

Entrenamiento 3

Reglas

- El entrenamiento debe presentarse en grupos de máximo dos (2) personas.
- A lo largo del enunciado se empleará punto (.) como separador decimal y coma (,) como separador de miles.
- Debe utilizar el formato de entrega de actividades que se encuentra en Bloque Neón.
- Envíe por Bloque Neón su informe en **formato PDF** y todos sus archivos de soporte (implementaciones en archivos de MS-Excel, Python, fotos etc.) necesarios para la realización de la tarea comprimidos en un solo archivo *.zip (abstenerse de utilizar .rar u otros formatos de compresión) antes de la fecha y hora indicada. Sólo se calificará el último envío realizado.
- El informe y la carpeta comprimida deben incluir el *login*, sin punto, de los dos integrantes, separados por un guion bajo. Por ejemplo, lclevy_aruedal.pdf.
- El informe y los archivos de soporte deben ser colgados en Bloque Neón únicamente por un integrante del grupo señalado para tal fin en el formato de entrega.
- La entrega enviada dentro del plazo establecido recibirá una calificación sobre 5.00.
- La entrega enviada (también por Bloque Neón) hasta dos horas después de haber terminado el plazo, se calificará sobre 4.00. Pasadas dos horas de haber terminado el plazo, **no se recibirá ninguna actividad por ningún canal**.
- Si los archivos relacionados a un inciso no fueron adjuntados, la calificación de dicho inciso será 0.0.
- Todos los archivos de soporte deben incluir internamente el nombre o *login* (Uniandes) de los participantes.
- El informe debe ser autocontenido, es decir, debe contener la presentación de los resultados y la explicación sobre cómo los obtuvo, la interpretación y el análisis de los resultados obtenidos, y las conclusiones.
- Deben hacer uso del editor de fórmulas de Word, de lo contrario, habrá una penalización.
- El informe debe tener una extensión máxima de **30 páginas**. En caso de exceder dicho límite, habrá una penalización. Para organizar varias matrices en una fila, pueden organizarlas en una tabla de Word.
- Todo resultado presentado en el informe debe contar con el procedimiento correspondiente.
- Cualquiera de los integrantes del grupo de trabajo podrá ser llamado a sustentar la solución entregada. En este caso, la nota de la sustentación será el 100% de la nota **del grupo** en la actividad.
- Cualquier sospecha de fraude será manejada de acuerdo con el reglamento de la Universidad (Artículo 4 del Reglamento General de Estudiantes de Pregrado).

Problema 1 - Simplex y Dualidad (30 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{llllllllll} \max & 17x_1 & + & 30x_2 & - & 4x_3 & + & 5x_4 & - & 10x_5 \\ \text{s. a.} & & & & & & & & & \\ & 7x_1 & & & + & 15x_3 & & & & \leq & 105 \\ & & & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & & \leq & 765 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & & \leq & 220 \\ & x_1 & & & + & 2x_3 & & & + & x_5 & \geq & 120 \\ & & & & & & & 3x_4 & + & x_5 & \leq & 225 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Nota: para mostrar su procedimiento, debe usar las fórmulas y matrices del editor de Word. En el siguiente enlace encuentra información: <https://copa-uniandes.github.io/optimizacion/Guias/1.%20Notacion%20matematica/Matematica%20en%20word.html>. Esto aplica siempre que se vayan a reportar matrices, vectores, formulas, ecuaciones, etc.

- Escriba el problema anterior en formato canónico.
- A partir del formato canónico, escriba el problema anterior en formato estándar.
- Plantee el problema del literal anterior en formato matricial. Debe mostrar explícitamente cada una de las matrices y vectores del problema.
- Haciendo uso de MS-Excel¹ encuentre una solución básica factible inicial utilizando el “Método de las Dos Fases” o el “Método de la Gran M” (**uno** de los dos, el que escojan). Para la solución inicial factible hallada, reporte el valor de las variables básicas y el valor de la función objetivo. Muestre su procedimiento completo solo hasta llegar a una primera solución factible del problema original.
- A partir de la siguiente base factible $\{x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_5\}$, realice **DOS** (2) iteraciones del Método Simplex haciendo uso de MS-Excel¹. Realice la revisión de optimalidad, el cálculo de la dirección de movimiento, el cálculo de la longitud de movimiento y la actualización para estas dos iteraciones. En cada iteración, indique si se puede declarar optimalidad y concluya al respecto. Muestre su procedimiento completo.

Bono (5 puntos): Realice las iteraciones necesarias para llegar al óptimo. Realice la revisión de optimalidad, el cálculo de la dirección de movimiento, el cálculo de la longitud de movimiento y la actualización para estas dos iteraciones. En cada

¹ Anexe el archivo *.xlsx al archivo *.zip, junto con el resto de los archivos de soporte.

iteración, indique si se puede declarar optimalidad y concluya al respecto. Muestre su procedimiento completo.

- f. A partir del problema primal en formato canónico (inciso a), formule el problema dual asociado. Impleméntelo utilizando Python–PuLP y reporte sus resultados (valor de las variables duales y de la función objetivo) en su informe.
- g. A partir de la base $\{x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_5\}$ en el problema **Primal**, encuentre **analíticamente** la solución correspondiente en el problema dual. Calcule el valor de la función objetivo en ambos problemas. ¿Qué puede concluir? Muestre sus cálculos y resuma sus resultados en el formato de la Tabla 1.

Tabla 1. Resultados inciso g.

Solución básica del problema primal											
¿Factible?	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	Z^P
Solución básica del problema dual											
¿Factible?	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	Z^D

Note que s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 son las holguras asociadas a cada restricción del problema primal y r_1, r_2, r_3, r_4 y r_5 son las holguras asociadas a cada restricción del problema dual.

- h. Partiendo de la solución óptima del problema **Dual**, y utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Presente explícitamente el procedimiento llevado a cabo. Reporte el valor de las variables de decisión (incluyendo las holguras) y de la función objetivo en el óptimo del problema Primal. Confirme sus resultados resolviendo el problema primal en Python haciendo uso de la librería PuLP. Use la tabla para reportar los resultados.

Tabla 2. Resultados inciso h.

Solución básica del problema primal											
¿Factible?	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	Z^P
Solución básica del problema dual											
¿Factible?	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	Z^D

Note que s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 son las holguras asociadas a cada restricción del problema primal y r_1, r_2, r_3, r_4 y r_5 son las holguras asociadas a cada restricción del problema dual.

Problema 2 – Dualidad (30 puntos)



McDantzig es un restaurante de comida rápida ubicado en la ciudad de Bogotá, el cual se especializa en la preparación de deliciosas hamburguesas, perros calientes y sándwiches. Debido a su gran éxito, el restaurante ha decidido incursionar en el lanzamiento de nuevos productos que complementen su menú y, recientemente, anunció la inclusión de sus propias malteadas, las *SimplexShakes*.

El fundador del restaurante, el señor Jorge, ha determinado que ofrecerá tres sabores de malteadas: vainilla, fresa y chocolate. La receta de las malteadas es simple pues consta

únicamente del helado del sabor correspondiente batido durante unos minutos en una máquina especial.

Por un lado, el señor Jorge ha contratado a un grupo de expertos para que le ayuden a estimar la demanda mensual esperada de malteadas. Lo anterior para determinar los litros de helado de cada sabor que se requiere como mínimo para satisfacer dicha demanda. Tras recibir las estimaciones de los expertos y realizar algunos cálculos, el señor Jorge ha resumido en la Tabla 1 el requerimiento mínimo de helado mensual (en litros) de cada sabor para cumplir con la demanda esperada de malteadas.

Tabla 1. Requerimiento mínimo mensual (en litros) de cada sabor de helado.

Sabor de helado	Requerimiento mínimo mensual de helado (en litros)
Vainilla	70
Fresa	45
Chocolate	55

Por otro lado, el señor Jorge lo ha contratado a usted para que lo ayude en la logística de abastecimiento de los tres sabores de helado. Él le ha comentado que, para ofrecer las mejores malteadas, ha contactado a la mejor heladería de la ciudad, *Popti*, la cual cuenta con cuatro puntos de venta diferentes en la ciudad. Dado que estos puntos manejan distintos volúmenes de ventas, la gerente de Popti le ha informado al señor Jorge que cada una de las cuatro sucursales está en capacidad de proveerle una cantidad máxima mensual de litros de helado a McDantzig. Esta cantidad se muestra en la Tabla 2 y corresponde a la suma de litros de helado de los tres sabores (vainilla, fresa y chocolate) que puede proveer cada punto de venta.

Tabla 2. Cantidad máxima mensual de helado (en litros) que puede proveer cada sucursal.

Sucursal	Cantidad máxima mensual (en litros)
Usaquén	45
Salitre	40
Chico	45
Titán	40

Finalmente, Popti le ha informado al señor Jorge que el costo de cada litro de helado que le vende varía dependiendo del sabor y de la sucursal a la que se le pide. Esto debido a que cada punto de venta maneja una estructura de costos diferente. La Tabla 3 muestra los precios de un litro de helado de vainilla, fresa y chocolate en cada sucursal de Popti.

Tabla 3. Costo por litro de helado (\$COP/litro).

Sabor de helado	Sucursal			
	Usaquén	Salitre	Chico	Titán
Vainilla	30,000	31,000	32,000	29,000
Fresa	29,000	28,000	30,000	28,000
Chocolate	33,000	32,000	34,000	31,000

El señor Jorge se encuentra interesado en minimizar los costos de adquisición de los litros de helado requeridos para sus malteadas. Por esta razón, como persona experta en optimización, usted debe planificar la logística óptima de abastecimiento de cada sabor de helado para que McDantzig logre satisfacer su demanda esperada de malteadas al menor costo posible.

- Formule un modelo de optimización lineal **explícito** (no indexado) para determinar la logística de abastecimiento de helado, definiendo claramente las variables de decisión, restricciones y función objetivo. Implemente el modelo formulado utilizando Python-PuLP y reporte la solución óptima (función objetivo y valor de las variables).
- Formule el problema dual **explícito** (no indexado) asociado al modelo de optimización lineal formulado en el inciso anterior. Implemente el modelo dual utilizando Python-PuLP, reporte el valor de la función objetivo y comente la relación de este valor con el de la función objetivo obtenida en el inciso anterior. Finalmente, reporte el valor de las variables duales.

Bono (5 puntos):

Formule un modelo de optimización lineal **indexado** para determinar la logística de abastecimiento de helado definiendo claramente sus conjuntos, parámetros, variables de decisión, restricciones y función objetivo. Además, formule el problema dual **indexado** asociado. Comente sobre el número de variables y restricciones del

problema primal y del problema dual en términos de la cardinalidad de los conjuntos.

Nota: en este bono no se otorgarán puntos parciales. Es decir, debe estar completamente bien para obtener el puntaje.

- c. A partir de los resultados obtenidos, evalúe y concluya acerca de los siguientes dos escenarios independientes entre sí.

Escenario 1: La gerente de Popti le ha comunicado al señor Jorge su disposición para aumentar la cantidad máxima mensual de producción de helado en una de sus sucursales en un litro. Como muestra de la buena relación existente, Popti le ha permitido al señor Jorge la posibilidad de elegir en cuál de las cuatro sucursales implementar dicho incremento. ¿Cuál sucursal le recomendaría al señor Jorge seleccionar y por qué?

Escenario 2: El señor Jorge está planeando aumentar **el requerimiento mínimo de helado de vainilla en un litro**, puesto que este es el sabor favorito de sus clientes y le preocupa quedar desabastecido de este sabor. Los cálculos del señor Jorge indican que este litro adicional le generaría un ingreso de \$30,000 COP. ¿Qué recomendación le daría al señor Jorge sobre su plan?

Problema 3 – Sensibilidad (40 puntos)



VeggieDrinks es una empresa innovadora que ofrece bebidas vegetales diseñadas para promover una mejor nutrición y adaptarse a diversos estilos de vida. Actualmente, la empresa produce dos bebidas: de coco y de almendra.

Para producir un litro (L) de bebida de coco se requieren $0.40 L$ de agua y $0.35 L$ de extracto de coco; mientras que para producir un litro de bebida de almendra se requieren $0.47 L$ de agua y $0.37 L$ de pasta de almendra. Cabe mencionar que la cantidad faltante para completar un litro de los dos tipos de bebidas corresponde a saborizantes

naturales, azúcares añadidos y vitaminas que la empresa tiene en abundancia, por lo que no es necesario considerarlos al planear la producción. Por ejemplo, para producir un (1) litro de bebida de coco, se requieren $0.40 L$ de agua y $0.35 L$ de extracto de coco. Esto significa que los $0.25 L$ restantes para completar un litro corresponden a saborizantes naturales, azúcares añadidos y vitaminas, que no son considerados en la planeación de la producción. Finalmente, el tiempo de producción de un litro de bebida de coco es de 3.4 minutos y de bebida de almendra es de 2.6 minutos.

Al inicio de cada semana, el proveedor de VeggieDrinks le proporciona los insumos necesarios para la producción de sus bebidas. Adicionalmente, la maquinaria con la que cuenta la empresa está en capacidad de producir semanalmente, máximo, 0.75 litros de bebidas de cualquier tipo (en total). Debido al mal estado de la maquinaria, esta solo puede operar, a lo sumo, durante 4 horas al día. Es decir, y dado que la producción solo se lleva a cabo jueves, viernes y sábados, el tiempo disponible para la producción semanal es de 12 horas. La Tabla 1 muestra la información sobre la disponibilidad semanal de todos los insumos.

Tabla 1. Disponibilidad semanal de insumos.

Insumo	Cantidad disponible
Extracto de coco	17.8 L
Pasta de almendra	15.2 L
Agua	42 L
Capacidad de producción	75 L
Tiempo de producción	12 horas

Teniendo en cuenta el precio de venta, los costos de los insumos y los costos de producción, la empresa tiene una utilidad de \$12,000 COP y de \$9,500 COP por cada litro que venda de bebida de coco y de bebida de almendra, respectivamente. Debido a la creciente popularidad de *VeggieDrinks*, la empresa vende todo lo que produce.

- a. Teniendo en cuenta que la empresa desea conocer cuántos litros de cada tipo de bebida vegetal debe producir a la semana para maximizar su utilidad, formule **explícitamente** el problema anterior e implemente el modelo utilizando Python-PuLP. Reporte la solución óptima, es decir, el valor de la función objetivo y el de las variables de decisión.
- b. Implemente un procedimiento computacional que construya una gráfica del valor óptimo de la función objetivo en función de la capacidad de producción de VeggieDrinks. Reporte la gráfica e interprete la o las pendientes obtenidas.
- c. Haciendo uso de Solver de MS-Excel, encuentre el rango de valores para la capacidad de producción en el que puede variar este parámetro sin que cambie la base óptima encontrada en el inciso a.
- d. Suponga que la capacidad de producción aumenta (o disminuye) en θ kilogramos respecto a su valor actual. Construya la expresión matemática que muestra el valor de las variables básicas en función de (θ) . A partir de esta expresión encuentre **analíticamente** el rango hallado en el inciso c para confirmar sus resultados. Muestre todos sus cálculos y los elementos que usa (índices básicos, matriz básica, etc.)
- e. Encuentre una expresión matemática que muestre el valor de la función objetivo en función de θ . Calcule la función objetivo a partir de esta expresión para los valores extremos del rango de θ encontrados en el inciso anterior.
- f. VeggieDrinks está evaluando cuatro alternativas. Teniendo en cuenta que la empresa debe evaluar las alternativas de manera **independiente** a partir de la solución encontrada en el inciso a.
- i. Debido al desgaste de la maquinaria, VeggieDrinks está pensando en reducir la capacidad de producción en 15 litros para ahorrarse \$120,000. ¿Es una buena decisión para la empresa? Argumente **matemáticamente**.
 - ii. Debido al incumplimiento de las normas de Buenas Prácticas de Manufactura (BPM) en la producción de bebidas vegetales, existe la posibilidad de que la empresa cierre temporalmente mientras hace las correcciones necesarias para cumplir las BPM. En caso de que ocurra el cierre, durante este período, se estima que la capacidad de producción se reducirá en 24 litros. Se proyecta que esta situación generará una disminución en la utilidad de \$295,000. ¿Es correcta esta proyección? Argumente **matemáticamente**. Además responda: ¿Qué estrategias podrían adoptarse para compensar la pérdida de utilidad durante el período de cierre temporal?

- iii. Debido a la creciente popularidad de las bebidas vegetales, la empresa quiere renovar la maquinaria con el fin de incrementar su capacidad de producción en 16 litros por un costo adicional de \$152,000. ¿Le conviene este plan de expansión a la empresa? Argumente matemáticamente.
- iv. La empresa está considerando lanzar un nuevo producto llamado "VeggieFusion", el cual combina bebida vegetal de coco y almendra. Se estima que este producto generaría una utilidad de \$10,500 COP por cada litro. Además, un litro de esta bebida requeriría de 0.06 L de extracto de coco, 0.05 L de pasta de almendra, 0.09 L de agua, y 5.5 minutos de tiempo de procesamiento. ¿Debería VeggieDrinks producir este nuevo tipo de bebida vegetales? Argumente resolviendo el modelo nuevamente y mostrando los resultados.

Bono (5 puntos): Argumente matemáticamente la respuesta (es decir, sin necesidad de resolver el modelo nuevamente).