**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL**

**Entrenamiento 3** - IIND2103 - Principios de Optimización 2024-10

**PROFESORES**: Andrés Medaglia, Camilo Gómez, Daniel Yamín, Juan Diego Aristizábal.

**ASISTENTES**: Laura Levy, Juliana Sánchez, Andrés Rueda.

**DOBLE MONITOR:** Luis Cortés.

| **Nombre Completo** | **Código** | **Login** | **Sección Magistral** | **Sección Complementaria** | **Envía por Bloque Neón** |
|---|---|---|---|---|---|
| Abraham Jesús Bohórquez Gómez | 202222026 | a.bohorquezg | 5 | 4 | **X** |
| Juan José Murillo Aristizábal | 202116898 | j.murilloa | 9 | 5 | |

Problema 1 - Simplex y Dualidad

a)

Max $17x_1 + 30x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 10x_5$

s.a.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
 & 7x_1 & & & + & 15x_3 & & & & \leq & 105 \\
 & & & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & & \leq & 765 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & & \leq & 220 \\
- & x_1 & & & - & 2x_3 & & & - \; x_5 & \leq & -120 \\
 & & & & & & & 3x_4 & + \; x_5 & \leq & 225 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , \; x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Teniendo en cuenta el problema inicial, para tenerlo en formato canónico todos los signos de las restricciones deben ser de menor o igual, excluyendo la naturaleza de las variables.

b)

Max
$17x_1 + 30x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 10x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10}$

s.a.

$$
\begin{array}{l}
7x_1 + 15x_3 + x_6 = 105 \\
2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_7 = 765 \\
x_1 + x_2 + x_8 = 220 \\
-x_1 - 2x_3 - x_5 + x_9 = -120 \\
3x_4 + x_5 + x_{10} = 225 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \geq 0
\end{array}
$$

Para obtener el problema en formato estándar, se suman holguras en todas las restricciones para obtener la igualdad. Estas nuevas variables de holgura tienen un valor de cero en la función objetivo y su naturaleza es mayor o igual a cero.

c)

$$Max\ \mathbb{C}^T\mathbb{X}$$

$$A\mathbb{X} = \mathbb{b}$$

$$\mathbb{X} \geq 0$$

De forma genera, así se ve el problema de forma matricial. Las matrices y vectores se expresan a continuación:

$$\mathbb{C}^T = [17 \quad 30 \quad -4 \quad 5 \quad -10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \\ X_{10} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 15 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{b} = \begin{bmatrix} 105 \\ 765 \\ 220 \\ -120 \\ 225 \end{bmatrix}$$

d) Para encontrar una solución básica factible se utilizó el método de las dos fases. Para ello, se crea una variable artificial con índice 11. El archivo correspondiente al proceso de este inciso y el que le sigue es el archivo Excel llamado “Excel-Punto1.xsl”

$$Min\ X_{11}$$

$$A\mathbb{X} - X_{11} = \mathbb{b}$$

$$\mathbb{X}, X_{11} \geq 0$$

MIN $0x_1 + 0x_2 - 0x_3 + 0x_4 - 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 1x_{11}$

s.a.

$$
\begin{array}{rcl}
7x_1 + 15x_3 + x_6 & = & 105 \\
2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_7 & = & 765 \\
x_1 + x_2 + x_8 & = & 220 \\
-x_1 - 2x_3 - x_5 + x_9 - x_{11} & = & -120 \\
3x_4 + x_5 + x_{10} & = & 225 \\
x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , x_7 , x_8 , x_9 , x_{10} , x_{11} & \geq & 0
\end{array}
$$

Solo se necesita una variable de decisión artificial ya que solo en una restricción no tenemos factibilidad cuando multiplicamos la base inversa de las variables duales con el vector b.

**Iteración 0:**

$I_B = \{6,7,8,11,10\}$ $\qquad$ $I_N = \{1,2,3,4,5,9\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_N^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 105 \\ 765 \\ 220 \\ 120 \\ 225 \end{bmatrix} \qquad Z = c_B^T x_B = 120$$

Revisión de optimalidad

$$w^T = c_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad w^T N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$r^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dirección de movimiento

**Entra** X3

$$a_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad d_3 = \left[\frac{-B^{-1}a_3}{e_3}\right] = \left[\begin{array}{c} -15 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Longitud de movimiento

$$x = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 105 \\ 765 \\ 220 \\ 120 \\ 225 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_{11} \\ x_{10} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_9 \end{matrix} \end{array} \quad \alpha = \min_{j \in I_B} \left\{ -\frac{x_j}{d_j^q} \,|\, d_j^q < 0 \right\} = \min\{7{,}153{,}60\} = 7$$

| **Sale** | X6 |
|---|---|

Actualización

$$x^{t+1} = x^t + \alpha d_3 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 \\ 730 \\ 220 \\ 106 \\ 225 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_{11} \\ x_{10} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_9 \end{matrix} \end{array}$$

**Iteración 1:**

$I_B = \{3,7,8,11,10\}$ $\qquad\qquad$ $I_N = \{1,2,6,4,5,9\}$

$$B = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \qquad C_N^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.133 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 7 \\ 730 \\ 220 \\ 106 \\ 225 \end{bmatrix} \qquad Z = c_B^T x_B = 106$$

Revisión de optimalidad

$$w^T = c_B^T B^{-1} = [-0.133 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0] \qquad w^T N = [0.067 \quad 0 \quad -0.133 \quad 0 \quad 1 \quad -1\,]$$

$$r^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = [-0.067 \quad 0 \quad 0.133 \quad 0 \quad -1 \quad 1]$$

Dirección de movimiento

**Entra** X5

$$a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad d_5 = \begin{bmatrix} -B^{-1}a_5 \\ \hline e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Longitud de movimiento

$$x = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 7 \\ 730 \\ 220 \\ 106 \\ 225 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_3 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_{11} \\ x_{10} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_9 \end{array} \quad \alpha = \min_{j \in I_B} \left\{ -\frac{x_j}{d_j^q} \mid d_j^q < 0 \right\} = \min\{106,225\} = 106$$

**Sale** X11

Actualización

$$x^{t+1} = x^t + \alpha d_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ 730 \\ 220 \\ 0 \\ 119 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 106 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_3 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_{11} \\ x_{10} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_9 \end{array}$$

**Iteración 2:**

$I_B = \{3,7,8,5,10\}$ $\qquad$ $I_N = \{1,2,6,4,11,9\}$

$$B = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_B^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ $\qquad$ $C_N^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.133 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.1333 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 7 \\ 730 \\ 220 \\ 106 \\ 119 \end{bmatrix} \qquad Z = c_B^T x_B = 0$$

Revisión de optimalidad

$$w^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \qquad w^T N = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$r^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

Acá se encuentra una base factible ya que se está minimizando y el valor de los multiplicadores Simplex son mayores o iguales a cero, y la variable artificial no se encuentra en la base, es decir que el problema no es infactible.

e) Partiendo de la base proporcionada, se realizaron iteraciones hasta llegar al óptimo

**Iteración 1:**

$I_B = \{6,7,8,10,5\}$ $\qquad$ $I_N = \{1,2,3,4,9\}$

$C_B^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -10\,]$ $\qquad$ $C_N^T = [17 \quad 30 \quad -4 \quad 5 \quad 0\,]$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 105 \\ 765 \\ 220 \\ 105 \\ 120 \end{bmatrix} \quad z = c_B^T x_B = -1200$$

Revisión de optimalidad

$$w^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0] \qquad w^T N = [-10 \quad 0 \quad -20 \quad 0 \quad 10\,]$$

$$r^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = [27 \quad 30 \quad 16 \quad 5 \quad -10\,]$$

En esta iteración no se puede declarar optimalidad porque los costos reducidos indican que hay promesa de mejora al entrar algunas variables a la base. Arbitrariamente se escoge que X2 entra a la base.

Dirección de movimiento

**Entra** X2

$$a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad d_2 = \left[\frac{-B^{-1}a_2}{e_2}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Longitud de movimiento

$$x = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 105 \\ 765 \\ 220 \\ 105 \\ 120 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_{10} \\ x_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_9 \end{array} \qquad \alpha = \min_{j \in I_B} \left\{ -\frac{x_j}{d_j^q} \mid d_j^q < 0 \right\} = \min\{382.5, 220\} = 220$$

**Sale** X8

Actualización

$$x^{t+1} = x^t + \alpha d_2 = \begin{bmatrix} 105 \\ 325 \\ 0 \\ 105 \\ 120 \\ 0 \\ 220 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_{10} \\ x_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_9 \end{array}$$

**Iteración 2:**

$I_B = \{6,7,2,10,5\}$ $\qquad$ $I_N = \{1,8,3,4,9\}$

$C_B^T = [0 \quad 0 \quad 30 \quad 0 \quad -10\,]$ $\qquad$ $C_N^T = [17 \quad 0 \quad -4 \quad 5 \quad 0\,]$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 105 \\ 325 \\ 220 \\ 105 \\ 120 \end{bmatrix} \quad z = c_B^T x_B = 5400$$

Revisión de optimalidad

$w^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad 0 \quad 30 \quad 10 \quad 0] \qquad w^T N = [20 \quad 30 \quad -20 \quad 0 \quad 10\,]$

$$r^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = [-3 \quad -30 \quad 16 \quad 5 \quad -10\,]$$

En esta iteración no se puede declarar optimalidad porque los costos reducidos indican que hay promesa de mejora al entrar algunas variables a la base. Arbitrariamente se escoge que X4 entra a la base.

Dirección de movimiento

| **Entra** | X4 |
|---|---|

$$a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad d_4 = \begin{bmatrix} \dfrac{-B^{-1}a_4}{e_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Longitud de movimiento

$$x = \begin{bmatrix} 105 \\ 325 \\ 220 \\ 105 \\ 120 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_6 \\ x_7 \\ x_2 \\ x_{10} \\ x_5 \\ x_1 \\ x_8 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_9 \end{matrix} \qquad \alpha = \min_{j \in I_B} \left\{ -\frac{x_j}{d_j^q} | d_j^q < 0 \right\} = \min\{108.33, 35\} = 35$$

**Sale** X10

Actualización

$$x^{t+1} = x^t + \alpha d_4 = \begin{bmatrix} 105 \\ 220 \\ 220 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 35 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_6 \\ x_7 \\ x_2 \\ x_{10} \\ x_5 \\ x_1 \\ x_8 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_9 \end{matrix}$$

**Iteración 3:**

$I_B = \{6,7,2,4,5\}$ $\qquad$ $I_N = \{1,8,3,10,9\}$

$C_B^T = [0 \quad 0 \quad 30 \quad 5 \quad -10\,]$ $\qquad$ $C_N^T = [17 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad 0\,]$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.33 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 105 \\ 220 \\ 220 \\ 35 \\ 120 \end{bmatrix} \quad z = c_B^T x_B = 5575$$

Revisión de optimalidad

$w^T = c_B^T B^{-1} = [0 \quad 0 \quad 30 \quad 11.667 \quad 1.6667]$

$w^T N = [18.33 \quad 30 \quad -23.33 \quad 1.66 \quad 11.66\,]$

$$r^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = [-1.33 \quad -30 \quad 19.33 \quad -1.667 \quad -11.67\,]$$

En esta iteración no se puede declarar optimalidad porque los costos reducidos indican que hay promesa de mejora al entrar alguna variable a la base. Se escoge que X3 entre a la base.

Dirección de movimiento

**Entra** X3

$$a_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad d_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{-B^{-1}a_3}{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -7 \\ 0 \\ 0.66 \\ -2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Longitud de movimiento

$$x = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 105 \\ 220 \\ 220 \\ 35 \\ 120 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_6 \\ x_7 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_1 \\ x_8 \\ x_3 \\ x_{10} \\ x_9 \end{array} \qquad \alpha = \min_{j \in I_B} \left\{ -\frac{x_j}{d_j^q} \middle| d_j^q < 0 \right\} = \min\{7, 31.429, 60\} = 7$$

**Sale** X6

Actualización

$$x^{t+1} = x^t + \alpha d_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 171 \\ 220 \\ 39.66 \\ 106 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_6 \\ x_7 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_1 \\ x_8 \\ x_3 \\ x_{10} \\ x_9 \end{array}$$

**Iteración 4:**

$I_B = \{3,7,2,4,5\}$ $\qquad$ $I_N = \{1,8,6,10,9\}$

$C_B^T = [-4 \quad 0 \quad 30 \quad 5 \quad -10\,]$ $\qquad$ $C_N^T = [17 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$

$$B = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.066 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.46 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.044 & 0 & 0 & 0.33 & 0.33 \\ 0-0.133 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 7 \\ 171 \\ 220 \\ 39.66 \\ 106 \end{bmatrix}$$

$z = c_B^T x_B = \ 5710.33$

Revisión de optimalidad

$$w^T = c_B^T B^{-1} = [1.28 \quad 0 \quad 30 \quad 11.66 \quad 1.66]$$

$$w^T N = [27.35 \quad 30 \quad 1.28 \quad 1.66 \quad 11.66\,]$$

$$r^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = [-10.36 \quad -30 \quad -1.28 \quad -1.66 \quad -11.67\,]$$

En esta iteración si se puede declarar optimalidad porque los costos reducidos indican que no hay promesa de mejora al entrar algunas variables a la base. Hasta acá llega el algoritmo Simplex.

El valor de la función objetivo en el óptimo es de $5710.33$, los índices básicos son:

$\{3,7,2,4,5\}$

Los índices no básicos son:

$\{1,8,6,10,9\}$

f) Teniendo en cuenta que nuestro problema primal es de maximización, el dual asociado es de minimización y se modela a continuación:

$$\min 105w_1 + 765w_2 + 220w_3 - 120w_4 + 225w_5$$

s.a.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
7w_1 & & + w_3 & - w_4 & & \geq & 17 \\
 & 2w_2 & + w_3 & & & \geq & 30 \\
15w_1 & + 5w_2 & & - 2w_4 & & \geq & -4 \\
 & 3w_2 & & & + 3w_5 & \geq & 5 \\
 & & & - w_4 & + w_5 & \geq & -10 \\
w_1, & w_2, & w_3, & w_4, & w_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Agregando las holguras correspondientes al dual asociado se tiene el siguiente modelo:

$$\text{Min } 105w_1 + 765w_2 + 220w_3 - 120w_4 + 225w_5 + 0r_1 + 0r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5$$

s.a.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
7w_1 & & + w_3 & - w_4 & & - r_1 & & & & & = & 17 \\
 & 2w_2 & + w_3 & & & & - r_2 & & & & = & 30 \\
15w_1 & + 5w_2 & & - 2w_4 & & & & - r_3 & & & = & -4 \\
 & 3w_2 & & & + 3w_5 & & & & - r_4 & & = & 5 \\
 & & & - w_4 & + w_5 & & & & & - r_5 & = & -10 \\
w_1, & w_2, & w_3, & w_4, & w_5, & r_1, & r_2, & r_3, & r_4, & r_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

La implementación de este ejercicio se encuentra en el archivo Python “Punto1-Dual.py”.

Después de ejecutar el modelo con ayuda de la librería Pulp se obtuvieron los siguientes resultados.

$$El\ valor\ de\ la\ función\ objetivo = 5710.33$$

$$w_1 = 1.29$$

$$w_2 = 0$$

$$w_3 = 30$$

$$w_4 = 11.67$$

$$w_5 = 1.67$$

$$r_1 = 10.36$$

$$r_2 = 0$$

$$r_3 = 0$$

$$r_4 = 0$$

$$r_5 = 0$$

Este valor de la función objetivo tiene sentido ya que por teorema de dualidad fuerte la función objetivo en el óptimo del primal es igual a la del dual asociado.

g)

Max

$$17x_1 + 30x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 10x_5 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 + 0s_5$$

s.a.

$$\begin{array}{l}
7x_1 + 15x_3 + s_1 = 105 \\
2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + s_2 = 765 \\
x_1 + x_2 + s_3 = 220 \\
-x_1 - 2x_3 - x_5 + s_4 = -120 \\
3x_4 + x_5 + s_5 = 225 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0
\end{array}$$

$$\text{Min } 105w_1 + 765w_2 + 220w_3 - 120w_4 + 225w_5 + 0r_1 + 0r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5$$

s.a.

$$\begin{array}{l}
7w_1 + w_3 - w_4 - r_1 = 17 \\
2w_2 + w_3 - r_2 = 30 \\
15w_1 + 5w_2 - 2w_4 - r_3 = -4 \\
3w_2 + 3w_5 - r_4 = 5 \\
-w_4 + w_5 - r_5 = -10 \\
w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \geq 0
\end{array}$$

Teniendo en cuenta el problema primal con la base que nos dan se aplica holgura complementaria para obtener el valor de las variables que se desconocen.

$$I_B = \{6,7,8,10,5\} \; del\ problema\ primal$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ 0 \\ s_5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_4 \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 * r_1 \\ x_2 * r_2 \\ x_3 * r_3 \\ x_4 * r_4 \\ x_5 * r_5 \\ s_1 * w_1 \\ s_2 * w_2 \\ s_3 * w_3 \\ s_4 * w_4 \\ s_5 * w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Max

$$17x_1 + 30x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 10x_5 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 + 0s_5$$

s.a.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \square & \square & s_1 & \square & \square & \square & \square & \square & \square & = & 105 \\ \square & \square & \square & \square & s_2 & \square & \square & \square & \square & = & 765 \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & s_3 & \square & \square & = & 220 \\ x_5 & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & = & 120 \\ x_5 & \square & \square & \square & \square & \square & \square & + & s_5 & = & 225 \\ x_5 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & , & s_5 & \geq & 0 \end{array}$$

$$120 + s_5 = 225$$

$$s_5 = 105$$

$$C_B^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -10\,]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 120 \\ 105 \\ 765 \\ 220 \\ 0 \\ 105 \end{bmatrix} \quad Z^P = c_B^T x_B = -1200$$

Min $105w_1 + 765w_2 + 220w_3 - 120w_4 + 2250w_5 + 0r_1 + 0r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5$

s.a.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
- & w_4 & - & r_1 & & & & & & & = & 17 \\
 & & & & - & r_2 & & & & & = & 30 \\
- & 2w_4 & & & & & - & r_3 & & & = & -4 \\
 & & & & & & & & - & r_4 & = & 5 \\
- & w_4 & & & & & & & & & = & -10 \\
 & w_4 & , & r_1 & , & r_2 & , & r_3 & , & r_4 & \geq & 0
\end{array}$$

$$w_4 = 10$$

$$-10 - r_1 = 17$$

$$r_1 = -27$$

$$-2(10) - r_3 = -4$$

$$r_3 = -16$$

$$C_B^T = [-120 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ -27 \\ -30 \\ -16 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Z^P = c_B^T x_B = -1200$$

| **Solución básica del problema primal** | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ¿Factible? | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $Z^P$ |
| SI | 0 | 0 | 0 | 0 | -120 | 105 | 765 | 220 | 0 | 345 | -1200 |
| **Solución básica del problema dual** | | | | | | | | | | | |
| ¿Factible? | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | $r_5$ | $Z^D$ |
| NO | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | -27 | -30 | -16 | -5 | 0 | -1200 |

Tabla 1. Resultados inciso g

Por condiciones KKT, no es la base óptima ya que no hay factibilidad dual del problema, las variables no cumplen con la naturaleza de las variables. Por el teorema fundamental de la dualidad, la función objetivo será igual, aunque el primal sea factible y el dual no.

h) Teniendo en cuenta la solución del modelo con Pulp hallada en el inciso f), se tiene la base:

$$I_B^* = \{1,3,4,5,6\}\ del\ problema\ dual$$

$$C_B^T = [105 \quad 220 \quad -120 \quad 225 \quad 0\,]$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.29 \\ 0 \\ 30 \\ 11.67 \\ 1.67 \\ 10.36 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Z^D = c_B^T x_B = 5710.33$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ 0 \\ s_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 * r_1 \\ x_2 * r_2 \\ x_3 * r_3 \\ x_4 * r_4 \\ x_5 * r_5 \\ s_1 * w_1 \\ s_2 * w_2 \\ s_3 * w_3 \\ s_4 * w_4 \\ s_5 * w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Max
$17x_1 + 30x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 10x_5 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 + 0s_5$

s.a.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 15x_3 & & & & & & & = & 105 \\
 & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & & & + & s_2 & = & 765 \\
 & x_2 & & & & & & & & & = & 220 \\
 & & - & 2x_3 & & & - & x_5 & & & = & -120 \\
 & & & & & 3x_4 & + & x_5 & & & = & 225 \\
 & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & s_2 & \geq & 0
\end{array}$$

$$x_3 = 7$$

$$-2(7) - x_5 = -120$$

$$x_5 = 106$$

$$3x_4 + 106 = 225$$

$$x_4 = 39.66$$

$$2(220) + 5(7) + 3(39.66) + s_2 = 765$$

$$s_2 = 171$$

$$C_B^T = [30 \quad -4 \quad 5 \quad -10 \quad 0\,]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 220 \\ 7 \\ 39.66 \\ 106 \\ 0 \\ 171 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Z^P = c_B^T x_B = 5710.33$$

| Solución básica del problema primal | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ¿Factible? | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $Z^P$ |
| SI | 0 | 220 | 7 | 39.66 | 106 | 0 | 171 | 0 | 0 | 0 | 5710.33 |
| **Solución básica del problema dual** | | | | | | | | | | | |
| ¿Factible? | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | $r_5$ | $Z^D$ |
| SI | 1.29 | 0 | 30 | 11.67 | 1.67 | 10.36 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5710.33 |

Tabla 2. Resultados inciso h.

Teniendo en cuenta La tabla 2, se demuestra que esta es la base óptima del problema dual ya que se cumplen las condiciones KKT. El valor de la función objetivo en el óptimo del dual es igual a la del del primal, por teorema de dualidad fuerte, ambos son óptimos.

**Problema 2 – Dualidad**

a) Problema primal explícito

Variables de decision:

$x_{vainilla,Usaquén}$: *litros de helado comprados de vainilla a la sucursal Usaquén*

$x_{vainilla,Salitre}$: *litros de helado comprados de vainilla a la sucursal Salitre*

$x_{vainilla,Chico}$: *litros de helado comprados de vainilla a la sucursal Chico*

$x_{vainilla,Titán}$: *litros de helado comprados de vainilla a la sucursal Titán*

$x_{fresa,Usaquén}$: *litros de helado comprados de fresa a la sucursal Usaquén*

$x_{fresa,Salitre}$: *litros de helado comprados de fresa a la sucursal Salitre*

$x_{fresa,Chico}$: $litros\ de\ helado\ comprados\ de\ fresa\ a\ la\ sucursal\ Chico$

$x_{fresa,Titán}$: $litros\ de\ helado\ comprados\ de\ fresa\ a\ la\ sucursal\ Titán$

$x_{chocolate,Usaquén}$: $litros\ de\ helado\ comprados\ de\ chocolate\ a\ la\ sucursal\ Usaquén$

$x_{chocolate,Salitre}$: $litros\ de\ helado\ comprados\ de\ chocolate\ a\ la\ sucursal\ Salitre$

$x_{chocolate,Chico}$: $litros\ de\ helado\ comprados\ de\ chocolate\ a\ la\ sucursal\ Chico$

$x_{chocolate,Titán}$: $litros\ de\ helado\ comprados\ de\ chocolate\ a\ la\ sucursal\ Titán$

En estas variables de decisión explícitas, se busca saber cuántos litros de helado se van a comprar a cada sucursal.

Función Objetivo:

$$\begin{aligned} \min x_{vainilla,Usaquén} * 30{,}000 + x_{vainilla,Salitre} * 31{,}000 + x_{vainilla,Chico} * 32{,}000 \\ + x_{vainilla,Titán} * 29{,}000 + x_{fresa,Usaquén} * 29{,}000 + x_{fresa,Salitre} \\ * 28{,}000 + x_{fresa,Chico} * 30{,}000 + x_{fresa,Titán} * 28{,}000 \\ + x_{chocolate,Usaquén} * 33{,}000 + x_{chocolate,Salitre} * 32{,}000 \\ + x_{chocolate,Chico} * 34{,}000 + x_{chocolate,Titán} * 31{,}000 \end{aligned}$$

Esta función objetivo minimiza todos los costos de compra de sabores de helado en todas las sucursales.

Restricciones:

Restricciones de suplir con la demanda de cada sabor de helado:

$$x_{vainilla,Usaquén} + x_{vainilla,Salitre} + x_{vainilla,Chico} + x_{vainilla,Titán} \geq 70$$
$$x_{fresa,Usaquén} + x_{fresa,Salitre} + x_{fresa,Chico} + x_{fresa,Titán} \geq 45$$
$$x_{chocolate,Usaquén} + x_{chocolate,Salitre} + x_{chocolate,Chico} + x_{chocolate,Titán} \geq 55$$

Restricciones de no exceder la capacidad de producción de cada sucursal:

$$x_{vainilla,Usaquén} + x_{fresa,Usaquén} + x_{chocolate,Usaquén} \leq 45$$
$$x_{vainilla,Salitre} + x_{fresa,Salitre} + x_{chocolate,Salitre} \leq 40$$
$$x_{vainilla,Chico} + x_{fresa,Chico} + x_{chocolate,Chico} \leq 45$$
$$x_{vainilla,Titán} + x_{fresa,Titán} + x_{chocolate,Titán} \leq 40$$

Naturaleza de las variables:

$$x_{vainilla,Usaquén}, x_{vainilla,Salitre}, x_{vainilla,Chico}, x_{vainilla,Titán}, x_{fresa,Usaquén}, x_{fresa,Salitre}, x_{fresa,Chico}, x_{fresa,Titán}, x_{chocolate,Usaquén}, x_{chocolate,Salitre}, x_{chocolate,Chico}, x_{chocolate,Titán} \geq 0$$

Para solucionar este problema se hace uso de la librería Pulp y el archivo se llama "Punto2-Primal.py"

Los resultados de las variables de decisión obtenidas son :

$$x_{vainilla,usaquen} = 45\ L$$

$$x_{fresa,usaquen} = 0$$

$$x_{chocolate,usaquen} = 0$$

$$x_{vainilla,salitre} = 0$$

$$x_{fresa,salitre} = 40\ L$$

$$x_{chocolate,salitre} = 0$$

$$x_{vainilla,chico} = 0$$

$$x_{fresa,chico} = 5\ L$$

$$x_{chocolate,chico} = 40\ L$$

$$x_{vainilla,titan} = 25\ L$$

$$x_{fresa,titan} = 0$$

$$x_{chocolate,titan} = 15\ L$$

El valor de la función objetivo es de:

$$\$5{,}170{,}000$$

b) Problema dual explícito

Variables de decisión:

$w_{vainilla}$: *cambio en los costos si aumenta requerimiento mínimo de vainilla en un litro*

$w_{fresa}$: *cambio en los costos si aumenta requerimiento mínimo de fresa en un litro*

$w_{chocolate}$: *cambio en los costos si aumenta requerimiento mínimo de chocolate en un litro*

$\pi_{Usaquén}$: *cambio en los costos de la cantidad de helado disponible en la sucursal de Usaquén aumentando en un litro*

$\pi_{Salitre}$: *cambio en los costos de la cantidad de helado disponible en la sucursal de Salitre aumentando en un litro*

$\pi_{Chico}$: *cambio en los costos de la cantidad de helado disponible en la sucursal de Chico aumentando en un litro*

$$\pi_{Titán}: \textit{cambio en los costos de la cantidad de helado disponible en la sucursal de Titán aumentando en un litro}$$

Estas variables de decisión están asociadas a cada restricción de nuestro problema primal.

Función Objetivo:

$$\max w_{vainilla} * 70 + w_{fresa} * 45 + w_{chocolate} * 55 + w_{Usaquén} * 45 + \pi_{Salitre} * 40 + \pi_{Chico} * 45 + \pi_{Titán} * 40$$

Esta función objetivo va en sentido contrario al problema primal.

Restricciones:

Restricciones asociadas a la cantidad en litros de helado de cada sabor que se puede comprar a cada sucursal.

$$w_{vainilla} + \pi_{Usaquén} \leq 30{,}000$$
$$w_{vainilla} + \pi_{Salitre} \leq 31{,}000$$
$$w_{vainilla} + \pi_{Chico} \leq 32{,}000$$
$$w_{vainilla} + \pi_{Titan} \leq 29{,}000$$
$$w_{fresa} + \pi_{Usaquén} \leq 29{,}000$$
$$w_{fresa} + \pi_{Salitre} \leq 28{,}000$$
$$w_{fresa} + \pi_{Chico} \leq 30{,}000$$
$$w_{fresa} + \pi_{Titan} \leq 28{,}000$$
$$w_{chocolate} + \pi_{Usaquén} \leq 33{,}000$$
$$w_{chocolate} + \pi_{Salitre} \leq 32{,}000$$
$$w_{chocolate} + \pi_{Chico} \leq 34{,}000$$
$$w_{chocolate} + \pi_{Titán} \leq 31{,}000$$

Naturaleza de las variables

$$w_{vainilla}, w_{fresa}, w_{chocolate} \geq 0$$
$$\pi_{Usaquén}, \pi_{Salitre}, \pi_{Chico}, \pi_{Titán} \leq 0$$

La naturaleza de las variables está dada por el signo de las restricciones en el problema primal.

Para solucionar este problema se hace uso de la librería Pulp y el archivo se llama “Punto2-Dual.py”

Los resultados obtenidos de las variables de decisión son de:

$$w_{vainilla} = 32{,}000$$

$$w_{fresa} = 30{,}000$$

$$w_{chocolate} = 34{,}000$$

$$\pi_{usaquen} = -2{,}000$$

$$\pi_{salitre} = -2{,}000$$

$$\pi_{chico} = 0$$

$$\pi_{titan} = -3{,}000$$

El valor de la función objetivo es de:

$$\$5{,}170{,}000$$

**BONO**:
Para solucionar ambos modelos en Python se usa la librería Python y los archivos se llaman "Punto2-Primal_Indexado" y "Punto2-Dual_Indexado"

**CONJUNTOS:**

$$S\text{: } Conjunto\ de\ sucursales\ i \in S$$
$$H\text{: } Conjunto\ de\ sabores\ de\ helado\ j \in H$$

**PARÁMETROS:**

$$r_j\text{: } Requerimiento\ mínimo\ mensual\ de\ del\ sabor\ de\ helado\ j \in H$$
$$m_i\text{: } máxima\ cantidad\ mensual\ que\ la\ sucursal\ \ i \in S\ puede\ ofrece$$
$$c_{ij}\text{: } Costo\ del\ sabor\ de\ helado\ j \in H\ si\ se\ compra\ en\ la\ sucursal\ i \in S$$

***Problema Primal Indexado***

**VARIABLES DE DECISIÓN:**

$$x_{ij} = Litros\ de\ helados\ j \in H\ comprados\ en\ la\ sucursal\ i \in S$$

**FUNCIÓN OBJETIVO:**

$$\min \sum_{i \in S} \sum_{j \in H} x_{ij} c_{ij}$$

Esta función objetivo minimiza todos los costos de compra de sabores de helado en todas las sucursales.

**RESTRICCIONES:**

Restricciones de suplir con la demanda de cada sabor de helado:

$$\sum_{i \in S} x_{ij} \geq r_j \ \forall \ j \in H$$

Restricciones de no exceder la capacidad de producción de cada sucursal:

$$\sum_{j \in H} x_{ij} \leq m_i \ \forall \ i \in S$$

Naturaleza de las variables:

$$x_{ij} \geq 0 \ \forall \ i \in S, j \in H$$

Respecto al número de variables de decisión, se puede decir que habrán 12 de ellas, esto se debe a que la cardinalidad del conjunto |S| es de 4 elementos, de igual modo se entiende que la cardinalidad del conjunto |H| es de 3 elementos. Al tener las variables que miden los litros de helados comprados en diferentes sucursales, se puede decir que tenemos 12 diferentes combinaciones de variables de decisión en este caso.

Por otro lado, hablando de las restricciones de demanda, se puede decir que únicamente hay 3 restricciones, esto se debe a que el para todo que se encuentra en la restricción indexada es el que nos indica la cantidad de restricciones que se necesitarán para condicionar respecto a cada uno de los tipos de helado. También podemos concluir respecto a las restricciones de capacidad, donde el para todo indica que para cada uno de los elementos del conjunto S se debe tener una restricción, es decir, para la cardinalidad del conjunto |S|, que es 4, se esperan tener 4 restricciones distintas respecto a dicho conjunto de sucursales. No podemos olvidar la naturaleza de las variables, donde al igual que la variable de decisión se tendrán 12 restricciones ya que se combinan la cardinalidad de ambos conjuntos y dan la naturaleza de las variables respecto a ambos conjuntos de elementos.

***Problema Dual Indexado***

**VARIABLES DE DECISIÓN:**

$w_j$: *cambio en el costo si aumenta el requerimiento mínimo de el helado* $j \in H$ *en un litro*

$\pi_i$: *cambio en el costo de la cantidad de helado disponible en la sucursal* $i \in S$ *en un litro*

**FUNCIÓN OBJETIVO:**

$$\max \sum_{j \in H} w_j r_j + \sum_{i \in H} \pi_i m_i$$

**RESTRICCIONES:**

$$w_j + \pi_i \leq c_{ij} \ \forall \ i \in S, j \in H$$

Naturaleza de las variables:

$$w_j \geq 0 \; \forall \; j \in H$$
$$\pi_i \leq 0 \; \forall \; i \in S$$

Hablando del número de variables de decisión en el problema dual, se puede observar que las variables w, que representan las restricciones de demanda del problema primal, son parte del conjunto H, donde se puede ver que la cardinalidad de dicho conjunto es de 3, por tanto, tenemos 3 variables de decisión relacionadas con dichas restricciones. De igual manera se puede analizar las variables π, que están asociadas con las restricciones de capacidad del problema primal y que pertenecen al conjunto de sucursales, donde su cardinalidad es de 4, y como solo están asociadas a este conjunto se puede decir que solo hay 4 variables relacionadas con estas restricciones. En total, se puede concluir que hay 7 variables de decisión diferentes.

Por otro lado, hablando de las restricciones del problema dual, se observó que las restricciones presentan en su forma indexada ambos conjuntos S y H, por tanto, se puede concluir que la combinación de las cardinalidades de ambos conjuntos da 12 restricciones diferentes. Para finalizar es importante mencionar la naturaleza de las variables, donde se pueden ver igualmente 7 restricciones distintas gracias a la cardinalidad del primer grupo de variables de decisión w que es 3 y de las π que son 4, y al no estar asociadas entre sí, se puede decir que son la suma que da 7.

c)

<u>Escenario 1:</u>

Se le recomienda al señor Jorge seleccionar la sucursal de Titán, esto se debe a que el problema que se presenta tiene una variable dual asociada que en el caso de aumentar la producción en un litro de helado en la sucursal de Titán se presentaría un cambio en los costos totales, minimizando la función objetivo. Lo cual lo beneficiaría mucho más que escoger la sucursal de Usaquén, Salitre o Chico, ya que prometen un cambio de -2000 para las dos primeras y de 0 el último en la función objetivo, sin embargo, la variable relacionada con la sucursal de Titán tiene una promesa de disminuir en 3000 los costos totales, lo que sería mucho mejor para Jorge.

<u>Escenario 2:</u>

Se le recomienda al señor Jorge no incrementar el requerimiento mínimo de vainilla, esto debido a que si lo aumenta va a generar un gasto de $2,000 COP, no va a haber ganancia alguna, ya que el costo que implica dicho cambio es de $32,000 COP, por tanto, no se justifica dicho cambio al señor Jorge.

Problema 3 – Sensibilidad

a)

Variables de decisión:

$$x_{coco}: Litros\ de\ bebida\ de\ coco\ que\ se\ van\ a\ producir$$

$$x_{almendra}: Litros\ de\ bebida\ de\ almendra\ que\ se\ van\ a\ producir$$

Función Objetivo:

Maximizar la utilidad de la producción

$$\max 12{,}000 * x_{coco} + 9{,}500 * x_{almendra}$$

Restricciones:

No excederse en la cantidad de tiempo destinado para la producción

$$3.4 * x_{coco} + 2.6 * x_{almendra} \leq 720$$

No pasarse de la cantidad de coco disponible

$$0.35 * x_{coco} \leq 17.8$$

No pasarse de la cantidad de almendra disponible

$$0.37 * x_{almendra} \leq 15.2$$

No pasarse de los litros de agua disponibles

$$0.4 * x_{coco} + 0.47 * x_{almendra} \leq 42$$

No pasarse de la capacidad de producción

$$x_{coco} + x_{almendra} \leq 75$$

Naturaleza de las variables

$$x_{coco}, x_{almendra} \geq 0$$

El modelo se resuelve con Pulp en el archivo Python "Punto3-Sensibilidad.py"

Los resultados obtenidos de las variables de decisión son de:

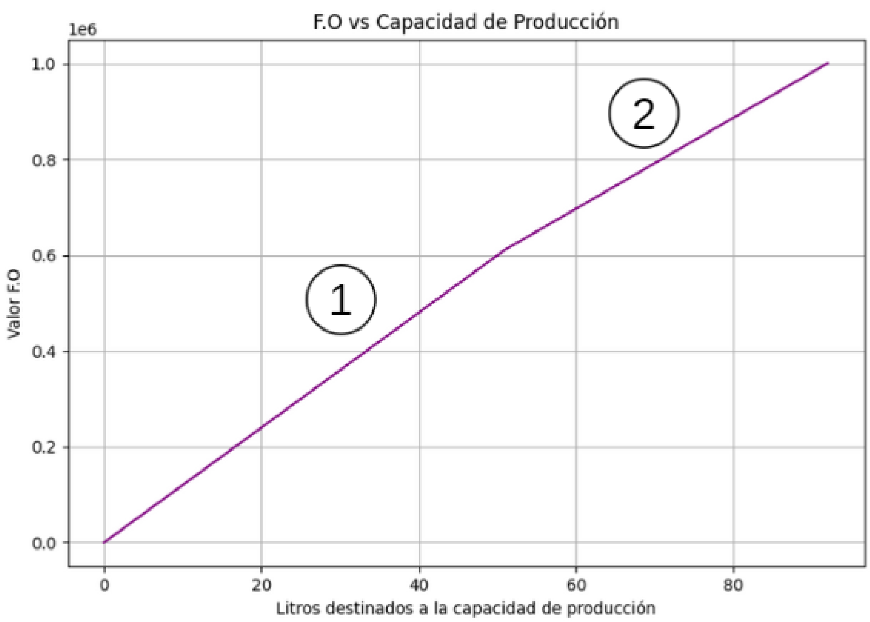
$$x_{coco} = 50.86\ L$$

$$x_{almendra} = 24.14\ L$$

Y el resultado de la función objetivo fue el siguiente:

$$\$839,643$$

b) Para este inciso se grafica el resultado en el archivo "Punto3-grafica_optimo"




Gráfica 3. Gráfica Función objetivo vs Capacidad de producción

Del gráfico de valores de la función objetivo podemos concluir que hay dos pendientes. La primera recta va a incrementar en el rango de 0 y 50.85 litros con una pendiente de 12000. Después de que se incrementen 50.85 litros, la base óptima va a cambiar y su pendiente también con un valor de 9500.

c) El Excel asociado a este inciso es "Solver_y_Sensibilidad_punto3.xsl"

Según el informe de sensibilidad de Excel, se puede afirmar que los valores de la capacidad de producción que hacen que la base siga siendo la misma base óptima son:

| **Nombre** | **Final Valor** | **Precio Sombra** | **Lado derecho Restricción** | **Permisible Aumentar** | **Permisible Reducir** |
|---|---|---|---|---|---|
| No pasarse de la capacidad de producción | 75 | 9500 | 75 | 16.94 | 24.14 |

Tabla 4. Reporte Sensibilidad Excel

$$-24.14 \leq \theta \leq 16.94$$

$$50.86 \leq capacidad\ de\ producción \leq 91.94$$

d)

Inicialmente se conocen los valores de las variables que indican los litros de bebida de coco y de almendra:

$$x_{coco} = 50.86$$

$$x_{almendra} = 24.14$$

Se necesita saber el problema en formato estándar, donde se puede observar de la siguiente manera:

$$\max 12{,}000 * x_{coco} + 9{,}500 * x_{almendra}$$

s.a,

$$3.4 * (50.86) + 2.6 * (24.14) + s_1 = 720$$

$$0.35 * (50.86) + s_2 = 17.8$$

$$0.37 * (24.14) + s_3 = 15.2$$

$$0.4 * (50.86) + 0.47 * (24.14) + s_4 = 42$$

$$0.75 * (50.86) + 0.84 * (24.14) + s_5 = 75$$

Dando como resultado de las variables en el óptimo lo siguiente:

$$X^* = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.14 \\ 484.31 \\ 0 \\ 6.27 \\ 10.31 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_{coco} \\ x_{almendra} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \end{array}$$

De donde se puede obtener la siguiente información:

$$X_B^* = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.14 \\ 484.31 \\ 6.27 \\ 10.31 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_{coco} \\ x_{almendra} \\ s_1 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{bmatrix} 3.4 & 2.6 & 1 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.37 & 0 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0.47 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 720 \\ 17.8 \\ 15.2 \\ 42 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2.86 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.86 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -92.29 & 0 & 0 & -2.6 \\ 0 & 1.06 & 1 & 0 & -0.37 \\ 0 & 0.20 & 0 & 1 & -0.47 \end{bmatrix}$$

Donde necesitaremos un vector θ, el cual es un vector lleno de 0 a excepción de la posición en la que se encuentra la restricción asociada a la capacidad de producción:

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix}$$

En adición, será crucial encontrar la nueva base óptima en términos de $\theta$ de la siguiente forma:

$$X_B^{*\prime} = B^{-1} * (b + \theta)$$

$$X_B^{*\prime} = X_B^{*} + (B^{-1} * \theta) \geq 0$$

$$X_B^{*\prime} = X_B^{*} + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ -2.6\theta \\ -0.37\theta \\ -0.47\theta \end{bmatrix} \geq 0$$

$$X_B^{*\prime} = \begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.14 \\ 484.31 \\ 6.27 \\ 10.31 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ -2.6\theta \\ -0.37\theta \\ -0.47\theta \end{bmatrix} \geq 0$$

$$X_B^{*\prime} = \begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.14 + \theta \\ 484.31 - 2.6\theta \\ 6.27 - 0.37\theta \\ 10.31 - 0.47\theta \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\theta \geq -24.14$$

$$\theta \leq 186.27$$

$$\theta \leq 16.94$$

$$\theta \leq 21.93$$

$$-24.14 \leq \theta \leq 16.94$$

Sabemos que la capacidad máxima para la producción actualmente es de 75 L, y según el rango de theta que se pudo observar anteriormente sabemos que si restamos 24.14 L al valor de 75 L o sumamos 16.95 L, dará exactamente igual al rango de valores que se tiene en el inciso c:

$$50.86 \leq capacidad\ de\ producción \leq 91.94$$

e)

$$Z^* = C^T X_B^{*\prime} = [12{,}000 \quad 9{,}500 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.14+\theta \\ 484.31-2.6\theta \\ 6.27-0.37\theta \\ 10.31-0.47\theta \end{bmatrix}$$

$$Z^* = 610{,}320 + 229{,}330 + 9{,}500\theta = 839{,}650 + 9500\theta$$

Para $\theta$ = -24.14 la función objetivo es de:

$$\$610{,}286$$

Para $\theta$ = 16.95 la función objetivo es de:

$$\$1{,}000{,}556$$

f)

i. Para poder tomar una decisión al respecto se debe hacer el siguiente análisis:

La función objetivo actual es de $839,643, y se tiene que analizar si al quitar 15 litros a la capacidad de producción va a empeorar para tomar una buena decisión.

Matemáticamente esto se puede lograr tomando un $\theta = -15\ L$ y cambiar el vector x en el punto óptimo:

$$X_B^{*\prime} = \begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.14+\theta \\ 484.31-2.6\theta \\ 6.27-0.37\theta \\ 10.31-0.47\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.14-15 \\ 484.31+2.6(15) \\ 6.27+0.37(15) \\ 10.31+0.47(15) \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 50.86 \\ 9.14 \\ 523.31 \\ 11.82 \\ 17.36 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_{coco} \\ x_{almendra} \\ s_1 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} \end{array}$$

Como se puede ver, el vector con las variables básicas cambió, por tanto, la función objetivo también cambiará de la siguiente forma:

$$Z^* = C^T X_B^{*\prime} = [12{,}000 \quad 9{,}500 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 50.86 \\ 9.14 \\ 523.31 \\ 11.82 \\ 17.36 \end{bmatrix} = 610{,}320 + 86{,}830 = \$697{,}143$$

Teniendo una disminución clara en la función objetivo, sin embargo, se quiere comparar si es cambio en la función objetivo es menor que lo que se espera ahorrarse:

$$\$839{,}643 - \$697{,}150 = \$142{,}500$$

A lo que se puede concluir que si se reducen 15 L en la capacidad de producción y se ahorren $120,000 van a haber perdidas ya que la utilidad va a ser menor por un monto de $22,500 y no sería beneficioso el "ahorro" que tenían pensado.

ii. Para poder observar si la proyección es correcta, se debe hacer el siguiente análisis:

La función objetivo actual es de $839,643, y se tiene que analizar si al quitar 24 litros a la capacidad de producción va a ser igual a lo proyectado.

Matemáticamente esto se puede lograr tomando un $\theta = -24\ L$ y cambiar el vector x en el punto óptimo:

$$X_B^{*\prime} = \begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.14 + \theta \\ 484.31 - 2.6\theta \\ 6.27 - 0.37\theta \\ 10.31 - 0.47\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.14 - 24 \\ 484.31 + 2.6(24) \\ 6.27 + 0.37(24) \\ 10.31 + 0.47(24) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.86 \\ 0.14 \\ 576.71 \\ 15.15 \\ 21.59 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_{coco} \\ x_{almendra} \\ s_1 \\ s_3 \\ s_4 \end{array}$$

Como se puede ver, el vector con las variables básicas cambió, por tanto, la función objetivo también cambiará de la siguiente forma:

$$Z^* = C^T X_B^{*\prime} = [12{,}000 \quad 9{,}500 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 50.86 \\ 0.14 \\ 576.71 \\ 15.15 \\ 21.59 \end{bmatrix} = 610{,}320 + 1{,}330 = \$611{,}650$$

$$\$839{,}643 - 611{,}650 = \$228{,}000$$

Respecto a la proyección, se puede decir que no es igual la disminución de la utilidad que ocurriría en dicho caso. Esto debido a que, si se reduce la producción por 24 Litros, la utilidad también se reduciría alrededor de $228,000 y no por $295,000.

Para compensar la pérdida durante el periodo de cierre temporal, sería conveniente aumentar la cantidad de esencia de coco disponible ya que es un producto escaso. Esto lo podemos ver en el reporte de sensibilidad ya que hay un precio sombra positivo sobre esa restricción.

iii. Para poder tomar una decisión respecto al plan de expansión se debe hacer el siguiente análisis:

La función objetivo actual es de $839,643, y se tiene que analizar si al aumentar 15 litros a la capacidad de producción va a mejorar la función objetivo para tomar una buena decisión.

Matemáticamente esto se puede lograr tomando un $\theta = 16\ L$ y cambiar el vector x en el punto óptimo:

$$X_B^{*\prime} = \begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.14 + \theta \\ 484.31 - 2.6\theta \\ 6.27 - 0.37\theta \\ 10.31 - 0.47\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.1 + 16 \\ 484.31 - 2.6(16) \\ 6.27 - 0.37(16) \\ 10.31 - 0.47(16) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.86 \\ 40.1 \\ 442.71 \\ 0.34 \\ 2.79 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_{coco} \\ x_{almendra} \\ s_1 \\ s_3 \\ s_4 \end{array}$$

Como se puede ver, el vector con las variables básicas cambió, por tanto, la función objetivo también cambiará de la siguiente forma:

$$Z^{*} = C^{T}X_{B}^{*\prime} = [12{,}000 \quad 9{,}500 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 50.86 \\ 40.1 \\ 442.71 \\ 0.34 \\ 2.79 \end{bmatrix} = 610{,}320 + 380{,}950$$

$$= 991{,}643$$

Teniendo un aumento claro en la función objetivo, sin embargo, se quiere comparar si es cambio en la función objetivo es igual a lo que se tenía proyectado:

$$\$991{,}643 - \$839{,}643 = \$152{,}000$$

A lo que se puede concluir que si se incrementan 16 L en la capacidad de producción y se llega a un costo adicional de $152,000 no van a haber pérdidas ni ganancias al respecto, por lo que se puede llegar a la conclusión de que no va a ser conveniente ni tampoco beneficioso este cambio.

iv. Se puede observar el nuevo modelo matemático luego de agregarle la nueva variable:

Variables de decisión:

$$x_{coco}: Litros\ de\ bebida\ de\ coco\ que\ se\ van\ a\ producir$$

$$x_{almendra}: Litros\ de\ bebida\ de\ almendra\ que\ se\ van\ a\ producir$$

$$x_{veggiefusion}: Litros\ de\ bebida\ de\ coco\ y\ almendra\ que\ se\ van\ a\ producir$$

Función Objetivo:

Maximizar la utilidad de la producción

$$\max 12{,}000 * x_{coco} + 9{,}500 * x_{almendra} + 10{,}500 * x_{veggiefusion}$$

Restricciones:

No excederse en la cantidad de tiempo destinado para la producción

$$3.4 * x_{coco} + 2.6 * x_{almendra} + 5.5 * x_{veggiefusion} \leq 720$$

No pasarse de la cantidad de coco disponible

$$0.35 * x_{coco} + 0.06 * x_{veggiefusion} \leq 17.8$$

No pasarse de la cantidad de almendra disponible

$$0.37 * x_{almendra} + 0.05 * x_{veggiefusion} \leq 15.2$$

No pasarse de los litros de agua disponibles

$$0.4 * x_{coco} + 0.47 * x_{almendra} + 0.09 * x_{veggiefusion} \leq 42$$

No pasarse de la capacidad de producción

$$x_{coco} + x_{almendra} + x_{veggiefusion} \leq 75$$

Naturaleza de las variables

$$x_{coco}, x_{almendra}, x_{veggiefusion} \geq 0$$

Los resultados obtenidos de las variables de decisión son de:

$$x_{coco} = 45.86\ L$$

$$x_{almendra} = \ 0$$

$$x_{veggiefusion} = 29.14\ L$$

Y el resultado de la función objetivo fue el siguiente:

$$\$856{,}293$$

Lo que indica que **SÍ** debería producir este nuevo tipo de jugo, ya que la utilidad que va a generar en conjunto va a ser mayor a la que se tenía anteriormente con solo las bebidas de coco y de almendra.

**BONO:**

Para poder analizar de manera matemática si habrá mejora con esta nueva variable se tienen que ver cómo actúan los costos reducidos con la base óptima con la integración de la nueva variable para ello se analiza el problema de manera matricial:

$$I_B = \{1{,}2{,}3{,}5{,}6\} \quad I_N = \{4{,}7{,}8\}$$

$$C_B^T = [12{,}000 \quad 9{,}500 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad C_N^T = [0 \quad 0 \quad 10{,}500]$$

$$B = \begin{bmatrix} 3.4 & 2.6 & 1 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.37 & 0 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0.47 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 720 \\ 17.8 \\ 15.2 \\ 42 \\ 75 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2.86 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.86 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -92.29 & 0 & 0 & -2.6 \\ 0 & 1.06 & 1 & 0 & -0.37 \\ 0 & 0.20 & 0 & 1 & -0.47 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5.5 \\ 1 & 0 & 0.06 \\ 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.09 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad r^T = C_N^T - C_B^T B^{-1} N = [0 \quad 0 \quad 10{,}500] - [7{,}142.86 \quad 9{,}500 \quad 9{,}928.57]$$

$$r^T = [-7{,}142.86 \quad -9{,}500 \quad 571.43]$$

Donde se puede ver que, agregando la nueva variable de decisión al problema, tiene una promesa de mejora en los costos reducidos en la variable veggifusion, por tanto, esta entra a la base:

Dirección de movimiento

**Entra** X8

$$a_8 = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 0.06 \\ 0.05 \\ 0.09 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d_8 = \begin{bmatrix} -B^{-1}a_8 \\ \hline e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.17 \\ -0.83 \\ -2.76 \\ 0.26 \\ 0.37 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Longitud de movimiento

$$x = \begin{bmatrix} 50.86 \\ 24.14 \\ 484.31 \\ 0 \\ 6.27 \\ 10.31 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha = \min_{j \in I_B} \left\{ -\frac{x_j}{d_j^q} \middle| d_j^q < 0 \right\} = \min\{296.68, 29.13, 175.29\} = 29.13$$

**Sale** X2

Aquí podemos ver que X2 o X_almendra sale de la base por tener menor longitud de movimiento.

Actualización

$$x^{t+1} = x^t + \alpha d_8 = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 45.86 \\ 0 \\ 403.81 \\ 13.74 \\ 21.03 \\ 0 \\ 0 \\ 29.14 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_{coco} \\ x_{almendra} \\ s_1 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_2 \\ s_5 \\ x_{veggiefusion} \end{array} \end{array}$$

Luego de ver que la variable almendra sale de la base para que entre veggiefusion se tiene que confirmar que esté en el nuevo punto óptimo:

$$I_B = \{1,8,3,5,6\} \quad I_N = \{4,7,2\}$$

$$C_B^T = [12{,}000 \quad 10{,}500 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad C_N^T = [0 \quad 0 \quad 9{,}500]$$

$$B = \begin{bmatrix} 3.4 & 5.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0.06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0.09 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 720 \\ 17.8 \\ 15.2 \\ 42 \\ 75 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3.45 & 0 & 0 & -0.21 \\ 0 & -3.45 & 0 & 0 & 1.21 \\ 1 & 7.24 & 0 & 0 & -5.93 \\ 0 & 0.17 & 1 & 0 & -0.06 \\ 0 & -1.07 & 0 & 1 & -0.03 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.37 \\ 0 & 0 & 0.47 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad r^T = C_N^T - C_B^T B^{-1} N = [0 \quad 0 \quad 9{,}500] - [5{,}172.41 \quad 10{,}189.66 \quad 10{,}189.65]$$

$$r^T = [-5{,}172.41 \quad -10{,}189.66 \quad -689.65]$$

Para conocer el valor de la nueva función objetivo:

$$Z^* = C_B^T X_B^* = [12{,}000 \quad 10{,}500 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 45.86 \\ 29.14 \\ 403.81 \\ 13.74 \\ 21.03 \end{bmatrix} = \$856{,}293.1$$

A lo que se puede concluir que **SÍ** hay mejora en la función objetivo al agregar esta nueva variable al problema, donde la nueva utilidad es de \$856,293.1 y la anterior era de \$839,642.86, concluyendo así que habría una mejoría en la función objetivo de \$16,650.14 .

Bibliografía

https://copa-uniandes.github.io/optimizacion/Guias/1.%20Notacion%20matematica/Matematica%20en%20word.html

[Rardin] R. Rardin. Optimization in operations research. Prentice Hall. 1998.

[Bazaraa] M. Bazaraa, J. Jarvis &H. Sherali. Linear programming and network flows. John Wiley & Sons. 2010.

*Visualiza datos con python*. (s. f.). EDteam - En Español Nadie Te Explica Mejor. https://ed.team/blog/visualiza-datos-con-python

Khan, M. W. (2022, 21 diciembre). Trazar un diccionario Python en orden de valores clave. Delft Stack. https://www.delftstack.com/es/howto/python/plot-dictionary-python/