



## Práctica 2:

# Probabilidad y variable aleatoria



Minaya Zeballos, Joaquín  
Ramos Gómez, Juan Pedro  
Ramos Martínez, Juan José  
Sánchez Peña, Francisco Javier  
Valero Moreno, Francisco Javier

## **1. Teorema de Bayes**

EL teorema de Bayes es utilizado para calcular la probabilidad de un suceso, teniendo información de antemano sobre ese suceso.

Podemos calcular la probabilidad de un suceso A, sabiendo además que ese A cumple cierta característica que condiciona su probabilidad. El teorema de Bayes entiende la probabilidad de forma inversa al teorema de la probabilidad total. El teorema de la probabilidad total hace inferencia sobre un suceso B, a partir de los resultados de los sucesos A. Por su parte, Bayes calcula la probabilidad de A condicionado a B.

El teorema de Bayes ha sido muy cuestionado. Lo cual se ha debido, principalmente, a su mala aplicación. Ya que, mientras se cumplan los supuestos de sucesos disjuntos y exhaustivos, el teorema es totalmente válido.

### **1.1. Fórmula del teorema de Bayes**

Para calcular la probabilidad tal como la definió Bayes en este tipo de sucesos utilizamos la fórmula matemática:

$$P[A_n/B] = \frac{P[B/A_n] \cdot P[A_n]}{\sum P[B/A_i] \cdot P[A_i]}$$

B representa el suceso sobre el que tenemos información previa y  $A_n$  son los distintos sucesos condicionados. En la parte del numerador tenemos la probabilidad condicionada, y en la parte de abajo la probabilidad total.

### **1.2. Probabilidad total**

El teorema de la probabilidad total nos permite calcular la probabilidad de que ocurra un suceso, que se puede realizar a través de varios caminos. Antes de exponer el teorema de la probabilidad total debemos saber que es una partición.

### 1.2.1. Partición

Son sucesos que sacados de un mismo espacio muestral. Dichos sucesos forman una partición del espacio muestral si son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

Sucesos colectivamente exhaustivos:      Sucesos mutuamente excluyentes

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots A_n = S$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset ; \forall i \neq j$$

Ahora que tenemos claro el concepto de partición veremos el teorema de probabilidad total.

### 1.2.2. Teorema de la probabilidad total

El teorema de la probabilidad total establece que:

Sean  $S_1, S_2, \dots, A_n$  sucesos que forman una partición del espacio muestral  $S$ , y sea  $B$  otro suceso del espacio muestral, entonces la probabilidad del suceso  $B$  se puede obtener usando la fórmula del teorema de la probabilidad total.

### 1.2.3. Fórmula de la probabilidad total

La fórmula de la probabilidad total es la siguiente:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

## 1.3. Regla de Laplace

Nos permite calcular la probabilidad de un suceso, siempre que los sucesos elementales sean equiprobables, es decir, que todos los resultados posibles tengan la misma probabilidad.

### 1.3.1. Fórmula de la regla de Laplace

La fórmula de Laplace es la siguiente:

$$P(A) = \frac{\text{numero de casos favorables}}{\text{numero de casos posibles}}$$

## 2. Distribución normal

La variable normal representa aquellas magnitudes que son resultado de sumar diferentes componentes independientes.

### 2.1. Fórmula distribución normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Con  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ , lo indicaremos con  $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$

### 2.2. Características

- Media

$$E[x] = \mu$$

- Varianza

$$Var(x) = \sigma^2$$

- Función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- Si  $x$  es una variable aleatoria discreta con distribución  $N(\mu, \sigma)$ , entonces la variable aleatoria tipificada

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ Sigue una distribución } N(0, 1)$$

- Si  $Z$  es una variable aleatoria con distribución  $N(0, 1)$ , entonces la variable aleatoria tipificada

$$x = \sigma Z + \mu \text{ Sigue una distribución } N(\mu, \sigma)$$

## Objetivo 1

Crearemos un clasificador Naive Bayes para predecir la nota final de junio, tendremos dos posibilidades, aprobado o suspenso. Usaremos las variables de las notas de prácticas y de la evaluación parcial.

a) Transformar las variables cuantitativas con valores aprobado/suspenso. Asume que un alumno no presentado a una práctica o a la evaluación parcial ha suspendido.

b) Aplicar un clasificador Naive Bayes y evaluar su capacidad de predicción calculando las siguientes medidas:

- La probabilidad de que acierte en la predicción de aprobado dado que el/la alumno/a ha aprobado.

Para resolver este apartado, debemos dividir el número de alumnos que el clasificador predice que van a aprobar y realmente aprobaron entre el número de alumnos:  $\rightarrow 108 / 113 = 0.95$

- La probabilidad de que acierte en la predicción de suspenso dado que el/la alumno/a ha suspendido.

Para resolver este apartado, debemos dividir el número de alumnos que el clasificador predice que van a suspender y realmente suspendieron entre el número de alumnos:  $\rightarrow 23 / 36 = 0.63$

- La probabilidad de que el/la alumno/a aprueba dado que el clasificador predice que va a aprobar.

Para resolver este apartado, debemos de dividir el número de alumnos que el clasificador predijo que aprobarían y realmente aprobaron (23) entre los alumnos totales (149).  $\rightarrow 23 / 149 = 0.15$

- La probabilidad de que el/la alumna suspenda dado que el clasificador predice que va a suspender.

Para resolver este apartado, debemos de dividir el número de alumnos que el clasificador predijo que suspenderían y realmente suspendieron (108) entre los alumnos totales (149)  $\rightarrow 108 / 149 = 0.72$

- La probabilidad de que el clasificador acierte en su predicción.

El clasificador acierta en su predicción en los casos en los que predice que el alumno va a aprobar y realmente aprobó y cuando dice que el alumno va a suspender y realmente suspendió.  $\rightarrow 23 + 109 / 149 = 0.88$

c) Evalúa cómo van cambiando las medidas anteriores cuando el clasificador Naive Bayes usa los siguientes conjuntos de variables:

- Utilizando solo información de grupo.
  - 0
  - 1
  - 0
  - 0.75
  - 0.71
- Utilizando información de grupo, de Práctica 1 y de Práctica 2.
  - 0.11
  - 0.99
  - 0.02
  - 0.75
  - 0.77
- Utilizando información de grupo, de Práctica 1, de la práctica 2 y de Evaluación parcial.
  - 0.33
  - 0.95
  - 0.08
  - 0.72
  - 0.80

- Utilizando toda la información disponible de grupo, prácticas y evaluación parcial.
  - 0.33
  - 0.95
  - 0.08
  - 0.72
  - 0.80

Con esos datos obtenemos la siguiente tabla.

Predicción	Aprobado	Suspenso
Aprobado	12	5
Suspenso	24	108

## Objetivo 2

Realiza el mismo análisis que en el objetivo anterior (predecir aprobado/suspenso en junio) con los siguientes nuevos elementos:

1. Considera la información de que un alumno puede aparecer como “No-Presentado” en alguna práctica/cuestionario de forma explícita.

Todos aquellos resultados de los que no tengamos información serán sustituidos por un “No-Presentado”.

2. Transforma las variables cuantitativas en variables cualitativas con valores suspenso, aprobado, notable y sobresaliente y evalúa si esta transformación es mejor que la transformación en suspenso/aprobado.

No Presentado	Suspenso	Aprobado	Notable	Sobresaliente
39	108	2	0	0

*Tabla de frecuencias del examen de junio*

3. Obtén las tablas de probabilidad condicionada estimadas por el clasificador Naive Bayes y comenta las más relevantes.

PREDICCIÓN	APROBADO	NOTABLE	SOBRESALIENTE	SUSPENSO
APROBADO	3	3	1	5
NOTABLE	0	0	0	0
SOBRESALIENTE	0	0	0	0
SUSPENSO	28	1	0	107

*Predicciones con los datos de las practicas*



PREDICCIÓN	APROBADO	NOTABLE	SOBRESALIENTE	SUSPENSO
APROBADO	12	2	1	7
NOTABLE	0	1	0	0
SOBRESALIENTE	0	0	0	0
SUSPENSO	19	1	0	106

*Predicciones con los datos del examen parcial*

PREDICCIÓN	APROBADO	NOTABLE	SOBRESALIENTE	SUSPENSO
APROBADO	17	2	0	3
NOTABLE	0	2	1	0
SOBRESALIENTE	0	0	0	0
SUSPENSO	14	0	0	110

*Predicciones con los datos del examen de junio*

*Como intentamos calcular las predicciones para Nota Final Junio no tiene sentido establecer un modelo con los datos de septiembre.*

- Analiza si es posible hacer una predicción más ajustada, donde en vez de predecir suspenso/aprobado en junio, podamos predecir también su nota en base a suspenso, aprobado, notable y sobresaliente.

Al igual que en los ejemplos anteriores, si somos capaces de definir las cotas correctamente y tratar los datos podemos establecer unas predicciones mas precisas si nuestra transformación cualitativa pasa de ser un todo/nada o estar dividida en rangos más precisos (suspenso, aprobado, notable y sobresaliente). El modelo nos arroja la siguiente tabla:

Suspenso	Aprobado	Notable	Sobresaliente
113	31	4	1

*Tabla de predicciones sobre la nota final de junio*

## Objetivo 3

Realiza el mismo análisis que en el Objetivo 1 con los siguientes nuevos elementos:

1. Utiliza las variables cuantitativas sin transformar asumiendo que se distribuyen de forma Normal dada la variable a predecir y evalúa si esto da lugar a mejores predicciones.

PREDICCIÓN	(0,4.99]	(4.99,10]
(0,4.99]	113	36
(4.99,10]	0	0

*Predicción con información de grupo*

PREDICCIÓN	(0,4.99]	(4.99,10]
(0,4.99]	74	7
(4.99,10]	39	29

*Predicción con información de grupo y practicas*

PREDICCIÓN	(0,4.99]	(4.99,10]
(0,4.99]	100	4
(4.99,10]	13	32

*Predicción con información de grupo*

2. Analiza si es posible mejorar la capacidad de predicción del clasificador transformando algunas variables en aprobado/suspenso y dejando otras sin transformar.

PREDICCIÓN	(0,4.99]	(4.99,10]
(0,4.99]	113	36
(4.99,10]	0	0

*Predicción con información de grupo*

PREDICCIÓN	(0,4.99]	(4.99,10]
(0,4.99]	109	29
(4.99,10]	4	7

*Predicción con información de grupo*

PREDICCIÓN	(0,4.99]	(4.99,10]
(0,4.99]	109	0
(4.99,10]	4	36

*Predicción con información de grupo*

Por último, hemos empleado el modelo entrenado para la predicción de aprobar en junio para los miembros del grupo. Ya que disponemos de muy pocos datos este año aun, el modelo predice que todo el grupo suspenderá el junio. Ya que las prácticas y exámenes aun no corregidos tienen un '0'.