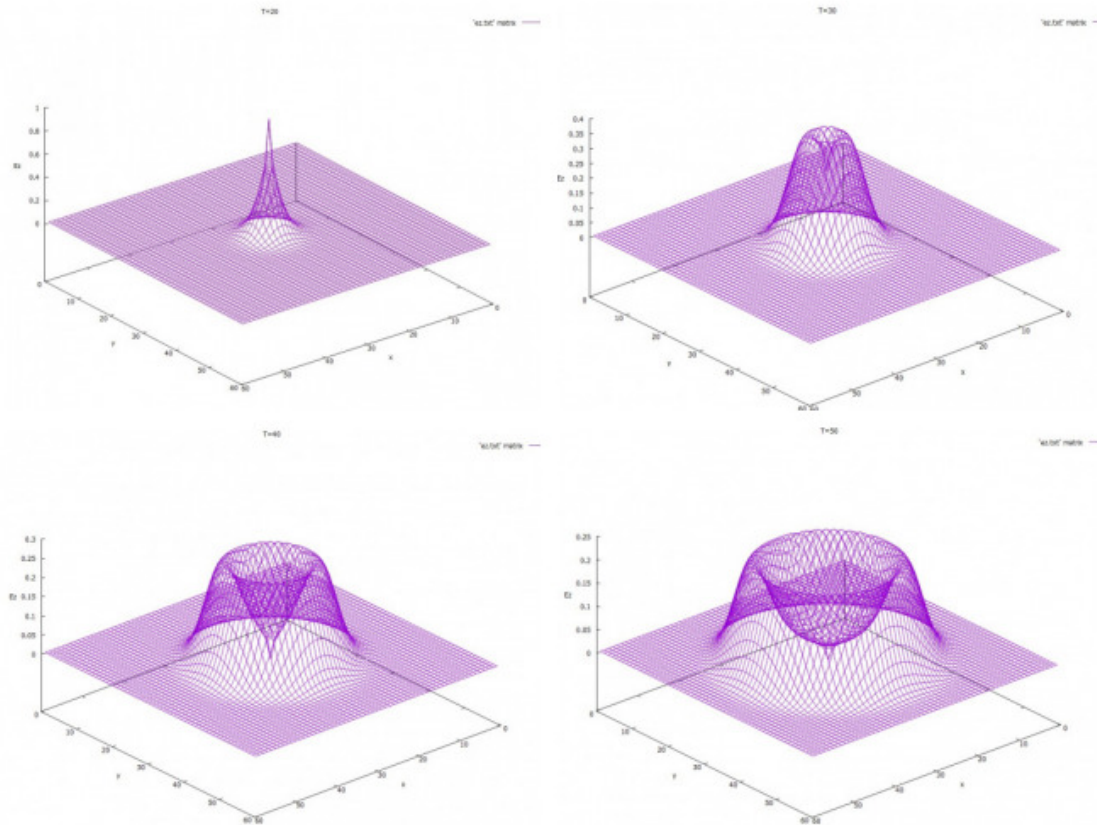


Figura 6: Propagación del campo eléctrico en  $\mathbb{R}^2$  en un espacio de 3600 puntos en 20 (Superior-Izquierda), 30 (Superior-Derecha), 40 (Inferior-izquierda) y 50 (Inferior-Derecha) pasos temporales.

Para determinar la ganancia en tiempo de cálculo al implementar este algoritmo en CUDA se han realizado dos experimentos, donde se prueba la dependencia de este con el número de pasos temporales y la densidad de puntos.

#### 4.1 Dependencia del tiempo de cálculo con el número de pasos temporales

Para determinar la dependencia del tiempo de cálculo con el número de pasos temporales se han llevado a cabo diez ejecuciones, cinco utilizando el host y cinco utilizando el device. En las diez se ha utilizado una densidad constante de puntos de 25 millones y se han variado los pasos temporales desde 10 hasta 10 000. En las tablas 1 y 2 se enumeran los datos obtenidos en las ejecuciones realizadas.

CPU			
Densidad de puntos	Pasos Temporales	$t_{CPU}$ ( $\pm 1$ segundos)	Minutos ( $\pm 0.01$ )
25 000 000	10	1	0.01
25 000 000	100	19	0.32
25 000 000	1000	204	3.40
25 000 000	5000	1105	18.42
25 000 000	10000	2199	37.05

Tabla 1: Dependencia del tiempo de cálculo con los pasos temporales en CPU

GPU			
Densidad de puntos	Pasos Temporales	$t_{GPU}$ ( $\pm 1$ segundos)	Minutos ( $\pm 0.01$ )
25 000 000	10	0	0.00
25 000 000	100	0	0.00
25 000 000	1000	16	0.27
25 000 000	5000	87	1.45
25 000 000	10000	173	3.28

Tabla 2: Dependencia del tiempo de cálculo con los pasos temporales en GPU

Como podemos ver en ellas

Pasos Temporales	$t_{CPU} - t_{GPU}$ ( $\pm 1.4$ segundos)
10	1
100	19
1000	188
5000	1018
10000	2626

Tabla 3: t

#### 4.2 Variación del tiempo de cálculo al variar la densidad de puntos

En la determinación de la dependencia del tiempo de cálculo con la densidad de puntos también se han llevado a cabo diez ejecuciones, cinco en el host y cinco en el device, donde se ha determinado el tiempo de cálculo para un número de 1000 pasos temporales y una densidad de puntos desde 10 millones hasta 25 millones. En las tablas 4 y 2 podemos ver los datos obtenidos tras las diez ejecuciones.

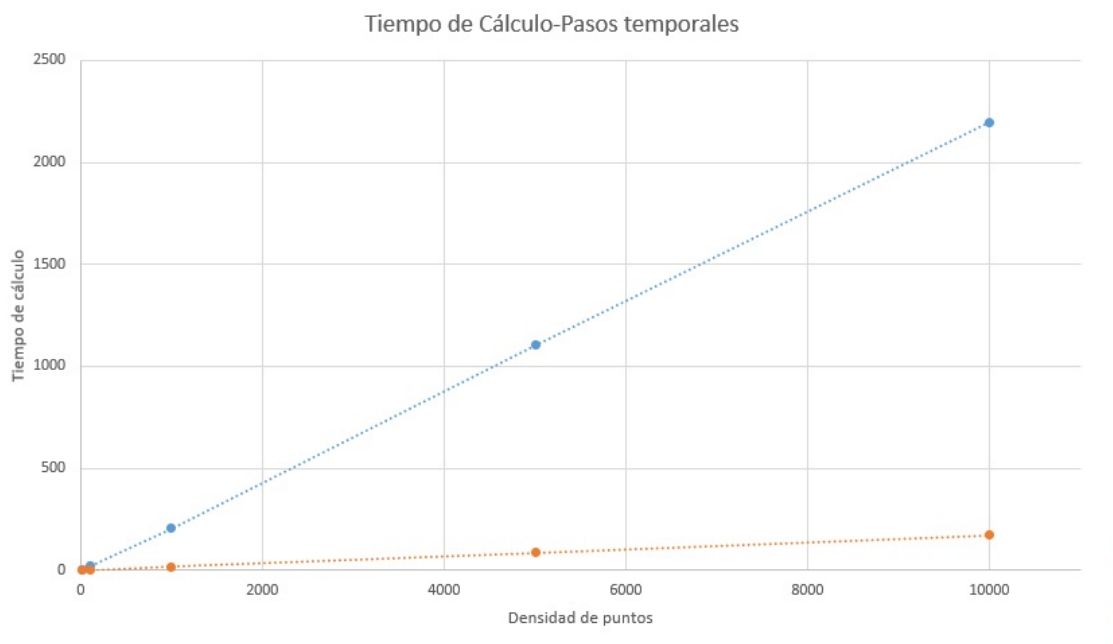


Figura 7: Relación entre el tiempo de cálculo y el número de pasos temporales para una densidad de puntos de 25 millones. La línea naranja representa el tiempo de ejecución en el device y la azul el tiempo de ejecución en el host

CPU			
Densidad de puntos	Pasos Temporales	$t_{CPU}$ ( $\pm 1$ segundos)	Minutos ( $\pm 0.01$ )
10 000 00	1000	7	0.11
4 000 000	1000	32	0.53
9 000 000	1000	71	1.18
16 000 000	1000	126	2.10
25 000 000	1000	204	3.17

Tabla 4: Dependencia del tiempo de cálculo con la densidad de puntos utilizados en CPU

Como podemos ver en las tablas el tiempo de ejecución crece significativamente al aumentar la densidad de puntos utilizada en la implementación del host. No obstante, al utilizar la paralelización ofrecida por CUDA el aumento en tiempo de cómputo es menos abrupto.

Esta diferencia podemos verla de forma más clara en la figura ??, en ella vemos el aumento en tiempo de ejecución del algoritmo ejecutado en el host en azul y el aumento en tiempo de ejecución del algoritmo implementado en el device en naranja.

sadfa

## 5 Conclusiones



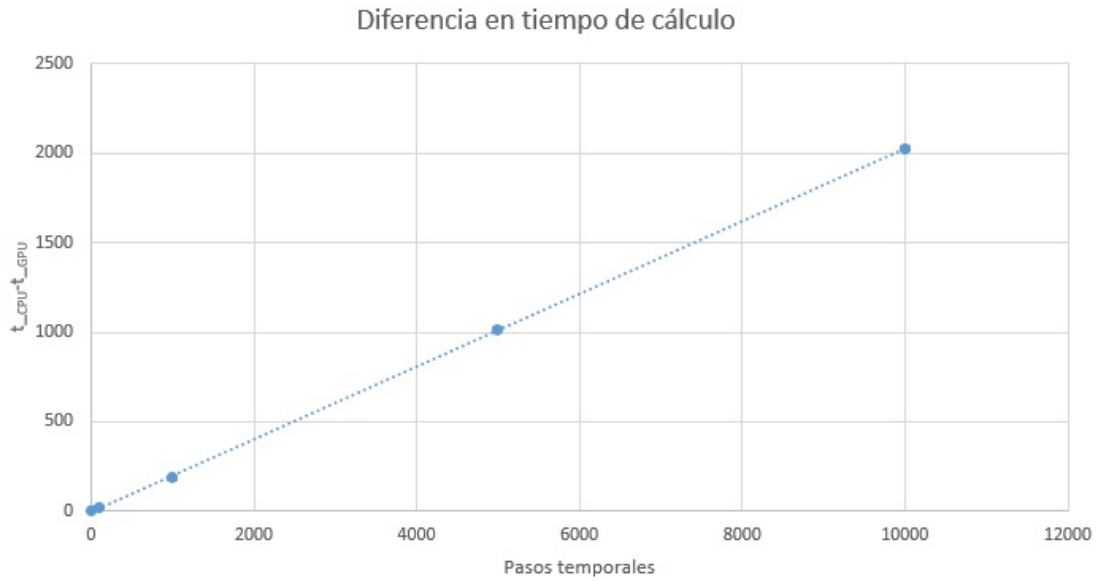


Figura 8: Diferencia en tiempo de cálculo

CPU			
Densidad de puntos	Pasos Temporales	$t_{GPU}$ ( $\pm 1$ segundos)	Minutos ( $\pm 0.01$ )
10 000 00	1000	0	0.0
4 000 000	1000	2	0.03
9 000 000	1000	6	0.10
16 000 000	1000	10	0.17
25 000 000	1000	16	0.27

Tabla 5: Dependencia del tiempo de cálculo con la densidad de puntos utilizados en GPU

## Referencias

- [1] Jennifer E Houle and Dennis M Sullivan,  
*Electromagnetic simulation using the FDTD method with Python*,  
IEEE PRESS WILEY, 2020.
- [2] Allen Taflove and Susan C Hagness,  
*Computational electrodynamics. The Finite-Difference Time-Domain Method*,  
ARTECH HOUSE, 2005.
- [3] Nvidia documentation,  
<https://docs.nvidia.com/cuda/cuda-c-programming-guide/index.html>

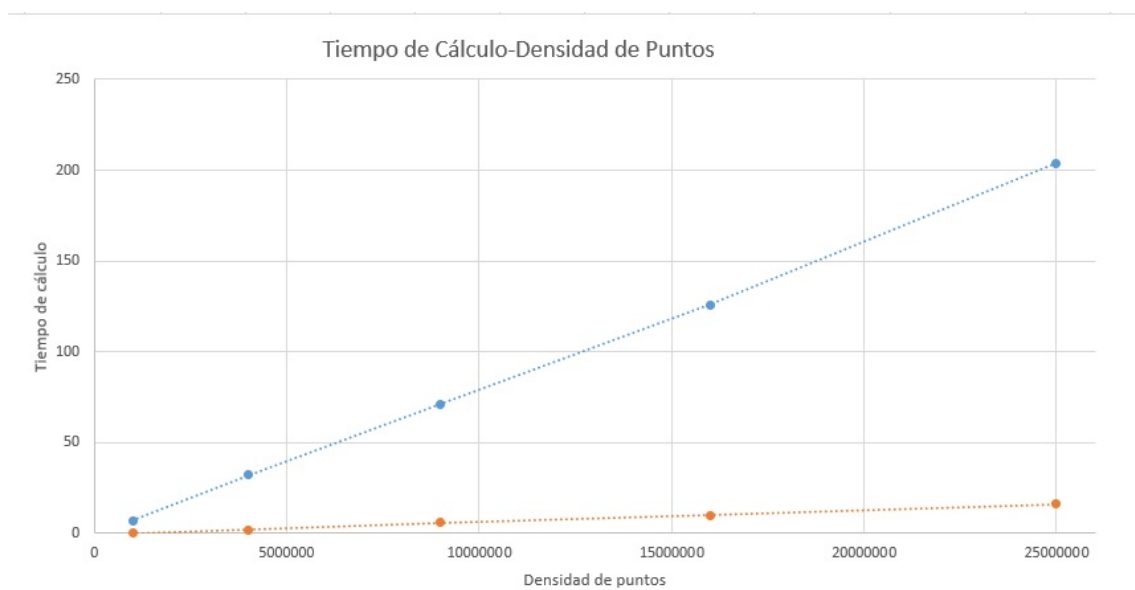


Figura 9: Relación entre el tiempo de cálculo y la densidad de puntos para 1000 pasos temporales. La línea naranja representa el tiempo de ejecución en el device y la azul el tiempo de ejecución en el host