

Fundamentos de Electromagnetismo

Iniciación al Cálculo Numérico en Electromagnetismo

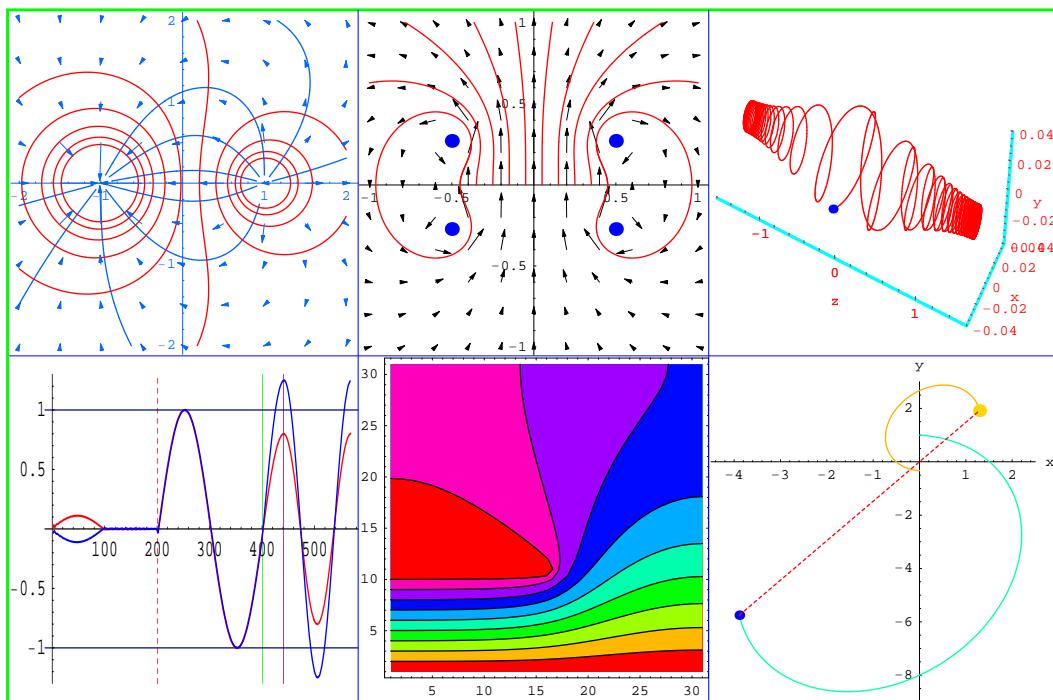


Figura 1:

Bernardo García Olmedo ¹

(23 de septiembre de 2006)

¹Dpto. de Electromagnetismo y Física de la Materia -Universidad de Granada

Índice general

I Campo electromagnético en el vacío	1
1. Campo eléctrico y campo magnético	5
1.1. Descripción de las magnitudes electromagnéticas	5
1.1.1. Espacio de los campos y las fuentes	5
1.2. Fuentes de un campo vectorial. Teorema de Helmholtz	6
1.3. Clasificación de los campos según sus fuentes	8
1.3.1. Descripción microscópica	11
1.3.2. Descripción macroscópica	15
1.4. Conservación de la carga; ecuación de continuidad	18
1.4.1. Corrientes estacionarias	19
1.5. Ley de fuerzas de Lorentz. Definición de los campos	20
1.5.1. Trabajo sobre una carga en movimiento	21
1.6. El campo electromagnético en el marco de la relatividad de Galileo	22
1.6.1. Relatividad de Galileo	22
1.6.1.1. Vectores y escalares. Invariantes galileanos	23
1.6.1.2. Leyes de transformación de los campos	24
1.7. Problemas	26
2. Campos estáticos	37
2.1. Introducción	37
2.2. Campo electrostático	37
2.2.1. Ley de Coulomb	37
2.2.2. Fuentes del campo electrostático; potencial	39
2.2.3. Energía potencial	41
2.2.4. Ecuaciones de Poisson y Laplace	44
2.2.5. Estructuras simples del campo eléctrico	44
2.3. Campo magnético producido por corrientes estacionarias. Fuerza sobre corrientes estacionarias	45
2.3.1. Campo	45
2.3.2. Fuerza	47
2.3.3. Fuentes del campo magnético. Potencial vector	48
2.3.4. Estructuras simples del campo magnético	50
2.4. Problemas	51

3. Fuentes del campo dinámico: Leyes de Maxwell	103
3.1. Ley de inducción de Faraday	103
3.1.1. Ley de Faraday para caminos en movimiento	106
3.2. Corriente de desplazamiento en el vacío	109
3.3. Potenciales del campo electromagnético	110
3.4. Ecuaciones de Maxwell en el vacío	112
3.5. Problemas	113
4. Consecuencias de las Ecuaciones de Maxwell	121
4.1. Energía electromagnética. Vector de Poynting	121
4.1.1. Energía de sistemas de carga y corriente estacionaria	125
4.2. Ecuaciones de onda para los campos y los potenciales	127
4.2.1. Propagación de ondas electromagnéticas planas en el vacío	129
4.2.1.1. Ondas planas monocromáticas	133
4.3. Potenciales retardados	134
4.4. Relación de las ondas electromagnéticas con sus fuentes. Emisión de radiación	136
4.5. Problemas	142
4.6. Resolución de las ecuaciones de Maxwell unidimensionales mediante el método FD-TD: <i>FDTD_1D – vacio.nb</i>	152
4.6.1. La ecuación de onda unidimensional	152
4.6.2. Solución numérica	153
II Multipolos	165
5. Campos Multipolares estáticos	169
5.1. Expansión multipolar de una distribución estática de carga	169
5.1.1. Expansión multipolar de la energía de interacción de un sistema de carga con un campo externo	172
5.1.2. Multipolos puntuales	173
5.1.3. El dipolo eléctrico	175
5.1.3.1. Energía, par y fuerza de un dipolo	176
5.1.4. Densidades dipolares	177
5.2. Desarrollo multipolar de una distribución de corriente estacionaria	179
5.2.1. La espira plana como dipolo magnético	181
5.2.2. El dipolo magnético	182
5.2.2.1. Potencial magnético escalar	183
5.2.2.2. Relación entre el momento magnético y el momento angular	186
5.2.2.3. Fuerza, par y energía potencial sobre un dipolo magnético en campo externo	187
5.3. Problemas	192

6. Movimiento de partículas en un campo electromagnético	203
6.1. Introducción	203
6.2. Movimiento de una carga en campos uniformes	204
6.2.1. Campo eléctrico constante	204
6.2.2. Campo eléctrico lentamente variable	204
6.2.3. Campo magnético constante. Movimiento ciclotrónico	205
6.2.4. Campo magnético lentamente variable	208
6.2.5. Campo eléctrico y magnético	209
6.2.5.1. \vec{E} y \vec{B} perpendiculares. Deriva ambipolar	209
6.2.5.2. \vec{E} y \vec{B} paralelos. Enfoque magnético	210
6.3. Movimientos de cargas en campos no homogéneos	211
6.3.1. Optica electrónica	211
6.3.2. Difusión (scattering) de partículas en fuerzas centrales	213
6.3.3. Botellas magnéticas	217
6.4. Precesión de un dipolo en un campo magnético	220
6.5. Problemas	221
6.6. Ejemplos con Mathematica	222
6.6.1. Compresión de órbitas. <i>movimiento - cargas - EpB.nb</i>	222
6.6.2. Enfoque electromagnético. <i>enfoque_EpB.nb</i>	224
6.6.3. Confinamiento magnético. <i>botella - magnetica.nb</i>	227
6.6.3.1. Campo de una espira	228
6.6.3.2. Campo de dos espiras situadas en $z = \pm d/2$	229
6.6.3.3. Botella magnética	229
6.6.3.4. Confinamiento magnético	231
6.6.4. Lente electrostática. <i>lente - electrostatica.nb</i>	238
6.6.5. Órbitas de dos cargas. <i>orbitas - cargas.nb</i>	243
III Campo electromagnético en los medios materiales	249
7. Medios polarizables	255
7.1. Mecanismos de polarización	255
7.1.1. Polarización dieléctrica	255
7.1.2. Mecanismos de magnetización	257
7.2. Cargas y corrientes de polarización	258
7.2.1. Cargas de polarización eléctrica	258
7.2.2. Corrientes de polarización	260
7.2.3. Corrientes de polarización magnética	261
7.2.4. Potencial magnético escalar. Formalismo de polos magnéticos .	263
7.3. Desplazamiento eléctrico e intensidad magnética	265
7.3.1. Susceptibilidades, constante dieléctrica y permeabilidad magnética	266
7.4. Campos estáticos en medios materiales	269
7.4.1. Electrostática	269
7.4.2. Magnetostática	272
7.5. Problemas	275

8. Conductores	283
8.1. Mecanismos de conducción. Medios óhmicos	283
8.2. Relajación en medios óhmicos	284
8.3. Conductores estáticos	285
8.4. Tubos de corriente estacionaria. Fuerza electromotriz	289
8.5. Resistencias y generadores de corriente continua	290
8.6. Asociación de elementos. Leyes de Kirchhoff	293
8.7. Disipación de energía. Ley de Joule	296
8.8. Problemas	299
9. Ecuaciones de Maxwell para medios materiales. Consecuencias	311
9.1. Ecuaciones de Maxwell	311
9.1.1. Condiciones de continuidad	313
9.1.1.1. Refracción de las líneas de campo y corriente	316
9.1.2. Condiciones de contorno	318
9.1.2.1. Teorema de unicidad para campos irrotacionales	319
9.1.2.2. Teorema de unicidad para campos solenoidales	320
9.1.2.3. Teorema de unicidad en el caso general	320
9.2. Energía electromagnética en medios materiales	321
9.2.1. Energía consumida en recorrer un ciclo de histéresis	323
9.2.2. Energía de un sistema de cargas y corrientes de conducción estacionarias	324
9.3. Ecuaciones de onda en medios materiales	324
9.3.1. Ondas monocromáticas y monocromáticas planas	326
9.3.1.1. Polarización de ondas electromagnéticas	335
9.3.1.2. Energía en ondas planas monocromáticas. Vector de Poynting complejo	336
9.4. Problemas	339
A. Resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace	a-1
A.1. Introducción	a-1
A.2. Solución analítica de la ecuación de Poisson	a-1
A.2.1. Ejemplos del uso de las ecuaciones de Poisson y Laplace	a-1
A.2.2. Principio de superposición	a-2
A.2.3. Expresión integral de la ecuación de Poisson	a-3
A.2.4. Método de Green	a-5
A.2.5. Método de las imágenes	a-7
A.2.5.1. Imágenes sobre un plano conductor; función de Green .	a-9
A.2.5.2. Imágenes sobre una esfera	a-10
A.2.5.3. Imágenes sobre superficies cilíndricas	a-12
A.3. Resolución analítica de la ecuación de Laplace; método de separación de variables	a-13
A.3.1. Introducción	a-13
A.3.2. Solución en coordenadas cartesianas	a-13
A.3.3. Solución en coordenadas cilíndricas	a-15

A.3.4. Solución en coordenadas esféricas	a-18
A.4. Solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones mediante el uso de transformaciones complejas	a-21
A.5. Solución experimental y gráfica de las ecuaciones de Poisson y Laplace .	a-24
A.5.1. Introducción	a-24
A.5.2. Métodos experimentales	a-24
A.6. Métodos gráficos	a-25
A.7. Problemas	a-29
B. Aplicaciones numéricas	b-1
B.1. Ecuación de Poisson	b-1
B.1.1. Métodos de residuos pesados	b-2
B.1.1.1. Método de Galerkin	b-2
B.1.1.2. Método de ajuste puntual	b-3
B.1.1.3. Método de mínimos cuadrados	b-3
B.1.2. Método de los momentos	b-4
B.1.2.1. Aplicación al cálculo de la capacidad de un hilo conductor delgado: <i>metodo_momentos.nb</i>	b-6
B.1.3. Método de diferencias finitas	b-9
B.1.3.1. Resolución iterativa del sistema de ecuaciones	b-11
B.1.3.2. Aplicación al estudio del condensador plano: <i>metodo_DF_SOR_condensador.nb</i>	b-13
B.1.4. Métodos variacionales	b-22
B.1.4.1. Método de Ritz	b-26
B.1.4.2. Ejemplo 1: <i>ejemplo_Ritz.nb</i>	b-26
B.1.4.3. Ejemplo 2: Método de Ritz (elementos finitos)	b-29
B.1.4.4. Método de los elementos finitos (Ritz)	b-31
B.1.4.5. Ejemplo: <i>ejemplo_elem_finitos_1D.nb</i>	b-37
B.2. Ecuación de ondas	b-43
B.2.1. Propagación de ondas en medios no homogéneos (1D). <i>FDTD – 1D – medios.nb</i>	b-43
B.2.1.1. Programa: <i>FDTD – 1D – medios.nb</i>	b-51
C. Campo magnético terrestre	c-1
C.1. Estructura básica de la Tierra	c-1
C.2. Morfología del campo magnético superficial	c-3
C.3. Campo fuera de la superficie	c-5
C.4. Variaciones temporales del campo magnético terrestre	c-6
C.5. Principio de la dinamo autoinducida	c-6
C.6. Campo magnético de otros objetos celestes	c-8

D. Sistemas de conductores y espiras	d-1
D.1. Sistemas de conductores	d-1
D.1.1. Coeficientes de potencial y de capacidad	d-1
D.1.2. Teorema de reciprocidad de Green	d-3
D.1.3. Propiedades fundamentales de los coeficientes	d-4
D.1.4. Apantallamiento. Condensadores	d-6
D.1.5. Fuerzas y pares en sistemas de conductores	d-9
D.2. Sistemas de espiras	d-11
D.2.1. Coeficientes de inducción de un sistema de tubos de corriente o espiras	d-11
D.2.2. Fuerza electromotriz inducida. Generadores y transformadores .	d-14
D.2.3. Asociación de inductores	d-15
D.2.4. Fuerzas y pares sobre un conjunto de espiras	d-16
D.2.5. Sistemas de espiras con núcleo magnético	d-18
D.2.5.1. El transformador ideal	d-19
D.2.6. Circuitos magnéticos lineales	d-21
D.2.7. Circuitos magnéticos no lineales	d-23
D.3. Problemas	d-27
E. Corrientes cuasiestacionarias. Teoría de Circuitos	e-1
E.1. Introducción	e-1
E.2. Conexión entre la teoría de campos y la de Circuitos	e-1
E.3. Elementos fundamentales	e-5
E.3.1. Elementos reales	e-9
E.4. Leyes de Kirchhoff	e-10
E.5. Respuesta a una excitación armónica	e-12
E.5.1. Representación fasorial; impedancias y admitancias	e-14
E.5.2. Asociación de elementos	e-16
E.6. Métodos de análisis	e-17
E.6.1. Introducción	e-17
E.6.2. Equivalencia entre fuentes reales de tensión y de intensidad .	e-20
E.6.3. Análisis de mallas	e-20
E.6.4. Análisis de nudos	e-22
E.7. Teoremas fundamentales	e-23
E.7.1. Teorema de superposición	e-23
E.7.2. Teoremas de Thevenin y Norton	e-24
E.7.3. Potencia en corriente alterna	e-26
E.7.3.1. Teorema de la máxima transferencia de potencia . . .	e-29
E.8. Estudio de los circuitos de primero y segundo orden	e-30
E.8.1. Respuesta transitoria de sistemas lineales de primer orden .	e-30
E.8.2. Respuesta en frecuencia de los circuitos de primer orden .	e-39
E.8.3. Transitorios en circuitos de segundo orden	e-43
E.8.4. Respuesta en frecuencia de sistemas de segundo orden .	e-50
E.9. Problemas	e-54

F. Elementos de cuatro terminales. Transistores bipolares y de efecto de campo	f-1
F.1. Elementos de cuatro terminales	f-1
F.2. Transistores bipolares y de efecto de campo	f-3
F.2.1. Análisis de circuitos con fuentes dependientes	f-6
F.3. Problemas	f-8
G. Sistemas lineales. Diagramas de Bode	g-1
G.1. Sistemas lineales	g-1
G.1.1. Ecuaciones de un circuito	g-1
G.1.2. Respuesta transitoria y estacionaria	g-2
G.1.3. Diagrama de Bode	g-5
G.2. Problemas	g-13
H. Introducción histórica	h-1
I. Sistemas de unidades	i-1
J. Teoría de campos	j-1
J.1. Campos escalares y vectoriales	j-1
J.2. Representación gráfica de los campos	j-3
J.2.1. Base vectorial	j-5
J.2.2. Sistemas de referencia	j-6
J.2.3. Producto vectorial	j-8
J.3. Operaciones diferenciales e integrales	j-9
J.3.1. Gradiente	j-9
J.3.2. Flujo y divergencia	j-10
J.3.3. Circulación y rotacional	j-11
J.3.4. Operador Laplaciana	j-12
J.4. Teoremas integrales	j-12
J.4.1. Teorema de la divergencia	j-12
J.4.2. Teorema del rotacional	j-13
J.5. Coordenadas curvilíneas ortogonales	j-13
J.5.1. Sistemas Coordenados	j-15
J.6. Problemas	j-19
K. La Delta de Dirac	k-1
K.1. Definición	k-1
K.2. Propiedades	k-3
K.3. Ejemplos de sucesiones de funciones que aproximan a la delta de Dirac .	k-4
K.4. Otras expresiones útiles de la δ	k-5
K.5. Ecuaciones de continuidad	k-7
K.6. Problemas	k-9

L. Desarrollo en serie y Transformada de Fourier	l-1
L.1. Desarrollo en serie de Fourier	l-1
L.2. Transformada de Fourier	l-3
L.3. Ejemplos	l-4
L.3.1. Desarrollo en serie	l-4
L.3.2. Transformada	l-6
L.4. Problemas	l-7
M. Tablas	m-1
M.1. Constantes físicas	m-1
M.2. Unidades del SI	m-1
M.3. Conversión $eV \rightleftarrows J$ y $gauss \rightleftarrows T$	m-1
M.4. Propiedades dieléctricas	m-2
M.5. Propiedades magnéticas	m-2
M.6. Conductividades	m-4
N. Formulario matemático	n-1
N.1. Relaciones vectoriales y diádicas	n-1
N.1.1. Productos	n-1
N.1.2. Gradiente	n-1
N.1.3. Divergencia	n-1
N.1.4. Rotacional	n-2
N.1.5. Laplaciana	n-2
N.1.6. Teoremas integrales	n-2
N.2. Coordenadas curvilineas	n-2
N.2.1. Cuadro resumen	n-2
N.2.2. Vector de posición	n-3
N.2.3. Vector diferencial de línea	n-3
N.2.4. Elemento de volumen	n-3
N.2.5. Gradiente	n-3
N.2.6. Divergencia	n-3
N.2.7. Rotacional	n-4
N.2.8. Laplaciana	n-4
N.3. Ángulo sólido	n-4
N.4. La Delta de Dirac	n-5
N.4.1. definiciones	n-5
N.4.2. Expresiones integrales y diferenciales de la delta de Dirac	n-5
N.4.3. Propiedades básicas	n-5
N.5. Series y transformadas de Fourier	n-6
N.5.1. Series	n-6
N.5.2. Transformadas	n-6

Programas Mathematica

Capítulo 1

- *prob1 – 8.nb.* (p. 31)

Representa al movimiento ciclotrónico con campo eléctrico paralelo al magnético.

- *deriva – ambipolar.nb.* (p. 34)

Muestra la deriva ambipolar de cargas en presencia de campo eléctrico y magnético perpendiculares.

Capítulo 2

- *lineas – campo_2q.nb.* (p. 53)

Determina y representa las líneas equipotenciales y de campo de un sistema de dos cargas de magnitud y signo arbitrario. Las líneas de campo se integran numéricamente por el método de Euler.

- *equipotlineas – dipolo.nb.* (p. 61)

Determina analíticamente las líneas equipotenciales y las de campo y las representa. Integra numéricamente las líneas de campo, empleando el método de Euler y el de Heun, y compara estos resultados y los analíticos entre sí.

- *prob_i3_inv.nb.* (p. 76)

Resuelve el problema 2-14.

- *carretes – Helmholtz.nb.* (p. 91)

Estudia el campo magnético producido por dos espiras cuadradas, las configura como carretes de Helmholtz y dibuja sus líneas de campo.

Capítulo 4

- *FDTD_1D – vacio.nb.* (p. 158)

Simula la ecuación de ondas en el vacío mediante el método FDTD. Aplica de condiciones reflectantes y absorbentes y genera películas para dos ejemplos de propagación de ondas pulsadas.

Capítulo 5

- *solenoide – iman.nb.* (p. 199)

Representa al campo magnético producido por un solenoide finito de sección circular, a lo largo de su eje, así como la energía potencial de un dipolo magnético, situado en dicho eje, y la fuerza que actúa sobre el mismo.

Capítulo 6

- *movimiento – cargas – EpB.nb.* (p. 222)

Estudia la compresión magnética de la trayectoria de una carga en presencia de campos eléctrico y magnético paralelos. Las trayectorias se obtienen por integración numérica de las ecuaciones diferenciales del movimiento y se representan en dos y tres dimensiones. Ofrece dos modalidades en las que el campo magnético crece, respectivamente, de forma gradual o brusca.

- *enfoque_EpB.nb.* (p. 224)

Representa las trayectorias de cargas enfocadas por campos eléctrico y magnético paralelos. Produce una gráfica paramétrica tridimensional de las trayectorias para diversos ángulos de dispersión y otra bidimensional de la proyección transversal de las mismas.

- *botella – magnetica.nb.* (p. 227)

Estudia el confinamiento de partículas en botellas magnéticas: genera películas de las trayectorias de un dipolo a lo largo del eje de la botella y de una partícula, atrapada o en el interior del cono de fugas, que circula alrededor de una línea de campo arbitraria.

- *lente – electrostatica.nb.* (p. 238)

Integra la ecuación de las trayectorias de un haz de cargas que incide sobre lente electrostática elemental y muestra como éstas convergen en el foco de la misma. También se muestra la estructura del campo y el potencial producido por la lente.

- *orbitas – cargas.nb.* (p. 243)

Genera la película de las trayectorias de dos cargas referidas a su centro de masas. Las cargas, sus signos, sus masas y sus velocidades iniciales son arbitrarias.

Capítulo 9

- *polarizacion – ondas.nb.* (p. 349)

Permite determinar el tipo de polarización de una onda monocromática plana en función de las amplitudes y las fases de los campos.

Apéndice A

- *imag – dosplanos.nb.* (p. a-33)

Calcula, haciendo uso del método de las imágenes, el potencial producido por una carga situada entre dos planos paralelos a potencial nulo y lo representa en distintos formatos.

- *imag – dosesferas.nb.* (No descrito en el texto).

Programa similar al anterior que calcula y representa el potencial debido a dos esferas conductoras cargadas a un determinado potencial. Véase el problema a-10.

- *poisson – cartesianas – a.nb.* (p. a-43)

Resuelve la primera parte del problema de potencial a-16 por el método de separación de variables y representa los resultados.

- *poisson – cartesianas – b.nb* (No descrito en el texto).

Resuelve la segunda parte del problema a-16.

Apéndice B

- *metodo_momentos.nb.* (p. b-8)

Calcula la distribución de carga y la capacidad para un segmento de hilo conductor delgado aplicando el método de los momentos.

- *metodo_DF_SOR_condensador.nb.* (p. b-16)

Es un programa bidimensional para el cálculo del potencial por el método de diferencias finitas con sobrerelajaciones sucesivas. Se aplica al estudio de dos placas paralelas a potenciales iguales y contrarios.

- *metodo_DF_SOR_electrodos_puntuales.nb.* (No descrito en el texto).

Programa similar al anterior aplicado a la determinación del potencial producido por dos hilos cargados paralelos. Estudia, para este caso concreto, el valor óptimo de la constante de relajación.

- *ejemplo_Ritz.nb.* (p. b-27)

Aplica el método de Ritz al cálculo del potencial en un ejemplo unidimensional simple.

- *ejemplo_Ritz – EF.nb.* (No descrito en el texto).

Resuelve el problema anterior dividiendo su dominio en dos elementos finitos. Véase la sección B.1.4.3.

- *ejemplo_elem_finitos_1D.nb.* (p. b-41)

Generaliza el programa anterior haciendo uso del método de elementos finitos y utilizando un número arbitrario de elementos. Ilustra el empleo del método de Gauss sin pivotación para la solución de sistemas de ecuaciones tridiagonales.

- *FDTD – 1D – medios.nb.* (p. b-57)

Simula la propagación de ondas en medios no homogéneos y hace uso de un algoritmo de iluminación. Se pueden ejecutar dos ejemplos: la simulación de un adaptador de cuarto de onda y la de la incidencia de una onda pulsada sobre un medio ligeramente conductor terminado por un plano conductor ideal. La estructura de este programa difiere en aspectos importantes de la del *FDTD_1D – vacio.nb*.

Apéndice E

- *prob – teocir – guia.nb.* (p. e-65)

Simula una guía de onda ideal como una cadena de circuitos *LC* cuasiestacionarios que equivalen a pequeñas secciones de la misma. Se genera una película de las ondas estacionarias de tensión e intensidad creadas en un segmento de guía cortocircuitado.

- *impedancia – paralelo – serie.nb.* (p. e-69)

Programa auxiliar del problema e-28.

Apéndice J

- *prob – h17.nb.* (p. j-24)

Programa auxiliar del problema j-17.

- *prob – h18.nb.* (p. j-25)

Programa auxiliar del problema j-18.

Apéndice K

- *prob – I2.nb.* (p. k-10)

Representa a una serie de funciones que tienden a la delta de Dirac.

- *prob – I3.nb.* (p. k-11)

Muestra como soslayar la singularidad de $\nabla^2(\frac{1}{r})$ para modelar la delta de Dirac.

Prólogo

Este libro, de acuerdo con su título, ofrece unas primeras nociones de electromagnetismo que, como indica el subtítulo, se acompañan de programas comentados para ilustrar algunas de las técnicas de ordenador aplicables a la solución de problemas electromagnéticos.

Su contenido se organiza, aproximadamente por mitades, en un conjunto de *capítulos* y otro de *apéndices*. En la mayoría de ellos se incluyen *problemas* y *programas Mathematica*.

Capítulos:

Este primer bloque contiene los fundamentos básicos de la teoría electromagnética en el marco de la relatividad de Galileo¹ y se divide, a su vez, en tres partes:

- Parte I (*Campo electromagnético en el vacío*). Contiene 4 capítulos a lo largo de los cuales se define al campo electromagnético en el vacío, se postulan sus fuentes estáticas y dinámicas y se estudian las conclusiones básicas que se deducen de las ecuaciones de Maxwell.
- Parte II (*Multipolos*). Contiene dos capítulos, en el primero se expone la representación multipolar de la materia y en el segundo se trata el movimiento de monopolos y dipolos en presencia de los campos.
- Parte III (*Campo electromagnético en los medios materiales*). Contiene tres capítulos en los que se estudian los campos en medios polarizables y conductores así como las consecuencias de las ecuaciones de Maxwell para este tipo de medios.

Apéndices:

En los apéndices se incluye una serie de complementos al contenido de los capítulos. En ellos se amplian cuestiones que sólo se apuntan en la primera parte, se añaden temas de cálculo numérico, se suministran tablas, fórmulas y un mínimo de fundamentos matemáticos.

¹Véase [García Olmedo].

Problemas:

Una parte de los problemas que se ofrecen al final de la mayoría de los capítulos y apéndices están resueltos total o parcialmente, bien sea de forma analítica explícita o con la ayuda del ordenador. En los enunciados de algunos problemas se adelantan definiciones simples, como las de *condensador*, *conductor estático*, etc., que sólo se tratan con cierto detalle en capítulos y apéndices posteriores.

Cálculo numérico:

A lo largo del texto, como auxilio en la resolución de problemas, como sección de algún capítulo o, particularmente, en el apéndice *Aplicaciones numéricas*, se introducen programas sencillos, escritos en el lenguaje *Mathematica*,² con los que se pretende iniciar al lector del texto en el uso de los ordenadores para la solución de problemas electromagnéticos y la presentación de los resultados. Los programas empiezan siendo muy simples y paulatinamente se hacen algo más complejos. Por esta razón, es aconsejable empezar por los que se describen en los apéndices J y K, para continuar con el orden establecido en el índice general. A lo largo de estos programas se muestra el uso de las capacidades algebraicas, analíticas, gráficas y numéricas de Mathematica para el análisis y resolución de problemas electromagnéticos. Los *Notebooks* correspondientes a estos programas se comentan en el texto y se encuentran en un disco adjunto. Mathematica es muy apropiado para los fines que aquí se persiguen y sus programas son fácilmente trasladables a otros lenguajes más eficientes pero menos didácticos que éste.

Conclusión:

Este libro es el resultado de notas tomadas en diversas etapas durante la enseñanza del electromagnetismo a nivel de tercer curso de Física. Durante este último año se ha revisado en profundidad y añadido una parte substancial del material que en él se incluye. Debo agradecer a muchas personas la ayuda, directa o indirecta, que me han prestado para la redacción y corrección del texto; a todos ellos le expreso mi agradecimiento. En particular, como cualquier texto de este tipo, éste es deudor de fuentes orales y escritas de las que he extraído información a lo largo de un intervalo de tiempo muy extenso. Sólo explicito en la bibliografía aquellas fuentes en las que conscientemente me he apoyado, de muchas de las cuales existen ediciones más recientes que las reseñadas.

Bernardo García Olmedo

Granada, Octubre de 2005

²En este texto se ha utilizado la versión 4 de Mathematica. Si se utilizan otras versiones distintas, alguno de los programas puede necesitar alguna adaptación para su correcta ejecución. Véase [Wolfram].

Coplas hechas sobre un éxtasis de harta contemplación

Entréme donde no supe,
y quedéme no sabiendo,
toda sciencia trascendiendo.

Yo no supe dónde entraba,
pero, cuando allí me ví,
sin saber dónde me estaba,
grandes cosas entendí;
no diré lo que sentí,
que me quedé no sabiendo,
toda sciencia trascendiendo.

De paz y de piedad
era la sciencia perfecta,
en profunda soledad
entendida (via recta);
era cosa tan secreta,
que me quedé balbuciendo,
toda sciencia trascendiendo.

Estaba tan embebido,
tan absorto y ajenado,
que se quedó mi sentido
de todo sentir privado;
y el espíritu dotado
de un entender no entendien-
do,
toda sciencia trascendiendo.

El que allí llega de vero,
de sí mismo desfallece;
cuanto sabía primero
mucho bajo le paresce;
y su sciencia tanto cresce,
que se queda no sabiendo,
toda sciencia trascendiendo.

Cuanto más alto se sube,

tanto menos se entendía,
que es la tenebrosa nube
que a la noche esclarecía;
por eso quien la sabía
queda siempre no sabiendo
toda sciencia trascendiendo.

Este saber no sabiendo
es de tan alto poder,
que los sabios arguyendo
jamás le pueden vencer;
que no llega su saber
a no entender entendiendo,
toda sciencia trascendiendo.

Y es de tan alta excelencia
aqueste sumo saber,
que no hay facultad ni sciencia
que le puedan emprender;
quien se supiere vencer
con un no saber sabiendo
irá siempre trascendiendo.

Y si lo quereis oír,
consiste esta suma sciencia
en un subido sentir
de la divinal Esencia;
es obra de su clemencia
hacer quedar no entendiendo,
toda sciencia trascendiendo.

Fray Juan de la Cruz

Parte I

Campo electromagnético en el vacío

Introducción

El objetivo fundamental de esta disciplina es el estudio de las interacciones que tienen lugar entre cargas y entre corrientes. No obstante, estas interacciones, como la gravitatoria y otras que aparecen en la Física, se estudian más cómodamente expresándolas como el encadenamiento de dos procesos, según se muestra en la figura 2

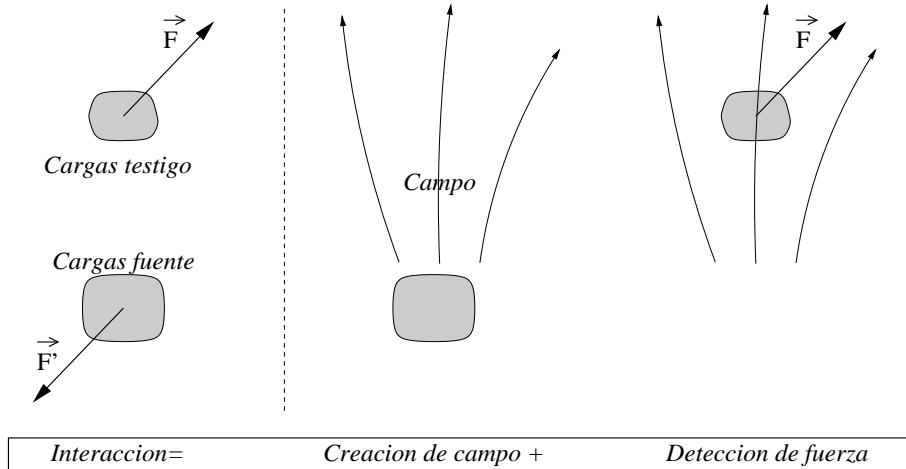


Figura 2:

En el primero, un grupo de cargas, que consideramos como *fuentes primarias* o causa de la interacción, perturba el espacio que lo rodea dotándolo de propiedades que, antes de la existencia de dichas cargas, no poseía; diremos que las cargas fuente han creado un campo. En el segundo, otro grupo de cargas, que llamaremos *testigo*, sufre una fuerza neta en virtud de la interacción con el campo previamente creado.

Según este esquema, la teoría que estructura a estas interacciones debe contener leyes que relacionen a los campos con sus fuentes, *leyes de campo*, y leyes que relacionen a los campos con las fuerzas, *leyes de fuerza*.

El problema de relacionar a los campos con sus fuentes es mucho más complejo y rico que el cálculo de las fuerzas, por lo que ésta será esencialmente una teoría del campo electromagnético (EM). Este campo, que puede ser expresado como tal por medio de un solo tensor tetradimensional de segundo orden, será descrito por ahora, de forma sencilla, como la suma de dos campos tridimensionales acoplados entre sí: el eléctrico y el magnético. Todo esto justifica que dediquemos un apéndice a revisar, aunque brevemente, las características generales de los campos vectoriales tridimensionales. Se recomienda la lectura de este apéndice, antes de abordar la primera parte del texto, con objeto de consolidar y establecer los conceptos y la nomenclatura que se utilizarán a lo largo del mismo.

El campo EM, que acabamos de presentar como mero auxiliar para describir la interacción entre cargas, adquiere, según se desarrolla la teoría, personalidad propia. El fenómeno de radiación posibilita la creación de campos EM aislados, automantenidos, que se independizan de sus fuentes primarias y que, mientras no interactúen con la

materia, transportan cantidades fijas de energía, masa, momento y momento angular. En definitiva el campo EM tiene todas las propiedades de la materia: sus movimientos, redistribuciones, obedecen a leyes análogas a las de los fluidos de materia ordinaria. Podemos decir que el campo EM es algo más que un concepto auxiliar; realmente constituye la manifestación más simple de la materia.

Esta primera parte comprende cuatro capítulos y en ella pretendemos exponer, con relativa rapidez, el esquema básico de la teoría electromagnética en el vacío. El término *vacío* no se entenderá literalmente sino que admitiremos la presencia de cargas en movimiento que describiremos, en su totalidad, por medio de funciones densidad de cargas y de corrientes. En principio se adopta un modelo de tipo microscópico, limitado pero simple, en el que las cargas que crean el campo se consideran como puntuales y desprovistas de spin.

Las densidades microscópicas expresan con detalle la magnitud, posición y velocidad de cada una de las cargas y son, por lo tanto, rápidamente variables en el espacio y en el tiempo. Para volúmenes macroscópicos, este tipo de descripción es inviable dada la enorme cantidad de información que es necesario manejar. Suele tomarse como dimensión mínima de un volumen macroscópico, a aquel que contiene a un número de cargas de orden de $N_0 = 10^6$, lo que corresponde a un cubo de materia ordinaria cuya arista sea del orden de $L_0 = 100 \text{ \AA}$. El seguimiento de la evolución de un sistema de cargas con $N \gg N_0$ no es factible, ni siquiera mediante la simulación numérica en ordenador. En estas circunstancias es posible y conveniente recurrir a una descripción macroscópica en la que las densidades se promedian en el espacio y en el tiempo³; en todo caso, los instrumentos ordinarios de medida proporcionan un promedio espacio-temporal de las magnitudes. Este proceso de promedio es delicado desde el punto de vista teórico y, al reducir drásticamente la información con la que se describe al sistema de cargas y campos, reduce también la capacidad de predicción de las ecuaciones resultantes. En esta primera parte, se hará uso de una versión simple de las ecuaciones macroscópicas en la que la densidad macroscópica de carga, junto con la de corriente, describe a todas las cargas o, al menos, a todas aquellas que tienen un efecto significativo sobre los campos macroscópicos. Esto excluye a la materia organizada dipolarmente a nivel molecular cuyo tratamiento se dejará para más adelante.

³Para ciertas aplicaciones sólo es necesario promediar espacialmente porque, si el movimiento de las partículas no está correlacionado, el promedio espacial elimina las fluctuaciones temporales.

Capítulo 1

Campo eléctrico y campo magnético

1.1. Descripción de las magnitudes electromagnéticas

Como ya se ha comentado, caben dos formas básicas de enmarcar al electromagnetismo. Una microscópica, altamente detallada y teóricamente potente, pero limitada en la práctica, y otra macroscópica, en la que se elimina gran parte de la información pero que es de mayor utilidad práctica.

1.1.1. Espacio de los campos y las fuentes

Pretendemos describir la interacción entre dos sistemas de cargas a uno de los cuales consideramos como fuente y al otro como testigo. Aquí también, como en la Mecánica Newtoniana, es necesario elegir cuidadosamente el sistema de referencia desde el que se enuncian las leyes, por lo que, salvo excepciones, haremos siempre uso de un sistema inercial \mathcal{S} , figura 1.1.

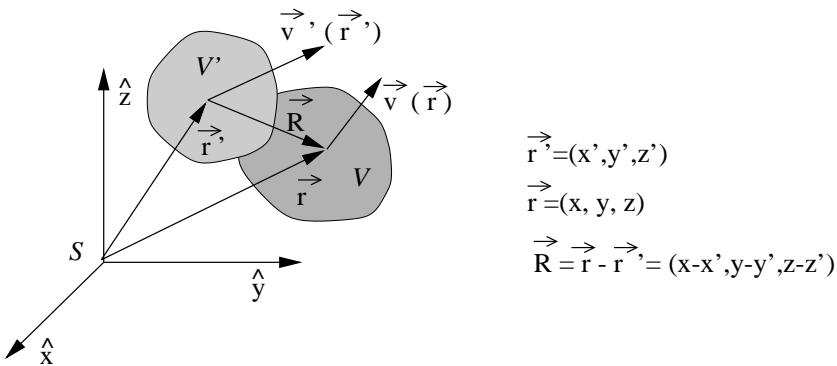


Figura 1.1:

Fijaremos, pués, con respecto a este sistema, las coordenadas de las fuentes por \vec{r}' , las de las cargas testigo, o puntos de observación, por \vec{r} y la distancia mutua entre las

fuentes y puntos de observación por \vec{R} .

Tenemos, pues, un espacio de seis dimensiones (x', y', z', x, y, z) , dentro del cual deberemos especificar tanto las cargas existentes $\rho(\vec{r}')$ y $\rho(\vec{r})$, como sus movimientos $\vec{v}(\vec{r}')$ y $\vec{v}(\vec{r})$. Veremos más adelante que éstas, las fuentes primarias, no serán las únicas fuentes del campo sino que los propios campos actúan como verdaderas fuentes, en el sentido que se deduce del teorema de Helmholtz, en paridad con las anteriores. Eventualmente, dado que la acción electromagnética se propaga con velocidad finita, será necesario conocer estas magnitudes en instantes distintos al de observación.

1.2. Fuentes de un campo vectorial. Teorema de Helmholtz

Establecido qué es lo que entendemos por campo vectorial en el apéndice J, nos interesa ahora relacionar a los campos con sus fuentes. Llamaremos *fuentes vectoriales* de un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$ a su rotacional, y *fuentes escalares* a su divergencia

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \vec{F}(\vec{r}) &= \mathcal{R}(\vec{r}) = \text{fuentes vectoriales} \\ \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) &= \mathcal{D}(\vec{r}) = \text{fuentes escalares}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Teorema de Helmholtz :

Éste es el primero de los teoremas de unicidad que se enunciarán a lo largo del texto. Veremos que las fuentes determinan únicamente a un campo $\vec{F}(\vec{r})$ si éste tiende a cero más rápidamente que r^{-1} cuando $r \rightarrow \infty$ ¹.

Enunciado

– A) Un campo que cumpla la condición anterior queda únicamente determinado si se conocen sus fuentes escalares y vectoriales en todos los puntos $\vec{r}' = (x', y', z')$ del espacio. Puede, además, derivarse de unas funciones potenciales, un campo escalar $f(\vec{r})$ y un campo vectorial $\vec{g}(\vec{r})$, a través de las operaciones de gradiente y rotacional:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla f(\vec{r}) + \nabla \wedge \vec{g}(\vec{r})\tag{1.2}$$

– B) Los potenciales pueden expresarse en función de las fuentes del campo como

¹Los campos que nos interesan cumplen sobradamente esta condición, salvo casos límite como las distribuciones de dimensión infinita, como los rectas y planos no acotados que se introducen en la teoría por simplicidad pero que no pueden plasmarse en la realidad. En general, los campos estáticos de distribuciones acotadas decrecen según r^{-2} y los de radiación son nulos fuera de una cierta esfera de radio finito en un instante determinado. Si los campos se anulan en el infinito, también se anularán sus fuentes.

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\mathcal{D}(\vec{r}')}{R} dv' = \text{Potencial escalar de } \vec{F}(\vec{r}) \\ \vec{g}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\vec{\mathcal{R}}(\vec{r}')}{R} dv' = \text{Potencial vector de } \vec{F}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ y \mathcal{V}' contiene a todos los campos y, en particular, al punto de observación $\vec{R} = \vec{0}$.

De acuerdo con ésto, tanto $f(\vec{r})$ como cada una de las componentes de $\vec{g}(\vec{r})$ tienen la forma

$$\Phi(\vec{r}) = K \int_{\mathcal{V}'} \frac{\xi(\vec{r}')}{R} dv'$$

Veremos más adelante que el campo magnético tiene sólo fuentes vectoriales, por lo que basta con un potencial vector \vec{A} para describirlo. El campo eléctrico tiene fuentes escalares y vectoriales pero, como está acoplado al magnético, la parte que deriva de un potencial vector no será expresada como en (1.2), sino por $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Demostración

Dado que \mathcal{V}' contiene al punto de observación P , haciendo uso de la propiedad fundamental de la $\delta(\vec{R}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, podemos expresar el campo de la forma

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= \int_{\mathcal{V}'} \vec{F}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dv' = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \vec{F}(\vec{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dv' \\ &= -\nabla^2 \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} dv' \right] \end{aligned}$$

Hemos sacado ∇^2 fuera de la integral porque este operador implica la derivación con respecto a las coordenadas x, y, z , mientras que $\vec{F}(\vec{r}')$ es función de las x', y', z' y la integral opera sobre estas últimas.

De la igualdad

$$\nabla^2 \vec{a} = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a})$$

se deduce que $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla f(\vec{r}) + \nabla \wedge \vec{g}(\vec{r})$, siendo

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \nabla \cdot \left[\frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \right] dv'$$

y

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \nabla \wedge \left[\frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \right] dv'$$

donde los operadores $\nabla \cdot$ y $\nabla \wedge$ se han introducido en la integral. De esta forma queda demostrada la primera parte del teorema.

Puede también demostrarse que estas dos expresiones son equivalentes a las del enunciado (1.3). Lo comprobaremos para el potencial escalar $f(\vec{r})$.

Dado que $\nabla \cdot (f\vec{a}) = f\nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla f$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \right) = \frac{1}{R} \underbrace{\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}')}_{=0} + \vec{F}(\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\vec{F}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$$

$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}') = 0$ porque $\vec{F}(\vec{r}')$ no es función de \vec{r} , sino de \vec{r}' y se ha tenido en cuenta que $\nabla(f(R)) = -\nabla'(f(R))$.

Volviendo a emplear la misma igualdad vectorial

$$\vec{F}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{1}{R} \vec{F}(\vec{r}') \right) - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')$$

y, pasando a superficie la integral de $\nabla' \cdot \left(\frac{1}{R} \vec{F}(\vec{r}') \right)$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{R} dv' - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}'} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \cdot d\vec{s}'$$

donde \mathcal{S}' es la superficie que envuelve a \mathcal{V}' .

Haciendo tender $\mathcal{S}' \rightarrow \infty$, puesto que $F(\vec{r}')$ tiende a cero más rápidamente que $\frac{1}{r}$ para $r' \rightarrow \infty$, podemos despreciar la integral de superficie y escribir

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\mathcal{D}(\vec{r}')}{R} dv'$$

Como ya hemos apuntado y demostremos más adelante, necesitamos describir dos campos pero nos basta con dos potenciales porque \vec{E} y \vec{B} están acoplados y \vec{B} no tiene fuentes escalares [Panofsky y Phillips, Shadowitz].

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$$

1.3. Clasificación de los campos según sus fuentes

Según las fuentes vectoriales y escalares sean o no distintas de cero, en una cierta región del espacio \mathcal{V} , podemos clasificar a los campos en cuatro grupos. Para visualizarlos gráficamente tendremos en cuenta que, por los teoremas de la divergencia y el rotacional

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\mathcal{S}} \vec{R} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{V}} \mathcal{D} dv$$

En la figura 1.2 se representan esquemáticamente las cuatro clases de campos que se deducen de este criterio de clasificación.

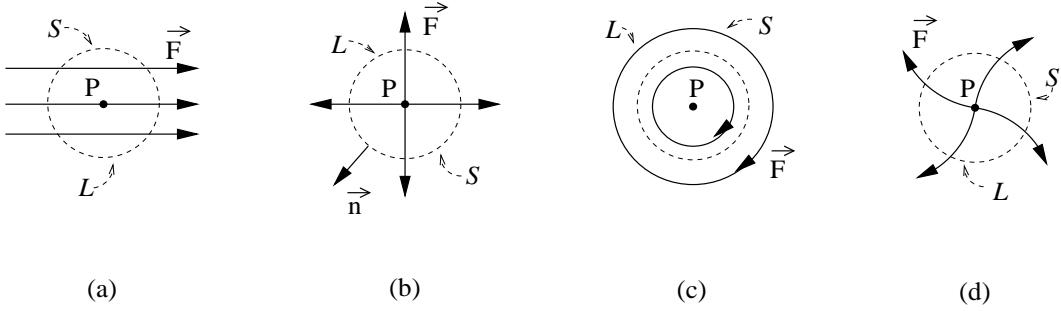


Figura 1.2:

Las características esenciales de cada uno de estos grupos pueden resumirse de la siguiente manera:

- a) El campo, figura 1.2a es *irrotacional*, al no tener fuentes vectoriales, y *solenoidal* al carecer de fuentes escalares.

Es evidente que, fuera del volumen \mathcal{V} donde ésto es cierto, debe de existir algún tipo de fuente porque, de lo contrario, los campos serían nulos en todo \mathcal{V} .

Supongamos que el volumen \mathcal{V} es tal que, para todo camino \mathcal{L} contenido en él, existe una superficie S apoyada en dicho camino y que también está enteramente contenida en \mathcal{V} . Esta precisión es necesaria porque, cuando estudiemos el campo magnético, nos encontraremos situaciones de interés que no cumplen la condición anterior.

Para simplificar y concretar, supondremos $\vec{R} = \vec{0}$ en todo el espacio y $\mathcal{D} \neq 0$ fuera de \mathcal{V} .

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \wedge \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\nabla f \\ \nabla \cdot \vec{F} = 0 \end{array} \right\} \nabla^2 f = 0 \quad (\text{Ecuación de Laplace})$$

Estos campos derivan de un potencial escalar que cumple la ecuación de Laplace.

Con la condición impuesta, el teorema del rotacional (1.4) es aplicable, luego, para cualquier \mathcal{L}

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

En el caso del campo eléctrico estático, como comprobaremos pronto, esta integral será equiparable al trabajo realizado por unidad de carga, al recorrer \mathcal{L} , por lo que, propiamente, diremos que un campo eléctrico de este tipo es conservativo.

Si aplicamos el teorema de la divergencia (1.4) a un volumen elemental arbitrario, $\Delta\mathcal{V}$, limitado por la superficie ΔS

$$\int_{\Delta S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

lo que implica que tantas líneas de campo entran en el volumen $\Delta\mathcal{V}$ como salen del mismo. En la figura (a) se muestra cómo las líneas de campo no pueden nacer ni morir en \mathcal{V} y cómo la circulación sobre cualquier camino \mathcal{L} contenido en \mathcal{V} es también nula.

A este grupo pertenece el campo electrostático en el vacío sin cargas, como el existente en el espacio comprendido entre las placas de un condensador, figura 1.3.

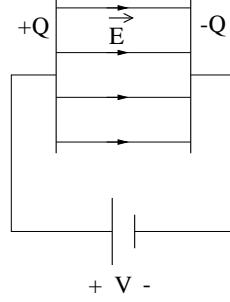


Figura 1.3:

– b) El campo es *irrotacional* y *no solenoidal*.

Aquí podemos suponer que todas las fuentes están en \mathcal{V} .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} = -\nabla f \\ \nabla \cdot \vec{F} = \mathcal{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla^2 f = -\mathcal{D} \quad (\text{Ecuación de Poisson})$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\mathcal{D}(\vec{r}')}{R} dv'$$

En este caso, las líneas de campo nacerán y morirán en los puntos de \mathcal{V} en los que $\mathcal{D} \neq 0$, figura 1.2b. Como ejemplo citaremos al campo electrostático en presencia de cargas.

– c) El campo es *rotacional* y *solenoidal*.

Las líneas de campo no pueden nacer ni morir en \mathcal{V} pero sí pueden cerrarse sobre sí mismas (figura 1.2c) dentro de \mathcal{V} , puesto que

$$\left. \begin{array}{l} \oint_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \neq 0 \\ \nabla \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \nabla \wedge \vec{g} \\ \nabla \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{R}} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{g}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{g}) - \nabla^2 \vec{g} = \vec{\mathcal{R}}$$

\vec{F} deriva de un potencial vector que responde a la ecuación anterior

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\vec{\mathcal{R}}(\vec{r}')}{R} dv'$$

Se puede demostrar que es posible exigir a \vec{g} que sea solenoidal. En este caso

$$\nabla^2 \vec{g} = -\vec{\mathcal{R}}$$

ecuación que sólo es distinta de la precedente cuando se utilizan coordenadas cartesianas.

El campo magnético, que es siempre solenoidal, cae dentro de este grupo.

- d) En general, los campos serán *rotacionales* y *no solenoidales* (figura 1.2d).

En adelante, estudiaremos el campo electromagnético desdoblado como dos campos vectoriales acoplados, cuyas fuentes, expresadas en el sistema M.K.S.A., serán:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \wedge \vec{B} &= \mu \left(\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

donde, como vemos, además de las cargas y de las corrientes, las propias variaciones temporales de los campos actúan de fuentes.

1.3.1. Descripción microscópica

En la descripción microscópica se especifica con detalle tanto a las cargas como a los campos, por lo que éstos vienen representados por magnitudes rápidamente variables. Aunque más adelante se matizará de alguna forma lo que a continuación se expone, desde el punto de vista clásico cabe representar a todas y cada una de las cargas presentes como puntuales o, al menos, a todas aquellas cuya aportación al campo es importante. Esta representación puede hacerse formalmente de dos maneras: especificando las posiciones y velocidades de cada una de las cargas o definiendo unas densidades pseudo-continuas por medio de la delta de Dirac. Será esta última opción la que tomaremos aquí. Este modelo, como todos los modelos físicos, tiene limitaciones de orden teórico y práctico que se subsanarán parcialmente más adelante cuando se aborde el tratamiento fenomenológico de la materia. En primer lugar, aunque desde el punto de vista clásico es posible fijar simultáneamente posiciones y velocidades, sin limitación alguna, a distancias atómicas las leyes clásicas dejan de ser válidas, y, en segundo lugar, no es posible hacer una descripción detallada de una porción macroscópica de materia porque ésto llevaría consigo la utilización de una cantidad excesiva de información.

Densidad de carga:

La *densidad de carga*² se define como una función que, integrada sobre un volumen arbitrario, da la medida de la carga total encerrada en el mismo.

$$Q = \int_V \rho dv$$

²Cada partícula lleva consigo, aparte de su propia identidad de partícula, masa, energía, carga, cantidad de movimiento, etc., por lo que las definiciones que se contemplan para describir a las cargas y sus flujos son análogas a las que se definen para el resto de dichas magnitudes.

Una carga puntual q , cuya trayectoria es $\vec{r}_0(t)$, puede ser descrita por medio de una función densidad haciendo uso de la delta de Dirac (véase el apéndice correspondiente).

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \quad (1.4)$$

Efectivamente, esta densidad describe con propiedad el contenido de carga en el entorno de $\vec{r}_0(t)$:

$$\rho(\vec{r}, t) = \begin{cases} 0 & \vec{r} \neq \vec{r}_0(t) \\ \rightarrow \infty & \vec{r} \rightarrow \vec{r}_0(t) \end{cases}$$

y cualquier volumen elemental que contenga al punto \vec{r}_0 contiene una carga total, figura 1.4,

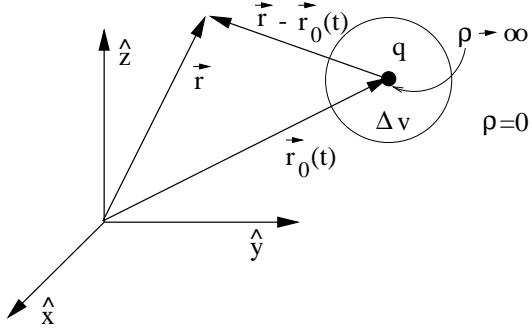


Figura 1.4:

$$q(\vec{r}_0(t)) = \int_{\Delta V \supset \vec{r}_0(t)} \rho(\vec{r}, t) dv$$

Si lo que queremos describir detalladamente es una colectividad de N cargas puntuales q_i situadas cada una en $\vec{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, la densidad correspondiente es la suma de las densidades de cada una de las partículas

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N \rho_i(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \quad (1.5)$$

y la carga contenida en un volumen \mathcal{V} , de acuerdo con las propiedades de integración de la delta de Dirac, será

$$Q(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \rho dv = \sum_{j=1}^{N(\mathcal{V})} q_j$$

donde el índice $j = 1, \dots, N(\mathcal{V})$ recorre a todas las partículas contenidas en \mathcal{V} .

De forma análoga, pueden definirse otras densidades, como la de partículas

$$n(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \quad (1.6)$$

cuya integral sobre un volumen proporciona el número de partículas que contiene

$$N(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} n dv$$

o la densidad de la velocidad de las partículas

$$\vec{j}_{part}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \quad (1.7)$$

cuya integral proporciona la suma de las velocidades de las partículas contenidas en el volumen³.

$$\vec{v}_{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{V}} \vec{j}_{part} dv = \sum_{j=1}^{N(\mathcal{V})} \vec{v}_j$$

Estas densidades nos permiten también hallar el valor medio, sobre las partículas encerradas en \mathcal{V} , de las magnitudes asociadas a las mismas, como la carga, la velocidad, etc.

$$\langle q \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{N(\mathcal{V})} q_j}{N(\mathcal{V})} , \quad \vec{u} \equiv \langle \vec{v} \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{N(\mathcal{V})} \vec{v}_j}{N(\mathcal{V})} \quad (1.8)$$

En la figura 1.5 se muestra como se obtiene el promedio espacial $\vec{u}(\vec{r})$ de la velocidad de un sistema de partículas sobre un volumen \mathcal{V} centrado en el punto (\vec{r}) .

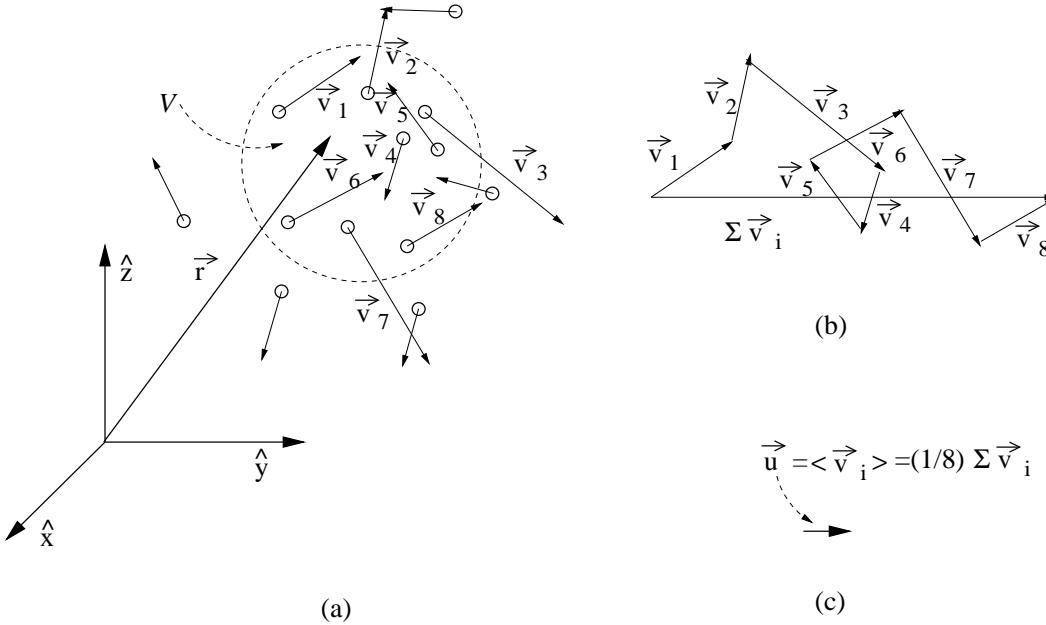


Figura 1.5:

³Como se deducirá de lo que sigue, \vec{j}_{part} puede también interpretarse como la densidad de flujo (o densidad de corriente) de partículas y su flujo a través de una superficie nos da el número de partículas que la atraviesan en la unidad de tiempo.

En 1.5-a se muestra al sistema de partículas y al volumen sobre el que se realiza el promedio y sobre el cual se integra la densidad de partículas. El resultado de esta integración es el que se detalla en 1.5-b y el promedio final en 1.5-c.

Intensidad; Densidad de corriente:

Se define como *intensidad de corriente*, figura 1.6, a la carga total que atraviesa a una superficie, cerrada o abierta, en la unidad de tiempo.

$$I \equiv \left(\frac{dQ}{dt} \right)_S \quad (1.9)$$

La unidad de intensidad es la fundamental del electromagnetismo en el sistema MKSA. Ésta recibe el nombre de *amperio* (A). La unidad de carga en el mismo sistema es el *coulombio* y sus dimensiones $[Q] = I \cdot T$ se deducen de la definición anterior.

Para realizar la integral de flujo será necesario seguir los convenios que definen la dirección de la normal a la superficie.

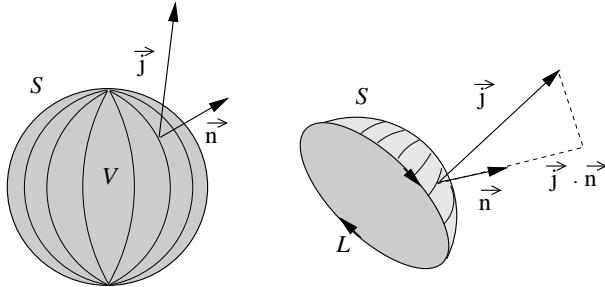


Figura 1.6:

La *densidad de corriente* (de carga), o densidad de flujo de carga, se define como una función vectorial cuyo flujo a través de dicha superficie es la intensidad que la atraviesa.

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} ds$$

La densidad de corriente correspondiente a un solo portador, con carga q y velocidad $\vec{v}(t)$, puede expresarse como

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \vec{v}(t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(t) \quad (1.10)$$

En la figura 1.7 se representa a la carga en el interior del volumen $\Delta\mathcal{V} = \Delta\mathcal{S} (\vec{v} \cdot \vec{n})$, cuya generatriz es \vec{v} , cuya base es $\Delta\mathcal{S}$ y cuya altura es la proyección de \vec{v} sobre la dirección \vec{n} . Si la partícula, como se muestra en la figura, se encuentra en el interior de este volumen, saldrá del mismo a través de $\Delta\mathcal{S}$ antes de transcurrido un segundo, por lo que sólo contribuirán a la intensidad aquellas partículas que se encuentran en el interior.

Para un sistema de N cargas puntuales q_i , situadas cada una en $\vec{r}_i(t)$ y con velocidades respectivas $\vec{v}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, la densidad de corriente resultante es la suma de las densidades de corriente aportadas por cada una de las partículas

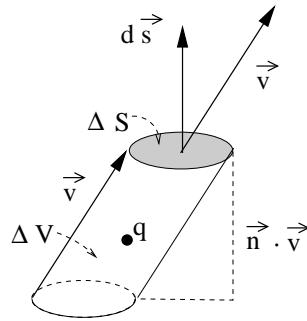


Figura 1.7:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N \vec{j}_i(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \vec{v}_i(t) = \sum_{i=1}^N \rho_i(\vec{r}, t) \vec{v}_i(t) \quad (1.11)$$

1.3.2. Descripción macroscópica

La descripción macroscópica puede llevarse a cabo por caminos diversos y con distintos objetivos, todos los cuales llevan consigo la realización de operaciones de promedio y la asunción de hipótesis simplificadoras. A pesar de que ésto implica la reducción de la información que se utiliza para obtener las ecuaciones que predicen los comportamientos de las cargas y los campos y, en consecuencia, la disminución del poder predictivo de las mismas, el electromagnetismo macroscópico conserva una gran potencia para el análisis de la mayoría de las situaciones prácticas.

La expresión 1.8 define una forma simple de obtener promedios espaciales de magnitudes asociadas a partículas discretas. Ahora extenderemos esta operación, la más simple entre las posibles, para aplicarla a funciones continuas o pseudocontinuas. Estos promedios se realizarán sobre volúmenes ΔV e intervalos Δt *submacroscópicos*. Se define como volumen submacroscópico a todo aquel que contiene un número suficientemente elevado de cargas, como se puso de manifiesto en la introducción de esta primera parte, pero cuya dimensión $L = \sqrt[3]{\Delta V}$ es muy inferior a la longitud característica de los problemas que queremos estudiar y Δt es muy inferior a la mínima constante de tiempo de dichos problemas; por ejemplo, si se quiere estudiar la propagación, en un medio determinado, de ondas monocromáticas con longitud de onda λ y periodo T , deben cumplirse las condiciones $L \ll \lambda$ y $\Delta t \ll T$. Debido a ésto, la descripción microscópica limita la frecuencia máxima que pueden contener los espectros de los campos estudiados.

Para funciones continuas, o pseudocontinuas, $\phi(\vec{r}, t)$, definiremos la operación de promedio

$$\langle \phi \rangle(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{\Delta V, \Delta t} \phi(\vec{r} + \vec{\rho}, t + \tau) d^3 \rho d\tau \quad (1.12)$$

donde a la función a promediar se le asigna el mismo peso en todo el dominio de

integración⁴. La variable de integración $\vec{\rho}$ recorre al volumen $\Delta\mathcal{V}$ y la τ al intervalo Δt .

Esto equivale a definir la función macroscópica $\langle \phi \rangle$ en un punto (\vec{r}, t) como el promedio de la microscópica ϕ , realizado dentro de los intervalos submacroscópicos $\Delta\mathcal{V}$ y Δt centrados en dicho punto .

De esta forma, la función microscópica $\phi(\vec{r} + \vec{\rho}, t + \tau)$ puede descomponerse en dos términos: su media $\langle \phi \rangle(\vec{r}, t)$ en el entorno de (\vec{r}, t) y su *valor aleatorio* $\delta\phi(\vec{r} + \vec{\rho}, t + \tau)$.

$$\phi(\vec{r} + \vec{\rho}, t + \tau) = \langle \phi \rangle(\vec{r}, t) + \delta\phi(\vec{r} + \vec{\rho}, t + \tau) \Rightarrow \langle \delta\phi \rangle(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.13)$$

donde se pone de manifiesto que la media de la parte aleatoria de la función es nula. Como ejemplo, la velocidad de una de las partículas contenidas en $\Delta\mathcal{V}$ puede expresarse como

$$\vec{v}_i = \vec{u} + \delta\vec{v}_i , \quad \langle \delta\vec{v}_i \rangle = 0$$

la velocidad media \vec{u} , sobre el volumen submacroscópico, es la *velocidad de arrastre* del fluido de partículas y $\delta\vec{v}_i$ es la desviación sobre la media de la velocidad de la partícula (i).

Si la función ϕ es el producto de otras dos, ϕ_a y ϕ_b ⁵

$$\langle \phi_a \phi_b \rangle = \langle \phi_a \rangle \langle \phi_b \rangle + \langle \delta\phi_a \delta\phi_b \rangle \quad (1.14)$$

Los términos del tipo $\langle \delta\phi_a \delta\phi_b \rangle$ son promedios del producto de magnitudes de media nula. Su importancia depende del grado de correlación existente entre $\delta\phi_a$ y $\delta\phi_b$, siendo nulos cuando dicha correlación no existe. Su evaluación requiere en general la emisión de alguna hipótesis de tipo físico.

Una propiedad importante para obtener las ecuaciones macroscópicas del campo electromagnético es la siguiente: derivando en 1.12 bajo el signo integral es fácil comprobar que la media de la derivada con respecto a α ($\alpha = t, x, y, z$) es igual a la derivada de la media.

$$\langle \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle \phi \rangle \quad (1.15)$$

Se discute la necesidad o no de efectuar el promedio temporal. El espacial, si afecta a un número elevado de partículas, reduce grandemente tanto las fluctuaciones espaciales como las temporales y, cuando el sistema estudiado está relativamente cerca del equilibrio, la hipótesis ergódica hace innecesaria a la media temporal. Si los medios son fuertemente dinámicos la eliminación de esta última media es dudosa. En cualquier caso, la temporal sólo añade un filtrado de este tipo al ya efectuado por la espacial, lo que no afecta al tratamiento genérico aquí empleado. Además, todos los instrumentos macroscópicos necesitan de un tiempo finito para efectuar las medidas por lo que, de hecho, realizan la media en cuestión.

⁴Desde el punto de vista teórico es conveniente introducir una función peso y definir el promedio, por ejemplo, el correspondiente a la coordenada x , de la forma $\langle \phi \rangle(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\phi(x + \alpha) d\alpha$, donde $f(\alpha)$ es una función peso de área unitaria, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha = 1$, y pendiente suave y continua.

⁵Para simplificar, se prescindirá del argumento (\vec{r}, t) .

Cuando la media es aplicada a una magnitud asociada a las partículas, las integrales pueden también interpretarse como sumatorias. Así pues, para distribuciones discretas, la media de la densidad de partículas es

$$\begin{aligned}\langle n \rangle(\vec{r}, t) &= \left\langle \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \sum_i \delta(\vec{r} + \vec{\rho} - \vec{r}_i(t + \tau)) d^3 \rho \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \langle n \rangle(\vec{r}, t + \tau) d\tau = \langle n \rangle(\vec{r}, t)\end{aligned}\quad (1.16)$$

donde, véase 1.6,

$$\langle n \rangle(\vec{r}, t + \tau) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \sum_i \delta(\vec{r} + \vec{\rho} - \vec{r}_i(t + \tau)) d^3 \rho = \frac{N_{\Delta V}(t + \tau)}{\Delta V}$$

es el número de partículas que hay, por unidad de volumen, en el entorno de \vec{r} y en el instante $t + \tau$, mientras que $\langle n \rangle(\vec{r}, t)$ es la *densidad macroscópica de partículas*, (el número de partículas por unidad de volumen que hay en el entorno de (\vec{r}, t)). Como ya se ha comentado, la integración sobre el volumen implica una reducción de las fluctuaciones temporales que es tanto mayor cuanto más numerosas son las partículas contenidas en ΔV . La integral sobre τ asigna al punto (\vec{r}, t) el valor promedio de $\langle n \rangle(\vec{r}, t + \tau)$ a lo largo del intervalo $\tau \in [t - \Delta t/2, t + \Delta t/2]$, lo que lleva consigo un filtrado adicional, o alisamiento, de la dependencia temporal. En la figura 1.8 se representan las densidades resultantes de promediar, en la dimensión espacial x y haciendo uso de intervalos de integración de distinta anchura Δx , a la densidad microscópica de partículas. La línea horizontal a trazos corresponde al valor medio de la densidad (partículas por unidad de intervalo) dentro del intervalo máximo $x \in [0, 20]$.

Si consideramos por separado a los distintos tipos de portadores de carga y se supone, para simplificar, que sólo existen dos de ellos, uno con carga $+e$ y otro con $-e$, la densidad neta de carga puede obtenerse como la suma de las densidades parciales

$$\left. \begin{array}{l} \langle \rho_+ \rangle = e \langle n_+ \rangle \\ \langle \rho_- \rangle = -e \langle n_- \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \rho \rangle = \langle \rho_+ \rangle + \langle \rho_- \rangle = e \{ \langle n_+ \rangle - \langle n_- \rangle \}$$

donde ρ_+ y ρ_- son las densidades de carga positiva y negativa y n_+ y n_- las densidades de partículas cargadas positiva y negativamente.

Normalmente se podrá también escribir⁶

$$\left. \begin{array}{l} \langle \vec{j}_+ \rangle = e \langle n_+ \rangle \vec{u}_+ \\ \langle \vec{j}_- \rangle = -e \langle n_- \rangle \vec{u}_- \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \vec{j} \rangle = \langle \vec{j}_+ \rangle + \langle \vec{j}_- \rangle = e \{ \langle n_+ \rangle \vec{u}_+ - \langle n_- \rangle \vec{u}_- \}$$

En adelante, a menos que sea absolutamente necesario, escribiremos con la misma notación a las magnitudes microscópicas y a las macroscópicas.

⁶Esto es cierto para la media espacial y aproximadamente cierto para la temporal si la velocidad $u \ll \frac{L}{\Delta t}$.

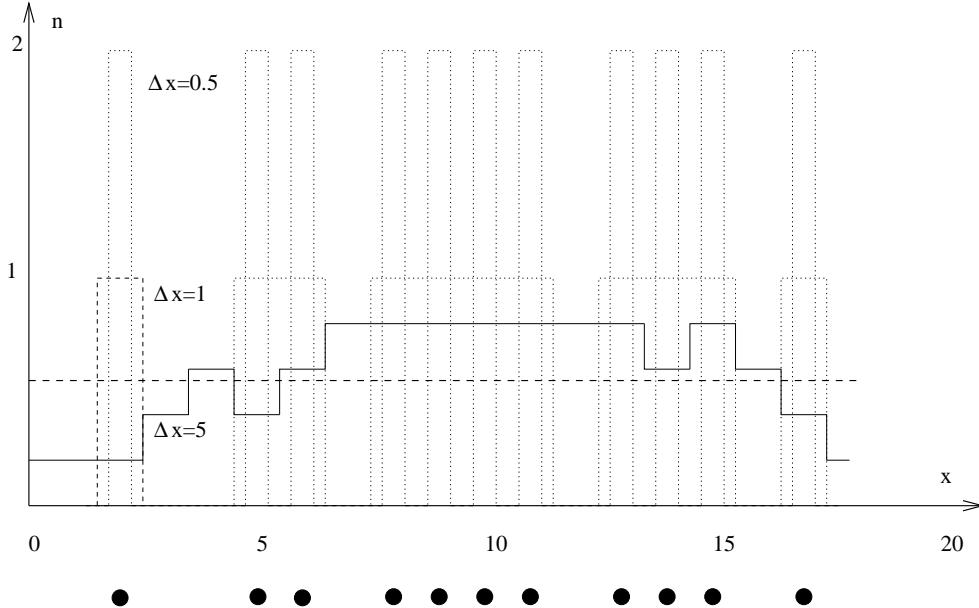


Figura 1.8: Valores medios de la densidad de partículas con distintas ventanas

1.4. Conservación de la carga; ecuación de continuidad

La experiencia establece que la carga puede crearse y destruirse pero siempre en parejas de carga positiva y negativa. Existe una gran variedad de mecanismos por los que, tanto desde el punto de vista microscópico como desde el macroscópico, se crea y se destruye carga, pero todos ellos verifican la condición de neutralidad neta: creaciones de pares, ionizaciones, recombinaciones, etc.. En consecuencia, se considera que el Universo es globalmente neutro. Esta realidad experimental se eleva a postulado con el nombre de *Principio de neutralidad del Universo*.

Este principio se traduce en una ecuación de continuidad, o conservación, de la carga neta que liga a ρ con \vec{j} . Su deducción para las magnitudes microscópicas puede verse en el apéndice K. Aquí loaremos directamente para las magnitudes macroscópicas.

Podemos expresar el principio de conservación de la carga neta afirmando que si hay un incremento de la que almacena un volumen $\mathcal{V}(t)$, ésto se debe a un intercambio con el exterior a través de la superficie que lo limita $\mathcal{S}(t)$.

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \quad (1.17)$$

donde Q es la carga encerrada en un volumen $\mathcal{V}(t)$, $I(t)$ el flujo de carga a través de su superficie $\mathcal{S}(t)$ y

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \rho dv = Q, \quad I = \int_{\mathcal{S}(t)} \rho \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

siendo \vec{u} la velocidad de arrastre de la carga con respecto al elemento de superficie. Dicho flujo de carga puede deberse, por lo tanto, al movimiento de la carga con respecto

al sistema del laboratorio y al movimiento, o deformación, de la superficie.

Para obtener una expresión diferencial, ecuación de continuidad, supongamos que \mathcal{V} es un volumen invariante con el tiempo, lo que nos permite introducir el operador $\frac{d}{dt}$ en el interior de la integral como $\frac{\partial}{\partial t}$.

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \oint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{s} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{j} dv$$

lo cual es válido para todo \mathcal{V} . En consecuencia, la *ecuación de continuidad de la carga neta* es

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.18)$$

como puede deducirse de su homóloga microscópica hallando su promedio.

1.4.1. Corrientes estacionarias

Un caso particular de corriente, que es de interés para nosotros, es la *corriente estacionaria*, definida por

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{j} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \oint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \rho \neq \rho(t)$$

Para corrientes estacionarias tiene sentido hablar de la *intensidad I* que circula por un tubo de corriente. Aplicando el teorema de la divergencia al segmento de tubo representado en la figura 1.9-a

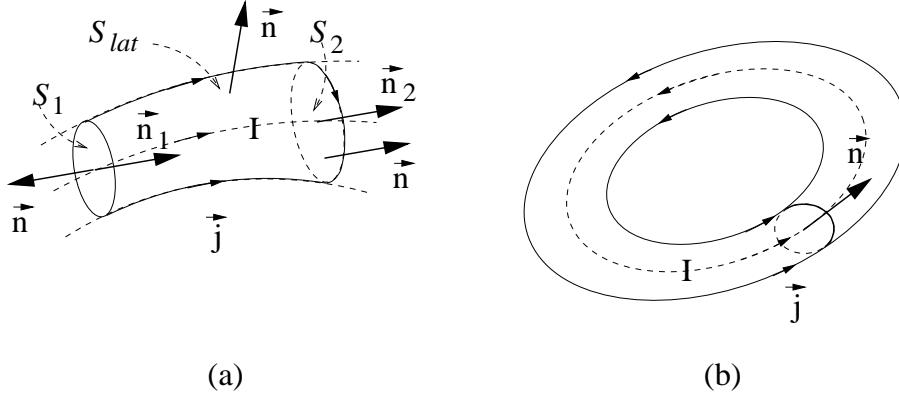


Figura 1.9:

$$I = \int_{\mathcal{S}_1} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{S}_2} \vec{j} \cdot d\vec{s} = cte \quad (1.19)$$

ya que el flujo de corriente $\Phi_{\mathcal{S}}(\vec{j})$, a través de la superficie total \mathcal{S} es nulo. Efectivamente, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_{lat}$ y, tomando \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 tales que $\vec{n} = -\vec{n}_1 = \vec{n}_2$, $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_{\mathcal{S}_1} + \Phi_{\mathcal{S}_2} + \Phi_{lat} = 0$,

donde el flujo sobre la superficie lateral del tubo $\Phi_{lat} = 0$ porque en dicha superficie $\vec{j} \cdot \vec{n} = 0$.

Los tubos de corriente deben ser cerrados y finitos, véase la figura 1.9-b, dada la imposibilidad de reunir infinitos portadores para construir el tubo y de infinita energía para moverlos. En el caso de los superconductores falla el argumento de la energía puesto que, como veremos, los portadores pueden moverse indefinidamente sin cesión de energía.

1.5. Ley de fuerzas de Lorentz. Definición de los campos

Las cargas pueden sentir fuerzas cuyo origen no es electromagnético clásico, como la gravitatoria, las cuánticas, etc. En su momento serán tenidas en cuenta pero en esta primera parte sólo nos ocuparemos de las fuerzas del primer tipo.

La ley de fuerza fundamental del electromagnetismo es la ley de Lorentz, que podemos enunciar, para cargas que se mueven con velocidades arbitrarias \vec{v} , o para cargas y corrientes distribuidas sobre un volumen, mediante las siguientes expresiones⁷

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = q \left[\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r}) \right] \quad (1.20)$$

$$\vec{F}_v = \frac{d\vec{F}}{dv} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (1.21)$$

donde \vec{E} , campo eléctrico o 'intensidad eléctrica', y \vec{B} , campo magnético o 'densidad de flujo magnético'

A continuación las analizaremos con detalle:

En primer lugar, en 1.20 se postula la existencia de unas entidades que llamaremos cargas, y cuya magnitud q mediremos comparando las fuerzas ejercidas sobre distintas cargas situadas en condiciones idénticas.

La fuerza detectada puede descomponerse en dos términos, uno independiente de la velocidad, que llamaremos *fuerza eléctrica*, y otro dependiente de la misma, que llamaremos *fuerza magnética*.

$$\vec{F}_q = \vec{F}_e + \vec{F}_m , \quad \vec{F}_e(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r}) , \quad \vec{F}_m(\vec{r}) = q \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r})$$

La fuerza eléctrica tiene las siguientes propiedades

$$\vec{F}_e = q \vec{E} \left\{ \begin{array}{l} \sim q \\ \uparrow \hat{e} \times \text{signo}(q) , \quad \hat{e} = \text{dirección fija en el espacio} \end{array} \right.$$

⁷La ley está expresada en el Sistema Internacional de unidades (SI) que, en el electromagnetismo, coincide con el Giorgi o MKSA (véase el apéndice I).

y la magnética

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} \left\{ \begin{array}{l} \sim q \\ \sim v \\ \uparrow \vec{v} \wedge \hat{b} \times \text{signo}(q) , \quad \hat{b} = \text{dirección fija} \end{array} \right.$$

En esta ley se da por supuesto que existe una perturbación en el espacio que puede ser descrita mediante los campos \vec{E} y \vec{B} .

Desde el punto de vista operacional, podemos definir al campo eléctrico como

$$\vec{E} = \lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ \vec{v} = \vec{0}}} \frac{\vec{F}q}{q} \quad (1.22)$$

donde $q \rightarrow 0$ para que no perturbe las fuentes iniciales del campo.

Así como el campo eléctrico puede determinarse por una sola medida, para determinar el campo magnético es necesario realizar dos medidas⁸.

1.5.1. Trabajo sobre una carga en movimiento

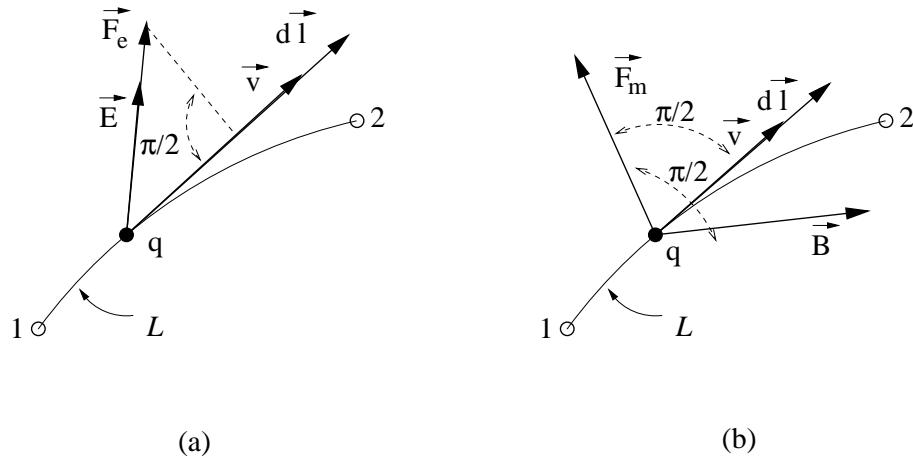


Figura 1.10:

El trabajo que un campo electromagnético realiza sobre una carga en movimiento que se traslada del punto 1 al 2 es

$$W_{12} = q \int_{1(\mathcal{L})}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.23)$$

Efectivamente

⁸Véase el problema 1-8

$$W_{12} = \int_{1(\mathcal{L})}^2 \vec{F}_q \cdot d\vec{l} = \int_{1(\mathcal{L})}^2 \vec{F}_q \cdot \vec{v} dt = \int_{1(\mathcal{L})}^2 \vec{F}_e \cdot d\vec{l}$$

La contribución del campo magnético a este trabajo es nula, véase la figura 1.10, puesto que, según la ley de Lorentz, la fuerza magnética es perpendicular a la trayectoria. Esto no quiere decir que el campo magnético sea incapaz de transmitir energía a las cargas; según hemos apuntado en otro lugar, los campos magnéticos variables pueden producir un campo eléctrico que, a su vez, puede trabajar sobre las cargas.

1.6. El campo electromagnético en el marco de la relatividad de Galileo

Las leyes de Newton se completan con el principio de relatividad de Galileo, según el cual, éstas tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales. Aunque este principio no es válido para el electromagnetismo, en este texto utilizaremos las reglas de transformación de los campos que se deducen del mismo, dejando la resolución de este problema para otro lugar⁹.

1.6.1. Relatividad de Galileo

El principio de relatividad de Galileo puede enunciarse de la siguiente manera:

- LAS LEYES DE NEWTON PRESENTAN LA MISMA FORMA PARA TODOS LOS OBSERVADORES INERCIALES.

Partiendo de las leyes de Newton, de la concepción absoluta e independiente del espacio y del tiempo, del postulado de relatividad y de los principios de homogeneidad e isotropía, según los cuales *el espacio es isótropo y homogéneo y el tiempo homogéneo*, se deduce la *transformación de coordenadas de Galileo*, que en su forma *estándar* se expresan como sigue:

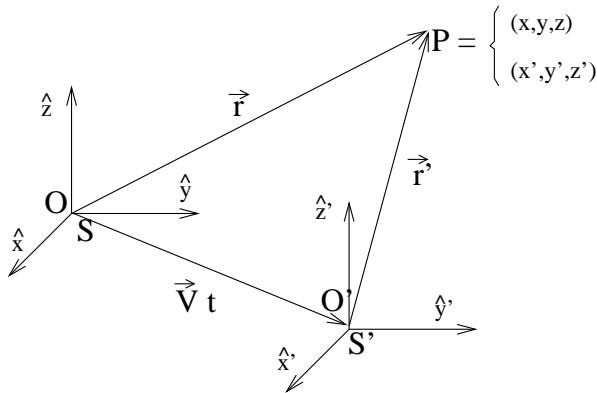


Figura 1.11:

⁹En [García Olmedo], [Bergmann], [Panofsky y Phillips] o [Jackson] puede encontrarse un tratamiento más amplio de esta cuestión.

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t , \quad \vec{V} = c\vec{e} \quad (1.24)$$

$$t' = t \quad (1.25)$$

donde, figura 1.11, \vec{r}' es el vector de posición, o coordenado, del punto P con respecto al sistema de referencia \mathcal{S}' , \vec{r} y $\vec{V}t$ los vectores coordenados, del mismo punto y del origen O' de \mathcal{S}' , con respecto del sistema \mathcal{S} . Como consecuencia de la ley de inercia, el movimiento relativo entre sistemas iniciales es de traslación uniforme, es decir, se mueven entre sí con velocidades relativas \vec{V} uniformes. Las expresiones anteriores corresponden a la versión estándar, o usual, de las transformaciones, la cual no es completamente general: los sistemas de referencia \mathcal{S} y \mathcal{S}' tienen el mismo origen temporal y las mismas escalas,¹⁰. Además suelen utilizarse los mismos vectores unitarios de base en ambos sistemas, $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$, $\alpha = x, y, z$.

1.6.1.1. Vectores y escalares. Invariantes galileanos

De acuerdo con lo expuesto en el apéndice J, Los vectores y escalares se caracterizan por las leyes de transformación de sus componentes con respecto a los cambios de base y no porque dichas componentes se transformen 'como las coordenadas'. El vector de posición es efectivamente un vector porque sus componentes se transforman como tales frente a un cambio de los vectores unitarios de la base; permanece invariante frente a los cambios de los vectores de la base pero no frente a las transformaciones de Galileo que son transformaciones de coordenadas, desde un sistema \mathcal{S} a otro \mathcal{S}' ¹¹. En este caso, el carácter tensorial de una magnitud física no garantiza su invarianza galileana.

Derivando con respecto al tiempo las coordenadas de la trayectoria de una partícula $\vec{r}(t)$ se obtiene la ley de *composición de velocidades* de Galileo

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad (1.26)$$

donde \vec{v} y \vec{v}' , las velocidades de la partícula con respecto a cada uno de los sistemas de referencia, son vectores no invariantes frente a las transformaciones de Galileo. Esta ley es incompatible con las leyes de Maxwell puesto que de ellas se deduce que las ondas electromagnéticas se propagan con una velocidad cuyo módulo c es un escalar invariante, hecho que hoy en día está confirmado hasta un precisión del orden del $cm \cdot s^{-1}$.

Volviendo a derivar se deduce que la aceleración de la partícula

$$\vec{a}' = \vec{a} \quad (1.27)$$

si es un *invariante vectorial* frente a las transformaciones de Galileo. Se entiende que un invariante vectorial (tensorial) no se ve afectado por la traslación, sólo cambian sus

¹⁰Pueden desplazarse los orígenes incluyendo en el segundo miembro de la transformación los términos iniciales \vec{r}_0 y t_0 e introducirse factores de escala, por ejemplo, escribiendo $t' = k t$.

¹¹Además del cambio de base, las transformaciones de coordenadas llevan consigo una traslación del origen. En el caso de las de Galileo ésta es dependiente del tiempo.

componentes si en la transformación se cambia la base vectorial . Esto implica que el cuadrado del módulo $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$ es un escalar invariante galileano. Se define como cuerpo inercial a aquel cuya aceleración con respecto a un sistema inercial es nula ($\vec{a} = \vec{0}$), por lo que el carácter inercial es invariante.

Puesto que el principio de relatividad implica la invarianza de las leyes de Newton, \vec{F} es un invariante vectorial

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

y, dado que la aceleración también lo es, m , la masa inerte, es un invariante escalar, es decir, al cambiar de sistema inercial

$$\vec{F}' = \vec{F} , \quad m' = m \quad (1.28)$$

Debemos también puntualizar que la ley de acción y reacción requiere que la transmisión de las interacciones se realice a velocidad infinita, lo que no es compatible con las leyes del electromagnetismo ya que de ellas se deduce que esta velocidad debe ser finita.

1.6.1.2. Leyes de transformación de los campos

Las leyes de transformación de los campos al cambiar de sistema inercial se deducen de la ley de Lorentz 1.20

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = q \left[\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r}) \right]$$

Al escribir de esta forma la ley de fuerza se sobreentiende que la carga q de la partícula es invariante $q = q'$, puesto que la expresión se da por válida para cualquier velocidad \vec{v} de la misma. Por otra parte, como se ha visto anteriormente, la fuerza es un invariante vectorial $\vec{F} = \vec{F}'$, luego $\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'$. Cada uno de los sumandos es un vector que, como se verá a continuación, no es invariante frente a las transformaciones de Galileo. A partir de lo anterior y de la ley de composición de velocidades se deducen las *leyes de transformación de los campos* utilizadas en el contexto galileano y que se cumplen aproximadamente en la práctica para $V \ll c$ y $c \rightarrow \infty$. Efectivamente, de acuerdo con la ley de composición de velocidades y considerando sólo sistemas de referencia 'a derechas', para simplificar

$$\begin{aligned} \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} &= \\ &= \underbrace{\vec{E} + \vec{v}' \wedge \vec{B} + \vec{V} \wedge \vec{B}}_{(a)} = \underbrace{\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'}_{(b)} \end{aligned}$$

Puesto que el campo eléctrico $\vec{E}' = (\vec{F}'/q)_{\vec{v}'=0}$, haciendo $\vec{v}' = 0$ en la ecuación (a) = (b), se obtiene

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \quad (1.29)$$

y, eliminando \vec{E}' de la misma ecuación $(a) = (b)$,

$$\vec{v}' \wedge \vec{B}' = \vec{v}' \wedge \vec{B}$$

Dado que \vec{v}' es un vector, aunque no invariante, que puede tomar valores arbitrarios, \vec{B}' es un pseudovector invariante ¹², ¹³

$$\vec{B}' = \vec{B} \quad (1.30)$$

Pero estas leyes de transformación, aunque aplicables y útiles en el rango ya mencionado de bajas velocidades, no dejan de presentar dificultades conceptuales porque son el resultado de imponer a los campos un principio de relatividad que las ecuaciones de Maxwell necesariamente incumplen.

¹²En las transformaciones en las que el orden cíclico de los vectores de base se invierte, $\vec{B}' = -\vec{B}$

¹³Si se aproxima hasta el primer orden en $\beta \equiv V/c$ a la ley de Einstein para la transformación del campo magnético, se obtiene $\vec{B}' \simeq \vec{B} - \frac{\vec{V}}{c^2} \wedge \vec{E}$ (véase [García Olmedo]); para obtener el resultado galileano es necesario, además, suponer que $c \rightarrow \infty$. No se debe olvidar que las ecuaciones de Maxwell no son compatibles con las transformaciones de Galileo. Esto hace que, en el límite de baja velocidad, sea a veces más apropiada la utilización de esta expresión que la galileana.

1.7. Problemas

1-1. Halle $\frac{\partial R}{\partial x}$ y $\frac{\partial R}{\partial x'}$. Demuestre que $\nabla R = -\nabla' R$, donde ∇ es el operador gradiente con respecto a las coordenadas del punto de observación y ∇' el mismo operador con respecto a las coordenadas del punto fuente.

1-2. Demuestre que

$$\vec{g}(r) = \frac{l}{4\pi} \int_{V'_0} \frac{\vec{R}(\vec{r}')}{R} dv'$$

Repase la demostración del teorema de Helmholtz en este capítulo .

1-3. Exprese como densidades continuas de carga las distribuciones puntuales de la figura 1.12 y compruebe que su integral sobre un volumen arbitrario es igual a la carga encerrada en el mismo.

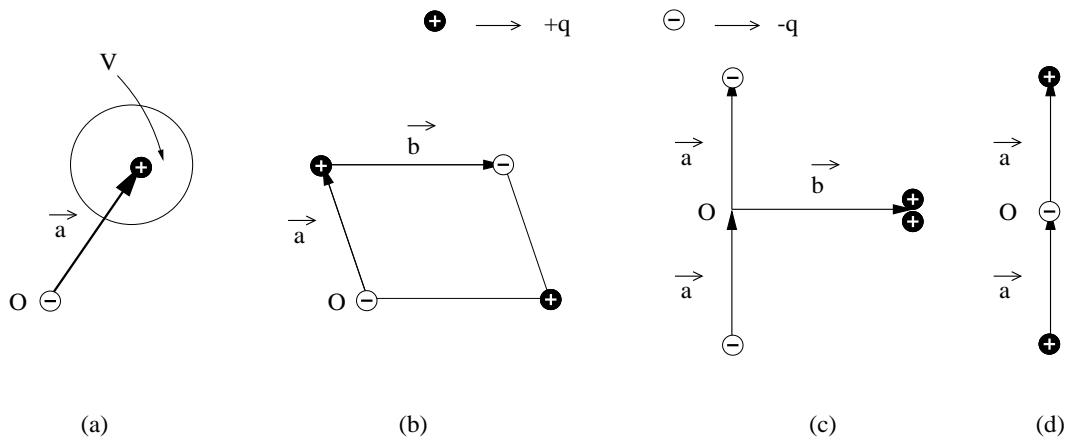


Figura 1.12:

Solución:

Si tomamos como origen el punto O , la densidad de carga, que anotaremos ρ_q , correspondiente a la distribución de la figura 1.12a es

$$\rho_q = q (\delta(\vec{r} - \vec{a}) - \delta(\vec{r}))$$

Efectivamente, si, por ejemplo, integramos sobre el volumen V

$$\int_V \rho_q dv = q \int_V \delta(\vec{r} - \vec{a}) - q \underbrace{\int_V \delta(\vec{r})}_{=0} = q$$

ya que el origen O ($\vec{r} = \vec{0}$) no pertenece a V .

1-4. Exprese como densidades de volumen las siguientes distribuciones de carga:

- a) Una carga distribuida, con densidad uniforme ρ_s , sobre la superficie de un cilindro que está centrado en el eje z .
- b) Una carga distribuida uniformemente, con densidad lineal λ , sobre una recta definida por las ecuaciones, en cilíndricas, $\rho = a$, $\varphi = b$.
- c) Una línea semicircular, uniformemente cargada con densidad λ , cuyas ecuaciones en esféricas son $r = a$, $\varphi = b$.

Solución:

De acuerdo con el resumen de formulario, podemos escribir, para problemas tridimensionales

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\prod_{i=1}^3 h_i} \prod_{i=1}^3 \delta(q_i - q_{i0})$$

Nos limitamos a considerar el apartado (b), representado por la figura 1.13a. Observamos que en dicho problema las fuentes se especifican mediante las δ de las coordenadas ρ y φ , como se muestra en la figura 1.13b, por lo que sólo es necesario incluir a éstas y en particular, tener en cuenta que $h_1 = 1$ y $h_2 = \rho$

$$\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - a) \delta(\varphi - b)$$

Podemos comprobarlo calculando la carga λ por unidad de longitud del hilo

$$\lambda = \frac{d q}{d z} = \int_z^{z+1} \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_q \, dv$$

donde $\rho_q = \lambda \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0)$ y $dv = \rho d\rho d\varphi dz$.

- 1-5. En el sistema MKS, la unidad eléctrica fundamental es el amperio A pero, sin embargo, la carga suele expresarse en culombios C, el campo eléctrico en voltios por metro $V \cdot m^{-1}$ y el magnético en webers por metro cuadrado $W \cdot m^{-2}$. Halle las dimensiones fundamentales del culombio, del voltio y del weber.
- 1-6. Una esfera de radio $a(t)$ se expande con velocidad constante v en una región cargada uniformemente con densidad ρ . Aplique a ésta situación la ecuación de continuidad.
- 1-7. Las densidades de electrones portadores en dieléctricos, semiconductores y conductores son del orden de 10^7 , 10^{19} y 10^{20} electrones por metro cúbico respectivamente. Supuesto un hilo de cada uno de éstos materiales, con una sección de 1 cm^2 , que transportase un amperio, estime las densidades de carga portadora, las velocidades de arrastre de los electrones y el número de ellos que se transporta a través de una sección dada en cada segundo.

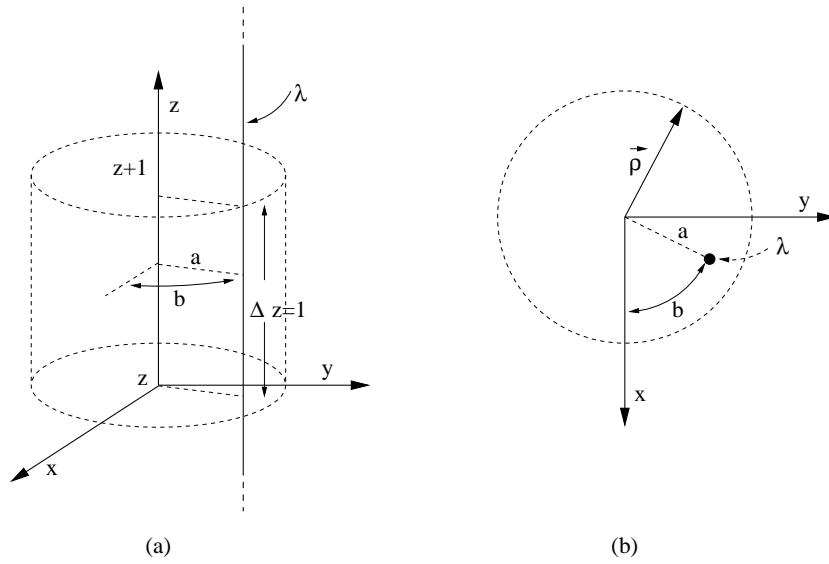


Figura 1.13:

- 1-8. Demuestre que el campo magnético puede medirse en función de las fuerzas ejercidas sobre una carga que se mueve sucesivamente con las velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , tales que $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$.
- 1-9. Una carga estática siente en un punto del espacio una fuerza, por unidad de carga, $\frac{\vec{F}_1}{q} = 1\hat{x} N \cdot C^{-1}$, cuando la carga se mueve con velocidad $\vec{v}_2 = 1\hat{x} m \cdot s^{-1}$, $\frac{\vec{F}_2}{q} = 1(\hat{x} + \hat{z}) N \cdot C^{-1}$ y cuando la velocidad es $\vec{v}_3 = 1\hat{y} m \cdot s^{-1}$, $\vec{F}_3 = \vec{F}_1$. Halle \vec{E} y \vec{B}
- 1-10. Un electrón incide en el origen con velocidad $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ en presencia de un campo eléctrico y otro magnético, ambos uniformes y paralelos al eje z . Halle las ecuaciones de la trayectoria y describa las propiedades fundamentales de la misma.

Solución:

Si aplicamos la ley de Newton del movimiento al electrón

$$\vec{F} = \underbrace{-e E \hat{z}}_{(a)} - \underbrace{e B \vec{v} \wedge \hat{z}}_{(b)} = m \vec{a} \quad (1.31)$$

Podemos descomponer el movimiento en uno longitudinal, en la dirección z , debido al campo eléctrico, y otro transversal, CICLOTÓNICO, en el plano xy , debido al campo magnético. para ello, descomponemos la velocidad y la aceleración en las direcciones \parallel , paralela a los campos y \perp , perpendicular a los mismos,

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \quad \vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$$

Movimiento longitudinal:

Este movimiento es uniformemente acelerado (1.31(a))

$$a_z = -\frac{e E}{m}$$

e integrando con las condiciones iniciales $z(0) = 0$ y $v_z(0) = 0$, resulta

$$z = -\frac{1}{2} \frac{e E}{m} t^2$$

Movimiento transversal:

El problema puede resolverse con ayuda de la figura 1.14.

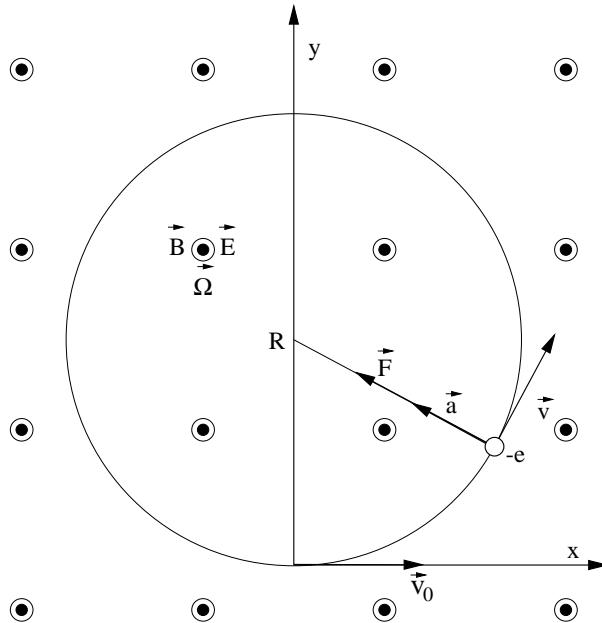


Figura 1.14:

en la que se representa la trayectoria circular del electrón a partir de su posición inicial $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ y su velocidad inicial $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$. El movimiento es circular porque, de acuerdo con (1.31(a)),

$$\vec{a} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \quad (1.32)$$

donde, aunque no se mantiene la notación antes establecida, $\vec{a} = \vec{a}_{\perp}$, $\vec{v} = \vec{v}_{\perp}$ ¹⁴ y

$$\vec{\Omega} = \frac{eB}{m} \hat{z}, \quad \vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$$

15

¹⁴Téngase en cuenta que $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\parallel} = \vec{0}$.

¹⁵Ω es la frecuencia ciclotrónica angular del electrón.

De 1.32 se deduce que $\vec{a} \perp \vec{v}$, lo cual implica que $v = cte$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{d v^2}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte$$

y la trayectoria es circular y uniforme.

En este tipo de movimiento $v = v_0 = \Omega \rho$, luego el radio de giro ρ ¹⁶ es

$$\rho = \frac{m v_0}{eB}$$

Dado que la fuerza y la aceleración iniciales están dirigidas en el sentido positivo del eje y , la trayectoria es la representada en la figura y su ecuación es

$$x^2 + (y - \rho)^2 = \rho^2 \quad (1.33)$$

Nótese que si en vez de tratarse de un electrón se tratase de un protón, cuya masa es $M \gg m$ y cuya carga es $-e$, el giro tendría lugar en sentido contrario y la frecuencia angular de giro sería mucho más lenta

$$\Omega_p = \Omega \frac{m}{M} \ll \Omega$$

Si, además ambos hubiesen incidido en el origen con la misma velocidad, el radio de giro del protón sería mucho mayor $\rho_p = \frac{M}{m} \gg \rho$

Otra vía más formal de solución consiste en desarrollar el producto vectorial en 1.32, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d v_x}{dt} &= -\Omega v_y \\ \frac{d v_y}{dt} &= \Omega v_x \end{aligned} \quad (1.34)$$

Podemos ensayar soluciones del tipo $v_i = A_i \sin \Omega t + B_i \cos \Omega t$, $i = x, y$ y aplicarles las condiciones iniciales de la figura 1.14, es decir, $v_{x0} = v_0$, $v_{y0} = 0$. A continuación las hacemos cumplir una cualquiera de las ecuaciones 1.34 obteniendo

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \Omega t \\ v_y &= v_0 \sin \Omega t \end{aligned}$$

Estas ecuaciones indican que \vec{v} gira con velocidad Ω y tiene de módulo v_0 .

¹⁶Radio ciclónico del electrón.

Integrando v_x y v_y se tiene que

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \Omega t + E \\y &= \rho \cos \Omega t + F\end{aligned}$$

donde E y F son constantes de integración y $\rho = \frac{v_0}{\Omega}$.

Si aplicamos las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \Omega t \\y &= \rho (1 - \cos \Omega t)\end{aligned}\tag{1.35}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria. Para expresarlas en la forma de la ecuación 1.33 basta con eliminar t teniendo en cuenta que $\sin^2 \Omega t + \cos^2 \Omega t = 1$.

Gráfico Mathematica prob1 – 8.nb:

El siguiente programa Mathematica dará lugar a un gráfico de la trayectoria tridimensional del electrón. Es el resultado de componer la trayectoria longitudinal con la transversal. Las posiciones del electrón al principio y al final de cada ciclo se marcan con un punto.

Comenzamos borrando las definiciones anteriores de variables y funciones para que no interfieran en la próxima ejecución de este programa. Seguidamente damos la orden de no avisar de los posibles errores de escritura (Se supone que el programa está bien escrito y funciona correctamente.)

```
Remove["Global`*"]; Off[General::spell1];
```

Elegimos el tipo y tamaño de los caracteres de las gráficas

```
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12};
```

*Especificamos el número **n** de ciclos que queremos representar, para lo cual damos el nombre **tf** al tiempo final de la trayectoria.*

```
n = 5; tf = n * 2π;
```

gr1 es la representación paramétrica de la trayectoria

$$\vec{r} = (\sin \Omega t, 1 - \cos \Omega t, \frac{1}{2} a t^2)$$

asignándole a Ω y a valores apropiados. La opción **DisplayFunction -> Identity** ordena no mostrar la gráfica

```

gr1 = ParametricPlot3D[{Sin[t], 1 - Cos[t], - $\frac{1}{2}$  0.003 t2}, {t, 0, tf},
  PlotPoints → 1000, DefaultColor → RGBColor[1, 0, 0],
  ViewPoint → {-2, -2, 1}, Boxed → False, AxesLabel → {"x", "y", "z"},
  AxesStyle → {RGBColor[0, 1, 1], Thickness[0.01]},
  DisplayFunction → Identity];

```

Definimos los puntos de comienzo y final de cada ciclo y ordenamos la ejecución de la gráfica sin mostrarla.

```

puntosg3D = Table[Point[{0, 0, - $\frac{1}{2}$  0.003 ((i - 1) * 2π)2}], {i, 1, n + 1}];

gr2 = Show[Graphics3D[{PointSize[0.02], RGBColor[0, 0, 1], puntosg3D}],
  DisplayFunction → Identity];

```

Terminamos mostrando ambas gráficas juntas en la figura 1.15.

```
Show[gr1, gr2, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

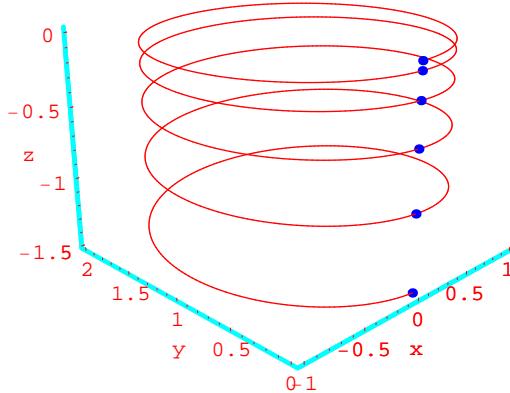


Figura 1.15:

- 1-11. *Demuestre que si, además del campo magnético especificado en el problema anterior, existe una fuerza \vec{F}_p perpendicular al eje z, la trayectoria del electrón sufre un arrastre con velocidad constante \vec{v}_F (existe un sistema de referencia, que se mueve con velocidad uniforme \vec{v}_F con respecto al anterior, desde el cual el movimiento de la partícula sigue siendo ciclotrónico).*

UN PLASMA ESTA CONSTITUIDO POR ELECTRONES DE CARGA $-e$ Y MASA m E IONES POSITIVOS DE CARGA $+e$ Y MASA M . LAS DENSIDADES DE PARTÍCULAS RESPECTIVAS, EN ESTADO DE EQUILIBRIO, SON $n_e = n_i = n_0$.

Halle la densidad de corriente inducida cuando la fuerza se debe a un campo eléctrico \vec{E} o a un campo gravitatorio \vec{g} .

Solución:

Dado que la fuerza magnética es perpendicular a \vec{B} y la fuerza aplicada también, el movimiento queda confinado en el plano \perp , como se muestra en la figura 1.16.

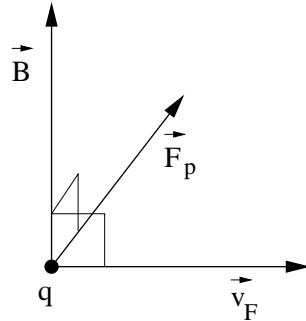


Figura 1.16:

La ecuación del movimiento es

$$\vec{F} = \vec{F}_p + q \vec{v} \wedge \vec{B} = m \vec{a}$$

Si cambiamos del sistema inercial \mathcal{S} al \mathcal{S}' , que se mueve con velocidad \vec{v}_F con respecto al primero

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_F$$

y, substituimos en la ecuación anterior

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{\vec{F}_p}{m}}_I + \underbrace{\frac{q}{m} \vec{v}' \wedge \vec{B}}_{II} - \underbrace{\frac{q}{m} \vec{v}_F \wedge \vec{B}}_{III}$$

Igualando los términos I y II conseguimos que desde \mathcal{S}' se vea un movimiento ciclotrónico idéntico al que se vería desde \mathcal{S} en ausencia de \vec{F}_p . Por lo tanto, la velocidad de deriva es tal que

$$\vec{F}_p = q \vec{v}_F \wedge \vec{B}$$

Para despejar \vec{v}_F de la ecuación anterior, basta con multiplicar vectorialmente por \vec{B} y desarrollar el triple producto resultante. El resultado es

$$\vec{v}_F = \frac{\vec{F}_p \wedge \vec{B}}{qB^2}$$

y, en particular, si la fuerza aplicada es la debida al campo eléctrico ($\vec{F}_p = q\vec{E}$) o al gravitatorio ($\vec{F}_p = m\vec{g}$), las velocidades de arrastre correspondientes son

$$\vec{v}_a = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} , \quad v_g = \frac{m}{qB^2} \vec{g} \wedge \vec{B}$$

Resulta interesante notar que \vec{v}_a es independiente de la carga y de la masa de la partícula, de ahí el calificativo de velocidad de deriva *ambipolar*, mientras que \vec{v}_g depende de la relación de carga a masa y su sentido viene determinado por el signo de la primera.

En un plasma uniforme, el movimiento ciclotrónico no produce flujo neto de carga, por lo que se puede considerar que dicho flujo se debe, si existe, al movimiento de deriva.

Gráfico Mathematica deriva – ambipolar.nb:

El siguiente programa representa gráficamente al movimiento ciclotrónico, con deriva ambipolar, de un electrón (azul) y un ión positivo (rojo). Los puntos indican las posiciones simultáneas de ambas partículas en el origen y en el instante final.

Suponiendo que los campos están contenidos en el plano yz , $\vec{E} = E \hat{y}$ y $\vec{B} = B \hat{z}$, el movimiento de las cargas está contenido en el plano xy y la dirección de deriva es la x . El giro ciclotrónico es en la dirección de \vec{B} para los electrones y en la contraria para los iones positivos. Las ecuaciones del movimiento serán, por lo tanto:

$$x_i = \vec{r}_i \sin \omega_i t + v_E t , \quad y_i = \vec{r}_i \cos \omega_i t + C_i$$

para los iones y

$$x_e = \vec{r}_e \sin \omega_e t + v_E t , \quad y_e = -\vec{r}_e \cos \omega_e t - C_e$$

para los electrones. Con los parámetros escogidos, los iones se representan en la parte superior los electrones en la inferior. La dirección del campo magnético es hacia afuera de la página.

```

ion = ParametricPlot[{Sin[t] + 0.3t, -Cos[t] + 1.5}, {t, 0, 6π},
  AspectRatio → Automatic, AxesOrigin → {0, 0}, PlotPoints → 200,
  PlotStyle → RGBColor[1, 0.3, 0], DisplayFunction → Identity];

elec = ParametricPlot[{0.3Sin[3t] + 0.3t, 0.3Cos[3t] - 0.8}, {t, 0, 6π},
  AspectRatio → Automatic, AxesOrigin → {0, 0}, PlotPoints → 200,
  PlotStyle → RGBColor[0, 0.5, 1], DisplayFunction → Identity];

xf = (Sin[t] + 0.3t)/.t → 6π;
puntosion = {Point[{0, 0.5}], Point[{xf, 0.5}]};

```

```

puntoselec = {Point[{0, -0.5}], Point[{xf, -0.5}]};

gr1 = Show[Graphics[PointSize[0.03], RGBColor[1, 0, 0], puntosion],
DisplayFunction → Identity];

gr2 = Show[Graphics[PointSize[0.03], RGBColor[0, 0, 1], puntoselec],
DisplayFunction → Identity];

Show[ion, elec, gr1, gr2, DisplayFunction → $DisplayFunction];

```

La figura 1.17 muestra el movimiento ciclotrónico superpuesto a la deriva ambipolar.

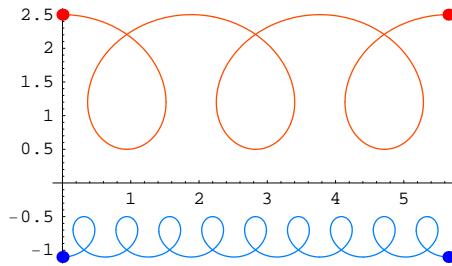


Figura 1.17:

- 1-12. En el punto ($x = 0, y = 0$) se emiten electrones con velocidad despreciable. Halle la ecuación de las trayectorias si éstos están sometidos a un campo eléctrico $\vec{E} = -E_0 \hat{x}$ y otro magnético $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, uniformes.
- 1-13. Halle el trabajo realizado para desplazar a una carga unitaria desde el infinito hasta la posición \vec{r} si está en presencia del campo eléctrico producido por una carga puntual situada en el origen

$$\vec{E} = K \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Solución:

Dada la simetría radial de la fuerza, W sólo depende de r y, como veremos, es independiente del camino seguido para realizar la circulación.

$$W = K \int_{\infty}^r \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr \Rightarrow \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = d\left(\frac{1}{r}\right)$$

Por lo tanto

$$W = K \frac{1}{r}$$

W seguirá siendo independiente del camino aunque el campo en cuyo seno se mueve la carga esté producido por una distribución de carga no puntual ¿Por qué?

Capítulo 2

Campos estáticos

2.1. Introducción

Empezamos aquí la búsqueda de las fuentes del campo electromagnético en el vacío. En este capítulo nos limitaremos al caso de los campos estáticos, producidos por cargas en reposo y corrientes estacionarias.

2.2. Campo electrostático

El campo electrostático es aquel que no depende del tiempo y que está producido por distribuciones de carga que tampoco varían con el tiempo. Desde el punto de vista microscópico supondremos que todas las cargas del Universo están quietas con respecto al observador.

2.2.1. Ley de Coulomb

Aunque Coulomb postuló la interacción completa, nosotros expondremos su ley como relación entre las fuentes del campo y el propio campo.

Para cargas puntuales, el campo eléctrico producido por un sistema de N cargas q_i en el punto P , cuyo vector de posición es \vec{r} , puede expresarse de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = C \sum_{i=1}^N q_i \frac{\hat{R}_i}{R_i^2} \quad (2.1)$$

donde, de acuerdo con la figura 2.1, los \hat{R}_i son los vectores de posición del punto de observación con respecto a las q_i . El campo eléctrico suele expresarse en $V \cdot m^{-1}$, donde V , el voltio, es la unidad MKSA de potencial.

Para una sola carga situada en el origen

$$\vec{E}(\vec{r}) = C q \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (2.2)$$

Es decir, el campo electrostático cumple el principio lineal de superposición vectorial, es proporcional a las cargas fuente, sigue una ley del inverso del cuadrado de la

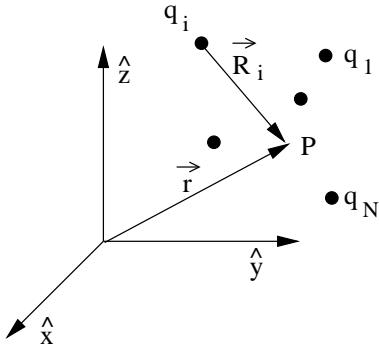


Figura 2.1:

distancia, su dirección viene regida por los vectores que ligan a las cargas con el punto de observación y su sentido está determinado por el signo de q_i . No se tiene constancia de la existencia de no-linealidades, dentro de la teoría clásica, no cuántica, incluso para los campos extremadamente fuertes que se dan en los núcleos pesados.

La ley del cuadrado se cumple con gran precisión

$$F \sim \frac{1}{R^2} \quad \left(\frac{1}{R^n}, \quad n = 2 \pm 3 \times 10^{-16} \right)$$

En el sistema *cgs* electrostático $C = 1$, por lo que q es una magnitud derivada de las mecánicas. (Véase el apéndice I).

En el *MKSA*¹,

$$C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \text{ } F^{-1} \cdot m, \quad e_0 \simeq 8,85 \times 10^{-12} \text{ } F \cdot m^{-1}$$

$$F \cdot m^{-1} = m^3 \cdot Kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$$

La interacción eléctrica F_e es muy superior a la gravitatoria F_g entre partículas elementales. La razón entre estas fuerzas, para dos electrones, es:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{Ce^2}{Gm^2} \sim 10^{43}$$

Sin embargo, en contra de la opinión de William Gilbert, no es *una cierta clase de magnetismo* lo que gobierna la trayectoria de los planetas y los astros, sino la fuerza gravitatoria. Mientras que sólo hay un tipo de masa, existen dos tipos de carga que se apantallan entre sí atenuando la interacción correspondiente a larga distancia. No obstante, los campos magnéticos juegan un papel importante en el movimiento y la estructuración de los plasmas del universo y en el de las galaxias.

En general, para distribuciones continuas de cargas, véase la figura 2.2, la ley de Coulomb se genealiza substituyendo la sumatoria por una integral

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dv' \quad (2.3)$$

¹La unidad F es la de capacidad, el *faradio*.

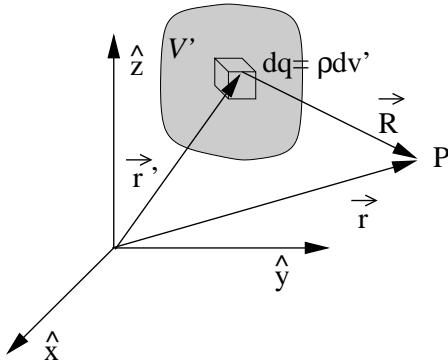


Figura 2.2:

2.2.2. Fuentes del campo electrostático; potencial

La expresión anterior puede escribirse de la forma²

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dv' = -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dv' + K \right]$$

donde K es una constante. De aquí se deduce que

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (2.4)$$

Es decir, \vec{E} deriva de un *potencial escalar* V que puede obtenerse mediante una integración sobre el volumen V' en el que la densidad de carga $\rho(\vec{r}')$ es distinta de cero.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dv' + K \quad (2.5)$$

De esta expresión se deduce, según el teorema de Helmholtz³, que las fuentes escalares y vectoriales del campo electrostático son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.6a)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (2.6b)$$

Éstas son las ecuaciones de Maxwell para el campo electrostático. La primera especifica las fuentes escalares del campo y presenta su forma definitiva, válida para los campos dinámicos en el vacío. La segunda expresa que el campo electrostático no tiene fuentes vectoriales; habrá de ser modificada para incluir a otras fuentes vectoriales que generan al campo eléctrico no estático⁴. Puesto que son ecuaciones diferenciales, tienen

² ∇ sale fuera de la integral porque no opera sobre las coordenadas de integración.

³ $\mathcal{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ y $\nabla \wedge \nabla f \equiv \vec{0}$.

⁴ Dichas fuentes se introducen mediante el postulado de la ley de inducción de Faraday.

carácter local: ligan a las derivadas del campo en un punto del espacio con el valor de las fuentes en ese mismo punto.

Haciendo uso de los teoremas de la divergencia y del rotacional, se pueden expresar estas leyes en forma extensiva.

La 2.6a

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.7)$$

donde S es la superficie que encierra al volumen \mathcal{V} en el que se encuentra una carga total $Q = \int_{\mathcal{V}} \rho dv$. Esta ley es conocida con el nombre de *ley de Gauss* y relaciona al flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga total contenida dentro de la misma.

Por otra parte, puesto que \vec{E} no posee fuentes vectoriales (2.6b), se cumple que, para cualquier \mathcal{L} ,

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.8)$$

Esta es una manifestación del carácter conservativo del campo electrostático: el campo electrostático realiza un trabajo nulo sobre cargas que describen trayectorias cerradas.

Ya hemos visto que \vec{E} deriva de un potencial escalar cuya relación con las densidades de carga viene dada por 2.5. Para una carga q puntual situada en el origen, esta densidad es $\rho(\vec{r}') = q \delta(\vec{r}')$ y

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + K \quad (2.9)$$

Más adelante veremos que esta expresión es válida para distribuciones de carga, no neutras, que estén definidas en volúmenes finitos, a distancia finita del origen y observadas desde grandes distancias al mismo ($r \rightarrow \infty$). En este caso, q sería la carga total de dicho volumen y $K = V(\infty)$ el potencial del infinito. Salvo que se suponga que existen cargas en el ∞ , éste puede tomarse como origen de los potenciales con lo que $K = 0$.

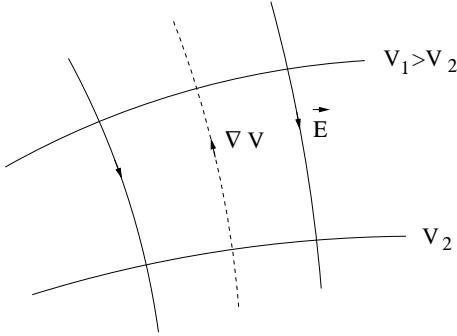


Figura 2.3:

El campo eléctrico $\vec{E} = -\nabla V$, véase la figura 2.3, tiene la dirección y el sentido del máximo decrecimiento de V . Los incrementos elementales de potencial pueden expresarse como

$$dV = \nabla V \cdot d\vec{r} , \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

ya hemos anticipado que la unidad del potencial, el voltio es $V = J \cdot C^{-1}$. Tiene, pues, dimensiones de energía por unidad de carga.

Las superficies equipotenciales, $dV = 0$, son las generadas por desplazamientos $d\vec{r}$ perpendiculares a las líneas de campo. Para $V = cte$, $(\vec{E} \cdot d\vec{r}) = 0$, luego, $\vec{E} \perp d\vec{r}$.

2.2.3. Energía potencial

La realización de un balance energético detallado, para un sistema físico real, suele ser compleja puesto que existen mecanismos muy diversos de almacenamiento y transformación de energía. Empezaremos abordando los casos más simples.

Energía potencial de una carga en campo externo :

El balance energético más simple que podemos imaginar en un sistema eléctrico es el siguiente: imaginemos un proceso reversible en el que una carga se traslada desde una posición \vec{r}_1 a otra \vec{r}_2 en presencia de un campo externo \vec{E}_e creado por cargas que permanecen inalterables durante el proceso. Bajo estas circunstancias, en el vacío, la única fuente de irreversibilidad posible reside en los fenómenos de radiación que se producen cuando una carga es acelerada. Aunque las pérdidas por radiación suelen ser pequeñas, será necesario asegurarse que durante la transformación las aceleraciones sufridas por la carga son despreciables. Equilibraremos las fuerzas que el campo externo ejerce sobre la carga con otra fuerza casi igual y contraria.

$$\vec{F}_{cc} \simeq -\vec{F}_c \begin{cases} \vec{F}_{cc} = \text{fuerza contra el campo} \\ \vec{F}_c = \text{fuerza del campo} \end{cases}$$

Esto permitirá realizar transformaciones cuasiestáticas y reversibles.

Dado el carácter conservativo del campo electrostático, el incremento de energía potencial de una carga que se traslada desde la posición inicial \vec{r}_1 a la final \vec{r}_2 es, por definición,

$$\begin{aligned} \Delta W &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}_e \cdot d\vec{r} = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \nabla V_e \cdot d\vec{r} \\ &= q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dV_e = q [V_e(\vec{r}_2) - V_e(\vec{r}_1)] \end{aligned}$$

Para una carga situada en \vec{r}

$$\Delta W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = q [V_e(\vec{r}) - V_e(\infty)]$$

y, en el caso de que el infinito pueda tomarse como origen de potenciales ($V_e(\infty) = 0$)

$$W(\vec{r}) = q V_e(\vec{r}) \tag{2.10}$$

Como ya hemos apuntado, esto será siempre posible si las cargas que crean \vec{E}_e están en un volumen finito a distancia finita del observador.

La energía potencial sería, por lo tanto, el trabajo realizado por el campo para llevar la carga hasta el infinito o, de otra forma, la máxima energía que puede extraerse de la carga al trasladarla de su posición inicial, en reposo, hasta el infinito, también en reposo. Si el proceso se realizara de forma no reversible, con aceleraciones notables, parte del trabajo realizado por el campo se perdería como energía radiada.

Si en vez de una sola carga puntual quisieramos contabilizar la energía potencial de un sistema de N cargas puntuales y de una distribución continua contenida en \mathcal{V} , en el seno de un campo producido por otro sistema externo de cargas, tendremos,

$$W = \sum_{i=1}^N q_i V_e + \int_{\mathcal{V}} \rho V_e dv \quad (2.11)$$

expresión que excluye a la energía de interacción de las cargas testigo entre sí.

Energía potencial de un sistema de cargas :

En el apartado anterior hemos considerado la interacción de una carga con el campo creado por un sistema de cargas externo. Consideraremos ahora la energía total de interacción de un sistema de N cargas puntuales, cuya energía de formación o *autoenergía* no tendremos en cuenta, situadas a distancias mutuas finitas R_{ij} (véase la figura 2.4a).

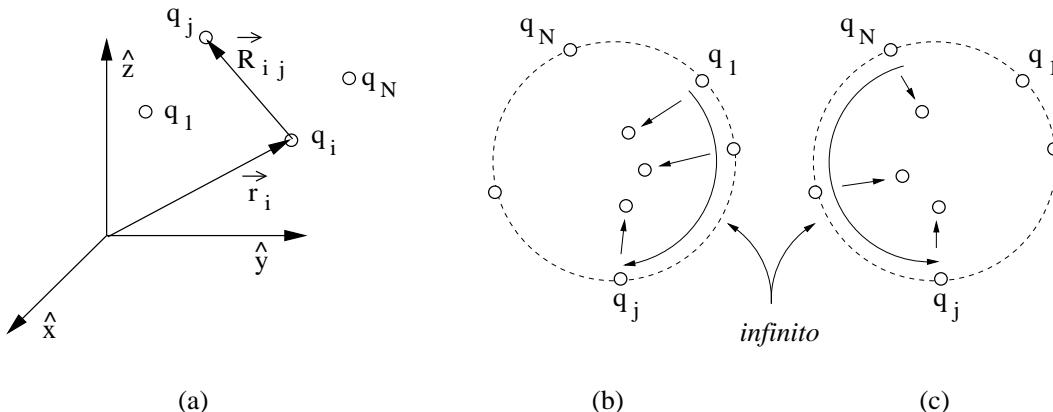


Figura 2.4:

Esta energía de interacción sería la máxima que podría ser extraída del sistema en un proceso en el que, partiendo de las posiciones iniciales, se lleva a las cargas hasta el infinito, de tal forma que las distancias mutuas finales fuesen infinitas y, en consecuencia, la energía de interacción fuese nula.

La *energía potencial* del sistema de cargas puntuales será, pues, el trabajo que tendríamos que realizar en contra del campo para trasladar a las cargas, de forma reversible, desde sus posiciones en el infinito hasta sus posiciones finales \vec{r}_i .

Puesto que el proceso es reversible, el trabajo total será independiente del camino y del orden en que se transporten las cargas.

En primer lugar, tal como se indica en la figura 2.4b, trasladaremos a las cargas en el orden $j = 1, \dots, N$, una a una, a sus posiciones finales. La energía potencial del sistema es

$$W = \sum_{j=1}^N W_j$$

donde W_j es el trabajo que cuesta traer a la carga j en contra del campo de las $j - 1$ que han sido trasladadas previamente. En particular, $W_1 = 0$ porque cuando se traslada la primera carga no hay ninguna otra cercana a su posición final.

Podemos escribir, según el párrafo anterior,

$$W_j = q_j \sum_{i=1}^{j-1} V_i(\vec{r}_j) = q_j \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{R_{ij}}$$

siendo $V_i(\vec{r}_j)$ el potencial que la carga i produce en la posición final de la carga j .

Luego

$$W = \sum_{j=1}^N q_j \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{R_{ij}}$$

A este mismo resultado podemos llegar invirtiendo el orden del transporte, de acuerdo con la figura 2.4c: dando a j los valores $j = N, \dots, 1$

$$W = \sum_{j=N}^1 W'_j = \sum_{j=1}^N q_j \sum_{i=j+1}^N \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{R_{ij}}$$

Expresión en la que se ha tenido en cuenta que W'_j es el trabajo que cuesta traer a la carga q_j cuando previamente se han traído las cargas q_N, \dots, q_{j+1} .

Sumando ambas expresiones

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^N \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{R_{ij}} \\ W &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j V_j \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde V_j es el potencial creado por el resto de las cargas del sistema ($i \neq j$) en la posición \vec{r}_j ocupada por la partícula j .

Aquí aparece un factor $\frac{1}{2}$, a diferencia del resultado obtenido en el párrafo anterior, porque el campo contra el que hay que trabajar es el propio de las cargas del sistema y no un campo externo.

Es necesario resaltar que en esta expresión no se incluye la energía necesaria para formar a las cargas puntuales o *autoenergía* de dichas cargas. La autoenergía de una carga puntual es singular, como puede comprobarse si intentamos construir una carga puntual $Q = \sum q_j$, a partir del sistema de cargas puntuales, haciendo $R_{ij} \rightarrow 0$

$$\lim_{R_{ij} \rightarrow 0} W = \infty$$

Si en vez de una distribución discreta de carga construimos una distribución continua, se obtiene

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dv \quad (2.13)$$

Expresión que da cuenta de toda la energía necesaria para formar la distribución sin excluir los términos de autoenergía. Podemos construir la distribución final de carga continua a partir de la carga totalmente dispersa, en el infinito, de forma que la energía inicial de interacción sea nula. Si, de acuerdo con la figura 2.5, vamos incrementando gradualmente la densidad de cada punto de la distribución, trasladando desde el infinito elementos de carga $\delta^2 q = \delta\rho dv$, el potencial, $V(\vec{r})$, que guarda una relación lineal con sus fuentes, varía proporcionalmente a $\rho(\vec{r})$, lo que, de forma análoga al proceso analizado previamente en base a cargas puntuales, hace aparecer el factor $\frac{1}{2}$ en la expresión.

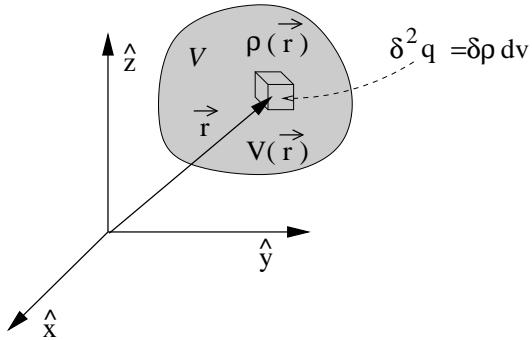


Figura 2.5:

2.2.4. Ecuaciones de Poisson y Laplace

Buscaremos las ecuaciones locales que ligan al potencial electrostático y a las densidades de carga.

El campo electrostático es conservativo, $\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$, pero, en general, no es solenoidal, $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, por lo que

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Ecuación de Poisson} \quad (2.14)$$

que, en el caso en que $\rho = 0$, se convierte en

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace} \quad (2.15)$$

Véanse los problemas y los apéndices correspondientes para la solución analítica y numérica de estas ecuaciones .

2.2.5. Estructuras simples del campo eléctrico

Dada una distribución de cargas determinada, disponemos de varias alternativas para el cálculo del campo eléctrico resultante. Ciertas distribuciones, por poseer un alto

grado de simetría, permiten soluciones analíticas simples, lo que realza su importancia. En general, las soluciones analíticas exactas no son posibles y hay que recurrir a la obtención de soluciones analíticas aproximadas o a soluciones numéricas.

Así pues, una distribución con simetría plana, por ejemplo una en la que $\rho = \rho(x)$, figura 2.6-a, es vista por un observador desde $P_1(x_1, y_1, z_1)$ exactamente de la misma forma que desde $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Sólo es capaz de discernir los detalles de las fuentes en la dirección x .

$$\rho = \rho(x) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 , \quad V = V(x) , \quad \vec{E} = E(x) \hat{x}$$

De la misma forma, para distribuciones con simetría cilíndrica o esférica, figuras 2.6-b y 2.6-c,

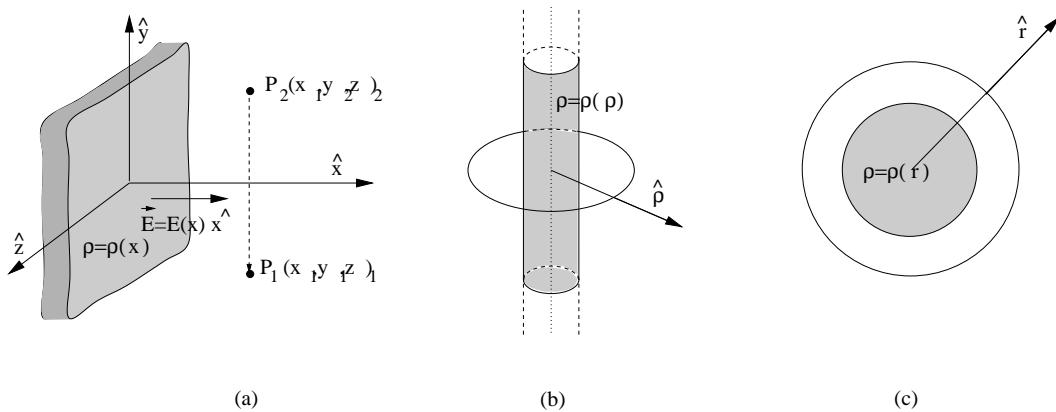


Figura 2.6:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(\rho) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 , \quad V = V(\rho) , \quad \vec{E} = E(\rho) \hat{\rho} \\ \rho &= \rho(r) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 , \quad V = V(r) , \quad \vec{E} = E(r) \hat{r} \end{aligned}$$

A pesar de que las distribuciones con alto grado de simetría carecen de generalidad, su sencillez les presta una gran importancia teórica y práctica.

2.3. Campo magnético producido por corrientes estacionarias. Fuerza sobre corrientes estacionarias

2.3.1. Campo

El campo magnético que produce una corriente estacionaria viene dado por la *ley de Biot y Savart*. Podríamos presentar esta ley en detalle, como hemos hecho con la de Coulomb, pero nos limitaremos a resaltar que la estructura del campo magnético es más compleja que la del eléctrico porque el integrando es un vector⁵, perpendicular a

⁵En sentido estricto, el integrando y, en consecuencia, el propio campo, son pseudovectores.

la densidad de corriente y al vector de posición relativa, pero que también sigue una ley del inverso del cuadrado de la distancia. En el sistema *MKSA*, en el cual el campo magnético se mide en *teslas*, (T),, esta ley toma la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{j} \wedge \frac{\vec{R}}{R^3} dv' \quad (2.16)$$

V' es el volumen del tubo de corriente estacionaria y suponemos que $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ es independiente del tiempo. La expresión

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j} \wedge \frac{\hat{R}}{R^2} dv'$$

sólo tiene sentido como integrando, puesto que un elemento de corriente $\vec{j} dv'$ no constituye por sí mismo una corriente estacionaria (figura 2.7).

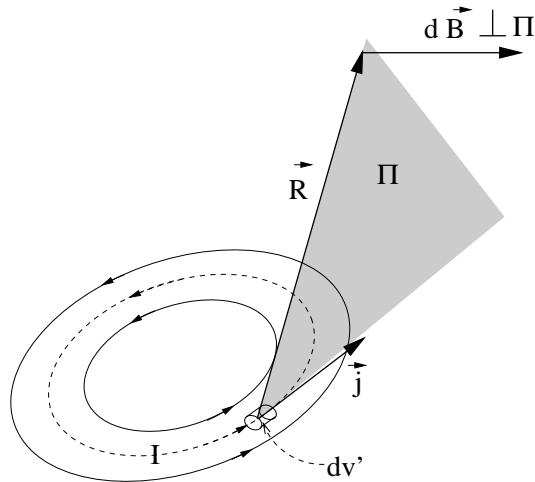


Figura 2.7:

$$[B] = \begin{array}{l} \text{Tesla} \\ (\text{MKSA}) \end{array} = \text{Weber} \cdot m^{-2} = 10^4 \text{ gauss}$$

La constante μ_0 , *permeabilidad del vacío*, se define numéricamente como

$$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} N \cdot A^{-2}$$

Un caso particular de corriente estacionaria es la *espira*: tubo de corriente cerrado y con sección despreciable, figura 2.8.

Si la sección es pequeña pueden definirse $d\vec{s}' \uparrow\uparrow \vec{j} \uparrow\uparrow d\vec{l}'$ ⁶, con lo que $dv' = d\vec{s}' \cdot d\vec{l}'$ e $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}'$, siendo S una sección del tubo.

Substituyendo en 2.16

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{j} \wedge \frac{\hat{R}}{R^2} (d\vec{s}' \cdot d\vec{l}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d\vec{l}' \wedge \frac{\hat{R}}{R^3} (\vec{j} \cdot d\vec{s}')$$

⁶↑↑ indica que los dos vectores son paralelos y tienen la misma dirección.

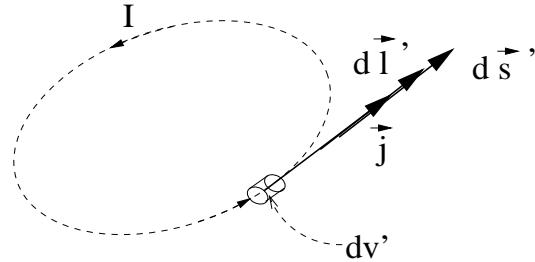


Figura 2.8:

luego

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} \frac{d\vec{l}' \wedge \vec{R}}{R^3} \quad (2.17)$$

que es la expresión, para espiras, de la ley de Biot y Savart.

2.3.2. Fuerza

La fuerza ejercida por un campo magnético sobre un tubo de corriente estacionaria, de acuerdo con la ley de Lorentz, es

$$\vec{F} = \int_V \vec{j} \wedge \vec{B} dv \quad (2.18)$$

y, en el caso de una espira

$$\vec{F} = \oint_{\mathcal{L}} d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (2.19)$$

Podemos comprobar, figura 2.9, que la fuerza $'d\vec{F}'$ que un elemento de corriente $I' d\vec{l}'$ ejerce sobre otro $I d\vec{l}$ no cumple el principio de acción y reacción. Esto es debido a la simetría del triple producto vectorial:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I I' d\vec{l} \wedge \frac{(d\vec{l}' \wedge \vec{R})}{R^3}, \quad d\vec{F} \perp d\vec{l}, d\vec{B}' \\ d\vec{F}' &= \frac{\mu_0}{4\pi} I I' d\vec{l}' \wedge \left[\frac{(d\vec{l} \wedge (-\vec{R}))}{R^3} \right], \quad d\vec{F}' \perp d\vec{l}', d\vec{B} \end{aligned}$$

Esto carece de trascendencia puesto que la ley de Biot y Savart sólo es válida para corrientes estacionarias y puede comprobarse⁷ que el principio de acción y reacción sí se cumple para la interacción de dos corrientes estacionarias. No obstante, las acciones del campo electromagnético variable se propagan con velocidad finita por lo que en el caso de corrientes dinámicas no cabe esperar que el principio de acción y reacción se cumpla a distancia.

⁷Véase el problema 2-22.

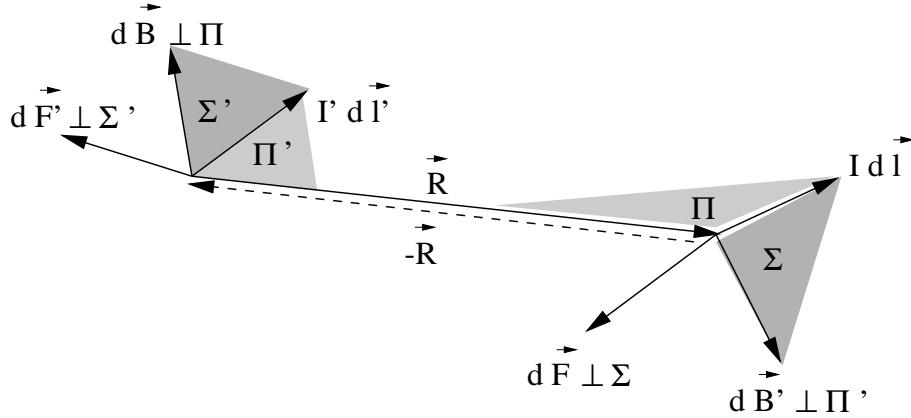


Figura 2.9:

2.3.3. Fuentes del campo magnético. Potencial vector

Busquemos las fuentes escalares:

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot \left[\vec{j}(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{R}}{R^3} \right] dv'$$

y, teniendo en cuenta que

$$\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \wedge \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \wedge \vec{b}$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{j}(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \underbrace{\nabla \wedge \vec{j}(\vec{r}')}_{=0} - \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla \wedge \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) = 0$$

ya que ∇ opera sobre las coordenadas x, y, z , mientras que $\vec{j}(\vec{r}')$ depende de las x', y', z' , y que $\frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla(\frac{1}{R})$. Luego

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.20)$$

Esta es otra de las ecuaciones de Maxwell en su forma definitiva. El campo magnético producido por una corriente estacionaria es solenoideal. En consecuencia, las líneas de campo deben ser cerradas, aunque no necesariamente de longitud finita⁸.

\vec{B} puede derivarse, por lo tanto, de acuerdo con el teorema de Helmholtz, de un solo potencial, el potencial vector \vec{A} .

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \quad (2.21)$$

Efectivamente,

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') \wedge \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

⁸Una sola línea de campo de longitud infinita puede formar una *superficie magnética*.

y, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\nabla \wedge (f\vec{a}) &= f\nabla \wedge \vec{a} + \nabla f \wedge \vec{a} \\ \nabla \wedge \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right) &= \underbrace{\frac{1}{R} \nabla \wedge \vec{j}(\vec{r}')}_{=0} + \nabla \left(\frac{1}{R}\right) \wedge \vec{j}(\vec{r}') \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \nabla \wedge \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\vec{v}' \right]\end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\vec{v}' + \nabla \Psi(\vec{r}) \quad (2.22)$$

\vec{A} es el *potencial magnético vector*. $\Psi(\vec{r})$ es cualquier función de buen comportamiento. $\nabla \Psi(\vec{r})$ juega el mismo papel que la constante aditiva del potencial escalar, puesto que $\nabla \wedge \nabla \Psi \equiv 0$.

Por otra parte, según el teorema de Helmholtz $\mu_0 \vec{j} = \vec{\mathcal{R}}$, la expresión de las fuentes vectoriales, o *ley de Ampère*, es

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (2.23)$$

donde \mathcal{S} es una superficie arbitraria cuyo contorno es \mathcal{L} e $I = \int_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{s}$.

Los campos magnéticos estáticos tienen sus fuentes en las densidades de corriente. La ecuación de Ampère será modificada más adelante con la adición de la corriente de desplazamiento del vacío, ampliando su validez a campos con variación temporal arbitraria.

Resumiendo lo anterior, las fuentes del campo magnetostático son

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.24a)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (2.24b)$$

Aunque teóricamente cabe esperar la existencia de monopolos o cargas magnéticas, no han sido detectados hasta la fecha por lo que el carácter solenoidal de \vec{B} se hará extensivo a los campos magnéticos en general, dando por definitiva la forma de la ecuación de Maxwell 2.24a. La ecuación 2.24b se modificará más adelante cuando se postule la corriente de desplazamiento del vacío.

Por último, el flujo del campo magnético $\Phi(\vec{B})$, que se mide en *webers*, (*Wb*), puede expresarse de las formas,

$$\Phi(\vec{B}) \equiv \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{L}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.25)$$

donde \mathcal{S} es una superficie abierta cualquiera y \mathcal{L} su contorno.

Efectivamente, para probar la segunda opción basta con tener en cuenta que $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ y hacer uso del teorema del rotacional.

2.3.4. Estructuras simples del campo magnético

Aquí podemos hacer consideraciones parecidas a las que se hicieron en la sección en la que se estudiaron las estructuras simples del campo eléctrico. Sólo analizaremos, a modo de ilustración, la simetría del campo producido por un hilo recto indefinido. Como se muestra en la figura 2.10, las líneas de campo son circulares, tienen por eje al hilo, tienen dirección azimutal y su sentido lo marca la regla del tornillo a derechas, o de la mano derecha.

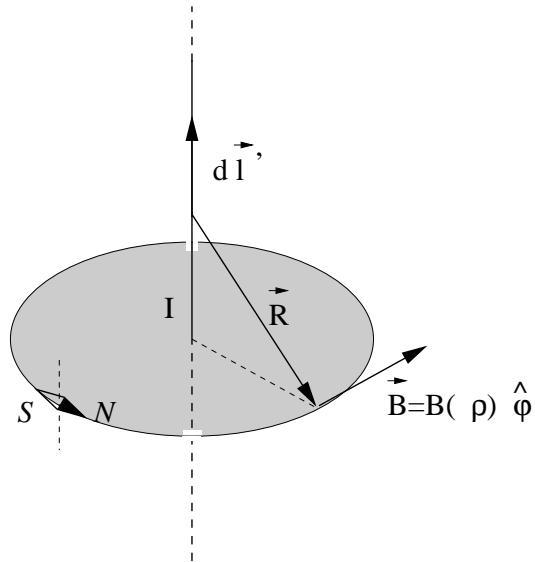


Figura 2.10:

2.4. Problemas

2-1. Dibuja las líneas de campo y las superficies equipotenciales en el plano xy para los siguientes casos ⁹:

- Una carga puntual aislada.
- Dos cargas puntuales de igual signo.
- Dos cargas puntuales de distinto signo.

Solucion :

Consideraremos los dos últimos apartados. Normalizaremos $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 1$ y situaremos a las cargas $q_1 = 1$ y $q_2 = a$ en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ respectivamente. Los vectores que sitúan al punto de observación P con respecto a cada una de las cargas son, figura 2.11a

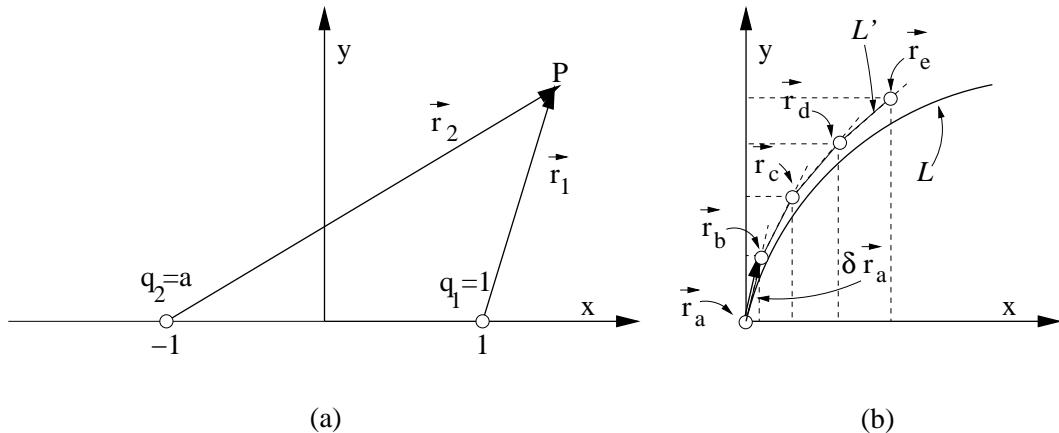


Figura 2.11:

$$\vec{r}_1 = (x - 1, y), \quad \vec{r}_2 = (x + 1, y)$$

el potencial producido por las mismas

$$V = \frac{1}{r_1} + \frac{a}{r_2}$$

el campo y el vector unitario correspondiente

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{a \vec{r}_2}{r_2^3}, \quad \hat{E} = \frac{\vec{E}}{E}$$

⁹Sugerencia: Puede utilizarse un papel cuadriculado y en él elegir una red rectangular de puntos en los que calcular el potencial, a continuación trazar unas cuantas líneas equipotenciales interpolando los valores del mismo en los nudos y, por último, dibujar las líneas de campo teniendo en cuenta que éstas son perpendiculares a las de potencial.

La ecuación diferencial de las líneas de campo es

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = f(x, y(x))$$

Como veremos más adelante, la integración analítica es sencilla sólo en algunos casos. Aquí emplearemos una variante del método numérico de Euler ¹⁰ (véase la figura 2.11b). Éste se basa en el desarrollo en serie de Taylor

$$y(x) = y(x_0) + \dot{y}(x - x_0) + O[(x - x_0)^2]$$

y la aproximación de $y(x)$ despreciando términos de orden $O[(x - x_0)^2]$.

$$y(x) = y(x_0) + \dot{y}(x - x_0)$$

Esto equivale a la aproximación de la derivada

$$\dot{y} \simeq \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$$

despreciando términos $O[(x - x_0)]$.

Usualmente, se integra \dot{y} en un intervalo $x[x_0, x_N]$, a lo largo de la red de puntos $x = x_0 + n h$, $n = 0, 1, \dots, N$, donde h es un incremento lo suficientemente pequeño.

En nuestro caso, el dominio de integración es desconocido y la línea de campo es una curva cuya pendiente puede cambiar de signo a lo largo de la misma. En vez de espaciar uniformemente las coordenadas x de los puntos en que queremos calcular $y(x)$, vamos calculando ambas coordenadas de forma que los distintos puntos sean equidistantes a lo largo de la propia curva (Véase la figura 2.11b).

Partiendo del punto \vec{r}_a , incrementamos esta posición hasta el punto

$$\vec{r}_b = \vec{r}_a + \delta \vec{r}_a \quad , \quad \delta \vec{r}_a = h \hat{E}(\vec{r}_a)$$

es decir, nos desplazamos una distancia h en la dirección del campo evaluada en el punto de partida.

Repetiendo este proceso en los puntos a, b, c, d, e, \dots se obtiene la línea poligonal \mathcal{L}' , la cual, cuando $h \rightarrow 0$, aproxima a la de campo \mathcal{L} que pasa por \vec{r}_a . Como es evidente, el error cometido en cada paso es acumulativo por lo que h debe ser pequeño en comparación con la longitud del segmento de línea que ha de integrarse.

¹⁰Véase Demidowitsh, Burden, Schwarz.

Programa Mathematica *lineas – campo_2q.nb*:

```
Remove["Global`*"]; Off[General::"spell1"];
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12};
```

Comenzamos cargando un 'paquete' Mathematica en el que se incluye la orden **PlotVectorField**¹¹

<< Graphics`PlotField`

Elegimos la magnitud y el signo de la segunda carga

$$\mathbf{a} = -2;$$

y la semianchura de las gráficas.

$$\mathbf{L} = 2;$$

Expresamos los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , sus módulos y el potencial en P .

$$\begin{aligned}\mathbf{r1} &= \{\mathbf{x} - \mathbf{1}, \mathbf{y}\}; \mathbf{r2} = \{\mathbf{x} + \mathbf{1}, \mathbf{y}\}; \\ \text{mr1} &= \sqrt{\mathbf{r1.r1}}; \text{mr2} = \sqrt{\mathbf{r2.r2}} \\ \text{potencial} &= \frac{1}{\text{mr1}} + \frac{\mathbf{a}}{\text{mr2}};\end{aligned}$$

Hacemos una gráfica de las líneas equipotenciales sin mostrarlas.

```
grpotencial = ContourPlot[potencial, {x, -L, L}, {y, -L, L},
  PlotPoints -> 100, Contours -> 10, Frame -> False,
  AspectRatio -> Automatic, ContourShading -> False,
  ContourStyle -> RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction -> Identity];
```

Introducimos un pequeño valor δ para evitar las singularidades del campo y escribimos la expresión de este último.

$$\begin{aligned}\delta &= 0.0001; \\ \mathbf{cE} &= \frac{\mathbf{r1}}{\text{mr1}^3 + \delta} + \frac{\mathbf{a} * \mathbf{r2}}{\text{mr2}^3 + \delta};\end{aligned}$$

Representamos al campo, mediante flechas de longitud proporcional a E , en un conjunto de puntos¹². Tampoco mostramos esta gráfica.

¹¹Véase el menú Help, Add-ons, Standard Packages.

¹²Dado que el campo decrece con la distancia, lejos de las cargas sólo se aprecia la dirección del campo.

```
grcampo = PlotVectorField[cE, {x, -L, L}, {y, -L, L},
  PlotPoints → 9, DisplayFunction → Identity];
```

Ahora procedemos a la integración numérica de la ecuación de las líneas de campo. Primero definimos h como una fracción de L

$$\mathbf{n} = 500; \mathbf{h} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{n}};$$

y expresamos \vec{E} ¹³, E y \hat{E}

$$\mathbf{vE} = \frac{\mathbf{r1}}{m\mathbf{r1}^3} + \frac{\mathbf{a} * \mathbf{r2}}{m\mathbf{r2}^3};$$

$$mE = \sqrt{\mathbf{vE} \cdot \mathbf{vE}};$$

$$\mathbf{vEunitario} = \frac{\mathbf{vE}}{mE};$$

Sólo representaremos las líneas que nacen de la primera carga desde el primer cuadrante y las que mueren en la segunda por el tercero. Los puntos de comienzo y final de línea se sitúan sobre las circunferencias de radio r_0 centradas en las cargas. Para cada una de éstas se representarán cinco líneas que corresponden a las situaciones angulares, sobre dicha circunferencia, $\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta \dots$.

$$\mathbf{r0} = 0.05 * \mathbf{L}; \theta_0 = \frac{\pi}{12}; \Delta\theta = \frac{5\pi}{24};$$

En **grlinea** se almacenarán las gráficas de las líneas, de q_1 , en las cinco primeras posiciones, y de q_2 en las cinco últimas.

$$grlinea = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\};$$

La primera línea que nace en q_1 se integra a partir del punto

$$\mathbf{x0} = 1 - \mathbf{r0} * \text{Cos}[\theta_0]; \mathbf{y0} = \mathbf{r0} * \text{Sin}[\theta_0];$$

Para calcular los puntos de las distintas líneas, se ha de tener en cuenta las siguientes cuestiones:

- La segunda carga puede ser fuente ($q > 0$) o sumidero ($q < 0$) de campo. En el segundo caso, las líneas que mueren en ésta hay que integrarlas desde su punto final y desplazándose en la dirección contraria al campo.

¹³No es preciso tener en cuenta a las singularidades porque no se harán cálculos en las posiciones de las cargas.

- Las líneas que comienzan (terminan) en las proximidades de una carga pueden terminar (comenzar) en el marco de la gráfica o en las proximidades de la otra carga. La longitud de cada una de las líneas es diferente y, en principio, desconocida.

La posición actual a lo largo del cálculo está almacenada en **pl0** y las calculadas hasta un determinado instante en la matriz **linea**. Las dimensiones de ésta matriz son $m \times 2$, siendo m un numero, variable, de filas que va creciendo a lo largo del cálculo de la línea. Cada fila incluye a uno de los sucesivos puntos de la línea de campo.

Cuando se han calculado los puntos de la línea se genera su gráfica pero no se muestra. El lazo **Do** realiza cinco iteraciones, cada una de las cuales incluye los siguientes pasos:

- Determinación de los valores de **pl0** y **linea** que se utilizarán en la iteración.
- Integración de la línea correspondiente mediante el lazo condicional **While**, mientras que la posición calculada al final del mismo está dentro de la zona de interés.
- Fijación de los valores de **x0** e **y0** que se utilizarán en la siguiente iteración.

Do[

```
{pl0 = {x0, y0}, linea = {pl0},
While[(pl0[[1]] >= -x0)&&(pl0[[2]] >= y0)&&(pl0[[1]] <= L)&&(pl0[[2]] <= L),
{pl0 = pl0 + h * vEunitario/.{x -> pl0[[1]], y -> pl0[[2]]},
linea = Append[linea, pl0]},
grlinea[[i]] = ListPlot[linea, PlotJoined -> True,
DefaultColor -> Hue[0.6], DisplayFunction -> Identity],
θ0 = θ0 + Δθ, x0 = 1 - r0 * Cos[θ0], y0 = r0 * Sin[θ0]},
{i, 1, 5}];
```

Una vez generadas las gráficas de las líneas de la primera carga, es necesario restablecer el valor inicial de θ_0 , **x0** e **y0** porque éstos se modifican en la última orden del lazo **While**.

$$\theta_0 = \frac{\pi}{12};$$

$$x_0 = -1 + r_0 * \cos[\theta_0]; y_0 = -r_0 * \sin[\theta_0];$$

Para integrar estas líneas es necesario distinguir los casos en que la carga es fuente o sumidero.

```
If[a < 0, h = -h];
```

```
Do[
```

```
{pl0 = {x0, y0}, linea = {pl0},
While[(pl0[[1]] <= -x0)&&(pl0[[2]] <= y0)&&(pl0[[1]] >= -L)&&(pl0[[2]] >= -L),
{pl0 = pl0 - h * vEunitario/.{x -> pl0[[1]], y -> pl0[[2]]},
linea = Append[linea, pl0]},
grlinea[[i]] = ListPlot[linea, PlotJoined -> True,
DefaultColor -> Hue[0.6], DisplayFunction -> Identity],
θ0 = θ0 + Δθ, x0 = -1 + r0 * Cos[θ0], y0 = -r0 * Sin[θ0}],
{i, 6, 10}];
```

Por último, se representan conjuntamente todas las gráficas anteriores.

```
Show[grlinea, grpotencial, grcampo, AspectRatio -> Automatic,
DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

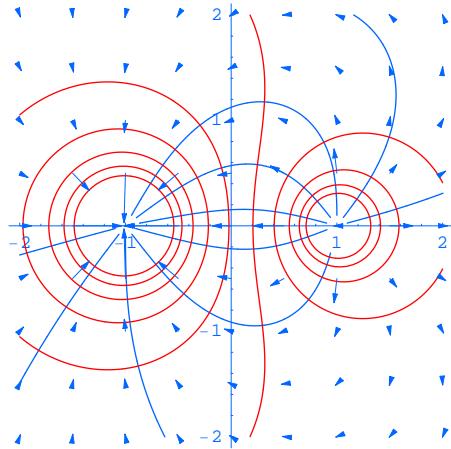


Figura 2.12:

Como puede verse en la figura 2.12, el valor elegido para h es adecuado puesto que, si se ejecuta el programa con cargas de signo contrario, las líneas que parten de la carga positiva convergen de forma apreciable hacia la negativa.

- 2-2. Cuatro cargas puntuales de un nC se hallan situadas en los vértices de un cuadrado de un cm de lado. Halle:

- a) La fuerza que cada una de ellas siente debido a la acción de las demás.

- b) La energía que cedería o ganaría una de ellas al desplazarse hasta el infinito con velocidad despreciable.
- c) Supuesto que toda la energía potencial pudiera convertirse en energía cinética, calcule la velocidad que tendría en el infinito cada una de las cargas si a todas se les permitiera moverse libremente a partir del mismo instante.
- 2-3. La constante de gravitación universal tiene el valor $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$ y la aceleración de la gravedad tiene un valor local de $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Halle:

- a) El campo eléctrico que iguala la fuerza eléctrica a la gravitatoria sufrida por un electrón en la superficie terrestre.
- b) La relación entre las fuerzas eléctrica y gravitatoria entre dos electrones.
- c) La Fuerza aproximada entre dos sistemas de partículas compuestos, cada uno de ellos, por un electrón y un protón separados una distancia $d = 1 \text{ \AA}$. Supóngase que las cuatro partículas están alineadas y que su distancia mutua es $r \gg d$. Razónese sobre la preponderancia de la fuerza gravitatoria en la determinación del movimiento planetario.

Solución:

Abordaremos el apartado 2-3c, cuyo planteamiento corresponde a la figura 2.13.

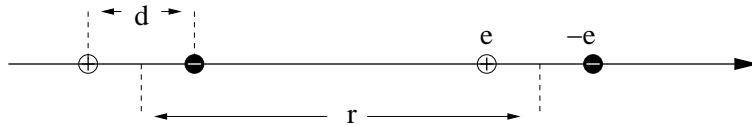


Figura 2.13:

Si despreciamos frente a la unidad los términos en x^2 , $x = \frac{d}{2r}$, la componente radial del campo producido por el primer par de cargas es

$$E_r(r) = \frac{qC}{r^2} \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \right] \simeq \frac{qC}{r^2} [(1-x)^2 - (1+x)^2] \simeq -\frac{4qCd}{r^3}$$

y la fuerza que ejerce sobre la segunda pareja

$$F_{er}(r) = q \left[E_r(r - \frac{1}{2}d) - E_r(r + \frac{1}{2}d) \right] \simeq \frac{-4q^2 C d}{r^3} [(1-x)^3 - (1+x)^3] \simeq -\frac{24q^2 C d^2}{r^4}$$

La fuerza gravitatoria entre ambos pares de partículas es

$$F_g(r) \simeq \frac{G m_p^2}{r^2}$$

- 2-4. Dos cargas puntuales de signo contrario se encuentran separadas por una distancia a y la razón entre sus magnitudes es k . Demuestre que la superficie equipotencial $V = 0$ es esférica y determine su radio y la posición de su centro.
- 2-5. EL CAMPO PRODUCIDO POR UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS PUEDE EXPRESARSE COMO SUMA DE APORTACIONES 'MULTIPOLARES'. SI LA DISTRIBUCIÓN ES GLOBALEMENTE NEUTRA, DESDE LEJOS SÓLO SE OBSERVA LA CORRESPONDIENTE AL PRIMER TÉRMINO MULTIPOLAR NO NULO.

Considere el conjunto de dos cargas iguales y contrarias tales que la positiva está separada una distancia \vec{d} de la negativa. El momento dipolar de esta distribución es $\vec{p} = q\vec{d}$. Halle:

- El potencial dipolar.
- El campo dipolar.
- Represente las líneas de campo y del potencial. Las de campo calcúlelas analíticamente y de forma numérica y compare los resultados.

Solución:

- a) De acuerdo con la figura 2.14, el potencial producido en cualquier punto del espacio es

$$V = C q \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

donde

$$\vec{r}_+ = \vec{r} - \frac{1}{2} d \hat{z} , \quad r_+ = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4} d^2 - \vec{d} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{r}_- = \vec{r} + \frac{1}{2} d \hat{z} , \quad r_- = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4} d^2 + \vec{d} \cdot \vec{r}}$$

Anotando $\alpha \equiv d/r$

$$r_+ = r \sqrt{1 + \frac{1}{4} \alpha^2 - \alpha \cos \theta} \simeq r \sqrt{1 - \alpha \cos \theta} \simeq r \left(1 - \frac{1}{2} \alpha \cos \theta \right)$$

$$\frac{1}{r_+} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \cos \theta \right)$$

con lo que, el potencial dipolar es

$$V_d = C q d \frac{\cos \theta}{r^2} = C \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

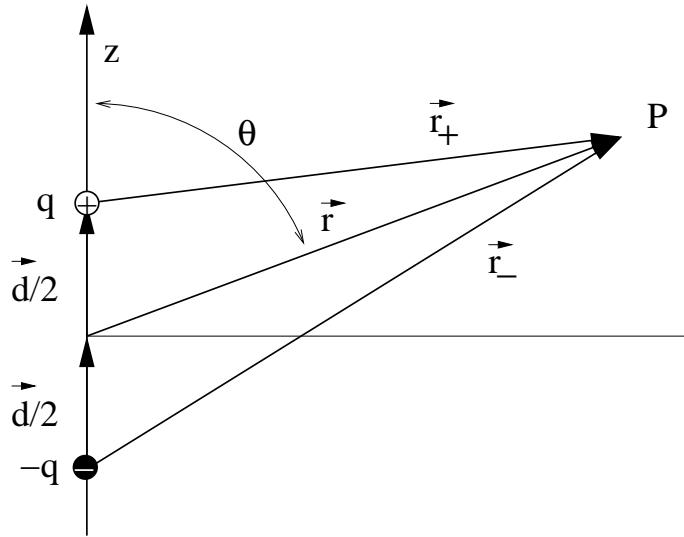


Figura 2.14:

b) El campo se obtiene aplicando el gradiente (con signo negativo) al potencial

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

de lo que resulta

$$\vec{E}_d = \frac{C p}{r^3} \left(2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} \right)$$

Como puede verse, mientras que el potencial (campo) de una carga , o monopolo, decae según r^{-1} (r^{-2}), en un dipolo lo hacen según r^{-2} (r^{-3}).

Esta expresión puede generalizarse para dipolos de orientación arbitraria si se descompone $\hat{\theta}$ en las direcciones de \hat{r} y \hat{z} .

$$\hat{\theta} = a \hat{r} + b \hat{z}$$

teniendo en cuenta que, por ejemplo, en el plano xz

$$\hat{r} = \sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{z}$$

Substituyendo en la ecuación anterior e igualando, componente a componente, ambos miembros de la misma, se deduce que

$$a = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} , \quad b = -\frac{1}{\sin \theta}$$

y

$$\vec{E}_d = \frac{C}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \hat{r} - \vec{p}]$$

c) Éste es uno de los casos en que la integración de las ecuaciones de las líneas de campo es sencilla porque es separable. En efecto

$$\frac{dl_r}{E_r} = \frac{dl_\theta}{E_\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{d(\operatorname{sen} \theta)}{\operatorname{sen} \theta}$$

su integral es inmediata

$$r = B \operatorname{sen}^2 \theta , \quad \varphi = cte$$

B es el parámetro del haz de líneas de campo. Su valor para la línea que pasa por $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ es

$$B_0 = \frac{r_0}{\operatorname{sen}^2 \theta_0}$$

Para hacer la integración numérica podemos emplear el método de Euler, véase el problema 2-1. Lo compararemos con los resultados obtenidos analíticamente y con los del método de Heun ¹⁴.

Este último es una mejora del método de Euler y pertenece a la familia de los de Runge-Kutta.

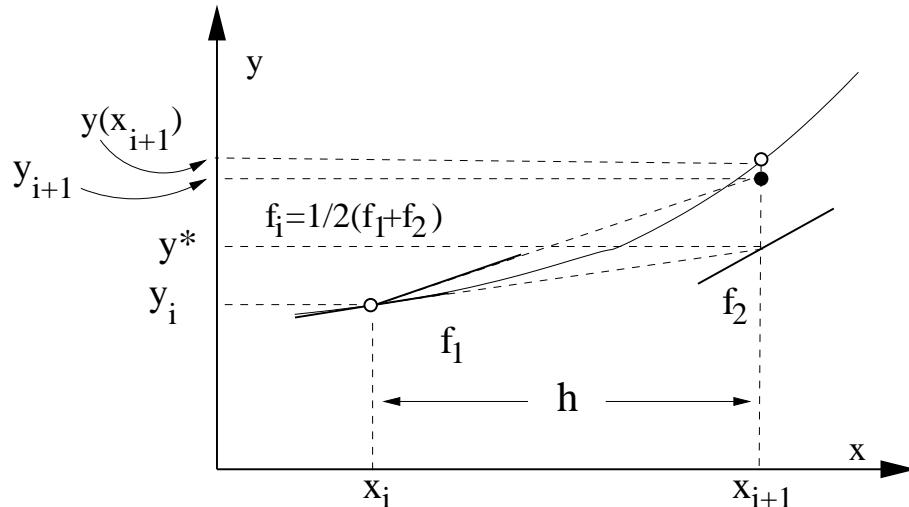


Figura 2.15:

Método de Heun:

¹⁴Véase Schwarz,Demidowitsh,Burden.

Se trata de resolver la ecuación de las líneas de campo, la cual, en principio la expresamos de la forma

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = f(x, y(x))$$

La forma usual del algoritmo usado por este método es la siguiente

$$\begin{aligned}f_1 &= f(x_i, y_i) \\f_2 &= f(x_i + h, y_i + h f_1) \\f_3 &= \frac{1}{2} (f_1 + f_2) \\y_{i+1} &= y_i + h f_3\end{aligned}$$

donde $h = cte.$

Como puede verse en la figura 2.15, a diferencia del método de Euler, la coordenada y_{i+1} del punto siguiente se determina haciendo uso de una pendiente f_3 que no es la utilizada en el método de Euler, sino el promedio de la del punto inicial $f_1 = f(x_i, y_i)$ y la $f_2 = f(x_{i+1}, y^*)$ que tendría el punto final si hiciésemos uso del método de Euler.

Este método se conoce también con el nombre de 'predictor-corrector' porque primero hace una predicción del punto P^* de destino mediante el método de Euler y, a continuación la corrige en función de la pendiente que corresponde a dicho punto. En principio, en el pequeño tramo $\Delta x = h$ la pendiente variará de forma monótona, por lo que la pendiente óptima debe ser una intermedia entre la final y la inicial. Los factores de $\frac{1}{2}$ que afectan a f_1 y f_2 optimizan el orden de aproximación del método.

Nosotros, como en el método de Euler, modificaremos el algoritmo para que, en vez de espaciar uniformemente a los puntos a lo largo del eje x los espacie uniformemente a lo largo de la propia línea.

$$\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \delta \vec{r}_i \quad , \quad \delta \vec{r}_i = h \langle \hat{E} \rangle_i \quad , \quad \langle \hat{E} \rangle_i = \frac{1}{2} (\hat{E}(\vec{r}_i) + \hat{E}(\vec{r}^*))$$

donde $\vec{r}^* = \vec{r}_i + h \hat{E}(\vec{r}_i)$ es el punto predicho por el método de Euler.

Programa Mathematica equipotlineas – dipolo.nb:

Este programa hace uso de las ecuaciones de las líneas equipotenciales y de campo, en el plano xz , para representarlas conjuntamente. A continuación, aprovechando que, en este caso, conocemos la solución exacta, estudiaremos el comportamiento de los métodos numéricos de Euler y de Heun al integrar una línea de campo determinada y lo compararemos con la curva analítica correspondiente.

```

Remove["Global`*"];
Off[General::"spell1"];
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12};
<< Graphics`PlotField

```

Representación de las líneas de campo y de potencial:

L es la semianchura de las gráficas y δ un pequeño parámetro que intenta sortear las singularidades.

$$\mathbf{L} = 4;$$

$$\delta = 0.0001; \\ \mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{z}^2}; \cos\theta = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{r}}; \sin\theta = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}}$$

Ecuación de las líneas de potencial.

$$\text{potdip} = \frac{\cos\theta}{\mathbf{r}^2};$$

```

grpotdip = ContourPlot[potdip, {x, -L, L}, {z, -L, L}, PlotPoints -> 200,
Contours -> 10, Frame -> False, AspectRatio -> Automatic,
ColorFunction -> Hue, DisplayFunction -> Identity];

```

Ecuación de las líneas de campo lincamp = 1/B.

$$\text{lincamp} = \frac{\sin\theta^2}{\mathbf{r}};$$

```

grlincamp = ContourPlot[lincamp, {x, -L, L}, {z, -L, L}, PlotPoints -> 200,
Contours -> 6, Frame -> False, ContourShading -> False,
AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> Identity];

```

Ecuación del campo para representar la gráfica de flechas.

$$\text{vecE} = \frac{1}{\mathbf{r}^3 + \delta} \{3\sin\theta * \cos\theta, 3\cos\theta^2 - 1\};$$

```

grcampodipol = PlotVectorField[vecE, {x, -L, L}, {z, -L, L},
PlotPoints -> 11, DisplayFunction -> Identity];

```

En la figura 2.16 se muestra la representación conjunta.

```
grpoltinc = Show[grpotdip, grlincamp, grcampodipol,
  DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

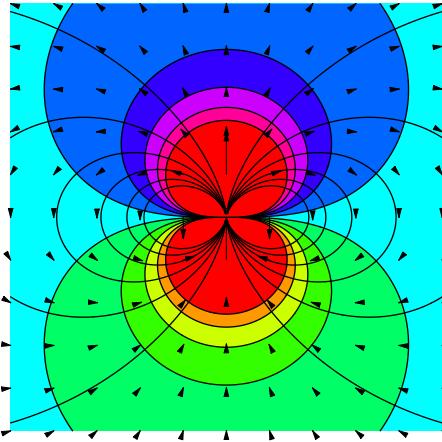


Figura 2.16:

Comparación de los métodos numéricos:

Punto de inicial.

$$\begin{aligned} r0 &= 0.4; \sin\theta0 = 0.4; \\ \cos\theta0 &= \sqrt{1 - \sin\theta0^2}; aa = \frac{r0}{\sin\theta0^2}; \\ x0 &= r0 * \sin\theta0; z0 = r0 * \cos\theta0; \end{aligned}$$

Valor del parámetro $lin0 = 1/B_0$ correspondiente a la línea teórica que pasa por el punto inicial

$$lin0 = \frac{\sin\theta0^2}{r0};$$

```
grlinteorica = ContourPlot[lincamp, {x, 0.001, L}, {z, -L/2, L/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 200, Contours → {lin0, 0},
  AspectRatio → Automatic, DisplayFunction → Identity];
```

Definición de la longitud del paso Δ que se utilizará en los métodos numéricos. n servirá también para limitar la longitud de línea a integrar.

$$\mathbf{n} = \mathbf{30};$$

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{n}};$$

Definición del vector unitario en la dirección del campo.

$$\begin{aligned}\text{runitario} &= \{\sin\theta, \cos\theta\}; \text{zunitario} = \{0, 1\}; \\ \mathbf{vE} &= \frac{1}{\mathbf{r}^3} (3(\text{zunitario.runitario})\text{runitario} - \text{zunitario}); \\ \mathbf{mE} &= \sqrt{\mathbf{vE.vE}}; \\ \mathbf{Eunitario} &= \frac{\mathbf{vE}}{\mathbf{mE}};\end{aligned}$$

Método de Euler.

$$\mathbf{pl0} = \{\mathbf{x0}, \mathbf{z0}\}; \mathbf{linea} = \{\mathbf{pl0}\}; \mathbf{kk} = 0;$$

$$\begin{aligned}\text{While}[(\text{Abs}[\mathbf{pl0}[[1]]] <= \mathbf{L}) \&\& (\text{Abs}[\mathbf{pl0}[[2]]] <= \mathbf{L}) \&\& (\mathbf{kk} <= 1.5n), \\ \{ \mathbf{kk} = \mathbf{kk} + 1, \mathbf{pl0} = \mathbf{pl0} + \mathbf{h} * \mathbf{Eunitario} / . \{ \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{pl0}[[1]], \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{pl0}[[2]] \}, \\ \mathbf{linea} = \text{Append}[\mathbf{linea}, \mathbf{pl0}] \}]; \\ \text{grlineuler} &= \text{ListPlot}[\mathbf{linea}, \text{Axes} \rightarrow \text{True} \\ &, \text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}, \text{DisplayFunction} \rightarrow \text{Identity}];\end{aligned}$$

Método de Heun.

$$\begin{aligned}\mathbf{pl0h} &= \{\mathbf{x0}, \mathbf{z0}\}; \mathbf{lineah} = \{\mathbf{pl0h}\}; \mathbf{kk} = 0; \\ \text{While}[(\text{Abs}[\mathbf{pl0h}[[1]]] <= \mathbf{L}) \&\& (\text{Abs}[\mathbf{pl0h}[[2]]] <= \mathbf{L}) \&\& (\mathbf{kk} <= 1.5n), \\ \{ \mathbf{kk} = \mathbf{kk} + 1, \mathbf{pl0hi} = \mathbf{pl0h}, \mathbf{Eunitarioi} = \mathbf{Eunitario} / . \\ \{ \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{pl0h}[[1]], \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{pl0h}[[2]] \}, \mathbf{pl0h} = \mathbf{pl0hi} + \mathbf{h} * \mathbf{Eunitarioi}, \\ \mathbf{Eunitariof} = \mathbf{Eunitario} / . \{ \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{pl0h}[[1]], \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{pl0h}[[2]] \}, \mathbf{pl0h} = \\ &\quad \mathbf{pl0hi} + \mathbf{h} * \frac{1}{2}(\mathbf{Eunitarioi} + \mathbf{Eunitariof}), \mathbf{lineah} = \text{Append}[\mathbf{lineah}, \mathbf{pl0h}] \}]; \\ \text{grlinheun} &= \text{ListPlot}[\mathbf{lineah}, \text{Axes} \rightarrow \text{True}, \text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}, \\ &\quad \text{DisplayFunction} \rightarrow \text{Identity}];\end{aligned}$$

Presentación Gráfica conjunta de los resultados:

Punto inicial

```
punto = Point[{x0, z0}];
```

```
punto0 = Show[Graphics[{PointSize[0.03], RGBColor[1, 0, 0], punto}],
  DisplayFunction → Identity];
```

Etiquetas de las curvas. Las correspondientes a las soluciones numéricas se pegan a un punto de las mismas.

```
texto1 = Text[Euler, linea[[n]] - {h, 0}];
```

```
texto2 = Text[Heun, lineah[[n]] + {h, 0}];
```

```
texto3 = Text[Teorica, {1.5 x0, 0.5 z0}];
```

```
textoe = Show[Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], texto1}],
  DisplayFunction → Identity];
```

```
textoh = Show[Graphics[{RGBColor[0, 0.5, 1], texto2}],
  DisplayFunction → Identity];
```

```
textot = Show[Graphics[{texto3}], DisplayFunction → Identity];
```

Por último, se genera la gráfica conjunta.

```
Show[grlinteorica, grlineuler, grlinheun, punto0, textoe, textoh, textot,
  DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

En la figura 2.17 se comparan estos dos métodos. Es necesario tener en cuenta que la cantidad de cálculo realizado por el método de Heun en cada tramo es superior a la correspondiente al de Euler. Analize este aspecto y pruebe a variar los parámetros del problema.

Los programas numéricos deben ser 'validados' para comprobar su correcto diseño. Deben elegirse problemas de prueba resolubles por otros métodos, en caso de que sea posible, aquellos de los que exista una solución analítica cerrada, como es el caso.

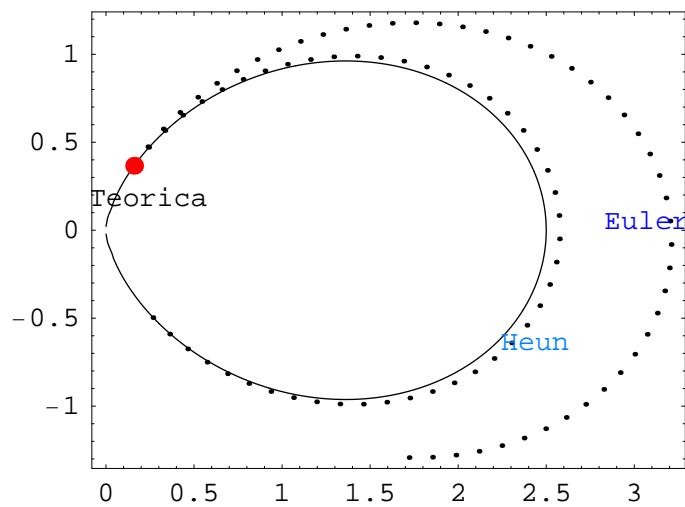


Figura 2.17:

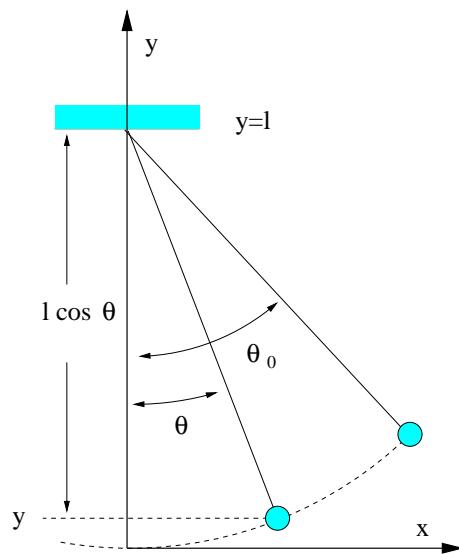


Figura 2.18:

- 2-6. Un péndulo está formado por un hilo sin masa, de longitud l , y una partícula puntual de masa m y carga q . ¿Cuál será su periodo para pequeñas oscilaciones en presencia de un campo eléctrico paralelo al gravitatorio? Resuelva el problema mediante un balance de energía.

Solución:

De acuerdo con los convenios de la figura 2.18, la fuerza actuante sobre la carga es

$$\vec{F} = -(m g + q E) \hat{y}$$

y la energía potencial de la carga

$$W_p = m g y + q V$$

donde

$$V = \int_0^y dV = E y$$

De acuerdo con la figura

$$y = l(1 - \cos\theta) \simeq \frac{1}{2}l\theta^2$$

, dado que $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2$ para $\theta \ll \frac{\pi}{2}$, y

$$W_p = \frac{1}{2}(m g + q E) l \theta^2$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que la velocidad puede escribirse como $v = \dot{\theta} l$, por tratarse de un movimiento circular, la energía cinética se expresa de la forma

$$W_c = \frac{1}{2}m \dot{\theta}^2 l^2$$

Ambos campos son conservativos por lo que la energía mecánica se conserva.

$$W_m = W_p + W_c = \frac{1}{2}[m \dot{\theta}^2 l^2 + (mg + qE)l \theta^2] = cte$$

Derivando y despejando $\ddot{\theta}$ se tiene que

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta , \quad \omega = \sqrt{\frac{mg + qE}{ml}}$$

Esta ecuación es la del movimiento armónico y ω es su velocidad angular. Como era de esperar, si $\vec{E} = \vec{0}$, ésta se reduce a la del péndulo simple.

2-7. Sea el plano $z = 0$, cargado con una densidad ρ_s uniforme. Halle:

- El campo eléctrico y el potencial a cualquier distancia z del plano.
- La contribución al campo total de un círculo de radio a de dicho plano, en un punto a distancia z del centro del disco y situado sobre su eje. Razone los resultados para los límites $z \ll a$ y $z \gg a$.

Solución:

Comentaremos el apartado (b).

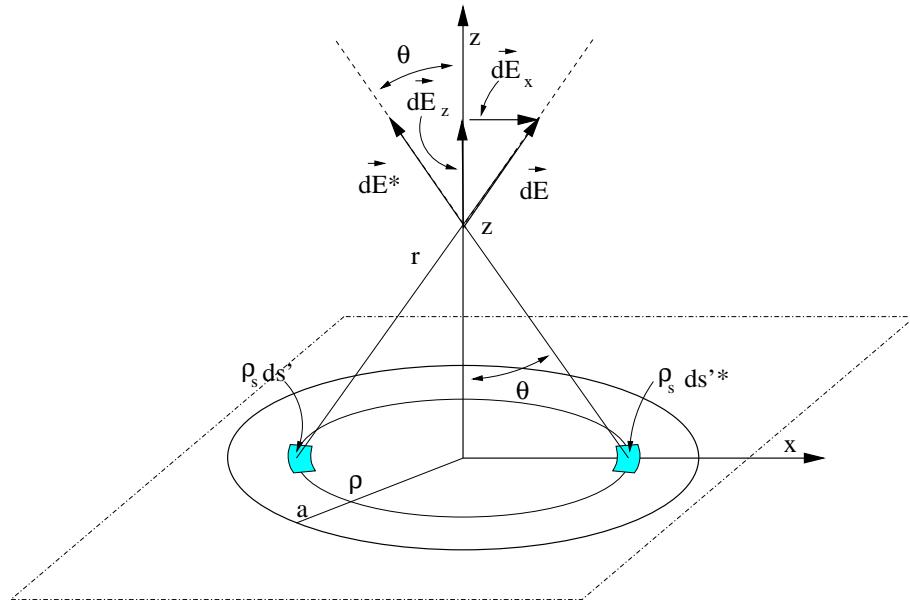


Figura 2.19:

En la figura 2.19 se muestra la contribución al campo eléctrico, en el eje z , de dos elementos de carga situados simétricamente con respecto a dicho eje. Dada la simetría del problema, la componente x de esta contribución se anula, quedando solamente la z .

$$dE_z = dE \cos \theta =$$

luego $\vec{E} = E_z \hat{z}$ y

$$E_z = C \rho_s \int_{S'} \frac{\cos \theta ds'}{r^2}$$

Podemos poner el integrando en función de θ o de ρ . Tomaremos ésta segunda opción y, de acuerdo con la geometría de la figura, escribiremos

$$\cos \theta = \frac{z}{r}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad ds' = \rho d\rho d\varphi$$

y

$$E_z = C \rho_s z \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Si buscamos en las tablas de integrales encontramos que

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

de lo que se obtiene el resultado

$$E_z = \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right)$$

Para hallar la aproximación correspondiente a $z \gg a$ quédese con el término en a/z del desarrollo.

2-8. Halle y represente gráficamente, haciendo uso de los diversos métodos conocidos, el campo eléctrico y el potencial producidos en cualquier punto del espacio por las siguientes configuraciones de carga.

- a) Un hilo recto indefinido cargado uniformemente con una densidad λ .
- b) Una distribución cilíndrica de carga con densidad β , para $\rho \leq a$, y $\beta = 0$ para $\rho > a$.

2-9. Halle el campo y el potencial producidos por una carga uniformemente distribuida sobre una esfera de radio a .

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{para } r \leq a \\ 0 & \text{para } r > a \end{cases}$$

Solucion :

Trataremos el problema con diversas herramientas y comprobaremos que la simplicidad de unos procedimientos es mucho mayor que la de otros, sin que de ésto debamos inferir que el método más sencillo en este caso lo sea también en general. Para cada problema deberemos buscar el método más adecuado. Las partes no desarrolladas por completo se proponen como ejercicio.

Uso del método de Gauss:

Según el teorema de Gauss

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dv$$

Esta expresión es útil para el cálculo del campo siempre que el grado de simetría del problema permita encontrar una superficie \mathcal{S} tal que $(\vec{E} \cdot \vec{n})_{\mathcal{S}} = cte$, donde \vec{n} es la normal a la superficie de la esfera. Tal superficie la llamaremos *superficie de Gauss*.

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{n} ds = E_n \int_{\mathcal{S}} ds = E_n \mathcal{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

donde

$$E_n = \vec{E} \cdot \vec{n} , \quad Q = \int_V \rho dv \Rightarrow E_n = \frac{Q}{\varepsilon_0 \mathcal{S}}$$

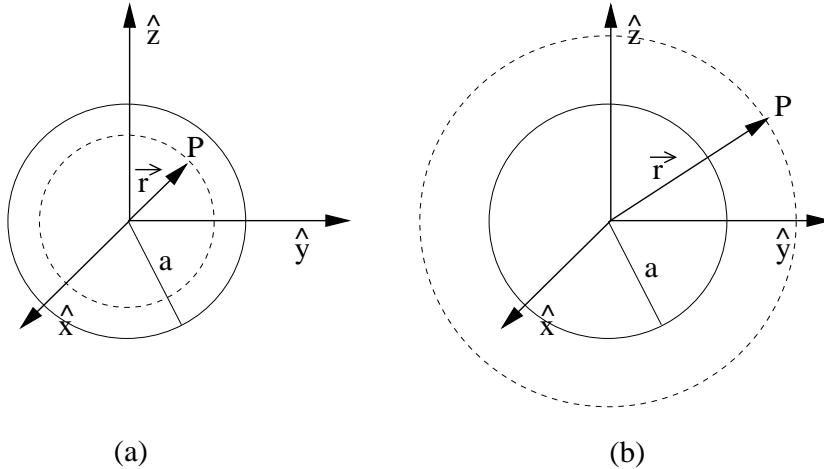


Figura 2.20:

En nuestro caso $\vec{E} = E(r) \hat{r}$, por lo que elegiremos superficies esféricas de radio r y distinguiremos dos regiones:

En la región (1), para $r \leq a$, figura 2.20-a,

$$E_1(r) r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_{r=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \Rightarrow$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 a^3} r \hat{r} , \quad Q = \rho_0 \frac{4}{3} \pi a^3 \quad (2.26)$$

En la región (2), para $r > a$,

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (2.27)$$

Tanto 2.26 como 2.27 pueden escribirse de la forma

$$\vec{E} = \frac{Q_{int}(r)}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Es decir, el campo que produce esta distribución, como cualquiera con simetría esférica, corresponde al que produciría la carga Q_{int} , encerrada en la esfera de Gauss, como si estuviera concentrada en el centro de simetría. Es fácil comprobar que las expresiones 2.26 y 2.27 coinciden para $r = a$, como se muestra en la figura 2.21

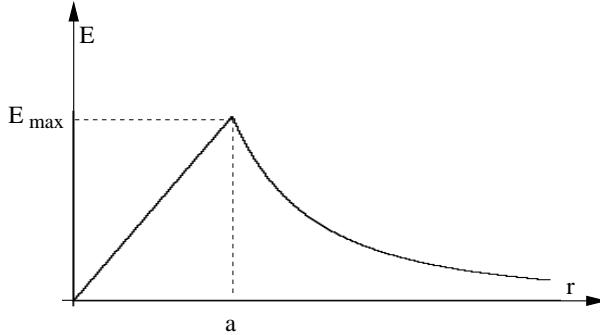


Figura 2.21:

Para calcular el potencial $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$, eligiendo $d\vec{l} = dr \hat{r}$ y tomando el origen de potenciales en el ∞

$$V(r) = - \int_{\infty}^r E(r) dr$$

que, para $r > a$,

$$V_2(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

Para $r \leq a$

$$V_1(r) = \int_{\infty}^a dV + \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 a^3} \int_r^a r dr = \frac{Q}{8\pi \varepsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

Uso de las ecuaciones de Poisson y Laplace:

Aunque más adelante trataremos con mayor amplitud la solución de estas ecuaciones y la aplicación de las condiciones de contorno, en los primeros capítulos abordaremos este problema, y otros similares, unidimensionales, de una forma bastante simple.

Dado que, en nuestro caso, $\rho = \rho(r)$, $V = V(r)$, la ecuación de Poisson en coordenadas esféricas puede escribirse de la forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} & \text{para } r \leq a \quad \text{Poisson} \\ 0 & \text{para } r > a \quad \text{Laplace} \end{cases} \quad (2.28)$$

La solución de esta ecuación de segundo orden se obtiene fácilmente siguiendo las siguientes etapas:

1º) Se integra dos veces para cada región del espacio donde $\rho(r)$ es continua; regiones (1) y (2).

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} r^2 - \frac{A_1}{r} + B_1 \\ V_2 &= -\frac{A_2}{r} + B_2 \end{aligned}$$

Estas soluciones generales dependen de constantes indeterminadas cuyos valores habrá que determinar haciendo uso de condiciones de contorno adecuadas.

2º) Se aplican condiciones de contorno en $r = 0$, $r = a$ y $r \rightarrow \infty$. Más adelante analizaremos las condiciones de contorno con más detalle. Por ahora nos bastará con establecerlas intuitivamente.

Tomaremos el infinito como origen de potenciales

$$v(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (2.29)$$

En $r = a$ supondremos que tanto el potencial como el campo son continuos

$$V_1(a) = V_2(a) \quad (2.30)$$

$$E_1(a) = E_2(a) \Rightarrow \left(\frac{dV_1}{dr} \right)_{r=a} = \left(\frac{dV_2}{dr} \right)_{r=a} \quad (2.31)$$

La continuidad del potencial es necesaria porque si no, su derivada, que es el campo, se haría infinita. El campo debe ser continuo pues, como veremos más adelante, sólo puede ser discontinuo a través de una superficie cuando en la misma existe una densidad superficial de carga.

Por último

$$V(0) = V_0 = \text{finito} \quad (2.32)$$

ya que en el origen no hay cargas puntuales, en cuyas posiciones se dan las singularidades del campo.

Las cuatro ecuaciones 2.29, 2.30, 2.31 y 2.32 fijan los valores de las cuatro constantes con lo que el problema queda planteado.

Cálculo directo del campo:

El cálculo para la región (1) es prolíjo. No se hará en este lugar pero puede verse en Lorrain y Corson.

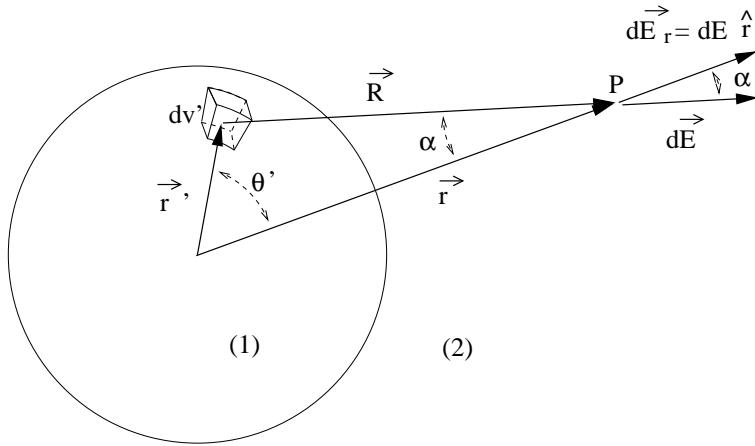


Figura 2.22:

Para la región (2), véase la figura 2.22

$$dE_r = dE \cos \alpha = k \rho_0 \frac{dv'}{r^2} \cos \alpha = k \rho_0 \frac{r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'}{r^2} \cos \alpha$$

Para integrar haremos un cambio de las coordenadas (r', θ', φ') a las (r', R, φ')

$$dr' d\theta' d\varphi' = J \left(\frac{r', \theta', \varphi'}{r', R, \varphi'} \right) dr' dR d\varphi'$$

donde

$$J \left(\frac{r', \theta', \varphi'}{r', R, \varphi'} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r'}{\partial r'} & \frac{\partial r'}{\partial R} & \frac{\partial r'}{\partial \varphi'} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial r'} & \frac{\partial \theta'}{\partial R} & \frac{\partial \theta'}{\partial \varphi'} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial r'} & \frac{\partial \varphi'}{\partial R} & \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi'} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} r' = r' \\ \theta' = f(r', R) \\ \varphi' = \varphi' \end{cases}$$

es el jacobiano de la transformación

$$J = \frac{\partial \theta'}{\partial R}$$

Tenemos pues que expresar θ' y α en función de R y r' . Haciendo uso de la expresión para los lados opuestos a un ángulo

$$R^2 = r'^2 + r^2 - 2 r' r \cos \theta' \Rightarrow \cos \theta' = \frac{r'^2 + r^2 - R^2}{2 r' r}, \quad \sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial R} = -\frac{R}{r r'}$$

$$r'^2 = R^2 + r^2 - 2 r R \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{R^2 + r^2 - r'^2}{2 r' r} \&&$$

El cálculo del módulo del campo eléctrico se completa realizando la integral

$$E = \int_{V'} dE_r = k \rho_0 \frac{1}{2 r^2} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi} \int_{r'=0}^{r'=a} \int_{R=r-r'}^{R=r+r'} r' \left(1 + \frac{r^2 - r'^2}{R^2} \right) dr' dR d\varphi'$$

Cálculo directo del potencial:

Para la región (2)

$$dV = k \rho_0 \frac{r'^2}{R} \sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial R} dr' dR d\varphi'$$

- 2-10. Demuestre que una distribución de carga con simetría esférica, $\rho = \rho(r)$, produce en un punto \vec{r} un campo eléctrico igual al que produciría la carga encerrada en la esfera de radio r concentrada en el origen. ¿ A que conclusiones se llega en los casos de simetría plana y simetría cilíndrica?
- 2-11. Sean las siguientes distribuciones de carga: Una superficie esférica, de radio a , con densidad uniforme ρ_s y una esfera, de radio a , cargada uniformemente con densidad de volumen ρ_0 . Se pide:
- Halle y represente el campo eléctrico y el potencial producido por cada una de las distribuciones.
 - Los valores máximos de las cargas que, en cada caso, podrían almacenarse en esferas de radio $a=10$ cm que están en presencia de aire a condiciones normales. El aire, en éstas condiciones, no soporta campos superiores a unos $3 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ (Campo de ruptura o rigidez dieléctrica del aire).
 - El radio del electrón, supuesto que su carga se distribuya en las formas indicadas al principio y que su masa esté relacionada con su energía potencial mediante la relación de Einstein $W = mc^2$.

Solución:

Comentamos el último apartado en el caso de la distribución superficial.

La energía potencial de una distribución de carga es, en este caso,

$$W = -\frac{1}{2}eV(a) , \quad V(a) = -C \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{Ce^2}{2mc^2}$$

ya que, por simetría, toda la carga está al mismo potencial y , de acuerdo con el problema 2-10, tanto el campo como el potencial externo a la esfera son iguales a los que produciría el electrón situado en el centro de la distribución.

Si realiza el cálculo para la distribución continua encontrará el valor a_0 conocido como radio clásico del electrón.

- 2-12. Halle el campo eléctrico y el potencial producidos por la siguiente distribución de carga: $\rho = \rho_0$ para $0 < x < a$ y $2a < x < 3a$, $\rho = 0$ fuera de éstos dos intervalos. Represéntelos gráficamente.
- 2-13. Dado un hilo circular con una densidad lineal uniforme λ y radio a , halle, en cualquier punto de su eje:

- a) *El potencial.*
- b) *Los primeros términos de los desarrollos en serie de potencias, para el potencial anterior, validos para distancias $r > a$ y $r < a$ del centro.*
- c) *El campo eléctrico.*

2-14. Dada la densidad de carga

$$\rho = \frac{3}{\pi a^3} \left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

halle la carga $q(r)$ encerrada en una esfera de radio r , el campo y el potencial eléctricos.

Solución:

Para distribuciones con simetría esférica, $dv = 4\pi r^2 dr$, por lo que, cambiando la variable r por $\alpha = \frac{r}{a}$, la carga interior a la esfera de radio a es

$$qr = 12 \int_{\alpha=0}^{\alpha} (\alpha^2 - \alpha^3) d\alpha = 4\alpha^3 - 3\alpha^4$$

Para $r \geq a$, $\alpha \geq 1$, la carga total es

$$Q = qr(\alpha = 1) = 1$$

Como se ha visto en el problema 2-10, el campo producido por una distribución con simetría esférica en \vec{r} es igual al que produciría en dicha posición una carga puntual, situada en el origen, e igual a la encerrada en una esfera de radio r .

$$\vec{E}(r) = \frac{qr(r)}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$4\pi \varepsilon_0 a^2 E(r) = \begin{cases} (4\alpha - 3\alpha^2) & \text{para } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha^2} & \text{para } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$V(r) = \int_r^\infty E dr = \left(\int_r^a + \int_a^\infty \right) E dr = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 a} \left(\int_{\alpha=1}^{\alpha=1} (4\alpha - 3\alpha^2) d\alpha + 1 \right)$$

$$4\pi \varepsilon_0 a V(r) = \begin{cases} (2 - 2\alpha^2 + \alpha^3) & \text{para } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \text{para } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Gráficas con Mathematica *prob_i3_inv.nb*:

Representaremos la densidad para tres valores de a , la carga encerrada en una esfera de radio r , el campo y el potencial, en función de r . Véase el problema k-2.

```
Remove["Global`*"];
Off[General::"spell1"];
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12};

Comenzamos por la representación de la densidad para  $a = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 

ro = If[r <= a,  $\frac{3}{\pi * a^3} \left(1 - \frac{r}{a}\right)$ , 0];
grafro = {0, 0, 0};
```

```
Do[{Which[i == 1, {rc = 1, gc = 0, bc = 0}, i == 2, {rc = 0, gc = 1, bc = 0},
      i == 3, {rc = 0, gc = 0, bc = 1}],
   grafro[[i]] = Plot[ro/.a -> Sqrt[i], {r, 0, 2}, PlotStyle -> RGBColor[rc, gc, bc],
   DisplayFunction -> Identity, PlotRange -> All]}, {i, 1, 3}];

Show[grafro, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

La figura 2.23 presenta conjuntamente las gráficas para los tres valores de a .

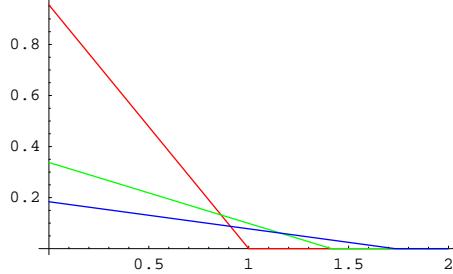


Figura 2.23:

Comprobaremos que la carga total es $q = 1$. Primero definimos la densidad interna roi (para $r \leq a$), y después la integramos sobre una esfera de radio a .

$$roi = \frac{3}{\pi * a^3} \left(1 - \frac{r}{a}\right);$$

$$q = 4\pi \int_0^a roi * r^2 dr$$

Para las gráficas siguientes se toma un valor concreto de a .

$$a = 2;$$

Representamos la carga encerrada en una esfera de radio r en la figura 2.24.

$$qi = 4\pi \int_0^r roi * r^2 dr;$$

$$qr = If[r \leq a, qi, 1];$$

```
Plot[qr, {0, 0, a + 1}, PlotStyle -> RGBColor[.3, .7, 1],
AxesOrigin -> {0, 0}, GridLines -> {{a}, {1}}];
```

Representamos al campo en la figura 2.25.

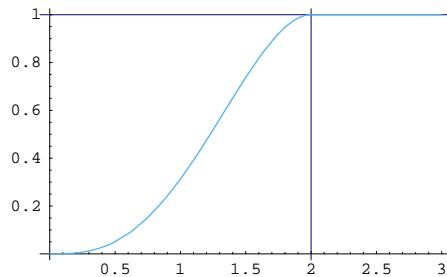


Figura 2.24:

$$Er = \frac{qr}{4\pi * r^2};$$

```
Plot[Er, {r, 0, 2 a}, PlotStyle -> RGBColor[1, .7, .3],
AxesOrigin -> {0, 0}, GridLines -> {{a}, None}];
```

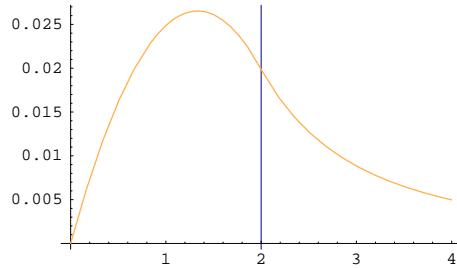


Figura 2.25:

Por último, representamos al potencial en la figura 2.26.

$$V_{ext} = \frac{1}{4\pi * r};$$

$$\mathbf{V}_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi * a} + \frac{1}{4\pi} \int_r^a \frac{q_i}{r^2};$$

$$\mathbf{V}_r = \text{If}[r \leq a, \mathbf{V}_{\text{int}}, \mathbf{V}_{\text{ext}}];$$

$$\mathbf{V}_0 = 1,1 * \mathbf{V}_{\text{int}} / .r \rightarrow 0 // N;$$

```
Plot[Vr, {r, 0, 2 a}, PlotStyle -> RGBColor[0.7, 1, .3],
AxesOrigin -> {0, 0}, GridLines -> {{a}, None}, PlotRange -> {0, V0}];
```

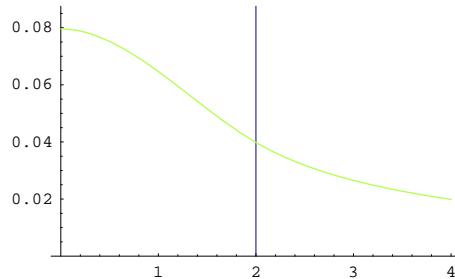


Figura 2.26:

- 2-15. Halle el campo eléctrico producido en cualquier punto del espacio por un hilo que forma un cuadrado de lado a y que está cargado uniformemente con densidad λ .
- 2-16. La distribución de carga en los núcleos ligeros puede aproximarse mediante la expresión, $\rho = \rho_0 (1 - \frac{r^2}{a^2})$ para $r \leq a$ y $\rho = 0$ para $r > a$. Aplíquese este modelo al Calcio tomando los valores $a = 4,5 \text{ fm}$ ($\text{fm} = \text{femtometro} = \text{fermi} = 10^{-15} \text{ m}$) y $\rho_0 = 5 \times 10^{25} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$. Halle:
- La carga total (compárese con el valor real).
 - El campo eléctrico y el potencial.
 - Represente ρ, E y V en función de $x = \frac{r}{a}$.
- 2-17. UN CONDUCTOR, EN SITUACIÓN ELECTROSTÁTICA, ES UN CUERPO QUE REACCIONA ANTE LOS CAMPOS EXTERNOS MOVILIZANDO CARGAS Y SITUÁNDOLAS EN SU SUPERFICIE DE FORMA QUE EL CAMPO TOTAL EN SU INTERIOR SEA NULO. Demuestre:
- Que todos los puntos del conductor estático están al mismo potencial.
 - Que la carga depositada en él se distribuye por la superficie.
 - Que el campo eléctrico en su superficie es perpendicular a la misma y proporcional a ρ_s .

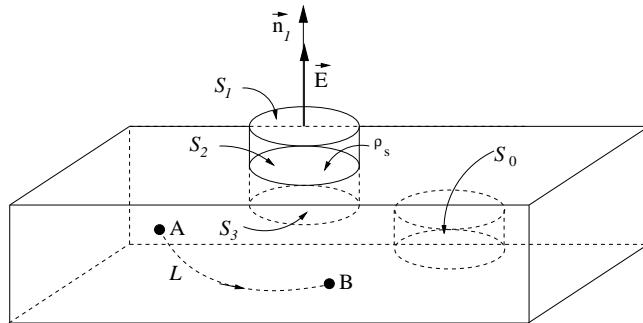


Figura 2.27:

Razone, para simplificar, sobre un conductor de superficie plana.

Solución:

La figura 2.27 representa a un conductor limitado por caras planas.

a) Dado que el campo eléctrico es nulo en su interior, también lo será su circulación a lo largo del camino \mathcal{L} , interno pero arbitrario, lo que implica que

$$V_A = V_B \Rightarrow V_{int} = cte$$

b) Si se aplica el teorema de Gauss a la superficie S_0 , situada en el interior del conductor pero arbitraria, el flujo es nulo, por serlo el campo y, en consecuencia, la densidad neta de carga $\rho = 0$. Luego la carga neta solo puede residir en la superficie del conductor. Esto no es cierto en el caso dinámico.

c) Como la superficie del conductor es equipotencial, el campo eléctrico en el exterior, pero en su proximidad, es perpendicular a la misma.

Aplicando el teorema de Gauss a la pequeña caja de pastillas, cuyas bases son paralelas a la superficie del conductor, se tiene que

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_2} \rho_s ds \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \vec{n}_1$$

El flujo a través de S_3 es nulo porque el campo interno también lo es, el de la superficie lateral es nulo porque el campo y la normal son perpendiculares entre sí y, por último, la única carga en el interior de la caja está situada en la superficie S_2 .

- 2-18. SE DEFINE AL CONDENSADOR IDEAL COMO EL CONJUNTO DE LA SUPERFICIE INTERNA DE UN CONDUCTOR EN CUYO INTERIOR, HUECO, SE ENCUENTRA UN SEGUNDO CONDUCTOR, LA SUPERFICIE EXTERNA DEL SEGUNDO CONDUCTOR Y EL ESPACIO QUE MEDIA ENTRE AMBAS SUPERFICIES (*véase la figura 2.28*). ASIMISMO SE DEFINE COMO CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR A LA RELACIÓN $C \equiv \frac{Q}{V}$,

EN VALOR ABSOLUTO, ENTRE LA CARGA DEPOSITADA EN CUALQUIERA DE LAS DOS CARAS, O PLACAS, DEL CONDENSADOR Y LA DIFERENCIA DE POTENCIAL QUE SE ESTABLECE ENTRE LAS MISMAS.

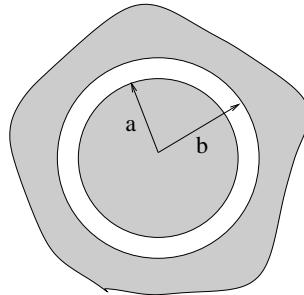


Figura 2.28:)

Se pide:

- Demuestre que en las dos placas se depositan cargas iguales y contrarias.*
- Halle la capacidad de un condensador esférico formado por un conductor con un hueco de radio b dentro del cual hay otro conductor, en posición concéntrica, cuyo radio externo es $a < b$ (figura 2.28). Calcule la capacidad de un condensador plano hallando la aproximación de C para $b - a \ll a, b$.*

Solución:

Si aplicamos el teorema de Gauss a la superficie S_2 incluida en el interior del conductor externo (figura 2.29), la carga total encerrada en ella es nula. Dado que sobre la superficie $r = a$ hay una carga Q , sobre la $r = b$ habrá una $-Q$.

Para hallar la capacidad del condensador, debemos calcular la diferencia de potencial entre sus placas $V = V_A - V_B$. Para ésto elegimos el camino \mathcal{L} más sencillo, que es el radial.

$$V = \int_b^a E dr$$

donde se ha tenido en cuenta que el campo eléctrico es radial.

E puede obtenerse en función de Q volviendo a aplicar el teorema de Gauss a S_1 .

$$Q = \varepsilon_0 \int_{S_1} E ds \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

y la capacidad es

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi \varepsilon_0 \left(\frac{a b}{b - a} \right)$$

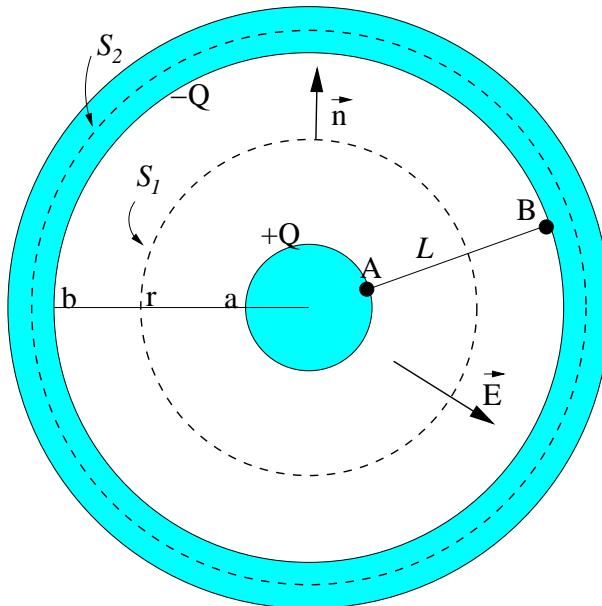


Figura 2.29:

- 2-19. En un condensador real, el primer conductor no puede envolver totalmente al segundo puesto que, en caso contrario, este último no sería accesible. En la práctica, el espacio interior de un condensador tiene comunicación con el exterior mediante una abertura pequeña a través de la cual algunas líneas de campo acceden desde las cargas interiores a las exteriores, dándose el denominado efecto de bordes que, normalmente, hace que la capacidad real difiera algo de la que se calcularía suponiendo al condensador como ideal.

Despreciando el efecto de bordes, calcule las capacidades de:

- Un condensador plano compuesto por dos placas metálicas de superficie $S = a^2$ y separadas una distancia $b \ll a$.
- Un condensador cilíndrico compuesto por dos placas cilíndricas concéntricas de radios respectivos a y b y altura c , donde $b - a \ll c$.

- 2-20. En un tubo de rayos catódicos, figura 2.30, se forma un punto luminoso en el lugar de la pantalla sobre el que incide un fino haz de electrones. Dichos electrones son emitidos con velocidad despreciable y acelerados a través de una diferencia de potencial fija V_0 . Posteriormente son deflectados por un campo eléctrico, uniforme y perpendicular a la trayectoria inicial, que está producido por dos placas equipotenciales separadas por una distancia a y cuya longitud es b . Entre dichas placas se establece una diferencia de potencial V_1 . Si la distancia desde el centro de las placas deflectoras hasta la pantalla es L , halle la relación entre la distancia d a que se desvía el haz en la pantalla y el potencial de deflexión V_1 .

Solución:

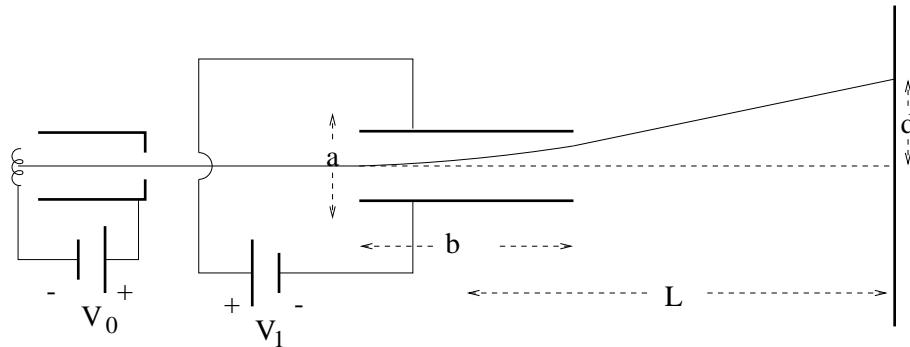


Figura 2.30:

La diferencia de potencial V_0 comunica a los electrones una energía potencial negativa $W = -eV_0$ al tiempo que los acelera convirtiendo esta energía en cinética

$$eV_0 = \frac{1}{2}m v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$$

La figura 2.31 muestra la trayectoria de los electrones emitidos por el cañón desde que entran en la zona de las placas deflectoras, en ($x = 0, y = 0$), y salen de ella, en el punto P , ($x = b, y_p$), hasta que inciden en la pantalla en el punto P' , ($x = L + \frac{b}{2}, y = d$).

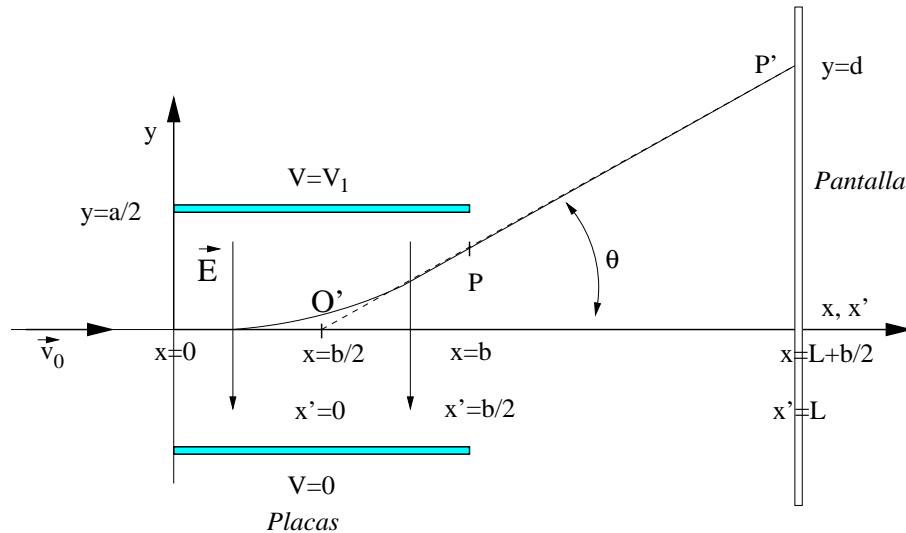


Figura 2.31:

Mientras los electrones se encuentran entre las placas, son acelerados uniformemente hacia arriba debido al campo que crea la diferencia de potencial V_1 aplicada entre dichas placas. Suponemos que los efectos

de bordes son despreciables, con lo que el campo es aproximadamente constante e igual a

$$\vec{E} = -\frac{V_1}{a} \hat{y}$$

La aceleración resultante es

$$a_y = \frac{e E}{m}$$

Dadas las condiciones iniciales

$$x = v_0 t , \quad y = \frac{1}{2} a_y t^2$$

De aquí se deduce que el electrón abandona la zona de placas en el punto P de coordenadas

$$x = b , \quad y_p = \frac{1}{2} a_y \frac{b^2}{v_0^2}$$

y con una pendiente

$$\tan \theta = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=b} = a_y \frac{b}{v_0^2}$$

A partir de P , la trayectoria del electrón es una recta que pasa por este punto con pendiente $m = \tan \theta$.

Si desplazamos el origen de coordenadas al punto O' de intersección de la recta anterior con el eje x , tendremos que

$$x' = x - \frac{b}{2} , \quad y = a_y \frac{b}{v_0^2} x'$$

y el impacto en la pantalla será en el punto P' ($x' = L, y = d$), con

$$d = \frac{L b}{2 a} \frac{V_1}{V_0}$$

- 2-21. Por un conductor, que posee una densidad de electrones libres ρ y tiene dimensiones transversales $a \times b$, circula una corriente de intensidad I . Perpendicularmente a esta corriente y a las caras, separadas entre sí por la distancia b , se aplica un campo magnético uniforme \vec{B} . Halle la diferencia de potencial Hall que aparece entre las caras que están separadas por la distancia a .

EL EFECTO HALL CONSISTE ESENCIALMENTE EN LA REDISTRIBUCIÓN DE CARGAS DENTRO DE UN CONDUCTOR COMO CONSECUENCIA DE LA ACCIÓN DE LA FUERZA MAGNÉTICA DE MANERA QUE, EN EQUILIBRIO ESTACIONARIO, LA CARGA NETA

DEPOSITADA EN LAS PAREDES CREA UN CAMPO ELÉCTRICO QUE CONTRARRESTA A LA FUERZA MAGNÉTICA. *En un conductor sólo los electrones libres, los de la banda de conducción, pueden moverse a distancias arbitrarias a través del mismo.*

Solución:

Según la figura 2.32 por el conductor circula una intensidad en la dirección del eje y debida al arrastre con velocidad

$$\vec{u} = -u \hat{y}$$

de los electrones. Esta velocidad se expresa en función I como

$$I = \vec{j} \cdot \vec{S} = \rho u a b \Rightarrow u = \frac{I}{\rho a b}$$

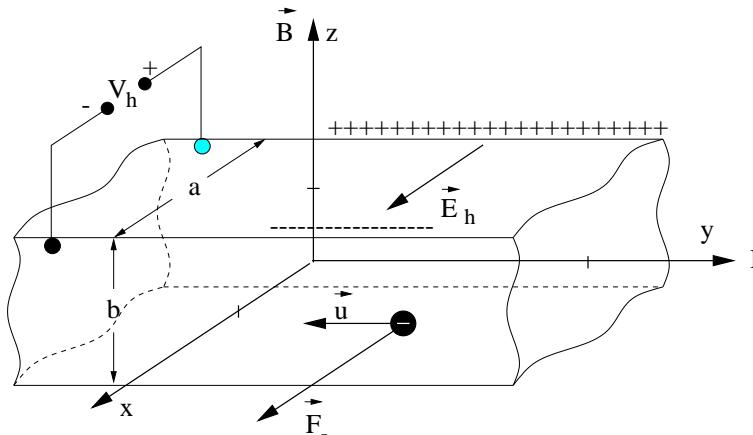


Figura 2.32:

Los electrones sufren una fuerza magnética

$$\vec{F}_m = -e \vec{u} \wedge \vec{B} = e u B \hat{x}$$

que los desplaza en la dirección \hat{x} y los acumula en la cara correspondiente del conductor. En la cara opuesta se dejan al descubierto las cargas positivas de los núcleos atómicos del metal. Como consecuencia, en estado estacionario, se crea un campo eléctrico Hall tal que la fuerza eléctrica que actúa sobre los electrones contrarresta a la magnética.

$$\vec{F}_e = -e \vec{E}_h = -\vec{F}_m \Rightarrow E_h = \frac{I B}{a b \rho}$$

por lo que la diferencia de potencial Hall, su circulación a lo ancho del conductor, es

$$V_h = \frac{I B}{b \rho}$$

Este principio constituye el fundamento de la medida del campo magnético mediante las sondas Hall.

- 2-22. Demuestre que la interacción entre espiras de corriente estacionaria cumple el principio de acción y reacción. Sugerencia: desarrolle el triple producto vectorial del integrando.

Solución:

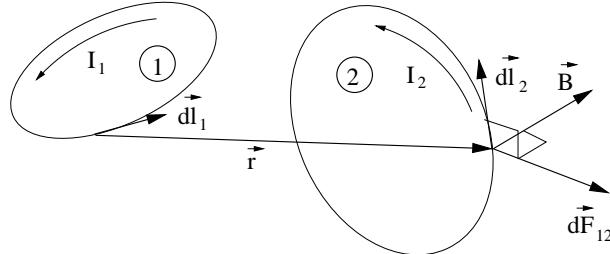


Figura 2.33:

La fuerza que la espira (1) ejerce sobre la (2) es

$$\vec{F}_{12} = K I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{\vec{dl}_2 \wedge (\vec{dl}_1 \wedge \vec{r})}{r^3}$$

Desarrollando el triple producto,

$$\vec{dl}_2 \wedge (\vec{dl}_1 \wedge \vec{r}) = \vec{dl}_1 (\vec{dl}_1 \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2)$$

La integral correspondiente al primer término puede escribirse de la forma

$$\oint_1 \oint_2 \frac{\vec{dl}_1 (\vec{dl}_2 \cdot \vec{r})}{r^3} = \oint_1 \vec{dl}_1 \underbrace{\oint_2 \frac{(\vec{dl}_2 \cdot \vec{r})}{r^3}}_I = 0$$

ya que

$$I = \oint_2 \frac{dr}{r^2} = 0$$

con lo que

$$\vec{F}_{12} = -K I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{\vec{r} (\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2)}{r^3} = -\vec{F}_{21}$$

porque para calcular \vec{F}_{21} sólo es necesario cambiar \vec{r} por $-\vec{r}$ en la integral anterior.

2-23. Calcule el campo magnético producido por una espira circular de radio a , recorrida por una corriente I , en cualquier punto de su eje:

- Por integración directa.
- Como el límite de una poligonal regular de $2n$ lados.

2-24. COMO EN EL CASO DE LAS DISTRIBUCIONES DE CARGA ESTÁTICA, LAS DISTRIBUCIONES DE CORRIENTES ESTACIONARIAS PRODUCEN CAMPOS MAGNÉTICOS QUE, A DISTANCIAS MUY LEJANAS, SON DE TIPO DIPOLEAR Y PUEDEN EXPRESARSE EN FUNCIÓN DEL MOMENTO DIPOLEAR MAGNÉTICO \vec{m} . Calcule el potencial vector y el campo magnético dipolar producido por una espira circular de radio a , recorrida por una intensidad I . En este caso $\vec{m} = I \mathcal{S} \vec{n}$, siendo \mathcal{S} la superficie plana de la espira y \vec{n} el vector unitario normal al plano de la misma.

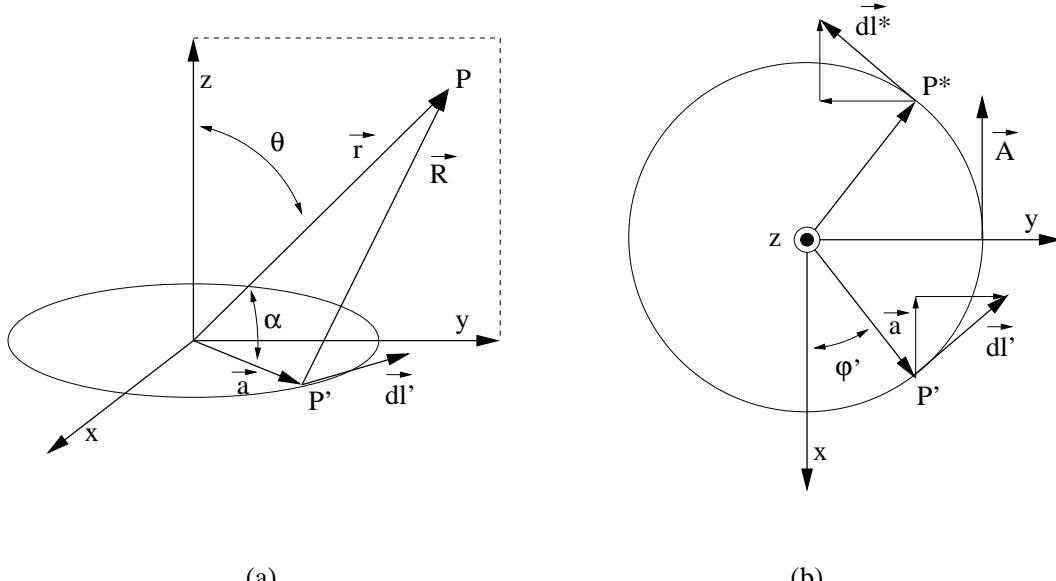


Figura 2.34:

Solución:

Sin pérdida de generalidad, como se muestra en la figura 2.34a, el potencial puede calcularse en cualquier plano $\varphi = cte$, en particular el yz .

$$\vec{A} = K I \oint \frac{\vec{dl}'}{R}$$

En la figura 2.34b puede verse que el potencial vector sólo tiene componente $A_\varphi = A_x$, dado que las componentes radiales se anulan sumando las aportaciones de \vec{dl}' y de \vec{dl}^* . Luego, teniendo en cuenta que

$$\vec{dl}' = a d\varphi \hat{\varphi}'$$

$$\hat{\varphi}' = -\sin \varphi' \hat{x} + \cos \varphi' \hat{y}$$

y

$$A_x = -K I a \oint \frac{\sin \varphi' d\varphi'}{R}$$

Esta integral resulta ser de tipo elíptico; sin solución analítica cerrada. Sin embargo, se simplifica considerablemente para puntos lejanos tales que $\beta \equiv a/r \ll 1$.

Bajo este supuesto

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{a} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \alpha}} \simeq \frac{1}{r} (1 + \beta \sin \theta \sin \varphi')$$

puesto que $\cos \alpha = \hat{a} \cdot \hat{r}$.

De esto se deduce que

$$A_x = -K I \frac{a}{r} \left(\oint \sin \varphi' d\varphi' + \frac{a \sin \theta}{r} \oint \sin^2 \varphi' d\varphi' \right)$$

El resultado puede escribirse de la forma general

$$\vec{A}_d = -K I \frac{\pi a^2}{r^2} \sin \theta$$

y, hallando el rotacional

$$\vec{B}_d = -K \frac{m}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

donde $I \pi a^2 = I S = m$, es el módulo del momento dipolar magnético.

Este campo tiene la misma estructura que el campo eléctrico dipolar, por lo que sus líneas también son análogas.

2-25. Halle el campo magnético producido por un hilo recto e indefinido, recorrido por una intensidad I . Haga el cálculo por

- a) Integración directa.
- b) Aplicando la ley de Ampère.
- c) A través del potencial vector.

Solución:

trataremos las partes (a) y (c)

a) El campo magnético del hilo es

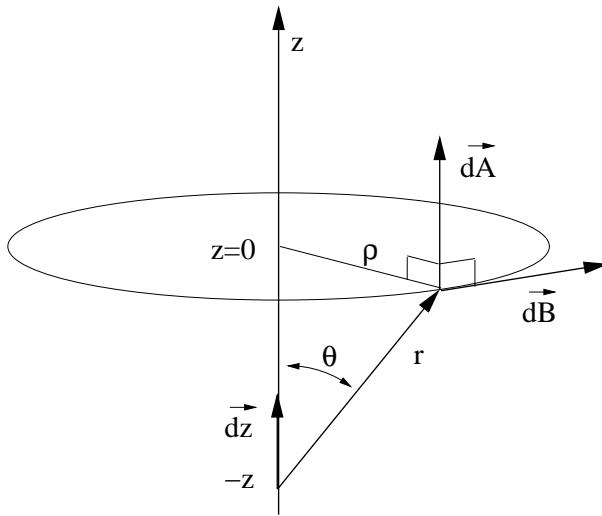


Figura 2.35:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

donde, según se muestra en la figura 2.35,

$$\vec{B} = B_\varphi \hat{\varphi}$$

Expresaremos esta integral en función de θ :

$$d\vec{l} \wedge \vec{r} = dz \sin \theta \hat{\varphi}, \quad r = \frac{\rho}{\sin \theta}, \quad z = -\frac{\rho}{\tan \theta}$$

De ésto se deduce que

$$dz = \frac{\rho d\theta}{\sin^2 \theta}$$

y

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

c) Como veremos más adelante, el potencial vector de un hilo de longitud infinita es infinito, por lo que no podríamos obtener el campo mediante su derivación.

Empezaremos calculando el potencial producido por un hilo de longitud finita $L = 2l$, $-l \leq z \leq l$. Como se muestra en la figura

$$\vec{A} = A_z \hat{z}$$

y, teniendo en cuenta que

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{(\rho/l)^2 + 1}}{-1 + \sqrt{(\rho/l)^2 + 1}} \right]$$

Es evidente que $A \rightarrow \infty$ si $l \rightarrow \infty$. Pero, físicamente, un hilo de longitud 'infinita' es un hilo finito observado desde una distancia $\rho \ll l$. Desarrollando la expresión anterior en función de ρ/l y quedándonos con el primer término significativo, tenemos que ¹⁵

$$A_z \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[1 + \frac{4l^2}{\rho^2} \right]$$

Puesto que $A_z = f(\rho)$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \left(\frac{4(l/\rho)^2}{1 + 4(l/\rho)^2} \right) \hat{\varphi}$$

Solución que, en el límite $l/\rho \rightarrow \infty$, tiende a la dada en el apartado (a).

2-26. Dados dos hilos rectos, indefinidos, paralelos entre sí y recorridos por intensidades iguales a I , halle:

- a) Campo magnético producido en cualquier punto del espacio.
- b) Fuerza ejercida por cualquiera de ellos sobre la unidad de longitud del otro.
Determine la condición necesaria para que la fuerza sea de atracción o de repulsión.

Solucion :

- a) Según el problema 2-25, el campo producido por un hilo recto y recorrido por una intensidad I es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\varphi}$$

Para hallar el campo que producen los dos hilos en cualquier punto del espacio, los situaremos, como se muestra en la figura 2.36-a, en la dirección \hat{z} y en las posiciones $\pm \frac{a}{2} \hat{y}$. Superponiendo en P los campos producidos por cada uno de los hilos

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho_1} \hat{\varphi}_1 + \frac{1}{\rho_2} \hat{\varphi}_2 \right)$$

¹⁵ $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$ para $x < 1$.

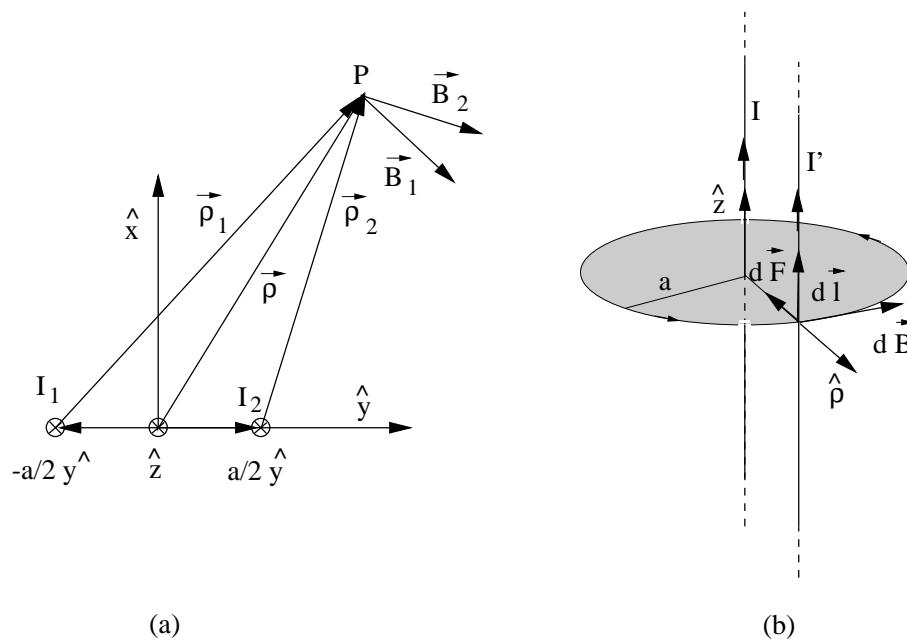


Figura 2.36:

Teniendo en cuenta que $\hat{\varphi} = \hat{z} \wedge \hat{\rho}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \hat{z} \wedge \left(\frac{1}{\rho_1^2} \vec{\rho}_1 + \frac{1}{\rho_2^2} \vec{\rho}_2 \right)$$

donde

$$\vec{\rho}_1 = \vec{\rho} + \frac{1}{2} a \hat{y}, \quad \vec{\rho}_2 = \vec{\rho} - \frac{1}{2} a \hat{y}, \quad \vec{\rho} = x \hat{x} + y \hat{y}$$

b) De acuerdo con la figura 2.36-b, la fuerza que la corriente que produce el campo ejerce sobre la unidad de longitud de la corriente testigo es:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{dl} &= I d\vec{l} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi a} I I' \hat{z} \wedge \hat{\varphi} \\ &= -\frac{\mu_0}{2\pi \rho} I I' \hat{\rho} \end{aligned}$$

atractiva para corrientes en el mismo sentido y repulsivas para corrientes en sentido contrario.

2-27. Dado un haz de electrones, de sección circular, de radio a y densidad de partículas n_0 , que se mueve a lo largo del eje de la distribución con velocidad v_0 , halle:

- a) Campo eléctrico y magnético en cualquier punto del espacio.
- b) Fuerza electromagnética que actúa sobre cada electrón.
- c) Condición que habría de cumplirse para que el haz fuese estable desde el punto de vista dinámico. Discuta el resultado.

- 2-28. LOS CARRETES DE HELMHOLTZ PUEDEN CONSIDERARSE COMO FORMADOS POR DOS ESPIRAS COAXIALES, DE RADIO a , SEPARADAS UNA DISTANCIA $2b$ DE FORMA QUE EL CAMPO MAGNÉTICO QUE PRODUCEN EN SU EJE TIENE SUS DOS PRIMERAS DERIVADAS, EN EL PUNTO MEDIO ENTRE LAS DOS Y EN DIRECCIÓN AXIAL, IGUALES A CERO.

Halle la relación entre las corrientes que recorren a cada una de las espiras, su dirección relativa, así como la razón $\frac{a}{b}$, necesarias para que se cumplan las condiciones anteriores.

- 2-29. El mismo tipo de campo producido por los carretes de Helmholtz puede producirse con dos espiras cuadradas de lado a .

- Halle el campo producido por una espira cuadrada, recorrida por una intensidad I , en cualquier punto del espacio.*
- Si dos espiras se sitúan como en el problema anterior, determine la relación $\frac{a}{b}$ para que el campo cumpla las mismas condiciones que los carretes de Helmholtz.*
- Dibuje las líneas de campo en cada caso.*

Solución:

Calcularemos el campo de una espira como la representada en la figura 2.37.

$$\vec{B} = K \int_{\mathcal{L}} \frac{d\vec{l}' \wedge \vec{R}}{R^3}$$

donde

$$K = \frac{\mu_0 I}{4\pi}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Empezaremos calculando el campo creado por un segmento, como el (2), orientado en la dirección del eje x , que comienza en x_1 , termina en x_2 y está situado a la distancia y_0 de dicho eje. En este caso

$$\vec{R} = \{x - x', y - y_0, z\}, \quad d\vec{l}' = \{dx', 0, 0\}$$

Completaremos el problema con la ayuda de Mathematica.

Programa Mathematica *carretes – Helmholtz.nb*:

```
Remove["Global`*"]; Off[General :: "spell1"];
```

```
Off[General :: "spell"];
```

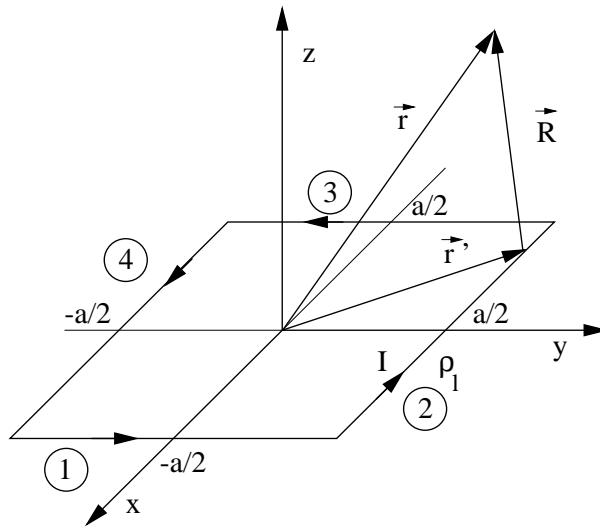


Figura 2.37:

\$TextStyle = {FontFamily \rightarrow "Courier", FontSize \rightarrow 12};

Campo de una espira:

Calculamos el campo producido por un segmento orientado en la dirección el eje x

$$\mathbf{R}_x = \{x - x_p, y - y_0, z\}; m_{Rx} = \sqrt{\mathbf{R}_x \cdot \mathbf{R}_x};$$

$$\mathbf{B}_x = \{0, -z, y - y_0\} \int \frac{1}{m_{Rx}^3} dx_p;$$

$$\mathbf{B}_x = (\mathbf{B}_x/.xp - > \mathbf{x2}) - (\mathbf{B}_x/.xp - > \mathbf{x1});$$

De forma análoga calculamos el campo producido por un segmento orientado en la dirección el eje y

$$\mathbf{R}_y = \{x - x_0, y - y_p, z\}; m_{Ry} = \sqrt{\mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_y};$$

$$\mathbf{B}_y = \{z, 0, -x + x_0\} \int \frac{1}{m_{Ry}^3} dy_p;$$

$$\mathbf{B}_y = (\mathbf{B}_y/.yp - > \mathbf{y2}) - (\mathbf{B}_y/.yp - > \mathbf{y1});$$

Calculamos el campo total de la espira producido en un punto cualquiera particularizando los resultados anteriores para cada uno de los segmentos de la espira con $a = 1$.

$$\mathbf{B2} = \mathbf{BX}/.\{\mathbf{x1} \rightarrow \frac{1}{2}, \mathbf{x2} \rightarrow -\frac{1}{2}, \mathbf{y0} \rightarrow \frac{1}{2}\};$$

$$\mathbf{B4} = \mathbf{BX}/.\{\mathbf{x1} \rightarrow -\frac{1}{2}, \mathbf{x2} \rightarrow \frac{1}{2}, \mathbf{y0} \rightarrow -\frac{1}{2}\};$$

$$\mathbf{B1} = \mathbf{BY}/.\{\mathbf{y1} \rightarrow -\frac{1}{2}, \mathbf{y2} \rightarrow \frac{1}{2}, \mathbf{x0} \rightarrow \frac{1}{2}\};$$

$$\mathbf{B3} = \mathbf{BY}/.\{\mathbf{y1} \rightarrow \frac{1}{2}, \mathbf{y2} \rightarrow -\frac{1}{2}, \mathbf{x0} \rightarrow -\frac{1}{2}\};$$

$$\mathbf{Be} = \mathbf{B1} + \mathbf{B2} + \mathbf{B3} + \mathbf{B4};$$

Representamos al campo en el plano $x = 0$

$$\mathbf{Byz} = \{\mathbf{Be[[2]]}, \mathbf{Be[[3]]}\}/.\mathbf{x} \rightarrow 0;$$

Primero generamos un gráfico de flechas sin mostrarlo.

<< Graphics`PlotField`

$$\text{grcamp} = \text{PlotVectorField}[\mathbf{Byz}, \{\mathbf{y}, -1, 1\}, \{\mathbf{z}, -1, 1\}, \\ \text{PlotPoints} \rightarrow 9, \text{DisplayFunction} \rightarrow \text{Identity}];$$

A continuación dibujamos la posición de la espira en dicho plano.

$$\mathbf{puntose} = \{\{-0.5, 0\}, \{0.5, 0\}\};$$

$$\text{espira} = \text{Graphics}[\{\text{PointSize}[.04], \text{RGBColor}[0, 0, 1], \text{Point}/@\mathbf{puntose}\}];$$

Por fin, mostramos conjuntamente estas dos gráficas.

$$\text{Show}[\text{grcamp}, \text{espira}, \text{DisplayFunction} \rightarrow \$\text{DisplayFunction}];$$

En la figura 2.38 se ve como las líneas de campo rodean a la espira.

Campo de dos espiras situadas en $z = \pm d/2$:

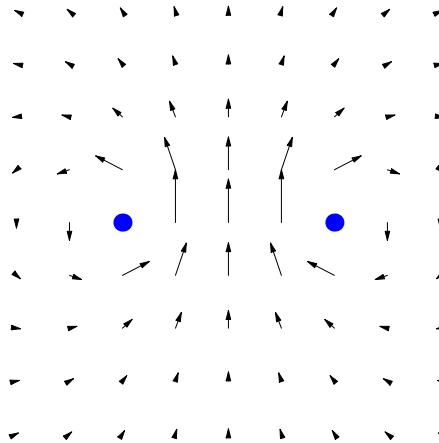


Figura 2.38:

$$\mathbf{Be1} = \mathbf{Be}/.\mathbf{z} \rightarrow (\mathbf{z} - \frac{\mathbf{d}}{2}); \mathbf{Be2} = \mathbf{Be}/.\mathbf{z} \rightarrow (\mathbf{z} + \frac{\mathbf{d}}{2});$$

$$\mathbf{Bc} = \mathbf{Be1} + \mathbf{Be2};$$

Calculamos los campos producidos por cada una de las espiras, $Be1z$ y $Be2z$, y por el conjunto Bcz , en el eje z .

$$\mathbf{Be1zv} = \mathbf{Be1}/.\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}\};$$

$$\mathbf{Be1z} = \mathbf{Be1zv}[3];$$

$$\mathbf{Be2zv} = \mathbf{Be2}/.\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}\};$$

$$\mathbf{Be2z} = \mathbf{Be2zv}[3];$$

$$\mathbf{Bczv} = \mathbf{Bc}/.\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}\};$$

$$\mathbf{Bcz} = \mathbf{Bczv}[3];$$

Carretes de Helmholtz:

Calculamos la distancia $\mathbf{d0}$ óptima, tal que su derivada segunda es nula en el origen.

$$\mathbf{D2B} = \partial_{\mathbf{z}, \mathbf{z}} \mathbf{Bcz} / . \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0};$$

Por medio de una gráfica de esta derivada en función de d , determinamos aproximadamente el valor $d0$

$$\text{Plot}[\mathbf{D2B}, \{d, 0.5, 1.5\}];$$

y lo establecemos con mayor precisión por medio de la orden **FindRoot**

$$d0v = \text{FindRoot}[\mathbf{D2B} == 0, \{d, 0.5\}];$$

$$d0 = d /. d0v$$

Campos en el eje z:

Procedemos a la representación de los campos en el eje z . Substituimos en la expresión de los campos $d \rightarrow d0$.

$$\mathbf{Bcz0} = \mathbf{Bcz} / . \mathbf{d} \rightarrow d0; \mathbf{Be1z0} = \mathbf{Be1z} / . \mathbf{d} \rightarrow d0; \mathbf{Be2z0} = \mathbf{Be2z} / . \mathbf{d} \rightarrow d0;$$

$$\begin{aligned} \text{Plot}[\{\mathbf{Bcz0}, \mathbf{Be1z0}, \mathbf{Be2z0}, 0\}, \{z, -0.6 d0, 0.6 d0\}, \text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}, \\ \text{GridLines} \rightarrow \{\{-\frac{d0}{2}, \frac{d0}{2}\}, \text{None}\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 0, 0], \\ \text{RGBColor}[0, 1, 0], \text{RGBColor}[0, 0, 1], \text{RGBColor}[0, 0, 1]\}]; \end{aligned}$$

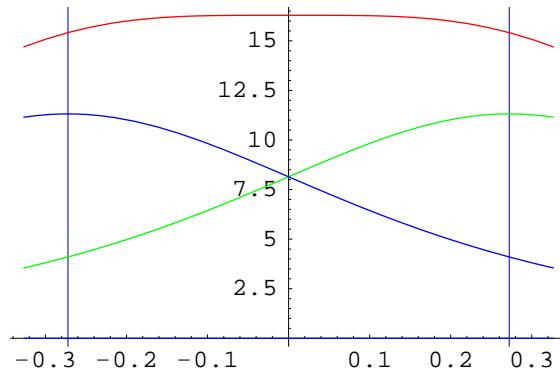


Figura 2.39:

En la gráfica 2.39 se comprueba que, dada la simetría del problema, la primera derivada del campo es nula. En la zona central el campo varía suavemente. A

continuación se determina la variación relativa del campo en el intervalo $0 \leq z \leq \frac{d_0}{4}$

$$\text{varrelativa} = \frac{(\mathbf{Bcz0}/.z \rightarrow 0) - (\mathbf{Bcz0}/.z \rightarrow \frac{d_0}{4})}{\mathbf{Bcz0}/.z \rightarrow 0}$$

Representación del campo en la sección $x = 0$:

$$\mathbf{Bcyz0} = \{\mathbf{Bc[[2]]}, \mathbf{Bc[[3]]}\}/.\{x \rightarrow 0, d \rightarrow d_0\};$$

Generamos un gráfico de flechas

$$\text{grcampc} = \text{PlotVectorField}[\mathbf{Bcyz0}, \{y, -1, 1\}, \{z, -1, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 11, \text{DisplayFunction} \rightarrow \text{Identity}];$$

marcamos la posición de los carretones

$$\text{puntosc} = \{ \{-0.5, -0.5d_0\}, \{0.5, -0.5d_0\}, \{-0.5, 0.5d_0\}, \{0.5, 0.5d_0\} \};$$

$$\text{carretesc} = \text{Graphics}[\{\text{PointSize}[.04], \text{RGBColor}[0, 0, 1], \text{Point} /@ \text{puntosc}\}];$$

y dibujamos las líneas de campo haciendo uso del método de Heun.

$$\mathbf{mBcyz0} = \sqrt{\mathbf{Bcyz0} \cdot \mathbf{Bcyz0}};$$

$$\mathbf{Bunit} = \frac{\mathbf{Bcyz0}}{\mathbf{mBcyz0}};$$

$$n = 100; \Delta = \frac{d_0}{n};$$

$$y_0 = -0.45; z_0 = 0;$$

$$\text{grlinea} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\};$$

```

Do[{p0 = {y0, z0}; linea = {p0}; kk = 0;
  While[(Abs[p0[[1]]] <= 1)&&(Abs[p0[[2]]] <= 1)&&(kk <= 5n),
  {kk = kk + 1, p0ini = p0, Bunitini = Bunit/.{y → p0[[1]], z → p0[[2]]},
  p0 = p0ini + Δ * Bunitini, Bunitfin = Bunit/.{y → p0[[1]], z → p0[[2]]},
  p0 = p0ini + Δ * 1/2(Bunitini + Bunitfin), linea = Append[linea, p0]}],
  grlinea[[i]] = ListPlot[linea, PlotJoined → True,
  PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction → Identity], y0 = y0 + 0.1},
  {i, 1, 10}];

```

Finalmente representamos conjuntamente todas estas gráficas.

```

Show[grcampc, carretesc, grlinea, DisplayFunction → $DisplayFunction,
Axes → True];

```

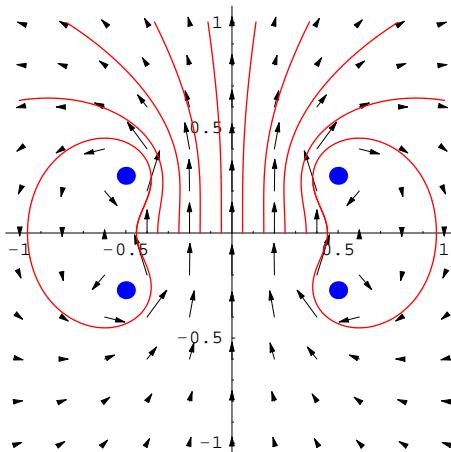


Figura 2.40:

En la figura 2.40 se observa que, en la zona central de los carretes, el campo es muy uniforme.

- 2-30. *Halle el campo magnético producido en el centro de su eje por una espira helicoidal, recorrida por una intensidad I , de radio a , paso constante b y número par de vueltas N .*
- 2-31. *CUANDO EN UNA ESPIRA COMO LA DEL PROBLEMA ANTERIOR EL NÚMERO DE VUELTAS POR UNIDAD DE LONGITUD $n = \frac{1}{b} >> \frac{1}{a}$, ES DECIR, EL PASO b ES MUCHO MENOR QUE EL RADIO a , A LA ESPIRA SE LE DENOMINA SOLENOIDE RECTO DE SECCIÓN CIRCULAR. Cada una de las vueltas es en la práctica casi*

cerrada y, en consecuencia, se le considera como espira; se dice que el solenoide tiene n espiras por unidad de longitud. De forma análoga se definen solenoides de formas y estructuras más complejas. Halle:

- El campo magnético producido por un solenoide recto, de radio a , longitud L y número de espiras N , efectuando el límite $a \gg b$ sobre el resultado del problema anterior.
- El campo magnético producido en cualquier punto del espacio por un solenoide recto, de radio a , longitud infinita y n espiras por unidad de longitud recorridas por una intensidad I .

Solución:

Trataremos el apartado (b)

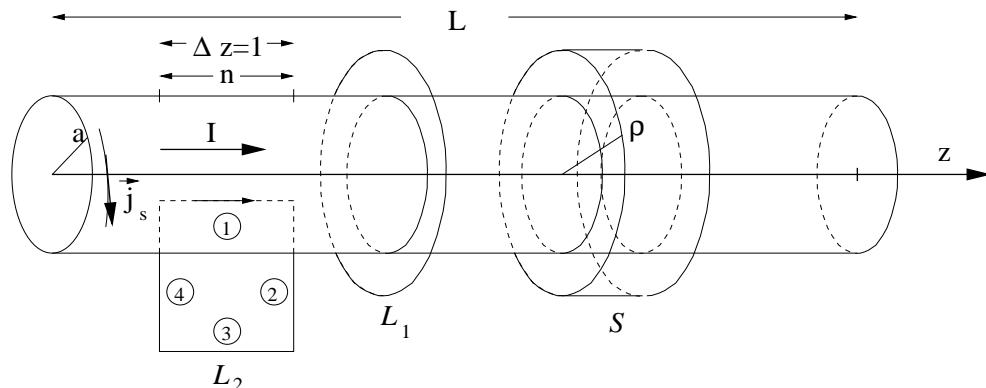


Figura 2.41:

b)

En la figura 2.41 se representa al solenoide. Si las espiras están arrolladas a derechas alrededor del eje z , el flujo de corriente a lo largo del eje z es I . Es decir, si cortamos el carrete por un plano $z = cte$, el flujo es I . Por otra parte, si cortamos por un plano $\varphi = cte$, el flujo por unidad de longitud Δz es $n I$. Para n suficientemente grande, podemos representar estos flujos por medio de densidades superficiales de corriente

$$\vec{j}_s = \vec{j}_{s\varphi} + \vec{j}_{sz} , \quad \vec{j}_{s\varphi} = n I \hat{\varphi} , \quad \vec{j}_{sz} = \frac{I}{2\pi a}$$

Si

$$2\pi a n \gg 1 \Rightarrow \vec{j}_{sz} \gg \vec{j}_{s\varphi}$$

Esta condición permite despreciar, en muchos casos prácticos, la contribución de la corriente azimutal. Pero, como veremos, ambas contribuciones no son directamente comparables porque la longitudinal se

produce en el interior del solenoide y la azimutal en el exterior. Normalmente el campo exterior es un subproducto del campo interno fuerte que se quiere crear. Es, por lo tanto, una *contaminación* que será posible ignorar sólo si su efecto sobre otros instrumentos, o estructuras sensibles, es despreciable.

Para el cálculo de los campos, tendremos en cuenta la simetría radial de las fuentes, por lo que

$$\vec{B} = \vec{B}(\rho)$$

De acuerdo con esto, $\frac{\partial}{\partial \varphi} \rightarrow 0$, $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow 0$.

Empezaremos investigando la estructura del campo fuera de la superficie del solenoide, es decir, para $\rho \neq a$. Expresando el rotacional en coordenadas cilíndricas para estas regiones

$$\nabla \wedge \vec{B} = -\frac{\partial B_z}{\partial \rho} \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho B_\varphi)}{\partial \rho} \hat{z} = \vec{0}$$

de donde se deduce que

$$B_z = cte , \quad B_\varphi = \frac{cte}{\rho}$$

Aplicando la ley de Ampère al camino \mathcal{L}_1 , tanto para $\rho > a$ como para $\rho < a$, se obtienen las componentes azimutales del campo.

$$B_{\varphi_{externo}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} , \quad \rho > a$$

y

$$B_{\varphi_{interno}} = 0 , \quad \rho < a$$

Dado que $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$, tomando como S a la superficie de la caja de pastillas de la figura y teniendo en cuenta que $B_z = cte$, se deduce que

$$B_\rho = 0$$

Por último, calcularemos la componente z del campo. La exterior debe ser nula porque, en caso contrario, la energía almacenada en el solenoide por unidad de longitud Δz sería infinita

B_z es la única componente del campo interno. Para calcularla aplicaremos el teorema de Ampère al camino \mathcal{L}_2

$$\oint_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n I \Delta z = B_z \Delta z$$

puesto que el único tramo de \mathcal{L} que contribuye a la integral es el (1).

Resumiendo, el campo producido por el solenoide ideal es

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z} \quad \text{para } \rho < a$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\varphi} \quad \text{para } \rho > a$$

- 2-32. SE DEFINE COMO COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA $M_{ab} = \frac{\Phi_a(\vec{B}_b)}{I_b}$ ENTRE DOS ESPIRAS a Y b A LA RELACIÓN EXISTENTE ENTRE EL FLUJO QUE CORTA UNA DE ELLAS, DEBIDO AL CAMPO PRODUCIDO POR LA OTRA, Y LA INTENSIDAD QUE CIRCULA POR LA ESPIRA PRODUCTORA DEL CAMPO. *Según se demuestra en otro lugar, éste coeficiente tiene carácter simétrico. En particular, el COEFICIENTE DE AUTOINDUCCIÓN de una espira a se define como $L = \frac{\Phi_a(\vec{B}_a)}{I_a}$.*

- a) *Halle M para un hilo recto indefinido y una espira coplanaria cuadrada, cuyos lados miden a y tal que el lado más próximo al hilo es paralelo y está situado a distancia a del mismo.*
 - b) *Halle M entre una espira de radio a y otra pequeña de radio $b \ll a$ cuyo centro se encuentra sobre el eje de la primera pero cuya posición y orientación es arbitraria.*
 - c) *Halle L para un solenoide recto de sección circular, de radio a , longitud $b \gg a$ y número de espiras N .*
- 2-33. *Halle el campo magnético en el interior de un solenoide toroidal, de sección cuadrada $a \times a$, numero total de espiras N y recorrido por una intensidad I . ¿ Cuál sería su autoinducción? Suponga que $4an \gg 1$ y que, por lo tanto, el campo externo es despreciable (véase el problema 2-31)*
- 2-34. *Halle el campo electromagnético producido por las siguientes distribuciones de carga con simetría axial y que giran con velocidad ω alrededor de su eje en un punto cualquiera del mismo.*
- a) *Un disco de radio a con densidad superficial de carga ρ_s .*
 - b) *Una superficie esférica de radio a con una densidad superficial de carga $\rho = \rho_0 \cos \theta$.*
- 2-35. *Halle el campo magnético producido por un cable coaxial como el de la figura 2.42, recorrido por una intensidad I uniformemente distribuida a través de las secciones del conductor interno y del externo, El conductor interno tiene radio a y el externo, radio interior b y exterior c .*

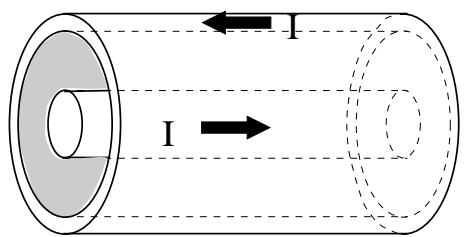


Figura 2.42:

Capítulo 3

Fuentes del campo dinámico: Leyes de Maxwell

En este capítulo se completan las fuentes del campo dinámico, variable con el tiempo, las cuales se resumen en las ecuaciones de Maxwell. Al considerar corrientes no estacionarias, $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \rho = \rho(\vec{r}, t)$, $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$, veremos que la derivada temporal del campo magnético es fuente vectorial del eléctrico, ley de Faraday, y la del campo eléctrico, corriente de desplazamiento del vacío, fuente vectorial del campo magnético. Estas fuentes acoplan a ambos campos poniendo en evidencia que se trata, en realidad, de un único campo electromagnético. Al mismo tiempo hacen posible la existencia de las ondas electromagnéticas.

3.1. Ley de inducción de Faraday

El fenómeno de la inducción electromagnética fue descubierto de forma independiente por Faraday y por Henry. Como se apunta en la introducción histórica, Faraday encuentra este efecto cuando busca conscientemente la analogía, entre corrientes, del fenómeno de inducción electrostática. Aunque dicha analogía no existe, en sentido literal, las experiencias de Faraday ponen de manifiesto que en una espira cerrada puede inducirse una corriente haciendo variar el flujo magnético cortado por la misma y que ésta es tanto más notable cuanto mayor es la rapidez de dicha variación. Faraday experimenta con campos producidos por corrientes y por imanes, comprobando que sus efectos son idénticos.

Aunque, dentro del marco 'galileano' establecido para este texto, la formulación tradicional de la ley de inducción es aplicable en un ámbito más amplio, nosotros empezaremos limitando su enunciado al caso en el que el cambio de flujo es debido a la variación explícita, local, del campo magnético con el tiempo y no al movimiento, o deformación, de la propia espira. Acto seguido, comprobaremos que, en conjunción con las leyes de transformación de los campos, éste enunciado puede extenderse para el caso de espiras móviles.

Fijaremos nuestra atención en una experiencia como la representada en la figura 3.1, en la que colocamos una espira \mathcal{L}_0 , en reposo con respecto al sistema inercial \mathcal{S} del

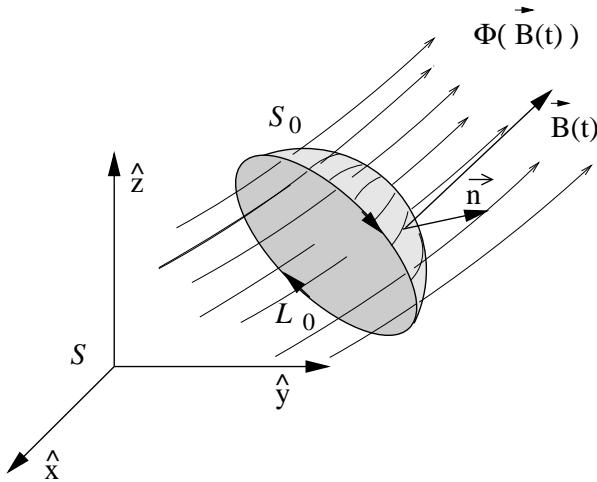


Figura 3.1:

laboratorio, en presencia de un campo magnético que varía con el tiempo.

Según Faraday, en la espira detectaríamos el paso de una corriente, a menos que en ella interpongamos una resistencia infinita. En este último caso, a lo largo de \mathcal{L} mediríamos lo que más adelante definiremos como fuerza electromotriz.

Es evidente que si los portadores de carga se mueven es porque sienten sobre sí la presencia de un campo eléctrico, o fuerza por unidad de carga, que las impulsa y que, si sienten dicho campo, es porque éste existe con independencia de que una carga esté disponible para dar testimonio. Las espiras y las cargas que en ellas residen son, por lo tanto, meros testigos de la existencia del campo. La detección de una corriente en una espira cerrada indica que estos campos no son conservativos.

Enunciamos, pués, la *ley de inducción de Faraday* para caminos cerrados y en reposo \mathcal{L}_0 . Este camino puede coincidir o no con una espira y podrá ser trazado arbitrariamente en el espacio.

$$\oint_{\mathcal{L}_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (3.1)$$

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{d}{dt} \Phi_{S_0}(\vec{B})$$

donde $\mathcal{E}_0 \equiv \oint_{\mathcal{L}_0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ = fuerza electromotriz del camino \mathcal{L}_0 y $\Phi_{S_0}(\vec{B}) = \int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{s}$ es el flujo del campo magnético a través de una superficie arbitraria que se apoya sobre \mathcal{L}_0 . La fuerza electromotriz se expresa en *voltios* y el flujo en *webers*.

La ley de inducción de Faraday se leerá, por lo tanto, diciendo que '*sobre cualquier camino \mathcal{L}_0 se mide una fuerza electromotriz proporcional y de signo contrario a la razón temporal de cambio del flujo magnético cortado por la misma*'. En el sistema MKS, la constante de proporcionalidad resulta igual a la unidad ¹.

¹El signo negativo del segundo miembro está relacionado con la llamada *ley de Lenz*. Según ésta, la

Para obtener la expresión diferencial de esta ley haremos uso del teorema del rotacional y tendremos en cuenta que, al introducir el operador $\frac{d}{dt}$ dentro de la integral sobre una superficie estática, éste debe ser substituido por el de derivación parcial $\frac{\partial}{\partial t}$ (volveremos sobre esta cuestión cuando se consideren superficies en movimiento).

$$\mathcal{E}_0 = \oint_{\mathcal{L}_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{S}_0} \nabla \wedge \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\mathcal{S}_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (3.2)$$

y, como \mathcal{L}_0 y \mathcal{S}_0 son arbitrarios, los dos integrandos de las integrales de superficie deben ser iguales,

$$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

Ésta es la forma diferencial de la ley de inducción de Faraday y nos dice que el campo eléctrico tiene fuentes vectoriales. Las variaciones temporales del campo magnético aparecerán como las únicas fuentes vectoriales de \vec{E} , por lo que la ley anterior tiene ya su forma definitiva ².

Por primera vez en nuestra exposición nos encontramos con un término explícito de acoplamiento entre los campos. Más adelante veremos que esta interrelación es recíproca.

También hemos comprobado que la existencia de una fuerza electromotriz en circuito cerrado implica la existencia de campos eléctricos de rotacional no nulo, es decir, no conservativos. Así, si descomponemos arbitrariamente al campo eléctrico total en dos sumandos, de forma que uno, \vec{E}_C , sea conservativo y otro, \vec{E}_R , rotacional

$$\vec{E} = \vec{E}_C + \vec{E}_R , \quad \nabla \wedge \vec{E}_C = 0 , \quad \nabla \wedge \vec{E}_R \neq 0$$

$$\mathcal{E}_0 = \oint_{\mathcal{L}_0} \vec{E}_R \cdot d\vec{l} \quad (3.4)$$

ya que $\oint_{\mathcal{L}_0} \vec{E}_C \cdot d\vec{l} = 0$. Esto permite calcular la fuerza electromotriz haciendo uso exclusivo del sumando no conservativo, es decir, del campo rotacional.

En el segundo miembro de la expresión 3.1 de la ley de inducción aparece el flujo de \vec{B}

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\mathcal{S}_0} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

que no depende de la superficie que utilicemos para integrar porque $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ y

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\mathcal{L}_0} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (3.5)$$

luego $\Phi(\vec{B})$ es sólo función de \mathcal{L}_0 .

fuerza electromotriz inducida se opone, a través de los campos producidos por las corrientes inducidas en los conductores presentes, a la variación del flujo.

²Existen otras fuentes de fuerza electromotriz pero no tienen procedencia electromagnética clásica. Son de tipo mecánico, químico, etc..

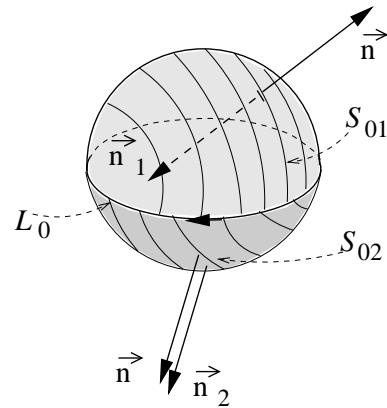


Figura 3.2:

Esto mismo podemos verlo de otra manera apoyándonos en la figura 3.2. El volumen V_0 está limitado por $S_0 = S_{01} + S_{02}$ cuya normal hacia afuera es $\vec{n} = \vec{n}_2 = -\vec{n}_1$. Dado que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\int_{V_0} \nabla \cdot \vec{B} dv = \int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{S_{02}} \vec{B} \cdot d\vec{s}_2 - \int_{S_{01}} \vec{B} \cdot d\vec{s}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi_{S_{02}} = \Phi_{S_{01}} \Rightarrow \Phi(\vec{B}) \text{ es independiente de } S_0$$

3.1.1. Ley de Faraday para caminos en movimiento

Además de la experiencia descrita en el apartado anterior, otra serie de experiencias, como las que se representan esquemáticamente en la figura 3.3, muestran que también se detecta corriente en espiras que se mueven en campos independientes del tiempo.

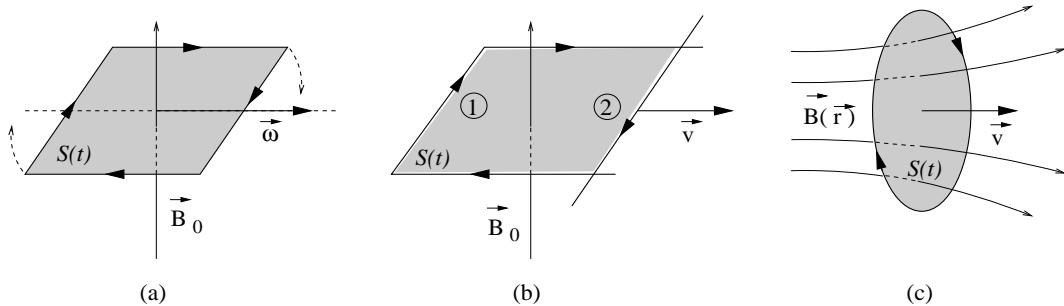


Figura 3.3:

En la figura 3.3a, que representa al *rotor* de un *motor o generador*, una espira rígida e indeformable gira en presencia de un campo constante y homogéneo. En 3.3b, una espira compuesta por una horquilla conductora (1) y un segmento móvil (2), que se desliza en contacto eléctrico con la horquilla, se deforma de manera que la superficie $S(t)$ es función del tiempo. Por último, la espira de la figura 3.3c se traslada sin deformarse en

presencia de un campo magnético no homogéneo. En estos casos el flujo cortado varía con el tiempo debido al movimiento, con o sin deformación, de la espira y sobre ella puede también detectarse una fuerza electromotriz.

El enunciado tradicional es válido para caminos con movimiento no relativista, es decir, tales que $v \ll c$, $c \rightarrow \infty$. La fuerza electromotriz resultante tendrá un origen mixto en las variaciones explícitas del campo y en el movimiento de cada elemento de la espira. Para medir las fuerzas electromotrices, sobre caminos $\mathcal{L}(t)$, y los flujos a través de superficies $S(t)$, es necesario tener en cuenta que los elementos de línea y de superficie sobre los que se miden los campos están en movimiento. Dentro del marco galileano, estos campos, \vec{E}' y \vec{B}' , vienen dados por 1.29 y 1.30

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' &= \vec{B}\end{aligned}$$

en función de los campos \vec{E} y \vec{B} que se miden en el sistema \mathcal{S} del laboratorio.

La fuerza electromotriz inducida sobre un camino en movimiento $\mathcal{L}(t)$ será, en el instante t

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t) = \oint_{\mathcal{L}(t)} \vec{E}' \cdot d\vec{l} = \underbrace{\oint_{\mathcal{L}(t)} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{=\mathcal{E}_0} + \underbrace{\oint_{\mathcal{L}(t)} \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=\mathcal{E}_m} \quad (3.6)$$

\mathcal{E}_0 es la *fuerza electromotriz estática*, la que se mide en el sistema \mathcal{S} sobre la curva que coincide con $\mathcal{L}(t)$ en el instante t , y \mathcal{E}_m la *fuerza electromotriz de movimiento*, debida a la deformación del camino a lo largo del tiempo. Para calcular esta fuerza electromotriz, hagamos uso de la figura 3.4

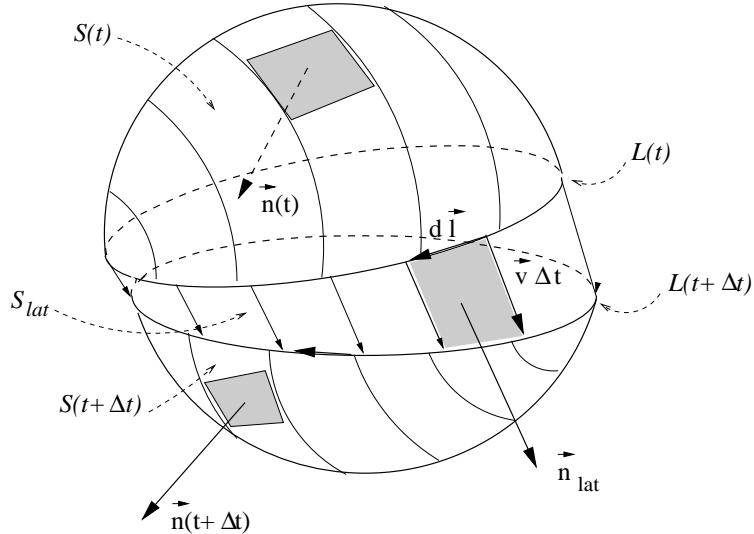


Figura 3.4:

Esta figura muestra un volumen $\mathcal{V}(t)$ limitado por las superficies $\mathcal{S}(t)$, \mathcal{S}_{lat} y $\mathcal{S}(t + \Delta t)$. La primera es una superficie arbitraria que se apoya en el camino $\mathcal{L}(t)$ en el instante

t , la última es otra superficie arbitraria apoyada en la curva que coincidirá con el mismo camino en $t + \Delta t$ y \mathcal{S}_{lat} es la superficie lateral que culmina el cierre³.

Haciendo uso de las propiedades del producto mixto, esta última puede escribirse como

$$\mathcal{E}_m(t) = \oint_{\mathcal{L}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{l} \wedge \vec{v} \quad (3.7)$$

o, según la figura 3.4

$$\mathcal{E}_m(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \oint_{\mathcal{L}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}_{lat} \quad (3.8)$$

donde

$$d\vec{s}_{lat} = (d\vec{l} \wedge \vec{v}) \Delta t$$

por lo que esta integración sobre \mathcal{L} equivale a la integración sobre \mathcal{S}_{lat}

Para encontrar una expresión conveniente de la ley de inducción para caminos en movimiento, aplicaremos el teorema de la divergencia al volumen $\mathcal{V}(t)$ ⁴. Ahora bien, $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$ y el flujo total de $\vec{B}(\vec{r}, t)$ a través de una superficie cerrada es nulo, por lo que⁵

$$\left(- \int_{\mathcal{S}(t)} + \int_{\mathcal{S}(t+\Delta t)} + \int_{\mathcal{S}_{lat}} \right) \vec{B}(t) \cdot d\vec{s} = 0$$

Substituyendo $\int_{\mathcal{S}_{lat}}$ en 3.8

$$\mathcal{E}_m(t) = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \underbrace{\int_{\mathcal{S}(t+\Delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}}_{(A)} - \int_{\mathcal{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{s} \right\}$$

Desarrollando en serie $\vec{B}(t)$ en la integral (A)

$$\vec{B}(t) = \vec{B}(t + \Delta t) - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta t$$

y

$$\mathcal{E}_m(t) = \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathcal{S}(t+\Delta t)} \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{s}}_{(B)} - \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\mathcal{S}(t+\Delta t)} \vec{B}(t + \Delta t) \cdot d\vec{s} - \int_{\mathcal{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{s} \right\}}_{(C)}$$

³La superficie $-\mathcal{S}(t)$ coincide con $\mathcal{S}(t)$ pero su normal tiene sentido opuesto a la de esta última ya que debe estar orientada hacia afuera del volumen en cuestión.

⁴Téngase en cuenta que, aunque parte de la superficie que limita a este volumen es $\mathcal{S}(t + \Delta t)$, las operaciones las hacemos en el instante t .

⁵El signo negativo en la primera integral se debe a que al aplicar el teorema de la divergencia hay que integrar sobre $-\mathcal{S}(t)$, cuya normal es $-\vec{n}(t)$.

De acuerdo con 3.2, $(B) = -\mathcal{E}_0$ ⁶ y, por otra parte, (C) es la derivada total del flujo de $\vec{B}(t)$ cortado por el camino $\mathcal{L}(t)$. Substituyendo en 3.6 se obtiene la *ley de inducción de Faraday para caminos en movimiento*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t) &= \oint_{\mathcal{L}(t)} \vec{E}'(t) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{s} \\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t) &= -\frac{d}{dt} \Phi(\vec{B})(t)\end{aligned}\quad (3.9)$$

El campo eléctrico es medido en los sistemas solidarios con cada punto de $\mathcal{L}(t)$, mientras que el campo magnético puede medirse en el sistema del laboratorio.

Esta forma de la ley es de gran utilidad para la resolución de muchos problemas prácticos en los que el movimiento de las espiras suele ser muy lento con respecto a la velocidad de la luz.

3.2. Corriente de desplazamiento en el vacío

Hemos completado las ecuaciones de Maxwell, salvo la correspondiente a la ley de Ampère, en la que sólo aparece como fuente la densidad de corriente de carga \vec{j}

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.10)$$

Esta ecuación no tiene validez general, como puede comprobarse aplicando la divergencia a ambos miembros de la misma.

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{B})' = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} \neq 0$$

el signo de igualdad se pone entre comillas porque, mientras que $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) \equiv 0$, la divergencia de la densidad de corriente sólo es nula cuando ésta es estacionaria. En general

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.11)$$

Es evidente que, para que el segundo miembro de 3.10 sea también solenoidal, habrá que añadirle, mediante postulado, un término corrector con las mismas dimensiones. Aunque Maxwell introdujo dicho término como consecuencia de postulados previos sobre las propiedades mecánicas del Ether, aquí lo introduciremos de forma más directa.

Si bien \vec{j} no es solenoidal, teniendo en cuenta que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

⁶Compare con 3.1 y tenga en cuenta que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{S}(t + \Delta t) = \mathcal{S}(t)$.

podemos escribir 3.11 de la forma,

$$\nabla \cdot \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

es decir, si añadimos a \vec{j} el término

$$\vec{j}_{D_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.12)$$

que llamaremos *corriente de desplazamiento del vacío*, obtenemos una corriente total, $\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_{D_0}$, que siempre será estacionaria (solenoidal): $\nabla \cdot \vec{j}_T \equiv 0$.

Aunque ésta no es la única forma de obtener los resultados que buscamos, postulamos como fuentes de \vec{B} , en el vacío

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (3.13)$$

Esta corriente de desplazamiento completa el acople entre el campo eléctrico y el campo magnético e implica la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío. Como es aparente, no comporta desplazamiento de carga alguno. Su nombre procede del modelo de Ether utilizado inicialmente por Maxwell.

3.3. Potenciales del campo electromagnético

Una vez que se ha completado la búsqueda de las fuentes del campo electromagnético, analizaremos las relaciones generales entre este último y sus potenciales [Levich-I].

Por lo pronto, hemos visto que, en general, el campo magnético es solenoidal y el eléctrico no conservativo. Según el teorema de Helmholtz, el campo magnético, por ser solenoidal, puede derivarse de un potencial vector

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$$

\vec{A} es el *potencial magnético vector*.

Por otra parte

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

lo que quiere decir que, si bien \vec{E} no es conservativo, sí lo es $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. V es el *potencial eléctrico escalar*.⁷ Las relaciones entre los potenciales y los campos son, pues,

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.14)$$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \quad (3.15)$$

⁷El potencial electrostático es un caso particular del eléctrico escalar.

Como consecuencia de lo anterior, el campo electromagnético puede derivarse, a través de estas ecuaciones, de un potencial escalar V y uno vectorial \vec{A} . No es necesario utilizar un potencial vector independiente para \vec{E} porque \vec{E} y \vec{B} están acoplados y constituyen en esencia un solo campo.

Ahora sí disponemos de un criterio para descomponer significativamente al campo eléctrico en una componente conservativa y otra rotacional

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_E(t) + \vec{E}_M(t) \text{ tales que, } \vec{E}_E(t) = -\nabla V(t) \text{ y } \vec{E}_M(t) = -\frac{\partial \vec{A}(t)}{\partial t}$$

$\vec{E}_E(t)$ es un campo conservativo de 'tipo electrostático', pero no estático, y $\vec{E}_M(t)$ es un campo no conservativo asociado a la existencia de campos magnéticos variables.

Ya hemos apuntado que, dado que \vec{E} y \vec{B} se deducen de los potenciales a través de operaciones diferenciales, existe un cierto grado de indeterminación en estos últimos. Para calcular \vec{B} , son equivalentes todos los potenciales \vec{A}' tales que $\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\Psi(\vec{r}, t)$, porque $\nabla\wedge(\nabla f) \equiv 0$ y, por lo tanto, $\nabla\wedge\vec{A} = \nabla\wedge\vec{A}'$. Es fácil comprobar que, si sustituimos V por V' , tal que $V = V' - \frac{\partial\Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$, también \vec{E} permanece invariante. Las transformaciones de \vec{A} y V en \vec{A}' y V' se llaman *transformaciones de contraste* o *gauge*

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{A}' + \nabla\Psi(\vec{r}, t) \\ V &= V' - \frac{\partial\Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Estas transformaciones permiten imponer a los potenciales condiciones restrictivas, *condiciones de contraste*, compatibles con las mismas, que facilitan el tratamiento de algunos problemas importantes como el de la propagación de los potenciales.

Podemos demostrar que condiciones de contraste del tipo

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= 0 && \text{Contraste de Coulomb} \\ \nabla \cdot \vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} &= 0 && \text{Contraste de Lorenz para el vacío} \end{aligned} \tag{3.17}$$

son compatibles con las transformaciones de contraste.

Esto quiere decir, por ejemplo, que, si los potenciales \vec{A} y V no cumplen el contraste de Lorenz, es posible encontrar unos nuevos \vec{A}' y V' que sí lo satisfagan.

Sea

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = \chi(\vec{r}, t) \neq 0$$

Haciendo uso de las transformaciones de contraste, se obtiene

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V'}{\partial t} = \chi - \nabla^2\Psi + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

por lo que basta con buscar una función $\Psi(\vec{r}, t)$ que sea solución de la ecuación de D'Alembert

$$\nabla^2\Psi - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \chi$$

lo cual siempre es posible, como se verá al estudiar la solución de la ecuación de onda.

3.4. Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Las ecuaciones de Maxwell ligan a los campos con sus fuentes escalares y vectoriales:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.18)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.20)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (3.21)$$

Como ya hemos visto, de 3.21 y 3.18 se deduce la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

En resumen, sin tener en cuenta a las constantes de proporcionalidad, el campo eléctrico tiene por fuentes escalares a las densidades de carga y por fuentes vectoriales a las variaciones temporales del campo magnético. El campo magnético carece de fuentes escalares y tiene por fuentes vectoriales a la densidad de corriente de carga y a la de desplazamiento del vacío. Para distingirlas de las demás, llamaremos *fuentes primarias* a ρ y \vec{j} .

Como se vió en su momento

$$\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha} \rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle f \rangle \quad , \quad \alpha = x, y, z, t$$

por lo que en estas ecuaciones \vec{E} , \vec{B} , ρ y \vec{j} pueden intrepretarse como magnitudes microscópicas o macroscópicas, según convenga. Más adelante emplearemos la misma notación ρ y \vec{j} para designar a otro tipo de cargas y corrientes macroscópicas, las de 'conducción'.

La resolución de las ecuaciones de Maxwell nos permite calcular las fuerzas sobre las cargas haciendo uso de la ley de Lorentz,

$$\frac{d\vec{F}}{dv} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Si bien aquí la utilizaremos también en el caso macroscópico, esto no es posible en general. El estudio de las fuerzas en el interior de medios arbitrarios requiere un análisis que queda fuera de nuestros objetivos ⁸.

⁸Para más detalles, véase la bibliografía, por ejemplo, J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*.

3.5. Problemas

- 3-1. Suponga dos carretes en movimiento, por lo que el coeficiente de inducción mutua $M = M(t)$ ⁹. Si la intensidad que pasa por el primero es $I = I(t)$, halle la fuerza electromotriz que se genera en el segundo. Descomponga el resultado en dos términos y analícelos.

Solución:

La fuerza electromotriz que se genera en el segundo carrete es

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \Phi(\vec{B})(t) = -\frac{d}{dt} (I(t) M(t)) = \underbrace{-I(t) \frac{d}{dt} M(t)}_{\mathcal{E}_M} + \underbrace{-M(t) \frac{d}{dt} I(t)}_{\mathcal{E}_I}$$

\mathcal{E}_M es la fuerza electromotriz que aparece cuando la geometría de los dos carretes es variable, como es el caso de los motores y generadores, y \mathcal{E}_I es la fuerza electromotriz debida a las variaciones de la intensidad, tal y como ocurre en los transformadores.

- 3-2. Considere dos solenoides concéntricos, rectos y largos, de radios respectivos a y $b > a$, de longitud $l \gg a, b$ y con números de espiras n_a y n_b por unidad de longitud. Halle

- El coeficiente de inducción mutua. Demuestre que es simétrico para los dos solenoides.
- La fuerza electromotriz \mathcal{E}_b si el primero está recorrido por una intensidad $I_a = I_0 \cos \omega t$.
- La fuerza electromotriz \mathcal{E}_a si el segundo está recorrido por una intensidad

$$I_b = \begin{cases} I_0 \frac{t}{T} & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{fuera del intervalo} \end{cases}$$

Solución:

a)

Como se afirma en el enunciado del problema 2-32 y se verá más adelante, el coeficiente de inducción mutua es simétrico. Para comprobarlo lo calcularemos de las dos maneras posibles:

$$M_{ab} = \frac{\Phi_a(\vec{B}_b)}{I_b}, \quad M_{ba} = \frac{\Phi_b(\vec{B}_a)}{I_a}$$

En el primer caso, el campo magnético producido por el segundo carrete es

⁹Véase el problema 2-32

$$B_b = \mu_0 n_b I_b$$

Para calcular el flujo cortado por el solenoide (a), que es interior al (b), tendremos que multiplicar B_b por la sección efectiva total de (a).

$$\Phi_a(\vec{B}_b) = (n_a l \mathcal{S}_a) B_b$$

donde $\mathcal{S}_a = \pi a^2$ es la sección de (a).

De acuerdo con lo anterior

$$M_{ab} = \mu_0 n_b n_a \mathcal{V}_a$$

donde $\mathcal{V}_a = l \mathcal{S}_a$ es el volumen de (a).

Si lo hacemos a la inversa, hemos de tener en cuenta que $b > a$ y que el campo B_a es nulo para $r > a$, lo que nos lleva al mismo resultado anterior.

- 3-3. Un generador simple de corriente alterna puede estar constituido por un carrete plano de N espiras rectangulares, de lados a y b , el rotor, que gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje contenido en el plano del carrete, perpendicular a los lados a y centrado sobre ellos, en presencia de un campo magnético B_0 uniforme y perpendicular al eje de giro. Halle la fuerza electromotriz inducida en el carrete:

- a) Mediante la derivación del flujo cortado.
- b) Calculando la circulación de \vec{E}' .

Solución:

La figura 3.5a presenta al rotor girando sobre el eje z con velocidad angular

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

de forma que en $t = 0$ su plano coincide con el $y = 0$ y

$$\vec{B} = B_0 \hat{x}$$

El ángulo girado es, por lo tanto

$$\varphi = \omega t$$

Se ha elegido un sentido del recorrido de \mathcal{L} tal que

$$\vec{\mathcal{S}} = \mathcal{S} (-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}) , \quad \mathcal{S} = a b$$

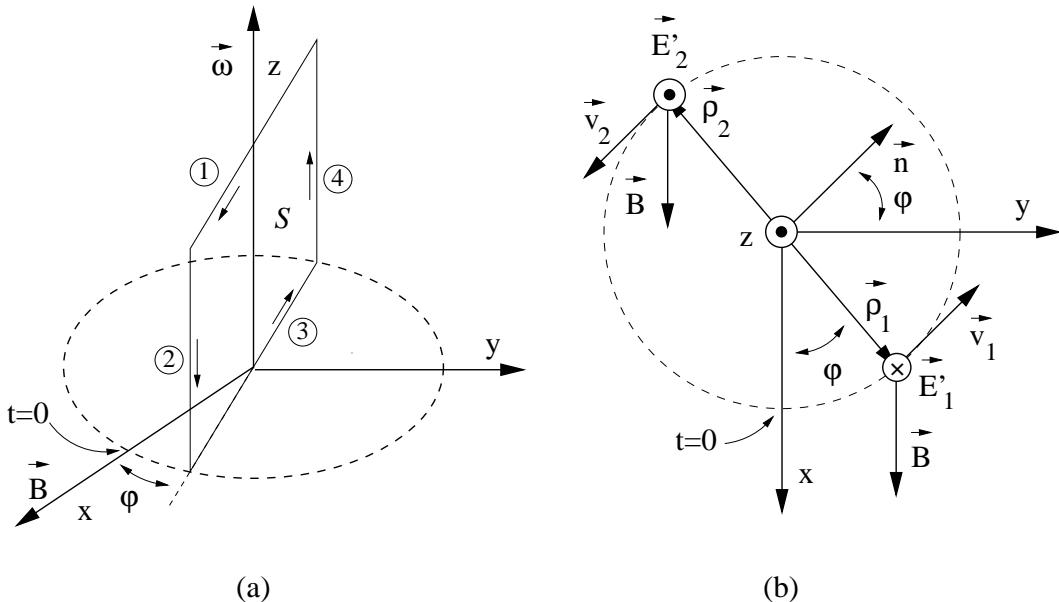


Figura 3.5:

a)

Calcularemos \mathcal{E} de acuerdo con la ley de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \Phi(\vec{B})(t)$$

donde

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = -\mathcal{S} B \sin \varphi$$

y

$$\mathcal{E} = \omega B \mathcal{S} \cos \omega t$$

b)

Ahora haremos uso de la definición

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}' \cdot d\vec{l}$$

La circulación debe realizarse sobre los tramos (1), (2), (3) y (4).

Dado que no se ha especificado la existencia de campo eléctrico en el sistema del laboratorio, tomaremos

$$\vec{E}' = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

siendo

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}$$

y $\vec{\rho}$ el vector de posición en coordenadas cilíndicas.

En los tramos (1) y (3), $\vec{E}' \cdot d\vec{l} = 0$ porque los vectores en cuestión son perpendiculares, como puede comprobarse gráficamente sobre la figura 3.5b

En los otros dos tramos $d\vec{l} = dz \hat{z}$

En el (2)

$$\vec{E}'_1 = \vec{v}_1 \wedge \vec{B} , \quad \vec{v}_1 = \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}_1 , \quad \vec{\rho}_1 = \frac{a}{2} (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y})$$

y

$$\vec{E}'_1 \cdot d\vec{l} = -\omega \frac{a}{2} B \cos \varphi dz$$

En el (4)

$$\vec{\rho}_2 = -\vec{\rho}_1 \Rightarrow \vec{v}_2 = -\vec{v}_1 \Rightarrow \vec{E}'_2 = -\vec{E}'_1$$

Por último

$$\mathcal{E} = \omega \frac{a}{2} B \cos \varphi \left(\underbrace{- \int_{z=b}^0 dz}_{(2)} + \underbrace{\int_{z=0}^b dz}_{(4)} \right)$$

- 3-4. Una espira rectangular tiene dimensiones $a \times b$ y es coplanaria con un hilo recto e indefinido, recorrido por una intensidad I , que se encuentra inicialmente a una distancia x_0 del lado de longitud a . A partir de $t = 0$, la espira se desplaza en el plano con una velocidad constante v , alejándose del hilo. Halle la fuerza electromotriz inducida por el hilo sobre la espira.
- 3-5. Supuesta una componente vertical del campo magnético terrestre de $10 \mu T$, halle la fuerza electromotriz inducida sobre una barra, de $1 m$ de largo, que se desplaza en el plano horizontal a $100 km/hora$.
- Mediante la derivación del flujo cortado por un camino cerrado.
 - Haciendo uso de la fuerza de Lorentz.
- 3-6. La rueda de Barlow es una rueda conductora que gira alrededor de su eje en presencia de un campo magnético constante, uniforme y tal que $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$.

- a) Si, mediante dos contactos deslizantes, tocamos en el centro y el borde de la rueda con un dispositivo para medir fuerzas electromotrices, un voltímetro, ¿cuál será la medida obtenida por el mismo?
- b) Discuta la posibilidad de que aparezca otro tipo de campo eléctrico. En caso positivo ¿cómo afectará al cálculo de la fuerza electromotriz?.

Solución:

a)

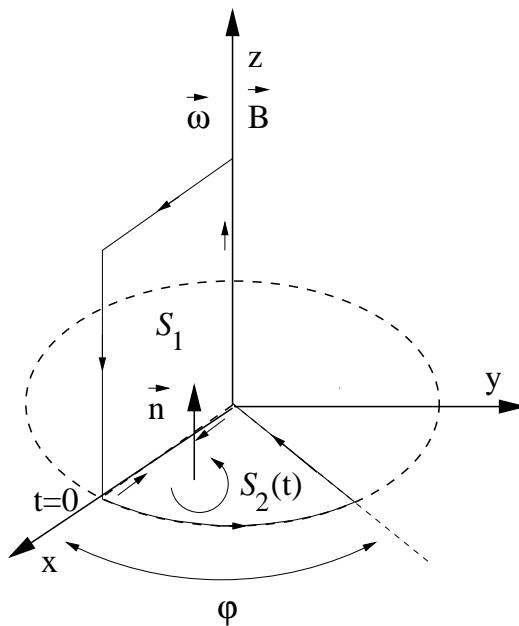


Figura 3.6:

El problema puede resolverse aplicando la ley de inducción de Faraday a un camino como el indicado en la figura 3.6 en tramo continuo. Sólo la superficie S_2 contribuye al flujo. Supuesto que el segmento móvil está en $t = 0$ en la posición indicada en la figura

$$S_2 = \frac{1}{2} a^2 \varphi = \frac{1}{2} a^2 \omega t \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2} a^2 \omega B t$$

y

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} a^2 \omega B$$

También puede resolverse teniendo en cuenta que las cargas que se mueven con la rueda sienten un campo no conservativo

$$\vec{E}' = \vec{v} \wedge \vec{B} = \omega B \rho \hat{\rho}$$

Para calcular esta fuerza electromotriz basta con integrar este campo, en el sentido marcado por la figura, en el tramo radial móvil

$$\mathcal{E} = \omega B \int_{r=a}^0 \rho d\rho$$

b)

La hipótesis de que $\vec{E} = \vec{0}$ no es correcta porque, en estado estacionario, las cargas de la rueda no se mueven, luego el campo total $\vec{E}' = 0$. Esto quiere decir que, dentro de la rueda existe un campo $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$ que contrarresta al debido a la fuerza de Lorentz.

El mecanismo por el que se crea este campo adicional es el siguiente. Si la rueda está en reposo, el conductor es neutro macroscópicamente en todos sus puntos y no crea campo en el sistema S del laboratorio. Cuando se mueve, la fuerza de Lorentz pone, a su vez, en movimiento radial a las cargas. Si las cargas móviles, como es el caso de los conductores, son electrones, éstos se acumularán en la zona central, dejando a la opuesta cargada positivamente. Este campo se opone al de Lorentz hasta equilibrarlo. Desde S se verá una distribución de carga neta estática que produce un campo eléctrico estático, tanto dentro como fuera de la rueda, y que, por ser estático, es conservativo y no contribuye a la fuerza electromotriz.

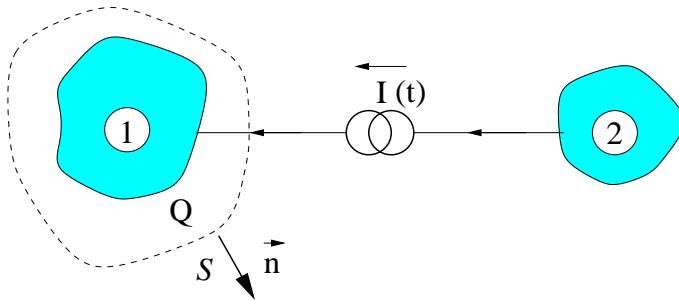


Figura 3.7:

3-7. En el circuito de la figura 3.7 se supone que la variación temporal de $I = I(t)$ es lo suficientemente lenta para que el problema pueda tratarse como aproximadamente estático (cuasi-estático). Demuestre que la intensidad de corriente de desplazamiento I_D que sale de S es igual a I . Discuta los casos en que los dos conductores

- a) Están solos en el universo.
- b) Están apantallados por un tercero.
- c) El segundo conductor apantalla al primero.
- d) Existen otros conductores en alguna parte

Solución:

Aplicando la conservación de la carga a la superficie \mathcal{S}

$$-I = \oint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho dv = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow I = \frac{dQ}{dt}$$

Por otra parte, integrando sobre \mathcal{S} la densidad de corriente de desplazamiento

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = I$$

porque $\int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$.

- 3-8. Demuestre que, si los potenciales \vec{A} y V no cumplen el contraste de Coulomb, siempre es posible encontrar otros \vec{A}' y V' que si lo cumplan.
- 3-9. En la teoría de la relatividad especial un punto del universo espacio-temporal puede ser descrito mediante el vector de posición tetradimensional

$$\vec{\vec{s}} \equiv (x, y, z, j c t)$$

donde j es la unidad imaginaria, c la velocidad de la luz y $j c t$ la coordenada temporal¹⁰.

Los potenciales electromagnéticos pueden englobarse en un potencial vector tetradimensional

$$\vec{\vec{A}} \equiv (A_x, A_y, A_z, j c V)$$

y la densidad de corriente, junto con la densidad de carga, en el vector

$$\vec{\vec{j}} \equiv (j_x, j_y, j_z, j c \rho)$$

Demuestre que:

- a) El campo electromagnético, en forma tensorial, se obtiene a partir del potencial mediante el rotacional tetradimensional

$$(F_{\alpha\beta}) \equiv \text{ROT}(\vec{\vec{A}}) , \quad F_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} , \quad x_\alpha, x_\beta = x, y, z, j c t$$

- b) Las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas de la forma (Se hace uso del convenio de índices repetidos)

$$\text{DIV}(F_{\alpha\beta}) = \mu_0 \vec{j} , \quad \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \mu_0 j_\beta$$

¹⁰En la bibliografía pueden encontrarse formulaciones distintas a la aquí propuesta.

Capítulo 4

Consecuencias de las Ecuaciones de Maxwell

Este capítulo lo dedicaremos al análisis de las consecuencias fundamentales de las ecuaciones del campo electromagnético. Comenzaremos ampliando el principio de conservación de la energía para incluir términos que, en el balance energético, representen a los propios campos. Asimismo, estudiaremos la propagación de ondas planas como manifestación más simple del transporte radiativo de energía y la emisión de radiación por una carga puntual lenta como ejemplo primario de emisión de radiación [Panofsky y Phillips, Reitz et al., Gómez].

4.1. Energía electromagnética. Vector de Poynting

Consideremos que en una determinada región del espacio coexisten cargas de distintos tipos, con densidades ρ_i y velocidades de arrastre \vec{v}_i y que sobre ellas actúa un campo electromagnético. Queremos realizar un balance energético entre las cargas y los campos.

Sobre la especie i actúa una fuerza por unidad de volumen

$$\frac{d\vec{F}_{ci}}{dv} = \rho_i(\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B})$$

de donde se deduce que el campo electromagnético realiza un trabajo sobre las cargas, por unidad de volumen y unidad de tiempo, igual a

$$\frac{d^2W_{ci}}{dvdt} = \rho_i \vec{v}_i \cdot \vec{E} = \vec{j}_i \cdot \vec{E}$$

Expresión en la que, como hemos visto anteriormente, no aparece ningún término asociado al campo magnético porque la fuerza magnética de Lorentz es perpendicular a la velocidad.

Sumando a todas las especies

$$\frac{d^2W_c}{dvdt} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Ésta es la potencia, positiva o negativa, que el campo electromagnético cede a las cargas encerradas en la unidad de volumen. Si es positiva, dichas cargas podrán emplearla de muy diversas formas, como puede ser almacenando energía cinética, transformándola en calor, etc. Si es negativa, como veremos, se traducirá en un aumento de la energía del propio campo.

Si queremos seguir disponiendo de un principio de conservación de la energía aplicable a las interacciones electromagnéticas, no habrá más remedio que equilibrar este término mecánico con otros de tipo electromagnético.

Teniendo en cuenta que

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \wedge \vec{B}) \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

Por otra parte

$$\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \wedge \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \wedge \vec{b} \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \wedge \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \wedge \vec{B}$$

La sustitución de esta expresión en la ecuación anterior y el uso de la ley de inducción

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

nos permite expresar el *teorema de Poynting* de la forma

$$\nabla \cdot \vec{P} + \frac{\partial \omega_{em}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (4.1)$$

En esta ecuación se han definido los términos

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (4.2)$$

que denominamos *vector de Poynting* y cuyas dimensiones son de energía por unidad de superficie y tiempo, y

$$\omega_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \omega_e + \omega_m \quad (4.3)$$

cuyas dimensiones corresponden a una densidad de energía y que denominaremos *densidad de energía electromagnética*.

La ecuación (4.1) sería por lo tanto una ecuación de continuidad, o de conservación, para la energía electromagnética.

Si comparamos esta ecuación con la de continuidad de la carga

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

vemos que ambas son formalmente idénticas, salvo que en la de la energía existe un término adicional. Si $\vec{j} \cdot \vec{E}$ es positivo, la energía electromagnética se transforma en energía mecánica a razón de $\vec{j} \cdot \vec{E}$ watos por unidad de volumen y tiempo. En caso contrario, la energía mecánica se transforma en electromagnética.

Siguiendo la analogía entre estas dos ecuaciones, ω_{em} representa a la densidad de energía electromagnética, como ρ representa a la densidad de carga, y $\vec{\mathcal{P}}$ a la densidad de flujo de potencia electromagnética en paralelismo con la densidad de flujo de carga \vec{j} . No obstante, la interpretación literal de $\vec{\mathcal{P}}$ como densidad de flujo local, es decir como

$$'\vec{\mathcal{P}} = \omega_{em} \vec{v}_{em}' , \quad (\vec{j} = \rho \vec{v})$$

donde \vec{v}_{em} sería una "velocidad de arrastre de la energía" no es rigurosamente válida.

Estrictamente, la extensión del principio de conservación de la energía al caso electromagnético implica el equilibrio de tres términos cuya suma es nula $\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} + \frac{\partial \omega_{em}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$. Considerando un pequeño entorno alrededor de un punto P , en el instante t , el primero lo asociaremos a la energía electromagnética saliente, el segundo al aumento de la energía almacenada y el tercero a la energía cedida a las cargas contenidas en dicho entorno. Si cambiamos el signo de estos términos, el primero representará a la energía entrante, el segundo a la disminución de energía almacenada y el tercero a la conversión de energía mecánica en electromagnética.

En principio, las expresiones 4.2 y 4.3 no son la única opción para definir $\vec{\mathcal{P}}$ y ω_{em} puesto que, si añadimos un vector solenoidal al primero y una función independiente del tiempo al segundo, la ecuación 4.1 sigue siendo válida. Con la opción elegida, $\omega_{em} = 0$ en ausencia de campos y $\vec{\mathcal{P}} = 0$ cuando alguno de ellos se anula.

Para fijar un poco más el significado y la razonabilidad de esta interpretación, expresaremos 4.1 en forma integral. Sea un volumen fijo \mathcal{V} e integremos sobre él.

$$\oint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \omega_{em} dv = - \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} dv \quad (4.4)$$

donde, haciendo uso del teorema de la divergencia, se ha pasado a integral superficial el término asociado al vector de Poynting. Estos términos tienen ahora dimensión de potencia.

De otra forma

$$\Phi(\vec{\mathcal{P}}) + \frac{dW_{em}}{dt} = - \frac{dW_c}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{\mathcal{P}}) = \oint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{s} \\ W_{em} = \int_{\mathcal{V}} \omega_{em} dv \\ \frac{dW_c}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} dv \end{array} \right.$$

Luego, el trabajo que las cargas encerradas en \mathcal{V} ejercen sobre los campos ¹ puede invertirse, en parte, en el aumento de la energía W_{em} almacenada en \mathcal{V} y, en parte, en el aumento de la energía de los campos externos ².

¹El trabajo que la fuerza electromagnética ejerce sobre las cargas, por unidad de volumen y de tiempo, es $\vec{j} \cdot \vec{E}$. $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ puede interpretarse legítimamente, en virtud del principio de acción y reacción, como trabajo realizado por las cargas sobre el campo.

²El flujo del vector de Poynting es localmente positivo cuando \mathcal{P} 'sale' de \mathcal{V} .

Consideremos los siguientes casos particulares:

1 Sistema cerrado de campos y cargas.

En principio, los campos asociados a un sistema de cargas se extenderán hasta el infinito. Físicamente es posible imponer a dichos campos el mismo tipo de condiciones impuestas al enunciar el teorema de Helmholtz: suponemos que las fuentes están definidas en un volumen finito \mathcal{V}_0 , a distancia finita del origen de coordenadas, y que los campos son nulos en el infinito o bien decrecen a grandes distancias más rápidamente que r^{-1} .

Si integramos sobre una esfera de radio $r \rightarrow \infty$,

$$\Phi(\vec{\mathcal{P}}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{s} \sim \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} = 0$$

por lo que

$$-\frac{dW_c}{dt} = - \int_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} \vec{j} \cdot \vec{E} dv = - \int_{\mathcal{V}_0} \vec{j} \cdot \vec{E} dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} \omega_{em} dv = \frac{dW_{em}}{dt}$$

Es conveniente resaltar que, aunque la cesión de energía parece tener lugar en \mathcal{V}_0 , de hecho, dudaríamos poco en calcular cuanta se lleva cada carga en particular, el cómputo de la energía cedida puede extenderse a $\mathcal{V} \rightarrow \infty$, es decir, a todos aquellos puntos en los que $\frac{\partial \omega_{em}}{\partial t} \neq 0$: En este caso lo que se conserva es la suma de las dos energías

$$\frac{d}{dt} (W_c + W_{em}) = 0 \Rightarrow W_c + W_{em} = cte$$

por lo que es lo mismo calcular una u otra. No conviene olvidar que las cargas están indisolublemente asociadas a un campo del que son singularidades.

2 Volumen \mathcal{V} finito y sin carga.

Bajo estas condiciones

$$-\Phi(\vec{\mathcal{P}}) = \frac{dW_{em}}{dt}$$

el flujo hacia dentro del vector de Poynting induce un aumento de la energía almacenada.

3 Volumen \mathcal{V} en el que sólo hay corrientes estacionarias.

Los campos son estáticos

$$\frac{dW_{em}}{dt} = 0 \Rightarrow \Phi(\vec{\mathcal{P}}) = -\frac{dW_c}{dt}$$

Luego, en este caso, la energía mecánica que se convierte en electromagnética dentro de \mathcal{V} no se emplea en aumentar la energía electromagnética almacenada en el mismo sino que se trasvaza al exterior a través del flujo del vector de Poynting.

Es de notar que $\Phi(\vec{\mathcal{P}})$ es un flujo a través de una superficie cerrada y como tal interviene en el balance energético. Esto no nos autoriza a interpretar de forma general al vector $\vec{\mathcal{P}}$ como un vector densidad de flujo, es decir, como el flujo de energía por unidad de superficie y de tiempo a través de un elemento de superficie perpendicular al movimiento de la energía. Para los campos radiantes, $\vec{\mathcal{P}}$ sí jugará el papel de vector densidad de corriente de energía, en concordancia con la representación cuantificada de la energía electromagnética en forma de fotones, que son entidades localizadas. Como veremos más adelante, en el caso que nos ocupa, el estático, no existe propagación por lo que la interpretación de \mathcal{P} como un vector que describe el flujo local de energía no es pertinente.

Conservación de la cantidad de movimiento:

Podríamos hacer el mismo tipo de balance para extender el principio de conservación de la cantidad de movimiento a los campos electromagnéticos, pero, por tratarse de una magnitud vectorial, el desarrollo es más prolijo y se dejará para otra ocasión.³

Nos contentaremos con apuntar que es posible el uso de un principio de conservación de la cantidad de movimiento si asignamos al campo una *densidad de cantidad de movimiento*

$$\vec{g} \equiv \frac{d\vec{G}}{dv} = \frac{1}{c^2} \vec{\mathcal{P}}$$

donde \vec{G} es la cantidad de movimiento contenida en \mathcal{V} .

La consiguiente ecuación de continuidad es de tipo vectorial por lo que la contabilidad del momento trasvasado a través de la superficie \mathcal{S} hay que realizarla por medio de un tensor, el de esfuerzos de Maxwell, y no de un vector como $\vec{\mathcal{P}}$. No abordaremos aquí el problema en su forma general, pero, en el párrafo 4.2.1 lo trataremos en relación con las ondas planas.

4.1.1. Energía de sistemas de carga y corriente estacionaria

Dada la importancia de los campos electrostático y magnetostático, investigaremos la posibilidad de asociar directamente la energía electromagnética de éstos con las cargas y las corrientes que los producen.

Campos electrostáticos:

En el caso de campos electrostáticos

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} E^2 dv = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} \vec{E} \cdot \nabla V dv$$

y, teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ y $\nabla \cdot (f\vec{a}) = f\nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla f$

$$\vec{E} \cdot \nabla V = \nabla \cdot (V\vec{E}) - V\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (V\vec{E}) - \frac{\rho V}{\varepsilon_0}$$

³Véase [García Olmedo].

por lo que, substituyendo en la integral y haciendo uso del teorema de la divergencia para el primer término

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V \rightarrow \infty} \rho V dv - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \underbrace{\oint_{S \rightarrow \infty} V \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{=0}$$

La segunda integral, por razones análogas a las aducidas en ocasiones anteriores, se anula en el límite $r \rightarrow \infty$. La primera se extiende solamente al volumen \mathcal{V}_0 donde la densidad de carga es distinta de cero.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_0} \rho V dv = \int_{V \rightarrow \infty} \omega_e dv \quad (4.5)$$

De esta forma recobramos la expresión 2.13 de la energía potencial.

Campos magnetostáticos:

Algo parecido podemos hacer con respecto a la energía magnética.

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{V \rightarrow \infty} B^2 dv = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V \rightarrow \infty} \vec{B} \cdot \nabla \wedge \vec{A} dv \Rightarrow \\ W_m &= \int_{V \rightarrow \infty} \omega_m dv = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_0} \vec{j} \cdot \vec{A} dv \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde, siguiendo un procedimiento análogo al anterior, hemos tenido en cuenta que para corrientes estacionarias $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, hemos hecho uso de la expresión

$$\nabla \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \wedge \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{B} \cdot \nabla \wedge \vec{A} = \nabla(\vec{A} \wedge \vec{B}) + \mu_0 \vec{A} \cdot \vec{j}$$

y, tras aplicar el teorema de la divergencia, hemos anulado, en el límite $S \rightarrow \infty$, la integral de superficie. \mathcal{V}_0 es en este caso el volumen en el cual la densidad de corriente es distinta de cero.

Un caso de gran interés es el de las espiras. Como en ocasiones anteriores, se sustituye $\vec{j} dv$ por $Id\vec{l}$. Luego

$$W_m = \frac{1}{2} I \oint_{L_0} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} I \Phi \quad (4.7)$$

Para escribir la segunda igualdad hemos hecho uso de 2.25, según la cual la circulación del potencial vector a lo largo de una espira es igual al flujo cortado por la misma.

Vemos, pues, que es posible calcular la energía electromagnética asociada a los campos de dos formas alternativas: en la primera, integrando una densidad de energía sobre todo el volumen a donde se extienden dichos campos y, en la segunda, integrando sobre el volumen de las fuentes.

4.2. Ecuaciones de onda para los campos y los potenciales

Veremos en esta sección que los campos y los potenciales cumplen ecuaciones de onda. Parte de las soluciones de estas ecuaciones tienen carácter de onda viajera, es decir, implican la propagación de los campos y las magnitudes asociadas a ellos, como la energía y la cantidad de movimiento, con una velocidad finita, la velocidad de la luz $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$, que es una constante universal⁴. Este hecho, no concorde con el principio de relatividad de Galileo, será el punto de partida de la teoría de la Relatividad de Einstein.

En el caso de los campos, nos limitaremos a demostrar que, incluso en ausencia de fuentes primarias ρ y \vec{j} , es posible la propagación ondas cuyos campos son automan-tidos. En el de los potenciales, se tendrá en cuenta la existencia de cargas y corrientes y se comprobará que los potenciales lorenzianos cumplen ecuaciones análogas a las de los campos.

Ecuaciones de onda para los campos :

En ausencia de cargas y corrientes, las ecuaciones de Maxwell toman la forma simétrica

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.8)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.10)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (4.11)$$

y, como únicas fuentes del campo, aparecen las $\frac{\partial}{\partial t}$ de los propios campos.

Hallando el rotacional a 4.9

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{B}$$

y teniendo en cuenta 4.11 y 4.8 y que $\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{a} = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.12)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.13)$$

Cada componente cartesiana de los campos Φ cumple la *ecuación de D'Alembert*⁵.

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

⁴En la actualidad, el metro se define en función del segundo y de la velocidad de la luz. El segundo se relaciona a una transición hiperfina del Cesio 133 y a la velocidad de la luz se le asigna el valor exacto $c \equiv 2,99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

⁵En el caso de coordenadas curvilíneas, ésto no es cierto.

Las ecuaciones de onda 4.12 y 4.13 se deducen de las ecuaciones de Maxwell por un proceso de diferenciación y eliminación de variables en el que se pierde información sobre los campos, en particular, sobre la relación mutua entre ellos. Por esta razón, no todas sus soluciones son válidas y será necesario exigirles que sean compatibles con las ecuaciones de Maxwell.

Ecuaciones de onda para los potenciales :

Procediendo de forma análoga para los potenciales pero haciendo uso de las ecuaciones 3.18 a 3.21, se tiene que:

- Partiendo de $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ y expresando a los campos en función de los potenciales

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \Rightarrow$$

o, de otra forma,

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \vec{j} \quad (4.14)$$

- Partiendo de $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ y expresando al campo eléctrico en función de los potenciales

$$\nabla^2 V = - \frac{\partial \nabla \cdot \vec{A}}{\partial t} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.15)$$

Para potenciales culombianos $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Haciendo uso del mismo en 4.14 y 4.15 se obtienen las ecuaciones de onda

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.16)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \vec{j} \quad (4.17)$$

El potencial eléctrico escalar responde a la misma ecuación, la de Poisson, que el electrostático; es un potencial de 'tipo electrostático' aunque dependiente del tiempo. La propagación de la onda viene descrita exclusivamente por el potencial magnético vector, cuya ecuación de onda es no-homogénea. Las ecuaciones de onda se caracterizan por incluir, al menos, derivadas segundas espaciales y temporales.

El uso del contraste de Lorenz $\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ nos lleva a las ecuaciones de onda de los potenciales lorenzianos

$$\nabla^2 V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.18)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \mu_0 \vec{j} \quad (4.19)$$

Luego, como los campos, los potenciales lorenzianos responden ecuaciones del tipo

$$\square \Phi = f , \quad \square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (4.20)$$

donde \square es el operador de D'Alembert o *dalambertiano*.

El potencial eléctrico escalar no tiene por que cumplir una ecuación de onda pero es evidente que, junto con el potencial vector, debe dar cuenta del carácter propagativo de los campos.

4.2.1. Propagación de ondas electromagnéticas planas en el vacío

En la sección anterior vimos cómo las componentes de los campos cumplían en el vacío la ecuación de onda de D'Alembert 4.20. De entre las posibles soluciones de esta ecuación buscaremos las que tengan carácter de onda plana.

Entendemos, en un principio, por *onda plana*⁶, una solución de la ecuación de onda en la que Φ sólo depende de una coordenada espacial ξ que, como se muestra en la figura 4.1, es la distancia de un plano, que llamaremos frente de onda, a otro, paralelo al anterior, que tomamos como origen. En un instante determinado, Φ es constante en todos los puntos de un determinado frente de onda.

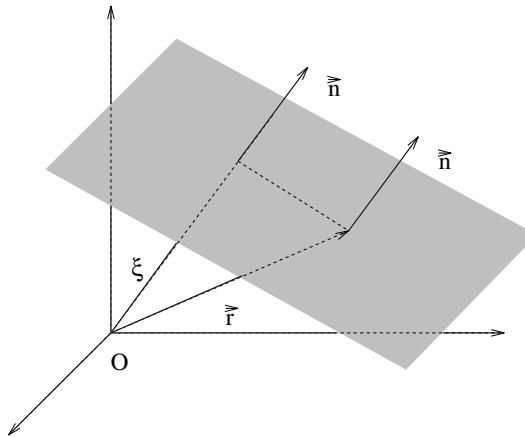


Figura 4.1:

Como puede verse en la figura

$$\xi = \vec{r} \cdot \vec{n} = n_x x + n_y y + n_z z \quad (4.21)$$

donde

$$\vec{n} = n_x \hat{x} + n_y \hat{y} + n_z \hat{z} , \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

es el vector normal al frente de onda o *vector unitario de propagación*.

⁶Estrictamente, la calificación debería concretarse a *ondas planas homogéneas* para distingirlas de las planas no homogéneas que se definen en otros contextos [García Olmedo]. Más adelante acotaremos esta definición eliminando de la misma componentes independientes de las variables espacial y temporal.

Para no introducir nueva notación, sin pérdida de generalidad, rotemos los ejes coordenados de forma que

$$\vec{n} \uparrow\uparrow \hat{x}, \quad \xi = x \Rightarrow \nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\nabla = \vec{n} \frac{\partial}{\partial \xi}) \quad (4.22)$$

La ecuación de onda quedará reducida a

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.23)$$

la cual admite soluciones del tipo $f(x - ct)$ y $g(x + ct)$, donde f y g son funciones arbitrarias y derivables. Definiendo $u \equiv x - ct$ y $w \equiv x + ct$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 f}{du^2} \quad (4.24)$$

Substituyendo en 4.23 confirmamos que $f(u)$ es solución y por el mismo procedimiento comprobamos que $g(w)$ también lo es.

Dado que la ecuación es de segundo orden y que las funciones $f(u)$ y $g(w)$ son linealmente independientes, la solución general es del tipo

$$\Phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (4.25)$$

Diremos que la solución anterior resulta de la superposición, o interferencia de dos *modos* que se propagan en sentidos opuestos entre sí.

En la figura 4.2 vemos cómo la función f se propaga sin deformarse en el sentido positivo del eje x , mientras que g lo hace en el negativo, con una *velocidad de fase*

$$v_f = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{u=cte} = c \quad (4.26)$$

Efectivamente, para

$$u = cte \Rightarrow du = dx - cdt = 0$$

La velocidad de fase es, por lo tanto, la velocidad con que se desplaza un punto de fase constante $f(u_0)$.

Relación de estructura:

Ahora bien, no todas las soluciones de la ecuación de onda son físicamente válidas puesto que hemos de comprobar si son compatibles con las ecuaciones de Maxwell. Limitándonos al modo que viaja en la dirección $\vec{n} = +\hat{x}$

$$\vec{E} = \vec{E}(u), \quad \vec{B} = \vec{B}(u)$$

En particular,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \hat{x} \cdot \frac{d\vec{E}}{du} = 0 \quad (4.27)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \hat{x} \wedge \frac{d\vec{E}}{du} = c \frac{d\vec{B}}{du} \quad (4.28)$$

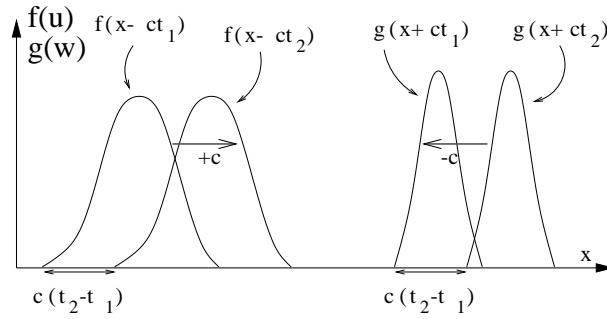


Figura 4.2:

De la ecuación 4.27 se deduce que

$$\frac{d E_x}{d u} = 0 \Rightarrow E_x = cte$$

E_x no puede depender ni de x ni de t . Es, pués, una constante trivial que de ahora en adelante consideraremos nula. De hecho, estas posibles componentes no contribuyen a la propagación y transporte de energía y consideraremos que no están incluidas en el concepto de onda.

Integrando la ecuación 4.28, anulando la constante de integración por las mismas razones que nos han llevado a eliminar la componente longitudinal E_x , y teniendo en cuenta 4.27, concluimos que los campos $\vec{E}(u)$ y $\vec{B}(u)$ están ligados mediante la *relación de estructura*, la cual, para cada uno de los dos modos posibles, se expresa de la forma

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.29)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E} \quad (4.30)$$

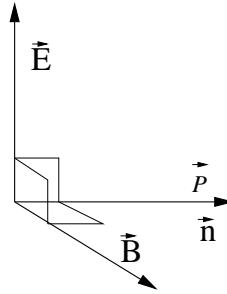


Figura 4.3:

Dado que \vec{E} es perpendicular a \vec{n} , véase la figura 4.3, \vec{E} y \vec{B} forman, con la dirección de propagación \vec{n} , un triángulo rectángulo a derechas y la relación entre las amplitudes de los campos es

$$E = c B \quad (4.31)$$

Cada uno de estos modos es tránsversal, es decir, ambos campos son paralelos a los frentes de onda y perpendiculares a la dirección de propagación. Además, son perpendiculares entre sí y están en fase⁷.

Si \vec{E} tiene una dirección fija en todos los puntos, la onda se dice que está *polarizada linealmente* en dicha dirección.

Transporte de energía:

La onda plana, por extenderse hasta el infinito y transportar, como veremos a continuación, una potencia infinita, es una idealización y, por tanto, no es físicamente realizable. Sin embargo, mediante la superposición de ondas planas pueden construirse paquetes de ondas localizados espacialmente que transportan una cantidad finita de energía.

El balance energético, en un volumen \mathcal{V} , para una onda progresiva en el vacío, en ausencia de cargas y corrientes, es

$$\Phi(\vec{\mathcal{P}}) = -\frac{dW_{em}}{dt}$$

En nuestro caso, las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales, como puede comprobarse haciendo uso de la relación 4.31.

$$\omega_{em} = \omega_e + \omega_m = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \quad (4.32)$$

$$\omega_e = \omega_m$$

Multiplicando vectorialmente la expresión 4.29 por $\frac{\vec{E}}{\mu_0}$ y desarrollando el triple producto, se tiene que

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \vec{n} \quad (4.33)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0$.

En consecuencia, el vector de Poynting de una onda plana progresiva admite las expresiones

$$\vec{\mathcal{P}} = c \varepsilon_0 E^2 \vec{n} = c \frac{B^2}{\mu_0} \vec{n} = \omega_{em} \vec{c}, \quad \vec{c} = c \vec{n} \quad (4.34)$$

Es decir, el vector de Poynting, en un instante dado, es constante dentro de cada frente de onda, ya que \vec{E} y \vec{B} también lo son, y su dirección y sentido coinciden con los de propagación. Aparece además, formalmente, como un vector densidad de flujo de energía, donde \vec{c} representa la velocidad de arrastre, o transporte, de dicha energía. Es fácil comprobar, integrando sobre un frente de onda, que la energía transportada por una onda plana es infinita.

Fuerza sobre cargas. Transmisión de cantidad de movimiento:

Aunque no vamos a tratar en su forma general el problema de la conservación de la cantidad de movimiento, vamos a comprobar que una onda plana es capaz de comunicar, a una carga, cantidad de movimiento en la dirección de propagación.

⁷ \vec{E} y $c B$ están definidos, para cada modo, por la misma función espacio-temporal.

La fuerza que una onda plana ejerce sobre una carga q es

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q[\vec{E} + \vec{\beta} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{E})] , \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

por lo que la fuerza magnética es normalmente, para cargas con velocidades no relativistas, muy inferior a la fuerza eléctrica

$$\frac{|\vec{F}_m|}{|\vec{F}_e|} \sim \frac{vB}{E} = \beta \ll 1$$

Este pequeño término de fuerza magnética es sin embargo el que posibilita el intercambio de momento, en la dirección de propagación, entre la onda y la carga.

Desarrollando el triple producto

$$\vec{F} = q(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})\vec{E} + q(\vec{\beta} \cdot \vec{E})\vec{n}$$

con lo que la componente longitudinal de la fuerza, F_n , provocará un incremento de la cantidad de movimiento en la dirección de propagación

$$F_n = q(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) = \frac{dp_n}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dW}{dt}$$

donde $\frac{dW}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E}$ es la potencia que el campo eléctrico suministra a la carga. Luego, teniendo en cuenta que $F_n dt = dp_n$, el momento transferido por el campo a la carga, en la dirección de propagación y en un intervalo de tiempo arbitrario, es

$$\Delta p_n = \frac{\Delta W}{c}$$

Lo que nos confirma que la onda, además de transportar energía, transporta cantidad de movimiento.

4.2.1.1. Ondas planas monocromáticas

Un caso particular de onda es la monocromática, en el que las componentes son funciones armónicas de t y de x . Las ondas monocromáticas planas que viajan en el sentido positivo del eje x pueden escribirse de las formas

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 \cos \{k(ct - x) + \varphi\} = \Phi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = \\ &= \Phi_0 \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde k es el *número de onda*, $\omega = kc$ la *frecuencia angular*, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ el periodo y $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ la longitud de onda. La frecuencia es $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ y φ es un desfase angular.
Como puede verse en la figura 4.4

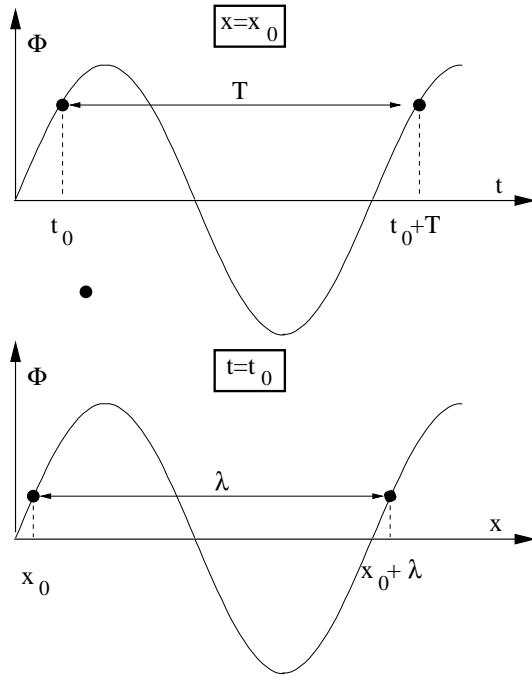


Figura 4.4:

$$\Phi(t_0, x_0) = \Phi(t_0 + T, x_0) = \Phi(t_0, x_0 + \lambda)$$

Estas funciones son solución de la ecuación 4.23 porque $\Phi = f(u)$.

Por la misma razón, también es solución de dicha ecuación la función compleja, (fasorial)⁸

$$\Phi = \Phi_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (4.36)$$

interpretando la amplitud como compleja

$$\Phi_0 = |\Phi_0| e^{j\varphi}$$

Obsérvese que la función real Φ es la parte real de la compleja⁹

$$\Phi = \operatorname{Re}(\Phi) \quad (4.37)$$

4.3. Potenciales retardados

Consideremos, como se muestra en la figura 4.5, el problema de determinar cual es el potencial creado en un punto P por una carga elemental $\Delta q(t)$ situada en \vec{r}'_0 y encerrada en un pequeño elemento de volumen $\Delta v'$.

⁸Según la identidad de Euler $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$, donde $j = \sqrt{-1}$.

⁹Se empleará la misma notación para ambas soluciones.

Haremos uso de potenciales que cumplan el contraste de Lorenz y, en primer lugar, hallaremos una solución general de la ecuación de onda con la simetría propia del problema. A continuación buscaremos las soluciones particulares compatibles con la existencia de $\Delta q(t)$ en \vec{r}'_0 y con el principio de causalidad. Simplificaremos esta segunda etapa limitándonos al caso de cargas no relativistas que se mueven en el entorno del origen de coordenadas ¹⁰.

Para puntos, como el P , que no coinciden con la posición de la carga ($R \neq 0$)

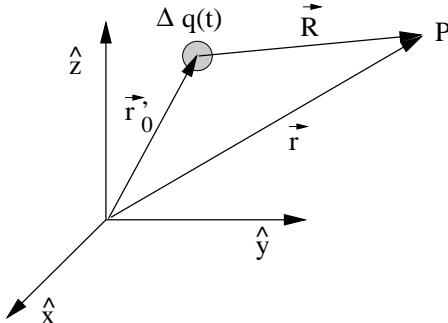


Figura 4.5:

$$\nabla_R^2 V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

donde ∇_R opera sobre las componentes de $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$.

Dado que el problema es simétrico alrededor de la posición de $\Delta q(t)$, existirán soluciones del mismo con dicha simetría

$$V = V(R) \Rightarrow \text{para } R \neq 0, \quad \nabla_R^2 V = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R V)$$

por lo que, definiendo una nueva función $\Phi = RV$,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

cuya solución general ya se ha encontrado en la sección anterior y puede escribirse de la forma

$$\Phi = f_R \left(t - \frac{R}{c} \right) + f_A \left(t + \frac{R}{c} \right)$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{R} f_R \left(t - \frac{R}{c} \right) + \frac{1}{R} f_A \left(t + \frac{R}{c} \right) = V_R(\vec{r}, t) + V_A(\vec{r}, t)$$

V_R recibe el nombre de *potencial retardado* y V_A el de *potencial adelantado*. Si nos quedamos con el término retardado

$$V_R = \frac{1}{R} f_R \left(t - \tau(R) \right), \quad \tau = \frac{R}{c}$$

¹⁰Véase [García Olmedo] para un tratamiento más amplio.

En particular, acercándonos al punto fuente $R \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$

$$f_R(t - \tau) \simeq f(t) + \dot{f}\tau, \quad \lim_{R \rightarrow 0} f_R(t - \tau) = f_R(t)$$

Es decir, la solución para puntos cercanos a la carga es independiente del retraso. Por otra parte, sabemos que la solución correspondiente a cargas estáticas, es

$$V = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

siendo el caso estático una idealización de otro real en el que dichas cargas varían muy lentamente con el tiempo. En este último caso, admitiremos que

$$V(\vec{r}, t) \simeq \frac{\Delta q(t)}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Obviamente, debemos considerar a este potencial como un caso particular del retardado cuando la variación es muy lenta y el retraso despreciable. Teniendo en cuenta que $t = (t - \tau)_{\tau=0}$, la solución general buscada debe tener la forma

$$V_R(\vec{r}, t) = \frac{\Delta q(t - \tau)}{4\pi\epsilon_0 R}$$

El potencial en (\vec{r}, t) es el que crean las cargas que había en \vec{r}'_0 un tiempo $\tau = \frac{R}{c}$ anterior a t . Es decir, el tiempo que tarda la luz en llegar desde el elemento de carga hasta P .

De la misma forma obtendríamos un potencial adelantado V_A relacionado con las cargas que existirán en \vec{r}' en un instante del futuro, τ posterior a t . Aunque el tema merece una discusión más precisa, diremos, en general, que la aceptación del principio de causalidad nos permite prescindir de los potenciales adelantados¹¹.

Para una distribución de carga continua, haciendo uso de la notación $\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) \equiv [\rho(\vec{r}')]$, los potenciales retardados son

$$V_R(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\rho]}{R} dv' \quad (4.38)$$

$$\vec{A}_R(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{[\vec{j}]}{R} dv' \quad (4.39)$$

donde el potencial vector se obtendría de una forma similar a la utilizada para el escalar.

4.4. Relación de las ondas electromagnéticas con sus fuentes. Emisión de radiación

Queremos, por último, poner de manifiesto el proceso básico por el cual las cargas en movimiento pueden dar lugar al fenómeno de radiación neta de energía. Por ahora nos contentaremos con un análisis simplificado del problema.¹²

¹¹Véase el tratamiento que se le da en [García Olmedo] a este problema.

¹²Véase [García Olmedo].

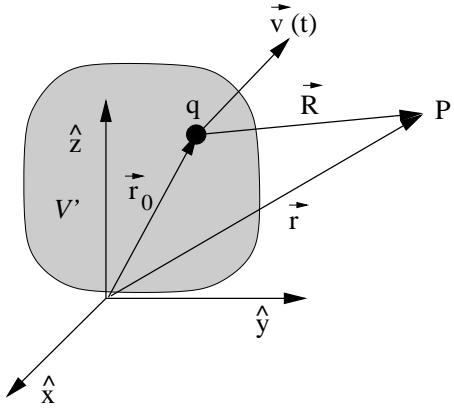


Figura 4.6:

Consideremos a una carga puntual q , figura 4.6, que se mueve en una con velocidad $\vec{v}(t)$. Esta carga en movimiento equivale a una densidad de corriente

$$\vec{j}(\vec{r}', t) = q \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0(t)) \vec{v}(t)$$

de forma que el potencial vector retardado producido en \vec{r} será

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dv' = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{v}(t - \frac{R}{c})}{R} \delta\left[\vec{r}' - \vec{r}_0\left(t - \frac{R}{c}\right)\right] dv'$$

Esta integral no es simple porque \vec{r}_0 es función de $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, donde las componentes de \vec{r}' son las variables de integración, y no es posible la aplicación directa del teorema integral de Dirac.¹³

Simplificaremos el problema suponiendo que la partícula se mueve lentamente ($\beta \equiv \frac{v}{c} \ll 1$) en la vecindad del origen y que P es un punto lejano ($R, r \gg r_0$). Luego, bajo estas condiciones

$$R \simeq r , \quad \tau \simeq \frac{r}{c} \equiv \tau_0$$

donde τ_0 es el retardo correspondiente al origen de coordenadas.

En consecuencia

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v}(t - \tau_0)}{r} \underbrace{\int_{V'} \delta\left[\vec{r}' - \vec{r}_0(t - \tau_0)\right] dv'}_{=1}$$

donde la integral es igual a la unidad porque \vec{r}_0 está contenido en V' .

En definitiva

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{1}{r} \vec{v}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (4.40)$$

¹³Véase la expresión N.73 del formulario.

A partir de aquí podemos deducir el campo magnético de radiación. Escribiendo el tiempo retardado correspondiente al origen como $t_{r0} \equiv t - \tau_0$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \nabla \wedge \vec{v}(t_{r0}) + \underbrace{\nabla \left(\frac{1}{r} \right)}_{\rightarrow 0} \wedge \vec{v}(t_{r0}) \right\}$$

Desechamos el término en que aparece $\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$, porque al ser $\sim r^{-2}$ será despreciable frente al primero para $r \rightarrow \infty$. Además, como veremos, el fenómeno de radiación está asociado a campos con dependencia radial r^{-1} .

De acuerdo con esto, llamaremos campo magnético de radiación a

$$\vec{B}_R = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{1}{r} \nabla \wedge \vec{v}(t_{r0})$$

Para calcular el rotacional haremos uso de la identidad

$$\nabla \wedge \vec{a}(u) = \nabla u \wedge \frac{d\vec{a}}{du} \Rightarrow \nabla \wedge \vec{v}(t_{r0}) = \frac{1}{c} \frac{d\vec{v}(t_{r0})}{dt_{r0}} \wedge \hat{r}$$

$$\vec{B}_R(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi c} \frac{1}{r} \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \wedge \hat{r} = \frac{\mu_0 q}{4\pi c} \frac{1}{r} a \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \hat{\varphi} \quad (4.41)$$

donde $\vec{a}(t_{r0}) = \frac{d\vec{v}(t_{r0})}{dt_{r0}}$ es la aceleración de la partícula, evaluada en un instante retardado $t_{r0} = t - \frac{r}{c}$ y se ha supuesto que la partícula se acelera en la dirección z . Vemos, pues, que el fenómeno radiativo aparece asociado a la aceleración de las cargas.

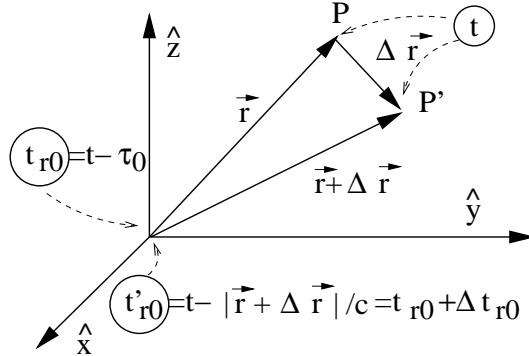


Figura 4.7:

Es interesante notar que la aplicación del rotacional al potencial vector, es decir, la diferenciación espacial del mismo en el punto de campo, se traduce en una diferenciación temporal en el punto de fuentes, como se ilustra en la figura 4.7.

La diferenciación espacial en el punto de campo P , implica comparar el potencial en ese punto, en un instante t , con el potencial existente en un punto próximo P' en ese mismo instante. La comparación de $\vec{A}(\vec{r}, t)$ y $\vec{A}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t)$ implica la comparación en el punto de origen de $\vec{v}(t_{r0})$ y $\vec{v}(t_{r0} + \Delta t_{r0})$.

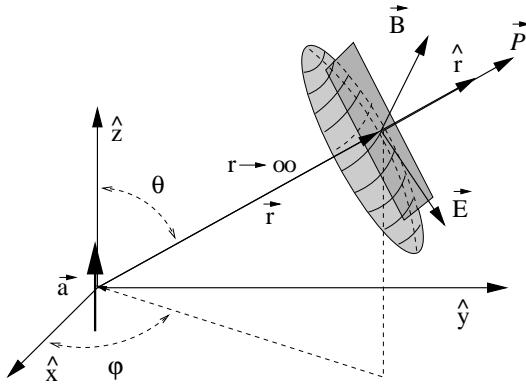


Figura 4.8:

Aunque de forma más laboriosa, podríamos calcular \vec{E}_R , a partir de los potenciales escalar y vector, despreciando los términos cuya dependencia radial sea superior a r^{-1} . Sin embargo, puede suponerse que los campos de radiación cumplen, aproximadamente, la misma relación de estructura que las ondas planas, la cual, despejando \vec{E} , toma la forma

$$\vec{E} = c \vec{B} \wedge \hat{n}$$

por lo que

$$\vec{E}_R(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{1}{r} \left[\vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \wedge \hat{r} \right] \wedge \hat{r} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{1}{r} a \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \hat{\theta} \quad (4.42)$$

Esta suposición, que puede ser comprobada haciendo el cálculo apuntado, es además razonable puesto que, para $r \rightarrow \infty$, un observador podrá asimilar, en el entorno de \vec{r} , a la superficie esférica del frente de onda con su plano tangente y verá a \vec{B}_R como un campo de onda plana (figura 4.8).

El vector de Poynting será, como en el caso de las ondas planas

$$\vec{P} = c \frac{B^2}{\mu_0} \hat{r} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{1}{r^2} a^2 \sin^2 \theta \hat{r} , \quad \vec{P} \uparrow \uparrow \vec{r} \quad (4.43)$$

El vector Poynting es el flujo de potencia a través de la unidad de superficie. Puesto que \vec{P} es paralelo y tiene el mismo sentido que \hat{r} , representa en todo caso un flujo neto de energía que abandona a la carga que radia. La potencia radiada es pues proporcional al cuadrado de la aceleración y depende marcadamente de θ .

Se llama *potencia de radiación* a la potencia total, radiada por la partícula, que en un instante t atraviesa una superficie esférica de radio r centrada en la posición retardada de la partícula, es decir, en $t - \tau$.

$$P(r, t) = \int_{S_r} \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{P} \cdot \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$$

o, con más detalle

$$P(r, t) = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left(a \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 \quad (4.44)$$

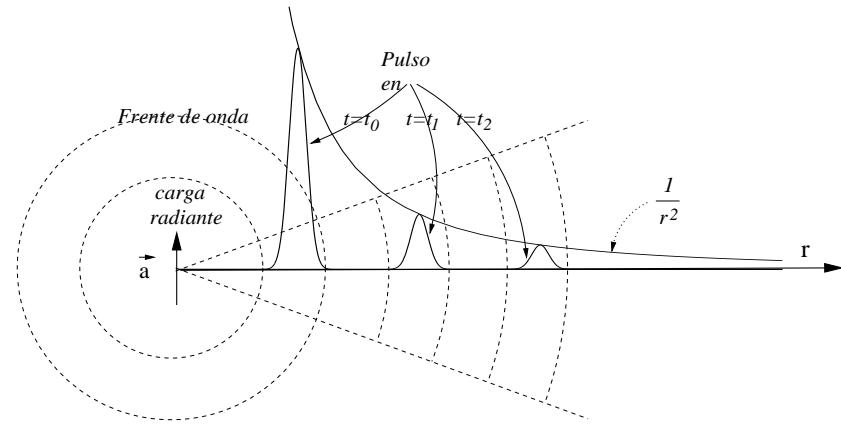


Figura 4.9:

Ésta es la *fórmula de Larmor* para la potencia radiada por una partícula cargada no relativista. Nos dice que la potencia que, en el instante t , atraviesa una superficie esférica de radio r , depende exclusivamente del valor de la aceleración en el instante retardado $\tau = t - t_0$. Esto quiere decir que toda la potencia emitida por la carga en $t - \tau_0$ llega a la superficie en el instante t , con velocidad $\vec{c} = \hat{c}r$. Los campos con dependencia radial superior a r^{-1} no pueden dar lugar a radiación porque para ellos el vector de Poynting decae con la distancia más rápidamente que r^{-2} , lo que, como es fácil comprobar, implica que la energía asociada a estos campos no se transmite a distancias arbitrariamente grandes de la carga radiante.

La figura 4.9 muestra la evolución de un pulso radiado por una partícula.

Otra magnitud de interés es la *intensidad de radiación* $\mathcal{I}(r, t, \theta, \varphi)$ que se define como la potencia radiada por unidad de ángulo sólido. Considerando la superficie esférica de radio r , su superficie es $4\pi r^2$ mientras que el ángulo sólido que subtende es 4π , luego

$$\mathcal{I} = \mathcal{P} r^2 = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \left(a(t - \frac{r}{c}) \right)^2 \sin^2 \theta \quad (4.45)$$

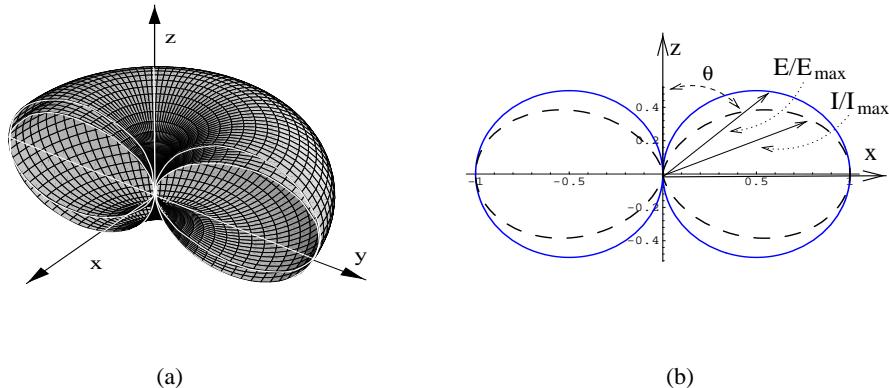


Figura 4.10:

En la figura 4.10-a se representa el diagrama polar de radiación para $|\vec{\mathcal{P}}/\vec{\mathcal{P}}_{max}| = \mathcal{I}/\mathcal{I}_{max}$ y $|\vec{B}/\vec{B}_{max}| = |\vec{E}/\vec{E}_{max}|$, en función de θ y φ , para un punto a distancia arbitraria r del origen. En la figura 4.10-b se representa una sección del mismo diagrama en un plano $\varphi = cte$. Como puede verse, la carga radia con máxima intensidad en las direcciones transversales al dipolo y no radia en la longitudinal.

4.5. Problemas

- 4-1. Calcule la energía almacenada en un condensador plano sometido a una diferencia de potencial entre placas V . El área de las placas es A y la distancia entre las mismas d . Exprese el resultado en función de (C, Q) , (C, V) y E . Desprecie los efectos de bordes.
- 4-2. Calcule la energía almacenada en un solenoide recto de sección circular que está recorrido por una intensidad I . Su longitud es l , su sección A y el número de espiras por unidad de longitud n . Exprese el resultado en función de (L, I) , (L, Φ) y B . Desprecie los efectos de bordes.

Solución:

Tenemos dos alternativas, calcularla en función de la densidad de energía

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V \rightarrow \infty} B^2 dv$$

o en función del flujo

$$W_m = \frac{1}{2} I \Phi$$

El campo magnético en el interior del solenoide ¹⁴ es constante, por lo que la primera alternativa nos da

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} V B^2$$

donde $V = Al$ es el volumen del solenoide.

Por otra parte, teniendo en cuenta que la autoinducción se ha definido ¹⁵ como $L \equiv \frac{\Phi}{I}$

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2L} \Phi^2$$

- 4-3. Sea una línea coaxial, figura 4.11, compuesta por dos conductores cilíndricos. El interno de radio a , es hueco y el externo de radio interior b , ambos de espesor despreciable. La longitud de ambos es $L \gg a, b$. Considere una pequeña sección de la misma de longitud $\Delta z \ll L$ y alejada de los extremos. Por los conductores circulan intensidades I , uniformemente distribuidas, iguales y en sentido contrario y la diferencia de potencial entre ellos, en dicha sección, es V . Halle la energía electromagnética almacenada, la capacidad y la autoinducción por unidad de longitud.

¹⁴Véanse los problemas del capítulo segundo.

¹⁵Véanse los problemas del capítulo segundo.

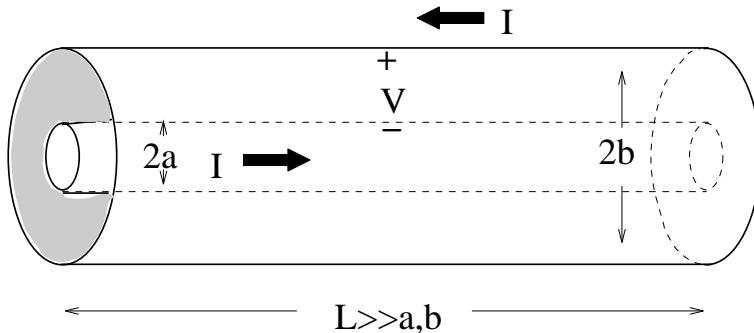


Figura 4.11:

4-4. Una onda plana se propaga en el vacío en la dirección del eje z . El campo eléctrico en $z = 0$ es

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 \hat{x} [e^{-t} - e^{-2t}], & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

donde $E_0 = 100 \mu V \cdot m^{-1}$. Halle, para $z > 0$,

- a) Campo magnético.
- b) Vector de Poynting.
- c) Energía total que atraviesa a un casquete hemisférico, de radio $a = 1 m$, cuyo eje es paralelo al z .

SOLUCION:

(a) - Para encontrar la expresión del campo electromagnético en cualquier posición z , basta con tener en cuenta que la onda viaja, a través del vacío, en la dirección positiva del eje z , por lo que $t = (t - \frac{z}{c})_{z=0}$ y

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \left[e^{-(t - \frac{z}{c})} - e^{-2(t - \frac{z}{c})} \right] \hat{x}$$

Haciendo uso de la relación de estructura con $\vec{n} = \hat{z}$

$$\vec{B}(z, t) = \frac{1}{c} \hat{z} \wedge \vec{E}(z, t) = \frac{1}{c} E(z, t) \hat{y}$$

(b) - el vector de Poynting es

$$\vec{S}_0 = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = c \omega_0 \hat{z} = c \varepsilon_0 E^2 \hat{z}$$

(c) - Puesto que el vacío no es disipativo, la energía que atraviesa el casquete es la misma que atraviesa un disco, del mismo radio y con el

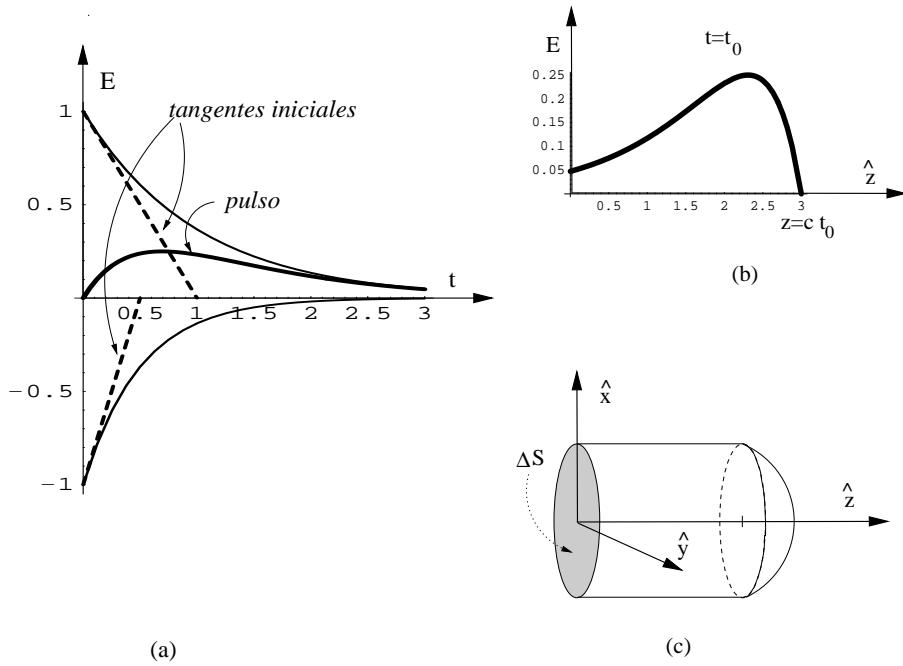


Figura 4.12:

el mismo eje, situado, como se muestra en la figura 4.12-c, en $z = 0$. Así, dicha energía puede calcularse de la forma

$$W = \int_{t=0}^{\infty} \left[\int_{\Delta S} (\vec{S}_0)_{z=0} \cdot d\vec{s} \right] dt = \epsilon_0 c E^2 \pi a^2 \int_{t=0}^{\infty} [e^{-t} - e^{-2t}]^2 dt$$

4-5. Verifique que

$$\vec{E} = \hat{x} e^{(-a^2 t^2 - b^2 z^2 + 2abz)}$$

puede corresponder a una onda que viaja a través del vacío. En caso afirmativo:

- Determine las condiciones que deben cumplir las constantes a y b .
- Calcule el campo magnético.
- Suponga que dicha onda incide, desde el vacío, sobre un conductor ideal que ocupa el semiespacio $z > 0$ y halle el campo electromagnético total resultante.

EN EL CASO DINÁMICO, SE DICE QUE UN CONDUCTOR ES IDEAL SI SU CONDUCTIVIDAD ES INFINITA. Como se comprobará más adelante, dicho conductor anula las componentes tangenciales del campo eléctrico.

SOLUCION :

(a) - Obviamente, si $\frac{a}{b} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, el campo eléctrico puede escribirse de la forma

$$\vec{E}(z, t) = \hat{x} e^{-b^2(z-ct)^2}$$

que pone de manifiesto que $E = f(z - ct)$ es una onda que viaja en el sentido positivo del eje z .

(b) - El campo magnético viene dado por la relación de estructura de las onda electromagnéticas en el vacío

$$\vec{B}(z, t) = \frac{1}{c} \hat{z} \wedge \vec{E}(z, t) = \frac{1}{c} E(z, t) \hat{y}$$

(c) - Si la onda incide sobre el conductor, debe existir, además de la incidente, una onda reflejada, de forma que, para $z < 0$

$$\vec{E}_t(z, t) = \vec{E}^i(z, t) + \vec{E}^r(z, t) = \hat{x} \left[e^{-b^2(z-ct)^2} + A e^{-b^2(z+ct)^2} \right]$$

El argumento de la onda reflejada lleva un signo + puesto que ésta viaja en sentido contrario al de la incidente. La constante A se determinará mediante las condiciones de frontera en $z = 0$.

$$E_t(z = 0) = 0 \Rightarrow A = -1$$

Aplicando por separado la relación de estructura a las ondas incidente y reflejada, a la primera con $\vec{n} = \hat{z}$ y a la segunda con $\vec{n} = -\hat{z}$,

$$\vec{B}_t(z, t) = \vec{B}^i(z, t) + \vec{B}^r(z, t) = \frac{1}{c} \hat{y} \left[e^{-b^2(z-ct)^2} + e^{-b^2(z+ct)^2} \right]$$

4-6. Para una onda plana monocromática que se propaga en un medio con:

$$\vec{E}(z, t) = (\hat{y} + 2\hat{x}) \cos(10^9 t + 30z) V \cdot m^{-1}$$

Calcule:

- a) La dirección de propagación.
- b) El vector unitario en la dirección de la polarización.
- c) La frecuencia f , la angular ω y el periodo T de la onda.
- d) El número de onda k y la longitud de onda λ .
- e) la velocidad de fase ¿Se propaga esta onda en el vacío?
- f) El campo magnético.

4-7. Considere una onda electromagnética que se propaga en la dirección \hat{x} en el vacío, la cual se descompone en la suma de otras dos:

(a) -

$$\vec{E} = \hat{y} E_1 \cos(\omega t - kx) + \hat{y} E_2 \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

Obtenga \vec{P} y $\langle \vec{P} \rangle$. Los valores obtenidos ¿son la suma de los correspondientes a cada componente de la onda ?

(b) - Repita el problema si

$$\vec{E} = \hat{y} E_1 \cos(\omega t - kx) + \hat{z} E_2 \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

SOLUCION:

(a) - Aplicando la relación de estructura

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{x} \wedge \vec{E} = \frac{E}{c} \hat{z} = \frac{\hat{z}}{c} (E_1 \cos \varphi + E_2 \cos (\varphi + \alpha)) , \quad \varphi = \omega t + kx$$

y el vector de Poynting

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \hat{x} \frac{1}{\mu_0 c} [E_1^2 \cos^2 \varphi + E_2^2 \cos^2 (\varphi + \alpha) + 2 E_1 E_2 \cos \varphi \cos (\varphi + \alpha)]$$

Dado que $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$, $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \frac{\hat{x}}{\mu_0 c} \left[\underbrace{E_1^2 + E_2^2 + 2 \overbrace{E_1 E_2 \cos \alpha}^{(c)}}_{(a)} + \underbrace{E_1^2 \cos 2\varphi + E_2^2 \cos (2\varphi + 2\alpha) + 2 E_1 E_2 \cos (2\varphi + \alpha)}_{(b)} \right]$$

Como puede verse, los términos (b) oscilan en el tiempo sobre un valor medio nulo, por lo que el valor medio viene dado por los (a). Las dos componentes de la onda no constituyen modos independientes, por lo que aparece el sumando (c) que representa a la interferencia entre las dos componentes

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\hat{x}}{\mu_0 c} \left[E_1^2 + E_2^2 + \underbrace{2 E_1 E_2 \cos \alpha}_{(c)} \right]$$

(b) - En este segundo caso las dos componentes están polarizadas en direcciones distintas, por lo que son independientes. Aplicando la relación de estructura se tiene que el valor medio del vector de Poynting es

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\hat{x}}{\mu_0 c} [E_1^2 + E_2^2]$$

Comprobamos que en este caso no existe término de interferencia y cada una aporta independientemente su contribución al flujo de potencia.

- 4-8. Sea el campo $\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \hat{x} + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi) \hat{y} = x \hat{x} + y \hat{y}$. Dibuje la trayectoria del extremo del vector \vec{E} en el plano $z = 0$, a lo largo del tiempo. Se dice que una onda está polarizada **linealmente** si la trayectoria es una recta, **elípticamente**, si es una elipse, y **circularmente** si es una circunferencia. ¿Qué condiciones deben cumplir los parámetros E_{0x} , E_{0y} y φ para que la polarización sea de cada uno de los tipos arriba mencionados?

- 4-9. Demuestre que los siguientes campos eléctricos pueden corresponder a ondas electromagnéticas planas en el vacío, que se propagan según el eje z , y calcule los campos magnéticos asociados.

a)

$$\vec{E} = E_0 e^{\pm j \omega z/c} e^{j \omega t} \hat{x}$$

b)

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega \frac{z}{c}) \cos(\omega t) \hat{y}$$

Calcule el vector de Poynting y analice en qué forma transporta la energía cada una de estas ondas.

- 4-10. Demuestre que la onda plana $\vec{E} = E_0 \cos k(z - ct) \hat{x}$ puede ser descrita con sólo un potencial vector que, además, cumple la condición de Coulomb.

Solución:

El vector unitario de propagación es $\vec{n} = \hat{z}$. Escribiendo $\alpha = k(z - ct)$ y haciendo uso de la relación de estructura

$$\vec{E} = E_0 \cos \alpha \hat{x} , \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos \alpha \hat{y}$$

Debemos comprobar que se llega a este mismo resultado siguiendo el enunciado del problema:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{d \vec{A}}{d \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = k c \frac{d \vec{A}}{d \alpha}$$

Luego $\vec{A} = A \hat{x}$ y

$$A = \frac{E_0}{k c} \int \cos \alpha d\alpha + cte = \frac{E_0}{k c} \sin \alpha$$

La constante de integración se ha tomado como nula.

Dado que el campo no depende de x ni de y

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = \hat{y} \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \hat{y} \frac{d \vec{A}}{d \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{E_0}{c} \cos \alpha \hat{y}$$

Por último, dado que hemos supuesto que, en este caso, \mathbf{V} puede tomarse como nulo, el contraste de Coulomb y el de Faraday se expresan de la misma forma.

- 4-11. Demuestre que las ondas $f(u)$ ($u = x - ct$), que se propagan en la dirección $\vec{n} = +\hat{x}$, cumplen la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) f(u) = 0$$

y las $g(w)$ ($u = x + ct$), que lo hacen en la $\vec{n} = -\hat{x}$, cumplen la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) g(w) = 0$$

- 4-12. El ritmo medio al que la energía solar incide sobre la Tierra es aproximadamente $1400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

- a) Calcule el valor del campo eléctrico en la superficie terrestre considerando a la luz solar como monocromática y linealmente polarizada.
- b) Si el Sol radia isotrópicamente, ¿con qué potencia lo hace? La distancia de la Tierra al Sol es $1,49 \times 10^8 \text{ km}$.
- c) Calcule la potencia total recibida por la Tierra sabiendo que su radio es $6,37 \times 10^3 \text{ km}$.

SE DICE QUE UN CUERPO RADIA DE FORMA **isótropa** CUANDO LA INTENSIDAD DE RADIACIÓN ES INDEPENDIENTE DE LA DIRECCIÓN.

- 4-13. Considere un transmisor que colocado en la Luna radia isotrópicamente a la frecuencia de 5 GHz y con una potencia de 1 W . Sabiendo que la distancia Tierra-Luna es $3,8 \times 10^5 \text{ km}$, calcule:

- a) El valor de los campos E y B en la superficie de la Tierra.
- b) El valor medio del vector de Poynting en la superficie terrestre.
- c) La densidad media de energía.
- d) El tiempo que tarda una señal en alcanzar la Tierra.

- 4-14. Sean dos cargas puntuales $\pm q(t)$, en el vacío, situadas respectivamente en los puntos $\pm \frac{d}{2}\hat{z}$.

- a) Halle el potencial retardado producido en un punto arbitrario \vec{r} .
- b) Haga lo mismo, en la zona lejana ($r \gg \lambda_0$ y $r \gg d$), para $q(t) = q_0 \cos \omega_0 t$.
- c) Aproxime el resultado anterior para un dipolo eléctricamente pequeño ($d \ll \lambda_0$).

SOLUCION:

- (a) - El potencial retardado viene dado por la integral

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{[\rho]}{R} dv'$$

Si las dos cargas se sitúan sobre el eje z , figura 4.13 la densidad puede describirse como

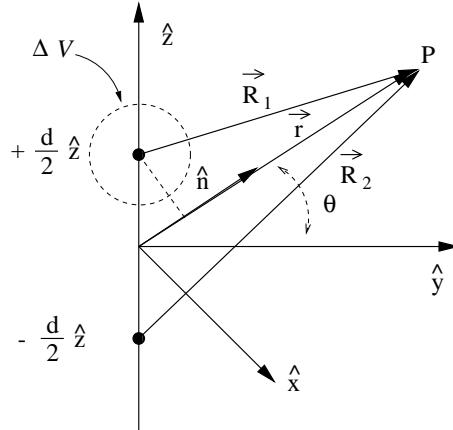


Figura 4.13:

$$\rho(z') = q(t) \left\{ \delta(\vec{r}' - \frac{1}{2}d\hat{z}) - \delta(\vec{r}' + \frac{1}{2}d\hat{z}) \right\}$$

La densidad retardada es, por lo tanto,

$$[\rho] = q(t - \frac{R}{c}) \left\{ \delta(\vec{r}' - \frac{1}{2}d\hat{z}) - \delta(\vec{r}' + \frac{1}{2}d\hat{z}) \right\}$$

Realizando la integral

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q(t - \frac{R_1}{c})}{R_1} - \frac{q(t - \frac{R_2}{c})}{R_2} \right\} \quad (4.46)$$

donde,

$$\vec{R}_1 = \vec{r} - \frac{1}{2}d\hat{z} \quad , \quad \vec{R}_2 = \vec{r} + \frac{1}{2}d\hat{z}$$

(b) - En el caso de que $q(t)$ sea una función armónica la expresión 4.46 toma la forma

$$V(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\cos \omega_0(t - \frac{R_1}{c})}{R_1} - \frac{\cos \omega_0(t - \frac{R_2}{c})}{R_2} \right\} \quad (4.47)$$

Los términos $\frac{1}{R}$ podemos aproximarlos en la zona lejana como

$$\frac{1}{R} \simeq \frac{1}{r}$$

pero este tipo de aproximación no debemos hacerlo en el argumento del coseno porque el potencial resultante sería nulo. Haremos una aproximación que nos de un resultado significativo.

Definamos

$$\delta = r - R$$

con lo que

$$\begin{aligned} \cos \omega_0 \left(t - \frac{R}{c} \right) &= \cos (\omega_0 t - k_0 r + k_0 \delta) \\ &= \cos (\omega_0 t - k_0 r) \cos (k_0 \delta) - \sin (\omega_0 t - k_0 r) \sin (k_0 \delta) \end{aligned}$$

$$\text{donde } k_0 = \frac{\omega_0}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Si $R \gg d$, según la figura 4.13, podemos hacer la aproximación

$$\delta = \vec{n} \cdot \vec{r}' = \begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{2}d \cos \theta & \text{para } \vec{r}' = \frac{1}{2}d \\ \delta_2 = -\frac{1}{2}d \cos \theta & \text{para } \vec{r}' = -\frac{1}{2}d \end{cases}$$

de acuerdo con ésto la ecuación 4.47 se aproxima por

$$V(\vec{r}, t) \simeq -\frac{q_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sin \omega_0 (t - \frac{r}{c})}{r} \sin (k_0 \frac{d}{2} \cos \theta)$$

(c) - En este caso $d \ll \lambda_0$, luego y

$$x = \frac{1}{2} k_0 d \cos \theta = \pi \frac{d}{\lambda_0} \cos \theta \ll 1 \Rightarrow \sin x \simeq x \Rightarrow$$

El potencial retardado producido por un dipolo corto es, en consecuencia

$$V(\vec{r}, t) \simeq -\frac{q_0}{2\epsilon_0} \frac{d}{\lambda_0} \frac{\sin \omega_0 (t - \frac{r}{c})}{r} \cos \theta$$

- 4-15. La figura 4.13 muestra dos cargas puntuales, de igual magnitud y signo opuesto, unidas mediante un conductor de longitud d por el que circula una corriente tal que $q = q_0 \cos \omega t$. Bajo la condición de campo lejano, $r \gg d$, y suponiendo que el dipolo es eléctricamente corto, $d \ll \lambda$, halle La potencia radiada.¹⁶

Solución:

Para este apartado seguiremos los pasos dados en la sección 4.4

Previamente calcularemos la intensidad aplicando la ley de conservación de la carga: La intensidad que entra en el volumen \mathcal{V} es igual a la razón de incremento temporal de la carga almacenada en el mismo.

¹⁶Esta última condición, como puede verse en la sección E.2, implica que la intensidad es *cuasiestacionaria*, es decir, que $I = I(t)$ es aproximadamente independiente de z .

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \operatorname{sen} \omega t$$

Puesto que se trata de un conductor filiforme, el potencial vector viene dado por

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}d} \frac{I(t - \frac{R}{c}) dz'}{R}$$

Aproximando $R \simeq r$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = -C \hat{z} \frac{1}{r} \operatorname{sen} u$$

donde $C = \frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi}$, $p_0 = q_0 d$, $u = \omega (t - \frac{r}{c})$.

Si despreciamos el término proporcional a $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \sim \frac{1}{r^2}$, y tenemos en cuenta que $\nabla u = -\omega \frac{\hat{r}}{c}$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = -C \frac{1}{r} \nabla \wedge (\hat{z} \operatorname{sen} u) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi c} \frac{1}{r} \cos \omega (t - \frac{r}{c}) \operatorname{sen} \theta \hat{\varphi}$$

Integrando el vector de Poynting $\vec{P} = c \frac{B^2}{\mu_0} \hat{r}$ sobre la superficie de una esfera de radio r obtenemos la potencia radiada

$$P(r, t) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{6\pi c} \cos^2 \omega (t - \frac{r}{c})$$

La potencia radiante de un dipolo eléctrico crece con la cuarta potencia de la frecuencia, por lo que las oscilaciones de baja frecuencia radian muy poca energía.

- 4-16. Halle la potencia que radiaría un electrón clásico girando alrededor de un núcleo de hidrógeno, en una órbita de radio a y con velocidad angular uniforme ω .
- 4-17. Halle la intensidad radiada en la colisión frontal de dos partículas, con carga de distinto signo, que se mueven en las proximidades del origen. Suponga que una de las partículas tiene una masa M muy superior a la de la otra, m , y que el movimiento de ambas es lento.

4.6. Resolución de las ecuaciones de Maxwell unidimensionales mediante el método FD-TD: *FDTD_1D – vacio.nb*

¹⁷ Lo que expondremos a continuación ilustra la solución numérica de la ecuación de ondas mediante el uso del método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FD-TD) ¹⁸.

4.6.1. La ecuación de onda unidimensional

Las ecuaciones rotacionales de Maxwell, para ondas que están polarizadas en la dirección del eje y y se propagan, en el vacío, a lo largo del eje x , pueden expresarse como

$$\frac{\partial e_y(x, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial B_z(x, \tau)}{\partial x} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial B_z(x, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial e_y(x, \tau)}{\partial x} \quad (4.49)$$

para lo cual se han normalizado el campo eléctrico y el tiempo ¹⁹.

$$e_y \equiv \frac{E_y}{c} , \quad \tau \equiv ct$$

Eliminando el campo magnético, o el eléctrico, de las ecuaciones anteriores se obtienen las ecuaciones de onda para estos campos:

$$\frac{\partial^2 e_y(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_y(x, \tau)}{\partial \tau^2} , \quad \frac{\partial^2 B_z(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_z(x, \tau)}{\partial \tau^2}$$

La solución general compatible con las ecuaciones de Maxwell tiene la forma

$$e_y(x, \tau) = f(x - \tau) + g(x + \tau) , \quad B_z(x, \tau) = f(x - \tau) - g(x + \tau) \quad (4.50)$$

en la que f y g son funciones arbitrarias, aunque de buen comportamiento, que se propagan respectivamente en el sentido positivo y negativo del eje x .

¹⁷Basado en un programa de S. González.

¹⁸Finite Difference–Time Domain. Véase [Taflove].

¹⁹Estas definiciones son ventajosas para el cálculo numérico ya que, en el vacío, para una onda que se propaga en un sentido determinado, $e = B$.

Condiciones iniciales:

Para obtener la solución temporal a partir de las condiciones iniciales

$$e_y(x, 0) = f(x) + g(x) , \quad B_z(x, 0) = f(x) - g(x)$$

basta con substituir los argumentos ' x ' de dichas funciones por ' $x \pm \tau$ ', según se trate de $f(x - \tau)$ o de $g(x + \tau)$.

Por ejemplo, si se excita inicialmente el espacio con un campo eléctrico de perfil gausiano

$$e_y(x, 0) = e^{-\frac{1}{a^2}(x-x_0)^2} , \quad B_z(x, 0) = 0 \quad (4.51)$$

la solución a lo largo del tiempo toma la forma

$$e_y(x, \tau) = \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{a^2}(x-\tau-x_0)^2} + e^{-\frac{1}{a^2}(x+\tau-x_0)^2})$$

$$B_z(x, \tau) = \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{a^2}(x-\tau-x_0)^2} - e^{-\frac{1}{a^2}(x+\tau-x_0)^2})$$

que representa a dos ondas de igual amplitud y que viajan en sentidos opuestos. Puede comprobarse que cada una de éstas cumple su respectiva relación de estructura y que sus vectores de Poynting tienen las direcciones $\pm \hat{x}$. Por otra parte, para $\tau = 0$, cumplen con las con las condiciones iniciales 4.51.

Por el contrario, si la excitación es del tipo

$$e_y(x, 0) = e^{-\frac{1}{a^2}(x-x_0)^2} , \quad B_z(x, 0) = +e_y(x, 0) \quad (4.52)$$

la solución temporal es una sola onda que viaja en la dirección $+\hat{x}$.

$$e_y(x, \tau) = e^{-\frac{1}{a^2}(x-\tau-x_0)^2} , \quad B_z(x, \tau) = e^{-\frac{1}{a^2}(x-\tau-x_0)^2}$$

4.6.2. Solución numérica

Para resolver numéricamente estas ecuaciones, se definirá un *dominio numérico* en cuyos nudos se tomarán muestras del valor de los campos y sobre el cual se definirán operadores numéricos de diferenciación espacial y temporal basados en *diferencias centradas*. Con estas herramientas, se diseñarán *algoritmos de avance temporal* de los campos que permiten, en sucesivas iteraciones, actualizar sus valores en cada nudo a lo largo del tiempo.

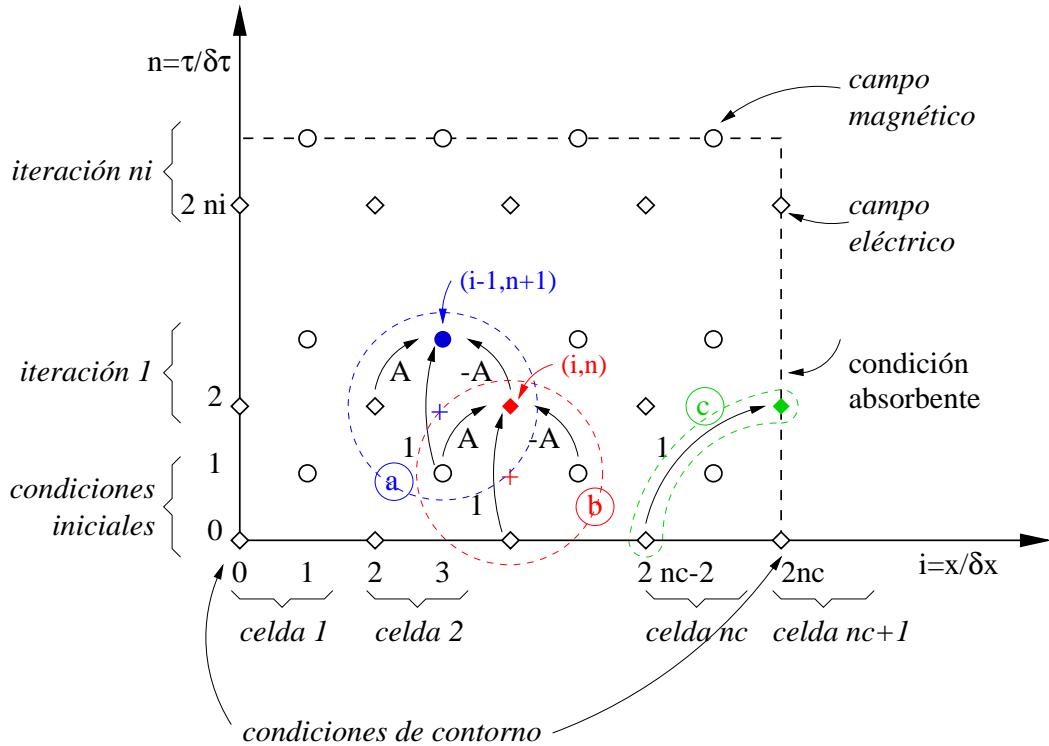


Figura 4.14: Red numérica FD-TD

Dominio numérico:

Como se muestra en la figura 4.14, el espacio y el tiempo se discretizan a intervalos δx y $\delta\tau$ de lo que resulta un dominio numérico constituido por los nudos

$$x = i\delta x \quad , \quad i = 0, \dots, 2nc$$

$$\tau = n\delta\tau \quad , \quad n = 0, \dots, 2ni + 1 \quad (4.53)$$

Los nudos se agrupan por parejas, en *celdas*, según la dirección espacial, y en *iteraciones* según la temporal. El campo eléctrico se evalúa en los nudos *pares* $i = 0, 2, \dots, 2nc$ y en instantes *pares* $n = 0, 2, \dots, 2ni$ (en la figura '◊') y el magnético en los *impares* $i = 1, 3, \dots, 2nc - 1$ y en instantes *impares* $i = 1, 3, \dots, 2ni + 1$ (en la figura '○'). nc es el número de celdas completas; en la última, $2nc + 1$, solo se toma la muestra del campo eléctrico.

Los nudos de coordenada temporal $n = 0, 1$ corresponden a la iteración 0 y contienen las condiciones iniciales. El resto contiene a los campos en las sucesivas iteraciones ($n = 2, 4, \dots, 2ni$). En cada una de las iteraciones se calcula, mediante el algoritmo de avance temporal, primero el campo eléctrico y posteriormente el magnético.

Desarrollo del programa:

El programa que proponemos a continuación puede dividirse esquemáticamente en las siguientes etapas:

1. Establecimiento de las condiciones iniciales.
2. Cálculo de los campos en iteraciones sucesivas mediante los algoritmos de avance temporal y las condiciones de contorno:
 - a) Cálculo del campo eléctrico de los nudos interiores y en el instante (n).
 - b) Cálculo del campo magnético en el instante ($n + 1$).
 - c) Cálculo del campo eléctrico en los nudos extremos y en el instante (n).
3. Generación de los fotogramas correspondientes a las distintas iteraciones.

Diferencias finitas centradas:

Es posible resolver numéricamente las ecuaciones rotacionales de Maxwell mediante la aproximación de los operadores diferenciales por otros numéricos en diferencias centradas. Con este fin, se divide el espacio α en intervalos de longitud h y se define el operador derivada centrada de una función $f(\alpha)$ de la forma

$$D_\alpha[f(\alpha)] = \frac{1}{2h} \{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)\}$$

Desarrollando en serie de Taylor $f(\alpha + h)$ y $f(\alpha - h)$, restando, despejando y despreciando términos de orden $O(h^2)$, se tiene que

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} \simeq D_\alpha[f(\alpha)]$$

Este operador aproxima al operador derivada analítica hasta el segundo orden en h .

Avance temporal:

El algoritmo que permite avanzar temporalmente al campo en los distintos puntos de la red se obtiene substituyendo a los operadores diferenciales por los correspondientes en diferencias. Con este fin, en cada iteración

$$n = 2, 4 \cdots 2ni$$

seguiremos los siguientes pasos:

- *Cálculo del campo eléctrico.* El círculo (b) de la figura 4.14 está centrado en el punto $(i, n - 1)$, marcado por una cruz, y contiene una estrella de cuatro puntas cuyo nudo superior es el (i, n) , donde i y n son pares.

Para calcular el campo eléctrico en este último nudo, evaluamos la ecuación 4.48 en el centro de la estrella y despejamos $e_y(i, n)$. De esta forma se obtiene una expresión que relaciona a este campo con él mismo y con el magnético en instantes anteriores.

Simplificaremos la notación escribiendo:

$$e_y \equiv e \quad , \quad B_z \equiv B \quad , \quad f(i, n) \equiv f_i^n$$

– Ecuación 4.48 evaluada en (i,n-1).

$$e_i^n = e_i^{n-2} + A [B_{i-1}^{n-1} - B_{i+1}^{n-1}] \quad , \quad i = 2, 4 \dots 2nc - 2 \quad (4.54)$$

donde se excluyen los nudos frontera, en los que hay que aplicar las conciciones de contorno.

- *Cálculo del campo magnético.* El circulo (a) está centrado en el punto $(i - 1, n)$ y el nudo superior de la estrella correspondiente es el $(i - 1, n + 1)$.

Para calcular el campo magnético en este último nudo, evaluamos la ecuación 4.49 en el centro de la estrella y despejamos B_{i-1}^{n+1} .

– Ecuación 4.49 evaluada en (i-1,n).

$$B_{i-1}^{n+1} = B_{i-1}^{n-1} + A [e_{i-2}^n - e_i^n] \quad , \quad i = 2, 4 \dots 2nc - 2 \quad (4.55)$$

En el programa siguiente, en cada iteración se aplicarán los algoritmos de avance anteriores, para ambos campos y para $i = 2, 4 \dots 2nc - 2$, con lo que, véase la figura 4.14, no se cubre a la componente B_{2nc-1}^{n+1} la cual habrá de calcularse posteriormente.

La estructura de los algoritmos se muestran dentro de los círculos (a) y (b) de la figura 4.14

Condición de Courant:

El coeficiente que aparece en el segundo miembro es

$$A = \frac{\delta\tau}{\delta x}$$

Puede demostrarse que, para que los algoritmos numéricicos sean estables, es necesario que se cumpla la condición de *Courant*

$$\frac{\delta x}{\delta\tau} \geq 1 \quad (4.56)$$

En adelante se tomará

$$A = 1 \Rightarrow \delta x = \delta\tau = \delta$$

Condiciones iniciales:

Las condiciones iniciales se imponen en los dos primeros instantes ($n = 0, 1$) (figura 4.14)

$$\begin{aligned} e_i^0 &= e_0(i) \quad , \quad i = 0, 2, \dots, 2nc \\ B_i^1 &= B_1(i) \quad , \quad i = 1, 3, \dots, 2nc - 1 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Condiciones de contorno:

Dado que el dominio numérico es finito, $\mathcal{X} = [0 \leq x \leq L]$, en sus extremos deben aplicarse condiciones de contorno adecuadas.

En el primer ejemplo supondremos \mathcal{X} limitado por planos conductores ideales $x = 0$ y $x = L$ ó $i = 0$ e $i = 2nc$.

Obsérvese en la figura 4.14 que este dominio se ha configurado de forma tal que en los nudos extremos sólo está definido el campo eléctrico. Dado que éste es tangencial a los conductores, y estos son perfectos, debe anularse en la superficie. Impondremos, por lo tanto, *condiciones reflectantes*

$$\text{Condiciones reflectantes} \rightarrow \begin{cases} e_0^n = 0 \\ e_{2nc}^n = 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

En el segundo ejemplo se impondrán condiciones absorbentes, con las cuales se simula la existencia en los puntos extremos de superficies perfectamente absorbentes (no reflectantes), de forma que una onda incidente sobre las mismas continúa propagándose, sin reflejarse, como si el medio correspondiente se extendiese más allá del la frontera numérica.

Las ondas que inciden desde el interior de \mathcal{X} sobre el punto $x = 0$ son las $f(w = x + \tau)$, que viajan en el sentido negativo del eje x , y su velocidad de fase normalizada es $\nu_- \equiv \frac{v_-}{c} = \left(\frac{dx}{d\tau} \right)_{w=cte} = -1$. De forma análoga, las que inciden sobre el punto $x = L$ son las $f(u = x - \tau)$, que viajan en el sentido positivo del eje x , y cuya velocidad de fase normalizada es $\nu_+ = 1$. En cualquiera de estos dos casos, tomando $\delta x = \delta\tau = \delta$, las ondas recorren un espacio 2δ en el tiempo 2δ y las *condiciones absorbentes* toman la siguiente forma

$$\text{Condiciones absorbentes} \rightarrow \begin{cases} e_0^n = e_2^{n-2} \\ e_{2nc}^n = e_{2nc-2}^{n-2} \end{cases} \quad (4.59)$$

La curva (c) de la figura 4.14 delimita el esquema de la condición absorbente en $2nc$.

Programa Mathematica FDTD_1D – vacio.nb:

En este programa se hace uso de funciones discretas $f(i, n)$.

Ejemplo 1º

En este primer ejemplo se simula una onda de perfil gausiano que viaja inicialmente hacia la derecha y que se refleja sucesivamente sobre dos planos conductores.

```
Remove["Global`*"]; Off[General :: "spell1"];
```

```
$TextStyle = {FontFamily → "Courier", FontSize → 12};
```

$f(i, n)$ la escribiremos de la forma.

$$f[i_, n_] := \text{Exp}[-\frac{1}{na^2} * (i - n - nc)^2];$$

en la que el punto central del pulso se ha situado en $i = nc$ en el instante inicial $n = 0$. Se asignan valores concretos al número de celdas **nc**, al de iteraciones **ni** y al factor que define la anchura del pulso **na**.

$$\text{nc} = 60; \text{ni} = 120; \text{na} = 8;$$

Los valores de los campos en cada posición (i) y en cada instante (n) se almacenan en las funciones $e_y(i, n)$, con (i, n) pares, y $B_z(i, n)$ ²⁰, con (i, n) impares. Para cada posición (i), estas funciones se incluyen en listas con dos elementos $\{i, e_y(i, n)\}$ y $\{i, B_z(i, n)\}$.

Se comienza por definir las condiciones iniciales en función de $f(i, n)$.

```
te0 = Table[{i, ey[i, 0] = N[f[i, 0]]}, {i, 0, 2 * nc, 2}]; ey[0, 0] = 0; ey[0, 2 * nc] = 0
```

Se anula el campo eléctrico en los nudos frontera porque las condiciones en los mismos son reflectantes.

```
tB1 = Table[{i, Bz[i, 1] = N[f[i, 1]]}, {i, 1, 2 * nc - 1, 2}];
```

Se hace uso de la orden **N[]** para que la tabla se llene con los valores numéricos y no de expresiones analíticas. En caso contrario el cálculo se ralentiza y el ordenador puede saturarse.

Los representamos gráficamente, sin mostrarlos, $ey(i, 0)$ en rojo y $Bz(i, 1)$ en azul:

```
grey0 = ListPlot[te0, PlotStyle → {PointSize[0.015], RGBColor[1, 0, 0]},  
DisplayFunction → Identity, PlotRange → {0, 1}];
```

²⁰Esto supone guardar en memoria los campos correspondientes a todas las iteraciones que se realicen a lo largo de la ejecución del programa, lo que es poco eficiente y resulta prohibitivo para problemas de dos y tres dimensiones. El esquema FDTD permite guardar en memoria únicamente los datos más recientes para cada posición i , lo que reduce la necesidad de memoria en el factor $\frac{1}{2nc}$. Haremos uso de esta posibilidad en la sección B.2.1.

```
grBz1 = ListPlot[tB1, PlotStyle -> {PointSize[0.015], RGBColor[0, 0, 1]},  
DisplayFunction -> Identity, PlotRange -> {0, 1}];
```

y los mostramos conjuntamente.

```
Show[grey0, grBz1, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

La figura 4.15 presenta solamente la parte significativa de las funciones. Puede verse como las muestras de cada campo se toman en nudos alternados de la red. Dado que $E_y = f(x)$ y $B_z = g(x) = \frac{1}{c} f(x)$, este pulso corresponde a una sola onda cuyo vector de Poynting tiene la dirección \hat{x} .

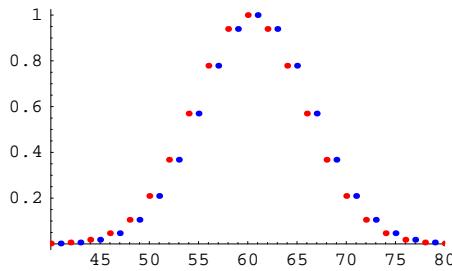


Figura 4.15:

Para calcular el resto de los valores se emplea un lazo **Do** que aplica las reglas de avance temporal. Dentro de este lazo se hace uso de otro **Do** para determinar los campos en los nudos interiores, salvo el campo magnético de los nudos $2nc - 1$ ²¹ y el eléctrico de los de la frontera que se calculan fuera de este último lazo.

```
Do[{Do[{ey[i, n] = ey[i, n - 2] - Bz[i + 1, n - 1] + Bz[i - 1, n - 1],  
Bz[i - 1, n + 1] = Bz[i - 1, n - 1] - ey[i, n] + ey[i - 2, n]}, {i, 2, 2 * nc - 2, 2}],  
Bz[2 * nc - 1, n + 1] = Bz[2 * nc - 1, n - 1] - ey[2 * nc, n] + ey[2 * nc - 2, n]},  
ey[0, n] = 0, ey[2 * nc, n] = 0}, {n, 2, 2 * ni, 2}];
```

Para visualizar la propagación del pulso electromagnético, con los colores empleados en la gráfica anterior, se representa a los campos en cada instante temporal y se activa la película de la forma ya descrita en un programa anterior. Para que las señales no se solapen totalmente, Bz se multiplica por el factor 0,9.

²¹Nótese que el algoritmo de avance temporal no puede aplicarse a los nudos de la frontera porque, en ese caso, necesita datos que estarían fuera del dominio numérico. Compruebe, figura 4.14, que $Bz[2*nc - 1, n + 1]$ queda fuera del lazo.

```
Table[Show[ListPlot[Table[{i, ey[i, n]}, {i, 0, 2 * nc, 2}], PlotJoined → True,
  PlotRange → {-2.1, 2.1},
  DisplayFunction → Identity, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0]}],
ListPlot[Table[{i, 0.9 * Bz[i, n + 1]}, {i, 1, 2 * nc - 1, 2}],
  PlotJoined → True, PlotRange → {-2.1, 2.1},
  DisplayFunction → Identity, PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1]}],
  DisplayFunction → $DisplayFunction], {n, 0, 2 * ni, 2}];
```

La figura 4.16 corresponde al fotograma nº35 de la película. En él se ve como la onda se ha reflejado ya en el extremo derecho, donde se simula al conductor ideal. El campo eléctrico, que es tangencial, se anula en ese punto, mientras que el magnético se refuerza. Al mismo tiempo, la onda se propaga hacia la izquierda: el B_z reflejado no cambia de signo mientras que E_y lo invierte; el vector de Poynting cambia su sentido a $-\hat{x}$.

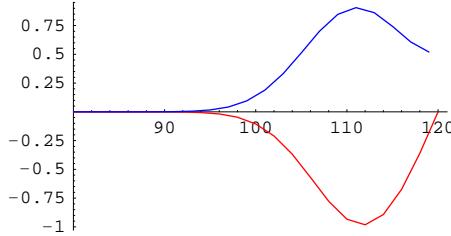


Figura 4.16:

Ejemplo 2º

En este caso se simula, junto con la onda del ejemplo anterior, otra que viaja en sentido contrario y se hace uso de las condiciones de frontera absorbentes.

```
Remove["Global`*"];
```

Se elijen los valores de los parámetros.

```
nc = 60; ni = 40; na = 8; n0 = 40;
```

$$f[i_-, n_-] := \text{Exp}\left[-\frac{1}{na^2} * (i - n - nc)^2\right];$$

La segunda onda se define con un perfil que resulta de modular el pulso gausiano del primer ejemplo con una función senoidal de periodo $T = n0 \delta$

$$ge[i_-, n_-] := f[i, n] * 4 * \text{Sin}\left[\frac{\pi * (i + n - nc)}{n0}\right];$$

Se generan las gráficas sin mostrarlas.

```
f0 = Table[{i, f[i, 0]}, {i, 0, 2 * nc, 2}];
```

```
ge0 = Table[{i, ge[i, 0]}, {i, 0, 2 * nc, 2}];
```

```
grf = ListPlot[f0, PlotJoined → True, PlotRange → {-1.2, 1.2},  
PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0]}, DisplayFunction → Identity];
```

```
grge = ListPlot[ge0, PlotJoined → True, PlotRange → {-1.2, 1.2},  
PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1]}, DisplayFunction → Identity];
```

La figura 4.17 muestra conjuntamente ambas funciones.

```
Show[grf, grge, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

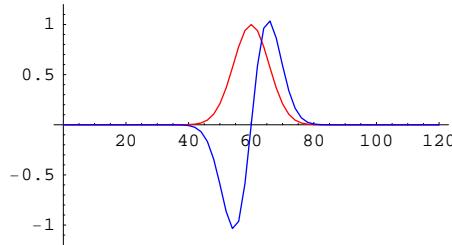


Figura 4.17:

A partir de estas funciones se obtienen los valores iniciales de ambos campos

```
ey0b = Table[ey[i, 0] = N[f[i, 0] + ge[i, 0]], {i, 0, 2 * nc, 2}];
```

```
Bz1b = Table[Bz[i, 1] = N[f[i, 1] - ge[i, 1]], {i, 1, 2 * nc - 1, 2}];
```

se generan las gráficas

```
grey0b = ListPlot[Table[{i, ey[i, 0]}, {i, 0, 2 * nc, 2}],  
PlotStyle → {PointSize[0.015], RGBColor[1, 0, 0]}, PlotRange → {-1, 2},  
DisplayFunction → Identity];
```

```
grBz1b = ListPlot[Table[{i, Bz[i, 1]}, {i, 1, 2 * nc - 1, 2}],
  PlotStyle -> {PointSize[0.015], RGBColor[0, 0, 1]}, PlotRange -> {-1, 2},
  DisplayFunction -> Identity];
```

En la figura 4.18 se muestra la suma de los pulsos iniciales. Dado que $e_y = f(x)$ y $B_z = g(x) \neq f(x)$ estos campos se desglosan en dos ondas que se propagan en sentidos opuestos.

```
Show[grey0b, grBz1b, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

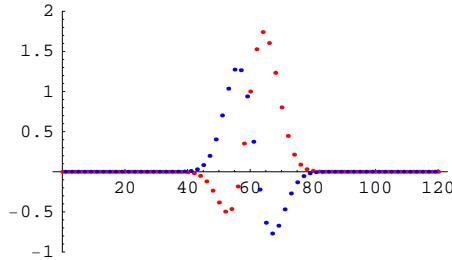


Figura 4.18:

Por último, se forman las tablas $ey(i, n)$ y $Bz(i, n)$, se generan las gráficas temporales, como en el primer ejemplo, y se animan.

```
Do[{Do[{ey[i, n] = ey[i, n - 2] - Bz[i + 1, n - 1] + Bz[i - 1, n - 1],
  Bz[i - 1, n + 1] = Bz[i - 1, n - 1] - ey[i, n] + ey[i - 2, n]}, {i, 2, 2 * nc - 2, 2}],
  Bz[2 * nc - 1, n + 1] = Bz[2 * nc - 1, n - 1] - ey[2 * nc, n] + ey[2 * nc - 2, n],
  ey[0, n] = ey[2, n - 2], ey[2 * nc, n] = ey[2 * nc - 2, n - 2}], {n, 2, 2 * ni, 2}]
```

```
Table[Show[ListPlot[Table[{i, ey[i, n]}, {i, 0, 2 * nc, 2}], PlotJoined -> True,
  PlotRange -> {-2.2, 2.2}, DisplayFunction -> Identity,
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}],
  ListPlot[Table[{i, 0.9 * Bz[i, n + 1]}, {i, 1, 2 * nc - 1, 2}], PlotJoined -> True,
  PlotRange -> {-2.2, 2.2}, DisplayFunction -> Identity,
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]}],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction], {n, 0, 2 * ni, 2}];
```

La figura 4.19a corresponde al fotograma nº20. Cada uno de los pulsos se ha propagado en sentido opuesto pero aún no ha llegado al extremo correspondiente. La figura 4.19b corresponde al fotograma nº30. Como puede observarse, los pulsos traspasan los límites sin reflejarse.

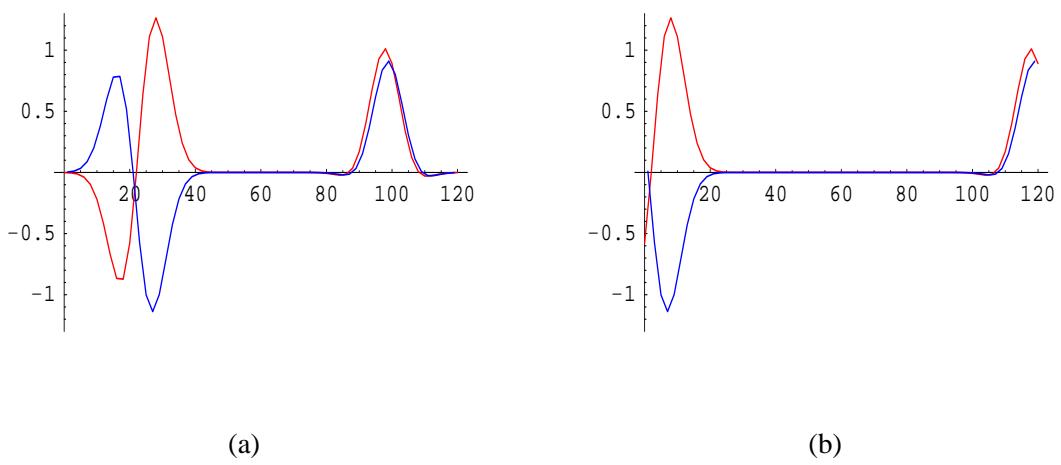


Figura 4.19:

Parte II

Multipolos

Introducción

A lo largo de la parte *I* se ha expuesto el cuerpo básico de la teoría del campo electromagnético en el vacío. Los sistemas de carga han sido descritos, dentro de este contexto, bien sea por la enumeración de las cargas puntuales que lo componen y sus velocidades, o bien por la definición de las funciones densidad apropiadas. Este planteamiento fundamental del problema es suficiente, en principio, para tratar la interacción entre sistemas de carga arbitrarios. Sin embargo, muchos sistemas de carga naturales y artificiales presentan una estructura cuya descripción requiere la introducción de conceptos auxiliares.

En esta parte trataremos de la caracterización multipolar de las distribuciones de carga estática y de corriente estacionaria.

En general, el cálculo de los campos creados por una distribución localizada de carga, o corriente, sólo es factible de forma aproximada, por medio de métodos analíticos o numéricos. Las soluciones analíticas exactas son únicamente posibles en los casos en que la simetría de la distribución es elevada. No obstante, vista desde lejos, dicha distribución crea campos \vec{C} que pueden descomponerse en suma de contribuciones multipolares \vec{C}_{2^n} de la forma

$$\vec{C} = \vec{C}_m + \vec{C}_d + \vec{C}_c + \cdots + \vec{C}_{2^n} + \cdots$$

donde cada uno de estos \vec{C}_{2^n} , términos (2^n polares), tiene expresión analítica en función de una serie de parámetros, que llamaremos *momentos multipolares*, y de la posición relativa \vec{r} del punto de observación con respecto a un punto origen que se toma como centro de la distribución. El campo asociado a \vec{C}_{2^n} decrece genéricamente con la distancia según la ley $r^{-(n+2)}$.

El término \vec{C}_m , correspondiente a $n = 0$, es la contribución monopolar. Veremos que el momento monopolar eléctrico coincide con la carga neta de una distribución²². \vec{C}_d es la contribución dipolar. La materia compuesta por moléculas neutras, gases, líquidos y sólidos, se comporta con gran precisión, desde el punto de vista eléctrico, como si se tratara de una distribución de dipolos. Desde el punto de vista magnético hay que tener en cuenta que la inexistencia de monopolos magnéticos coloca en primer plano al dipolo magnético: partículas elementales, como el electrón, en virtud de su momento angular o espín, poseen un momento dipolar magnético intrínseco. Aunque los momentos de orden superior tienen menos incidencia práctica, también son importantes. Así, pues, en la interacción nucleónica interviene de forma significativa el momento cuadripolar, las estructuras radiantes correspondientes a multipolos oscilantes son de gran interés, etc.

En la parte *III*, dedicada al tratamiento fenomenológico de la materia, veremos cómo, efectivamente, los materiales dieléctricos y magnéticos se estudian de forma adecuada en función de una densidades de momento dipolar eléctrico \vec{P} y magnético \vec{M} , respectivamente.

²²Ya se ha reseñado en la primera parte que, desde el punto de vista clásico, no es necesario tener en cuenta la existencia de monopolos magnéticos.

Capítulo 5

Campos Multipolares estáticos

5.1. Expansión multipolar de una distribución estática de carga

Supongamos [Lorrain y Corson, Reitz et al., Jackson, Landau y Lifchitz FT] que, como se indica en la figura 5.1, se requiere calcular el campo que una distribución acotada de carga $\rho(\vec{r}')$, encerrada en un volumen \mathcal{V}' finito y a distancia finita del origen de coordenadas, produce en un punto externo a la distribución.

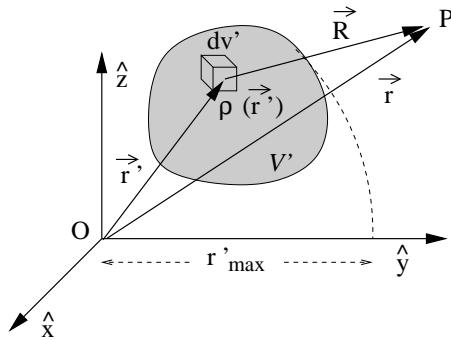


Figura 5.1:

Hemos elegido el origen de coordenadas O de forma que $r > r'_{max}$, siendo r'_{max} la máxima distancia de la distribución \mathcal{V}' al origen. El cálculo riguroso del potencial nos llevaría a resolver la integral

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dv' \quad (5.1)$$

La expansión multipolar del potencial electrostático, válida para puntos tales que $r > r'_{max}$, la obtendremos realizando el desarrollo en serie de Taylor de la función R^{-1} alrededor del origen ($\vec{r}' = 0$). En lo que sigue, haremos uso del convenio de Einstein de suma sobre índices repetidos, por lo que este desarrollo puede escribirse de las formas

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{r} + x'_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} \right) \right\}_{\vec{r}'=\vec{0}} + \frac{1}{2} x'_j x'_k \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x'_j x'_k} \left(\frac{1}{R} \right) \right\}_{\vec{r}'=\vec{0}} + \dots \\ \frac{1}{R} &= \underbrace{\frac{1}{r}}_{(M)} \underbrace{-x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right)}_{(D)} + \underbrace{\frac{1}{2} x'_j x'_k \frac{\partial^2}{\partial x_j x_k} \left(\frac{1}{r} \right)}_{(C)} + Re \left[O \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \right] \quad (5.2)\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{R} \right)$ y que $r = (R)_{\vec{r}'=\vec{0}}$.

El término (M) dará lugar al potencial monopolar, el (D) al dipolar y el (C) al cuadripolar, lo que permite expresar al potencial como suma de una serie de potenciales multipolares

$$V(\vec{r}) = V_m(\vec{r}) + V_d(\vec{r}) + V_c(\vec{r}) + \dots$$

Momento monopolar :

Substituyendo el término (M) de 5.2 en 5.1, se obtiene el *potencial monopolar*

$$V_m = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad Q = \int_{\mathcal{V}'} \rho(\vec{r}') dv' \quad (5.3)$$

Q es la carga neta o *momento monopolar eléctrico* de la distribución. El potencial monopolar es equivalente al que crearía toda la carga del sistema concentrada en el origen.

Momento dipolar :

Dado que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x_i}{r^3}$$

el *potencial dipolar eléctrico* es

$$V_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{p} \cdot \hat{r} \quad (5.4)$$

en el que

$$\vec{p} = \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' \quad (5.5)$$

recibe el nombre de *momento dipolar eléctrico* del sistema. Es fácil demostrar que, si $Q = 0$, el momento dipolar del sistema de cargas es independiente del origen. Sólo en este caso puede hablarse, pués, del momento dipolar sin hacer referencia al origen.

Es notable que, si bien el potencial monopolar decrece con la distancia según r^{-1} , como el potencial de una carga puntual, del dipolar decrece como r^{-2} .

Momentos cuadripolares :

El potencial cuadripolar se obtiene introduciendo el término (C) del desarrollo de R^{-1} en 5.1. Derivando

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^5} (3x_j x_k - r^2 \delta_{jk})$$

y podemos escribir

$$V_c = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} P_{jk} (3x_j x_k - r^2 \delta_{jk}) \quad (5.6)$$

siendo los coeficientes

$$P_{jk} = \int_{\mathcal{V}'} x'_j x'_k \rho(\vec{r}') dv'$$

los momentos de segundo orden de la densidad de carga de la distribución o *momentos cuadripolares*. Estos constituyen una matriz simétrica que, como tal, puede ser diagonalizada, lo que permitiría expresar a todos los elementos en función de tres de ellos. Siguiendo la misma pauta se obtienen los momentos y potenciales 2^n -polares para $n = 3, \dots$.

En el caso que nos ocupa, el cuadripolar, puede obtenerse una expresión más conveniente en la que se pone en evidencia que sólo dos de estos momentos son realmente independientes. Ello implicará la redefinición de los momentos cuadripolares.

Con este fin, dado que $\frac{1}{r}$ es solución de la ecuación de Laplace para $r \neq 0$ ¹

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \delta_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

por lo que podemos restar $\frac{1}{6} r'^2 \delta_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = 0$ a (C), ecuación 5.2, sin alterarlo

$$(C) = \frac{1}{6} (3x'_j x'_k - r'^2 \delta_{jk}) (3x_j x_k - r^2 \delta_{jk})$$

Substituyendo en la integral del potencial, obtenemos

$$V_c = \frac{1}{24\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} (3x_j x_k - r^2 \delta_{jk}) Q_{jk}$$

donde

$$Q_{jk} = \int_{\mathcal{V}'} (3x'_j x'_k - r'^2 \delta_{jk}) \rho(\vec{r}') dv' \quad (5.7)$$

$\tilde{Q} = (Q_{jk})$ es el *tensor momento cuadripolar* y Q_{jk} sus componentes o *momentos cuadripolares*².

Sumando los momentos de la diagonal $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}$ se comprueba que

$$Q_{jj} = 0 \quad (5.8)$$

¹ δ_{jk} es la delta de Kronecker.

²Aunque son diferentes de los P_{jk} , le daremos el mismo nombre.

Es decir, la traza de \tilde{Q} es nula y sólo dos elementos son independientes entre si.

Puesto que el término

$$r^2 \delta_{jk} Q_{jk} = r^2 Q_{jj} = 0$$

podemos eliminarlo de la expresión dada anteriormente para el potencial y escribir

$$V_c = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} x_j x_k Q_{jk} \quad (5.9)$$

Si el sistema tiene un eje de simetría, por ejemplo el eje z ,

$$Q_{xx} = Q_{yy}, \quad Q_{zz} = -2Q_{xx} = Q$$

Q será el momento cuadripolar del sistema y, en coordenadas polares

$$V_c = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

5.1.1. Expansión multipolar de la energía de interacción de un sistema de carga con un campo externo

De acuerdo con los resultados obtenidos en el párrafo 2.2.3, la energía de interacción de un sistema de cargas, $\rho(\vec{r}')$, definido en \mathcal{V}' , con un campo que derive de un potencial $V(\vec{r}')$ creado por cargas externas a \mathcal{V}' , puede escribirse como

$$W = \int_{\mathcal{V}'} \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') dv' \quad (5.10)$$

Si $V(\vec{r}')$ varía lentamente dentro de \mathcal{V}' , podemos desarrollarlo en serie de Taylor alrededor de un origen situado en el interior de la distribución ³.

$$V(\vec{r}') = V(\vec{0}) + x'_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_i} V(\vec{r}') \right\}_{\vec{r}'=\vec{0}} + \frac{1}{2} x'_j x'_k \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_k} V(\vec{r}') \right\}_{\vec{r}'=\vec{0}} + \dots$$

Teniendo en cuenta que $E_{x_i} = -\frac{\partial}{\partial x'_i} V(\vec{r}')$

$$V(\vec{r}') = V(\vec{0}) - \vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{0}) - \frac{1}{2} x'_j x'_k \frac{\partial E_k}{\partial x'_j}(\vec{0}) + \dots$$

Dado que \vec{E} es externo y, por lo tanto, $(\nabla' \cdot \vec{E})_{\vec{r}'=0} = 0$, podemos restar $\frac{1}{6} r'^2 \delta_{jk} \frac{\partial E_k}{\partial x'_j}(\vec{0})$, con lo que

$$V(\vec{r}') = V(\vec{0}) - \vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{0}) - \frac{1}{6} (3x'_j x'_k - r'^2 \delta_{jk}) \frac{\partial E_k}{\partial x'_j}(\vec{0}) + \dots$$

³ $V(\vec{r}')$ se debe a cargas externas a \mathcal{V}' , luego no tiene singularidades en su interior.

y

$$W = Q V(\vec{0}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{0}) - \frac{1}{6} Q_{jk} \frac{\partial E_k}{\partial x'_j}(\vec{0}) + \dots \quad (5.11)$$

Vemos, pues, que la interacción de un sistema de cargas con un campo externo, excluyendo la energía de interacción de las cargas del sistema entre si, o autoenergía, puede descomponerse en sumandos independientes asociados a los sucesivos momentos multipolares.

$$W = W_m + W_d + W_c + \dots$$

En particular, la energía de interacción de un dipolo con un campo externo es

$$W_d = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{0}) \quad (5.12)$$

Esta energía está asociada al campo eléctrico y no al potencial.

Para el momento cuadripolar

$$W_c = -\frac{1}{6} Q_{jk} \frac{\partial E_k}{\partial x'_j}(\vec{0})$$

energía asociada a la dependencia espacial de las componentes de los campos. De esta manera se da lugar al desdoblamiento de niveles de energía nuclear por interacción del momento cuadripolar del núcleo con el campo molecular cristalino.

5.1.2. Multipolos puntuales

Los multipolos puntuales de orden 2^n son distribuciones constituidas por 2^n cargas puntuales que presentan momentos multipolares nulos hasta el orden 2^{n-1} , siendo el 2^n el primero distinto de cero. Aunque pueden tener momentos de orden superior, vistos a distancias $r \gg r'_{max}$ producen un potencial con estructura 2^n -polar.

Hemos visto que una carga puntual, como la de la figura 5.2, puede ser descrita por la densidad de carga

$$\rho(\vec{r}') = q\delta(\vec{r}' - \vec{l})$$

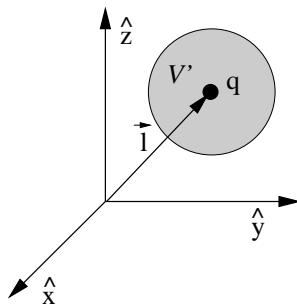


Figura 5.2:

El momento monopolar será pues,

$$Q = q \int_{\mathcal{V}' \supset q} \delta(\vec{r}' - \vec{l}) dv' = q$$

y el momento dipolar

$$\vec{p} = q \int_{\mathcal{V}' \supset q} \vec{r}' \delta(\vec{r}' - \vec{l}) dv' = q \vec{l}$$

que, evidentemente, depende del origen.

Los multipolos puntuales de orden 2^n se obtienen, a partir de los de orden 2^{n-1} , desplazando el multipolo original a una distancia \vec{d}_n y situando en la posición de partida a un multipolo de signo opuesto, véase la figura 5.3.⁴

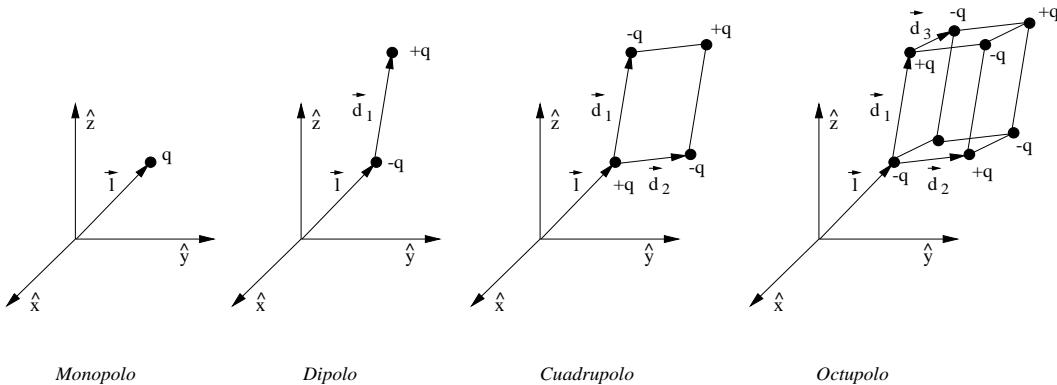


Figura 5.3:

De esta forma, del monopolio se pasa a una estructura cuyo momento monopolar es $Q = q - q = 0$ y, por lo tanto, su primer momento no nulo es dipolar \vec{p} . Así pues, el momento dipolar del dipolo puntual será

$$\begin{aligned} \vec{p} &= q \int_{v' \rightarrow \infty} \vec{r}' [\delta(\vec{r}' - \vec{d}_1 - \vec{l}) - \delta(\vec{r}' - \vec{l})] dv' = q [\vec{d}_1 + \vec{l} - \vec{l}] \\ &= q \vec{d}_1 \end{aligned}$$

momento que, por corresponder a una distribución neutra, es independiente del origen.

Repitiendo la operación con el dipolo, la distribución resultante tendrá un momento dipolar $\vec{p}_c = \vec{p} - \vec{p} = \vec{0}$, siendo su primer momento el cuadripolar \tilde{Q} , etc..

Visto desde lejos, ($l, d_n \ll r$), el multipolo de orden 2^n genera el potencial correspondiente a dos multipolos de orden 2^{n-1} , iguales, de signo contrario y situados a la distancia relativa d_n .

$$V_{2^n}(\vec{r}) = \underbrace{V_{2^{n-1}}(\vec{r}, \vec{l} + \vec{d}_n)}_{(a)} - V_{2^{n-1}}(\vec{r}, \vec{l}) , \quad l, d_n \ll r$$

⁴Véase [Panofsky y Phillips].

Substituyendo \vec{l} por \vec{r}' y teniendo en cuenta que $d_n \ll r$, podemos aproximar el potencial (a), de la forma

$$V_{2^n-1}(\vec{r}, \vec{r}' + \vec{d}_n) \simeq V_{2^n-1}(\vec{r}, \vec{r}') + \nabla' V_{2^n-1}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{d}_n$$

Si ahora situamos al dipolo en el origen, haciendo $\vec{l} = \vec{r}' = \vec{0}$

$$V_{2^n}(\vec{r}) = \nabla' [V_{2^n-1}(\vec{r}, \vec{r}')]_{\vec{r}'=\vec{0}} \cdot \vec{d}_n \quad (5.13)$$

Este resultado, obtenido apoyándonos en la representación de dipolos puntuales es válido, naturalmente, para cualquier tipo de multipolos.

5.1.3. El dipolo eléctrico

Dada la importancia del dipolo, es conveniente detenernos en su estudio. A partir del potencial 5.4 podemos hallar el campo que produce

$$\vec{E}_d(\vec{r}) = -\nabla V_d = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}] \quad (5.14)$$

que, como ya habíamos anunciado, decrece globalmente con la distancia según r^{-3} y no, como el monopolar, según r^{-2} .

Si elegimos el eje z en la dirección del dipolo, $\vec{p} = p \hat{z}$, y escribimos la expresión del campo y del potencial en coordenadas esféricas

$$V_d(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (5.15)$$

$$\vec{E}_d = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} [2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}] \quad (5.16)$$

Las superficies equipotenciales vendrán dadas por la ecuación

$$r^2 = A \cos\theta \quad (5.17)$$

y las líneas de campo por⁵

$$\frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{r d\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{d\sin\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \begin{cases} r = B \sin^2\theta \\ \varphi = cte \end{cases} \quad (5.18)$$

La figura 5.4 representa a las líneas de campo y a las superficies equipotenciales.

⁵Este es uno de los casos en que la ecuación de las líneas es fácilmente integrable. En concreto, debido a que puede escribirse de forma separable $f(x) dx = g(y) dy$.

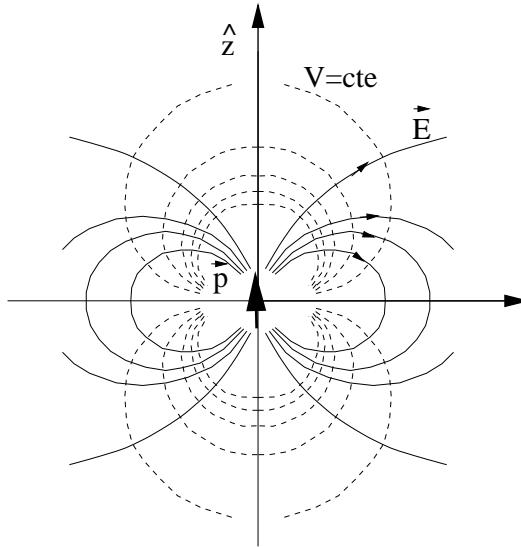


Figura 5.4:

5.1.3.1. Energía, par y fuerza de un dipolo

La energía de interacción de un dipolo en un campo externo, según hemos visto, es

$$W_d = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

luego, sus valores extremos serán

$$\begin{cases} W_{min} = -pE \Rightarrow \vec{p} \uparrow\downarrow \vec{E} \\ W_{max} = pE \Rightarrow \vec{p} \uparrow\downarrow \vec{E} \end{cases}$$

lo que implica que el dipolo tratará de alinearse con el campo aplicado.

Razonando sobre dipolos puntuales no es difícil comprobar que este alineamiento es inducido por un par

$$\vec{T} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad (5.19)$$

Para ello, despreciaremos la pequeña variación del campo en las inmediaciones de \vec{r} , es decir, tomamos $\vec{E}(\vec{r} + d\vec{r}) \simeq \vec{E}(\vec{r})$. Según la figura 5.5

$$\vec{T} = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{r} \wedge (-q\vec{E}) + (\vec{r} + d\vec{r}) \wedge q\vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Además de este par que tiende a alinear los dipolos con el campo aplicado, éstos sentirán una fuerza

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E}(\vec{r} + d\vec{r}) - q\vec{E}(\vec{r})$$

Desarrollando E_x alrededor de \vec{r}

$$F_x = qE_x(\vec{r}) + q d\vec{r} \cdot [\nabla E_x(\vec{r})] - qE_x(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \nabla) E_x$$

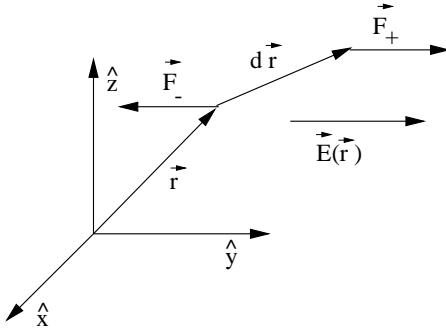


Figura 5.5:

por lo que \vec{F} podrá expresarse como

$$\vec{F} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) \Rightarrow$$

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (5.20)$$

Dado que el campo es estático $\nabla \wedge \vec{E} = 0$ y

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) = -\nabla(W_d) \quad (5.21)$$

5.1.4. Densidades dipolares

Por último, mencionaremos que, de la misma forma que se han definido densidades de carga, se define la densidad de momento dipolar eléctrico \vec{P} o *vector de polarización eléctrica*. De forma genérica

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv} \quad (5.22)$$

A nivel microscópico puede definirse como

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \quad (5.23)$$

donde \vec{p}_i es el momento dipolar eléctrico de cada una de las partículas y N el número de partículas del sistema. Esta densidad de polarización jugará un papel fundamental en la descripción de los dieléctricos.

También es útil la definición de la densidad superficial de momento dipolar; con la que pueden ser descritas eléctricamente estructuras tan importantes como las membranas celulares.

El potencial eléctrico producido por una distribución de dipolos en un punto, \vec{r} , externo a la misma, es decir en un punto en el que la polarización $\vec{P}(\vec{r})$ es nula, se

obtiene por integración de las contribuciones de los momentos $d\vec{p} = \vec{P} dv'$ contenidos en los elementos de volumen dv' .

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{R}}{R^3} dv'$$

Esta integral es singular para puntos internos, pero ya hemos visto que la descripción de sistemas de carga por sus momentos multipolares sólo es válida para puntos externos.

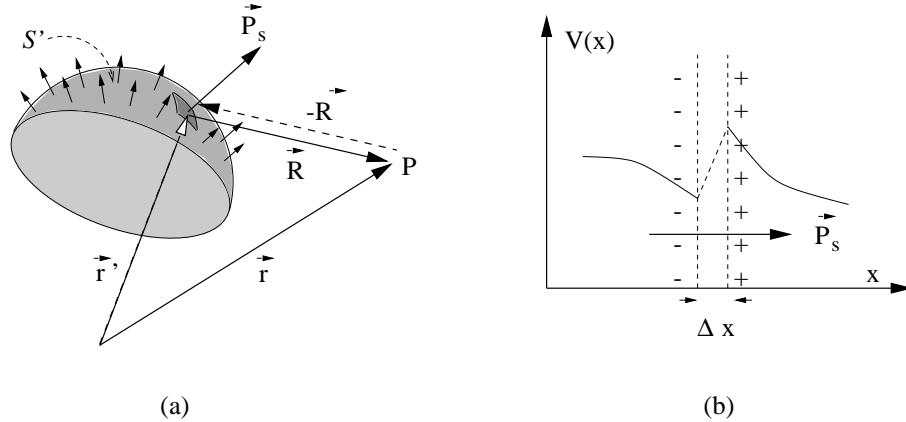


Figura 5.6:

Una distribución superficial de dipolos interesante es la doble capa, constituida por dos distribuciones monopolares superficiales, muy próximas, con densidades de carga de igual magnitud y distinto signo en cada punto de la superficie. Se describen adecuadamente, como se muestra en la figura 5.6 mediante una distribución superficial de momento dipolar

$$\vec{P}_s = \frac{d\vec{p}}{ds} = P_s \vec{n}$$

donde \vec{n} es la normal a la superficie en el sentido de los dipolos.

Podemos comprobar que al pasar de un lado a otro de la superficie el potencial es discontinuo: como se ilustra en la figura 5.6-a, el potencial producido por una distribución dipolar extensa será

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} P_s \frac{\vec{n} \cdot \vec{R}}{R^3} ds' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} P_s \frac{(-\vec{R}) \cdot d\vec{s}'}{R^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S P_s d\Omega$$

donde se ha substituido \vec{R} por $(-\vec{R})$, que es el vector que sitúa a un punto de la superficie con respecto al punto P , y se ha hecho uso de la definición de elemento de ángulo sólido

$$d\Omega = \frac{(-\vec{R}) \cdot d\vec{s}'}{R^3}$$

visto desde dicho punto P .

En el límite en que P tiende a situarse sobre la superficie, casi toda la contribución al potencial se deberá a los dipolos cercanos, por lo que podremos considerar a $P_s \simeq \text{cte}$. Luego

$$\lim_{R \rightarrow 0} V(\vec{r}) = -\frac{P_s}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

donde Ω es el ángulo sólido subtendido por la superficie desde un punto próximo P . Al pasar desde justamente debajo hasta justamente arriba de la superficie, el ángulo sólido sufre una discontinuidad $\Delta\Omega = -4\pi$, y

$$\Delta V = P_s/\epsilon_0$$

En la figura 5.6-b se ilustra este salto de potencial en una doble capa de espesor Δx .

5.2. Desarrollo multipolar de una distribución de corriente estacionaria

Para distribuciones de corrientes estacionarias aplicaremos [Jackson, Panofsky y Phillips] un tratamiento bastante similar al que acabamos de utilizar para las distribuciones estáticas de cargas. No obstante, por ser la estructura del campo magnético más compleja que la del eléctrico, detendremos nuestro desarrollo en el término dipolar.

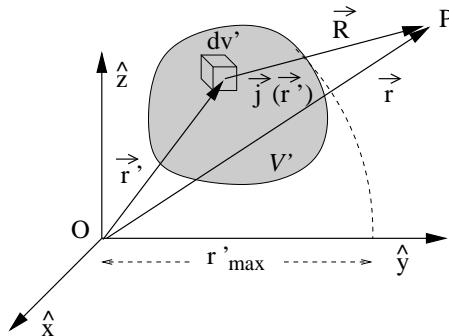


Figura 5.7:

Supondremos que, como se indica en la figura 5.7, se desea observar una distribución de corrientes estacionarias

$$\nabla' \cdot \vec{j} = 0$$

desde una distancia $r > r'_{\max}$. Para ello introducimos el desarrollo

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots$$

en la integral del potencial vector

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dv'$$

lo que nos llevará a la expansión multipolar

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_d + \vec{A}_c + \dots$$

en la que falta el término monopolar porque éste es nulo para corrientes estacionarias.

Ausencia de monopolos :

Efectivamente

$$\vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathcal{V}'} \vec{j}(\vec{r}') dv'$$

pero, si

$$\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{V}'} \vec{j} dv' = \vec{0} \quad (5.24)$$

Para demostrarlo, basta con tener en cuenta que la integral sobre el volumen \mathcal{V}' que contiene a toda la distribución de corriente

$$\int_{\mathcal{V}'} \nabla' \cdot (x'_i \vec{j}) dv' = \int_{\mathcal{V}'} x'_i \underbrace{\nabla' \cdot \vec{j}}_{=0} dv' + \int_{\mathcal{V}'} \vec{j} \cdot \nabla' x'_i dv' = \int_{\mathcal{V}'} j_i dv'$$

Pero, haciendo uso del teorema de la divergencia para el primer miembro de la ecuación anterior,

$$\int_{\mathcal{V}'} \nabla' \cdot (x'_i \vec{j}) dv' = \int_{\mathcal{S}'} x'_i \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{V}'} j_i dv' = 0$$

porque, como \mathcal{S}' contiene a todas las corrientes estacionarias, el flujo de corriente a través de cada elemento de superficie $d\vec{s}'$ debe ser nulo y $(\vec{j} \cdot d\vec{s})_{\mathcal{S}'} = 0$. De esta forma se comprueba 5.24 y la nulidad del momento monopolar.

Momento dipolar :

Para obtener la expresión del potencial dipolar, introduciremos el segundo término del desarrollo de R^{-1} en la integral. Ya hemos visto que

$$-x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{x'_i x_i}{r^3} = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3}$$

luego

$$\vec{A}_d = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \underbrace{\int_{\mathcal{V}'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j} dv'}_{\vec{I}} \quad (5.25)$$

expresión que, aún siendo muy compacta, no es la más conveniente.

Podemos demostrar que

$$\vec{A}_d(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (5.26)$$

donde

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \wedge \vec{j} dv' \quad (5.27)$$

es el *momento dipolar magnético* de la distribución.

Para demostrar lo anterior, volvamos a la expresión 5.25 y analicemos la integral

$$\vec{I} = x_i \int_{\mathcal{V}'} x'_i \vec{j} \, dv' = x_i \underbrace{\int_{\mathcal{V}'} x'_i j_j \, dv'}_{I_{ij}} \hat{e}_j$$

La integral I_{ij} puede decomponerse en una simétrica y otra antisimétrica sumándole y restándole el término $\frac{1}{2} x'_j j_i$

$$I_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}'} [(x'_i j_j + x'_j j_i) + (x'_i j_j - x'_j j_i)] \, dv' \quad (5.28)$$

Para corrientes estacionarias, la integral simétrica

$$I_s = \int_{\mathcal{V}'} (x'_i j_j + x'_j j_i) \, dv'$$

se anula, ya que puede ser escrita como

$$I_s = \int_{\mathcal{V}'} \vec{j} \cdot \nabla' (x'_i x'_j) \, dv'$$

y, teniendo en cuenta que $\nabla \cdot (f \vec{a}) = f \nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla f$

$$I_s = \int_{\mathcal{V}'} \left[\nabla' \cdot (x'_i x'_j \vec{j}) - x'_i x'_j \underbrace{\nabla' \cdot \vec{j}}_{=0} \right] \, dv' = 0$$

donde se ha anulado el segundo término dado que $\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0$ para corrientes estacionarias y el primero al integrarlo sobre la superficie del tubo de corriente.

Queda, por tanto

$$I_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}'} (x'_i j_j - x'_j j_i) \, dv'$$

e

$$\vec{I} = \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{V}'} (x'_i j_j - x'_j j_i) \, dv' \right] x_i \hat{e}_j = \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \wedge \vec{j} \, dv' \right] \wedge \vec{r}$$

lo que puede comprobarse desarrollando el triple producto vectorial.

5.2.1. La espira plana como dipolo magnético

El término dipolar aparece, según hemos visto, como el primero significativo en el desarrollo multipolar del potencial externo producido por una distribución de corriente estacionaria.

De la misma forma que la carga puntual nos servía en el tema anterior como arquetipo del monopolo eléctrico a partir del cual, por un simple proceso de diferenciación,

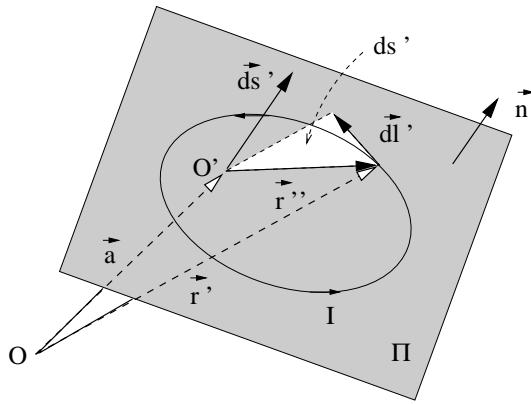


Figura 5.8:

se obtenían los arquetipos multipolares, podemos utilizar como representante del dipolo magnético a una pequeña espira plana.

En la figura 5.8 se representa a una espira plana contenida en el plano Π cuya normal es \vec{n} . El sentido de la normal ha sido elegido según la referencia de la circulación de la intensidad I . Si observamos esta espira desde una distancia $r \gg r'_{max}$, el potencial resultante será del tipo dipolar y podrá ser expresado en función del momento dipolar \vec{m}

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint \vec{r}' \wedge d\vec{l}' = \frac{1}{2} I \oint (\vec{a} + \vec{r}'') \wedge d\vec{l}' = \frac{1}{2} I \vec{a} \wedge \underbrace{\oint d\vec{l}'}_{=0} + \frac{1}{2} I \oint \vec{r}'' \wedge d\vec{l}'$$

El primer término se ha anulado porque $\oint d\vec{l}' = \hat{e}_i \oint dx_i = 0$. El segundo, teniendo en cuenta que $\frac{1}{2} \vec{r}'' \wedge d\vec{l}' = ds' \vec{n}$, toma la forma

$$\vec{m} = I S \vec{n} \quad (5.29)$$

expresión análoga a la del momento dipolar de un dipolo eléctrico puntual.

Como es fácil comprender, podemos generar multipolos de orden superior por el mismo mecanismo de diferenciación empleado para los dipolos puntuales: desplazando el dipolo elemental y colocando en la posición original, como se muestra en la figura 5.9, al mismo dipolo cambiado de signo.

5.2.2. El dipolo magnético

En cuanto al campo creado por un dipolo magnético, podemos demostrar que tiene la misma estructura que el campo dipolar eléctrico.

Como sabemos

$$\vec{B}_d = \nabla \wedge \vec{A}_d = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \wedge \left[\vec{m} \wedge \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

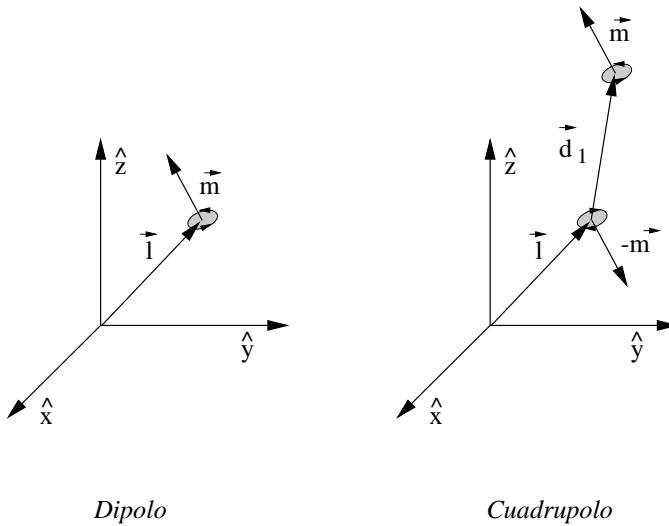


Figura 5.9:

Dado que

$$\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b}$$

tomando $\vec{a} = \vec{m}$, $\vec{b} = \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$ y teniendo en cuenta que $\vec{m} = c\vec{e}$ y $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$ ($\forall r \neq 0$), podemos escribir

$$\vec{B}_d = \frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

Desarrollando lo anterior, se tiene que

$$\vec{B}_d = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}] = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (5.30)$$

La última igualdad se obtiene situando al dipolo en el origen, orientándolo en la dirección z .

Este campo que coincide formalmente con \vec{E}_d si substituimos $\vec{m} \leftrightarrow \vec{p}$ y $\mu_0 \leftrightarrow (1/\epsilon_0)$.

5.2.2.1. Potencial magnético escalar

La analogía puesta de manifiesto en el párrafo anterior nos sugiere la posibilidad de hacer uso de un potencial escalar para el campo producido por distribuciones dipolares magnéticas. Análogamente al potencial dipolar eléctrico 5.4 tendríamos un *potencial dipolar magnético escalar* del que derivaría, mediante la aplicación de gradiente, el campo dipolar magnético.

$$U_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \vec{m} \cdot \hat{r}, \quad \vec{B}_d = -\mu_0 \nabla U_d \quad (5.31)$$

Este potencial no tiene el carácter fundamental de la función potencial escalar preconizada por el teorema de Helmholtz, puesto que sólo es válido en la zona externa a los dipolos. Diremos que el potencial magnético escalar es un pseudopotencial.

Así pues, en general, el campo magnético no es irrotacional

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \neq 0$$

Podemos imaginar, de acuerdo con la figura 5.10, una situación en la que todas las fuentes estén en un volumen \mathcal{V}' y que en \mathcal{V} sea $\vec{j} = 0$.

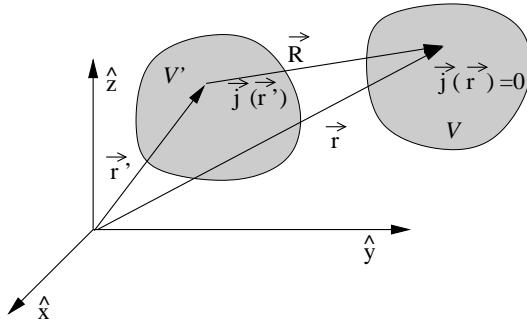


Figura 5.10:

En \mathcal{V}

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \quad \nabla \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

luego

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla U_d , \quad \nabla^2 U_d = 0$$

A pesar de las limitaciones impuestas, vemos que el potencial magnético escalar puede ser de gran utilidad para resolver problemas magnetostáticos, ya que permite abordarlos con las mismas técnicas utilizadas en electrostática.

El carácter de pseudopotencial lleva consigo la necesidad de tomar precauciones en la elección de volumen \mathcal{V} , lo que puede ser puesto en evidencia extendiendo el concepto de potencial magnético a espiras finitas.

Como se indica en la figuras 5.11-a, podemos substituir una espira, recorrida por una intensidad I , por una distribución superficial de dipolos magnéticos. Sea \mathcal{S} una superficie que se apoya sobre la espira \mathcal{L} y hagamos una partición de la misma en elementos $d\vec{s}$ que, si la superficie es suave, podrán ser considerados planos. Si asociamos al contorno de cada elemento de superficie una espira elemental, recorrida por la corriente I , éstas tendrán un momento dipolar

$$d\vec{m} = I d\vec{s}$$

Puesto que todas las espiras están recorridas por la misma corriente, las contribuciones de espiras contiguas se anulan, salvo en el contorno \mathcal{L} , por lo que este conjunto de espiras

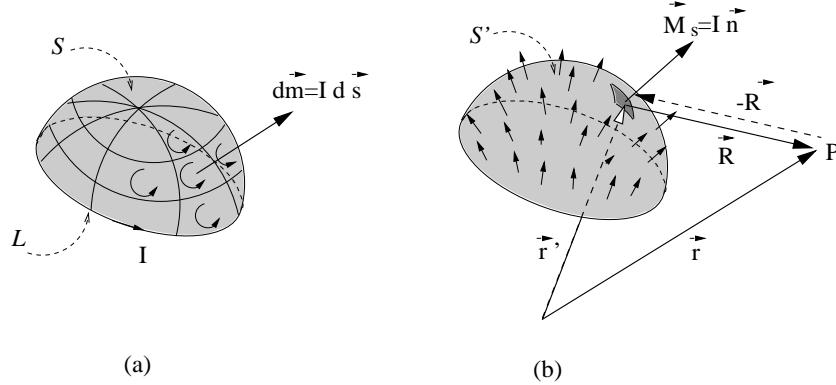


Figura 5.11:

elementales equivale a la espira macroscópica \mathcal{L} . Podemos, pués, substituirla por una distribución superficial de dipolos de densidad,

$$\vec{M}_s = \frac{d\vec{m}}{ds} = I \vec{n}$$

Para un punto de observación \vec{r} , externo a los dipolos, tendríamos un potencial escalar

$$U_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{M}_s \cdot \hat{R}}{R^2} ds' = \frac{I}{4\pi} \int_{S'} \frac{\hat{R} \cdot \vec{n}}{R^2} ds'$$

Substituyendo al vector \vec{R} por $\vec{R}_1 = -\vec{R}$, como ya se hizo en la sección 5.1.4,

$$U_d(\vec{r}) = -\frac{I}{4\pi} \int_{S'} d\Omega$$

$$U_d(\vec{r}) = -\frac{I\Omega}{4\pi} \quad (5.32)$$

donde Ω es el ángulo sólido con que la espira \mathcal{L} se ve desde P .

De lo dicho anteriormente se deduce que U_d no es función de punto y, por lo tanto,

$$dU_d = \nabla U_d \cdot d\vec{r} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{r}$$

no tiene validez general.

Efectivamente, si aplicamos la ley de Ampère sobre los caminos que unen a los puntos A y B de la figura 5.12,

$$\oint_{(a+c)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \neq 0 \Rightarrow \int_{A(a)}^B dU_d \neq \int_{A(b)}^B dU_d$$

lo que no es de extrañar, puesto que la expresión $\vec{B} = -\mu_0 \nabla U_d$ no es válida para el camino (b) ya que éste se introduce en la distribución de dipolos [Velayos].

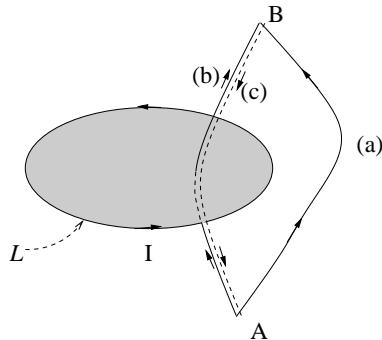


Figura 5.12:

5.2.2.2. Relación entre el momento magnético y el momento angular

Sabemos que la carga tiene inercia, es decir, que tiene una masa no nula. Esto implica también que el momento dipolar magnético debe estar asociado a un momento angular. Trataremos esta cuestión de forma simplificada suponiendo que todas las partículas son del mismo tipo, con carga q y masa M .

Las densidades de carga y de masa serán, respectivamente,

$$\rho = n q , \quad \rho_M = n M$$

donde n es la densidad de partículas.

Por definición, el momento dipolar de una distribución de carga en movimiento, encerrada en un volumen \mathcal{V} , es

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \wedge \vec{j} \, dv = \frac{1}{2} q \int_{\mathcal{V}} n \vec{r} \wedge \vec{u} \, dv$$

donde ρ es la densidad de portadores de carga y \vec{u} su velocidad de arrastre.

Para el momento angular,

$$\vec{L} = \int_{\mathcal{V}} \rho_M \vec{r} \wedge \vec{u} \, dv = M \int_{\mathcal{V}} n \vec{r} \wedge \vec{u} \, dv$$

lo que permite escribir

$$\vec{m} = \frac{q}{2M} \vec{L}$$

expresión que es válida, por ejemplo, para el electrón orbital.

Para sistemas de carga más generales, aquellos que estén compuestos de varias especies o aquellos en los que se consideren contribuciones de espín, escribiremos

$$\vec{m} = \Gamma \vec{L} , \quad \Gamma = g \frac{q}{2M} \tag{5.33}$$

donde Γ es la *razón giromagnética* y g el *factor de Landé*.

En general, incluso para un sistema clásico, Γ tendrá carácter tensorial, puesto que \vec{m} y \vec{L} no tienen por qué tener la misma dirección. Aunque al electrón orbital le corresponde $g = 1$, de acuerdo con los cálculos simples que acabamos de realizar, para el momento angular de espín $g = 2$.

5.2.2.3. Fuerza, par y energía potencial sobre un dipolo magnético en campo externo

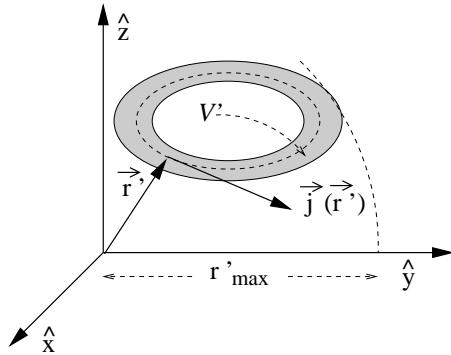


Figura 5.13:

Trataremos ahora la interacción de un dipolo magnético estacionario en el seno de un campo externo, es decir, en el seno de un campo cuyas fuentes residen fuera de la zona donde están las corrientes que constituyen el dipolo. Supondremos, figura 5.13, que el dipolo corresponde a un pequeño tubo de corriente estacionaria

$$\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0$$

cercano al origen, y que interacciona con un campo externo que varía lentamente dentro de la esfera de radio igual a r'_{max} .

Por ser \vec{B} externo, en la zona de interés

$$\nabla' \wedge \vec{B} = 0$$

y por ser lentamente variable, cualquiera de sus componentes podrá desarrollarse alrededor del origen

$$B_x = B_x(0) + \vec{r}' \cdot (\nabla' B_x)_{\vec{r}'=0} + \dots$$

lo que nos permite escribir, simplificando la notación, las siguientes aproximaciones

$$\vec{B}(\vec{r}') \simeq \begin{cases} \vec{B}_0 & \text{(a)} \\ \vec{B}_0 + (\vec{r}' \cdot \nabla_0) \vec{B}_0 & \text{(b)} \end{cases} \quad (5.34)$$

donde ∇_0 sería un operador que actuaría sólo sobre \vec{B} , reduciendo después el resultado al origen, y que, por lo tanto, tomaría como constantes a las coordenadas \vec{r}' .

Si nos quedamos con la aproximación 5.34-a veremos que el campo externo interacciona primariamente con el dipolo ejerciendo un par. Para que el dipolo sienta una fuerza neta será necesario que el segundo término de la aproximación 5.34-b sea distinto de cero. Veremos que, tanto de la expresión del par como de la de la fuerza, podemos deducir la energía de interacción de un dipolo rígido con un campo externo.

Par :

El par vendrá dado por

$$\vec{T} = \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \wedge \frac{d\vec{F}}{dv'} dv'$$

que, con la aproximación $\vec{B}(\vec{r}') \simeq \vec{B}_0$,

$$\vec{T} = \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \wedge (\vec{j}(\vec{r}') \wedge \vec{B}_0) dv' = \int_{\mathcal{V}'} \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r}' \cdot \vec{B}_0) dv' - \vec{B}_0 \underbrace{\int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \cdot \vec{j} dv'}_{(A)=0}$$

A continuación comprobaremos que

$$(A) = \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \cdot \vec{j} dv' = 0$$

para corrientes estacionarias: haciendo uso del teorema de la divergencia

$$I = \int_{\mathcal{V}'} \underbrace{\nabla' \cdot (r'^2 \vec{j})}_{(B)} dv' = \int_{\mathcal{S}'} r'^2 \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$$

puesto que, como hemos visto en secciones anteriores, la componente normal de la densidad de corriente es nula en \mathcal{S}' .

Por otra parte, desarrollando (B),

$$I = \int_{\mathcal{V}'} r'^2 \underbrace{\nabla' \cdot \vec{j}}_{=0} dv' + \int_{\mathcal{V}'} \nabla' (r'^2) \cdot \vec{j} dv' = 2 \underbrace{\int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \cdot \vec{j} dv'}_{(A)} = 0$$

De acuerdo con ésto

$$\vec{T} = \int_{\mathcal{V}'} (\vec{B}_0 \cdot \vec{r}') \vec{j} dv'$$

y, por analogía con la integral 5.25⁶

$$\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad (5.35)$$

Fuerza :

Para calcular la fuerza

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{V}'} \vec{j}(\vec{r}') \wedge \vec{B}(\vec{r}') dv'$$

haremos uso de la aproximación 5.34-b

$$\vec{F} \simeq \underbrace{\int_{\mathcal{V}'} \vec{j} \wedge \vec{B}_0 dv'}_{=0} + \int_{\mathcal{V}'} \vec{j} \wedge [(\vec{r}' \cdot \nabla_0) \vec{B}_0] dv'$$

⁶Donde en 5.25 figura \vec{r} aquí aparece \vec{B}_0 . Ninguno de estos vectores depende de las coordenadas de integración y pueden, en consecuencia, sacarse fuera de las integrales.

La primera integral es nula para corrientes estacionarias:

$$\int_{\mathcal{V}'} \vec{j} \wedge \vec{B}_0 \, dv' = \underbrace{\left(\int_{\mathcal{V}'} \vec{j} \, dv' \right)}_{=0} \wedge \vec{B}_0 = 0$$

de acuerdo con 5.24.

Para la segunda, haremos uso de la expresión

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + \vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) \Rightarrow$$

$$\nabla_0(\vec{r}' \cdot \vec{B}_0) = (\vec{r}' \cdot \nabla_0)\vec{B}_0 + \underbrace{(\vec{B}_0 \cdot \nabla_0)\vec{r}'}_{=0} + \underbrace{\vec{r}' \wedge (\nabla_0 \wedge \vec{B}_0)}_{=0} + \underbrace{\vec{B}_0 \wedge (\nabla_0 \wedge \vec{r}')}_{=0}$$

donde se han anulado los términos en los que \vec{r}' aparece a la derecha del operador ∇_0 y se ha tenido en cuenta que, por ser \vec{B} externo, su rotacional es nulo.

La fuerza, por lo tanto, queda expresada de la forma

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{V}'} \vec{j} \wedge [\nabla_0(\vec{r}' \cdot \vec{B}_0)] \, dv'$$

Por otra parte

$$\nabla \wedge (f\vec{a}) = f\nabla \wedge \vec{a} + \nabla f \wedge \vec{a} \Rightarrow$$

$$\vec{j} \wedge \nabla_0(\vec{r}' \cdot \vec{B}_0) = (\vec{r}' \cdot \vec{B}_0) \underbrace{\nabla_0 \wedge \vec{j}(\vec{r}')}_{=0} - \nabla_0 \wedge [(\vec{r}' \cdot \vec{B}_0)\vec{j}]$$

lo que nos permite, sacando ∇_0 fuera de la integral, expresar la fuerza como

$$\vec{F} = -\nabla_0 \wedge \left[\int_{\mathcal{V}'} (\vec{B}_0 \cdot \vec{r}')\vec{j} \, dv' \right] = \nabla_0 \wedge \left[-\left(\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \wedge \vec{j} \, dv' \right) \wedge \vec{B}_0 \right]$$

y, finalmente, como

$$\vec{F} = \nabla \wedge (\vec{B} \wedge \vec{m}) = -\nabla \wedge \vec{T} \quad (5.36)$$

Pero todavía podemos expresar la fuerza de otras formas. Dado que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{m} = cte$ y

$$\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\nabla \cdot \vec{b})\vec{a} - (\nabla \cdot \vec{a})\vec{b}$$

se tiene que

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B} \quad (5.37)$$

Por último, dado que el campo \vec{B} es externo, $\nabla \wedge \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \frac{\partial B_j}{\partial x_i}$ y

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = -\nabla W_d \quad (5.38)$$

donde $W_d = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ es la energía potencial o de interacción del dipolo \vec{m} en presencia del campo magnético externo \vec{B} , como comprobaremos a continuación.

Energía potencial :

Efectivamente, podemos ver que la energía potencial de un dipolo \vec{m} , definida en el sentido de la sección 2.2.3, puede expresarse como

$$W_d = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (5.39)$$

Para obtener este resultado deberemos calcular el trabajo realizado por el campo \vec{B} en una transformación reversible que nos lleve al dipolo, desde la posición \vec{r} y formando un ángulo θ con \vec{B} , hasta el infinito, donde la interacción será nula. Se supone que la magnitud $|\vec{m}|$ del dipolo permanece fija en la transformación o, de otra forma, que el dipolo es rígido, y que el campo magnético converge a cero en el infinito. En la figura 5.14 se proponen dos formas de realizar esta transformación. En la primera, 5.14-a, el dipolo se transporta a lo largo de camino \mathcal{L} manteniendo constante el ángulo θ que forma el dipolo con el campo. En la segunda, primero se rota al dipolo, en su posición inicial, hasta formar un ángulo recto con el campo y, a continuación, se le transporta a lo largo de \mathcal{L} manteniendo su última orientación con respecto al campo. Si la transformación es reversible, el resultado será independiente del camino elegido y de la orientación del dipolo a lo largo del mismo.

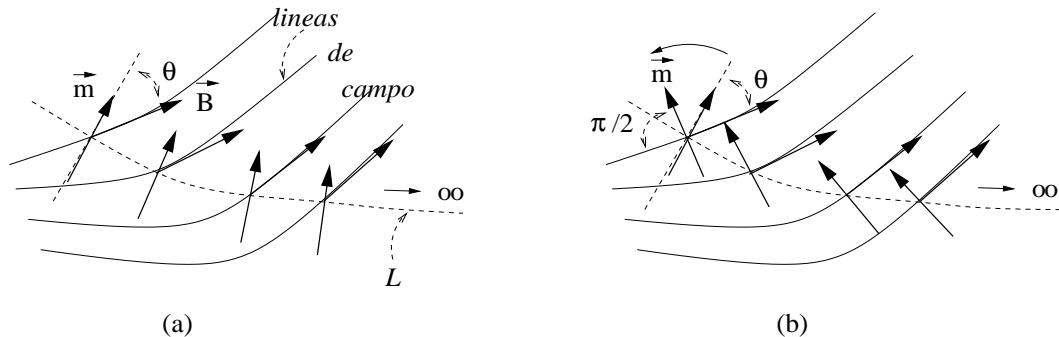


Figura 5.14:

En la opción (a) se mantiene fijo el ángulo que forma el dipolo con el campo, por lo que el par no trabaja. El trabajo realizado debe ser imputado a la fuerza

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = cte \\ m \cos \theta = cte \end{array} \right\} \Rightarrow W_d = \int_{\vec{r},(\theta=cte)}^{\infty} \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) \cdot d\vec{r} = [\vec{m} \cdot \vec{B}]_{\vec{r}}^{\infty} = -\vec{m} \cdot \vec{B}(\infty)$$

puesto que $\vec{B}(\infty) = 0$.

En la opción (b), figura 5.15, primero rotamos al dipolo de la posición θ a la $\pi/2$ y después lo desplazamos con $\theta = \pi/2$. En el desplazamiento, $\vec{m} \cdot \vec{B} = 0$, luego la fuerza es nula. En este caso el trabajo se realiza en el giro inicial y es imputable al par

$$W_d = \int_{\theta,(\vec{r}=cte)}^{\frac{\pi}{2}} \vec{T} \cdot d\vec{\theta} = - \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} mB \sin \theta \, d\theta = -mB \cos \theta$$

resultado idéntico al anterior que confirma la expresión dada en 5.39 a la energía potencial.

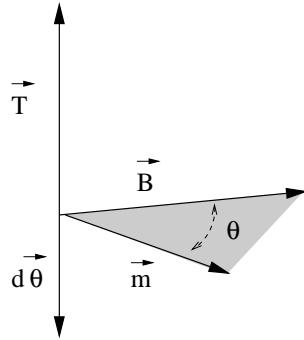


Figura 5.15:

Es fácil comprobar que el par puede también expresarse en función de la energía potencial

$$\vec{T} = -\nabla_{\theta} W_d \quad (5.40)$$

donde

$$\nabla_{\theta} = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

y θ_i es el ángulo de giro alrededor del eje \hat{e}_i .

Veremos más adelante que, en el caso de los sistemas de espiras, todo ésto se enmarca en el cálculo de fuerzas y pares a partir de procesos virtuales en los que se mantienen constantes las intensidades que circulan por dichas espiras. En nuestro caso hemos considerado $\vec{m} = cte$, lo que implica que la densidad de corriente del tubo permanece invariante en la transformación.

5.3. Problemas

5-1. Demuestre:

- a) Que si la carga total Q de una distribución es nula, el momento dipolar no depende del origen.
- b) Que si $Q = 0$ y $\vec{p} = \vec{0}$, el momento cuadripolar tampoco depende del origen.

Solución:

a)

Consideremos los orígenes O y O^* , tales que

$$\vec{r}' = \vec{r}^{*'} + \vec{a}$$

donde $\vec{a} = \overrightarrow{OO^*}$ y \vec{r}' y $\vec{r}^{*'}$ son los vectores de posición de los puntos de la distribución con respecto a cada uno de los orígenes.

$$\vec{p} = \int_{V'} (\vec{r}^{*'} + \vec{a}) \rho dv' = \vec{p}^* + \underbrace{\int_{V'} Q}_{=0} \vec{a}$$

b) Se deja como ejercicio.

- 5-2. Demuestre que el momento dipolar de una distribución de carga, cuya carga total es nula, es igual a $\vec{p} = q \vec{d}$, donde \vec{d} es la distancia del centro de la carga positiva al de la carga negativa y q es la carga positiva total. Aplíquelo al caso de una distribución en la que una carga q está distribuida uniformemente sobre una esfera de radio a y otra $-q$ distribuida uniformemente sobre un disco de radio a cuyo centro es tangente a la esfera.

Solución:

Téngase en cuenta que el centro de carga de una distribución se define de la misma forma que el centro de masa. Suponga que sobre el volumen V' las cargas positivas se distribuyen con una densidad ρ_+ y las negativas con ρ_- .

$$\vec{r}_+ = \frac{1}{q} \int_{V'} \vec{r}' \rho_+ dv' , \quad \vec{r}_- = -\frac{1}{q} \int_{V'} \vec{r}' \rho_- dv'$$

- 5-3. Halle, mediante integración directa, el primer momento multipolar significativo de las distribuciones puntuales de carga del problema 1-3. Deduzca previamente, por inspección, cual será, en cada caso, el primer momento no nulo.
- 5-4. Una esfera de radio a está dividida en dos casquetes hemisféricicos con densidades superficiales de carga $\pm \rho_s$ uniformes. Halle el campo eléctrico producido en un punto \vec{r} lejano, es decir, tal que $r >> a$.

5-5. Dos coronas circulares idénticas, con densidades superficiales de carga $\pm\rho_s$ uniformes, de radio interior a y exterior b, están situadas coaxialmente y a una distancia mutua d. Halle:

- El campo eléctrico producido en un punto de su eje para distancias $r \gg b$. Haga las aproximaciones pertinentes a partir de valor exacto del campo.
- La aproximación dipolar del campo para cualquier punto del espacio y, en particular, para los puntos del eje.

5-6. Halle el potencial producido a una distancia $r \gg a$ por la siguiente distribución de carga:

$$\text{En la región } x^2 + y^2 \leq a^2, \quad \rho_s = \begin{cases} \rho_{s0} & \text{para } x > 0 \\ -\rho_{s0} & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

5-7. Dada una distribución de carga con momento monopolar nulo y dipolar distinto de cero, halle:

- El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada arbitraria.
- Compruebe lo anterior por integración directa a través de una superficie esférica de radio $r \gg r'_{\max}$.

5-8. Demuestre que el potencial cuadripolar debido a la asociación de dipolos de la figura 5.16 es:

$$V_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{r})(\vec{d} \cdot \hat{r}) - \vec{p} \cdot \vec{d}]$$

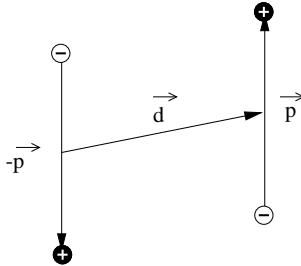


Figura 5.16:

Solución:

Podemos realizar la demostración haciendo uso de la fórmula

$$V_c(\vec{r}) = \nabla' [V_d(\vec{r}, \vec{r}')]_{\vec{r}'=0} \cdot \vec{d}$$

donde

$$V_d(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \vec{p} \cdot \vec{R}$$

es el potencial producido por un dipolo situado en \vec{r}' .

Teniendo en cuenta que $\nabla' = -\nabla_R$, $\nabla_R = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial R_i}$, debemos calcular

$$\nabla_R \left(\frac{1}{R^3} \vec{p} \cdot \vec{R} \right) = \frac{1}{R^3} \nabla_R (\vec{p} \cdot \vec{R}) + (\vec{p} \cdot \vec{R}) \nabla_R \left(\frac{1}{R^3} \right)$$

para ésto podemos hacer uso de la fórmula de desarrollo de $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b})$, teniendo en cuenta que $\vec{p} = \text{cte}$ y $\nabla \wedge \vec{r} = 0$, y de la expresión de $\nabla(f(u))$.

Así, por ejemplo

$$\nabla_R (\vec{p} \cdot \vec{R}) = (\vec{p} \cdot \nabla_R) \vec{R} = p_i \frac{\partial}{\partial R_i} (R_j \hat{e}_j) = p_i \delta_{ij} \hat{e}_j = \vec{p}$$

Aunque, de forma directa

$$\nabla_R (\vec{p} \cdot \vec{R}) = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial R_i} (p_j R_j) = \hat{e}_i p_j \delta_{ij} = \vec{p}$$

- 5-9. Demuestre que cuando el campo con que interacciona un dipolo es el de otro dipolo, la energía de interacción es

$$W_{pp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right]$$

Determine las condiciones bajo las cuales esta energía es máxima o mínima ($r = \text{cte}$).

- 5-10. Halle los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar de un segmento de línea, de longitud l , uniformemente cargado con una densidad lineal ρ_l . Colóquelo sobre el eje z y con un extremo en el origen.

Solución:

El momento monopolar es

$$Q = \rho_l l$$

y el dipolar ⁷

$$\vec{p} = \rho_l \int_0^l z' dz' = \frac{1}{2} Q l \hat{z}$$

Los momentos cuadripolares son $Q_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y

$$Q_{xx} = -\rho_l \int_0^l z'^2 dz' = \frac{1}{3} Q l^2$$

$$Q_{yy} = Q_{xx}, \quad Q_{zz} = -2 Q_{xx}$$

⁷Vea el problema 5-2.

- 5-11. SE DEFINE COMO POLARIZABILIDAD DE UNA MOLÉCULA A LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD α ENTRE EL MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO DE LA MISMA Y EL CAMPO APLICADO; $\vec{p} = \alpha \vec{E}$.

Suponga que un átomo no polar está constituido por una nube electrónica, de densidad uniforme ρ_0 , radio a_0 y carga total $-Ze$, que rodea a un núcleo puntual de carga $+Ze$. Halle la polarizabilidad para campos uniformes y pequeños, tales que la separación de los centros de carga positiva y negativa $\delta x \ll a_0$. Ésto nos permite suponer que la deformación de la nube electrónica, en presencia del campo, es despreciable. Suponga que el átomo es de hidrógeno y calcule $\frac{\delta x}{a_0}$ para $E = 1 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$. Tome $a_0 = 1 \text{ \AA}$.

Solución:

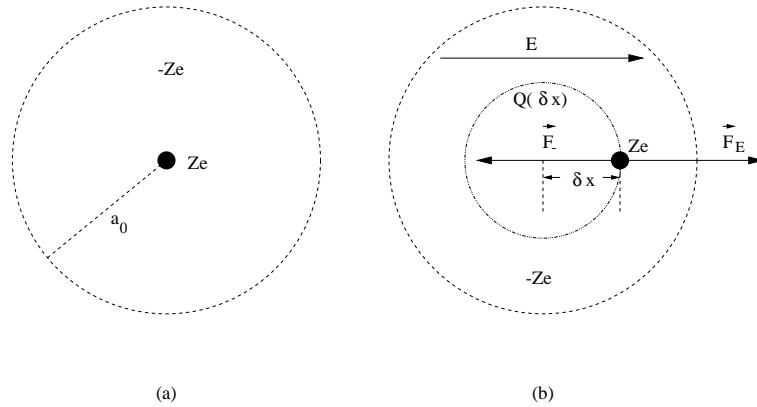


Figura 5.17:

La figura 5.17a muestra al átomo en ausencia de campo eléctrico. Los centros de carga positivo y negativo coinciden y, por lo tanto, el momento dipolar resultante es nulo.

Al aplicar el campo eléctrico, el nucleo se desplaza hacia la derecha y la nube electrónica lo hace en sentido contrario. En equilibrio, el núcleo se halla sometido a dos fuerzas iguales y contrarias: la debida al campo aplicado \vec{F}_E y la \vec{F}_- de la carga negativa encerrada en la esfera de radio δx .

$$F_E = Ze E$$

$$F_- = Ze E_-(\delta x) = \frac{Ze |Q(\delta x)|}{4\pi \varepsilon_0 \delta x^2} = \frac{(Ze)^2 \delta x}{4\pi \varepsilon_0 a_0^3}$$

Igualando los módulos de las dos fuerzas

$$p = Ze \delta x = 4\pi \varepsilon_0 a_0^3 E$$

$$\alpha = 4\pi \varepsilon_0 a_0^3$$

5-12. Para el átomo no polar cuyo modelo acabamos de describir, halle:

- a) Si es atraído o repelido por una carga puntual externa.
- b) ¿ Cuál es el momento dipolar inducido por dicha carga en el átomo?
- c) El valor cuantitativo de la fuerza de interacción.
- d) La representación gráfica del potencial de interacción.

5-13. Sea una partícula esférica, de radio a , con la masa M distribuida uniformemente en su volumen y la carga q distribuida uniformemente sobre su superficie. Halle la razón giromagnética de la misma cuando gira con velocidad angular uniforme $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ alrededor de un eje diametral. ¿ Podría este modelo corresponder a un electrón?

Solución:

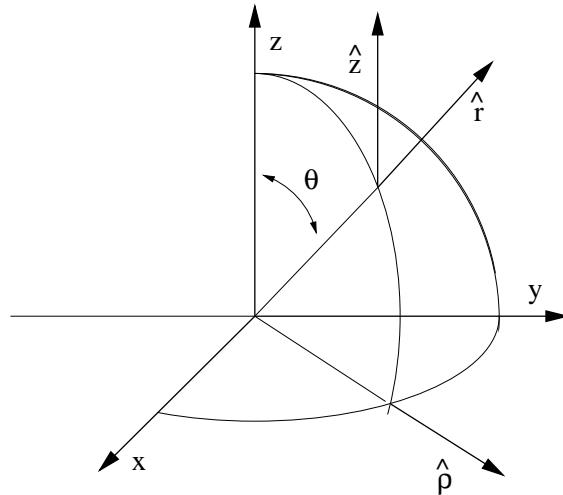


Figura 5.18:

Dado que la carga está distribuida uniformemente sobre la superficie, el momento dipolar magnético es

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \rho \int_S \vec{r} \wedge \vec{u} ds \quad , \quad \rho = \frac{q}{4\pi a^2} \quad , \quad ds = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Al estar la masa distribuida uniformemente sobre el volumen, el momento angular es

$$\vec{L} = \rho_M \int_V \vec{r} \wedge \vec{u} dv , \quad \rho_M = \frac{3M}{4\pi a^3} , \quad dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Estas integrales tienen un mismo integrando que descompondremos en las direcciones de los vectores unitarios cilíndricos \hat{z} y $\hat{\rho}$. De acuerdo con la figura 5.18

$$\hat{r} = \sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{z}$$

y

$$\vec{r} \wedge \vec{u} = \omega r^2 \hat{r} \wedge (\hat{z} \wedge \hat{r}) = \omega r^2 (\underbrace{\sin^2 \theta \hat{z} + \cos \theta \sin \theta \hat{\rho}}_{(A)})$$

La integral de la componente radial (A) es nula porque la distribución es simétrica con respecto al eje z , por lo que solo queda la componente \hat{z}

$$\vec{m} = \frac{1}{3} q a^2 \omega \hat{z}$$

De forma análoga

$$\vec{L} = \frac{2}{5} M a^2 \omega \hat{z}$$

La razón giromagnética y el factor de Landé son

$$\Gamma = \frac{m}{L} = \frac{5}{3} \frac{q}{2m} , \quad g = \frac{5}{3}$$

que no corresponden al spin del electrón.

5-14. Demuestre que, en general,

$$\int_V \vec{j} dv = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$$

(Repase la teoría del desarrollo multipolar para el caso particular de corrientes estacionarias).

5-15. Sean dos espiras idénticas, de radio $a \ll r$ y recorridas por una intensidad I . La primera está situada en el origen y orientada según \hat{z} . Halle la fuerza que ésta ejerce sobre la segunda si está situada en una posición (r, θ) y puede orientarse libremente.

5-16. Un solenoide, de longitud L y radio a , está constituido por un número grande de espiras N , uniformemente distribuidas y recorridas por una intensidad I . En el eje del solenoide se encuentra un pequeño imán cuyo momento magnético es \vec{m} .

- a) Cacule el par mínimo y máximo que experimenta el imán cuando se encuentra situado en el centro del solenoide y puede girarse alrededor de un eje perpendicular al del solenoide.
- b) Represente al campo magnético, la fuerza que actúa sobre el imán y su energía potencial, a lo largo del eje del solenoide si el imán puede orientarse libremente.
- c) Describa, apoyándose en la gráfica anterior, el movimiento del imán después de soltarlo en uno de sus extremos. Considere el caso ideal, sin rozamiento, y el real.
- d) Compare el movimiento del imán con el de la carga en una botella magnética, señale las diferencias y explíquelas.

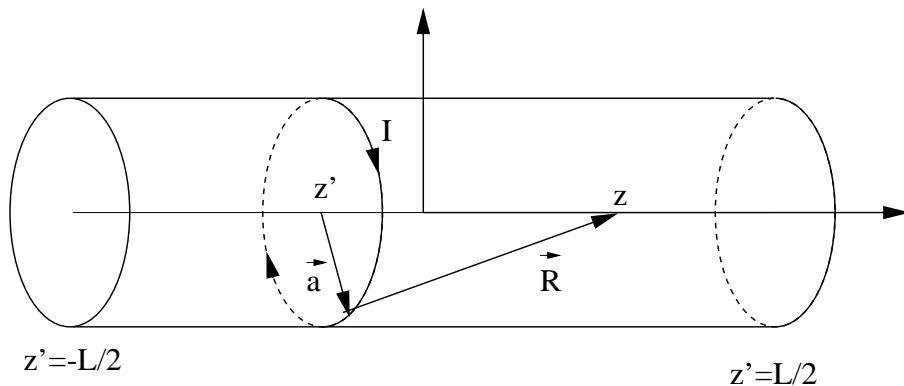


Figura 5.19:

Solución:

Sólo trataremos el cálculo del campo y el apartado (b)

Para calcular el campo producido por el solenoide en un punto de su eje, calcularemos primero el que una espira situada en un punto cualquiera z' produce en el punto z . En la figura 5.19 éste se sitúa en el intervalo $-\frac{L}{2} \leq z' \leq \frac{L}{2}$.

Este campo es

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \int_{\mathcal{L}} d\vec{l} \wedge \vec{R}$$

donde

$$d\vec{l} = a d\varphi \hat{\varphi} , \quad \vec{R} = -a \hat{\rho} + (z - z') \hat{z} , \quad R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$$

Dada la simetría del problema, la componente radial del campo se anula, quedando únicamente la longitudinal

$$\vec{B}_1 = B_{1z} \hat{z} , \quad B_{1z} = \frac{1}{2} \mu_0 I a^2 \frac{1}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Para obtener el campo total en z , debemos sumar las contribuciones de todas las espiras

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_0 I a^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{n dz'}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Teniendo en cuenta que $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{a^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{a^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}} \right)$$

Para el cálculo de la energía potencial y de la fuerza, haremos uso de las expresiones

El cálculo de la energía potencial y la fuerza, así como las representaciones gráficas las realizaremos con Mathematica.

Gráficas con Mathematica solenoide – iman.nb:

Normalizamos B_1 para que $B_1(z = z') = 1$.

$$\mathbf{B1} = \frac{\mathbf{1}}{(1 + \mathbf{x}^2)^{\frac{3}{2}}};$$

Al campo total lo normalizamos de manera que $(B_z)_{max} = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{Bz} &= \int_{z-0.5}^{z+0.5} \mathbf{B1} dz \\ \mathbf{Bz} &= \frac{\mathbf{Bz}}{\mathbf{Bz}/.z \rightarrow \mathbf{0}}; \end{aligned}$$

Tomamos $m = 1$ para la energía potencial W_p y la fuerza F_z .

$$\mathbf{Wp} = -\mathbf{Bz};$$

$$\mathbf{Fz} = \partial_z \mathbf{Bz}$$

En la figura 5.20 representamos al campo en rojo, a la energía en azul y a la fuerza en verde. Se marca con una línea horizontal la energía potencial máxima del imán en el movimiento prescrito en el apartado (c) y con líneas verticales los límites del mismo.

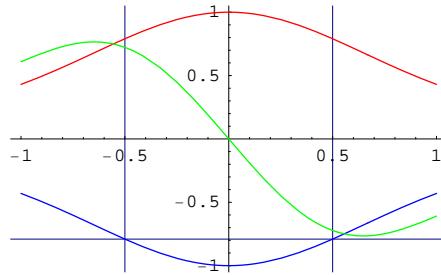


Figura 5.20:

```

Plot[{Bz, Wp, Fz}, {z, -1, 1},
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0, 1, 0]},
  GridLines -> {{-0.5, 0.5}, {Wp/.z -> 0.5}}];

```

- 5-17. Determine el potencial magnético escalar y , a partir de éste, el campo producido en su eje por una espira circular de radio a recorrida por una intensidad I .

Solución:

Debemos determinar el campo mediante

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla U_d$$

donde

$$U_d(\vec{r}) = -\frac{I\Omega}{4\pi}$$

Luego hay que calcular el ángulo sólido con que la espira, figura 5.21, se ve desde el punto z .

Dado el sentido de la intensidad elegido para recorrer la espira, la normal hacia afuera de la esfera centrada en z es $\vec{n}_r = -\vec{n}$ y el ángulo sólido es negativo.

$$\Omega = - \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_0} \sin \theta d\theta = 2\pi [\cos \theta]_0^{\theta_0} = 2\pi (\cos \theta_0 - 1)$$

De la figura se deduce que

$$\cos \theta_0 = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

por lo que

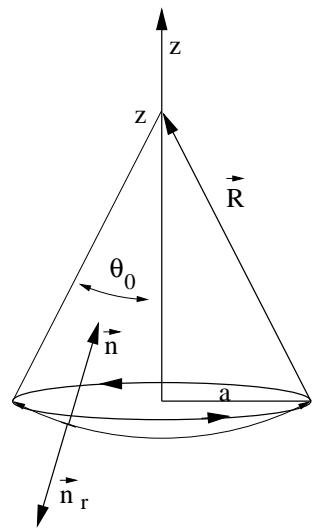


Figura 5.21:

$$B(z) = \frac{1}{2} \mu_0 I \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

resultado que debe coincidir con el obtenido en el problema 5-13

- 5-18. Calcule el campo magnético producido por la espira de la figura 5.22 en un punto lejano.

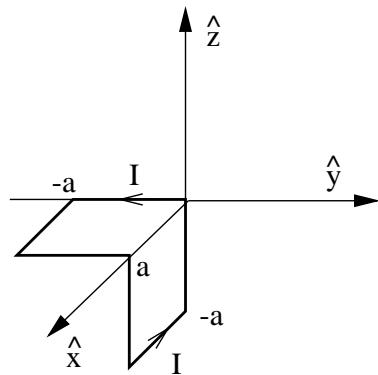


Figura 5.22:

Capítulo 6

Movimiento de partículas en un campo electromagnético

[Velyas, Golant et al., Reitz et al., Artsimovich y Loukianov]

6.1. Introducción

Hemos visto que una partícula puede poseer una estructura electromagnética intrínseca que le confiere un número de grados de libertad mayor que tres. Esto se traduce en la posible aparición de momentos multipolares y la consiguiente complicación de las ecuaciones del movimiento de esta partícula. Basta con que nos ocupemos aquí de las características esenciales del movimiento no relativista de monopolos eléctricos y dipolos magnéticos. Para cargas puntuales, las ecuaciones del movimiento se deducen de la fuerza de Lorentz. Para dipolos tendríamos que hacer uso de las expresiones de las fuerzas y los pares obtenidos en los capítulos anteriores y tener en cuenta que, a pesar de las similitudes, el dipolo magnético está siempre asociado a un momento angular, cosa que no ocurre con el dipolo eléctrico.

Es importante comprender los aspectos básicos del movimiento individual de partículas en el campo electromagnético puesto que en ellos reside el fundamento, o parte del fundamento, de muchos sistemas físicos naturales y artificiales. Incluso para sistemas que, por sus dimensiones o velocidades, requieren un tratamiento cuántico o relativista, la descripción clásica no relativista ayuda a fijar ideas e imágenes cualitativas. Muchas facetas de la Física de Plasmas, de nuestra propia Magnetosfera, del comportamiento magnético de la materia, y de sistemas tales como el tubo de rayos catódicos, el espectrómetro de masas, el microscopio electrónico, el Tokamak y otras máquinas de confinamiento magnético, requieren para su estudio un amplio conocimiento del comportamiento dinámico individual de partículas en el seno de campos eléctricos y magnéticos.

En las primeras secciones de éste capítulo se plantearán los conceptos fundamentales asociados al movimiento de partículas y en la última se expondrá una serie de ejemplos significativos en la mayoría de los cuales se resuelven numéricamente las ecuaciones de dicho movimiento con ayuda de Mathematica. En capítulos anteriores se ha anticipado

el planteamiento de alguno de los casos que aquí se estudian de forma más sistemática y se han ofrecido programas Mathemática para ilustrarlos ¹.

6.2. Movimiento de una carga en campos uniformes

6.2.1. Campo eléctrico constante

Una carga sometida a un campo eléctrico uniforme y constante sufre una aceleración uniforme en la dirección de dicho campo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{E} , \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{q}{m} \vec{E} t \quad (6.1)$$

Por unidad de tiempo va adquiriendo una energía cinética ²

$$\begin{aligned} \frac{dW_c}{dt} &= m \vec{v} \cdot \vec{a} \\ &= q \vec{E} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (6.2)$$

igual a la energía potencial que pierde

$$\begin{aligned} \frac{dW_p}{dt} &= q \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \\ &= -q \vec{E} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.2.2. Campo eléctrico lentamente variable

Si el campo eléctrico es variable con el tiempo, $\vec{E} = \vec{E}(t)$, se generará un campo magnético tal que

$$\nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Para hacer una estimación de la importancia de B en el movimiento, supongamos que L es una longitud característica de la variación espacial de B , y T es un tiempo característico de la variación temporal de E . Los órdenes de magnitud de los dos miembros de la ecuación anterior pueden estimarse en

$$\frac{B}{L} \sim \frac{1}{c^2} \frac{E}{T}$$

Por lo que la relación entre la fuerza magnética y la eléctrica será

$$\frac{F_m}{F_e} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v(L/T)}{c^2}$$

de forma que, para

$$v \left(\frac{L}{T} \right) \ll c^2$$

¹Véanse los problemas 1-10, 1-11 y 5-16.

²Escribimos $W_c = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}$.

la fuerza magnética será despreciable y tendremos, aproximadamente, un movimiento acelerado no uniformemente en la dirección del campo eléctrico

$$\vec{a}(t) \simeq \frac{q}{m} \vec{E}(t), \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{q}{m} \int_0^t \vec{E}(t) dt$$

6.2.3. Campo magnético constante. Movimiento ciclotrónico

Si la partícula está sometida exclusivamente a un campo magnético uniforme y constante, la aceleración sufrida será perpendicular a la velocidad

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \quad (6.4)$$

ecuación que pone de manifiesto que el vector velocidad tiene un movimiento de precesión con velocidad angular $\vec{\Omega}$, o *frecuencia ciclotrónica*³

$$\vec{\Omega} = -\frac{q\vec{B}}{m} = -\frac{q}{m} B \hat{b}, \quad \hat{b} = \frac{\vec{B}}{B}, \quad \Omega = \frac{|q| B}{m} \quad (6.5)$$

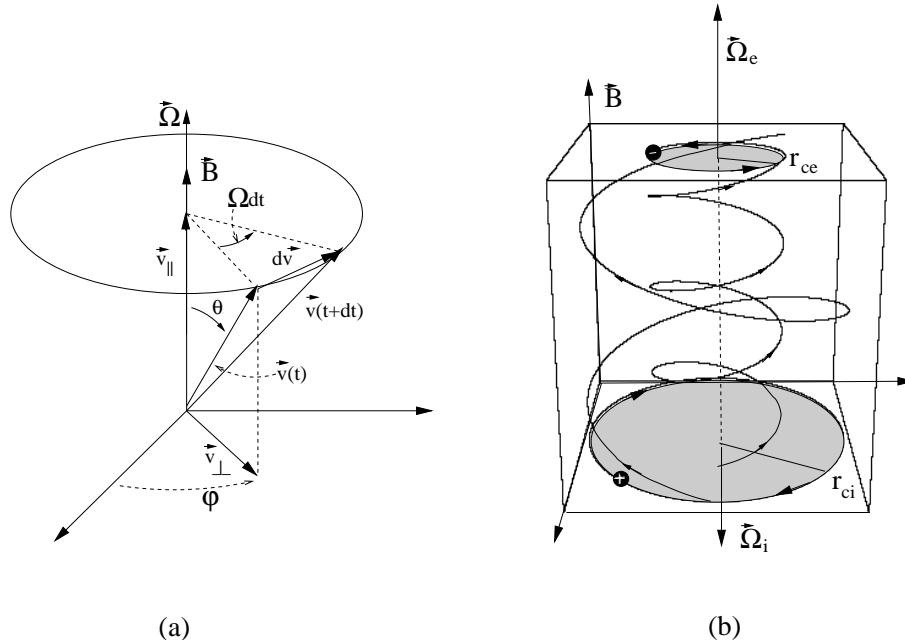


Figura 6.1:

En la figura 6.1-a se representa la precesión del vector velocidad, para un electrón, y se observa que, al ser $\frac{d\vec{v}}{dt} \perp \vec{v}$, la componente de velocidad paralela al campo aplicado, $\vec{v}_{||}$, es constante, mientras que la componente perpendicular al mismo, \vec{v}_{\perp} , es de módulo constante y gira en el plano con velocidad $\vec{\Omega}_e$.

³Esta frecuencia guarda una relación estrecha con la de Larmor, la cual trataremos más adelante.

Como puede verse en la figura 6.1-b, la frecuencia ciclotrónica $\vec{\Omega}_e$ de los electrones tiene el mismo sentido del campo magnético, mientras que la $\vec{\Omega}_i$ de los iones positivos tiene el sentido contrario: los electrones giran a derechas alrededor del campo magnético y los iones lo hacen a izquierdas. Dada la relación inversa de la velocidad angular con la masa, la frecuencia ciclotrónica de los electrones Ω_e es muy superior a la de los protones y otros iones positivos Ω_i .

$$\Omega_e = \frac{M}{m} \Omega_i$$

donde M es la masa del ión positivo, ión pesado, y m la del electrón, la más pequeña.

Para comprobar lo dicho anteriormente y estudiar otros aspectos de este problema, es útil descomponer la velocidad y la aceleración en la dirección del campo magnético y dentro del plano transversal al mismo

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \\ \vec{a} &= \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}\end{aligned}$$

De esta forma, la ecuación 6.4 se descompone en otras dos que son independientes entre sí

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\parallel} &= \vec{0} \\ \vec{a}_{\perp} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\perp}\end{aligned}\tag{6.6}$$

Con la ecuación del movimiento paralelo comprobamos que

$$\vec{v}_{\parallel} = cte$$

Por lo que se refiere al movimiento en el plano perpendicular, multiplicando escalarmente la ecuación correspondiente por \vec{v}_{\perp}

$$\vec{v}_{\perp} \cdot \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d v_{\perp}^2}{dt} = 0 \Rightarrow v_{\perp} = |\vec{v}_{\perp}| = cte$$

El movimiento es, por lo tanto, la superposición de un giro en un plano perpendicular a \vec{B} y una translación uniforme a lo largo del mismo. Se trata, pues, de un movimiento helicoidal de paso constante. La velocidad con que se mueve el centro de giro, o *velocidad del centro de guía*, es

$$\vec{v}_{CG} = \vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \hat{\vec{b}}) \hat{\vec{b}}\tag{6.7}$$

Hemos visto que v_{\parallel} y v_{\perp} son constantes, luego la energía cinética paralela, $W_{\parallel} = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2$, la perpendicular $W_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$ y la total

$$W_c = W_{\perp} + W_{\parallel}$$

también son constantes del movimiento, lo que, por otra parte, se debe al hecho ya comentado de que el campo magnético no trabaja sobre la carga porque la fuerza que produce es perpendicular a la trayectoria.

Para calcular el radio de giro de la partícula en el plano perpendicular, recordemos que, en el movimiento circular,

$$\vec{v}_\perp = \vec{\Omega} \wedge \vec{\rho}$$

donde $\vec{\rho}$ es el *radio de giro ciclotrónico*.

Multiplicando vectorialmente por $\vec{\Omega}$

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_\perp = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{\rho}) = \underbrace{\vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\rho})}_{=0} - \vec{\rho}\Omega^2$$

y, como $\vec{\Omega} \perp \vec{\rho}$

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{v}_\perp \wedge \vec{\Omega}}{\Omega^2}, \quad \rho = \frac{v_\perp}{\Omega} \quad (6.8)$$

Si comparamos el movimiento de un electrón y de un monión positivo, ambos incidentes con la misma velocidad ⁴, el electrón giraría en el sentido de la regla del tornillo, alrededor de \vec{B} , con una gran velocidad angular y un pequeño radio de giro ($\rho_e \sim 1/\Omega_e$), y el ion lo haría en sentido contrario con gran radio de giro y pequeña velocidad angular, según puede verse en la figura ??-b.

Cuando la velocidad del centro de guía es pequeña comparada con la velocidad de rotación de la partícula, la trayectoria puede considerarse como una espira cerrada, circular, que se mueve a lo largo de la línea de campo magnético. Este efecto de atrapamiento de las cargas en las líneas del campo tiene una gran transcendencia en numerosos procesos naturales y artificiales, como el confinamiento magnético de plasmas para la fusión nuclear y la protección de la biosfera del viento solar.

La espira antes mencionada tiene un momento magnético

$$\vec{\mu} = I \vec{S}, \quad I = q \frac{\Omega}{2\pi}, \quad \vec{S} = \pi \rho^2 \hat{n}, \quad \hat{n} = \begin{cases} \hat{b} & \text{para electrones} \\ -\hat{b} & \text{para iones positivos} \end{cases}$$

I es la intensidad equivalente, es decir, la carga que pasa por un punto determinado en la unidad de tiempo, y S la superficie de la trayectoria. Substituyendo

$$\vec{\mu} = -\frac{W_\perp}{B} \hat{b} \quad (6.9)$$

Luego, el momento magnético inducido en una partícula es de sentido contrario al del campo aplicado. Debido a este comportamiento, diremos que un medio constituido por partículas cargadas libres es un medio *diamagnético* no lineal ⁵.

El flujo Φ cortado por la trayectoria de la partícula es proporcional al momento magnético a través de una constante independiente del campo y de la energía cinética de la misma.

$$\begin{aligned} \Phi &= \pi \rho^2 B = \pi B \frac{v_\perp^2}{\Omega^2} = \frac{2\pi m}{q^2} \left(\frac{W_\perp}{B} \right) = \\ &= \frac{2\pi m}{q^2} \mu \end{aligned} \quad (6.10)$$

⁴Para una misma energía cinética del electrón tendría mucha mayor velocidad que el ion

⁵ μ no es proporcional a B .

6.2.4. Campo magnético lentamente variable

Supongamos que una carga está sometida a un campo uniforme $\vec{B}(t)$ que varía lentamente y que es perpendicular al movimiento, es decir, tal que $\vec{v}_\parallel = \vec{0}$.

Entenderemos por campo lentamente variable a uno que cumpla, en valor absoluto, la condición

$$|\Delta B| \simeq \left| \frac{dB}{dt} T \right| \ll B , \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

es decir, un campo que varíe relativamente poco en un periodo de giro ciclotrónico T .

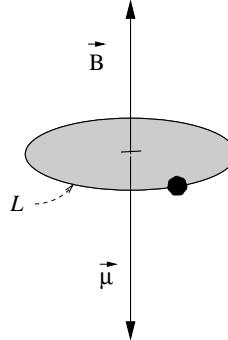


Figura 6.2:

Demostraremos que, bajo estas condiciones, el momento magnético permanece prácticamente constante

$$\Delta\mu \simeq 0 \Rightarrow \Delta\Phi \simeq 0 \quad (6.11)$$

Si ΔB y ΔW_\perp son de pequeña magnitud

$$\Delta\mu = \Delta \left(\frac{W_\perp}{B} \right) \simeq \frac{1}{B} \Delta W_\perp - \frac{1}{B^2} \Delta B \quad (6.12)$$

Estimaremos ΔW_\perp en un periodo suponiendo que, bajo estas circunstancias, podemos considerar que las órbitas son cerradas, quasi-circulares. Sin embargo, el campo eléctrico, generado por la variación temporal del campo magnético, incrementará la energía cinética de la partícula en una pequeña cantidad que obtendremos integrando a lo largo de la órbita \mathcal{L} y haciendo uso de la ley de inducción de Faraday.

$$\Delta W_\perp = q \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \simeq q\pi\rho^2 \frac{dB}{dt}$$

donde se ha supuesto que $\rho = \frac{mv_\perp}{qB} \simeq cte$, lo que, bajo las condiciones impuestas, puede demostrarse que es una hipótesis válida.

Puesto que, para campos lentamente variables $\Delta B \simeq \frac{dB}{dt} \frac{2\pi}{\Omega}$, substituyendo en el ecuación 6.12, se comprueba que, efectivamente, $\Delta\mu \simeq 0$.

El momento magnético $\vec{\mu}$ y el flujo Φ permanecen prácticamente invariables, por lo que se dice que son *invariantes adiabáticos*.⁶

6.2.5. Campo eléctrico y magnético

Cuando la partícula sufre la acción conjunta de un campo eléctrico y uno magnético, uniformes y constantes, las ecuaciones del movimiento pueden ser escritas de la forma

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \quad (6.13)$$

En este caso existe una aceleración uniforme en el sentido del campo eléctrico

$$\vec{a}_{||} = (\vec{a} \cdot \hat{\vec{b}}) \hat{\vec{b}} = \frac{q}{m} E_{||} \hat{\vec{b}}$$

que da lugar a una velocidad paralela

$$\vec{v}_{||} = \vec{v}_{0||} + \frac{q}{m} \vec{E}_{||} t$$

6.2.5.1. \vec{E} y \vec{B} perpendiculares. Deriva ambipolar

La aceleración en el plano perpendicular será

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{||} = \frac{q}{m} \vec{E}_{\perp} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E}_{\perp} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\perp}$$

Comprobaremos que el movimiento en el plano perpendicular puede seguir viéndose como un giro de frecuencia $\vec{\Omega}$ si observamos desde un sistema adecuado que se mueva con velocidad uniforme.

Sea

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v}_E + \vec{v}_1$$

donde $\vec{v}_E = c\vec{t}e$ y \vec{v}_1 es la velocidad de la partícula con respecto al sistema de coordenadas que se mueve con velocidad \vec{v}_E . De acuerdo con esto, podemos escribir

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \underbrace{\frac{q}{m}(\vec{E}_{\perp} - \vec{B} \wedge \vec{v}_E)}_{(a)} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_1$$

(a) se anula si hacemos

$$\vec{E}_{\perp} = \vec{B} \wedge \vec{v}_E$$

y \vec{v}_E puede despejarse de esta ecuación multiplicando vectorialmente por \vec{B} , teniendo en cuenta que $\vec{B} \wedge \vec{E}_{||} = 0$ y que $\vec{v}_E \perp \vec{B}$. Desarrollando el triple producto del segundo miembro se tiene que

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \wedge \hat{\vec{b}}}{B} \quad (6.14)$$

⁶Para una exposición del concepto de invariante adiabático, véase [Goldstein].

Esta es, en consecuencia, una velocidad de arrastre, o *deriva ambipolar*, puesto que sólo es función de los campos y no de la carga o la masa del ión.

La ecuación restante

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_1$$

describe el movimiento ciclotrónico de la carga con respecto a un observador que se mueve con velocidad \vec{v}_E referida al sistema de referencia original.

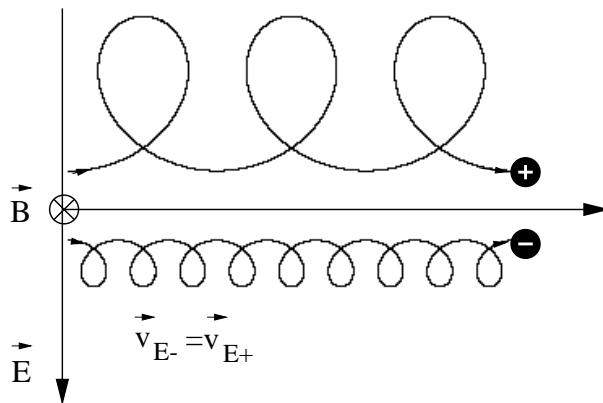


Figura 6.3:

En la figura 6.3 vemos que la partícula gira alrededor de \vec{B} pero es arrastrada perpendicularmente a los campos con una velocidad \vec{v}_E que es independiente del signo de la carga.

Es fácil comprobar que, si substituimos la fuerza eléctrica por la gravitatoria, o cualquier otra fuerza independiente de la carga, la velocidad de arrastre resultante viene afectada por el signo de la carga.

6.2.5.2. \vec{E} y \vec{B} paralelos. Enfoque magnético

Algunos de los sistemas de enfoque de partículas cargadas hacen uso de campos magnéticos y eléctricos paralelos, lo que da lugar a una velocidad de arrastre nula y un movimiento helicoidal de paso uniformemente variable en la dirección de los campos.

Si la velocidad inicial de una carga es \vec{v}_0 , la velocidad paralela será

$$v_{||} = v_0 \cos \theta + \frac{q}{m} Et$$

El espacio recorrido en un periodo de revolución $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ es

$$L(\theta) = v_0 \cos \theta T + \frac{q}{2m} ET^2 \simeq v_0 T + \frac{q}{2m} ET^2 = L$$

siendo θ el ángulo que forma \vec{v}_0 con \vec{B} .

Si θ es lo suficientemente pequeño, véase la figura 6.4, como para que podamos realizar la aproximación $\cos \theta \simeq 1$ ⁷, la longitud recorrida por partículas monoenergéticas emitidas desde un punto, con una ligera dispersión angular alrededor de la dirección de los campos, es la misma, ya que T también lo es, por lo que coinciden en el mismo punto de enfoque. En los enfoques magnéticos se utiliza un diafragma para eliminar a los electrones emitidos con valores grandes de θ .

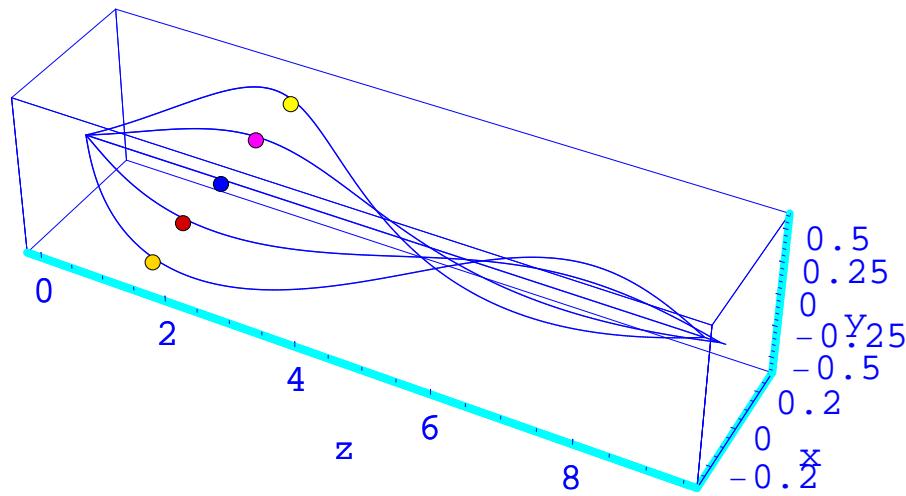


Figura 6.4:

6.3. Movimientos de cargas en campos no homogéneos

6.3.1. Óptica electrónica

Las leyes del movimiento de una carga en un campo eléctrico no homogéneo suelen ser difíciles de integrar analíticamente debido a la estructura complicada de los campos. Frecuentemente, en los casos de interés, no se dispone de una expresión cerrada de los mismos y es necesario recurrir a la integración numérica. No obstante, como apuntaremos a continuación, el movimiento de una partícula cargada en un potencial no uniforme sigue leyes análogas a las de la marcha de un rayo en un medio ópticamente no homogéneo, lo que permite aplicar, en gran medida, las técnicas de la óptica de rayos al movimiento de cargas en campos electrostáticos. Esto da lugar a lo que se conoce como *Óptica electrónica*.

En la figura 6.5 se muestra esquemáticamente media *lente electrostática*. Está constituida por una placa conductora conectada a un potencial V_0 , en la que se practica una abertura circular.

⁷Ésto significa despreciar términos del orden $\theta^2 \text{ rad}^2$.

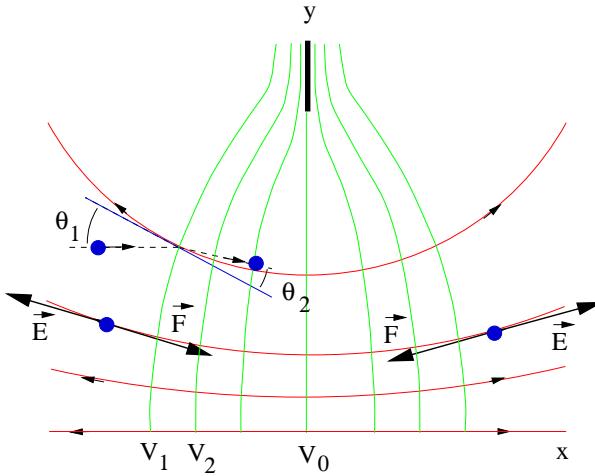


Figura 6.5:

En línea de puntos se representa la trayectoria de una carga, un electrón, que incide sobre la lente. Las direcciones marcadas para la fuerza y el campo corresponden a $V_0 > 0$ y $q = -e$. Puede observarse que $F_y < 0$ a ambos lados de la lente, por lo que la fuerza tiende a llevar a la carga hacia el eje x . Por otra parte, $F_x > 0$ para $x < 0$ y $F_x < 0$ para $x > 0$ por lo que la carga es atraída hacia la lente cuando está a la izquierda de la misma, mientras que es frenada una vez pasa a su lado derecho. Éste es el mecanismo básico de focalización de este tipo de lente.

En la última sección de este capítulo se verá que una espira cargada se comporta como una lente electrostática.

Nos limitaremos aquí a mostrar que la ley que gobierna la refracción de la trayectoria de una carga al atravesar la superficie de separación de dos semiespacios equipotenciales, véase la figura 6.6, es análoga a la que rige para un rayo luminoso que atraviesa la superficie de separación entre dos medios de distinto índice de refracción.

Teóricamente podríamos representar esta discontinuidad mediante una distribución dipolar uniforme sobre la superficie S o, en la práctica, mediante dos láminas metálicas, lo bastante finas para ser transparentes a las cargas incidentes, separadas una pequeña distancia Δx y puestas a unos potenciales convenientes V_1 y V_2 . Por simetría, al atravesar S , la carga sufre un impulso perpendicular a la misma, por lo que la componente tangencial de la cantidad de movimiento no se vería afectada y

$$v_{t_1} = v_1 \operatorname{sen} \theta_1 = v_{t_2} = v_2 \operatorname{sen} \theta_2 \quad (6.15)$$

La componente normal adquiriría un impulso correspondiente al incremento de energía potencial.

Puesto que la fuerza actuante es conservativa, la energía mecánica, suma de la energía cinética y la potencial, se conserva. Si fijamos el origen de potenciales en el punto en que los electrones están en reposo,

$$\frac{1}{2} m v^2 - e V = 0 \Rightarrow v_1 = cte \sqrt{V_1} , \quad v_2 = cte \sqrt{V_2} , \quad cte = \sqrt{\frac{2e}{m}}$$

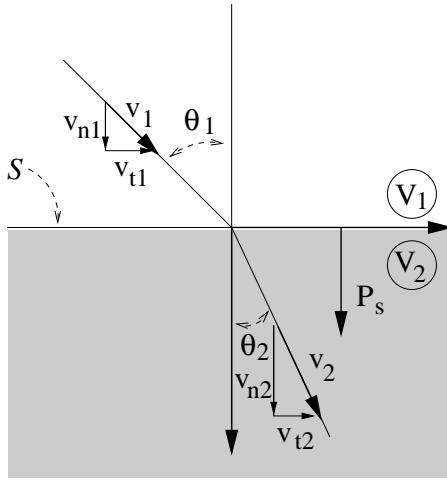


Figura 6.6:

Substituyendo en la expresión 6.15, se tiene que

$$\sqrt{V_1} \operatorname{sen} \theta_1 = \sqrt{V_2} \operatorname{sen} \theta_2$$

Expresión análoga a la ley de Snell.

6.3.2. Difusión (scattering) de partículas en fuerzas centrales

Un problema básico en Física Atómica es el de la interacción individual entre partículas. La energía de interacción suele presentar simetría radial

$$W_p(r) \sim r^{-n}$$

lo que corresponde a una fuerza central.

Estas fuerzas de interacción pueden ser de diversos tipos. La más importante es la coulombiana, entre dos partículas cargadas, para la cual $n = 1$.

Cuando una partícula cargada se acerca a un átomo neutro, lo polariza, ya que el campo producido por ésta

$$\vec{E}_q = \frac{k}{r^2} \hat{r}$$

separa ligeramente a los centros de carga positiva y negativa del neutro, induciéndose un momento dipolar que es, muy aproximadamente, proporcional a dicho campo

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}$$

lo que se traduce en una energía de interacción, de tipo atractivo entre la carga y el dipolo, que puede expresarse como

$$W_p = q V_d = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\frac{C}{r^4}$$

donde C es una constante.

Entre neutros tienen lugar las fuerzas de tipo Van der Waals, atractivas, con $n = 6$, y de origen diverso, como puede ser la interacción entre dos dipolos permanentes, entre dipolos permanentes e inducidos e, incluso, entre dos dipolos inducidos. Estas últimas, que se conocen como fuerzas de London y son las más importantes, pueden interpretarse como la interacción entre el dipolo instantáneo de una molécula, que por término medio no es polar, con el dipolo inducido en la otra.

Por último, cuando las distancias entre partículas son lo suficientemente pequeñas para que exista un solapamiento substancial de nubes electrónicas, aparecen fuerzas cuánticas de variación muy rápida y generalmente repulsivas.

Aquí trataremos la difusión elástica de partículas en un potencial coulombiano. En este caso, la integración de las ecuaciones del movimiento constituye el problema clásico de Kepler [Goldstein] y como resultado se obtienen trayectorias hiperbólicas, parabólicas o elípticas, según la energía total $W_0 = W_c + W_p$, suma de la energía cinética W_c más la potencial W_p , sea respectivamente > 0 , $= 0$ ó < 0 .

Dejaremos para la última sección de este capítulo la integración de las ecuaciones del movimiento, referido al centro de masas, de dos cargas, con distintas relaciones de carga a masa y diversas condiciones iniciales, para mostrar en una película sus respectivas órbitas.

Por ahora, solamente consideraremos el problema de scattering, o difusión, elástico , figura 6.7, en el que se supone que las partículas están inicialmente a distancia infinita, acercándose con $W_0 = W_c(\infty) > 0$ y nos interesamos solamente por el balance final de la interacción, o colisión.

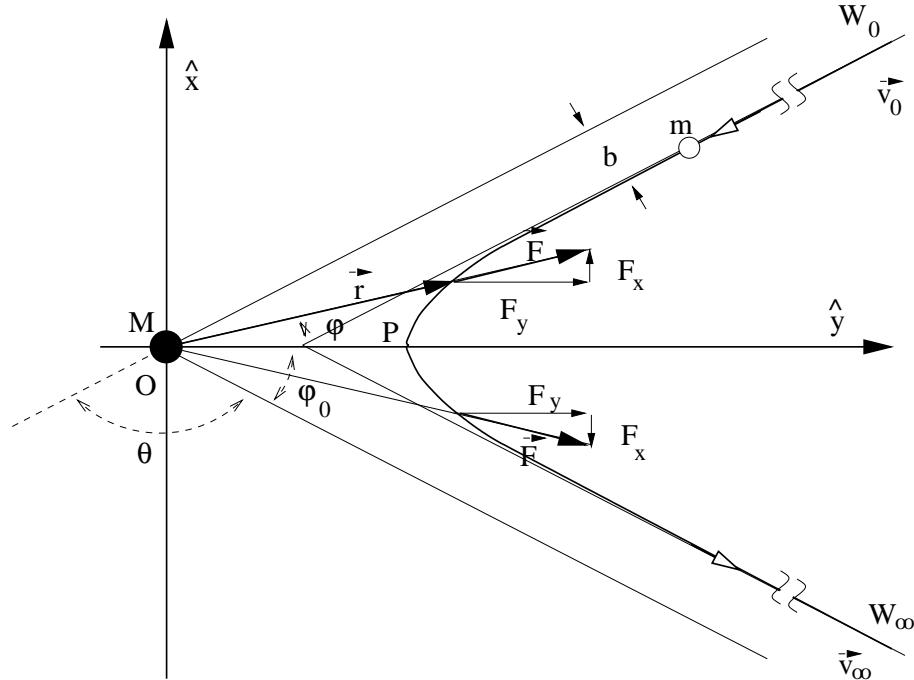


Figura 6.7:

Es decir, nos preguntamos cuánta energía y cuánto momento han intercambiado las partículas y cuánto han desviado sus trayectorias. Estas serán hiperbólicas y el centro de masas será el foco interno para fuerzas atractivas y el externo para las repulsivas.

Consideraremos la interacción repulsiva entre dos cargas de igual signo, una partícula ligera, de masa m , y otra pesada, de masa $M \gg m$, lo que nos permite considerar a esta última quieta, en el centro de masas, actuando como centro dispersor de la primera. Elegimos como eje y al que une al centro de dispersión O con el punto de máximo acercamiento P . Definiremos como *parámetro de impacto* a la distancia b entre las asíntotas de la hipérbola y sus paralelas que pasan por O y como *ángulo de difusión* al ángulo θ que forman la asíntota de acercamiento con la de fuga.

Puesto que la colisión es elástica, la energía cinética se conserva

$$W_{c0} = \frac{P_0^2}{2m} = W_{c\infty} = \frac{P_\infty^2}{2m} \Rightarrow P_0 = P_\infty = m v_0 \quad (6.16)$$

y el módulo de la cantidad de movimiento, P_0 y P_∞ también.

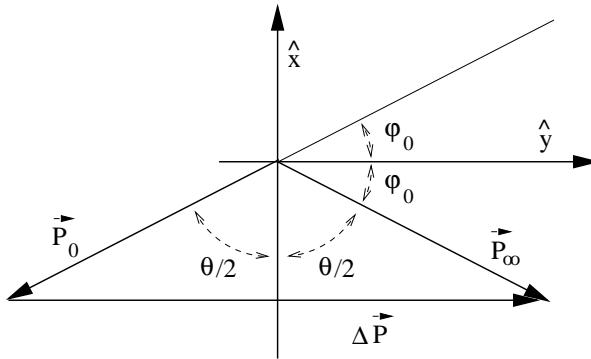


Figura 6.8:

En la figura 6.8 se muestra como las cantidades de movimiento inicial y final tienen la misma magnitud pero la segunda ha girado un ángulo θ con respecto a la primera. Luego

$$\Delta P = 2P_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad (6.17)$$

Para hallar el ángulo de difusión, integramos la fuerza

$$\Delta \vec{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F} dt = 2\hat{y} \int_0^{\infty} F_y dt$$

donde se ha tenido en cuenta que, dada la simetría de la trayectoria, $F_x(x, y) = -F_x(-x, y)$, por lo que $\Delta P_x = 0$.

Según la figura 6.7

$$F_y = F \cos \varphi = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \cos \varphi$$

y, teniendo en cuenta que $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$

$$\Delta P = \frac{2q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi}{r^2} dt = \frac{2q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi}{r^2 \dot{\varphi}} d\varphi \quad (6.18)$$

Para evaluar esta integral comprobaremos que $r^2 \dot{\varphi} = cte$, con lo que este término puede sacarse fuera de la integral, y lo expresaremos en función del parámetro de impacto b y la velocidad inicial v_0 .

En un campo central, $\vec{F} = K \hat{r}$, el momento angular es constante

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T} = \vec{r} \wedge \vec{F} \sim \vec{r} \wedge \vec{r} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = cte \Rightarrow \vec{r} \wedge \vec{v} = cte$$

y

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = r \hat{r} \wedge \frac{dr \hat{r}}{dt} = r \hat{r} \wedge \left(\frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \right) = r^2 \dot{\varphi} \hat{\varphi} = cte \Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = cte$$

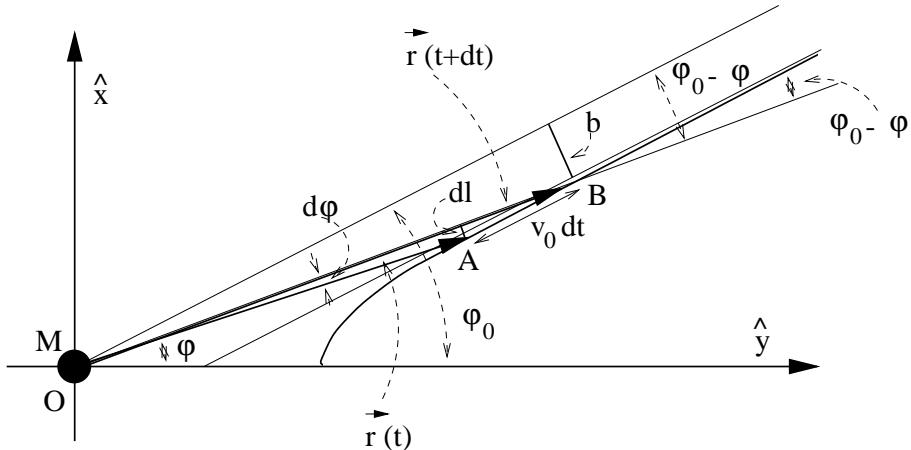


Figura 6.9:

Para expresarlo en función de b y v_0 , supongamos a la partícula lejos del origen con velocidad inicial v_0 . Como puede verse en la figura 6.9, la partícula lejana recorre una distancia $\overline{AB} = v_0 dt$ en el intervalo de tiempo dt , por lo que, a la distancia r , el vector de posición gira un ángulo

$$d\varphi = \frac{dl}{r} = \frac{v_0 dt \sin(\varphi_0 - \varphi)}{r} = \frac{v_0 b}{r^2} dt \Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = v_0 b$$

donde se ha hecho uso de la aproximación $b \simeq r \sin(\varphi_0 - \varphi)$.

Substituyendo en la expresión 6.18,

$$\Delta P = \frac{2q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\sin \varphi_0}{v_0 b}$$

Teniendo en cuenta que, véase la figura 6.9, $2\varphi_0 + \theta = \pi$ y las expresiones 6.17 y 6.16, el ángulo de difusión resulta ser

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{8\pi \varepsilon_0} \frac{1}{W_{c0} b} \quad (6.19)$$

En una colisión frontal, $b = 0$, la partícula invertirá su trayectoria, $\theta = \pi$, sufriendo un incremento de cantidad de movimiento, de acuerdo con 6.17, $\Delta P = 2P_0$. En la colisión lejana, $b \rightarrow \infty$, $\theta = 0$ y $\Delta P = 0$.

6.3.3. Botellas magnéticas

De entre los aspectos característicos e interesantes del movimiento de partículas en campos magnéticos no homogéneos, estudiaremos el principio de confinamiento en botellas magnéticas. Para aislar este efecto de otros posibles, como las derivas por curvatura de las líneas de campo, etc., supondremos que una partícula está atrapada en una línea de campo recta a lo largo de la cual el campo varía de forma suave. En la figura 6.10 se muestra un campo con simetría cilíndrica alrededor de dicha línea.

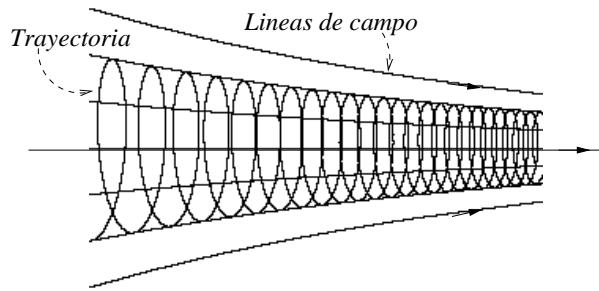


Figura 6.10:

Para simplificar, supondremos que $\vec{B} = B_z \hat{z}$ y que la velocidad paralela, $v_{||} = v_z$, es lo bastante lenta como para poder considerar a su trayectoria como cerrada y a la carga como un dipolo magnético

$$\vec{\mu} = -\frac{W_\perp}{B_z} \hat{z}$$

Demostraremos que $\mu = \frac{W_\perp}{B_z}$ es una constante del movimiento. Para ello, derivamos

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{B_z} \left(\frac{dW_\perp}{dt} - \mu \frac{dB_z}{dt} \right) \quad (6.20)$$

Calcularemos $\frac{dW_\perp}{dt}$ considerando que el campo magnético no trabaja sobre la carga, la energía total es invariante, y

$$\frac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dW_{\perp}}{dt} = -\frac{dW_{\parallel}}{dt} \quad (6.21)$$

Luego, los aumentos (disminuciones) de energía cinética transversal se traducen en disminuciones (aumentos) equivalentes de la energía cinética paralela, de forma que la suma de ambas es una constante del movimiento.

Por otra parte, la variación temporal de W_{\parallel} se debe a la fuerza

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{z}$$

que actúa sobre el dipolo. La potencia suministrada al movimiento paralelo es

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = F_z v_z = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} = -\mu \frac{dB_z}{dt} \quad (6.22)$$

donde $\frac{dB_z}{dt}$ es la derivada total de B_z a lo largo de la trayectoria del dipolo.

De 6.21 y 6.22 se deduce que

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \mu \frac{dB_z}{dt}$$

Substituyendo este resultado en 6.20, se llega a la conclusión de que

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \Rightarrow \mu = cte \quad (6.23)$$

Aquí, como en el caso de la variación temporal lenta del campo, el momento magnético permanece constante y también el flujo cortado por la trayectoria de la espira. Luego, la trayectoria, según se indica en la figura anterior, estará situada sobre la superficie de un tubo de flujo. Además, podemos ver que si el campo aumenta en la dirección z , es decir, las líneas de campo convergen en la dirección z , la fuerza que se ejerce sobre este dipolo rígido será negativa, por lo que una partícula que se desplace hacia valores crecientes de B verá disminuir W_{\parallel} en beneficio de W_{\perp} , pudiendo ver invertido el sentido del movimiento.

En la figura 6.11 se representa una configuración básica de *botella magnética*. Las zonas donde el campo es máximo, donde convergen las líneas, se conocen como *cuellos* o *espejos* de la botella.

A lo largo de la trayectoria $W = \frac{1}{2} m v^2 = cte$, luego $v = v_0 = cte$. Además, como acabamos de comprobar, $\mu = \frac{W_{\perp}}{B} = cte$ y, de acuerdo con la figura 6.11, $v_{\perp} = v_0 \sin \theta$, de lo que se deduce que

$$\frac{\sin^2 \theta}{B} = \frac{\sin^2 \theta_0}{B_0} = cte \quad (6.24)$$

Supongamos que una partícula se dirige desde el centro hacia el espejo derecho, es decir, hacia el punto en que $B = B_{max}$. Como el campo es creciente, la fuerza, que tiene la dirección contraria al gradiente de dicho campo, va frenando a la partícula. Si antes de llegar al punto de campo máximo, para $B = B_r < B_{max}$, el ángulo crece hasta

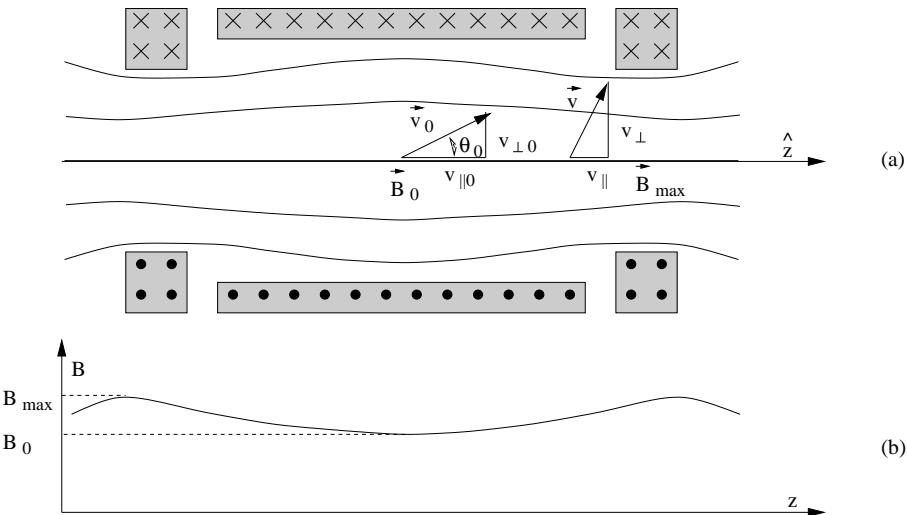


Figura 6.11:

el valor $\theta = \frac{\pi}{2}$, la velocidad paralela $v_{||} = v_0 \cos \theta$ se anula y la partícula es reflejada, impelida hacia el centro de la botella. El punto en que $B = B_r < B_{max}$ es el de reflexión o espejo.

En caso contrario, cuando la partícula llega al punto de campo máximo todavía le sobra energía cinética paralela para escapar de la botella. Una botella magnética tiene, pues, un *cono de fugas*, de apertura θ_F , por el que se escapan todas las partículas con $\theta_0 < \theta_F$, siendo, de acuerdo con 6.24

$$\operatorname{sen} \theta_F = \sqrt{\frac{B_0}{B_{max}}} \quad (6.25)$$

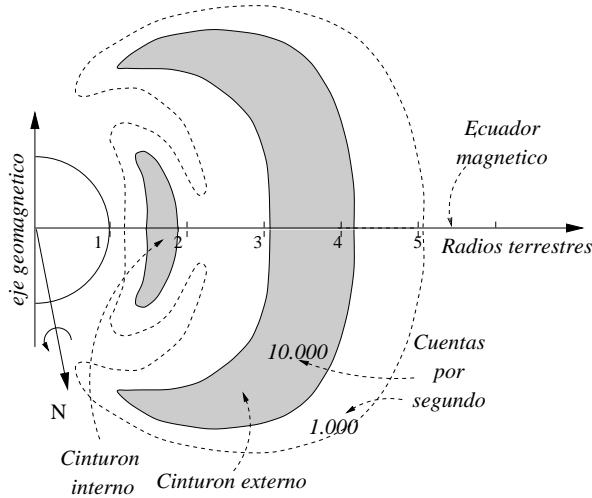


Figura 6.12:

Este efecto de *espejo magnético*, que es utilizado actualmente para el confinamiento de plasmas artificiales, aparece en la naturaleza asociado al campo magnético terrestre. Los cinturones de Van Allen, figura 6.12, no son sino grandes bolsas de partículas cargadas, atrapadas por el campo magnético terrestre, que fueron detectadas por primera vez por los contadores Geiger instalados a bordo del Pioneer 3 (1948) y Lunik 1 (1959).

6.4. Precesión de un dipolo en un campo magnético

Por último analizaremos, desde el punto de vista clásico, el movimiento de un dipolo magnético bajo la acción de una campo magnético uniforme y constante. Olvidaremos que los casos más interesantes exigen, en general, un tratamiento cuántico.

Si, en principio, suponemos que el dipolo es rígido, como el que corresponde al momento magnético de espín de un electrón, podemos plantear la ecuación que iguala el par aplicado al sistema con la variación temporal del momento angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}$$

y tener en cuenta que

$$\vec{L} = \frac{\vec{m}}{\Gamma} \quad \text{y} \quad \vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

lo que permite escribir

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{\Omega}_L \wedge \vec{m}, \quad \vec{\Omega}_L = -\Gamma \vec{B}$$

ecuación análoga a la que describe el giro ciclotrónico y que indica que el momento magnético \vec{m} posee un movimiento de precesión alrededor de \vec{B} con la *velocidad angular de Larmor* $\vec{\Omega}_L$.

En el caso de un electrón orbital, cuyo momento magnético se ve afectado ligeramente por el campo magnético aplicado, la ecuación anterior sigue siendo aplicable con gran precisión, pudiéndose despreciar los efectos de nutación [Velayos, Konopinski].

Así pues, si un dipolo magnético es sometido a un campo que varíe de $\vec{0}$ a \vec{B}_0 , adquirirá una energía potencial $W_p = -m B_0 \cos \theta$ y una velocidad de precesión $\vec{\Omega}_L = -\Gamma \vec{B}_0$.

Estos estados de movimiento se detectan generalmente por la emisión de radiación que acompaña a la transición entre los mismos.

6.5. Problemas

- 6-1. En el seno de un campo $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ ($B_0 = 0, 1 T$), en la posición $\vec{r} = \vec{0}$ y en la dirección del eje x , se inyectan un electrón y un protón, ambos con la misma energía de 1 KeV. Haga un esquema de las trayectorias, determine las ecuaciones de las mismas y calcule los radios de giro y las frecuencias ciclotrónicas correspondientes.
- 6-2. En la figura 6.13 se representa a un magnetrón de placas paralelas de cuya placa inferior se desprenden electrones a velocidad despreciable. Éstos se mueven bajo la acción de un campo magnético uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ y de un campo eléctrico \vec{E}_0 regulable mediante el potencial V_0 . Halle el valor de este último potencial para el cual el amperímetro empieza a detectar el paso de corriente y deduzca la relación de carga a masa del electrón. Haga uso de las integrales de energía y cantidad de movimiento para resolver el problema.

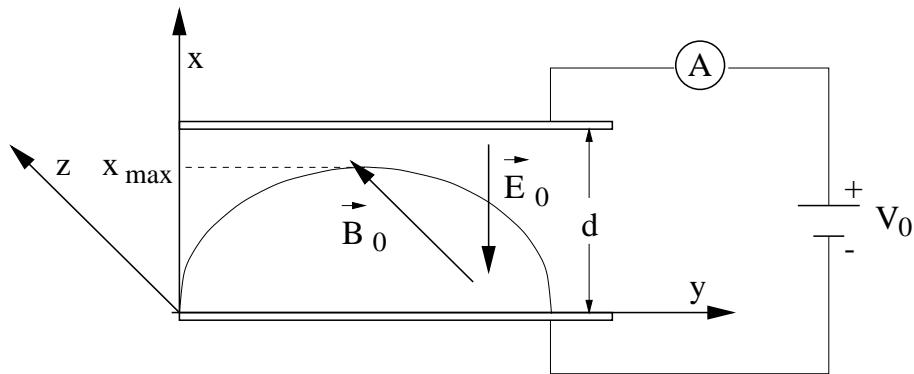


Figura 6.13:

- 6-3. La ionosfera es un plasma neutro, con la misma densidad n de iones monoionizados y de electrones. Ambas especies están sometidas al campo gravitatorio y al magnético terrestre. Prescindiendo de la componente perpendicular del campo magnético, calcule la densidad de corriente ionosférica. Haga un análisis paralelo al realizado para determinar la deriva ambipolar. Tome para la densidad el valor $n = 10^{11} m^{-3}$, para la masa del ión $M = 30 m_p$, donde m_p es la masa del protón y $B = 30 \mu T$.
- 6-4. Un dipolo magnético forma inicialmente un ángulo θ_0 con el eje z . En $t = 0$ se introduce un campo magnético $\vec{B}(t) = B(t) \hat{z}$ lentamente variable (despreciamos el campo eléctrico generado). Calcule el ángulo polar $\theta(t)$ y la velocidad angular $\dot{\varphi}(t)$ en el plano $z = 0$.

6.6. Ejemplos con Mathematica

6.6.1. Compresión de órbitas. movimiento – cargas – EpB.nb

Consideraremos un campo magnético dependiente del tiempo $\vec{B} = B_0(t) \hat{z}$ que puede variar brusca o gradualmente y en el que está atrapada una carga que gira alrededor de una de sus líneas. Según el caso, superponemos un campo eléctrico constante $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ paralelo al anterior.

En general, las ecuaciones del movimiento son

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} + \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}$$

que, descompuesta en componentes y empleando la notación

$$\frac{q}{m} E_0 = A, \quad \frac{q}{m} B_0 = B$$

toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= B \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -B \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= A \end{aligned}$$

Las cargas partirán del origen con una velocidad inicial determinada.

```
Remove["Global`*"]; Off[General :: "spell1"];
```

```
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12};
```

Para realizar las gráficas pueden adoptarse dos modalidades:

- Si **modalidad = 1**, B aumenta bruscamente en magnitud para $t = 15$. El campo eléctrico es nulo, por lo que $v_z = \text{cte}$.

- Si **modalidad = 0**, B aumenta gradualmente según la ley $B = 1 + \frac{t^2}{100}$. Se superpone un campo eléctrico constante que acelera a la carga uniformemente en la dirección z . La velocidad inicial v_{z0} la tomamos como nula.

```
modalidad = 1;
```

```
Which[modalidad == 1, {vz0 = 0.1, A = 0, B = If[t < 15, 1, 8]},  
modalidad == 0, {vz0 = 0, A = 0.07, B = 1 + t^2/100}];
```

Resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales de forma numérica haciendo uso de la orden **NDSolve**⁸. Esta orden tiene como primer argumento una lista que contiene las ecuaciones a resolver y las condiciones iniciales. Para mayor claridad, realizaremos esta operación en tres etapas: escritura de las ecuaciones, escritura de las condiciones iniciales y unión de ambas listas. Preste atención al formato en que se escriben estas listas.

```
ecuaciones = {x''[t] == B * y'[t], y''[t] == -B * x'[t], z''[t] == A};
```

```
ciniciales = {x'[0] == 1, y'[0] == 1, z'[0] == v z0, x[0] == 0, y[0] == 0, z[0] == 0};
```

```
ecuaciones = Join[ecuaciones, ciniciales];
```

El segundo argumento es la lista de las variables incógnitas $\{x, y, z\}$ y, el tercero, la lista $\{t, 0, 30\}$ de la variable independiente y los límites del intervalo de la misma en que se quiere obtener la solución.

```
solucion = NDSolve[ecuaciones, {x, y, z}, {t, 0, 30}];
```

El resultado es la lista que hemos denominado **solucion** cuyos elementos son FUNCIONES INTERPOLANTES⁹. Dichas funciones están especificadas por un conjunto de datos que permiten, en su caso, aproximar a la solución correspondiente en el intervalo especificado.

Para poder representarlas gráficamente es necesario hacer uso de la función **Evaluate**¹⁰.

```
fx = Evaluate[x[t]/.solucion]; fy = Evaluate[y[t]/.solucion];
fz = Evaluate[z[t]/.solucion];
```

Si quitamos el $(;)$ de la última expresión veremos que fz es una lista con una sola componente, la función interpolante de $z(t)$.

Primero hacemos una representación bidimensional de las funciones $\{x(t), y(t), z(t)\}$ en función del tiempo.

```
Plot[{fx, fy, fz}, {t, 0, 30}, PlotRange -> All,
      PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
      PlotLabel -> {"x = rojo, y = verde, z = azul"}, AxesLabel -> {"t", None}];
```

En la modalidad 1, en la que se da el cambio brusco de B , el radio de giro se comprime instantáneamente y el centro de giro cambia de línea de campo. En la modalidad

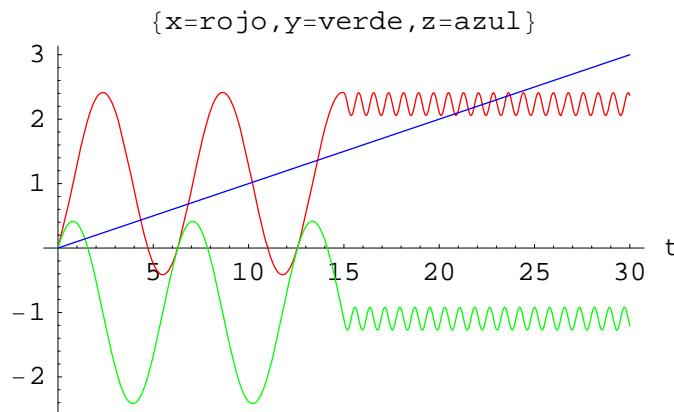


Figura 6.14:

0 la compresión de la órbita es gradual y el centro de giro se mantiene posicionado en la misma línea. La figura 6.14 corresponde a la modalidad 1.

Por último, se representan las trayectorias en un gráfico paramétrico tridimensional.

```
ParametricPlot3D[fz[[1]], fx[[1]], fy[[1]], t, 0, 30,
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All, Boxed -> False, AspectRatio -> 1,
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
  AxesLabel -> "t", "x", "y", AxesStyle -> RGBColor[0, 1, 1], Thickness[0.01],
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
  DefaultColor -> RGBColor[1, 0, 0], BoxRatios -> 2, 1, 1];
```

La figura 6.15 también corresponde a la modalidad 1.

6.6.2. Enfoque electromagnético. *enfoque_EpB.nb*

Este programa ilustra el enfoque de cargas en campos eléctrico y magnético paralelos, constantes y uniformes. Las trayectorias son hélices cuyo paso aumenta uniformemente.

Se representan las trayectorias de partículas mono energéticas que parten del origen con unas velocidades iniciales $v_{x0} = v_0 \sin \theta$, $v_{y0} = 0$, $v_{z0} = v_0 \cos \theta$, cada una de ellas con distinto θ de pequeña magnitud.

El movimiento en la dirección del eje z es uniformemente acelerado. Dado que $z(0) = 0$

$$z = v_{z0} t + \frac{1}{2} a t^2 , \quad a = \frac{q}{m} E$$

⁸Véase la ayuda de Mathematica.

⁹Véase la ayuda de Mathematica.

¹⁰Véase la ayuda de Mathematica.

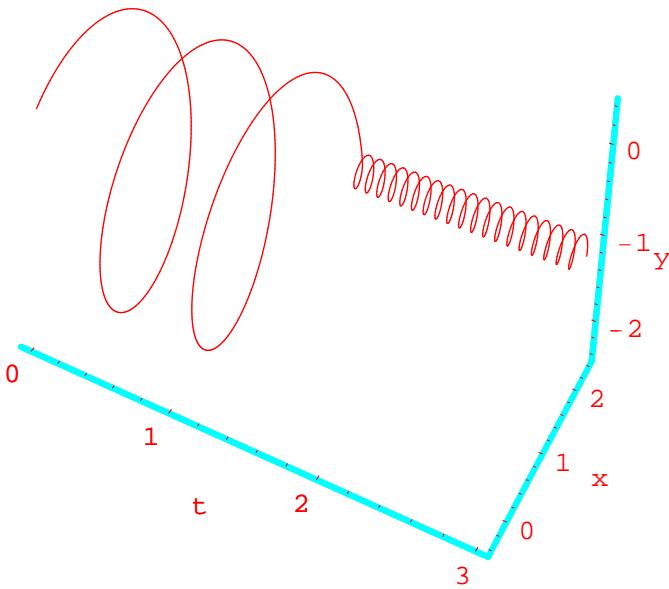


Figura 6.15:

La solución del movimiento transversal, compatible con las condiciones iniciales, viene dada por las expresiones 1.35

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \Omega t \\ y &= \rho (1 - \cos \Omega t) \end{aligned}$$

siendo ρ el radio de giro y Ω la frecuencia ciclotrónica que, en adelante tomaremos como $\Omega = 1 \Rightarrow \rho = v_{x0}$.

```
Remove["Global`*"]; Off[General::"spell1"];
```

```
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12};
```

Especificamos el valor de $A = \frac{1}{2}a$, los valores iniciales de las velocidades y las ecuaciones paramétricas de las trayectorias.

```
A = 0.08;
```

```
vz0 = Cos[\theta]; vx0 = Sin[\theta];
```

```
z = vz0 t + A t^2; x = vx0 Sin[t]; y = vx0 (1 - Cos[t]);
```

A continuación confeccionamos una lista, $\text{lista}[[i,j]]$, $j = x, y, z$ que contiene las ecuaciones de las trayectorias de las partículas $i = 1 \dots, 5$.

$$\begin{aligned}\text{lista} = & \{\{z, x, y\}/.\theta \rightarrow 0, \{z, x, y\}/.\theta \rightarrow 0.15, \\ & \{z, x, y\}/.\theta \rightarrow -0.15, \{z, x, y\}/.\theta \rightarrow 0.3, \{z, x, y\}/.\theta \rightarrow -0.3\};\end{aligned}$$

En **enfoquep** se almacenarán las gráficas paramétricas tridimensionales de cada una de las trayectorias.

$$\text{enfoquep} = \{0, 0, 0, 0, 0\};$$

```
Do[enfoquep[[i]] = ParametricPlot3D[listat[i]], {t, 0, 2Pi},
  Boxed → True, DisplayFunction → Identity, AxesLabel → {"z", "x", "y"}, 
  DefaultColor → RGBColor[0, 0, 1], AxesStyle → {RGBColor[0, 1, 1], Thickness[0.01]}, 
  BoxRatios → {2, 0.5, 0.5}, PlotPoints → 500], {i, 1, 5}];
```

```
enfoque = Show[enfoquep, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

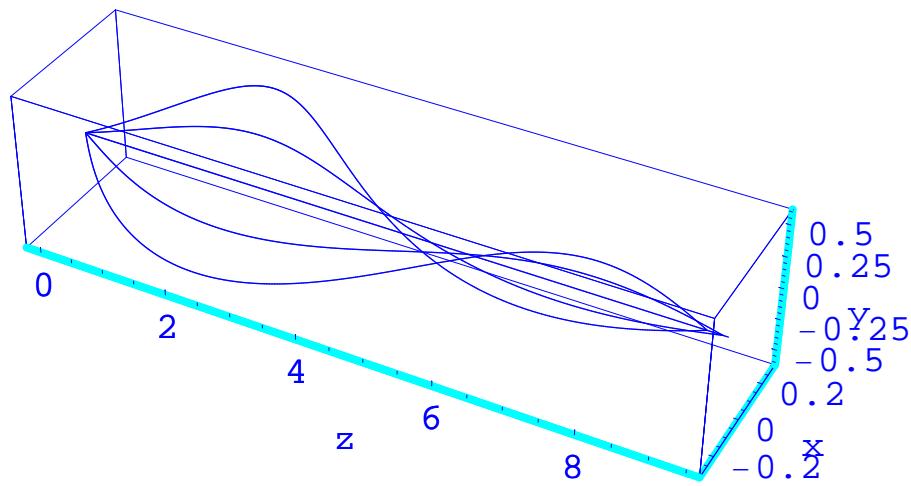


Figura 6.16:

La figura 6.16 es una representación tridimensional de las trayectorias. Si ampliáramos la parte final de la gráfica veríamos claramente que el enfoque tiene aberración. Ésta será tanto menor cuanto más pequeña sea la dispersión angular de la velocidad inicial.

Por último, faremos una representación paramétrica bidimensional para ver las trayectorias en el plano transversal.

```
lista2 = {{0, 0}, {0, 0}, {0, 0}, {0, 0}, {0, 0}};
```

```
Do[lista2[[i]] = {lista[[i]][[2]], lista[[i]][[3]]}, {i, 1, 5}];
```

```
enfoquepf = {0, 0, 0, 0, 0};
```

```
Do[enfoquepf[[i]] =
  ParametricPlot[lista2[[i]], {t, 0, 2Pi}, AxesLabel -> {"x", "y"},
  PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1], PlotPoints -> 500,
  DisplayFunction -> Identity], {i, 1, 5}];
```

```
enfoquef = Show[enfoquepf, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
 AspectRatio -> 2];
```

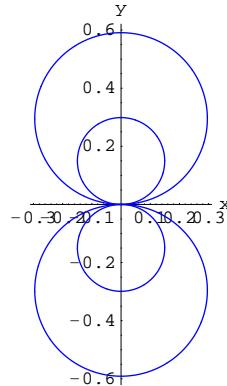


Figura 6.17:

Las partículas parten del origen con distintas velocidades transversales, y distintos radios de giro, e inciden en $(0, 0, L(\theta) \simeq L)$ al cabo de un periodo (figura 6.17).

6.6.3. Confinamiento magnético. botella – magnetica.nb

En este programa estudiaremos el confinamiento de cargas en una botella magnética. Como en el problema 2-29, el campo de la botella se genera por medio de dos espiras cuadradas, cuyo eje común es el z y que están recorridas por una intensidad I . A

diferencia de la configuración de los carretes de Helmholtz, la distancia entre espiras se hará mayor que en ésta, de modo que en el punto intermedio el campo sea mínimo, dando lugar a espejos magnéticos en la proximidad de la posición de los carretes. Generaremos gráficas y películas que nos muestren las trayectorias de partículas confinadas en la botella.

```
Remove["Global`*"]; Off[General::"spell1"];
```

```
Off[General::"spell"];
```

```
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12};
```

6.6.3.1. Campo de una espira

Comenzamos calculando el campo de una espira

$$\mathbf{Rx} = \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0, \mathbf{z}\}; \mathbf{mRx} = \sqrt{\mathbf{Rx} \cdot \mathbf{Rx}};$$

$$\mathbf{BX} = \{\mathbf{0}, -\mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0\} \int_{x1}^{x2} \frac{1}{\mathbf{mRx}^3} d\mathbf{x}_p;$$

De forma análoga calculamos el campo producido por un segmento orientado en la dirección el eje y

$$\mathbf{Ry} = \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0, \mathbf{z}\}; \mathbf{mRy} = \sqrt{\mathbf{Ry} \cdot \mathbf{Ry}};$$

$$\mathbf{BY} = \{\mathbf{z}, \mathbf{0}, -\mathbf{x} + \mathbf{x}_0\} \int_{y1}^{y2} \frac{1}{\mathbf{mRy}^3} d\mathbf{y}_p;$$

Calculamos el campo total de la espira producido en un punto cualquiera particularizando los resultados anteriores para cada uno de los segmentos de la espira con $a = 1$.

$$\mathbf{B2} = \mathbf{BX}/.\{\mathbf{x1} \rightarrow \frac{1}{2}, \mathbf{x2} \rightarrow -\frac{1}{2}, \mathbf{y0} \rightarrow \frac{1}{2}\};$$

$$\mathbf{B4} = \mathbf{BX}/.\{\mathbf{x1} \rightarrow -\frac{1}{2}, \mathbf{x2} \rightarrow \frac{1}{2}, \mathbf{y0} \rightarrow -\frac{1}{2}\};$$

$$\mathbf{B1} = \mathbf{BY}/.\{\mathbf{y1} \rightarrow -\frac{1}{2}, \mathbf{y2} \rightarrow \frac{1}{2}, \mathbf{x0} \rightarrow \frac{1}{2}\};$$

$$\mathbf{B3} = \mathbf{BY}/.\{\mathbf{y1} \rightarrow \frac{1}{2}, \mathbf{y2} \rightarrow -\frac{1}{2}, \mathbf{x0} \rightarrow -\frac{1}{2}\};$$

$$\mathbf{Be} = \mathbf{B1} + \mathbf{B2} + \mathbf{B3} + \mathbf{B4};$$

6.6.3.2. Campo de dos espiras situadas en $z = \pm d/2$

$$\mathbf{Be1} = \mathbf{Be}/.\mathbf{z} \rightarrow (\mathbf{z} - \frac{\mathbf{d}}{2}); \mathbf{Be2} = \mathbf{Be}/.\mathbf{z} \rightarrow (\mathbf{z} + \frac{\mathbf{d}}{2});$$

$$\mathbf{Bc} = \mathbf{Be1} + \mathbf{Be2};$$

Calculamos los campos producidos por cada una de las espiras, Be1z y Be2z, y por el conjunto Bcz, en el eje z.

$$\mathbf{Be1zv} = \mathbf{Be1}/.\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}\};$$

$$\mathbf{Be1z} = \mathbf{Be1zv}[3];$$

$$\mathbf{Be2zv} = \mathbf{Be2}/.\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}\};$$

$$\mathbf{Be2z} = \mathbf{Be2zv}[3];$$

$$\mathbf{Bczv} = \mathbf{Bc}/.\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}\};$$

$$\mathbf{Bcz} = \mathbf{Bczv}[3];$$

6.6.3.3. Botella magnética

Asignamos a d el valor db = 3.

$$\mathbf{db} = 3;$$

Representación del campo axial:

$$\mathbf{Bczb} = \mathbf{Bcz}/.\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{db};$$

$$\begin{aligned} \text{grcampz} = & \text{Plot}[\mathbf{Bczb}, \{z, -0.6 * \mathbf{db}, 0.6 * \mathbf{db}\}, \text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0\}, \\ & \text{GridLines} \rightarrow \{\{-\frac{\mathbf{db}}{2}, 0, \frac{\mathbf{db}}{2}\}, \text{None}\}, , \\ & \text{PlotStyle} \rightarrow \text{RGBColor}[0, 1, 1]\}; \end{aligned} \quad (6.26)$$

En la figura 6.21, que se muestra más adelante, se observa la existencia de un mínimo de campo en $z = 0$ y unos máximos en las proximidades de las posiciones de las espiras. En las zonas interiores de campo alto, espejos magnéticos, se reflejan las partículas atrapadas en la botella.

Representación del campo en el plano $x = 0$:

Calculamos el campo en este plano para la distancia db entre espiras

$$\mathbf{Bcyzb} = \{\mathbf{Bc}[2], \mathbf{Bc}[3]\} / .\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{db}\};$$

especificamos los límites de las gráficas

$$\mathbf{Ly} = 1; \mathbf{Lz} = 0.7 * \mathbf{db};$$

generamos el gráfico de flechas

`<< Graphics`PlotField``

```
grcampb = PlotVectorField[Bcyzb, {y, -Ly, Ly}, {z, -Lz, Lz},
  PlotPoints → 11, AspectRatio → 1, DisplayFunction → Identity];
```

la posición de los carretones

```
puntosb = {{-0.5, -0.5db}, {0.5, -0.5db}, {-0.5, 0.5db}, {0.5, 0.5db}};
```

```
carretesb = Graphics[{PointSize[.04], RGBColor[0, 0, 1], Point/@puntosb}];
```

dibujamos las líneas de campo por el método de Heun

$$\mathbf{mBcyzb} = \sqrt{\mathbf{Bcyzb} \cdot \mathbf{Bcyzb}};$$

$$\mathbf{Bunit} = \frac{\mathbf{Bcyzb}}{\mathbf{mBcyzb}};$$

$$\mathbf{n} = 100; \Delta = \frac{\mathbf{db}}{\mathbf{n}};$$

$$\mathbf{y0} = -0.45;$$

$$\mathbf{z0} = -\mathbf{Lz} + 0.01;$$

```
grlinea = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
```

```

Do[{p0 = {y0, z0}; linea = {p0}; kk = 0;
  While[(Abs[p0[[1]]] <= Ly)&&(Abs[p0[[2]]] <= Lz)&&(kk <= 2n),
  {kk = kk + 1, p0ini = p0, Bunitini = Bunit/.{y → p0[[1]], z → p0[[2]]},
  p0 = p0ini + Δ * Bunitini, Bunitfin = Bunit/.{y → p0[[1]], z → p0[[2]]},
  p0 = p0ini + Δ * 1/2(Bunitini + Bunitfin), linea = Append[linea, p0]}],
  grlinea[[i]] = ListPlot[linea, PlotJoined → True,
  PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction → Identity], y0 = y0 + 0.1},
  {i, 1, 10}];

```

y representamos conjuntamente todas estas gráficas

```

Show[grcampb, carretesb, grlinea, DisplayFunction → $DisplayFunction,
Axes → True];

```

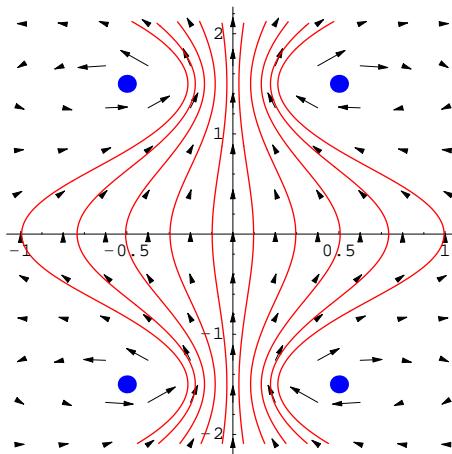


Figura 6.18:

En la figura 6.18 puede verse como el campo es poco uniforme, existiendo un alto flujo del mismo en los cuellos de la botella y poca densidad de líneas en el vientre de la misma.

6.6.3.4. Confinamiento magnético

Primero supondremos que la partícula, atrapada en la línea central de la botella, tiene una energía cinética transversal $W_{\perp} \gg W_{\parallel}$, lo que permite representarla como un dipolo magnético en la dirección contraria al campo.

En segundo lugar, resolveremos la ecuación de la trayectoria de la partícula, sin restricciones, para representarla en gráficos y películas en dos y tres dimensiones.

Movimiento del dipolo en el eje z :

Partícula confinada.

Inicialmente situamos al dipolo en reposo, $v_0 = \mathbf{zp0}$, en un punto $z = z0$, situado en el eje z , en el interior de la botella y cerca del punto de campo máximo.

$$\mathbf{z0} = -1.45; \mathbf{zp0} = \mathbf{0};$$

calculamos la fuerza sobre el dipolo

$$F_z = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

tomando $\mu = 1$.

$$\mathbf{fzp} = -\partial_{\mathbf{z}} \mathbf{Bczb};$$

y la expresamos en el formato requerido para la orden **NDSolve**.

$$\mathbf{fz} = \mathbf{fzp}/.\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}[t];$$

Hallamos numéricamente las ecuaciones paramétricas de la trayectoria suponiendo que la masa de la partícula $m = 1$.

$$\text{solucionc} = \text{NDSolve}[\{\mathbf{z}''[t] == \mathbf{fz}, \mathbf{z}'[0] == \mathbf{zp0}, \mathbf{z}[0] == \mathbf{z0}\}, \mathbf{z}, \{t, 0, 5\}];$$

Extraemos la solución $z(t)$

$$\mathbf{szc} = \text{Evaluate}[\mathbf{z}[t]/.\text{solucionc}]; \quad (6.27)$$

y, derivándola, obtenemos la velocidad.

$$\mathbf{vszc} = \partial_t \mathbf{szc};$$

Representamos conjuntamente la posición y la velocidad en función del tiempo. Esta última la multiplicamos por un factor de escala.

$$\begin{aligned} \text{Plot}[\{\mathbf{szc}, 0.3 \mathbf{vszc}\}, \{t, 0, 2.5\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \\ \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 0, 0], \text{RGBColor}[0, 0, 1]\}, \\ \text{AxesLabel} \rightarrow \{"t", "z, vz"\}, \text{PlotLabel} \rightarrow \text{StyleForm}["z en rojo, vz en azul"], \\ \text{FontColor} \rightarrow \text{RGBColor}[0, 0.5, 1]], \text{GridLines} \rightarrow \{\text{None}, \{-z0, z0\}\}]; \end{aligned}$$

En la figura 6.19 se observa como el dipolo parte de su posición inicial $z_0 = -1.45$ y se refleja en el punto simétrico. Parte con velocidad nula y se acelera hasta el punto de campo mínimo en que empieza a decelerarse. El movimiento corresponde a una partícula confinada, el dipolo está encerrado en el pozo de potencial.

Partícula libre.

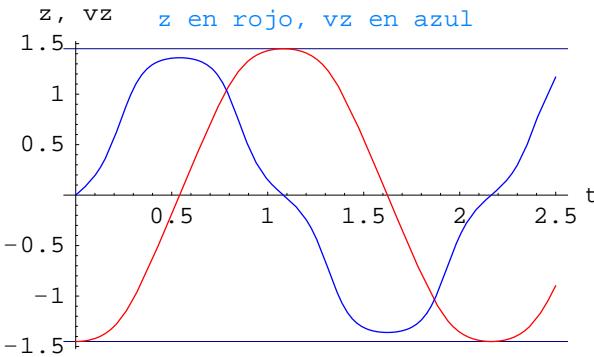


Figura 6.19:

En este caso, la posición inicial del dipolo es la misma que en el caso anterior, pero se parte de ella con una velocidad inicial que le permitirá salir del pozo de potencial y liberarse del mismo.

$$\text{zp0} = 0.6;$$

```

solucion = NDSolve[{z''[t] == fz, z'[0] == zp0, z[0] == z0}, z, {t, 0, 5}];

sz = Evaluate[z[t]/.solucion];

vsz = \partial_t sz;

Plot[{sz, 0.5 vsz}, {t, 0, 1.5}, PlotRange \rightarrow {-2, 2.5},
      PlotStyle \rightarrow {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
      AxesLabel \rightarrow {"t", "z, vz"}, PlotLabel \rightarrow StyleForm["z en rojo, vz en azul",
      FontColor \rightarrow RGBColor[0, 0.5, 1]], GridLines \rightarrow {None, {-z0, z0}}];

```

En la figura 6.20 se ve como la posición z de la partícula alcanza la posición simétrica de la inicial, marcada por una línea horizontal, rebasa el punto de campo máximo y se libera.

Película del movimiento confinado del dipolo.

*Queremos representar la posición del dipolo, en función de z , no en función de t , y unir esta gráfica a la resultante de ejecutar 6.26, es decir, la del campo axial en función de z . Para ello formamos una lista **zz** con las posiciones del dipolo en distintos fotogramas (instantes de tiempo). Tenemos en cuenta que **szc** es una lista con un solo componente que es la función interpolante. Es esta última la que debe figurar como primer argumento de la orden **Table**. La cota máxima de t es lo suficientemente grande como para captar la reflexión del dipolo en el espejo de la derecha.*

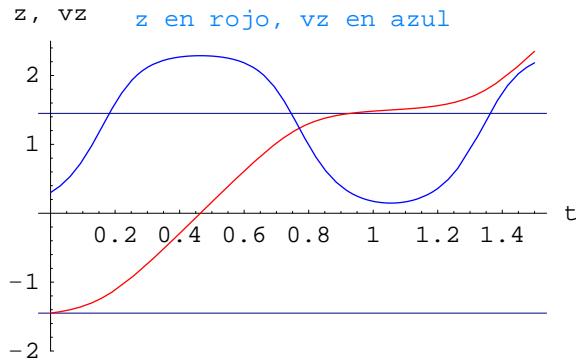


Figura 6.20:

```
zz = Table[szc[[1]], {t, 0, 2.5, 0.025}];
```

Para determinar el número de componentes de la tabla, hacemos uso de la orden **Dimensions**. El resultado de la misma es una lista con las dimensiones, una en este caso, de **zz**.

```
dzz = Dimensions[zz][[1]];
```

Generamos las gráficas conjuntas de los puntos que representan al dipolo y la gráfica del campo axial.

```
Do[{puntoconf =
Graphics[{PointSize[.04], RGBColor[0, 0, 1], Point[{zz[[i]], 0}]}],
Show[{grcampz, puntoconf}]], {i, 1, dzz}];
```

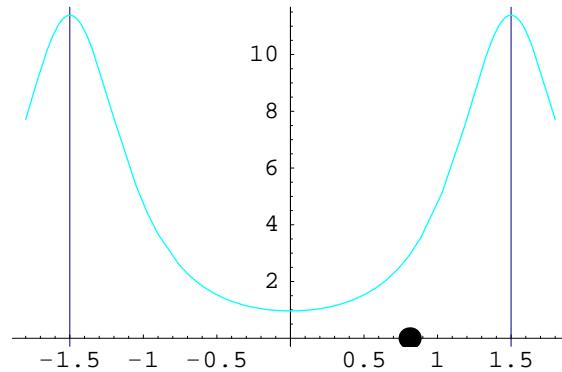


Figura 6.21:

La figura 6.21 es uno de los fotogramas de la película. Esta última muestra como el dipolo parte del reposo, es acelerado hasta la posición central y se refleja en el espejo derecho. Si se le da una velocidad inicial suficiente, la partícula saldrá de la botella.

Movimiento tridimensional de la partícula:

Para esta representación tomaremos $\frac{q}{m} = 1$.

Empezamos particularizando el campo tridimensional para la distancia $d = \mathbf{db}$ especificada para la botella y hallando el módulo correspondiente.

$$\mathbf{Bb} = \mathbf{Bc}/\|\mathbf{d}\| \rightarrow \mathbf{db};$$

$$m\mathbf{Bb} = \sqrt{\mathbf{Bb} \cdot \mathbf{Bb}};$$

Especificamos el intervalo $0 \leq t \leq T$ en que se calcula la trayectoria

$$T = 71;$$

el radio ciclotrónico en la posición inicial

$$rc0 = 0.01;$$

las posiciones iniciales

$$x0 = rc0; y0 = 0; z0 = -1.45;$$

el campo magnético en la posición $(0, 0, z_0)$

$$m\mathbf{B0} = m\mathbf{Bb}/\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z0}\};$$

y las velocidades iniciales.

Tomaremos la velocidad inicial con módulo $|vy0| = v_\perp = \rho B$ y en la dirección correspondiente a un giro de la partícula a izquierdas alrededor del campo.

$$vx0 = 0; vy0 = -rc0 * m\mathbf{B0}; vz0 = 0;$$

Estas especificaciones corresponden a una carga positiva que gira alrededor del eje z. Si, por ejemplo, cambia el signo de $vy0$, la partícula girará a lo largo de otra línea de campo e, incluso, podrá quedar libre de la botella. Experimente.

A continuación se extraen las componentes del campo y se expresan en el formato requerido.

$$Bbx = \mathbf{Bb}[1]; Bby = \mathbf{Bb}[2]; Bbz = \mathbf{Bb}[3];$$

$$Bbx = Bbx/\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x[t]}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y[t]}, \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z[t]}\};$$

$$Bby = Bby/\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x[t]}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y[t]}, \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z[t]}\};$$

$$Bbz = Bbz/\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x[t]}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y[t]}, \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z[t]}\};$$

Las ecuaciones a resolver se reducen en este caso a

$$\vec{a} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

```
ecuacionesb = {x''[t] == y'[t] * Bbz - z'[t] * Bby, y''[t] == z'[t] * Bbx - x'[t] * Bbz,
z''[t] == x'[t] * Bby - y'[t] * Bbx};
```

```
cinicialesb = {x'[0] == vx0, y'[0] == vy0, z'[0] == vz0, x[0] == x0, y[0] == y0,
z[0] == z0};
```

```
ecuacionesb = Join[ecuacionesb, cinicialesb];
```

```
solucion = NDSolve[ecuacionesb, {x, y, z}, {t, 0, T}, MaxSteps → 4000];
```

```
xb = Evaluate[x[t]/.solucion];
```

```
yb = Evaluate[y[t]/.solucion];
```

```
zb = Evaluate[z[t]/.solucion];
```

Para obtener la película haremos la representación de la trayectoria hasta distintos instantes, y del punto que representa a la partícula en ese mismo instante.

Se especifica el número de fotogramas y el intervalo temporal entre cada uno de ellos.

$$n = 500; \Delta t = \frac{T}{n};$$

Se inicializa el instante final de la trayectoria parcial

$$Ti = 0;$$

y se realizan los fotogramas en los sucesivos instantes

```
Do[
```

```
{Ti = Ti + Δt; puntoi = {zb[[1]], xb[[1]], yb[[1]]}/.t → Ti,
grpuntoi = Graphics3D[{PointSize[.03], RGBColor[0, 0, 1], Point[puntoi]}],
orbitai = ParametricPlot3D[{zb[[1]], xb[[1]], yb[[1]]}, {t, 0, Ti},
PlotPoints → 2000, PlotRange → All, Boxed → False, AspectRatio → 1,
AxesLabel → {"z", "x", "y"}, AxesStyle → {RGBColor[0, 1, 1], Thickness[0.01]},
DefaultColor → RGBColor[1, 0, 0], BoxRatios → {3, 1, 1},
PlotRange → {{-1.6, 1.6}, {-0.04, 0.04}, {-0.04, 0.04}},
DisplayFunction → Identity],
Show[orbitai, grpuntoi, PlotRange → {{-1.6, 1.6}, {-0.04, 0.04}, {-0.04, 0.04}}},
DisplayFunction → $DisplayFunction]}, {i, 1, n}];
```

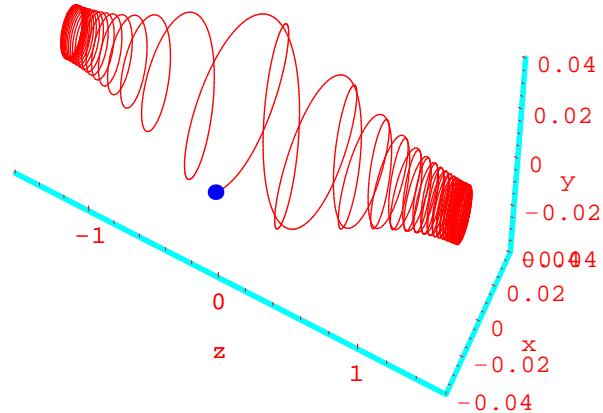


Figura 6.22:

En la figura 6.22 se representa el último fotograma de la película. En el se encuentra a la partícula en un instante posterior a su reflexión en el espejo de la derecha. La película pone de manifiesto cómo dicha partícula parte de la izquierda con $W_{\parallel} = 0$ y $W_{\perp} = \max$, gira rápidamente pero avanza lentamente. En el centro la velocidad transversal es mínima y la longitudinal máxima. Después se refleja e invierte el sentido de la marcha.

Representación de las coordenadas en función del tiempo:

Por último, representamos conjuntamente las coordenadas en función del tiempo.

```
p1 = Plot[xb[[1]], {t, 0, T}, PlotStyle -> RGBColor[0, 1, 0],
DisplayFunction -> Identity];
```

```
p2 = Plot[0.03zb[[1]], {t, 0, T}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0],
DisplayFunction -> Identity];
```

```
p3 = Plot[yb[[1]], {t, 0, T}, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1],
DisplayFunction -> Identity];
```

```
Show[p1, p2, p3, PlotRange -> All, AxesLabel -> {"t", "x, y, z"},  
PlotLabel -> StyleForm["x en verde, y en azul, z en rojo",  
FontColor -> RGBColor[0, 0.5, 1]], DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```



Figura 6.23:

La figura 6.23 muestra como la coordenada z es periódica, como corresponde a una partícula confinada, y que el radio de giro y el periodo ciclotrónico varían con dicha coordenada.

6.6.4. Lente electrostática. lente-electrostatica.nb

En este programa se simula una lente electrostática constituida por un hilo en forma de cuadrado y cargado positivamente. Comprobaremos que ésta se comporta como una lente convergente para los electrones.

```
Remove["Global`*"]; Off[General :: "spell1"];
```

```
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12};
```

Para calcular el potencial nos referiremos a la misma figura 2.37 ya empleada para hallar el campo magnético producido por una espira cuadrada. En este caso, la espira estará cargada con una densidad lineal de carga ρ_l . Los pasos que seguiremos son análogos a los que se dieron en la sección 6.6.3.1.

$$\mathbf{vxR} = \{x - x_p, y - y_0, z\}; m_{xR} = \sqrt{\mathbf{vxR} \cdot \mathbf{vxR}};$$

$$\mathbf{vyR} = \{x - x_0, y - y_p, z\}; m_{yR} = \sqrt{\mathbf{vyR} \cdot \mathbf{vyR}};$$

$$xV = K \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{m_{xR}} dx_p;$$

$$\mathbf{V1} = \mathbf{xV}/.\mathbf{y0} \rightarrow \frac{\mathbf{a}}{2};$$

$$\mathbf{V3} = \mathbf{xV}/.\mathbf{y0} \rightarrow -\frac{\mathbf{a}}{2};$$

$$\mathbf{yV} = \mathbf{K} \int_{-\frac{\mathbf{a}}{2}}^{\frac{\mathbf{a}}{2}} \frac{1}{\mathbf{myR}} \, dy; \quad$$

$$\mathbf{V4} = \mathbf{yV}/.\mathbf{x0} \rightarrow \frac{\mathbf{a}}{2};$$

$$\mathbf{V2} = \mathbf{yV}/.\mathbf{x0} \rightarrow -\frac{\mathbf{a}}{2};$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V1} + \mathbf{V2} + \mathbf{V3} + \mathbf{V4};$$

$$\mathbf{Vyz} = \mathbf{V}/.\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{1}, \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{1}\};$$

El campo se obtiene derivando el potencial.

$$\mathbf{Eyz} = \{-\partial_y \mathbf{Vyz}, -\partial_z \mathbf{Vyz}\};$$

Representación del campo y del potencial en las proximidades de la espira:

Dibujamos las líneas de campo haciendo uso del método de Heun.

$$\mathbf{mEyz} = \sqrt{\mathbf{Eyz} \cdot \mathbf{Eyz}};$$

$$\mathbf{Eunit} = \frac{\mathbf{Eyz}}{\mathbf{mEyz}};$$

$$\mathbf{n} = 100; \Delta = \frac{1}{n};$$

$$\mathbf{grlinea} = \mathbf{Table}[0, \{i, 1, 20\}]; \mathbf{Ly} = 1; \mathbf{Lz} = 1;$$

Situamos los puntos de partida de las líneas en un círculo centrado en la posición de la espira.

$$\mathbf{r0} = 0.1; \theta_0 = -\frac{\pi}{20}; \Delta\theta = \frac{\pi}{10};$$

```

Do[{p0 = {y0, z0}, linea = {p0}, kk = 0,
  While[(Abs[p0[[1]]] <= Ly)&&Abs[p0[[2]]] <= Lz)&&(kk <= 4n),
  {kk = kk + 1, p0ini = p0, Eunitini = Eunit/. {y → p0[[1]], z → p0[[2]]},
  p0 = p0ini + Δ * Eunitini, Eunitfin = Eunit/. {y → p0[[1]], z → p0[[2]]},
  p0 = p0ini + Δ * 1/2(Eunitini + Eunitfin), linea = Append[linea, p0]}],
  grlinea[[i]] = ListPlot[linea, PlotJoined → True,
  PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction → Identity],
  θ0 = θ0 + Δθ, y0 = 0.5 - r0 * Cos[θ0], z0 = r0 * Sin[θ0]},
  {i, 1, 20}];
```

Generamos la gráfica de las líneas equipotenciales

```

grpot = ContourPlot[Vyz, {y, -Ly, Ly}, {z, -Lz, Lz}, PlotPoints → 100,
  ContourShading → False, Contours → 30,
  ContourStyle → RGBColor[0, 0.7, 1], DisplayFunction → Identity,
  FrameLabel → {"y", "z"}];
```

situamos la espira

```
puntos = {{0.5, 0}, {-0.5, 0}};
```

```
pos = Graphics[{PointSize[.03], RGBColor[0, 0, 1], Point/@puntos}];
```

realizamos el gráfico de flechas

```
<< Graphics`PlotField`
```

```

grcamp = PlotVectorField[Eyz, {y, 0.01, Ly}, {z, -Lz, Lz},
  PlotPoints → 9, DisplayFunction → Identity];
```

y mostramos la representación conjunta.

```

Show[grpot, pos, grcamp, grlinea,
  DisplayFunction → $DisplayFunction, AspectRatio → Lz/Ly, Axes → True];
```

La gráfica 6.24 muestra como las líneas de campo parten de la espira y, más allá de la región central, divergen del eje z. Para electrones $\vec{F} = -e\vec{E}$ y las líneas de fuerza

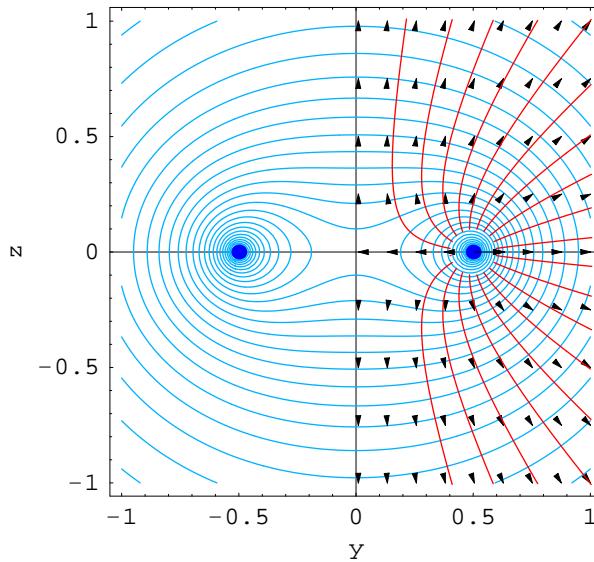


Figura 6.24:

convergen sobre dicho eje focalizando a las cargas. En esta región externa, la componente F_z atrae a los electrones hacia la lente. Si un haz de electrones incide desde $z < 0$ hacia la lente, es acelerado hasta las proximidades de la misma y decelerado una vez que ésta ha sido sobrepasada.

Estudio de las trayectorias electrónicas:

Resolveremos las ecuaciones de las trayectorias de un haz de electrones que se mueve inicialmente, en la lejanía de la lente, paralelamente al eje z .

Escribimos las componentes del campo en el plano $z = 0$ en el formato establecido para **NDSolve**

$$\mathbf{E}\mathbf{y} = \mathbf{E}_{yz}[1] / . \{y \rightarrow y[t], z \rightarrow z[t]\};$$

$$\mathbf{E}\mathbf{z} = \mathbf{E}_{yz}[2] / . \{y \rightarrow y[t], z \rightarrow z[t]\};$$

Establecemos las condiciones iniciales

$$vz0 = 4; vy0 = 0; z0 = -50; y0 = -0.2; T = 25;$$

$$\text{graficas} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\};$$

y calculamos las trayectorias.

```

Do[
 {y0 = y0 + 0.05,
 ecuacionesl = {y''[t] == -Ey, z''[t] == -Ez},
 cinicialesl = {y'[0] == vy0, z'[0] == vz0, y[0] == y0, z[0] == z0},
 ecuacionesl = Join[ecuacionesl, cinicialesl],
 solucion = NDSolve[ecuacionesl, {y, z}, {t, 0, T}, MaxSteps → 4000],
 yl = Evaluate[y[t]/. solucion], zl = Evaluate[z[t]/. solucion],
 ydez = Table[{zl[[1]]/. t → i, yl[[1]]/. t → i}, {i, 0, T,  $\frac{T}{1000}$ }],
 graficas[[i]] = ListPlot[ydez, PlotJoined → True,
 GridLines → {{0}, None}, PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0.7],
 AxesOrigin → {-50, 0}, PlotRange → {-0.16, 0.16},
 AxesLabel → {"z", "y"}, DisplayFunction → Identity]},
 {i, 1, 7}];

Show[graficas, DisplayFunction → $DisplayFunction];

```

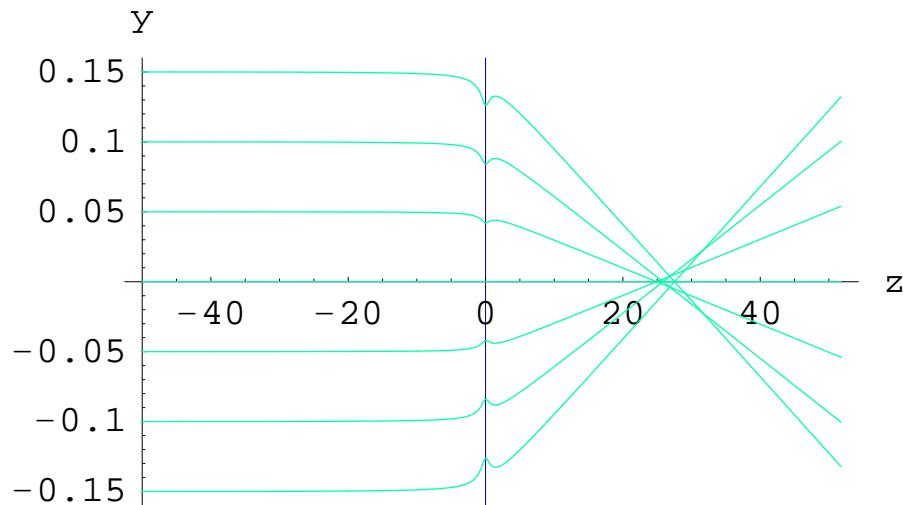


Figura 6.25:

En la figura 6.25, como puede comprobarse, la escala del eje y está muy ampliada con respecto a la del z. En dicha figura se ve como las trayectorias, inicialmente paralelas, se focalizan, con un cierto grado de aberración, al otro lado de la lente. El campo sólo es notable en la cercanía de la lente, donde cambia bruscamente de magnitud y sentido. La aberración puede reducirse cumpliendo más estrictamente la condición paraxial, es

derir, haciendo uso de un haz más estrecho, o diseñando lentes menos simples que la que aquí hemos propuesto.

6.6.5. Órbitas de dos cargas. orbitas – cargas.nb

Este programa estudia las órbitas de dos cargas puntuales referidas a su centro de masas. Los parámetros que se proponen corresponden a órbitas elípticas. Para estudiar otros casos deberá cambiar las condiciones iniciales y algún otro parámetro, como el intervalo temporal T , etc.

```
Remove["Global`*"]; Off[General :: "spell1"];
```

```
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12};
```

Cálculo de las trayectorias:

Se definen los vectores de posición de cada una de las partículas y el \vec{R}_{21} que sitúa a la partícula 1 con respecto a la 2.

$$\mathbf{r1} = \{\mathbf{x1}, \mathbf{y1}\}; \mathbf{r2} = \{\mathbf{x2}, \mathbf{y2}\}; \mathbf{R21} = \mathbf{r1} - \mathbf{r2}; \mathbf{mR21} = \sqrt{\mathbf{R21.R21}};$$

Tomaremos los valores $q_1 = 1$, $q_2 = \pm 1$, $m_1 = 1$, $m_2 \geq 1$

$$\mathbf{q2} = -1; \mathbf{m2} = 3;$$

F_{21} es la fuerza que actúa sobre la partícula 1. La fuerza que lo hace sobre la 2 es $F_{12} = -F_{21}$. Escribimos estas fuerzas con el formato requerido por la orden **NDSolve**.

$$\mathbf{F21} = q2 \frac{\mathbf{R21}}{\mathbf{mR21}^3} /. \{\mathbf{x1} \rightarrow \mathbf{x1[t]}, \mathbf{x2} \rightarrow \mathbf{x2[t]}, \mathbf{y1} \rightarrow \mathbf{y1[t]}, \mathbf{y2} \rightarrow \mathbf{y2[t]}\};$$

$$\mathbf{F12} = -\mathbf{F21};$$

Estableceremos las condiciones iniciales de forma que el centro de masas se sitúe en el origen de coordenadas. Por definición

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (6.28)$$

por lo que, para que $\vec{r}_{cm} = \vec{0}$ en $t = 0$, debe cumplirse que

$$\vec{r}_{20} = \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_{10}$$

Por otra parte, derivando 6.28

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

por lo que, para que $\vec{v}_{cm} = \vec{0}$ en $t = 0$, debe cumplirse que

$$\vec{v}_{20} = \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_{10}$$

Dado que en una interacción que cumpla el principio de acción y reacción, la cantidad de movimiento se conserva, si el centro de masas está en reposo en el origen en el instante inicial, permanecerá en el mismo a lo largo del movimiento.

$$x10 = 0; y10 = 1; vx10 = 1; vy10 = -0.1;$$

$$x20 = -\frac{1}{m2}x10; y20 = -\frac{1}{m2}y10; vx20 = -\frac{1}{m2}vx10; vy20 = -\frac{1}{m2}vy10;$$

Escribimos la lista de ecuaciones y condiciones iniciales

$$ec1x = x1''[t] == F21[[1]]; ec1y = y1''[t] == F21[[2]];$$

$$ec2x = x2''[t] == \frac{1}{m2}F12[[1]]; ec2y = y2''[t] == \frac{1}{m2}F12[[2]];$$

$$ecuaciones = \{ec1x, ec1y, ec2x, ec2y\};$$

$$\begin{aligned} ciniciales = & \{x1'[0] == vx10, y1'[0] == vy10, \\ & x2'[0] == vx20, y2'[0] == vy20, \\ & x1[0] == x10, y1[0] == y10, x2[0] == x20, y2[0] == y20\}; \end{aligned}$$

$$ecuaciones = \text{Join}[ecuaciones, ciniciales];$$

Damos valores al intervalo T en el que se han de calcular las trayectorias y al incremento temporal de muestreo δt de las mismas.

$$T = 100; \delta t = \frac{T}{300};$$

y hallamos las trayectorias

$$solucion = \text{NDSolve}[ecuaciones, \{x1, y1, x2, y2\}, \{t, 0, T\}, \text{MaxSteps} \rightarrow 4000];$$

$$x1 = \text{Evaluate}[x1[t]/.solucion]; y1 = \text{Evaluate}[y1[t]/.solucion];$$

$$x2 = \text{Evaluate}[x2[t]/.solucion]; y2 = \text{Evaluate}[y2[t]/.solucion];$$

Representación de las trayectorias:

Procedemos primero a representar gráficamente las trayectorias completas. Para ello generamos una lista de las posiciones para incrementos δt .

```
t1 = Table[{x1[[1]]/.t → i, y1[[1]]/.t → i}, {i, 0, T, δt}];
```

```
grafica1 = ListPlot[t1,
  PlotJoined → True, PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0.7], AxesOrigin → {0, 0},
  PlotRange → All, AxesLabel → {"x", "y"}, DisplayFunction → Identity];
```

```
t2 = Table[{x2[[1]]/.t → i, y2[[1]]/.t → i}, {i, 0, T, δt}];
```

```
grafica2 = ListPlot[t2,
  PlotJoined → True, PlotStyle → RGBColor[1, 0.7, 0], AxesOrigin → {0, 0},
  PlotRange → All, AxesLabel → {"x", "y"}, DisplayFunction → Identity];
```

Mostramos ambas órbitas conjuntamente

```
grorbita1 = Show[grafica1, grafica2,
  DisplayFunction → $DisplayFunction, AspectRatio → 1];
```

En la figura 6.26 se ve como las cargas describen órbitas elípticas. Dadas las condiciones iniciales propuestas, las elipses tienen una cierta inclinación.

Pelicula del movimiento de las cargas:

Se establecen los límites de las gráficas de acuerdo con la figura anterior.

```
limites = {{-4.5, 2.5}, {-9, 3}};
```

Se define el número n de fotogramas que se van a realizar y el intervalo de tiempo Δt entre los mismos

$$n = 200; \Delta t = \frac{T}{n};$$

Cada fotograma contiene la trayectoria de ambas partículas hasta el instante T_i . También se muestran los puntos que representan a cada una de las cargas, en color dorado la más pesada y en azul la más ligera, así como la recta que las une.

Se inicializa T_i y se genera la película.

```
Ti = 0;
```

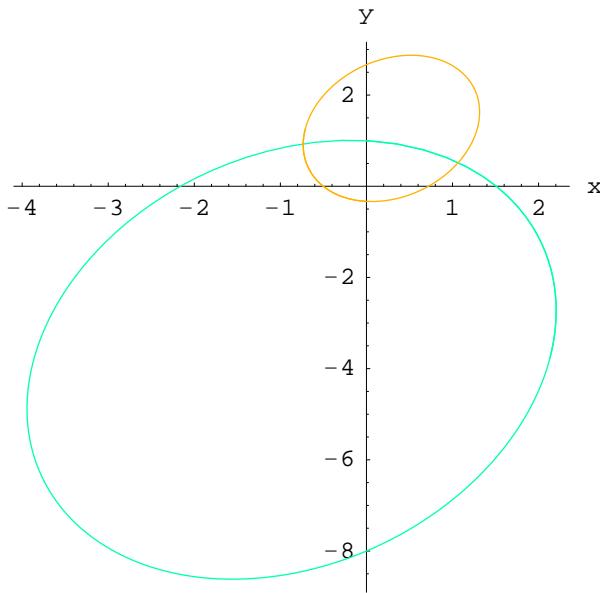


Figura 6.26:

```

Do[{Ti = Ti + Δt, punto1 = {x1[[1]], y1[[1]]}/.t → Ti,
  grpunto1 = Graphics[{PointSize[.03], RGBColor[0, 0, 1], Point[punto1]}],
  punto2 = {x2[[1]], y2[[1]]}/.t → Ti,
  grpunto2 =
    Graphics[{PointSize[.04], RGBColor[1, 0.84, 0], Point[punto2]}],
  linea = {punto1, punto2},
  grlinea = Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}], RGBColor[1, 0, 0], Line[linea]}],
  orbita1 = ParametricPlot[{x1[[1]], y1[[1]]}, {t, 0, Ti}, PlotPoints → 300,
    PlotRange → limites, AspectRatio → 1, AxesLabel → {"x", "y"},
    PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0.7], PlotRange → All,
    DisplayFunction → Identity],
  orbita2 = ParametricPlot[{x2[[1]], y2[[1]]}, {t, 0, Ti}, PlotPoints → 300,
    PlotRange → limites, AspectRatio → 1, AxesLabel → {"x", "y"},
    PlotStyle → RGBColor[1, 0.7, 0], PlotRange → All,
    DisplayFunction → Identity],
  Show[orbita1, orbita2, grpunto1, grpunto2, grlinea, PlotRange → limites,
    DisplayFunction → $DisplayFunction, AspectRatio → 1]}, {i, 1, n}];

```

La figura 6.27 es uno de los fotogramas de la película. Se ve como ambas cargas están situadas sobre una recta que pasa por el origen, donde debe permanecer el centro

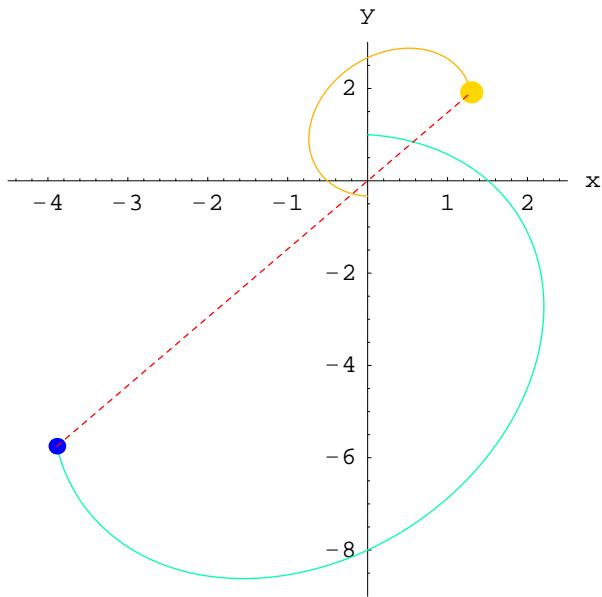


Figura 6.27:

de masas. En la película se comprueba que, cuando la distancia entre cargas es grande, la velocidad es pequeña. Los signos especificados por las cargas son distintos, por lo que la energía potencial crece con la distancia y, por lo tanto, la energía cinética decrece. Cambiando las condiciones iniciales y las magnitudes del problema, podremos estudiar otro tipo de órbitas.

Parte III

Campo electromagnético en los medios materiales

Introducción

Los medios materiales, naturales y artificiales, son muy diversos y también lo son las respuestas de los mismos al campo electromagnético. Un esquema simple de clasificación de dicha respuesta agrupa a los medios más comunes en las grandes familias de los dieléctricos, los medios magnéticos y los conductores, aunque, normalmente, un material determinado presenta al mismo tiempo, en mayor o menor grado, propiedades de conducción y polarización eléctrica y magnética. El estudio de los mecanismos por los cuales un medio responde al campo electromagnético es muy complejo y está encuadrado en el dominio del estado sólido y la teoría cinética o, más concretamente, en el de las *propiedades electromagnéticas de la materia*. Aquí sólo se abordará este tema de forma marginal y, particularmente, desde el punto de vista fenomenológico.

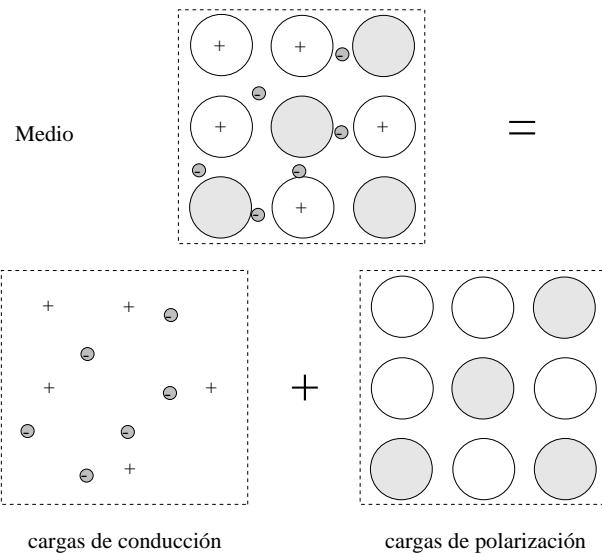


Figura 6.28: Esquema de un medio conductor y polarizable

En la figura 6.28 se representa una instantánea simplificada de un medio denso, parte de cuyas moléculas han perdido a un electrón quedando cargadas positivamente. Una forma conveniente de modelar a este tipo de medios es mediante la partición de sus cargas en dos sistemas que en adelante se denominarán de *cargas de conducción*, o libres, y de *cargas de polarización*, o ligadas, aunque, como se verá, ninguna de éstas acepciones es totalmente apropiada. Las cargas de conducción son las de los electrones libres más las excedentes de las moléculas ionizadas. Parte de ellas, como en los conductores sólidos, o todas ellas, como en los gases ionizados, puede ser transportada a través del medio a distancias macroscópicas. Al resto de las cargas del medio se les define como de polarización. Este último sistema es neutro a nivel molecular y sus cargas sólo se mueven dentro de distancias microscópicas.

En la práctica, la anterior forma de partición de las cargas es hasta cierto punto ambigua pero facilita la modelación de los medios. No puede considerarse que las cargas de polarización sean las polarizables y las de conducción las no polarizables. De hecho, una onda monocromática linealmente polarizada, de frecuencia ω y amplitud \vec{E}_0 , provoca una oscilación lineal de los electrones de conducción cuya amplitud es $\vec{r}_0 = e \vec{E}_0 / (m \omega^2)$. Para campos moderados y frecuencias no excesivamente altas \vec{r}_0 puede ser comparable al radio de Bohr. Este movimiento genera una polarización eléctrica oscilante y una corriente de polarización equivalente. De forma análoga, una onda monocromática circularmente polarizada haría girar a dichos electrones con un radio de la misma magnitud r_0 creando una corriente solenoidal y una polarización magnética equivalente. Por último, no cabe decir que las cargas de conducción sean las que conducen, porque parte de ellas pueden estar tan ligadas como las de polarización y, además, cuando el campo oscila a una frecuencia elevada, las cargas de conducción libres están también confinadas dentro de regiones microscópicas.

Hasta ahora se ha supuesto que las densidades microscópicas describen las posiciones y las velocidades de todas y cada una de las cargas contenidas en el medio. Esto no es totalmente necesario puesto que parte de ellas pueden no ser significativas en cuanto a la generación de campo macroscópico. Cada carga aporta en principio una contribución al campo que en el caso estático, sin contar con el espín, es monopolar eléctrica y, en general, contiene términos variables con el tiempo, en particular el de radiación. No obstante, cuando la materia posee una organización interna a nivel molecular, las aportaciones de cargas próximas, iguales y de signo contrario, se cancelan parcialmente con lo que a nivel macroscópico sólo son notables las contribuciones de tipo multipolar. Aunque una demostración más rigurosa queda fuera de nuestro alcance [Jackson, Robinson, Landau y Lifchitz MC], veremos que las únicas que es necesario considerar en la práctica son las contribuciones dipolares eléctrica y magnética, las cuales son proporcionales a la densidad de dipolos y pueden ser ignoradas en medios poco densos.

Aunque, como ya se ha dicho, la respuesta de un medio es siempre mixta, se dice que, bajo ciertas circunstancias, un medio es conductor, dieléctrico o magnético, si en su respuesta predomina la conducción, la polarización eléctrica o la polarización magnética.

Los representantes más característicos de los *conductores* son los metales, los cuales presentan una alta conductividad, lo que dificulta grandemente la penetración de los campos eléctricos en su interior. Por esta razón son apenas polarizables eléctricamente y poseen una constante dieléctrica próxima a la del vacío ϵ_0 . Los campos magnéticos de baja frecuencia penetran en los conductores, pero son apantallados a frecuencias suficientemente elevadas, por lo que pueden polarizarse magnéticamente en mayor o menor grado; aquellos que no poseen momentos magnéticos en ausencia de campo externo responden débilmente como *diamagnéticos* y los que si los poseen lo hacen de forma algo más significativa, como *paramagnéticos*, o muy fuertemente como los *ferromagnéticos*¹¹. Los *dieléctricos* carecen de cargas de conducción y su respuesta a los campos externos

¹¹En los medios paramagnéticos el campo aplicado ordena a los momentos magnéticos orbitales y en los ferromagnéticos a los de espín. El efecto diamagnético es universal aunque suele quedar emmascarado por el paramagnético, de signo contrario, o el ferromagnético. Solo es notable en átomos en los que las capas electrónicas están cerradas y, como consecuencia, las contribuciones paramagnéticas se cancelan.

es fundamentalmente dieléctrica, adquieren un momento dipolar apreciable, $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ y un momento magnético débil, $\mu \simeq \mu_0$. Los dieléctricos prácticamente ideales se conocen como *aislantes* dada su escasa capacidad de conducir electricidad.

La respuesta de un gas no ionizado a la presencia de un campo electromagnético aplicado es debida a su polarización eléctrica; es, por lo tanto, un dieléctrico. En condiciones normales, la aportación del medio al campo total es pequeña pero medible. Cuando este gas se ioniza, de forma que una de cada 10^5 o 10^6 moléculas ha perdido a uno de sus electrones, su comportamiento varía substancialmente al convertirse en lo que se conoce como un *plasma*. En la naturaleza y en el laboratorio se encuentran frecuentemente plasmas poco densos, con una distancia media entre partículas ($d \gg 1 \text{ \AA}$) muy superior a las dimensiones moleculares, que pueden ser representados mediante el modelo simple cuyo esquema se indica en la figura 6.29. Dicho plasma estaría constituido por electrones libres, de carga $-e$, iones positivos, de carga $+e$ y moléculas neutras; en el lenguaje de uso común en la teoría de plasmas se diría que lo componen fluidos de electrones, iones y neutros. Aparte de las cargas netas de los iones y las de los electrones libres, el resto de las mismas no contribuyen apreciablemente a la respuesta electromagnética del plasma puesto que éste es de baja densidad. En este caso las ecuaciones macroscópicas de Maxwell pueden deducirse de unas densidades en las que sólo se tenga en cuenta a las cargas electrónicas libres y a las netas de los iones, todas ellas representadas como puntuales¹².

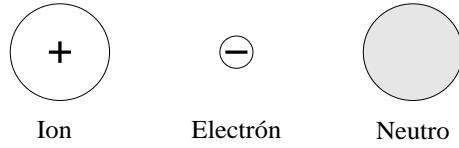


Figura 6.29: Esquema de la composición de un plasma

En esta parte se proponen dos versiones macroscópicas equivalentes de las ecuaciones de Maxwell. En la primera, todas aquellas cargas cuya aportación al campo macroscópico es significativa están descritas por medio de las densidades totales de carga y corriente. Esta versión es la 3.18, postulada en la primera parte,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_T}{\varepsilon_0} \quad (6.29)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.30)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.31)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_T + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (6.32)$$

¹²Esto no quiere decir que el fluido de neutros juegue un papel pasivo dado que puede tener una influencia importante en el movimiento del medio.

escrita en este lugar con la notación $\rho \rightarrow \rho_T$ y $\vec{j} \rightarrow \vec{j}_T$ ¹³. La ecuación de continuidad correspondiente se escribirá de la forma

$$\nabla \cdot \vec{j}_T + \frac{\partial \rho_T}{\partial t} = 0 \quad (6.33)$$

Esta primera versión de las ecuaciones de Maxwell es apropiada para el estudio de los plasmas, o medios conductores simples, en los que la polarización tiene una influencia inapreciable sobre el campo.

En caso contrario es preferible el uso de otra versión en la que estas aportaciones aparecen de forma explícita. La segunda versión, que es la más utilizada, se deduce de la primera desglosando las cargas y las corrientes totales en los términos

$$\rho_T = \rho + \rho_P , \quad \vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_{pol} = \vec{j} + \vec{j}_P + \vec{j}_M \quad (6.34)$$

donde ρ es la densidad de carga de conducción, ρ_P la de polarización, \vec{j} la densidad de corriente de conducción y \vec{j}_{pol} la densidad de corriente total de las cargas de polarización que, a su vez, se desglosa en \vec{j}_P , la de polarización dieléctrica, y \vec{j}_M , la de magnetización o de polarización magnética. Sus expresiones en función de las densidades de polarización son

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (6.35a)$$

$$\vec{j}_{pol} = \vec{j}_P + \vec{j}_M , \quad \vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} , \quad \vec{j}_M = \nabla \wedge \vec{M} \quad (6.35b)$$

La relación entre estas densidades macroscópicas y las microscópicas no son triviales. Mientras que, en principio, cada carga produce individualmente campos eléctricos y magnéticos que se suman microscópicamente en el punto de observación, las densidades y campos macroscópicos resultan de llevar a cabo algún tipo de promedio. Así, pues, una molécula neutra tiene una carga total nula y, por lo tanto, la densidad macroscópica de carga, tomada como el promedio sobre un número N de moléculas, es nula. Ésto no nos permite afirmar que el campo producido por esta densidad de carga es asimismo nulo porque cada molécula tiene, en general, momentos multipolares no nulos que macroscópicamente producen campos no nulos. Los promedios sobre las fuentes deberán hacerse sobre los momentos multipolares de las cargas, incluidos los monopolares en el caso de moléculas ionizadas. En lo que sigue asumiremos que, si nos limitamos a cargas que se mueven a velocidades no relativistas ($v \ll c$), sólo es necesario tener en cuenta la contribución a los campos de los momentos monopolares y dipolares.

Los próximos capítulos se dedican principalmente a la búsqueda de esta segunda versión de las ecuaciones de Maxwell y al estudio de sus consecuencias fundamentales.

¹³Las notaciones ρ y \vec{j} se reservarán en adelante para las cargas y corrientes de conducción.

Capítulo 7

Medios polarizables

7.1. Mecanismos de polarización

7.1.1. Polarización dieléctrica

Como acabamos de decir, la teoría fenomenológica renuncia a la explicación de los mecanismos de respuesta de la materia ante la aplicación de un campo electromagnético. No obstante, nos será útil hacer aquí alguna referencia a estos mecanismos.

Si sometemos un cuerpo a la acción de un campo eléctrico, podemos distinguir dos tipos de respuestas ideales. En el conductor ideal se genera un rápido transporte de carga neta de forma que ésta se distribuye sobre la superficie apantallando a su interior, es decir, anulando el campo interno y circunscribiendo la acción del campo aplicado a dicha superficie. En el dieléctrico ideal no existen portadores, o cargas capaces de dar lugar a un transporte neto, lo que impide el apantallamiento total interno, permitiendo la penetración del campo aplicado. Este campo actúa sobre cada una de las moléculas del material, redistribuyendo las cargas que lo constituyen y dando lugar a la aparición de un momento dipolar.

Definiremos como dieléctricos a aquellos materiales cuya respuesta a un campo eléctrico consiste en la creación de un momento dipolar, aunque debemos hacer notar que existen sustancias naturales, los ferroeléctricos, y artificiales, los electretes, en los que la polarización persiste en ausencia de campo externo.

Para comprender cómo un medio material puede responder dieléctricamente, ilustraremos los mecanismos más simples de polarización, véase la figura 7.1. Se dice que un gas es apolar cuando sus moléculas, en ausencia de campo externo, no presentan momento dipolar permanente. Bajo estas condiciones, el centro de cargas de la nube electrónica de la molécula coincide con la posición nuclear.

La aplicación de un campo externo da lugar a fuerzas contrarias sobre los centros de carga positiva y negativa, que tiende a separarlos. Estas fuerzas son contrarrestadas por la atracción entre las cargas separadas, la carga $+Z_e$ y la negativa encerrada en la esfera de radio Δx .

En el equilibrio ambos centros de carga se han separado una distancia $\Delta \vec{x}$, generándose un momento dipolar

$$\vec{p}_m = Ze \Delta \vec{x}$$

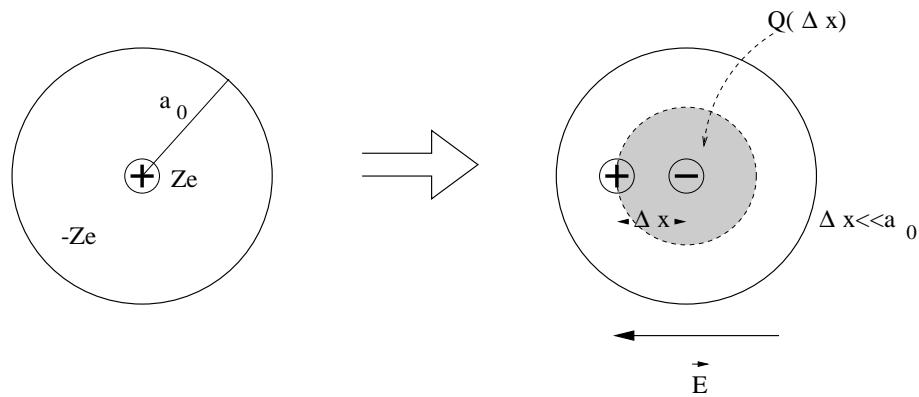


Figura 7.1:

Este mecanismo recibe el nombre de polarización por deformación. Dado que los campos asociados al núcleo son muy elevados, comparados con los que se pueden conseguir en el laboratorio, el desplazamiento Δx es pequeño comparado con las dimensiones moleculares, y el fenómeno es aproximadamente lineal e independiente de otros factores, como pueden ser la temperatura o la presión del gas.

$$\vec{p}_m = \alpha \vec{E}$$

donde α es la *polarizabilidad* de la molécula.

Los dieléctricos polares, por el contrario, están constituidos por moléculas con momento dipolar permanente \vec{p}_0 . A una temperatura distinta del cero absoluto y en ausencia de campo aplicado, los momentos dipolares de cada molécula están orientados al azar, lo que macroscópicamente se traduce en una polarización nula.

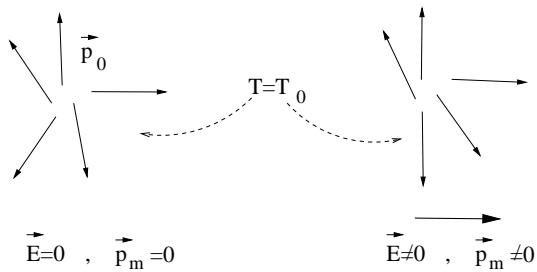


Figura 7.2:

La aplicación de un campo eléctrico tiende a alinear a los dipolos, en la dirección del campo, bajo la acción de un par, lo que se ve contrarrestado por la tendencia desordenadora de los choques moleculares. A una determinada temperatura se alcanza un equilibrio entre estas dos tendencias contrapuestas, dando lugar a una polarización neta en la dirección del campo. Este mecanismo es no lineal, puesto que la polarización del medio se satura, cuando todos los dipolos se alinean con el campo, situación que se alcanza en la práctica cuando predomina la energía eléctrica sobre la térmica, $pE \gg KT$.

Sin embargo, en situaciones normales ($KT \gg pE$) la polarización del medio sigue una ley lineal.

Sin extendernos en este tema, nos basta por ahora con suponer que, bajo la acción de un campo eléctrico, los medios dieléctricos responden con una polarización que, de ahora en adelante, mediremos con el vector densidad macroscópica de momento dipolar eléctrico o, vector *polarización dieléctrica*

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv} = n \langle \vec{p} \rangle$$

donde $d\vec{p}$ es el momento dipolar del elemento de volumen dv , n es el número de moléculas por unidad de volumen y $\langle \vec{p} \rangle$ es la contribución media de cada molécula a la polarización de la unidad de volumen.

7.1.2. Mecanismos de magnetización

La respuesta de los medios materiales frente a la aplicación de un campo magnético es más variada que la respuesta dieléctrica. La mayoría de los materiales responden muy débilmente, por lo que se les suele denominar materiales no magnéticos, mientras que otros, los ferromagnéticos, responden de forma notable y no linealmente.

Los materiales no magnéticos se dividen en diamagnéticos y paramagnéticos. Los primeros responden adquiriendo un momento dipolar magnético en la dirección del campo aplicado pero en sentido contrario, mientras que los paramagnéticos se polarizan en el mismo sentido de dicho campo.

El mecanismo de polarización diamagnética tiene carácter universal, si bien aparece enmascarado por otros contrarios y más potentes en los materiales para y ferromagnéticos. En un material diamagnético el establecimiento de un campo magnético acelera o retarda el giro de los electrones orbitales, según la ley de Lenz, de forma que el campo magnético inducido se opone al aplicado. Como los materiales dieléctricos, que disminuyen o expulsan al campo eléctrico \vec{E} de su interior, los diamagnéticos expulsan al campo magnético \vec{B} . Este efecto se pone de manifiesto en sustancias con estructuras electrónicas simétricas, no polares y, como el de polarización por deformación, es independiente de la temperatura.

Los materiales paramagnéticos poseen momento dipolar permanente de forma que el establecimiento de un campo magnético induce en estos dipolos un movimiento de precesión. Los choques intermoleculares tienden a distribuir los dipolos con orientaciones al azar, mientras la energía de interacción del dipolo con el campo favorece la orientación de los dipolos con proyección en el sentido del campo. El momento dipolar medio resultante en la dirección del campo crece con éste y se satura cuando la energía de interacción de los dipolos con el campo se hace mucho mayor que la energía térmica.

Los mecanismos de polarización ferromagnética son más complejos y esencialmente no lineales. En este tipo de materiales, los momentos de espín se ordenan espontáneamente debido a la existencia de un fuerte campo interno, denominado campo de Weiss.

La polarización de los medios materiales la describiremos por el vector macroscópico *imanación*, o *magnetización*,

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv} = n \langle \vec{m} \rangle$$

donde $\langle \vec{m} \rangle$ es el momento magnético medio de las moléculas y n la densidad de moléculas. \vec{M} es, pues, la densidad de momento dipolar magnético del medio.

7.2. Cargas y corrientes de polarización

Cada una de las moléculas que constituyen el sistema de cargas de polarización, descrito por las densidades de carga ρ_P y de corriente \vec{j}_{pol} , crean campos eléctricos y magnéticos que pueden expresarse en función de sus polarizaciones eléctrica y magnética.

7.2.1. Cargas de polarización eléctrica

Supóngase que tenemos un medio polarizado eléctricamente cuya polarización dieléctrica es $\vec{P}(\vec{r}')$, contenida en un volumen finito \mathcal{V}_0 , a distancia finita del origen, y que queremos calcular el campo total producido en un punto P externo, es decir, tal que $r > r'_{max}$.

La contribución de esta distribución al potencial de un elemento de volumen dv' será

$$dV_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dv'$$

Al hacer la aproximación dipolar se supone que, dada la definición de las cargas de polarización, en el exterior de la distribución, lejos de cada molécula concreta, la única contribución que debe tenerse en cuenta es la dipolar. Para distribuciones estáticas, esto es cierto dado que las moléculas son neutras, su momento monopolar nulo, y los momentos superiores al dipolar convergen rápidamente a cero lejos de la molécula. En el caso general, en el que la distribución está constituida por corrientes no estacionarias, la justificación de lo que sigue sería más compleja. Siguiendo el camino emprendido, deben tenerse en cuenta las densidades retardadas, como se vio en la primera parte, y limitar la velocidad de las cargas a valores muy inferiores a la velocidad de la luz.

A continuación comprobaremos que la distribución continua de momento dipolar eléctrico puede ser substituida por otra equivalente de cargas de polarización. Para ello escribamos

$$dV_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

y, de acuerdo con la figura 7.3, dividamos el volumen de integración \mathcal{V}_0 en \mathcal{V}' y $\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}' \ll \mathcal{V}_0$, donde $\mathcal{V}' \supset \mathcal{V}_0$.

Es evidente que, bajo esta condición y supuesto \vec{P} finita

$$V_P = \int_{\mathcal{V}_0} dV_P = \int_{\mathcal{V}'} dV_P + \int_{\mathcal{V}_0 - \mathcal{V}'} dV_P \simeq \int_{\mathcal{V}'} dV_P$$

Luego

$$V_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

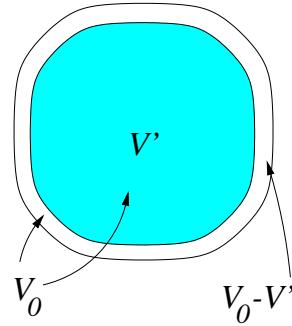


Figura 7.3:

Dado que la superficie S' esta en el interior de S_0 , $\vec{P}(\vec{r}')$ es una función continua y podemos aplicar el teorema de la divergencia. Teniendo en cuenta que

$$\nabla \cdot (f\vec{a}) = f\nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla f \Rightarrow \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla' \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$$

resulta

$$V_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{V'} \frac{(-\nabla' \cdot \vec{P})}{R} dv' + \int_{S'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{R} ds' \right]$$

Expresión que tiene la estructura integral del potencial escalar, según el teorema de Helmholtz.

Luego

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (7.1a)$$

$$\rho_{sP} = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (7.1b)$$

tienen el carácter de densidades monopulares de carga, de volumen y de superficie, respectivamente, y las llamaremos *densidades de carga de polarización*. Luego, en el interior del dieléctrico la densidad de carga de polarización viene representada por una densidad de volumen, pero en las discontinuidades es necesario tener en cuenta una densidad superficial.

El potencial producido fuera de la distribución es, por lo tanto,

$$V_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{V'} \frac{\rho_P(\vec{r}')}{R} dv' + \int_{S'} \frac{\rho_{sP}(\vec{r}')}{R} ds' \right] \quad (7.2)$$

Podemos, pues, como en la figura 7.4, representar al dieléctrico polarizado por un conjunto de cargas de polarización de volumen y de superficie.

Aunque para llegar a una expresión de tipo monopolar hemos supuesto que P era un punto externo, puede extenderse su validez para el interior del medio si se define al campo interno macroscópico de forma adecuada, como promedio del campo que producen el resto de las moléculas de un medio sobre una de las moléculas del mismo ¹.

¹Véase [Lorrain y Corson, Jackson].

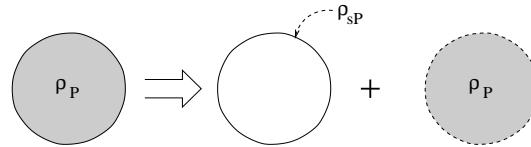


Figura 7.4:

La carga de polarización total del dieléctrico debe ser nula. Es fácil demostrar que

$$\int_{\mathcal{V}'} \rho_P dv' + \int_{S'} \rho_{SP} ds = 0$$

Esta carga de polarización interviene en la generación de campo eléctrico en paridad con la carga de conducción. Podemos visualizar su aparición en la superficie de un dieléctrico con polarización solenoidal, figura 7.5-a, así como en su interior, cuando la polarización no es solenoidal, figura 7.5-b. Estas figuras no constituyen una explicación rigurosa de como se genera este tipo de cargas sino que, más bien, tienen un valor esquemático.

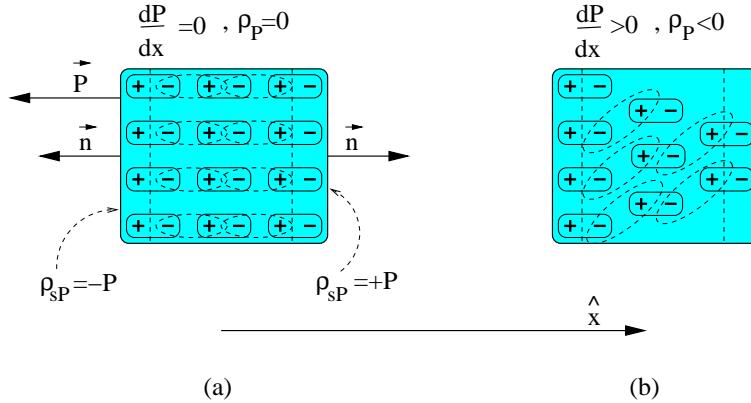


Figura 7.5:

7.2.2. Corrientes de polarización

La carga de polarización, como la total o la de conducción, debe cumplir una ley de conservación. El dieléctrico, en su totalidad, es neutro, por lo que la aparición de una carga neta en el interior de un volumen determinado \mathcal{V} debe venir compensada por un flujo a través de la superficie que envuelve a dicho volumen.

Así, pues, la ecuación de continuidad de la carga de polarización puede expresarse como sigue

$$\nabla \cdot \vec{j}_{pol} + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = 0$$

y, substituyendo $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$,

$$\nabla \cdot (\vec{j}_{pol} - \vec{j}_P) = \nabla \cdot \vec{j}_M = 0$$

donde \vec{j}_P se define como la *densidad de corriente de polarización dieléctrica*

$$\vec{j}_P \equiv \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (7.3)$$

y \vec{j}_M como la *densidad de corriente de polarización magnética*

$$\vec{j}_M \equiv \vec{j}_{pol} - \vec{j}_P \quad (7.4)$$

De acuerdo con lo anterior, la densidad de corriente de polarización dieléctrica \vec{j}_P es la parte no solenoidal de la corriente de polarización \vec{j}_{pol} y la densidad de corriente de polarización magnética \vec{j}_M , la parte solenoidal de la misma.

$$\vec{j}_{pol} = \vec{j}_P + \vec{j}_M \begin{cases} \nabla \cdot \vec{j}_P = -\frac{\partial \rho_P}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{j}_M = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

Cada una de estas corrientes es fuente vectorial del campo magnético. Veremos que la de magnetización puede expresarse en función de la imanación del medio.

7.2.3. Corrientes de polarización magnética

Procederemos en este apartado con el mismo tipo de precauciones y connotaciones que en la sección 7.2.1 por lo que ahorraremos detalles en la exposición. Solo recordaremos que la corriente \vec{j}_M es solenoidal y, por lo tanto, el potencial que produce admite un desarrollo multipolar cuyo primer término no nulo es el dipolar magnético.

La contribución de un elemento de volumen del material magnetizado al potencial magnético será

$$d\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{R}}{R^3} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \wedge \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

que, haciendo uso de la expresión

$$\nabla \wedge (f \vec{a}) = f \nabla \wedge \vec{a} + \nabla f \wedge \vec{a} \Rightarrow \vec{M} \wedge \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\nabla' \wedge \vec{M}}{R} - \nabla' \wedge \left(\frac{\vec{M}}{R} \right)$$

e integrando sobre v' , nos da

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\nabla' \wedge \vec{M}}{R} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \nabla' \wedge \left(\frac{\vec{M}}{R} \right) dv'$$

La segunda integral puede transformarse en integral de superficie haciendo uso del teorema

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \wedge \vec{a} dv = - \int_{\mathcal{S}} \vec{a} \wedge d\vec{s}$$

donde \mathcal{S} es la superficie que contiene a \mathcal{V} , por lo que podemos escribir

$$\vec{A}_M(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\vec{j}_M(\vec{r}')}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}'} \frac{\vec{j}_{sM}(\vec{r}')}{R} ds' \quad (7.6)$$

donde se han definido las *densidades de corriente de magnetización*, de volumen y superficiales

$$\vec{j}_M = \nabla \wedge \vec{M} \quad (7.7a)$$

$$\vec{j}_{sM} = \vec{M} \wedge \vec{n} \quad (7.7b)$$

Ésto permite representar a un material magnetizado por el conjunto de las corrientes de magnetización.

Como en el caso de los dieléctricos, puede demostrarse ² que la expresión obtenida para la contribución al potencial vector en un punto externo es válida también para un punto interior.

La corriente \vec{j}_{pol} no es estacionaria, por lo que el primer término del desarrollo multipolar, $\vec{A}_m(\vec{r})$ de la sección 5.1, que se anulaba por ser las corrientes estacionarias, corresponde a la aportación de las corrientes de polarización dieléctrica.

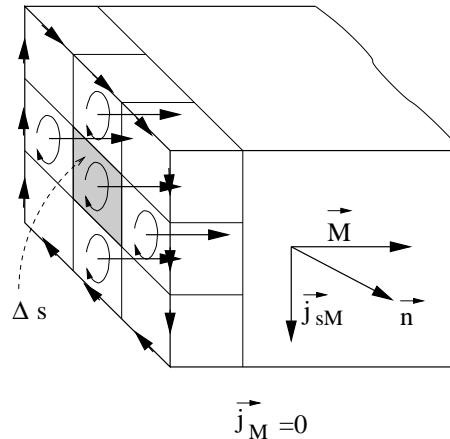


Figura 7.6:

Podemos visualizar intuitivamente la aparición de estas corrientes analizando el esquema de la figura 7.6. Supongamos al material uniformemente magnetizado y dividámoslo en elementos de volumen Δv iguales. Su momento dipolar sería $\Delta M = M \Delta V$. Podemos imaginar al material compuesto por espiras elementales equivalentes, recorridas por una intensidad

$$\Delta I = \frac{M}{\Delta s} \Delta v$$

Si el material está magnetizado uniformemente, las corrientes de espiras contiguas se compensarán, quedando sólo la contribución a la corriente superficial. Si los dipolos contiguos no fuesen idénticos, la compensación no sería total y aparecería una corriente de volumen.

²Véase [Lorrain y Corson].

7.2.4. Potencial magnético escalar. Formalismo de polos magnéticos

Por ser solenoidal, \vec{B} no es derivable de un verdadero potencial escalar. A continuación veremos, sin embargo, que es posible dividir al campo producido por una distribución de dipolos en dos partes, la primera de las cuales es proporcional a \vec{M} y la segunda derivable de un potencial escalar U_M . Este potencial es producido por distribuciones equivalentes de *polos magnéticos*.

El campo puede expresarse de la forma

$$\begin{aligned}\vec{B}_M &= \nabla \wedge \vec{A}_M = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \wedge \left[\int_{\mathcal{V}'} \vec{M}(\vec{r}') \wedge \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dv' \right] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \nabla \wedge \left[\vec{M}(\vec{r}') \wedge \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] dv'\end{aligned}$$

donde se ha escrito $\frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla \left(\frac{1}{R} \right)$

Haciendo uso de

$$\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \underbrace{\vec{b}(\nabla \cdot \vec{a})}_{=0} + \underbrace{(\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b}}_{=0}$$

donde tomaremos $\vec{a} = \vec{M}(\vec{r}')$ y $\vec{b} = \nabla \left(\frac{1}{R} \right)$, se obtiene

$$\vec{B}_M(\vec{r}) = \underbrace{-\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \vec{M}(\vec{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dv'}_{\vec{\alpha}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} (\vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dv'}_{\vec{\beta}}$$

Substituyendo $\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(\vec{R})$ en $\vec{\alpha}$, tenemos $\vec{\alpha} = \mu_0 \vec{M}(\vec{r})$, y, teniendo en cuenta que

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \underbrace{(\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a}}_{=0} + \underbrace{\vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b})}_{=0} + \underbrace{\vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a})}_{=0}$$

donde \vec{a} y \vec{b} toman los mismos valores que en la expresión anterior y se han anulado no sólo los términos donde $\vec{M}(\vec{r}')$ aparece a la derecha del operador ∇ , sino también el $\nabla \wedge (\nabla \left(\frac{1}{R} \right)) \equiv \vec{0}$. Luego

$$\vec{\beta} = -\mu_0 \nabla \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\vec{M} \cdot \vec{R}}{R^3} dv' \right]$$

por lo que escribiremos

$$\vec{B}_M(\vec{r}) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) - \mu_0 \nabla U_M(\vec{r}) \quad (7.8)$$

Es decir, $\vec{B}_M(\vec{r})$ puede descomponerse en dos términos: uno proporcional a la imanación y otro derivable de un potencial escalar que tiene la misma estructura dipolar del descrito en el párrafo 5.2.2.1

$$U_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot \vec{R}}{R^3} dv' \quad (7.9)$$

Si, además de existir medios magnetizados, existieran corrientes de conducción, habría que sumar a \vec{B}_M el campo producido por éstas.

Aplicando ahora a U_M un tratamiento análogo al aplicado a V_P en el párrafo 7.2.1, obtenemos

$$U_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho_M}{R} dv' + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\rho_{sM}}{R} ds' \quad (7.10)$$

donde

$$\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M} \quad \text{y} \quad \rho_{sM} = \vec{M} \cdot \vec{n} \quad (7.11)$$

U_M es un pseudopotencial de \vec{B} , con la misma estructura que el potencial electrostático, pero veremos que es un verdadero potencial escalar para \vec{H} , campo que definiremos en la próxima sección.

ρ_M y ρ_{sM} son densidades de volumen y superficie de *polos magnéticos*. No debemos confundir estos polos magnéticos, que en realidad son polos o fuentes escalares de \vec{H} , con los monopolos postulados en las teorías de gran unificación y que serían fuentes de \vec{B} . Insistimos en que estos monopolos, que habrían sido creados en grandes cantidades en las primeras etapas del universo, durante la Gran Explosión (Big-Bang), y que, teniendo dimensiones atómicas serían billones de veces más pesados que un protón, son tan escasos, si es que existen, que no obligan a modificar la expresión $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

El formalismo de polos magnéticos es de utilidad práctica, puesto que permite aplicar los mismos métodos a los problemas magnéticos que a los eléctricos.

Según se muestra en la figura 7.7, el cálculo del campo magnético producido por una corriente I que recorre un carrete arrollado a un material magnético, podría tratarse según las dos alternativas siguientes, en las que suponemos que $\vec{M} = \vec{c}te$:

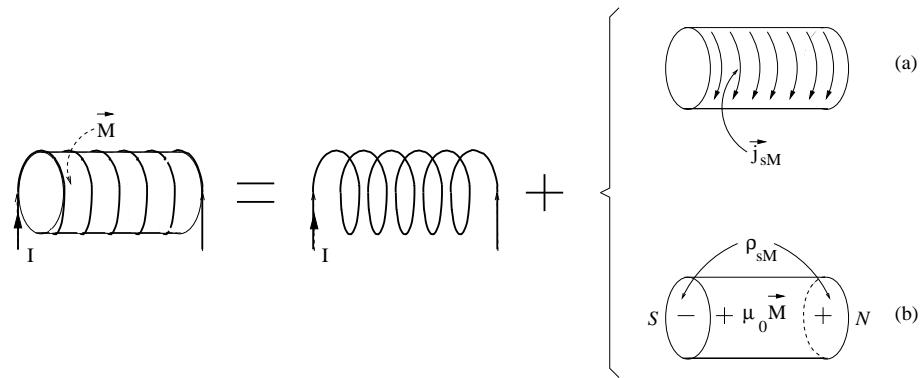


Figura 7.7:

En ambas alternativas, habrá que calcular por separado la contribución del carrete, como si estuviera en el vacío. La contribución del material magnetizado se calcula substituyendo al núcleo magnetizado, en (a), por un conjunto de corrientes superficiales y, en (b), por dos superficies de polos magnéticos, Sur (-) y Norte (+), y añadiendo, dentro del material, el término $\mu_0 \vec{M}$. Para que podamos resolver el problema, nos hace falta conocer la ecuación constitutiva que expresa cómo se magnetiza el medio en función del campo aplicado.

7.3. Desplazamiento eléctrico e intensidad magnética

En las secciones anteriores se han expresado las fuentes escalares y vectoriales del campo electromagnético en función de las cargas y corrientes de conducción, de la polarización dieléctrica y de la imanación

$$\rho_T = \rho - \nabla \cdot \vec{P} \quad (7.12a)$$

$$\vec{j}_T = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \vec{M} \quad (7.12b)$$

por lo que las ecuaciones de Poisson y Ampère toman la forma

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \nabla \cdot \vec{P}) \quad (7.13a)$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \vec{M} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (7.13b)$$

Los segundos miembros de las ecuaciones anteriores pueden simplificarse definiendo unos nuevos campos vectoriales

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (7.14a)$$

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (7.14b)$$

\vec{D} recibe el nombre de *desplazamiento eléctrico* y \vec{H} el de *intensidad magnética*. Ambas definiciones tienen un carácter híbrido al sumar a un vector que representa al valor medio del campo microscópico con otro que representa a la densidad de polarización. Las ecuaciones 7.12, escritas en función de estos nuevos campos, se reducen a

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (7.15a)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (7.15b)$$

De esta forma podemos expresar las ecuaciones de Maxwell en su forma tradicional, pero lo aplazaremos hasta el próximo capítulo.

En cualquier caso, las ecuaciones anteriores no son útiles a menos que conozcamos como se polariza y como onduce el medio en función de los campos aplicados. El problema es complejo y debe encontrar solución dentro de la teoría del 'estado sólido'. Aquí nos limitaremos a plantearlo el desde el punto de vista fenomenológico y aplicarlo, casi exclusivamente, a los medios lineales simples.

7.3.1. Susceptibilidades, constante dieléctrica y permeabilidad magnética

La polarización de las cargas que constituyen la materia, así como la conducción de las mismas, son procesos autoconsistentes según los cuales el campo electromagnético, en conjunción con las fuerzas moleculares y cristalinas de origen cuántico, las redistribuye de forma que éstas, a su vez, modifican al campo inicial. Este es, pues, un difícil problema dinámico que sólo es resoluble aproximadamente y bajo ciertas limitaciones. Afortunadamente, muchos materiales, dentro de un amplio rango de variación de los campos, se comportan como lineales. Consideraremos aquellos medios de este tipo en los que \vec{P} es proporcional, a través de una constante, al campo eléctrico aplicado y \vec{M} al magnético³. Escribiremos estas constantes de proporcionalidad de la forma

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (7.16a)$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (7.16b)$$

donde χ_e es la *susceptibilidad eléctrica*⁴ y χ_m la *susceptibilidad magnética*⁵.

Substituyendo en 7.14, se puede escribir

$$\vec{D} \rightarrow \begin{cases} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \\ \equiv \varepsilon \vec{E} \\ \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \end{cases} \quad (7.17a)$$

$$\vec{B} \rightarrow \begin{cases} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \\ \equiv \mu \vec{H} \\ \equiv \mu_0 \mu_r \vec{H} \end{cases} \quad (7.17b)$$

donde se han definido la *constante dieléctrica* ε y la *permeabilidad magnética* del medio y sus valores relativos

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_0 (1 + \chi_e) , \quad \varepsilon_r \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = (1 + \chi_e) \quad (7.18a)$$

$$\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi_m) , \quad \mu_r \equiv \frac{\mu}{\mu_0} = (1 + \chi_m) \quad (7.18b)$$

Las relaciones 7.16 y 7.17 son distintas versiones de las *ecuaciones constitutivas* de los medios, las cuales podrán ser determinadas teórica o experimentalmente. Como ya hemos apuntado, estas 'constantes' son aproximaciones de leyes complicadas y, en general son funciones, no solo del campo, sino de un cierto número de variables, tales como

³Este no es el caso más general de medio lineal. Véase [García Olmedo].

⁴También suele definirse la susceptibilidad eléctrica mediante la expresión $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$.

⁵De acuerdo con la línea de razonamiento seguida en este texto, sería más coherente expresar a \vec{M} en función de \vec{B} , pero tradicionalmente se hace en función de \vec{H} .

la temperatura, la velocidad de variación de los campos, etc. Por ahora, consideraremos la dependencia, en campos estáticos, de la polarización con el campo eléctrico y la posición. En la mayoría de los casos prácticos, los dieléctricos y los medios magnéticos pueden considerarse lineales⁶, homogéneos e isótropos. A estos medios, para simplificar, los calificaremos como de *clase A*. Los gases no polares son de clase A dentro de un rango de variables muy extenso. Los polares sólo presentan no linealidades en condiciones extremas de temperatura o campo aplicado.

Los materiales no homogéneos son muy frecuentes. Los que están compuestos por un conjunto de regiones homogéneas, como los sistemas de lentes y otros muchos sistemas de importancia práctica, pueden ser tratados como homogéneos, en cada una de las regiones, y aplicar condiciones de continuidad en las superficies o interfaces de separación entre ellas. Otros, como las atmósferas planetarias en su conjunto o, a menor escala, la primera capa de aire sobre un suelo caliente, etc., deben ser tratados directamente como no homogéneos, por lo que sus constantes dependerán de la posición

$$\varepsilon = \varepsilon(\vec{r}) , \quad \mu = \mu(\vec{r})$$

Muchos materiales cristalinos, o sometidos a tensiones, presentan una distinta capacidad de polarización según la dirección en que se aplique el campo, teniendo, pues, un comportamiento anisótropo. Los vectores \vec{D} y \vec{B} tienen, en general, una dirección distinta a \vec{E} y \vec{H} respectivamente, véase la figura 7.8, y ε y μ tiene estructura tensorial. Sus componentes son ε_{ij} y μ_{ij} .

$$\vec{D} = (\varepsilon_{ij}) \vec{E} , \quad D_i = \varepsilon_{ij} E_j$$

$$\vec{B} = (\mu_{ij}) \vec{H} , \quad B_i = \mu_{ij} H_j$$

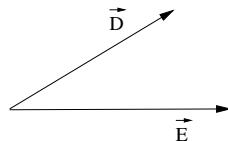


Figura 7.8:

Otros materiales, como los ferroeléctricos y los ferromagnéticos, son esencialmente no lineales.

Para medios no lineales puede generalizarse el concepto de constante dieléctrica, escribiendo⁷

$$\varepsilon = \varepsilon(\vec{E}) , \quad \mu = \mu(\vec{H})$$

La dependencia de ε y μ con el campo puede ser complicada y presentar fenómenos de histéresis, como el representado en el *ciclo de histéresis* de la figura 7.9.

Mientras que los dieléctricos no lineales juegan un papel marginal, los materiales magnéticos no lineales tienen importancia práctica, hasta el punto de, como ya hemos

⁶En el sentido restringido ya mencionado.

⁷En general, ε o μ pueden ser función de ambos campos \vec{H} \vec{E} .

apuntado, calificarlos de *materiales magnéticos* con la exclusión de los dia- y para-magnéticos, que se califican de *materiales no magnéticos*.

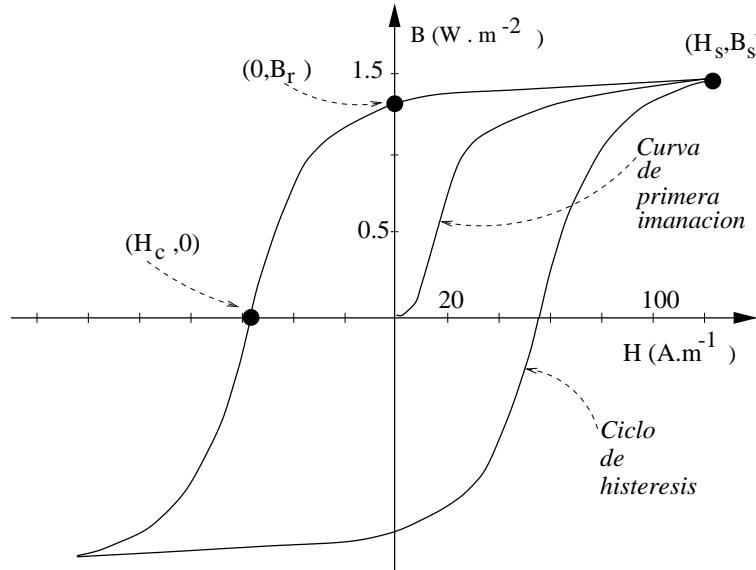


Figura 7.9:

También en este caso puede extenderse el concepto de permeabilidad en varios sentidos. En particular, podemos definir una permeabilidad total

$$\vec{B} = \mu(\vec{H}) \vec{H}$$

aunque $\mu(\vec{H})$ es una función muy complicada no expresable de forma analítica y que depende no sólo de \vec{H} sino de la historia previa de la imanación. De entre las posibles trayectorias que pueden seguirse en el plano $B - H$, destacaremos las que se denominan respectivamente *curva de primera imanación* y *curva de histéresis principal*.

La curva de primera imanación se recorre a partir del origen, o *estado desmagnetizado*, aumentando H lentamente hasta alcanzar el *punto de saturación* (H_s , B_s).

Si seguimos aumentando H , la magnetización del medio permanece casi constante puesto que, a partir de aquí, todos los espines están prácticamente alineados y sólo puede haber aportaciones paramagnéticas.

El ciclo de histéresis principal se recorre a partir de (H_s , B_s), disminuyendo H para, pasando por los puntos (0 , B_r) y (H_c , 0), ir a la saturación negativa. B_r se llama *campo remanente* y H_c , *campo coercitivo*. Más adelante trataremos algunos aspectos teóricos y prácticos relacionados con los materiales ferromagnéticos.

En lo sucesivo, salvo que se indique lo contrario, supondremos que los medios son de clase A.

7.4. Campos estáticos en medios materiales

Como se ha visto en las secciones anteriores, el tratamiento del campo en medios materiales es considerablemente más complejo que el expuesto en la primera parte para el vacío. No obstante en el caso de los medios de clase *A*, las ecuaciones del campo son muy similares a las del vacío y la solución de los problemas puede hacerse en gran parte con las mismas técnicas. Por esta razón, una vez establecidas las diferencias de ambas situaciones y las leyes de analogía, se hará referencia a lo tratado en el capítulo 2.

7.4.1. Electrostática

Ecuaciones de Maxwell :

La ecuaciones del campo electrostático pueden escribirse de la forma

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \Rightarrow \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad (7.19a)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla V \quad (7.19b)$$

La solución de estas ecuaciones requiere el conocimiento de la relación constitutiva $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$.

Para medios de clase *A*, estas ecuaciones pueden escribirse en función de \vec{E} ⁸

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon} \quad (7.20)$$

Vemos, por lo tanto, que estas ecuaciones son análogas a las de la electrostática del vacío, siendo la densidad total ρ_T análoga a la de conducción ρ y la constante dieléctrica del vacío ϵ_0 análoga a la del medio ϵ .

Mientras \vec{E} tiene sus fuentes escalares tanto en las cargas de conducción como en las de polarización

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\epsilon_0}$$

las fuentes escalares de \vec{D} son exclusivamente las cargas de conducción, hecho que no debe confundirnos haciéndonos pensar que \vec{D} sea independiente de la existencia o no de medios polarizados. La resolución del problema eléctrico hace necesario el conocimiento de la ecuación constitutiva. En muchos problemas, en los que se especifica la carga de conducción, puede ser cómodo calcular la parte de \vec{D} derivable de un potencial escalar a partir de dichas cargas y hacer uso después de las ecuaciones constitutivas de los medios para calcular \vec{E} .

Como se muestra en la figura 7.10, un dieléctrico apantalla parcialmente al campo aplicado. Al establecer una diferencia de potencial estática entre las placas metálicas del condensador de la figura, aparece un campo eléctrico que polariza al dieléctrico.

⁸Al ser el medio homogéneo $\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E}$.

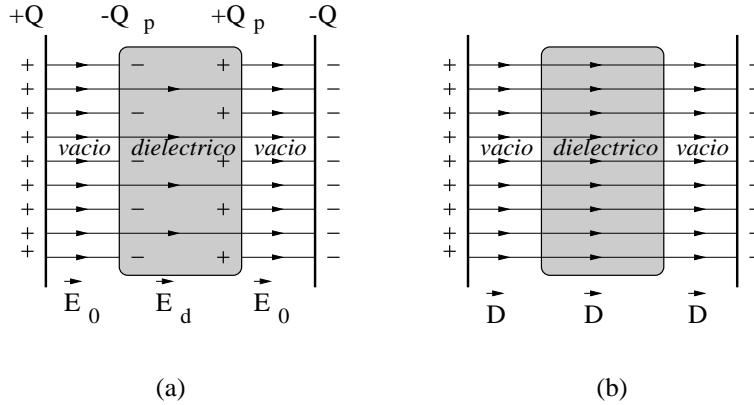


Figura 7.10:

Las líneas de campo \vec{E} nacen y mueren en las cargas de conducción y en las de polarización, por lo que \vec{E}_0 es mayor que \vec{E}_d . \vec{D} , sin embargo, nace y muere en las cargas de conducción, por lo que tendrá el mismo valor en el vacío que en el dieléctrico.

En el ejemplo que acabamos de analizar no ha sido necesario tener en cuenta las posibles fuentes vectoriales de \vec{D} pero, aún para campos estáticos, éste puede tener fuentes vectoriales.

Ley de Coulomb :

Para una carga puntual, situada en el origen e inmersa en un medio de clase A , la ley de Coulomb toma la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}}{r^2} \Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (7.21)$$

y el potencial electrostático

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad (7.22)$$

Para una distribución continua de carga

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \frac{\rho \vec{R}}{R^3} dv' \Rightarrow \vec{D} = \frac{1}{4\pi} \int_{v'} \frac{\rho \vec{R}}{R^3} dv' \quad (7.23)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \frac{\rho}{R} dv' \quad (7.24)$$

Las cargas que aparecen en estas expresiones son las de conducción, lo cual puede justificarse porque, para medios de clase A , las densidades de carga de conducción y polarización son proporcionales entre sí. Según hemos visto, en general

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} , \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

y, para clase A, $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$, de donde

$$\rho_P = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \rho \quad (7.25)$$

Luego, en dieléctricos de clase A, aparece en cada punto una carga de polarización proporcional a la carga de conducción existente en dicho punto. Para $\varepsilon_r > 1$, $|\rho_P| < |\rho|$, la carga de polarización es de signo contrario y menor en valor absoluto a la de conducción, lo que indica, como ya hemos visto con anterioridad, que los dieléctricos normales apantallan parcialmente a las cargas de conducción y al campo eléctrico que éstas producen.

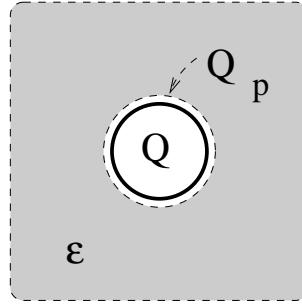


Figura 7.11:

Si suponemos, por ejemplo, una carga esférica Q , como la que se muestra en la figura 7.11 sumergida en un dieléctrico clase A, es fácil comprobar, aplicando el teorema de Gauss, que la carga de polarización que aparece en la superficie de separación del dieléctrico es

$$Q_p = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} Q \Rightarrow Q_T = Q + Q_p = \frac{1}{\varepsilon_r} Q$$

Luego, una carga puntual en el seno de un dieléctrico se apantallará parcialmente en la misma proporción que la carga esférica.

Por esta razón, en un dieléctrico de clase A, las cargas de polarización, en ausencia de cargas de conducción, sólo pueden aparecer en la superficie.

Hay que tener en cuenta que si el medio está limitado por una superficie que lo separa de otro medio con distinta constante dieléctrica, dicha superficie constituye un medio no homogéneo y la carga superficial de polarización no está directamente ligada a la existencia de carga de conducción en la superficie.

En este caso habría que expresar V y \vec{E} de la forma

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{R} dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s + \rho_{sP}}{R} ds'$$

y obtener \vec{D} en los puntos fuera de la propia superficie, a partir de la expresión

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

7.4.2. Magnetostática

Las ecuaciones de Maxwell magnetostáticas pueden escribirse de la forma

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (7.26a)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (7.26b)$$

En función de \vec{H} , la ley de ausencia de monopolos se expresa como

$$\nabla \cdot \vec{H} = \rho_M \quad (7.27)$$

y, en función de \vec{B} , la de Ampére

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_M) \quad (7.28)$$

En consecuencia, \vec{B} sólo tiene fuentes vectoriales, \vec{j} y \vec{j}_M , mientras que \vec{H} las tiene escalares ρ_M y vectoriales \vec{j} .

Medios de clase A :

Para este tipo de medios, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, por lo que

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 , \quad \nabla \wedge \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (7.29)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{j} \wedge \frac{\vec{R}}{R^3} dv' , \quad \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \vec{j} \wedge \frac{\vec{R}}{R^3} dv' \quad (7.30)$$

y

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}}{R} dv' \quad (7.31)$$

Cómo en el caso de los dieléctricos de clase A, de acuerdo con 7.28 y 7.29, la corriente de conducción y la de magnetización son proporcionales

$$\vec{j}_M = \chi_m \vec{j} \quad (7.32)$$

Las corrientes de imanación refuerzan a las de conducción en el caso de los paramagnéticos y ferromagnéticos y se oponen a ella en el caso de los diamagnéticos. Las corrientes de magnetización dia y paramagnéticas tienen una magnitud muy pequeña comparada con la de conducción mientras que ocurre lo contrario con la ferromagnética, lo que sugiere el origen no clásico de éstas.

En la figura 7.12 se comparan los valores de \vec{M} , \vec{B} y \vec{H} en el eje un solenoide y en el de un imán con magnetización uniforme.

Se supone que el solenoide está formado por un número grande de espiras, N , uniformemente distribuidas y el imán tiene una magnetización uniforme \vec{M}_0 .

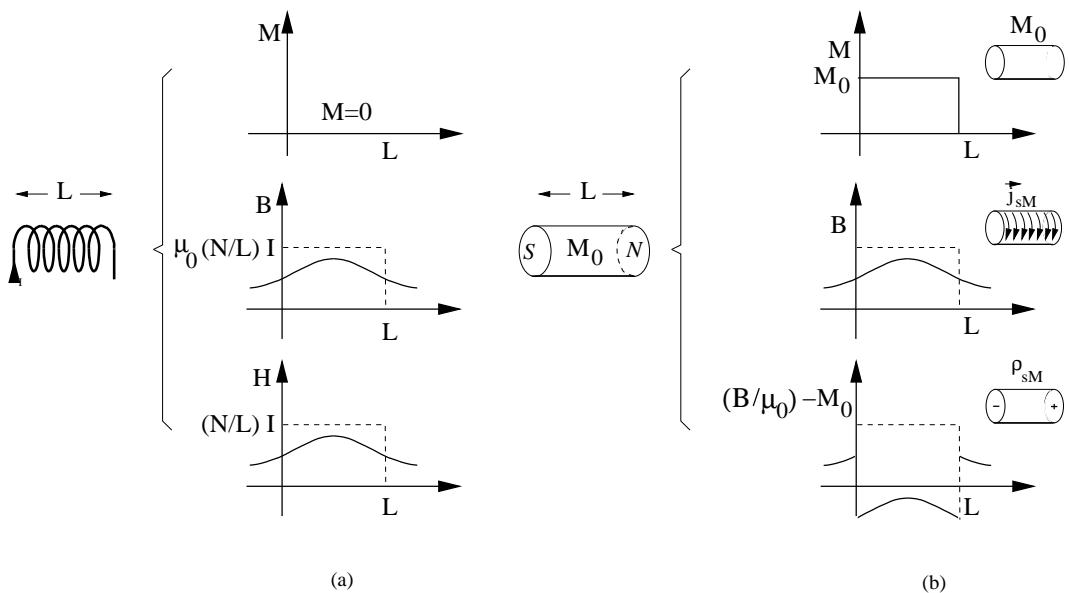


Figura 7.12:

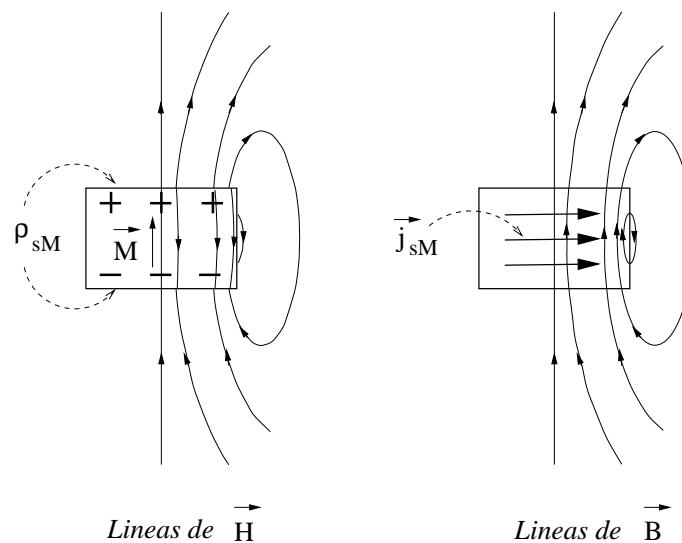


Figura 7.13:

En la figura 7.13 se ilustran las líneas de los campos \vec{B} y \vec{H} para un imán uniforme. Las líneas de \vec{B} son cerradas mientras que las de \vec{H} nacen y mueren en los polos magnéticos.

En el exterior del imán coinciden las líneas de campo de \vec{B} y las de \vec{H} .

7.5. Problemas

7-1. Demuestre que el momento dipolar total \vec{p}_{tot} de un dieléctrico, de volumen \mathcal{V} y envuelto por la superficie S , puede expresarse como

$$\vec{p}_{tot} = \int_{\mathcal{V}} \rho_P \vec{r} dv + \int_S \rho_{sP} \vec{r} ds$$

(Intégrese la divergencia de $x \vec{P}$).

7-2. Demuestre que la carga de polarización total del dieléctrico del problema anterior es nula.

7-3. Sea un dieléctrico no homogéneo sin cargas ni corrientes de conducción. Halle las fuentes escalares de \vec{E} y las vectoriales de \vec{D} en función de $\varepsilon(\vec{r})$.

7-4. Si un condensador plano, cuyas placas, de superficie S , están separadas una distancia $d \ll \sqrt{S}$ y cuyo dieléctrico tiene una constante $\varepsilon = a + bx$, está sometido a una diferencia de potencial V_0 , halle:

- a) \vec{E} y \vec{D} .
- b) La capacidad del condensador.

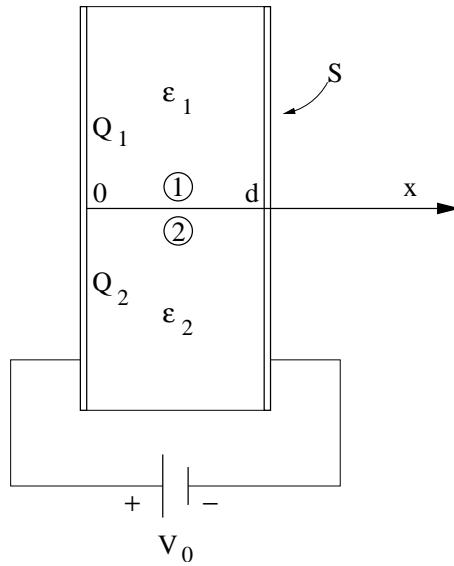


Figura 7.14:

7-5. El condensador de la figura 7.14 está lleno, por mitades de dos dieléctricos de constantes ε_1 y ε_2 . Calcule (despreciando el efecto de bordes)

- a) \vec{E} y \vec{D} .
- b) Densidades de carga de conducción y de polarización.

c) *Capacidad del condensador.*

7-6. Una esfera está uniformemente polarizada con $\vec{P} = P\hat{z}$. Halle \vec{E} y \vec{D} en su centro.

7-7. Halle los campos \vec{E} y \vec{D} producidos en un punto de su eje por un electrete cilíndrico, de radio a y longitud L , que está polarizado uniformemente en la dirección de dicho eje con polarización \vec{P} .

UN 'ELECTRETE' ES UN MATERIAL QUE POSEE POLARIZACIÓN PERMANENTE, AUN EN AUSENCIA DE CAMPO APLICADO.

Compruebe que \vec{E} es discontinuo en las bases del electrete mientras que \vec{D} es continuo. Haga uso del teorema de Gauss para confirmarlo.

Solucion :

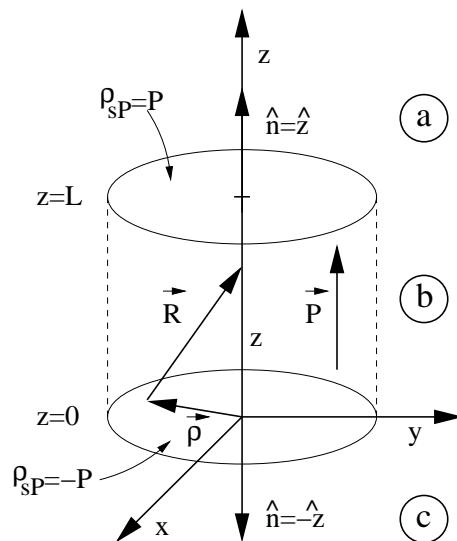


Figura 7.15:

Situemos al electrete en la posición mostrada en la figura 7.15,

El campo eléctrico lo podemos hallar substituyendo la distribución de dipolos por otra de cargas superficiales de polarización en las bases del electrete. A partir de éste se obtiene

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

donde $P_z = P$ para $0 < z < L$ y $P_z = 0$ para $z > L$ y para $z < 0$.

El campo producido por una distribución uniforme de carga superficial es

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{R}}{R^3} ds$$

Dada la simetría de nuestro problema, el campo producido en el eje z tiene la dirección de dicho eje. Para la base inferior, cuya carga es $\rho_s = -P$, tenemos, por consiguiente, que

$$\vec{E}_0 = -\frac{Pz}{2\varepsilon_0} \hat{n}_0 \int_{\rho=0}^a \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde $\hat{n}_0 = \hat{z}$ para $z > 0$ y $\hat{n}_0 = -\hat{z}$ para $z < 0$.

Recurriendo a las tablas tenemos que

$$\vec{E}_0 = -\frac{P}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right) \hat{n}_0$$

Para hallar el campo producido por la base superior, debemos dar el valor $\rho_s = P$ a la densidad superficial y realizar el cambio de variable $z \rightarrow z - L$, luego

$$\vec{E}_L = \frac{P}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z - L}{\sqrt{a^2 + (z - L)^2}}\right) \hat{n}_L$$

donde $\hat{n}_L = \hat{z}$ para $z > L$ y $\hat{n}_L = -\hat{z}$ para $z < L$.

Para expresar el campo del electrete tendremos que dividir el eje z en tres intervalos: $a = (z > L)$, $b = (0 < z < L)$ y $c = (z < 0)$.

$$\begin{aligned} \vec{E}_a &= \frac{P}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z - L}{\sqrt{a^2 + (z - L)^2}} \right) \hat{z} \\ \vec{D}_a &= \varepsilon_0 \vec{E}_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_b &= \frac{P}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{z - L}{\sqrt{a^2 + (z - L)^2}} - 2 \right) \hat{z} \\ \vec{D}_b &= \varepsilon_0 \vec{E}_b + \vec{P} \end{aligned}$$

$$\vec{E}_c = -\vec{E}_a \quad , \quad \vec{D}_c = -\vec{D}_a$$

Analice la continuidad de estos campos.

7-8. El espacio comprendido entre dos placas conductoras planas y paralelas, de superficie $S = a \times a$ y separadas una distancia $b \ll a$, está parcialmente lleno por una lámina dieléctrica de espesor c y constante ε . Halle:

- a) Los campos \vec{E} y \vec{D} , en las distintas regiones, cuando entre las placas se establece una diferencia de potencial V .

- b) Las cargas libres y de polarización en las condiciones anteriores.
 c) La capacidad del condensador. Compárese con la del condensador de aire.

Solucion :

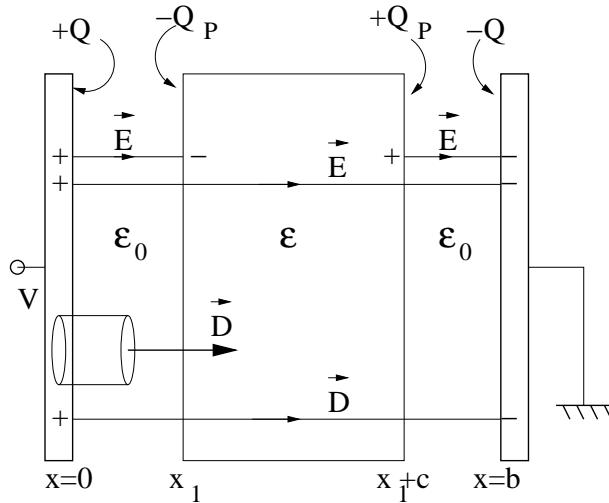


Figura 7.16:

El condensador está representado en la figura 7.16.

\vec{E} tiene sus fuentes tanto en las cargas de conducción como en las de polarización, por lo que tendrá valores distintos en el dieléctrico y en el vacío.

\vec{D} , sin embargo, tienen sus fuentes en las cargas de conducción. Para calcularlo procederemos, en primer lugar, a relacionarlo con dichas cargas integrando sobre una caja de pastillas, como en el problema 2-17, con la base izquierda dentro del conductor y la otra en cualquier punto entre las placas. Encontramos que

$$\vec{D} = D \hat{x}, \quad D = \frac{Q}{a^2}$$

y, a partir de aquí

$$E_0 = \frac{D}{\epsilon_0}, \quad E_d = \frac{D}{\epsilon}$$

donde E_0 es el campo eléctrico en el vacío y E_d el correspondiente al dieléctrico. Para relacionarlo con V , debemos integrarlo

$$V = V(0) - V(b) = \int_{x=0}^{x_1} E_0 dx + \int_{x=x_1}^{x_1+c} E_d dx + \int_{x=x_1+c}^b E_0 dx = D \left(\frac{b-c}{\epsilon_0} + \frac{c}{\epsilon} \right)$$

El resto del problema se deja como ejercicio.

- 7-9. Una esfera dieléctrica, centrada en el origen y de radio a , tiene una polarización permanente $\vec{P} = A\vec{r}$. Halle las cargas de polarización y demuestre por integración que la carga total inducida es nula.

Solucion :

La densidad de carga de volumen es

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = -2\frac{P_r}{r} - \frac{\partial P_r}{\partial r} \Rightarrow \rho_P = -3A$$

$$\rho_{sP} = \vec{P} \cdot \hat{r} = Aa$$

Luego

$$Q_p = \rho_P V = -4\pi a^3 A , \quad Q_{sP} = \rho_{sP} S = 4\pi a^3 A$$

y, la carga total es

$$Q_{pT} = Q_p + Q_{sP} = 0$$

- 7-10. Una esfera dieléctrica, de radio a y constante ϵ , posee en su interior una densidad de carga libre $\rho = Ar$. Determine:

- a) El campo eléctrico en cualquier punto del espacio.
- b) El potencial en el centro de la esfera.
- c) Las cargas de polarización inducidas.

- 7-11. Una esfera metálica de radio a , cargada con una carga q , está rodeada por una capa de dieléctrico de constante ϵ hasta un radio $2a$. Haga los mismos cálculos que en el problema anterior.

- 7-12. El espacio comprendido entre dos esferas metálicas concéntricas con el origen, de radios a y b y espesor despreciable, se encuentra lleno de dos dieléctricos de permitividades ϵ_1 y ϵ_2 . Supuesto que el primer dieléctrico ocupa la región $a < r < c$ y el segundo la región $c < r < b$, halle:

- a) Los campos \vec{E} , \vec{D} y \vec{P} en función de los potenciales V_a y V_b aplicados a los conductores.
- b) La cargas de polarización en $r = c$ en función de \vec{P} .
- c) La capacidad del condensador.

- 7-13. Describa, de forma análoga al problema 7-1, el momento magnético total de un material imanado, de volumen \mathcal{V} y envuelto por la superficie \mathcal{S} , en función de las densidades superficiales y de volumen de polos magnéticos. Haga lo mismo en función de las densidades superficiales y de volumen de corrientes de magnetización.

7-14. Halle los campos \vec{B} y \vec{H} , producidos en un punto de su eje por un imán cilíndrico, de radio a , longitud L e imanado uniformemente, en dirección axial, con magnetización \vec{M} . Realice los cálculos:

- a) Haciendo uso del formalismo de corrientes equivalentes de magnetización.
- b) Haciendo uso del formalismo de polos magnéticos.

Solución:

a) Esta parte del problema es análoga a la del 5-16. En aquel caso, se trataba de hallar el campo magnético producido por un solenoide, con las mismas dimensiones del imán, en un punto de su eje. En éste, el campo está producido por una densidad de corriente superficial

$$\vec{j}_{sM} = \vec{M} \wedge \hat{\rho} = M \hat{\varphi}$$

En el problema arriba citado, el solenoide se situaba en el intervalo $-L/2 \leq z \leq L/2$. Ahora lo trasladaremos $L/2$ en la dirección z para situarlo en $0 \leq z \leq L$.

Con este fin, realizaremos los siguientes cambios en la fórmula de partida:

$$z \rightarrow z + L , \quad nI \rightarrow M$$

con lo que se obtiene

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_0 M \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{z + L}{\sqrt{a^2 + (z + L)^2}} \right)$$

b) Para llevar a cabo este cálculo podemos hacer uso de la analogía del potencial escalar magnético y el eléctrico. Los pasos a seguir vienen marcados por el problema 7-7, el primero de los cuales consiste en la resolución de la integral del campo

$$\vec{H} = \frac{\rho_{sM}}{4\pi} \int_S \frac{\vec{R}}{R^3} ds$$

con $\rho_{sM} = \vec{M} \cdot \vec{n}$.

Lleve a cabo los cambios de nomenclatura correspondientes para demostrar que la solución por esta vía coincide con la del apartado (a).

Cabe también partir del cálculo del potencial para hallar \vec{H} mediante el gradiente del anterior.

- 7-15. Un material magnético conductor, que tiene la forma de un cilindro largo, de radio a y permeabilidad μ , está recorrido por una corriente uniforme I . A este cilindro lo envuelve un tubo del mismo material, coaxial con el anterior, de radio interno b y externo c . Calcule los campos, la magnetización, las densidades de corriente de magnetización y las de polos magnéticos en todos los puntos del espacio.
- 7-16. Un imán permanente tiene forma de elipsoide de revolución con semiejes $a = 1$, $b = 1$ y $c = 2$. Posee una magnetización \vec{M} en la dirección del eje de simetría. Halle las densidades de corrientes de magnetización y de polos magnéticos resultantes.

Solucion :

La ecuación del elipsoide es

$$F(\vec{r}) = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

El vector normal a la superficie es el vector unitario con la dirección del ∇F .

$$\nabla F \sim (x, y, \frac{z}{4})$$

de donde

$$\vec{n} = \frac{(4x, 4y, z)}{\sqrt{16x^2 + 16y^2 + z^2}}$$

y, teniendo en cuenta que, dada la ecuación del elipsoide, $z = \pm 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ podemos escribir

$$\rho_{sM} = \vec{M} \cdot \vec{n} = \text{sig}(z) \frac{M \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 1}}$$

dentro del dominio $x^2 + y^2 \leq 1$ del plano xy .

De forma análoga se calculan las corrientes superficiales de magnetización

- 7-17. Un imán tiene forma de disco de radio a y espesor pequeño b y tiene una magnetización \vec{M} uniforme y perpendicular a las caras del mismo. Halle los campos en cualquier punto del eje.
- 7-18. Un solenoide toroidal de sección cuadrada $b \times b = 1 \text{ cm}^2$ tiene radio menor $a = 10 \text{ cm}$. Está constituido por un carrete de $N = 5000$ vueltas uniformemente arrolladas alrededor de un núcleo de material magnético de permeabilidad relativa $\mu_r = 100$. Halle:
- La autoinducción.

- b) Los campos generados cuando por el carrete se hace circular una corriente $I = 10 \text{ mA}$,
c) Compare los resultados anteriores con los que se obtendrían al substituir el núcleo magnético por aire.

Solucion :

Resolveremos la primera parte apoyándonos en la figura 7.17.

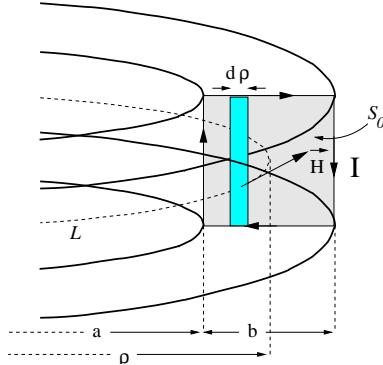


Figura 7.17:

Aplicando la ley de Ampère al camino \mathcal{L} , obtenemos las expresiones

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho} \Rightarrow B = \frac{\mu NI}{2\pi\rho}$$

El flujo cortado por una de las espiras, cuya sección es $S_0 = b^2$, será

$$\Phi_0 = \frac{\mu NIb}{2\pi} \int_{\rho=a}^{a+b} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu NIb}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{s}\right)$$

y el cortado por las N espiras del solenoide

$$\Phi = N\phi_0$$

con lo que

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu N^2 b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{s}\right)$$

Capítulo 8

Conductores

8.1. Mecanismos de conducción. Medios óhmicos

Ya hemos visto en la sección 1.3.2 que, desde el punto de vista macroscópico, el transporte de cargas puede describirse por los vectores densidad de corriente

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^p \vec{j}_i \quad , \quad \vec{j}_i = \rho_i \vec{u}_i \quad (8.1)$$

donde ρ_i es la densidad de carga de portadores de tipo i , \vec{u}_i su velocidad colectiva o de arrastre, \vec{j}_i su densidad de corriente y \vec{j} la densidad de corriente total, o neta, del conjunto de los p portadores de distinto tipo que intervienen en la conducción.

En general, un *portador* es cualquier partícula cargada capaz de desplazarse y dar lugar a un flujo neto de cargas a través de una superficie determinada.

Existe una gran variedad de mecanismos de conducción, algunos de gran complejidad. Las fuerzas que intervienen en la conducción, a nivel microscópico, son de tipo cuántico y electromagnético. Por ahora nos ocuparemos principalmente de la contribución del campo eléctrico que, en la mayoría de los casos prácticos, es la más importante, y se utilizarán modelos mecánicos sencillos para representar a las fuerzas cuánticas.

El campo eléctrico actúa sobre los portadores de carga acelerándolos, en su misma dirección si son de carga positiva, como los iones positivos en electrolitos y gases o los huecos en semiconductores, y en dirección contraria, como los electrones e iones negativos. En general, cada tipo de portador contribuye a la corriente total, con una densidad de corriente ¹

$$\vec{j}_i = \vec{j}_i(\vec{E}, t) \quad , \quad \vec{u}_i = \vec{u}_i(\vec{E}, t)$$

En los medios densos, la energía que el campo cede a los portadores puede convertirse eficientemente en energía térmica a través de los choques con moléculas, lo que puede traducirse en una fuerza de fricción equivalente. Esta fuerza de fricción, como en el caso de la caída de un grano en un medio viscoso, limita la velocidad de arrastre

¹La corriente puede también ser función del campo magnético pero aquí no tendremos en cuenta a esta posible contribución.

de los portadores de forma que, bajo la acción de un campo constante, ésta alcanza rápidamente un valor límite independiente del tiempo.

$$\vec{u}_i = \vec{u}_i(\vec{E})$$

Para los medios lineales simples, o medios óhmicos, esta relación se escribe de la forma

$$\vec{u}_i = \mu_i \vec{E} \quad (8.2)$$

donde μ_i es una constante, la *movilidad* del portador i .

La densidad de corriente total será también proporcional al campo aplicado

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} , \quad \sigma = \sum_{i=1}^p \rho_i \mu_i , \quad [\sigma] = S \cdot m^{-1} \quad (8.3)$$

donde σ es la *conductividad* del medio y S es la abreviatura de la unidad de admitancia *siemens*².

Esta es una de las formas de enunciar la *ley de Ohm*, con la cual se expresa la relación local de tipo lineal³ e isótropa, existente entre el campo eléctrico aplicado y la densidad de corriente resultante para un cierto tipo de materiales y bajo unas condiciones determinadas.

Conviene resaltar que esta ley, si bien tiene un amplio margen práctico de aplicabilidad, no tiene validez universal⁴. Entre otros factores destacaremos el hecho de que la inercia de los portadores hace que \vec{j} dependa también del valor de los campos en instantes previos.

La aptitud de conducción de un medio suele medirse también por la resistividad

$$r = \frac{1}{\sigma} , \quad [r] = \Omega \cdot m \quad (8.4)$$

que en la práctica toma valores muy distintos, desde estrictamente cero, en los superconductores, y valores finitos pero muy bajos, del orden de $10^{-8} \Omega \cdot m$, para los buenos conductores, pasando por el orden unidad para los semiconductores intrínsecos y llegando hasta el orden 10^{18} para los buenos dieléctricos.

Mientras no avisemos lo contrario, los medios que trataremos serán óhmicos.

8.2. Relajación en medios óhmicos

Veremos que un medio óhmico homogéneo tiende a neutralizar la carga en su interior en un tiempo del orden de

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (8.5)$$

²Véase la sección 8.5.

³Como en casos anteriores, ésta no es la forma más general de linealidad, como puede verse en [García Olmedo]. En un medio lineal, para una frecuencia determinada, σ , como ε y μ , pueden ser complejos. En este caso, no toda la energía cedida por el campo a las cargas se convierte en calor, como se implica en la ley de Ohm.

⁴No es estrictamente una ley sino, más bien, la definición de una relación que cumple aproximadamente un cierto tipo de medios si las variables pertinentes se limitan de forma adecuada.

constante característica del medio que se llama *tiempo de relajación* y que, para buenos conductores, puede alcanzar valores del orden de 10^{-15} s. Paralelamente, si por un medio óhmico circula en un instante dado una corriente no estacionaria, ésta tenderá a hacerse estacionaria con la misma constante de tiempo.

Para ser precisos, veremos que un medio en estado no estacionario tiene un comportamiento que no es estrictamente óhmico.

Supongamos que σ y ε son constantes reales, luego

$$j = \sigma E \quad , \quad D = \varepsilon E$$

Según la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \nabla \cdot E = \frac{1}{\tau} \nabla \cdot D$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación diferencial y su integral

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho}{\tau} \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-t/\tau} \quad (8.6)$$

Por lo tanto, si el medio tiene en un instante dado una densidad neta de carga $\rho_0 \neq 0$, cuando desaparezcan las causas que lo han sacado de la neutralidad local, tenderá a restablecerla con una constante de tiempo τ . Simultáneamente, el conductor tiende a hacerse estacionario. Efectivamente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{\tau} e^{-t/\tau} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \nabla \cdot j = 0$$

Por esta razón, los desequilibrios de carga en un conductor, bajo esta aproximación, sólo pueden aparecer en su superficie, donde, al darse una no homogeneidad del medio, $\tau = \tau(\vec{r})$ y $\nabla \cdot D = \nabla \cdot (\tau j) \neq \tau \nabla \cdot j$. Si, por otra parte, la frecuencia del campo es elevada, las constantes se hacen complejas y se da lugar a corrientes no estacionarias.

8.3. Conductores estáticos

En conexión con lo anteriormente expuesto, trataremos el caso importante de los cuerpos conductores en condiciones estáticas.

En la práctica, es posible aislar a un conductor de forma que, en él y en su entorno, se cumplan muy aproximadamente las condiciones de estaticidad

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \quad , \quad j = 0$$

bajo las cuales los campos son constantes y las cargas están quietas.

Supondremos que el conductor como tal, véase la figura 8.1, dispone de un número elevado de portadores, es decir, tiene una densidad de portadores ρ_p prácticamente infinita.

Si estos portadores están quietos, no están sometidos a la acción del campo eléctrico. De hecho, sólo en la superficie, donde las fuerzas eléctricas pueden ser contrarrestadas

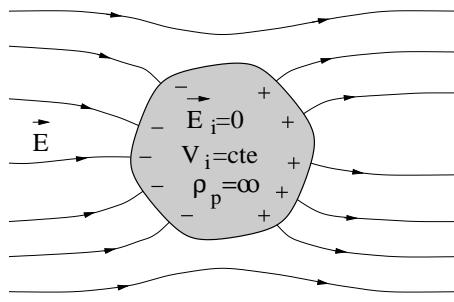


Figura 8.1:

por las cristalinas, es posible la existencia de campo eléctrico. Luego, el campo interno de un conductor estático es nulo

$$\vec{E}_i = 0 \quad (8.7)$$

además, puesto que

$$dV_i = -\vec{E}_i \cdot d\vec{r} = 0$$

todo el conductor está al mismo potencial

$$V_i = cte \quad (8.8)$$

Puede hablarse, pues, del *potencial* de un *conductor estático*.

Los conductores de tipo metálico son poco polarizables porque las cargas de polarización están fuertemente ligadas a las moléculas. Por esta razón, puede tomarse de forma muy aproximada $\epsilon = \epsilon_0$.

Por lo que respecta al campo en la superficie del conductor, \vec{E}_c , podemos demostrar que es proporcional a la densidad superficial de carga y perpendicular a la superficie

$$\vec{E}_c = \frac{\rho_s}{\epsilon} \vec{n}$$

La perpendicularidad a la superficie de deduce del hecho de que ésta es equipotencial.

El cálculo del campo puede llevarse a cabo mediante el uso del teorema de Gauss. Para poder aplicarlo es necesario modelar la transición del conductor, de constante ϵ_0 , al dieléctrico, de constante ϵ , como continua. Supongamos, figura 8.2, que esta transición tiene lugar rápidamente, en un intervalo Δx , donde x es la distancia en la dirección perpendicular a la interfaz de separación de los dos medios.

Supongamos ahora, figura 8.3-a, que la rugosidad de la superficie S del conductor es limitada y que podemos aproximar una pequeña zona de S , S_1 , al plano tangente Π . Si un observador se acerca a una distancia $h/2$ tal que

$$\Delta x \ll h/2 \ll L$$

donde $L \sim \sqrt{S_1}$ es la 'dimensión transversal' de S_1 , verá a la superficie del conductor como un plano infinito en el que, por lo tanto, ρ_s y \vec{E}_c serán prácticamente constantes. En $+h/2$ verá un dieléctrico homogéneo y en $-h/2$ un conductor homogéneo.

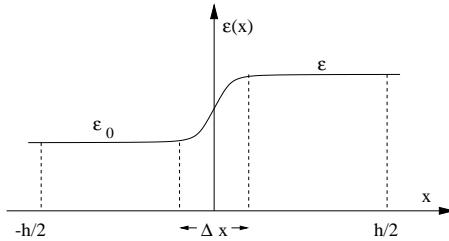


Figura 8.2:

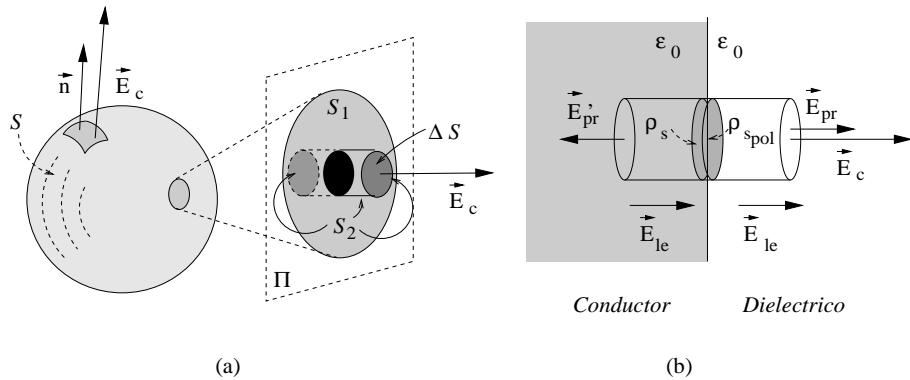


Figura 8.3:

Tomaremos ahora lo que en la profesión se conoce como una *caja de pastillas*. Se trata de una pequeña superficie cilíndrica, S_2 , cuyas generatrices, de longitud h , son perpendiculares al plano Π y cuyas bases, de superficie $\Delta S \ll S_1$ y a distancia $h/2$ de dicho plano, son paralelas a mismo.

Según el teorema de Gauss

$$\Phi_{S_2}(\vec{D}) = \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q = \int_{\Delta S} \rho_s ds$$

Puesto que el campo en el interior del conductor es nulo y $\vec{E}_c = E_c \vec{n}$ sólo contribuye al flujo la base que está en el dieléctrico.

$$\Delta \vec{S} = \Delta S \vec{n} , \quad \Phi_{S_2}(\vec{D}) = \varepsilon E_c \Delta S$$

La carga de conducción encerrada en la caja de pastillas es la que está en la superficie del conductor, ΔS , seccionada por la caja de pastillas.

$$Q = \rho_s \Delta S \Rightarrow$$

$$\vec{E}_c = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \vec{n} \quad (8.9)$$

Haciendo las cuentas en detalle podemos demostrar que la mitad de \vec{E}_c está generado por las cargas próximas, contenidas en ΔS , y la otra mitad por el resto de las cargas

del Universo. Descompongamos \vec{E}_c en dos componentes: una, \vec{E}_{pr} , debida a las cargas próximas de conducción y de polarización, y otra, \vec{E}_{le} , debida a las cargas lejanas.

$$\vec{E}_c = \vec{E}_{pr} + \vec{E}_{le}$$

En la figura 8.3-b se representa a la misma caja de pastillas pero se ha substituido el dieléctrico por sus cargas superficiales de polarización. De esta forma, en la zona del dieléctrico se toma $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ y el problema se hace simétrico a ambos lados de la superficie. Efectivamente, procediendo de forma análoga a la utilizada anteriormente

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho_{pol}) \Rightarrow \vec{E}_c = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_s + \rho_{s_{pol}}) \vec{n}$$

donde se pone de manifiesto las contribuciones de las cargas de conducción y de polarización.

Dada la simetría del problema, el campo próximo en el interior del conductor \vec{E}'_{pr} debe ser igual y contrario al mismo campo fuera del conductor \vec{E}_{pr} .

$$\vec{E}'_{pr} = -\vec{E}_{pr}$$

mientras que el campo lejano carece de fuentes en la zona de interés y es continuo.

Por otra parte, el campo \vec{E}_i en el interior del conductor es nulo

$$\vec{E}_i = -\vec{E}_{pr} + \vec{E}_{le} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{pr} = \vec{E}_{le} \Rightarrow \vec{E}_{pr} = \frac{1}{2} \vec{E}_c$$

En todos estos cálculos, como en toda física macroscópica, se ha emitido una serie de hipótesis que pueden ser válidas en una determinada situación física. En los microscopios de emisión de campo se utilizan puntas con radios de curvatura de unos pocos $\overset{\circ}{A}$, lo que evidentemente hace inadecuada la aplicación de lo anterior a este tipo de estructuras.

Como consecuencia de la existencia de campo en la superficie del conductor, sobre ésta se ejerce una fuerza, por unidad de superficie,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{ds} &= \rho_s \frac{\vec{E}_c}{2} = \frac{1}{2\varepsilon} \rho_s^2 \vec{n} = \frac{1}{2} \varepsilon E_c^2 \vec{n} \\ \frac{d\vec{F}}{ds} &= \omega_e \vec{n} \end{aligned} \quad (8.10)$$

donde, como se verá más adelante, $\omega_e = \frac{1}{2} \varepsilon E_c^2$ es lo que se conoce como densidad de energía del campo eléctrico en la superficie del conductor. El factor 1/2 aparece debido a que la contribución del campo \vec{E}_{pr} es nula, en virtud del principio de acción y reacción, por lo que, para el cálculo de esta fuerza sólo es necesario tener en cuenta al campo creado por las cargas externas, o lejanas.

Como vemos, esta fuerza tiene dirección normal y sentido hacia afuera del conductor: las cargas, cualquiera que sea su signo, tienden a escapar del conductor.

La fuerza calculada es, por lo tanto, la suma de la ejercida sobre la carga de conducción, depositada en su superficie, más la de polarización, que corresponde a la superficie del dieléctrico. En un dieléctrico normal, estas cargas son de signo contrario por lo que, en ausencia de otras fuerzas, el conductor y el dieléctrico tienden a permanecer unidos y, en su conjunto, sufren una tensión que trata de expandirlos.

8.4. Tubos de corriente estacionaria. Fuerza electromotriz

Según hemos visto, un medio óhmico tiende a la estacionariedad en un tiempo del orden de τ , normalmente muy pequeño. En la práctica, los sistemas de corriente estacionaria (continua), o cuasiestacionaria, son de gran interés.

Dado que⁵

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

los tubos deben ser cerrados. A continuación daremos una justificación sobre la necesidad de que las líneas de corriente se cierren a una distancia finita.

Según la sección 3.1, la fuerza electromotriz en un camino cerrado L viene dada por, figura 8.4

$$\mathcal{E}_L = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

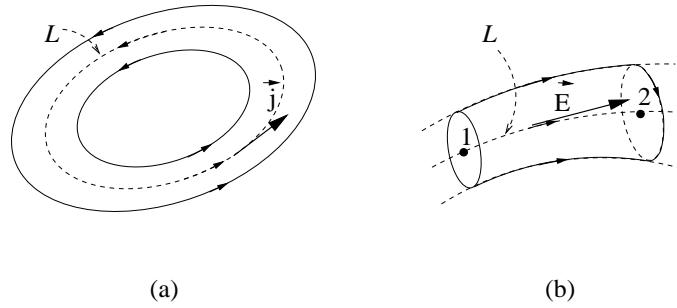


Figura 8.4:

Si tomamos a L como una línea de corriente, recorrida en el sentido de \vec{j} , y suponemos que el medio es óhmico, la fuerza electromotriz de dicha línea será

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{\sigma} \oint_L \vec{j} \cdot d\vec{l} > 0, \text{ ya que } \vec{j} \uparrow \uparrow d\vec{l}$$

En este caso, \mathcal{E}_L es el trabajo realizado por el campo, sobre la unidad de carga, en el recorrido de la línea y, si la longitud del camino fuese infinita, también lo sería el trabajo, salvo en el caso de los superconductores cuya conductividad es infinita.

Dado que $\mathcal{E}_L \neq 0$, para generar corrientes estacionarias es necesario recurrir a campos no conservativos. En consecuencia, descompondremos a los campos en dos contribuciones: la de los campos conservativos, \vec{E}_c , y la de los no conservativos, \vec{E}_R , o campos electromotores,

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_R, \quad \vec{E}_c = -\nabla V, \quad \nabla \wedge \vec{E}_R \neq 0$$

Los campos no conservativos pueden tener origen diverso; sólo los predichos por la ley de inducción de Faraday son de origen electromagnético clásico.

Dado que

$$\oint_L \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$$

⁵Véase párrafo 1.4.

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}_R \cdot d\vec{l} \quad (8.11)$$

A partir de esta expresión generalizaremos el concepto de fuerza electromotriz para aplicarlo a segmentos de línea no cerrados.

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}_{(1 \rightarrow 2)}} = \int_{1_{\mathcal{L}}}^{2_{\mathcal{L}}} \vec{E}_R \cdot d\vec{l} \quad (8.12)$$

Utilizamos el subíndice $\mathcal{L}_{(1 \rightarrow 2)}$ porque la fuerza electromotriz es una integral de línea y, por lo tanto, sólo está definida únicamente si especificamos el camino y los puntos inicial, 1, y final, 2, del mismo.

8.5. Resistencias y generadores de corriente continua

Supongamos que la sección del tubo de corriente estacionaria de la figura 8.5 está limitada por dos secciones, S_1 y S_2 , y que la estructura del mismo es tal que se cumple con suficiente aproximación

$$\int_{1_{\mathcal{L}}}^{2_{\mathcal{L}}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \simeq \int_{1'_{\mathcal{L}'}}^{2'_{\mathcal{L}'}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

donde \mathcal{L} y \mathcal{L}' son cualquier par de líneas de corriente del tubo y 1, 1', 2, 2', puntos en S_1 y S_2 , respectivamente.

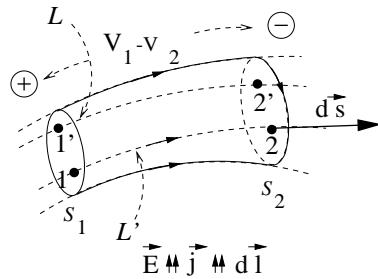


Figura 8.5:

Bajo estas condiciones, diremos que S_1 y S_2 son los *terminales del tubo*, el cual podrá ser tratado con un formalismo de circuito de dos terminales. En la práctica estos terminales suelen estar constituidos por buenos conductores ($\sigma \rightarrow \infty$).

Para estos circuitos se define el parámetro *resistencia* del tubo

$$R \equiv \frac{\int_{1_{\mathcal{L}'}}^{2'_{\mathcal{L}'}} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{s}} = \frac{1}{I} \int_{1_{\mathcal{L}'}}^{2'_{\mathcal{L}'}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (8.13)$$

donde se entiende que la integral se lleva a cabo a lo largo de una línea de campo, desde el terminal 1 al 2. La unidad de resistencia es el *ohmio* Ω . La admitancia es la inversa de la resistencia y su unidad es el *siemens* (S)⁶.

⁶También suele usarse el nombre *mho*, una sigla para Ω^{-1} .

Para medios lineales, esta relación es una constante positiva, la resistencia del tubo, mientras que para medios no lineales $R = R(E)$. Este es el caso de las VDR o resistencias dependientes de la tensión.

A parte de las variables eléctricas, en el valor de la resistencia interviene la temperatura, muy marcadamente en los termistores, el campo magnético, en las magnetorresistencias, etc.

Resistencia ideal:

Cuando en el tubo sólo existen campos conservativos, decimos que éste es *pasivo* y constituye una *resistencia ideal*. En este caso

$$IR = \int_1^2 -\nabla V \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2$$

Es decir, la caída de potencial en una resistencia es igual al producto IR . Representaremos esta relación, versión extensiva de la ley de Ohm, con los convenios de signos y símbolos de la figura 8.6.

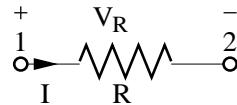


Figura 8.6:

$$V_R = IR \quad (8.14)$$

donde $V = V_1 - V_2$.

Fuente ideal de fuerza electromotriz:

Cuando un tubo, en el que existen campos no conservativos, tiene resistencia nula, decimos que es una *fuente ideal de fuerza electromotriz* o *pila ideal*.

$$\int_1^2 (-\nabla V + \vec{E}_R) \cdot d\vec{l} = 0 \quad , \quad V_2 - V_1 = \mathcal{E}_{1-2}$$

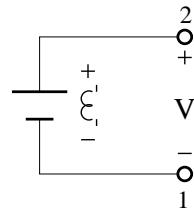


Figura 8.7:

$$\mathcal{E} = V \quad (8.15)$$

que representamos con los convenios de la figura 8.7 donde $V = V_2 - V_1$.

La pila ideal es, pues, un elemento de dos terminales que mantiene, entre los mismos, una diferencia de potencial igual a su fuerza electromotriz, cualquiera que sea la intensidad que circule por él.

Fuente de fuerza electromotriz real:

Manteniéndonos dentro del modelo lineal, en general, un tubo activo, pila real o *fuente de fuerza electromotriz real*⁷ tendrá resistencia y fuerza electromotriz.

$$IR = \int_1^2 (-\nabla V + \vec{E}_R) \cdot d\vec{l} = (V_1 - V_2) + \mathcal{E}_{12}$$

Tenemos, pues, figura 8.8,

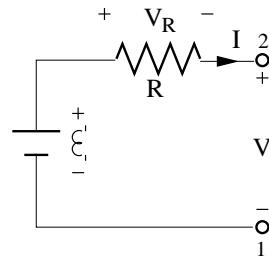


Figura 8.8:

$$V = \mathcal{E} - IR \quad (8.16)$$

donde $V = V_2 - V_1$.

Esta expresión suele conocerse como la ley de Ohm generalizada.

Si entre los terminales 1 y 2 colocamos una resistencia externa R_e , o de carga, figura 8.9,

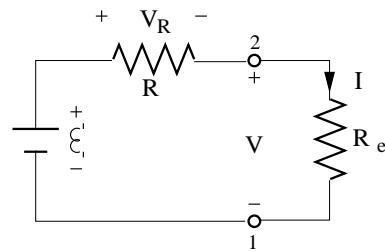


Figura 8.9:

$$V = IR_e, \quad \mathcal{E} = I(R + R_e) \quad (8.17)$$

⁷El apelativo de *real* no es del todo adecuado porque, en principio, nos estamos limitando a medios óhmicos.

8.6. Asociación de elementos. Leyes de Kirchhoff

Los elementos pueden, en principio, asociarse de muy diversas formas, las más simples son las asociaciones serie y paralelo.

Asociación serie :

En la asociación serie la intensidad que pasa por los dos elementos es la misma.

Para resistencias, figura 8.10,

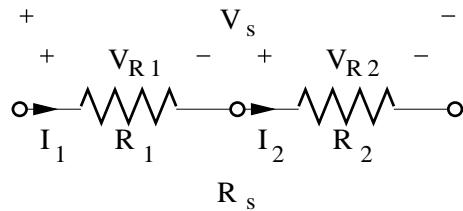


Figura 8.10:

$$\begin{cases} I = I_1 = I_2 \\ V_s = V_{R_1} + V_{R_2} \end{cases} \Rightarrow R_s = R_1 + R_2 \quad (8.18)$$

Luego, las resistencias en serie se suman.

Las fuerzas electromotrices de las pilas ideales se suman si la intensidad de referencia entra por el terminal negativo y se restan en caso contrario

$$\mathcal{E}_s = \pm \mathcal{E}_1 \pm \mathcal{E}_2 \quad (8.19)$$

Asociación paralelo :

En la asociación paralelo, se unen los terminales de los elementos dos a dos con lo que la caída de potencial es común a ambos. Es evidente que esta asociación no puede realizarse entre pilas ideales. Para resistencias, figura 8.11,

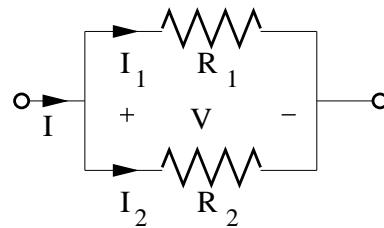


Figura 8.11:

$$\begin{cases} V = V_{R_1} = V_{R_2} \\ I = I_1 + I_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow$$

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (8.20)$$

Circuitos : No todas las asociaciones pueden reducirse a la configuración serie y paralelo. Llamaremos *circuito* a una asociación de elementos activos y pasivos. *nudo* es el punto ⁸ de conexión de dos o más elementos. *rama* es el conjunto de elementos que puede ser descrito mediante una relación, entre dos terminales, análoga a la ley de Ohm generalizada. *malla* es un conjunto de ramas interconectadas de forma que pueden ser recorridas a lo largo de un camino cerrado sin pasar dos veces por la misma rama.

En adelante sólo consideraremos *circuitos planos*, los cuales pueden ser representados en un plano sin que se crucen las ramas entre sí.

Leyes de Kirchhoff :

El análisis de circuitos de corriente continua puede llevarse a cabo mediante la aplicación de las *leyes de Kirchhoff*. En la figura 8.12 se representa a un nudo en el que convergen varias ramas.

Primera ley:

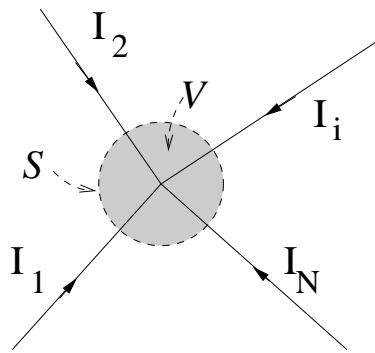


Figura 8.12:

Puesto que las corrientes son estacionarias, $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, e integrando sobre un volumen V que contenga al nudo, tenemos

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad (8.21)$$

Esta es la *primera ley de Kirchhoff*, ley de nudos, y nos dice que la suma de las intensidades, que inciden sobre el nudo, es igual a cero ⁹.

⁸Se entiende por punto de un circuito a un conjunto de conductores ideales, cables, etc., que están al mismo potencial.

⁹Substituyendo las intensidades incidentes por las emergentes, obtendríamos un enunciado equivalente. De otra forma, podríamos decir que la suma de las intensidades que entran en el nudo es igual a la de las que salen o, en definitiva, que los nudos no almacenan carga.

Segunda ley:

Ahora consideraremos una malla, como la de la figura 8.13,

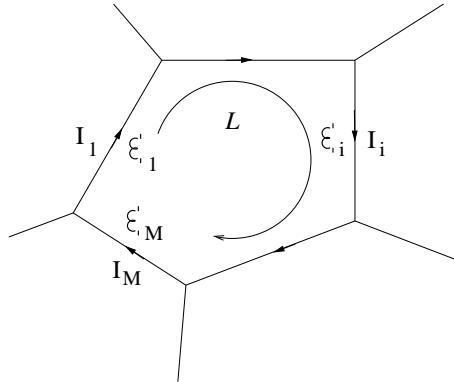


Figura 8.13:

Escribiremos $\vec{E}_c = \vec{E} - \vec{E}_R$, donde $\vec{E}_c = -\nabla V$ es el campo conservativo y $\vec{E}_R = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E}_{Rn}$ el no conservativo, que puede desglosarse en la parte que deriva del potencial vector y el \vec{E}_{Rn} cuyo origen no es electromagnético clásico.

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}_c \cdot d\vec{l} &= \oint_{\mathcal{L}} (\vec{E} - \vec{E}_R) \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \\ \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}_R \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \sum_{i=1}^M I_i R_i \\ = \sum_{i=1}^M \mathcal{E}_i \end{cases} \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^M \mathcal{E}_i &= \sum_{i=1}^M I_i R_i \end{aligned} \quad (8.22)$$

Esta es la *segunda ley de Kirchhoff*, ley de mallas, la cual iguala a la suma de las fuerzas electromotrices de las ramas que componen la malla con la suma de las caídas de potencial que tienen lugar en las resistencias de dichas ramas.

Para la aplicación sistemática de esta ley, se elije el mismo sentido de circulación de referencia para todas las mallas. La intensidad que circula por cada rama es la suma de las que circulan por las mallas comunes a dicha rama. Si se contabiliza la caída de potencial a lo largo de la rama, la intensidad de la malla cuya ecuación se está escribiendo se toma con referencia positiva y la de la contigua como negativa. Las fuerzas electromotrices se tomarán con referencia positiva si la intensidad de malla entra por la referencia (-) de la fuente y negativa en caso contrario.

8.7. Disipación de energía. Ley de Joule

En un tubo de corriente estacionaria, la energía que el campo electromagnético cede a las cargas, por unidad de volumen y de tiempo, viene dada¹⁰ por

$$\frac{d^2W_c}{dv\ dt} = \frac{dP_c}{dv} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

La *ley de Joule* postula que, en el caso de una corriente estacionaria que circula por un medio óhmico, el trabajo que realiza el campo sobre las cargas se transforma íntegramente en calor que se cede al medio. La potencia P_j convertida en calor en un volumen \mathcal{V} por el *efecto Joule* es

$$P_j = \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} dv = \sigma \int_{\mathcal{V}} E^2 dv \geq 0 \quad (8.23)$$

Según la expresión anterior, la potencia cedida por el campo a las cargas contenidas en un volumen cualquiera de este tipo de medios es netamente positiva. Luego no existe la posibilidad de que las cargas cedan energía al campo y el proceso es unidireccional y, por lo tanto, irreversible. Al ser la corriente estacionaria, esta energía no se invierte en aumentar la energía cinética macroscópica, la asociada a la velocidad de arrastre, por lo que debe invertirse en aumentar la energía interna del medio, principalmente en energía térmica, la asociada al movimiento aleatorio de las cargas. Incluso para corrientes cuasiestacionarias, la velocidad de arrastre es muy inferior a la aleatoria, véase el problema 1-7, y, en consecuencia, lo anterior sigue siendo aproximadamente cierto.

Consideraremos dos casos particulares: una resistencia ideal y un tubo cerrado de corriente con fuerza electromotriz.

Resistencia ideal:

Una resistencia ideal es, como hemos visto, un segmento de tubo, como el representado en la figura 8.14a, en el cual $\vec{E}_R = \vec{0}$ y $\vec{E} = \vec{E}_c = -\nabla V$. Suponemos que las superficies inicial y final son terminales, es decir, equipotenciales.

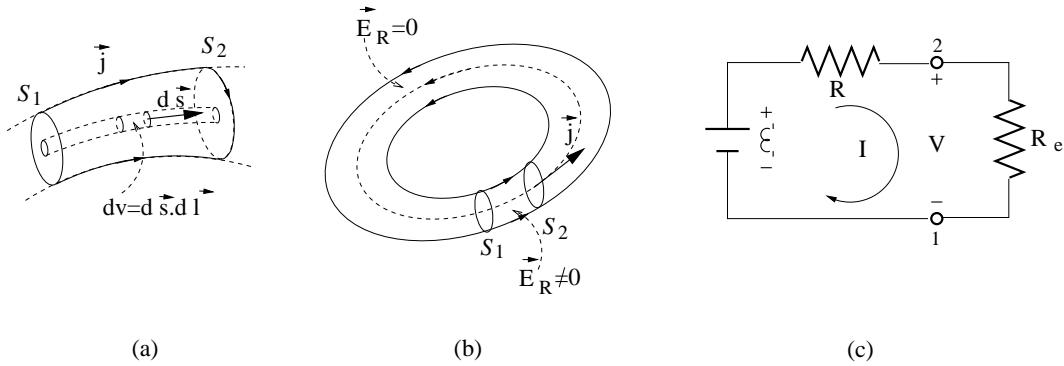


Figura 8.14:

¹⁰Véase la sección 4.1

Haciendo uso de 8.23 pero integrando sobre el volumen $\Delta\mathcal{V}$ comprendido entre las secciones \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2

$$P_j = \int_{\Delta\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} \, dv$$

Dividiendo el tubo en elementos de sección $d\vec{s}$, tomando $d\vec{s} \uparrow\uparrow d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{j}$ y recordando la definición 8.13 de resistencia

$$\begin{aligned} P_j &= \int_{\Delta\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} \, dv = \int_{\Delta\mathcal{V}} (\vec{j} \cdot d\vec{s})(\vec{E} \cdot d\vec{l}) = \int_1^2 \underbrace{\left(\int_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{s} \right)}_{=I} \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \\ P_j &= \begin{cases} I \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = I^2 R \\ -I \int_1^2 \nabla V \cdot d\vec{l} = V I \end{cases} \end{aligned} \quad (8.24)$$

donde $V = V_2 - V_1$.

Tubo de corriente cerrado:

En el caso de un tubo de corriente estacionaria cerrado, como el que se muestra en la figura 8.14b, el computo 8.23 de la potencia Joule puede hacerse en función de la componente rotacional del campo \vec{E}_R .

Efectivamente, en este caso, de acuerdo con 8.23 y teniendo en cuenta que $\vec{E} = \vec{E}_R + \vec{E}_c$

$$P_j = \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot (\vec{E}_c + \vec{E}_R) \, dv$$

pero, $\vec{E}_c = -\nabla V$ y

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \nabla V \, dv = \int_{\mathcal{V}} V \underbrace{\nabla \cdot \vec{j}}_{=0} \, dv - \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (V \vec{j}) \, dv}_{=0} = 0$$

La primera integral se anula porque la corriente es estacionaria y la segunda porque, haciendo uso del teorema de la divergencia,

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (V \vec{j}) \, dv = \int_{\mathcal{S}} V \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$$

puesto que en \mathcal{S} , $\vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$.

En este caso podemos escribir

$$P_j = \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E}_R \, dv \quad (8.25)$$

entendiendo cabalmente que para el consumo local de energía es necesario tener en cuenta el campo total \vec{E} .

Procediendo de forma análoga a la utilizada para la resistencia, el resultado anterior puede expresarse de la forma

$$P_j = I \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}_R \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} I \quad (8.26)$$

siendo \mathcal{E} la fuerza electromotriz calculada en el sentido de la corriente.

Haciendo lo mismo con la expresión de partida 8.23

$$P_j = I \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = I^2 R_T \quad (8.27)$$

donde R_T es la resistencia total del tubo.

En la figura 8.14c se supone que el campo no conservativo se circumscribe al segmento limitado por las secciones equipotenciales S_1 y S_2 , lo que nos permite escribir 8.27 de la forma

$$I^2 R_T = I \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + I \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = I^2 (R + R_e) \quad (8.28)$$

donde R es la resistencia interna de la pila y R_e la extena a la misma.

En resumen

$$P_j = I \mathcal{E} = I^2 R + V I = I^2 (R + R_e) \quad (8.29)$$

El término $I \mathcal{E}$ representa la energía cedida por la pila, $I^2 R$ es la energía transformada en calor dentro de la propia pila, e $I^2 R_e$ el calor cedido a la resistencia externa.

La ley de Joule no tiene validez general puesto que, en el caso de corrientes no estacionarias, pueden aparecer otros términos en el balance energético.

8.8. Problemas

- 8-1. Calcule el tiempo de relajación de los materiales que se relacionan a continuación junto con sus resistividades en $\Omega \times m$, (entre paréntesis):

$Al (2,8 \times 10^{-8})$, $Cu (1,7 \times 10^{-8})$, $Au (2,4 \times 10^{-8})$, $Ag (1,47 \times 10^{-8})$, $Ge (0,45)$, $Si (640)$

Suponga $\varepsilon = \varepsilon_0$

- 8-2. En la sección 8.3 se muestra que para calcular la tensión sobre la superficie de un conductor sólo es necesario tener en cuenta a la mitad del campo existente en la superficie exterior del mismo. Compruebe que puede llegarse a la misma conclusión si, por ejemplo, modelamos la densidad superficial de carga ρ_s como una densidad de volumen uniforme ρ_0 definida en un espesor a pequeño.
- 8-3. Considere dos láminas planas y paralelas, recorridas respectivamente por las corrientes superficiales $\vec{j}_{s1} = j_s \hat{x}$ y $\vec{j}_{s2} = -j_s \hat{x}$. Razone de forma análoga a la utilizada en la sección 8.3 para hallar la fuerza por unidad de superficie ejercida sobre las placas. Aplique este resultado a un solenoide largo.

Solución:

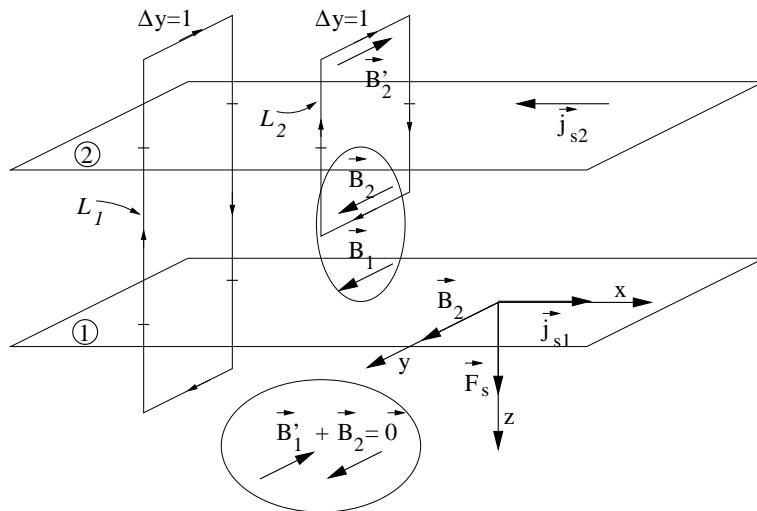


Figura 8.15:

Para calcular la fuerza \vec{F}_s por unidad de superficie que la lámina 2 ejerce sobre la 1, figura 8.15, deberemos calcular previamente el campo \vec{B}_2 producido por la 2.

$$\vec{F}_s = \vec{j}_{s1} \wedge \vec{B}_2$$

De acuerdo con la figura 8.15, el camino \mathcal{L}_2 corta a la corriente \vec{j}_{s2} y, por simetría

$$\vec{B}_2' = -\vec{B}_2$$

Aplicando la ley de Ampère a \mathcal{L}_1 ¹¹

$$\oint_{\mathcal{L}_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{\mathcal{S}_1} \vec{j}_{s1} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{1}{2} \mu_0 j_s \hat{y}$$

Por otra parte, integrando sobre el camino \mathcal{L}_1 y teniendo en cuenta las simetrías del problema, se llega a la conclusión de que el campo externo total es nulo. Ello implica que en dicha zona las contribuciones de cada una de las placas son iguales y contrarias.

$$\vec{B}_1' = -\vec{B}_2 \Rightarrow \vec{B}_{ex} = \vec{0}$$

Entre las placas, las contribuciones se suman, con lo que el campo total resultante es

$$\vec{B} = 2\vec{B}_2 = \mu_0 j_s \hat{y}$$

Luego, de forma análoga a lo encontrado para el campo eléctrico en la superficie de un conductor, cada una de las placas separa a una región con campo magnético de otra sin él.

Por fin, la fuerza por unidad de superficie ejercida sobre 1 es

$$\vec{F}_s = \frac{1}{2} j_s B \hat{z} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \hat{z} = \omega_m \hat{z}$$

8-4. Sea un condensador plano cuyas placas están separadas una distancia a y tienen una superficie S . Despreciando el efecto de bordes, calcule el trabajo realizado al separar las placas de la distancia inicial a la $2a$ en los siguientes casos

- a) Manteniendo fijo el potencial $V = V_0$.
- b) Manteniendo fija la carga $Q = Q_0$.

Establezca, en ambos casos, una relación entre este trabajo, el realizado por la batería al elevar el incremento de carga ΔQ desde tierra, $V = 0$, hasta V y el incremento ΔW de la energía almacenada entre las placas.

Solución:

¹¹La integral de flujo, en el caso de una corriente superficial, puede obtenerse modelando a \vec{j}_s como una densidad de volumen definida en una capa estrecha de espesor δz , es decir $\vec{j} = \frac{\vec{j}_s}{\delta z}$, por lo que su flujo a través de la sección $\mathcal{S} = \Delta y \delta z$ es $j_s \Delta y$.

Como puede verse en la figura 8.16, si una vez cargado el condensador con un carga Q_0 el interruptor se abre, la carga queda atrapada y permanece constante. Si, por el contrario, se cierra el interruptor, el potencial permanecerá constante.

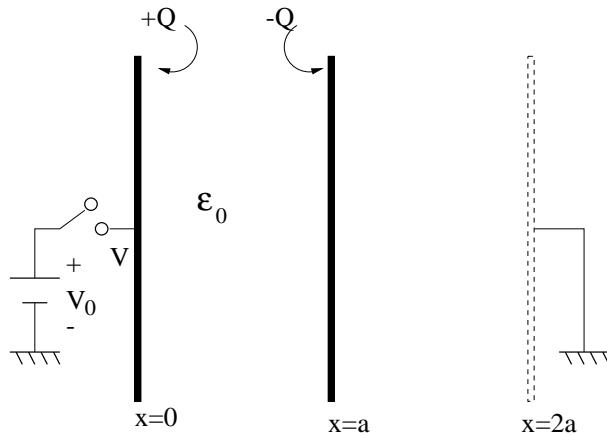


Figura 8.16:

Como ya se ha visto en capítulos anteriores

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}, \quad C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$$

Sólo la mitad de este campo se debe a la placa izquierda. Luego la fuerza ejercida sobre la placa derecha es

$$F_x = -\frac{1}{2} Q E = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 S \frac{V^2}{x^2}$$

El trabajo realizado en cada caso es

$$W_F = \int_{x=a}^{2a} F_x dx = \begin{cases} -\frac{Q_0^2 a}{2\varepsilon_0 S} & \text{para } Q = Q_0 \\ -\frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{4a} & \text{para } V = V_0 \end{cases}$$

El incremento de energía almacenada en el condensador es

$$\Delta W_a = W_a(x = 2a) - W_a(x = a) = \begin{cases} \frac{a Q_0^2}{2\varepsilon_0 S} & \text{para } Q = Q_0 \\ -\frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{4a} & \text{para } V = V_0 \end{cases}$$

Por último, el trabajo realizado por la batería es

$$W_b = \Delta Q V = \begin{cases} 0 & \text{para } Q = Q_0 \\ -\frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{2a} & \text{para } V = V_0 \end{cases}$$

Para realizar el balance de energía, debemos expresar el equilibrio entre las almacenadas en condensador al principio y al final del proceso y las que se toman del exterior o se ceden al mismo. Un valor positivo de W_b significa que la batería ha cedido energía. Un valor positivo de W_F significa que el campo ha cedido parte de su energía potencial a la placa móvil; se ha invertido en proporcionarle a ésta energía cinética o calor al entorno a través de procesos disipativos. La energía suministrada por la batería puede emplearse en aumentar el contenido energético del condensador y, a través del campo, cederla a la placa móvil. La ecuación de conservación podemos escribirla, por lo tanto, de la forma

$$W_b = \Delta W_a + W_F$$

En cada caso tendremos:

- **Para $Q = Q_0$**

$$\Delta W_a + W_F = 0$$

- **Para $V = V_0$**

$$W_b = \Delta W_a + W_F$$

8-5. Para el condensador del problema 7-8, calcule:

- La fuerza que una placa ejerce sobre la otra cuando entre ellas se establece una diferencia de potencial V , para cualquier valor de $c < b$
- Lo mismo que en el apartado anterior pero cuando el dieléctrico está en contacto con la placa ($c = b$).
- Halle el trabajo realizado al separar las placas desde la distancia a hasta la distancia $2a$ cuando el dieléctrico es sólido de espesor $c = a$ y en los casos en que, bien el potencial o la carga depositada en las placas se mantiene constante durante la operación.
- Lo mismo que en el apartado anterior pero cuando el dieléctrico es líquido y llena todo el espacio.

- 8-6. El espacio entre dos esferas metálicas concéntricas, entre la cuales se aplica una diferencia de potencial $V_0 = 10 \text{ KV}$, está lleno de aire, cuya rigidez dieléctrica E_R es de unos $3 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ y cuya constante dieléctrica es ϵ_0 . Supuesto que el radio de la esfera mayor, fijo, es $b = 10 \text{ cm}$ y que el de la menor puede variarse y es igual a x .

Halle

- Los valores de x para los cuales $E(x) = E_R$.
- Tomando para x el valor correspondiente a la solución menor del apartado anterior, halle la presión sobre las placas del condensador.
- El valor de x para el cual $E(x)$ es mínimo.

LA RIGIDEZ DIELÉCTRICA ES EL CAMPO ELÉCTRICO MÁXIMO QUE SOPORTA UN DIELÉCTRICO ANTES DE DESTRUIRSE AL SER PERFORADO POR UNA DESCARGA ELÉCTRICA.

Solución:

trataremos las primera y la última cuestión.

- El campo eléctrico en la placa interior, $r = x$, del condensador es

$$E(x) = \frac{Q(x)}{4\pi \epsilon_0 x^2}$$

y la diferencia de potencial entre la placa interior y la exterior

$$V_0 = \frac{Q(x)}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b} \right)$$

Si despejamos $\frac{Q(x)}{4\pi \epsilon_0}$ de esta ecuación

$$\frac{Q(x)}{4\pi \epsilon_0} = \frac{V_0 x b}{b - x}$$

Eliminado este término de la expresión del campo y dando a éste el valor $E(x) = E_R$, obtenemos la ecuación cuadrática

$$x^2 - b x + c = 0 \quad , \quad c = \frac{b V_0}{E_R}$$

cuyas soluciones son

$$x_1 = 3.65 \text{ mm} \quad , \quad 9.65 \text{ cm}$$

- De acuerdo con lo anterior

$$E(x) = \frac{K}{bx - x^2}$$

donde $F = V_0 b$ y K una constante.

El mínimo de $E(x)$ será máximo de $f(x) = \frac{K}{E(x)} = bx - x^2$. Derivando e igualando a cero, tenemos que

$$x_{min} = \frac{b}{2}$$

¿Está seguro de que este es el valor correspondiente a un mínimo? ¿cuales serían los máximos?

8-7. Halle la resistencia de los conductores de la figura 8.17.

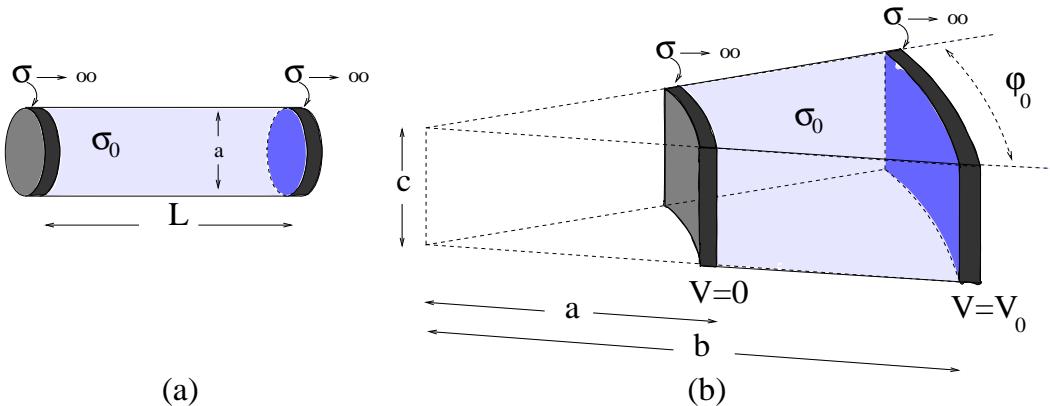


Figura 8.17:

Solución:

Calcularemos la resistencia del conductor de la figura 8.17b. Más adelante trataremos la solución de este problema de forma sistemática y teniendo en cuenta las condiciones de contorno apropiadas. Por ahora supongamos que $\varphi = 2\pi$ y $c \rightarrow \infty$, por lo que el problema que abordaremos en un principio es el de hallar la resistencia de una corona cilíndrica de altura infinita.

Dado que el conductor es ohmico, que el campo es estático y la corriente estacionaria

$$\nabla \cdot \vec{j} = \frac{1}{\sigma_0} \nabla \cdot \vec{E} \Rightarrow \nabla^2 V = 0$$

Para hallar el potencial tomaremos $V(a) = 0$, $V(b) = V_0$ y tendremos en cuenta que, dada la simetría del problema, la solución no depende de las coordenadas cilíndricas z y φ , por lo que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

puesto que en el dominio de la solución $\rho \neq 0$.

Dado que $E_\rho = -\frac{dV}{d\rho}$, integrando una vez la ecuación anterior

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{C}{\rho} , \quad E_\rho = -\frac{C}{\rho}$$

Integrando de nuevo

$$V = C \ln(\rho) + D$$

Aplicando las condiciones de contorno del potencial

$$V(a) = C \ln(a) + D = 0 , \quad V(b) = C \ln(b) + D = V_0$$

$$C = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \Rightarrow E_\rho = -\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{\rho}$$

y

$$V = V_0 \frac{\ln\left(\frac{\rho}{a}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} , \quad j_\rho = -\frac{\sigma_0 V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{\rho}$$

Es fácil de comprender que esta solución es también válida para la resistencia de la figura 8.17b, ya que en ésta, las superficies $\rho = a$ y $\rho = b$ son equipotenciales y, por lo tanto, el campo y la corriente deben ser perpendiculares a las mismas. En el resto de las superficies, la corriente debe ser tangencial a las mismas dado que el exterior es de conductividad nula.

Integrando sobre cualquier sección cilíndrica

$$I = c \int_{\varphi=0}^{\varphi_0} j_\rho \rho d\varphi = \frac{c \varphi_0 \sigma_0 V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

La resistencia es

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{c \varphi_0 \sigma_0}$$

- 8-8. En primer lugar se forma un condensador con dos conductores ideales, cilíndricos y concéntricos, de radio interior a , exterior b y longitud $c \gg b - a$, llenando el espacio entre placas con un dieléctrico de constante ϵ . Posteriormente este espacio se llena de un conductor de conductividad σ_0 formando de esta manera un conductor. Determine la relación existente entre la capacidad del condensador y la resistencia del tubo de corriente.

- 8-9. Sean dos placas conductoras ideales, planas y paralelas, de área A , separadas por un espacio de espesor $x = a$, la mitad del cual, con un espesor de $a/2$, está ocupado por una lámina de conductividad σ_1 y la otra mitad por otra de conductividad σ_2 . Halle:

- La resistencia.
- La carga de conducción depositada en las interfaces de los conductores, en función de la diferencia de potencial aplicada.

La constante dieléctrica de todos los medios es igual a la del vacío .

- 8-10. Halle el valor de una resistencia cuyos terminales, conductores ideales, son cilíndricos y concéntricos, de radios a y b y longitud c . El espacio entre los terminales está lleno de dos medios de conductividad σ_1 y σ_2 y que ocupan respectivamente a uno de los dos hemicilindros separados por un plano que pasa por el eje de la resistencia.
- 8-11. Demuestre que la resistencia entre dos lados opuestos de una lámina cuadrada conductora es independiente de la longitud de su lado.

Solución:

Sea a la longitud de los lados del cuadrado y e el espesor de la lámina.
Dada la simetría del problema, véase la figura 8.18

$$\vec{E} = \frac{V}{a} \hat{x} \Rightarrow j = \frac{\sigma V}{a}$$

e integrando sobre la sección $a \times e$

$$I = \sigma e V \Rightarrow R = \frac{1}{\sigma e}$$

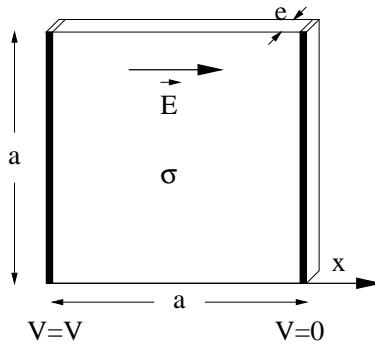


Figura 8.18:

- 8-12. Un electrodo semiesférico de radio $a = 10 \text{ cm}$, de muy alta conductividad, se introduce en la tierra cuya conductividad es $\sigma = 10^{-2} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Determine la resistencia del sistema si fluye una corriente I desde el electrodo a la Tierra. Discuta que

sucedería si una persona que tenga un calzado no aislante se aproxima al electrodo. Suponga que la que la corriente que entra al electrodo es 1000 A , que uno de los pies está a una distancia de 1 m del electrodo y que la distancia entre ambos pies es de $0,75\text{ m}$. ¿ A qué tensión se verá sometida dicha persona? Calcule el campo eléctrico sobre la superficie de la tierra.

- 8-13. Dos electrodos semiesféricos de radio a se introducen en la Tierra, de conductividad σ , y están separados una distancia d , siendo $d \gg a$. Calcule la resistencia entre ambos electrodos.
- 8-14. Dada la batería de la figura 8.19, con fuerza electromotriz V_0 y resistencia interna R_0 , halle cual es el valor de la resistencia externa R a la que suministraría un máximo de potencia ¿ Cuál es el valor de este máximo?.

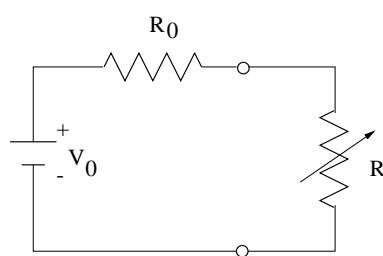


Figura 8.19:

- 8-15. El circuito de la figura 8.20 representa a un Puente de resistencias. Halle:

- La condición de equilibrio del puente (relación entre las resistencias para la cual $V = 0$).
- Relación entre V y las pequeñas desviaciones de R_1 de su valor de equilibrio. Esta configuración puede servir para estimar las desviaciones de su valor inicial de una resistencia al variar su temperatura, para comparar resistencias nominalmente iguales, etc.

Solución:

La figura 8.20 representa al puente de resistencias. El voltímetro que mide la diferencia de potencial V entre los nudos a y b se supone ideal por lo que por la rama correspondiente no circula intensidad.

- a) Cada una de las ramas $1 - 2$ y $3 - 4$ constituye un divisor de tensión, tal que, en particular

$$V_a = V_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

y

$$V = V_b - V_a = V_0 \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

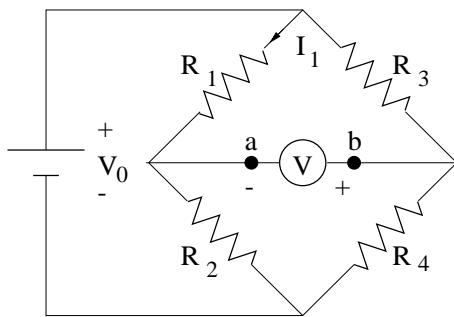


Figura 8.20:

La condición de equilibrio es, por lo tanto

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} = E$$

b) Si R_1 se desvia de su valor de equilibrio y toma el valor

$$R'_1 = R_1 + \delta R \quad , \quad \alpha = \frac{\delta R}{R_1} \ll 1$$

$$V = V_0 \left(\frac{E}{1+E} - \frac{E}{1+E+\alpha} \right)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro del paréntesis por $1+E-\alpha$ y despreciando el término α^2 , se tiene que

$$V = \frac{V_0}{(1+E)^2} \alpha$$

8-16. Doce resistencias $R = 1 \Omega$ están conectadas formando las aristas de un cubo y entre dos vértices opuestos se conecta una batería de tensión $V_0 = 1 V$.

- a) La intensidad total que circula por el circuito y la resistencia total del mismo.
- b) La energía transformada en calor durante una hora en todo el circuito y en cada una de las resistencias

Solución:

Resolveremos la cuestión (a) analizando las simetrías del circuito.

En la figura 8.21 se representa a las resistencias como segmentos rectos. Éstas se dividen en dos grupos: las correspondientes a los trazos continuos y las representadas por trazos discontinuos. Las primeras se reparten por igual la intensidad total I y las segundas se reparten por la mitad la intensidad que circula por las primeras. Según esto, por el tramo $a-b$ y $c-d$ circula una intensidad $\frac{I}{3}$ y por el $b-c$ la intensidad $\frac{I}{6}$.

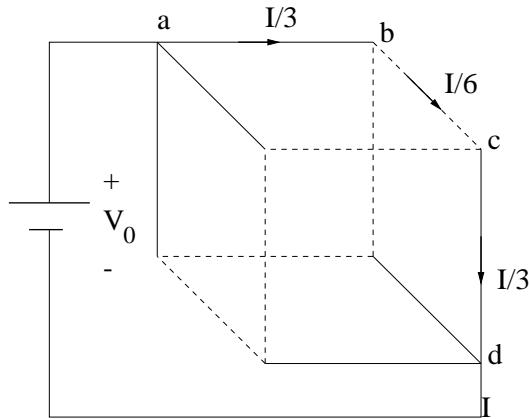


Figura 8.21:

Siguiendo el camino $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$, tenemos que

$$V_0 = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = \frac{5}{6} IR \Rightarrow I = \frac{6}{5} \frac{V_0}{R}$$

8-17. Dos baterías de fuerzas electromotrices \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 y resistencias internas R_1 y R_2 , se conectan en serie y posteriormente en paralelo. Halle el generador equivalente Thevenin correspondiente a cada una de éstas configuraciones.

EL EQUIVALENTE THEVENIN DE UN CIRCUITO, VISTO DESDE DOS NUDOS CUALESQUIERA DEL MISMO, ES UN GENERADOR, DE FUERZA ELECTROMOTRIZ \mathcal{E}_T Y RESISTENCIA INTERNA R_T , TAL QUE, SI COLOCAMOS ENTRE SUS BORNAS UNA RESISTENCIA ARBITRARIA, POR ELLA CIRCULARÁ LA MISMA INTENSIDAD QUE LA QUE CIRCULARÍA SI FUENSE CONECTADA ENTRE LOS CITADOS NUDOS DEL CIRCUITO.

Capítulo 9

Ecuaciones de Maxwell para medios materiales. Consecuencias

9.1. Ecuaciones de Maxwell

Como resumen del capítulo anterior, agrupando las fuentes escalares y vectoriales que se han ido obteniendo para la descripción macroscópica de los campos y teniendo en cuenta las definiciones de \vec{D} y \vec{H}

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (9.1a)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (9.1b)$$

podemos escribir las ecuaciones de Maxwell en su forma general

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (9.2a)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.2b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.2c)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.2d)$$

Como ya hemos visto, las ecuaciones 9.2d y 9.2a llevan implícito el cumplimiento de la ecuación de continuidad para la carga de conducción.

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (9.3)$$

Ecuaciones para medios de clase A :

Para completar la descripción del campo electromagnético era necesario conocer las ecuaciones constitutivas que definen la relación de los vectores \vec{D} , \vec{H} , ó \vec{P} , \vec{M} y \vec{j} , en función de los campos fundamentales \vec{E} y \vec{B} y, también, de otras variables como \vec{r} , t , etc.

En el caso más sencillo, el de los medios de clase A¹

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (9.4)$$

por lo que las ecuaciones 9.2 pueden expresarse en función de \vec{E} y \vec{H}

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (9.5a)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (9.5b)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (9.5c)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.5d)$$

donde debe tenerse en cuenta que la ecuación 9.5c sólo es válida en el interior de un medio homogéneo.

Esta versión es de una gran utilidad puesto que es aplicable con suficiente aproximación a una gran parte de los problemas de interés práctico.

Ecuaciones en el dominio de la frecuencia:

Las ecuaciones anteriores se simplifican considerablemente si nos limitamos a la búsqueda de soluciones armónicas² complejas del tipo

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}) e^{j\omega t} \quad (9.6)$$

donde ψ representa a cualquiera de las componentes de los campos, j es la unidad imaginaria y $\psi_0(\vec{r})$ es, en general, una función compleja (con parte real e imaginaria). En este caso

$$\frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = j\omega \psi(\vec{r}, t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega \quad (9.7)$$

las derivadas temporales se substituyen por factores algebraicos.

¹Para un tratamiento algo más amplio de otro tipo de materiales , véase [García Olmedo].

²El análisis de Fourier permite construir las soluciones en el dominio del tiempo mediante la superposición de soluciones armónicas.

Las ecuaciones de Maxwell en el *dominio de la frecuencia* son

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (9.8a)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (9.8b)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (9.8c)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E} \quad (9.8d)$$

Estas ecuaciones son válidas para medios de clase *A*, entendiendo por tales aquellos en los que ϵ , μ y σ son constantes, aunque pueden utilizarse para medios homogéneos a trozos si se aplican unas condiciones de continuidad adecuadas.

Tambien pueden generalizarse a medios anisótropos, no lineales y dispersivos, pero no trataremos estos casos en este texto. En particular, los medios dispersivos pueden tratarse en el dominio de la frecuencia definiendo a las constantes de los mismos como funciones de la frecuencia $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ y $\sigma(\omega)$.

Más adelante trataremos el problema de la unicidad de la solución con condiciones de contorno. Nos basta por ahora con apuntar que un problema electromagnético correctamente especificado, en el que se conocen las fuentes primarias y se dispone de unas condiciones de contorno adecuadas, tiene solución única pero que, en general, el problema es autoconsistente: para poder especificar las fuentes es necesario el conocimiento previo de los campos.

9.1.1. Condiciones de continuidad

Antes de abordar el problema de contorno propiamente dicho, veremos cómo se aplican las ecuaciones de Maxwell en las zonas donde las propiedades de los medios son discontinuas. Buscaremos las reglas de conexión entre los campos a ambos lados de la superficie de separación de dos medios con propiedades distintas. Puesto que se trata de generalizar lo tratado en la sección 8.3, no repetiremos las consideraciones que se hicieron allí con cierto detalle.

Supongamos que la interfaz entre ambos medios puede ser representada por una superficie suave S_I y que, además, se cumplen otras condiciones que describiremos con ayuda de la figura 9.1³. Ésta representa a un volumen macroscópico constituido por una caja de pastillas cuyas bases son planas, paralelas y equidistantes a S_I y de un área ΔS lo bastante pequeña como para que la sección correspondiente de S_I , sombreada en la figura, pueda considerarse como plana. La altura del cilindro es h y se supone que, manteniéndose en el dominio macroscópico, puede tomarse tan pequeña como sea

³El que estas condiciones se cumplan en una situación determinada depende de la propia geometría de la superficie, de las dimensiones características de la onda, la longitud de onda en el caso monocromático, y de la resolución de los aparatos de medida. Por ejemplo, el vidrio pulido cumple estas condiciones en el dominio del visible y el esmerilado no las cumple. Tampoco se cumplen para sistemas en los que la resolución espacial empleada sea comparable a las dimensiones moleculares.

necesario para hacerla despreciable frente al radio a de la caja. El vector normal a \mathcal{S}_I , en la dirección hacia afuera del medio (1), es \vec{n}_1 y $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$ es el vector normal en el sentido hacia afuera del medio (2). Los campos sobre la superficie, en cada uno de los medios, son \vec{F}_1 y \vec{F}_2 . La variación espacial de los campos se supone suave, salvo en las inmediaciones de la interfaz donde éstos varían de forma continua pero brusca. En las superficies superior e inferior de la caja, dichos campos pueden aproximarse como uniformes y sus derivadas temporales tomarse como finitas en todo el volumen. En cuanto a las densidades de carga y corriente ρ y \vec{j} , se suponen finitas salvo en \mathcal{S}_I , donde deben ser representadas por densidades superficiales finitas ρ_s y \vec{j}_s . Al igual que los campos, se considera que estas magnitudes varían lentamente de forma que en la parte superior de la caja, en la inferior o en \mathcal{S}_I , según el caso, pueden tomarse como uniformes.

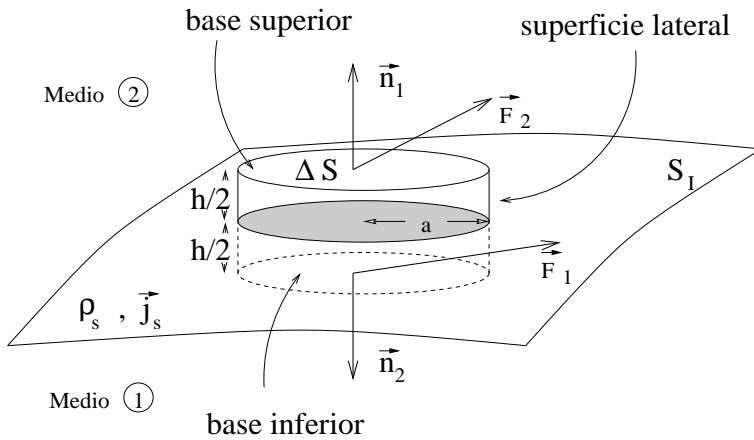


Figura 9.1: Condiciones de continuidad

Las ecuaciones 9.2 y 9.3 pueden ser expresadas en forma integral haciendo uso de los teoremas de Gauss

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{F} dv = \oint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n} ds \quad (9.9)$$

el de Stokes, o la generalización del primero

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \wedge \vec{F} dv = \oint_{\mathcal{S}} \vec{n} \wedge \vec{F} ds \quad (9.10)$$

donde \mathcal{V} es el volumen de integración, \mathcal{S} la superficie que lo envuelve y \vec{n} la normal hacia afuera del volumen en cuestión.

Aunque estos teoremas sólo son válidos cuando se aplican a regiones continuas, las precisiones apuntadas al principio permiten integrar sobre el volumen de la caja y considerar a la interfaz como matemáticamente continua.

Escribiendo $\nabla \cdot \vec{F} = \mathcal{D}$ y a la densidad superficial correspondiente como \mathcal{D}_s , la aplicación de 9.9 a la caja puede expresarse de la forma

$$\int_{\mathcal{V}} \mathcal{D} dv = \oint_{\text{bases+lateral}} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

Con las aproximaciones ya descritas en 8.3, y admitiendo la posibilidad de densidades superficiales \mathcal{D}_s ,

$$\underbrace{\Delta\mathcal{S} \vec{F}_2 \cdot \vec{n}_1}_{(a)} + \underbrace{\Delta\mathcal{S} \vec{F}_1 \cdot \vec{n}_2}_{(b)} + \underbrace{\mathcal{S}_{lat} F_{nm}}_{(c)} \simeq \underbrace{\mathcal{D}_s \Delta\mathcal{S}}_{(d)} + \underbrace{\frac{h}{2} \Delta\mathcal{S} \mathcal{D}_1}_{(e)} + \underbrace{\frac{h}{2} \Delta\mathcal{S} \mathcal{D}_2}_{(f)}$$

Los términos (a) y (b) son las contribuciones al flujo a través de la base superior e inferior, respectivamente; el término (c) es la contribución al flujo de la superficie lateral del cilindro \mathcal{S}_{lat}

$$(c) = \int_{\mathcal{S}_{lat}} \vec{F} \cdot d\vec{s}_{lat} \simeq \mathcal{S}_{lat} F_{nm} = 2\pi a h F_{nm}$$

F_{nm} es un valor intermedio entre los valores extremos de la componente normal del campo a la superficie lateral. (Se ha hecho uso del teorema del valor intermedio de las integrales definidas).

El término (d) representa a la totalidad de fuentes escalares en la superficie y los términos (e) y (f) son las contribuciones de las densidades de volumen a ambos lados de la interfaz.

Si ahora nos acercamos a la superficie haciendo que $h \ll a$, es decir, haciendo que la altura del cilindro sea muy inferior al radio del mismo, podemos despreciar las contribuciones (c), (e) y (f), que son proporcionales a h , frente a las (a), (b) y (d) que permanecen constantes en este proceso de límite. Luego

$$\Delta\mathcal{S} (\vec{F}_2 \cdot \vec{n}_1 + \vec{F}_1 \cdot \vec{n}_2) \simeq \mathcal{D}_s \Delta\mathcal{S}$$

y, teniendo en cuenta que $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$,

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{F}_2 - \vec{F}_1) = \mathcal{D}_s \quad (9.11)$$

Las componentes normales de los campos sufren una discontinuidad de magnitud igual a la densidad superficial de fuentes escalares.

De forma análoga, partiendo de 9.10 y anotando la densidad superficial del rotacional como $\vec{\mathcal{R}}_s$, se tiene que

$$\vec{n}_1 \wedge (\vec{F}_2 - \vec{F}_1) = \vec{\mathcal{R}}_s \quad (9.12)$$

De acuerdo con 9.11, 9.2a y 9.2c, las condiciones de frontera para las componentes normales son

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \quad (9.13a)$$

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (9.13b)$$

La componente normal de \vec{D} es discontinua si $\rho_s \neq 0$, la de \vec{B} es incondicionalmente continua.

Por lo que respecta a las condiciones sobre las componentes tangenciales, es necesario tener en cuenta que, mientras que la carga superficial se acumula en capas de dimensión microscópica en la superficie de los conductores, por lo que es ineludible la previsión de posibles $\rho_s \neq 0$ a escala macroscópica, las derivadas temporales de los campos son finitas en las interfaces y no contribuyen con términos superficiales. Tampoco es necesario considerar densidades de corriente superficiales, salvo que alguno de los medios se considere como conductor perfecto. Como se desprende de lo anterior, si z es la dirección normal a la superficie y j_t y E_t son las componentes tangenciales de la densidad de corriente y del campo eléctrico, $j_s = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h/2}^{h/2} j_t dz = \sigma \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h/2}^{h/2} E_t dz = 0$ si σ y \vec{E}_t son finitos. Dichas condiciones se deducen de 9.12, 9.2b y 9.2d

$$\vec{n}_1 \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad (9.14a)$$

$$\vec{n}_1 \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_s \quad (9.14b)$$

y se traducen en la continuidad incondicional de la componente tangencial de \vec{E} y la discontinuidad de la de \vec{H} si $\vec{j}_s \neq 0$.

Aunque para conectar las soluciones de las ecuaciones de Maxwell bastan estas cuatro condiciones, más las ecuaciones constitutivas, dado que las ecuaciones de Maxwell son de primer orden, podemos obtener otras condiciones de contorno para \vec{P} , \vec{M} y \vec{H} , teniendo en cuenta que

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_p, \quad \nabla \cdot \vec{M} = -\rho_M, \quad \nabla \wedge \vec{M} = -\vec{j}_M, \quad \nabla \cdot \vec{H} = \rho_M$$

De la ecuación de continuidad 9.3, obtenemos

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (9.15)$$

Luego la componente normal de \vec{j} es discontinua en la superficie cuando sobre la misma tiene lugar una acumulación superficial de carga que depende del tiempo.

9.1.1.1. Refracción de las líneas de campo y corriente

Supongamos que los dos medios representados en la figura 9.2 son de clase A. Para medios no conductores con $\rho_s = 0$ y $\vec{j}_s = 0$.

De 9.13a se obtiene

$$D_2 \cos \theta_2 = D_1 \cos \theta_1, \quad \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2 = \varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1$$

De 9.14a

$$E_2 \sin \theta_2 = E_1 \sin \theta_1 \quad (9.16)$$

Luego, para las líneas de \vec{E} y \vec{D} ,

$$\vec{E} \text{ y } \vec{D}, \quad \tan \theta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tan \theta_2, \quad (\text{no conductores}) \quad (9.17)$$

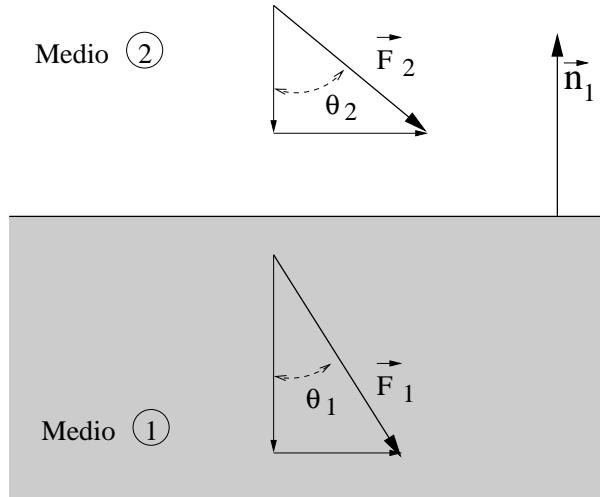


Figura 9.2:

De forma similar, para las líneas de \vec{B} y \vec{H} ,

$$\vec{B} \text{ y } \vec{H}, \quad \tan \theta_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tan \theta_2, \quad (\text{no conductores}) \quad (9.18)$$

La ley de refracción de líneas de corriente, en conductores, puede obtenerse de 9.15 suponiendo $\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0$

$$j_2 \cos \theta_2 = j_1 \cos \theta_1$$

y de 9.16

$$E_2 \sin \theta_2 = E_1 \sin \theta_1, \quad \frac{j_2}{\sigma_2} \sin \theta_2 = \frac{j_1}{\sigma_1} \sin \theta_1$$

luego

$$\vec{E} \text{ y } \vec{j}, \quad \tan \theta_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tan \theta_2, \quad (\text{conductores}) \quad (9.19)$$

Para medios conductores esta ecuación gobierna también la refracción de las líneas de campo eléctrico. En este último caso, como es fácil comprobar, $\rho_s \neq 0$.

Como se muestra en la figura 9.3, el ángulo θ es tanto mayor cuanto mayor es ε , μ ó σ , por lo que los campos pueden ser confinados por medios en los que ε_1 , μ_1 ó σ_1 son mucho mayores que ε_2 , μ_2 ó σ_2 , respectivamente.

En la práctica, la constante dieléctrica relativa no puede ser inferior a la unidad ni superior a varias decenas, lo que hace que los dieléctricos sólo puedan confinar parcialmente al campo eléctrico. Ciertos materiales magnéticos de alta permeabilidad pueden confinar al campo magnético con gran eficiencia. Por último, puesto que la conductividad de un medio puede tomar valores que difieren en muchos órdenes de magnitud, el confinamiento de las líneas de corriente en el interior de un buen conductor puede ser prácticamente total. Nótese que en el límite de confinamiento total, las líneas de campo en el medio (2) se hacen perpendiculares a la superficie del medio y, en el medio (1), tangentes a la misma.

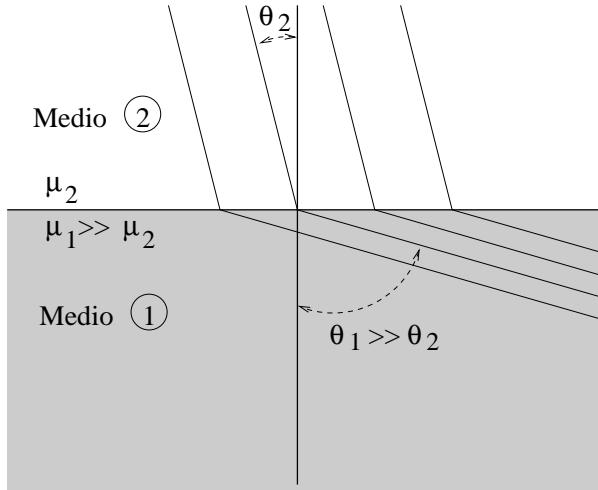


Figura 9.3:

9.1.2. Condiciones de contorno

Según el teorema de Helmholtz, sección 1.2, un campo \vec{F} puede derivarse de dos potenciales, uno escalar, f , y otro vectorial, \vec{g} .

$$\vec{F} = -\nabla f + \nabla \wedge \vec{g} \quad (9.20)$$

y queda únicamente determinado si se especifican las fuentes escalares y vectoriales

$$\mathcal{D} = \nabla \cdot \vec{F} \quad \text{y} \quad \vec{\mathcal{R}} = \nabla \wedge \vec{F} \quad (9.21)$$

en todo el espacio.

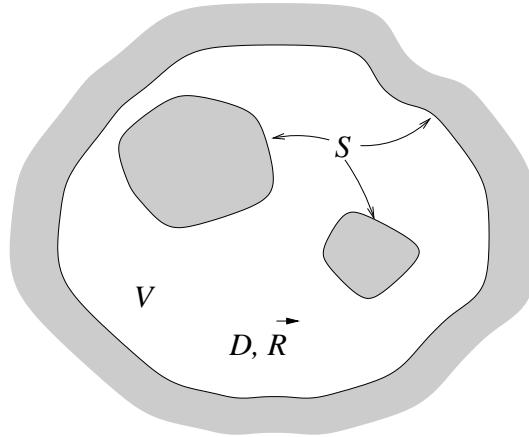


Figura 9.4:

Normalmente sólo puede aspirarse al conocimiento de las fuentes en un volumen finito V . Veremos que es posible seguir asegurando la unicidad del campo si substituimos

las fuentes externas a \mathcal{V} por unas *condiciones de contorno* apropiadas en la superficie \mathcal{S} que envuelve a \mathcal{V} , como puede verse en la figura 9.4 [Portis].

9.1.2.1. Teorema de unicidad para campos irrotacionales

Un campo irrotacional en \mathcal{V} cumple

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{F} = \mathcal{D} \\ \nabla \wedge \vec{F} = 0 \end{array} \right\} \quad \vec{F} = -\nabla f, \quad \nabla^2 f = -\mathcal{D} \quad (9.22)$$

Luego el campo deriva de un potencial escalar que cumple la ecuación de Poisson. Sean $f_1(\vec{r})$ y $f_2(\vec{r})$ dos soluciones de la ecuación de potencial

$$\nabla^2 f_1 = \nabla^2 f_2 = -\mathcal{D} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\nabla f_1, \quad \vec{F}_2 = -\nabla f_2$$

en todos los puntos $\vec{r} \in \mathcal{V}$.

Si formamos el vector

$$\vec{\eta} = (f_1 - f_2)(\vec{F}_1 - \vec{F}_2)$$

e integramos su divergencia sobre \mathcal{V}

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{\eta} \, dv = \int_{\mathcal{V}} \left[(f_1 - f_2) \underbrace{\nabla \cdot (\vec{F}_1 - \vec{F}_2)}_{=0} - |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 \right] \, dv$$

de donde se ha eliminado el primer término del segundo miembro porque $\nabla \cdot \vec{F}_1 = \nabla \cdot \vec{F}_2 = \mathcal{D}$.

Haciendo uso del teorema de la divergencia

$$-\int_{\mathcal{V}} |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 \, dv = \int_{\mathcal{S}} \vec{\eta} \cdot \vec{n} \, ds$$

Para que la solución sea única, es decir, para que $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, en todo el volumen de interés \mathcal{V} , es suficiente que $\vec{\eta} \cdot \vec{n} = 0$ en toda la superficie \mathcal{S} del contorno

$$[\vec{\eta} \cdot \vec{n}]_{\mathcal{S}} = \left[(f_1 - f_2)(\vec{F}_1 - \vec{F}_2) \cdot \vec{n} \right]_{\mathcal{S}} = 0 \quad (9.23)$$

Esto se consigue, como se deduce de la expresión anterior, fijando los siguientes tipos de condiciones de contorno:

a) *Condiciones de Dirichlet.* Estas condiciones consisten en la fijación del potencial f en \mathcal{S}

$$[f]_{\mathcal{S}} = f_{\mathcal{S}} \quad (9.24)$$

Con esta condición se obtiene la unicidad no sólo del campo sino también del potencial.

b) *Condiciones de Neumann.* En este caso se especifica la componente normal del campo en \mathcal{S}

$$[\vec{F} \cdot \vec{n}]_{\mathcal{S}} = [F_n]_{\mathcal{S}} = F_{nS} \quad (9.25)$$

Bajo estas condiciones, \vec{F} queda determinado únicamente mientras que el potencial está indeterminado en una constante arbitraria.

c) *Condiciones mezcladas.* Consisten en la fijación del potencial en parte de la superficie y de la componente normal del campo en el resto de la misma.

9.1.2.2. Teorema de unicidad para campos solenoidales

Para campos solenoidales no conservativos,

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{F} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{R}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \nabla \wedge \vec{g} \\ \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{g}) = \vec{\mathcal{R}} \end{array} \right. \quad (9.26)$$

Si ahora construimos el vector

$$\vec{\nu} = (\vec{g}_1 - \vec{g}_2) \wedge (\vec{F}_1 - \vec{F}_2)$$

donde $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{g}_1) = \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{g}_2) = \vec{\mathcal{R}}$ y $\vec{F}_1 = \nabla \wedge \vec{g}_1$, $\vec{F}_2 = \nabla \wedge \vec{g}_2$, e integramos su divergencia sobre V

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\nu} \, dv = \int_V \left[(\vec{F}_1 - \vec{F}_2) \cdot \nabla \wedge (\vec{g}_1 - \vec{g}_2) - (\vec{g}_1 - \vec{g}_2) \cdot \underbrace{\nabla \wedge (\vec{F}_1 - \vec{F}_2)}_{=0} \right] \, dv$$

El segundo término se ha eliminado porque

$$\nabla \wedge \vec{F}_1 = \nabla \wedge \vec{F}_2 = \vec{\mathcal{R}}$$

por lo que, haciendo uso del teorema de la divergencia,

$$\int_V |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 \, dv = \int_S [(\vec{g}_1 - \vec{g}_2) \wedge (\vec{F}_1 - \vec{F}_2)] \cdot \vec{n} \, dS$$

Luego, dado que $\vec{n} \cdot (\vec{g} \wedge \vec{F}) = \vec{g} \cdot (\vec{F} \wedge \vec{n}) = \vec{F} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{g})$, para obtener la unicidad de la solución, $\vec{F} = \vec{F}_1 = \vec{F}_2$ en todo el volumen, basta con especificar en la superficie la componente tangencial del potencial vector, condición que sería análoga a la de Dirichlet para campos conservativos, o la componente tangencial del propio campo.

$$[\vec{g} \wedge \vec{n}]_S = g_{\tau S} \quad \text{ó} \quad [\vec{F} \wedge \vec{n}]_S = F_{\tau S} \quad (9.27)$$

También cabe mezclar ambos tipos de condiciones.

9.1.2.3. Teorema de unicidad en el caso general

Tenemos ahora

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{F} = \mathcal{D} \\ \nabla \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{R}} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla f + \nabla \wedge \vec{g} \quad (9.28)$$

Supongamos que \vec{F}_1 y \vec{F}_2 son dos soluciones distintas de las ecuaciones anteriores, para unas distribuciones $\mathcal{D}(\vec{r})$ y $\vec{\mathcal{R}}(\vec{r})$ especificadas dentro de \mathcal{V} .

Construyendo el vector

$$\vec{\xi} = (f_1 - f_2)(\vec{F}_1 - \vec{F}_2) + (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) \wedge (\vec{g}_1 - \vec{g}_2)$$

y procediendo como en casos anteriores,

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{\xi} \, dv = -2 \int_{\mathcal{V}} |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 \, dv = \int_{\mathcal{S}} \vec{\xi} \cdot \vec{n} \, dS$$

Por lo que la condición de unicidad es ahora

$$[\vec{\xi} \cdot \vec{n}]_{\mathcal{S}} = 0 \quad (9.29)$$

Condición que se llena especificando \vec{F} en la superficie o bien especificando al mismo tiempo el potencial escalar f y la componente tangencial del potencial vector.

Vemos que en el cálculo del campo, dentro de un volumen \mathcal{V} , podemos ignorar las fuentes externas al mismo si tenemos una información adecuada del campo o de los potenciales en la superficie \mathcal{S} que limita a \mathcal{V} .

9.2. Energía electromagnética en medios materiales

Los balances energéticos para los campos electromagnéticos en presencia de medios materiales pueden presentar aspectos complejos porque los mecanismos de disipación y almacenamiento de energía son muy diversos [Gómez, Jackson, Panofsky y Phillips, Stratton]. Aquí sólo abordaremos los fundamentos de este problema, los cuales pueden tratarse con un formalismo análogo al empleado para el campo en el vacío.

No obstante, es necesario precisar que, en el caso que nos ocupa, el tratamiento que se lleva a cabo es de tipo macroscópico y diferencia entre cargas y corrientes de conducción y cargas y corrientes de polarización. En la sección 4.1, interpretábamos el término $\vec{j}_T \cdot \vec{E}$ como el trabajo que, por unidad de volumen y unidad de tiempo, realizan los campos sobre todas las cargas. Anteriormente hemos desglosado la corriente total \vec{j}_T , de acuerdo con 6.34, en corrientes de conducción \vec{j} , de polarización dieléctrica \vec{j}_P y de polarización magnética \vec{j}_M .

$$\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_P + \vec{j}_M \quad (9.30)$$

por lo que, de acuerdo con esta notación, $\vec{j} \cdot \vec{E}$ es solamente la potencia cedida por los campos a la unidad de volumen de cargas de conducción, siendo necesario tener en cuenta que los campos también trabajan para polarizar eléctrica y magnéticamente al medio.

También debemos mencionar que las cargas no sólo pueden moverse bajo la acción de un campo eléctrico macroscópico derivable de las ecuaciones de Maxwell, sino que fuerzas mecánicas, de difusión, químicas, etc., pueden jugar el mismo papel.

Supondremos aquí que, además del campo clásico \vec{E} que se describe en las ecuaciones de Maxwell, existen campos \vec{E}' equivalentes, o electromotores, no incluidos en dichas ecuaciones, por lo que el campo total que mueve a las cargas es

$$\vec{E}_T = \vec{E} + \vec{E}' \quad (9.31)$$

Podemos obtener una ecuación de continuidad macroscópica para la energía, considerando el producto

$$\vec{j} \cdot \vec{E}_T = \vec{j} \cdot (\vec{E} + \vec{E}')$$

que formalmente aparece como la energía que, por unidad de tiempo y de volumen, transmite el campo total a las cargas de conducción. Sin embargo, no es posible inferir directamente que ésto es así porque las magnitudes que intervienen en el producto son macroscópicas y las relaciones de fuerza macroscópicas no son tan simples como en el caso de sistemas de cargas en el vacío. Más adelante abordaremos parcialmente este problema.

Siguiendo pasos análogos a los empleados en 4.1, teniendo en cuenta que

$$\vec{j} = \nabla \wedge \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

se obtiene una versión macroscópica del teorema de Poynting

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{j} \cdot \vec{E}' - \vec{j} \cdot \vec{E}_T \quad (9.32)$$

donde se ha extendido a los medios materiales la definición del vector de Poynting

$$\vec{\mathcal{P}} \equiv \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (9.33)$$

El segundo término del primer miembro térmico puede escribirse de la forma

$$\frac{\partial \omega_{em}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.34)$$

Como los demás términos, tiene las dimensiones de energía por unidad de volumen y tiempo, pero una posible interpretación del mismo ha de postponerse al conocimiento del medio al que se aplique el teorema. Obviamente representa a una energía asociada a la variación temporal de los campos

Si los medios son lineales, podemos escribir, análogamente a lo escrito para el vacío,

$$\omega_{em} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (9.35)$$

donde ω_{em} juega el papel de densidad de energía asociada al establecimiento de los campos ⁴ en el entorno de \vec{r} , es nula en ausencia de campo. Además, $\vec{j} = \sigma \vec{E}_T$, por lo que

$$\vec{j} \cdot \vec{E}' = \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} + \frac{\partial \omega_{em}}{\partial t} + \frac{j^2}{\sigma} \quad (9.36)$$

Podemos interpretar esta ecuación de forma análoga a la empleada en el caso del vacío, tanto en esta versión local como en la correspondiente de tipo integral. No obstante, como ya hemos apuntado, en este caso la asignación de cada término a un cierto

⁴Al establecer el campo se polariza al medio. La polarización, en general, puede incluir mecanismos disipativos.

proceso no es tan clara como en aquel caso. Podríamos decir que: *La potencia cedida por los campos electromotores \vec{E}' a la carga de conducción por unidad de volumen, puede emplearse en trasvasar energía al exterior de dicho volumen, por medio del flujo del vector de Poynting, en aumentar la energía almacenada en su interior y en calentar al medio en virtud del efecto Joule.*

9.2.1. Energía consumida en recorrer un ciclo de histéresis

Queremos calcular las *pérdidas de histerésis*, asociadas al recorrido cuasiestático de dicho ciclo en el plano $H - B$. Además de estas perdidas, cuando el recorrido se hace de forma rápida, aparecen pérdidas ohmicas correspondientes a las corrientes inducidas en el medio, conocidas como *corrientes de Foucault*.

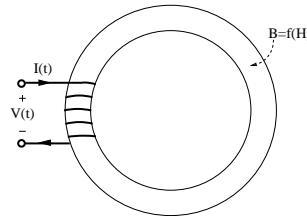


Figura 9.5:

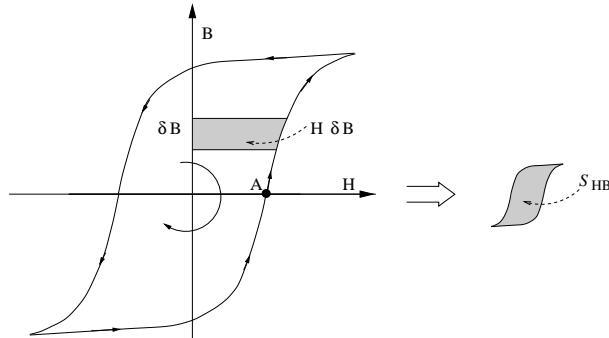


Figura 9.6:

Las pérdidas de histerésis derivan del término $\frac{\partial \omega_m}{\partial t}$. Dado que el medio es no lineal, debemos hacer uso de la definición 9.34.

Consideremos una transformación elemental de duración δt , a lo largo de la cual se produce un incremento

$$\delta \omega_m = \frac{\partial \omega_m}{\partial t} \delta t = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \delta t = \vec{H} \cdot \delta \vec{B}$$

Si, como se muestra en las figuras 9.5 y 9.6, obligamos a un núcleo de material ferromagnético, de volumen V , a recorrer lentamente un ciclo de histéresis desde A

hasta A , El trabajo realizado será

$$W = \mathcal{V} \oint_A^A \vec{H} \cdot \delta \vec{B} = S_{HB}$$

donde A puede ser cualquier punto del ciclo ⁵.

Dado que al terminar el ciclo el estado del núcleo es el mismo de partida, W es una energía disipada. Luego la pérdida de energía, por unidad de volumen, es igual al área del ciclo de histéresis S_{HB} . De hecho estas pérdidas se asocian al proceso disipativo de imanación, en el que se modifican los volúmenes y las orientaciones de los dominios magnéticos del material.

9.2.2. Energía de un sistema de cargas y corrientes de conducción estacionarias

Las expresiones obtenidas en la sección 4.1.1 no son aplicables a medios materiales de tipo general pero si son fácilmente extensibles a medios de clase A . Sólo es necesario substituir \vec{B}/μ_0 por \vec{H} y $\epsilon_0 \vec{E}$ por \vec{D} . Así, pués, para campos electromagnéticos estáticos

$$W_{em} = \frac{1}{2} \int_{v \rightarrow \infty} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv = \frac{1}{2} \int_{v_0} (\rho V + \vec{j} \cdot \vec{A}) dv \quad (9.37)$$

donde, en este caso, las densidades corresponden a las cargas de conducción.

Un caso particular interesante es el correspondiente a un conjunto de N conductores cargados con cargas Q_i , depositadas sobre sus superficies \mathcal{S}_i a potenciales V_i , y M espiras \mathcal{L}_j recorridas por intensidades I_j . Dado que en cada conductor (espira), $V_i = cte$ ($I_j = cte$), 9.37 toma la forma

$$W_{em} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M I_j \Phi_j \quad (9.38)$$

Basandonos en este resultado, podemos redefinir la capacidad de un conductor y la autoinducción de una espira como

$$C \equiv \frac{2W_e}{V^2}, \quad L \equiv \frac{2W_m}{I^2} \quad (9.39)$$

9.3. Ecuaciones de onda en medios materiales

Los medios materiales responden al paso de una onda electromagnética creando en su seno unas polarizaciones y corrientes oscilantes que absorben y vuelven a radiar parte de la energía incidente. Esta rerradiación sincronizada modifica a la onda incidente pudiendo incluso anular su carácter propagativo.

Para obtener una ecuación de onda de los campos en medios de clase A , tendremos en cuenta que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{y} \quad \nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

⁵Puesto que la energía es proporcional al area del ciclo, esta puede también calcularse como $\oint_A^A \vec{B} \cdot \delta \vec{H}$.

y desglosaremos la densidad de corriente en dos términos

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}' \quad (9.40)$$

donde \vec{j}' , además de incluir a las corrientes debidas a campos no maxwellianos, puede tener en cuenta también a corrientes maxwellianas a las que interese considerar como fuentes. Esta última opción suele adoptarse en el estudio de antenas emisoras.

Procediendo como en el capítulo 4.2

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \nabla \wedge \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{H}$$

substituyendo en ésta las expresiones anteriores, tenemos que

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

y eliminando \vec{j} mediante 9.40

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \vec{j}'}{\partial t} \quad (9.41)$$

De forma análoga

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \wedge \vec{j}' \quad (9.42)$$

Este mismo tipo de ecuaciones puede obtenerse para los potenciales. Bajo las mismas condiciones anteriores

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon} = -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A}$$

o, de otra forma,

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (9.43)$$

y de

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = \nabla \wedge \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu \vec{j} - \mu \varepsilon \nabla \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

lo que puede escribirse como

$$\nabla^2 \vec{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{j} \quad (9.44)$$

Las ecuaciones 9.43 y 9.44 pueden desacoplarse de diversas formas. Para obtener unas ecuaciones de onda similares a las obtenida más arriba para los campos, haremos uso de una versión de la condición de Lorenz válida para los medios de clase *A*

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \sigma V + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (9.45)$$

condición que, como puede demostrarse, es compatible con las transformaciones de contraste.

Las ecuaciones resultantes son

$$\nabla^2 V - \mu\sigma \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (9.46a)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}' \quad (9.46b)$$

Cada una de las componentes cartesianas de los potenciales o los campos cumple la ecuación

$$\nabla^2 \Psi - \mu\sigma \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -f(\vec{r}, t) \quad (9.47)$$

ecuación en la que, además del término propagativo, correspondiente a la derivada segunda temporal, aparece un término disipativo, o de difusión, asociado a la derivada primera.

Si repasamos la deducción de estas ecuaciones veremos que la preponderancia del término propagativo o difusivo en la ecuación de onda está relacionada con la importancia relativa de las corrientes de desplazamiento, $\vec{j}_D = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, o de la corriente de conducción óhmica $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

9.3.1. Ondas monocromáticas y monocromáticas planas

Supondremos que en el medio no hay fuentes. La ecuación de onda para cualquier componente de los campos sería

$$\nabla^2 \Psi - \mu\sigma \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (9.48)$$

Ondas monocromáticas :

Podemos buscar soluciones monocromáticas (véase el apéndice L) de tipo complejo

$$\Psi(\omega, \vec{r}, t) = \Psi(\omega, \vec{r}) e^{j\omega t} = \Psi_0(\omega, \vec{r}) e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (9.49)$$

donde $\Psi_0(\omega, \vec{r})$ es una función real y $\Psi(\omega, \vec{r}) = \Psi_0(\omega, \vec{r}) e^{j\varphi}$ es un *fasor* independiente del tiempo.

Recordemos que si $\Psi(\omega, \vec{r}, t)$ es una solución de la ecuación de onda

$$\Psi_R(\omega, \vec{r}, t) \equiv \operatorname{Re} [\Psi(\omega, \vec{r}, t)] = \Psi_0(\omega, \vec{r}) \cos(\omega t + \varphi)$$

también lo es. Este tipo de soluciones recibe el nombre de *monocromático*, ya que la luz de color muy puro corresponde a una onda electromagnética de frecuencia prácticamente definida.

También podemos expresar cualquier solución que sea de cuadrado sumable como superposición de ondas monocromáticas mediante el uso de la transformada de Fourier⁶

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega, \vec{r}) e^{j\omega t} d\omega \quad (9.50a)$$

$$\Psi(\omega, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt \quad (9.50b)$$

La primera es la transformada *inversa* y la segunda la *directa*.

Para soluciones $\Psi(\vec{r}, t)$ reales, estas transformadas pueden ser expresadas en función de frecuencias positivas. Efectivamente, si $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi^*(\vec{r}, t)$, es decir, si Ψ es igual a su complejo conjugado, $\Psi^*(\omega, \vec{r}) = \Psi(-\omega, \vec{r})$, luego

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^0 \Psi(\omega, \vec{r}) e^{j\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \Psi(\omega, \vec{r}) e^{j\omega t} d\omega$$

y cambiando ω por $-\omega$ en la primera integral

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= - \int_{\infty}^0 \Psi(-\omega, \vec{r}) e^{-j\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \Psi(\omega, \vec{r}) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_0^{\infty} [\Psi^*(\omega, \vec{r}) e^{-j\omega t} + \Psi(\omega, \vec{r}) e^{j\omega t}] d\omega = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [\Psi(\omega, \vec{r}) e^{j\omega t}] d\omega \end{aligned}$$

En cualquier caso, para soluciones monocromáticas podemos substituir los operadores

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2 \quad (9.51)$$

por lo que, por ejemplo, dividiendo por $e^{j\omega t}$, la ecuación de onda monocromática para el campo eléctrico toma la forma

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) - j\omega \mu\sigma \vec{E}(\vec{r}) + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (9.52)$$

ecuación en la que hemos simplificado la notación $\vec{E}(\omega, \vec{r})$ escribiendo $\vec{E}(\vec{r})$, puesto que, en el contexto en el que está escrita, no se presta a confusión.

Estas soluciones $\vec{E}(\vec{r})$ tienen carácter vectorial complejo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_R + j\vec{E}_I = \sum_{\alpha=1}^3 E_{0\alpha} e^{j\varphi_{\alpha}} \hat{e}_{\alpha} = \sum_a (E_{R\alpha} + jE_{I\alpha}) \hat{e}_{\alpha} \quad (9.53)$$

donde \vec{E}_R y \vec{E}_I son vectores reales y $E_{0\alpha}$ y φ_{α} las amplitudes y las fases de cada componente $E_{\alpha} = E_{R\alpha} + jE_{I\alpha}$ del vector complejo.

⁶El factor $\frac{1}{2\pi}$ puede ponerse en la transformada directa, la inversa, o repartirlo entre ambas como $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Podemos escribir la ecuación de onda en la forma

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + \omega^2 \mu \varepsilon^c \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (9.54)$$

donde ε^c es la *constante dieléctrica compleja*, definida como

$$\varepsilon^c \equiv \varepsilon \left(1 - j \frac{1}{Q} \right), \quad Q = \omega \tau, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (9.55)$$

Q es el *factor de calidad* del medio y τ su constante de relajación.

También se utiliza para describir a la constante compleja el factor *tp* o *tangente de pérdidas*

$$tp \equiv -\frac{1}{Q} = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\varepsilon^c} \right) \quad (9.56)$$

Se suele clasificar a los medios, para cada frecuencia, en buenos dieléctricos, cuando $Q \gg 1$ y buenos conductores cuando $Q \ll 1$.

Puede comprobarse que

$$Q = \omega \tau = \frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|}$$

es una medida de la importancia relativa de la corriente de desplazamiento frente a la de conducción.

Cuando $Q \gg 1$, $\varepsilon^c \simeq \varepsilon$ y la ecuación de onda corresponde a la propagación, en un medio con pérdidas pequeñas, con una velocidad de fase

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad (9.57)$$

Cuando $Q \ll 1$, $\varepsilon^c \simeq -j \frac{\sigma}{\omega}$, en la ecuación predomina el término de difusión.

Resolviendo esta ecuación en coordenadas cilíndricas, esféricas, cartesianas etc., se obtienen, respectivamente, las ondas monocromáticas cilíndricas, esféricas, planas etc.

Ondas monocromáticas-planas :

Si, además, la onda es plana, la ecuación 9.54 se reduce a una ecuación en derivadas totales⁷. Para el campo eléctrico

$$\frac{d^2 \vec{E}(x)}{dx^2} + \omega^2 \mu \varepsilon^c \vec{E} = 0 \quad (9.58)$$

Cualquier componente del potencial o de los campos cumple una ecuación de tipo Helmholtz, que puede escribirse de la forma

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \gamma^2 \right) X(x) = 0 \quad (9.59)$$

⁷Elegimos al eje x para la dirección de propagación.

donde

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon^c \quad (9.60)$$

Llamaremos a γ la *constante compleja de propagación* y la escribiremos como

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (9.61)$$

donde α es la *constante de atenuación* y β la *constante de fase, constante de propagación o número de onda*, ambas reales y positivas.

Relaciones de dispersión.

Tomando para α y β valores reales y positivos, la raíz cuadrada de γ^2 nos da ⁸

$$\alpha = \frac{1}{\delta} = \frac{\beta_0}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.62a)$$

$$\beta = \frac{\beta_0}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.62b)$$

donde $\delta \equiv \frac{1}{\alpha}$ la *profundidad de penetración* y $\beta_0 = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \gamma_{\sigma=0}$ es el número de onda del medio, haciendo nula la conductividad.

Estas constantes son funciones de la frecuencia $\alpha = \alpha(\omega)$ y $\beta = \beta(\omega)$ y, como tales, se denominan *relaciones de dispersión* de la onda en el medio. En la figura 9.7 se representan los valores relativos de las constantes en función de $Q(\omega)$. En los buenos dieléctricos, $Q \gg 1$, $\alpha \rightarrow 0$ y $\beta \rightarrow \beta_0$, mientras que en los buenos conductores, $Q \ll 1$, $\alpha \rightarrow \beta \ll \beta_0$, como se ve en la figura 9.7.

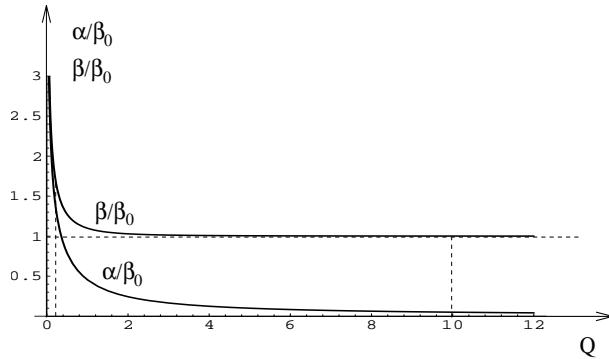


Figura 9.7:

Solución general.

⁸Véase el problema 9-4.

La solución general para el campo eléctrico, por ejemplo, puede expresarse en función de las raíces de la ecuación característica

$$r^2 = \gamma^2 \Rightarrow r = \pm\gamma$$

con lo que

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, t) &= \vec{E}(x) e^{j\omega t} = (\vec{E}_+ e^{-\gamma x} + \vec{E}_- e^{\gamma x}) e^{j\omega t} \\ &= \vec{E}_+ e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + \vec{E}_- e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} \end{aligned} \quad (9.63)$$

que es la combinación lineal de dos ondas, dos *modos*, progresivas y atenuadas. \vec{E}_+ es la amplitud de la onda que viaja en el sentido positivo del eje x y \vec{E}_- la de aquella que lo hace en sentido contrario. El factor $e^{\pm\alpha x}$ determina la atenuación de cada una de las ondas, con signo (-) la que viaja en la dirección positiva y (+) la que lo hace en sentido contrario⁹.

Cada una de estas ondas se puede descomponer, de acuerdo con 9.53, en sus componentes complejos, E_y y E_z , y en sus partes reales e imaginarias, \vec{E}_R y \vec{E}_I , que son vectores reales.

Al progresar la onda una distancia $\Delta x = \delta$, la amplitud disminuye según el factor e^{-1} . Como hemos visto, $\alpha = \alpha(\omega)$, por lo que, al propagarse, cada componente armónica puede sufrir una atenuación de diferente cuantía.

El término exponencial complejo puede ser escrito como $e^{j\varphi}$, donde

$$\varphi = \beta \left(\frac{\omega}{\beta} t - x \right) \quad (9.64)$$

es la *fase* de la onda.

Velocidad de fase.

Se llama *velocidad de fase* a

$$v_f = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{\varphi=\text{cte}} \quad (9.65)$$

Es, pues, la velocidad con que se desplazan los planos de fase constante.

Diferenciando 9.64 e igualando a cero

$$\begin{aligned} d\varphi = 0 &= \beta \left(\frac{\omega}{\beta} dt - dx \right) \Rightarrow \\ v_f(\omega) &= \frac{\omega}{\beta} \end{aligned} \quad (9.66)$$

velocidad que también depende de la frecuencia. En la figura 9.8 se representa a la velocidad de fase en función de Q .

⁹Obsérvese que, si cambiásemos el signo, las ondas serían crecientes en el sentido de la propagación, lo que no es admisible en el seno de un medio pasivo, aquel que no suministra energía a las ondas que se propagan por él. Existen medios activos, como ciertos plasmas, que actúan de amplificadores de ondas.

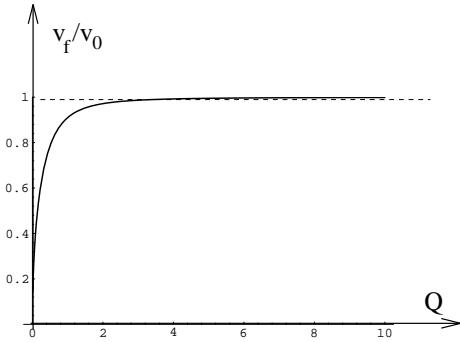


Figura 9.8:

En los buenos dieléctricos la velocidad de fase $v_f \rightarrow v_0$, donde $v_0 = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, por lo que ésta es prácticamente independiente de la frecuencia. En caso contrario, cada componente espectral de una onda viaja a distinta velocidad. Cualquier onda no monocromática sufre al propagarse una distorsión, o *dispersión*, que afecta tanto a las amplitudes como a las fases de sus componentes armónicas. En la figura 9.9-a se representa la distorsión de un pulso conforme va viajando a través del medio. En la figura 9.9-b se muestra que la distorsión es tanto mayor cuanto mayor es la anchura de banda del espectro del pulso.

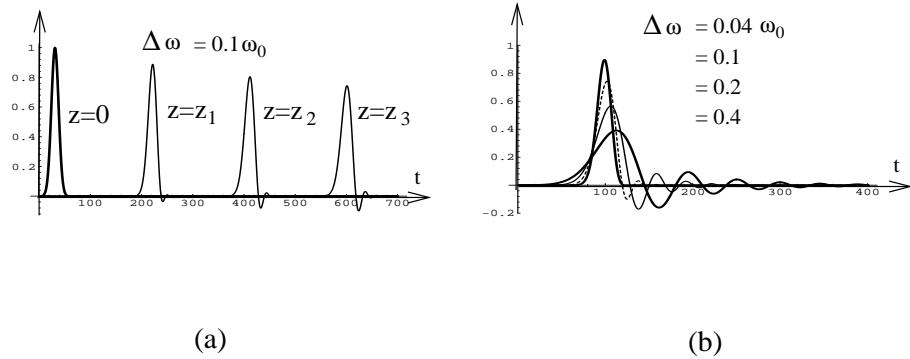


Figura 9.9:

En los medios dieléctricos

$$Q \rightarrow \infty , \quad \alpha = 0 , \quad \beta = \beta_0 = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} ,$$

$$v_f = v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{n} , \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

donde n es el índice óptico de refracción. Fue Maxwell quien primero puso de manifiesto que $n \sim \sqrt{\varepsilon_r}$.

Se dice que estos medios, en condiciones ideales, son no dispersivos, puesto que todas las componentes monocromáticas se propagan con atenuación nula y la misma velocidad de fase, o, lo que es lo mismo, dejan inalteradas las formas de los *paquetes* o *grupos de ondas* $\Psi(x, t)$.

En este caso la velocidad de fase coincide con la velocidad del paquete de ondas, velocidad de grupo v_g , y, por tanto, con la velocidad con que se propaga la energía asociada al paquete, v_e .

Velocidad de grupo.

Cuando la dispersión es pequeña cabe hablar de una *velocidad de grupo* que caracteriza de forma aproximada la velocidad con que se desplaza el grueso del paquete de ondas y, por consiguiente, de la energía¹⁰. En los medios muy dispersivos, la deformación de los paquetes de onda es tan grande que, al cabo de un cierto tiempo, el grupo está totalmente disperso y la energía diseminada en un intervalo espacial grande. Bajo estas circunstancias no cabe hablar de velocidad de grupo ni de velocidad de propagación de la energía, puesto que ésta va llegando a un punto dado en un intervalo temporal relativamente grande [Jackson, Stratton].

La velocidad de fase, como tal, no es físicamente observable y puede ser, de hecho lo es en algunas situaciones reales, superior a c sin que esto suponga ninguna violación del principio de relatividad especial.

Podemos hacer una introducción simple de la velocidad de grupo considerando la superposición de dos señales

$$X_1(x, t) = X_0 e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$X_2(x, t) = X_0 e^{j[(\omega + \Delta\omega)t - (\beta + \Delta\beta)x]}, \quad \Delta\omega \ll \omega$$

con frecuencias próximas y que, para simplificar, hemos supuesto que tienen amplitud igual y real y atenuación nula ($\alpha = 0$).

Suponemos que el medio es poco dispersivo, lo que implica que $\beta(\omega)$ es una función suave y, por tanto, si $\Delta\omega \ll \omega$, $\Delta\beta \ll \beta$.

$$\begin{aligned} X(x) &= X_1 + X_2 = X_0 e^{j(\omega t - \beta x)} [1 + e^{j(\Delta\omega t - \Delta\beta x)}] \\ &= A e^{j[(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t - (\beta + \frac{\Delta\beta}{2})x]} \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}x \right), \quad A = 2X_0 \end{aligned}$$

Para obtener la última expresión se ha sacado factor común $e^{j(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}x)}$.

Por último, despreciando $\Delta\omega$ frente a ω y $\Delta\beta$ frente a β y hallando la parte real

$$X(x)_R \simeq A \cos(\omega t - \beta x) \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}x \right)$$

En la figura 9.10 vemos que la señal resultante contiene un término oscilatorio, cuya frecuencia ω es próxima a la de las señales primitivas, multiplicando a otro que oscila

¹⁰Véase Gómez.

a una frecuencia mucho menor $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega$. Este segundo modula, o envuelve, al primero, como se indica en la figura 9.10.

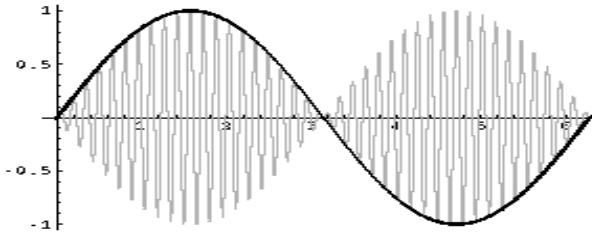


Figura 9.10:

La velocidad con que se desplaza esta envolvente, cuya fase es

$$\varphi_e = \frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}x$$

es

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{\varphi_e=cte} = \frac{\Delta\omega}{\Delta x}, \quad v_g = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (9.67)$$

Ésta es la *velocidad de grupo* v_g .

En la figura 9.11 se muestra la relación geométrica entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo. La curva representa a la relación de dispersión $\omega(\beta)$, la velocidad de fase es la tangente del ángulo formado por el vector de posición de un punto de la curva con el eje β y la velocidad de grupo es la tangente del ángulo que forma la tangente a la curva con el mismo eje.

Relación de estructura.

Si nos limitamos a estudiar las ondas progresivas en el sentido del eje x , tanto \vec{E} como \vec{H} serán de la forma

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-\gamma x} e^{j\omega t} \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{-\gamma x} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (9.68)$$

pero, evidentemente, cualquier pareja de vectores complejos \vec{E} y \vec{H} no constituyen una onda electromagnética puesto que ambos campos deben ser compatibles con las ecuaciones de Maxwell, las cuales imponen ligaduras entre ellos.

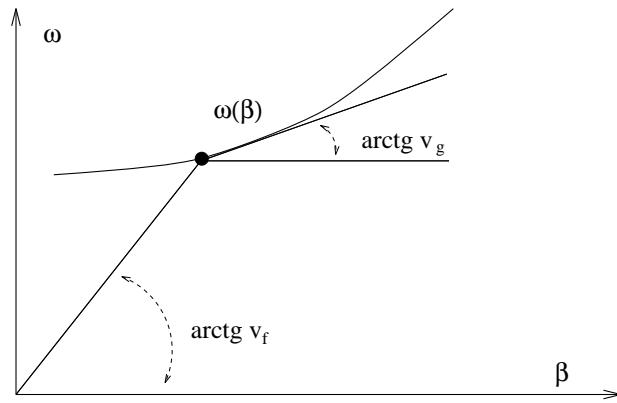


Figura 9.11:

Ya hemos visto que $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$. De 9.68 se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\gamma, \quad \nabla = -\gamma \hat{x}$$

Aplicando esto a

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \hat{x} \wedge \vec{E} = j \frac{\omega \mu}{\gamma} \vec{H}$$

Por otra parte

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \hat{x} \cdot \vec{E} = 0$$

Procediendo como en la sección 4.2.1, para una dirección de propagación arbitraria \vec{n} , $\hat{x} \rightarrow \vec{n}$ y

$$\vec{n} \wedge \vec{E}_0 = Z^c \vec{H}_0 \quad (9.69)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

Esta es la *relación de estructura* para ondas monocromáticas planas, donde

$$Z^c = j \frac{\omega \mu}{\gamma} = \frac{\omega \mu}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta + j\alpha) \quad (9.70)$$

Z^c recibe el nombre de *impedancia* del medio ¹¹.

Para el vacío

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 376,6 \Omega \quad (9.71)$$

En medios materiales, como en el vacío, los vectores \vec{E} , \vec{H} y \vec{n} forman un triángulo rectángulo a derechas, pero dado que las amplitudes de los campos están relacionadas

¹¹También puede expresarse como $Z^c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon^c}}$.

entre sí por medio de una impedancia compleja, éstos no estarán en fase: sus máximos, mínimos y valores nulos, tendrán lugar en distintos instantes para uno y otro campo (figura 9.12).

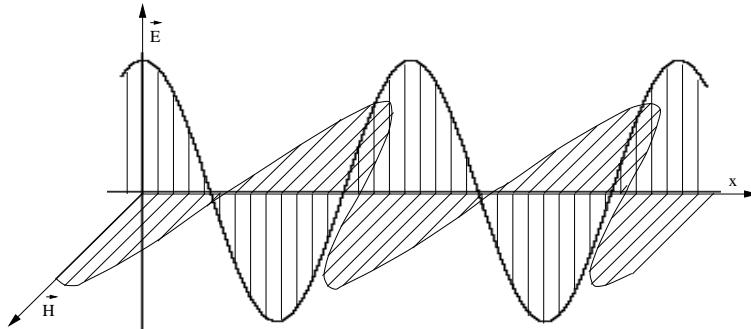


Figura 9.12:

9.3.1.1. Polarización de ondas electromagnéticas

Sea una onda que se propaga en el sentido positivo del eje x . Convendremos en fijar la dirección de polarización, en un frente de onda de coordenada x_0 , según la dirección $\hat{E}(x_0)$ del campo eléctrico. Si $\vec{E}(x_0)$ oscila en una dirección fija a lo largo del tiempo, diremos que la onda está *polarizada linealmente* en dicha dirección. Diremos que la onda está *polarizada a derechas (D)*, si el extremo de $\hat{E}(x_0)$ gira según la regla del tornillo a derechas alrededor de la dirección de propagación, o a izquierdas (*I*) si el sentido de giro es el contrario. En general, la trayectoria del extremo de \vec{E} es una elipse, *polarización elíptica*, y, en particular, puede reducirse a un círculo, *polarización circular*, o una recta.

El campo en x_0 tiene puede expresarse como

$$\begin{aligned}\vec{E}(x_0, t) &= \vec{E}_0 e^{-\alpha x_0} e^{j(\omega t - \beta x_0)} = (A e^{j\varphi_y} \hat{y} + B e^{j\varphi_z} \hat{z}) e^{-(\alpha+j\beta)x_0} e^{j\omega t} \\ &= f(x_0) (A e^{j\omega t} \hat{y} + B e^{j(\omega t + \delta)} \hat{z}).\end{aligned}$$

donde A y B son las amplitudes reales de cada una de las componentes del campo, φ_y y φ_z sus fases, $\delta = \varphi_z - \varphi_y$ y $f(x_0) = e^{-(\alpha+j\beta)x_0} e^{j\varphi_y}$.

Tomando partes reales de $E_y(x_0, t)/f(x_0)$ y $E_z(x_0, t)/f(x_0)$

$$Y = A \cos \omega t$$

$$Z = B \cos (\omega t + \delta)$$

y desarrollando

$$Z = B (\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta)$$

De la expresión de Y tenemos que

$$\cos \omega t = \frac{Y}{A}, \quad \operatorname{sen}(\omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{Y}{A}\right)^2}$$

de donde obtenemos la ecuación general de una elipse

$$\left(\frac{Y}{A}\right)^2 + \left(\frac{Z}{B}\right)^2 - 2\frac{YZ}{AB} \cos \delta = \operatorname{sen}^2 \delta$$

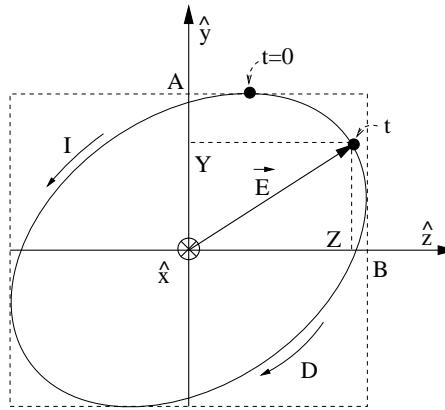


Figura 9.13:

Es fácil comprobar que, si nos limitamos a valores de $|\delta| < \pi$, la dirección de polarización gira en sentido horario, a derechas, si $\delta < 0$ y antihorario, a izquierdas, si $\delta > 0$.

Si $A = 0$, $B = 0$, o $|\delta| = 0, \pi$ la onda está linealmente polarizada. Cuando $|\delta| = \frac{1}{2}\pi$ los ejes de la elipse coinciden con los coordenados y si, además, $A = B$ la polarización es circular¹².

Una onda polarizada elíptica o linealmente puede expresarse en función de ondas polarizadas circularmente¹³.

9.3.1.2. Energía en ondas planas monocromáticas. Vector de Poynting complejo

Para obtener los términos energéticos debemos multiplicar las amplitudes de los campos. Esta es una operación no lineal que, en el caso de ondas monocromáticas, hará aparecer términos oscilantes de frecuencia doble de la original.

Sean dos vectores de la forma

$$\vec{A}(t) = \operatorname{Re}[\vec{A}^c e^{j\omega t}]$$

¹²Véase el ejercicio 9-18.

¹³Véase el ejercicio 9-18.

donde

$$\vec{A}^c = \vec{A}_R + j\vec{A}_I$$

es un vector complejo independiente del tiempo. La composición de dos vectores de este tipo, bien sea por producto escalar o vectorial, será

$$\begin{aligned}\vec{A}_1(t) \times \vec{A}_2(t) &= Re[\vec{A}_1^c e^{j\omega t}] \times Re[\vec{A}_2^c e^{j\omega t}] \\ &= \vec{A}_{1R} \times \vec{A}_{2R} \cos^2 \omega t + \vec{A}_{1I} \times \vec{A}_{2I} \sin^2 \omega t \\ &\quad - \frac{1}{2} (\vec{A}_{1R} \times \vec{A}_{2I} + \vec{A}_{1I} \times \vec{A}_{2E}) \sin 2\omega t\end{aligned}$$

El término proporcional a $\sin 2\omega t$ tiene valor medio nulo, por lo que

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}_1(t) \times \vec{A}_2(t) \rangle &= \frac{1}{2} (\vec{A}_{1R} \times \vec{A}_{2R} + \vec{A}_{1I} \times \vec{A}_{2I}) \\ &= \frac{1}{2} Re[\vec{A}_1^c \times \vec{A}_2^*] = \frac{1}{2} Re[\vec{A}_1^* \times \vec{A}_2^c]\end{aligned}\tag{9.72}$$

donde el superíndice * indica la conjugación compleja y los paréntesis angulares $\langle \rangle$ el promedio sobre un número entero de períodos.

En la práctica, las variaciones temporales rápidas no suelen ser medibles, por lo que el interés se centra en los valores medios. Estos valores medios se obtienen hallando la mitad de la parte real de las magnitudes complejas.

Definiremos las siguientes magnitudes:

- La *densidad de energía compleja*

$$\omega_{em}^c \equiv \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}^* + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}^* = \frac{1}{2} \left(\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2 \right)\tag{9.73}$$

que para los medios de clase A es real, por lo que

$$\langle \omega_{em} \rangle = \frac{1}{4} \left(\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2 \right)\tag{9.74}$$

Haciendo uso de la relación de estructura

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = Z^c \vec{H}$$

podemos comprobar que

$$\langle \omega_{em} \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon |\vec{E}|^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} \right)\tag{9.75}$$

donde se observa que en un medio conductor

$$\frac{\langle \omega_m \rangle}{\langle \omega_e \rangle} = \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} > 1 \Rightarrow \frac{\langle \omega_m \rangle}{\langle \omega_e \rangle} \simeq \frac{1}{Q} \text{ para } Q \ll 1$$

En un dieléctrico ideal $\langle \omega_m \rangle = \langle \omega_e \rangle$. En un conductor la energía magnética almacenada es mayor que la eléctrica, lo que es lógico ya que el medio conductor, aunque no apantalla totalmente al campo eléctrico dinámico, como lo hace el estático, al crecer la conductividad aumenta la importancia relativa de las corrientes de conducción, con respecto a las de desplazamiento, y del campo magnético asociado con respecto al propio campo eléctrico.

- El *vector de Poynting complejo*

$$\vec{\mathcal{P}}^c = \vec{E} \wedge \vec{H}^* \quad (9.76)$$

Operando de forma análoga a la utilizada con la densidad de energía, se tiene que

$$\vec{\mathcal{P}}^c = \frac{Z^c}{|Z^c|^2} |\vec{E}|^2 \vec{n}, \quad \langle \vec{\mathcal{P}} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\text{Re}[Z^c]}{|Z^c|^2} |\vec{E}|^2 \vec{n} \quad (9.77)$$

En lo sucesivo no haremos uso del superíndice c puesto que el contexto determinará si estamos trabajando con variables reales o complejas.

9.4. Problemas

9-1. El espacio comprendido entre dos esferas metálicas concéntricas con el origen, de radios a y b y espesor despreciable, se encuentra lleno de dos dieléctricos de permitividades ϵ_1 y ϵ_2 . El primero ocupa la zona ($a < r < b$, $z > 0$) y el segundo la zona ($a < r < b$, $z < 0$).

- Compruebe que un campo radial es compatible con las condiciones de contorno del problema.
- Halle los campos \vec{E} y \vec{D} en función de la diferencia de potencial $V_0 = V_b - V_a$ aplicada a los conductores.
- Determine la capacidad del condensador.

9-2. Sea un conductor cilíndrico recto, de sección circular, de radio a y conductividad σ , por el que circula una intensidad I uniformemente distribuida. Realice el balance de energía en una parte finita de dicho cilindro.

Solución :

Para hacer el balance de energía, tomaremos una sección de longitud unidad, como se muestra en la figura 9.14. Dado que las magnitudes no varían con el tiempo

$$\frac{d}{dt} \rightarrow 0 \Rightarrow \int_V \sigma E^2 dV + \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = 0$$

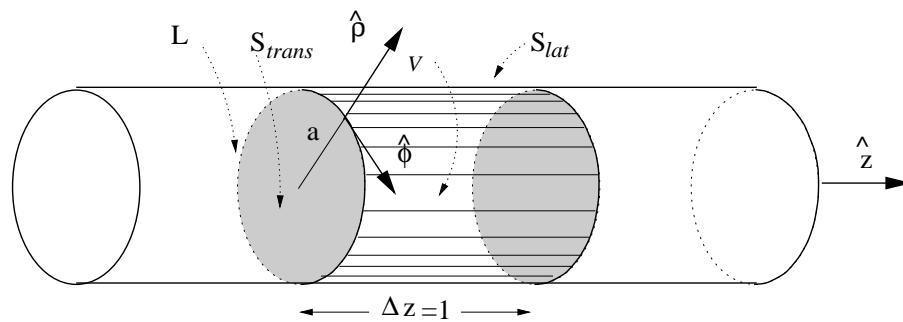


Figura 9.14:

Supuesto que la corriente es estacionaria, ésta se reparte uniformemente en el interior del conductor y el campo eléctrico se deduce de la ley de Ohm:

$$j = \frac{I}{S_{trans}} = \frac{I}{\pi a^2}, \quad \vec{E} = \frac{j}{\sigma} \hat{z}$$

El campo magnético en $\rho = a$, debido a la simetría axial de la densidad de corriente, puede calcularse hallando la circulación del mismo a lo largo del camino L

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi a} \hat{\phi} \Rightarrow \vec{P} = -E H \hat{\rho}$$

Luego el vector de Poynting apunta hacia el interior del volumen V y su flujo a través de las superficies transversales es nulo. Es fácil de comprobar que

$$\int_V \sigma E^2 dV = - \int_{S_{lat}} \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

La energía disipada por efecto Joule se compensa con la que se contabiliza como flujo, desde el exterior de V , del vector de Poynting.

- 9-3. Estime, integrando gráficamente los ciclos de histéresis de la figura 9.15, la perdida de potencia por unidad de volumen debida a la histéresis en estos materiales si la frecuencia a que se recorre el ciclo máximo es de 50 Hz.

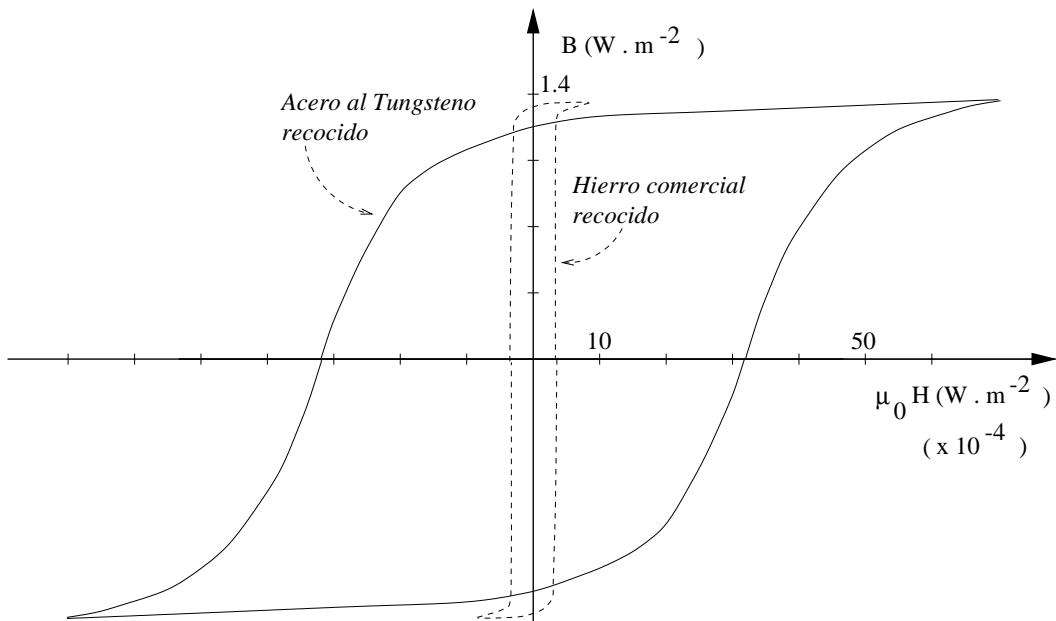


Figura 9.15:

- 9-4. Deduzca las expresiones asignadas en la teoría a $\alpha(\omega)$ y $\beta(\omega)$.
- 9-5. El agua del mar a la frecuencia $f = 4 \times 10^8$ Hz tiene las siguientes características:
 $\sigma = 4.4 S \cdot m^{-1}$; $\epsilon_r = 81$; $\mu = \mu_0$.
- Calcule α y β .
 - Aproxime dichas constantes considerando al medio como buen conductor y compare los valores obtenidos con los del apartado anterior.
 - ¿Y si se toma al agua de mar como buen dieléctrico?
- 9-6. Use el criterio de $Q \leq 0.01$ para que un medio sea buen conductor y tome para la tierra los siguientes valores de las constantes: $\sigma = 5 \times 10^{-3} S \cdot m^{-1}$; $\epsilon_r = 5$; $\mu = \mu_0$.

- a) ¿ Cuál es la máxima frecuencia a la que la tierra es un buen conductor ?
 b) ¿ Cuales son la profundidad de penetración y la longitud de onda a esta frecuencia ?
 c) Halle Z/Z_0 .

9-7. Represente gráficamente, para $Q \in [0.1, 10]$, la razón entre los valores medios de las densidades de energía eléctrica y magnética de una onda plana, homogénea y monocromática, que viaja a través de un medio lineal y no dispersivo.

Solución:

$$\frac{\langle \omega_e \rangle}{\langle \omega_m \rangle} = \frac{\frac{1}{4}\varepsilon |\vec{E}|^2}{\frac{1}{4}\mu |\vec{H}|^2} = \frac{|\mathcal{Z}|^2}{|\mathcal{Z}_{m0}|^2}$$

donde hemos definido $\mathcal{Z}_{m0} \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = (\mathcal{Z})_{\sigma=0}$, con lo que

$$\frac{\langle \omega_e \rangle}{\langle \omega_m \rangle} = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/Q^2}} \simeq \begin{cases} 1 - 1/(2Q^2) & \text{para } Q \gg 1 \\ 1/\sqrt{2} & \text{para } Q = 1 \\ Q & \text{para } Q \ll 1 \end{cases}$$

La gráfica está representada en la figura 9.16

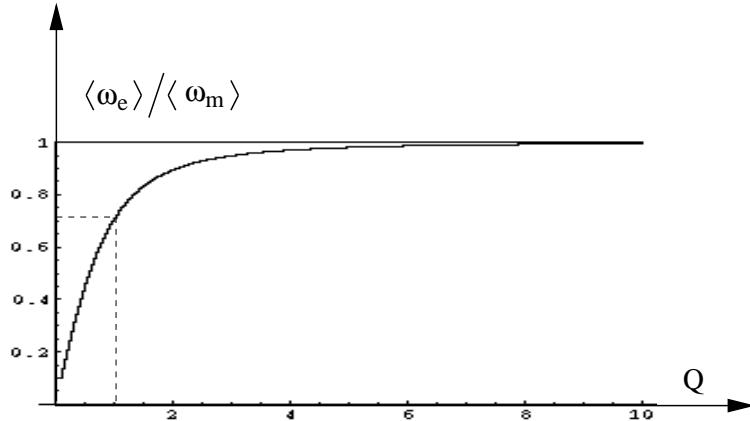


Figura 9.16:

9-8. Determine las pérdidas relativas por Km sufridas por la energía asociada a una onda plana, de frecuencia 0.5 Mhz, que se propaga a través de:

- a) Tierra húmeda ($\sigma = 10^{-3} S \cdot m^{-1}$; $\mu_r = 1$; $\varepsilon_r = 10$).
 b) Tierra seca ($\sigma = 10^{-5}$; $\mu_r = 1$; $\varepsilon_r = 3$).

9-9. Una onda plana y monocromática se propaga en un medio con $\mu = \mu_0$ y $\sigma = 0$. Determine la constante dieléctrica relativa del medio si:

- a) La impedancia característica es de 200Ω .
- b) La longitud de onda es de 1.5 cm para una frecuencia de 10 GHz .

9-10. Suponga que la onda $\vec{E}^i(z, t) = e^{-(z-ct)^2} \hat{x}$ incide normalmente, desde el vacío, sobre un dieléctrico ideal que ocupa el semiespacio $z > 0$. Halle los coeficientes de transmisión y reflexión del campo eléctrico, definidos como

$$\rho = \frac{E_0^r}{E_0^i}, \quad \tau = \frac{E_0^t}{E_0^i}$$

donde E_0^i es la amplitud de la onda incidente, E_0^r la de la reflejada y E_0^t la de la transmitida.

Solución :

En el primer medio, el vacío, la velocidad de propagación de la onda es c , por lo que el campo propuesto es solución de la ecuación de onda en el primer medio. En el segundo, la velocidad de fase es $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}}$. ¹⁴ por lo que la solución debe ser una función $f(z-vt)$. Ensayaremos soluciones del tipo

$$E_2(z, t) = E_0 2 e^{-a^2(z-vt)^2}$$

donde a es una constante que deberemos determinar aplicando las condiciones de contorno.

Si la onda incide sobre el dieléctrico, deben existir, además de la incidente, una onda reflejada y otra transmitida. Teniendo en cuenta que $E_0^i = 1$, la componente del campo eléctrico en el primer medio es

$$E_1(z, t) = E^i(z, t) + E^r(z, t) = e^{-(z-ct)^2} + \rho e^{-(z+ct)^2}$$

El argumento de la onda reflejada lleva un signo + porque ésta viaja en sentido contrario al de la incidente.

En el segundo medio sólo tendremos la onda que viaja en el sentido positivo del eje z puesto que en el enunciado no se indica la presencia, a la derecha del dieléctrico, de un medio que pueda reflejar a la onda transmitida, luego

$$E_2(z, t) = E^t(z, t) = \tau e^{-a^2(z-vt)^2}$$

Dado que el campo eléctrico es tangencial al plano $z = 0$, éste debe ser continuo en dicho plano

¹⁴En los dieléctricos $\mu \simeq \mu_0$.

$$E_1(0, t) = E_2(0, t) \Rightarrow e^{-(ct)^2} (1 + \rho) = \tau e^{-a^2(vt)^2}$$

El cumplimiento de esta igualdad en un instante t arbitrario exige que

$$a = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r}$$

y

$$1 + \rho = \tau \quad (9.78)$$

En un dieléctrico $\epsilon_r > 1$ por lo que el pulso gaussiano es más estrecho en el segundo medio que en el primero. La onda transmitida se propaga a menor velocidad que la incidente, lo que, efectivamente, causa dicho estrechamiento.

La relación de estructura nos permite expresar \vec{B} en función de \vec{E}

$$\vec{B}(z, t) = \frac{1}{v} \vec{n} \wedge \vec{E}$$

siendo $\vec{n} = \hat{z}$ para la onda incidente y para la transmitida, $\vec{n} = -\hat{z}$ para la reflejada y $v = c$ en el primer medio.

Aplicando esta relación resulta que

$$\begin{aligned} B_1(z, t) &= \frac{1}{c} \left(e^{-(z-ct)^2} - \rho e^{-(z+ct)^2} \right) \\ B_2(z, t) &= \frac{1}{v} \tau e^{-\frac{c^2}{v^2}(z-vt)^2} \end{aligned}$$

Repetiendo el procedimiento seguido para el campo eléctrico, y dado que en la superficie de un dieléctrico no existen corrientes superficiales, exigimos la continuidad del campo magnético llegando a la igualdad

$$1 - \rho = \sqrt{\epsilon_r} \tau$$

Los coeficientes se obtienen por eliminación del sistema de ecuaciones compuesto por la anterior y la 9.78

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} , \quad \tau = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_r}}$$

En general, en el dominio del tiempo no puede hablarse de coeficientes de reflexión y transmisión sino, más bien, de operadores de reflexión y transmisión, pero, en el caso de medios no disipativos ni dispersivos, como acaba de mostrarse, la forma de onda no cambia en estos procesos y pueden extenderse a ellos estos conceptos.

- 9-11. Suponga que una onda monocromática incide normalmente desde el vacío hacia un medio dieléctrico. Demuestre que la onda incidente más la reflejada pueden representarse como la suma de una onda estacionaria y otra viajera, bien sea en sentido incidente o reflejado.
- 9-12. Halle los coeficientes de reflexión y transmisión, en la incidencia normal desde el vacío a un dieléctrico, para la densidad de flujo de potencia. Estos coeficientes se definen de la forma

$$R \equiv \frac{\langle \mathcal{P}^r \rangle}{\langle \mathcal{P}^i \rangle}, \quad T \equiv \frac{\langle \mathcal{P}^t \rangle}{\langle \mathcal{P}^i \rangle}$$

siendo $\langle \mathcal{P} \rangle$ el valor medio del vector de Poynting. Compruebe que $R + T = 1$.

- 9-13. Suponga que una onda incide normalmente, desde un medio con impedancia Z_1 hacia otro de impedancia Z_2 .
- Aplique las condiciones de contorno para hallar la onda reflejada y la transmitida
 - Halle la relación entre las potencias medias transmitida y reflejada con respecto a la incidente.
 - Lleve a cabo el balance energético medio en el seno del conductor.
- 9-14. Considere que una onda de frecuencia $f = 1 \text{ GHz}$ incide normalmente, desde el vacío, sobre un medio cuyos parámetros son $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ y $Q = 10^{-4}$. La amplitud del campo incidente es $E_0^i = 1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. La dirección de propagación de esta onda es la x y la de polarización es la y .
- Calcule aproximadamente la densidad superficial de corriente que definiremos, para este caso, como la integral de la densidad de volumen sobre la superficie definida por $(0 \leq x, z_0 \leq z \leq z_0 + 1)$. ¿Bajo qué condiciones es razonable el uso de la densidad superficial?
 - Halle la presión media que la onda electromagnética ejerce sobre la superficie del conductor, supuesto que se dan las condiciones apuntadas anteriormente.
- 9-15. Dos dieléctricos indefinidos, de constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_3 , se hallan separados por una lámina de otro dieléctrico de constante ϵ_2 y cuyo espesor es a .
- Halle las condiciones necesarias para que una onda monocromática de frecuencia f , que incide normalmente desde el primer medio, no sufra reflexión.
 - Aplique los resultados al acoplamiento, a la frecuencia de 1 GHz , entre el aire, primer medio, y un vidrio de $\epsilon_{r3} = 4$.
 - Halle el coeficiente de reflexión total para una frecuencia de $1,1 \text{ GHz}$.

Solución :

(a) - Si se ilumina desde la izquierda, como se indica en la figura 9.17, en el primer medio habrá, en general, una onda incidente y otra reflejada.

Deben buscarse las condiciones bajo las cuales se anula esta última. En la lámina, necesariamente, deben coexistir ambos modos. En el último medio sólo habrá una onda transmitida puesto que, para $z > a$, no existe ninguna discontinuidad que la refleje.

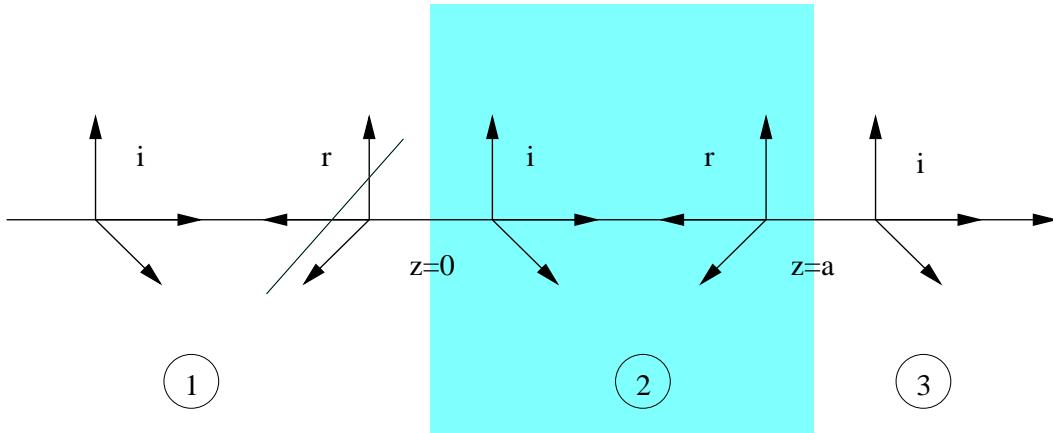


Figura 9.17:

Suponiendo que las ondas están polarizadas en la dirección del eje y , que se propagan en la dirección z y que se ha eliminado a la onda reflejada en el primer medio, los campos serán

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= A_1 e^{-j\beta_1 z} \hat{x} & \vec{H}_1 &= \frac{A_1}{Z_1} e^{-j\beta_1 z} \hat{y} \\ \vec{E}_2 &= (A_2 e^{-j\beta_2 z} + B_2 e^{j\beta_2 z}) \hat{x} & \vec{H}_2 &= \frac{1}{Z_2} (A_2 e^{-j\beta_2 z} - B_2 e^{j\beta_2 z}) \hat{y} \\ \vec{E}_3 &= A_3 e^{-j\beta_3 z} \hat{x} & \vec{H}_3 &= \frac{A_3}{Z_3} e^{-j\beta_3 z} \hat{y}\end{aligned}$$

Estos campos, dado que son tangenciales a las interfaces, deben cumplir las condiciones de continuidad

$$\begin{aligned}&\text{para } z = 0 : \underbrace{(E_1)_{z=0} = (E_2)_{z=0}}_{(A)}, \quad \underbrace{(H_1)_{z=0} = (H_2)_{z=0}}_{(B)} \\ &\text{para } z = a : \underbrace{(E_2)_{z=a} = (E_3)_{z=a}}_{(C)}, \quad \underbrace{(H_2)_{z=a} = (H_3)_{z=a}}_{(D)}\end{aligned}$$

De las condiciones en $z = 0$ se deduce que

$$A_2 = A_1 \frac{Z_1 + Z_2}{2 Z_1}, \quad B_2 = A_1 \frac{Z_1 - Z_2}{2 Z_1}$$

De las condiciones en $z = a$, dividiendo una por otra y eliminando las constantes $A_{2,3}$ y B_2 , se tiene que

$$e^{-2j\beta_2 a} = \frac{(Z_1 - Z_2)(Z_2 + Z_3)}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 - Z_2)} = \text{Número real} \quad (9.79)$$

puesto que las impedancias de los dieléctricos son reales.

En la figura 9.18 se representa en el plano complejo a $e^{-2j\beta_2 a}$ como un vector, de módulo unitario y fase $-2\beta_2 a$, que solo toma los valores reales

$$e^{-2j\beta_2 a} = \begin{cases} +1 & \Rightarrow 2\beta_2 a = 2m\pi, \quad m = 1, 2 \dots \\ -1 & \Rightarrow 2\beta_2 a = (2m+1)\pi, \quad m = 0, 1 \dots \end{cases}$$

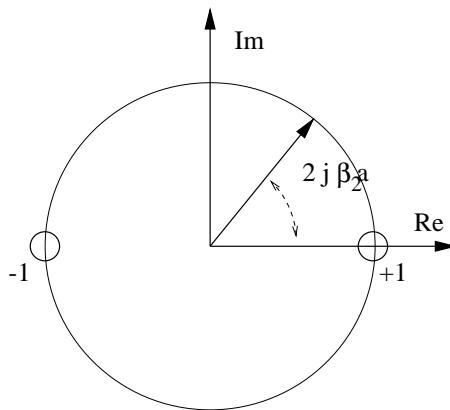


Figura 9.18:

Tomando los primeros valores de m y substituyendo en 9.79, se obtienen las siguientes condiciones:

- Lámina desfasadora de media onda

$$a = \frac{\lambda_2}{2}, \quad Z_1 = Z_3$$

El primer medio y el segundo son iguales. La lámina sólo modifica la fase que tendría la onda si $Z_2 = Z_1 = Z_3$

- Lámina adaptadora de cuarto de onda

$$a = \frac{\lambda_2}{4}, \quad Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$$

Esta lámina acopla dos medios distintos evitando la reflexión. Se utiliza para crear lentes antireflectantes.

El resto de los apartados se dejan como ejercicio.

9-16. Dado un buen dieléctrico, halle una aproximación de α , β , \vec{v}_f y \vec{v}_g .

9-17. En un plasma pueden excitarse ondas planas monocromáticas de diverso tipo, entre ellas las que más abajo se mencionan junto con sus relaciones de dispersión. Represente gráficamente la relación de dispersión y las velocidades de fase y grupo frente al número de onda.

a) *Ondas electrónicas electrostáticas:*

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} \beta^2 v_T^2$$

donde ω_p es la frecuencia propia de oscilación del plasma y v_T la velocidad térmica de los electrones en el mismo.

b) *Ondas acústicas iónicas:*

$$\omega^2 = \beta^2 v_s^2$$

donde v_s es la velocidad del sonido en el plasma.

c) *Ondas electromagnéticas:*

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \beta^2 c^2$$

Solución:

Trataremos la cuestión (c):

Esta relación de dispersión es análoga a la de los modos de propagación en una guía de onda aunque responden a sistemas físicos distintos.

Las definiciones de las velocidades de fase y de grupo son

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}, \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

por lo que

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c \quad \text{para} \quad \omega > \omega_p$$

Si se deriva con respecto a β la relación de dispersión, se tiene que

$$v_f \cdot v_g = c^2 \Rightarrow v_g = \frac{c^2}{v_f} < c \quad \text{para} \quad \omega > \omega_p$$

Como se comprueba en las figuras 9.19, ω_p es una *frecuencia de corte*, a la cual el número de onda β se anula, la longitud de onda se hace infinita, la velocidad de fase toma también valor infinito y la de grupo se hace cero. Por debajo de dicha frecuencia todos los parámetros de propagación se hacen imaginarios, como puede comprobarse de las relaciones obtenidas, y la onda deja de propagarse (se dice que está en corte).

En 9.19-a puede verse la relación geométrica entre las velocidades en cuestión y la relación de dispersión y como, para $\omega \gg \omega_p$, estas velocidades tienden a c , lo que significa que la onda se propaga como en el vacío y que el plasma no interviene en este proceso. Esto se debe a que, a dichas frecuencias, la inercia de los componentes del plasma dificulta la aceleración de los mismos y, por lo tanto, hace que su respuesta sea despreciable.

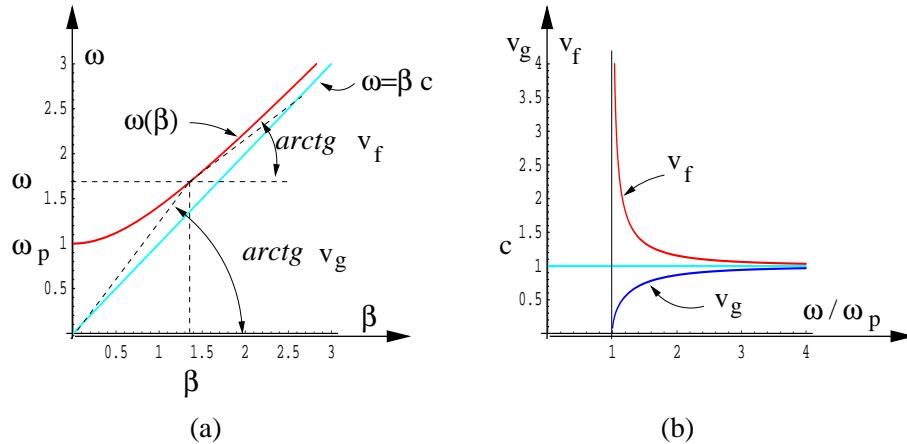


Figura 9.19:

9-18. Considere las siguientes cuestiones.

- Demuestre que una onda polarizada elípticamente puede descomponerse en dos ondas polarizadas circularmente, una a derechas y otra a izquierdas. Para simplificar, elija por ejes coordenados y y z a los principales de la elipse.
- Haga uso de un programa Mathematica para mostrar gráficamente que si $(\delta < 0, |\delta| < \pi)$ la polarización es a derechas y que si $(\delta > 0, |\delta| < \pi)$ ésta es a izquierdas y que la polarización es circular para $A = B$, $\delta = (m + 1)\frac{\pi}{2}$, $m = 0, 1, \dots$, y lineal para $\delta = m\frac{\pi}{2}$, $m = 0, 1, \dots$.

Solución :

- Partimos de la onda polarizada elípticamente, con ejes principales en la direcciones y y z

$$\vec{E}(x = 0, t) = A \cos \omega t \hat{y} + B \sin \omega t \hat{z}$$

a la que sumaremos y restaremos

$$\vec{E}' = \frac{1}{2} (B \cos \omega t \hat{y} + A \sin \omega t \hat{z})$$

El resultado puede escribirse de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_D + \vec{E}_I$$

donde

$$\vec{E}_D = \frac{1}{2} (A + B) (\cos \omega t \hat{y} + \sin \omega t \hat{z}) = \frac{1}{2} (A + B) \left(\cos \omega t \hat{y} + \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \hat{z} \right)$$

$$\vec{E}_I = \frac{1}{2} (A - B) (\cos \omega t \hat{y} - \sin \omega t \hat{z}) = \frac{1}{2} (A - B) \left(\cos \omega t \hat{y} + \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \hat{z} \right)$$

\vec{E}_D corresponde a una onda polarizada circularmente a derechas porque su componente z está retrasada con respecto a la y en $\frac{\pi}{2}$. \vec{E}_I será, pués, una onda circularmente polarizada a izquierdas.

Si, en particular, la onda está polarizada linealmente en la dirección del eje y , es decir, $B = 0$, tendremos que

$$\vec{E}_D = \frac{1}{2} A (\cos \omega t \hat{y} + \sin \omega t \hat{z})$$

$$\vec{E}_I = \frac{1}{2} A (\cos \omega t \hat{y} - \sin \omega t \hat{z})$$

por lo que las dos componentes circulares tendrán la misma amplitud.

b) Gráfico Mathematica *polarizacion – ondas.nb*:

Este programa dibuja La evolución del extremo de \vec{E} a lo largo de un ciclo incompleto y un punto rojo que marca la posición de éste en $t = 0$. De esta forma, podremos determinar, en función de las amplitudes y del desfase, el tipo de polarización y, en particular, el sentido de la misma.

$$\mathbf{A} = 1; \mathbf{B} = 1; \mathbf{d} = 1.5 \frac{\pi}{2};$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \operatorname{Cos}[\mathbf{x}]; \mathbf{z} = \mathbf{B} \operatorname{Cos}[\mathbf{x} + \mathbf{d}];$$

$$\text{puntoinicial} = \{\operatorname{Point}[\{\mathbf{z}/.\mathbf{x} \rightarrow 0, \mathbf{y}/.\mathbf{x} \rightarrow 0\}]\};$$

$$\text{gr1} = \operatorname{Show}[\operatorname{Graphics}[\{\operatorname{PointSize}[0.03], \operatorname{RGBColor}[1, 0, 0], \text{puntoinicial}\}], \operatorname{DisplayFunction} \rightarrow \operatorname{Identity}];$$

$$\text{gr2} = \operatorname{ParametricPlot}[\{\mathbf{z}, \mathbf{y}\}, \{\mathbf{x}, 0, 3.5 \frac{\pi}{2}\}, \operatorname{DisplayFunction} \rightarrow \operatorname{Identity}, \operatorname{AxesLabel} \rightarrow \{"z", "y"\}, \operatorname{PlotStyle} \rightarrow \operatorname{RGBColor}[0, 0, 1]]; \\$$

$$\operatorname{Show}[\text{gr2}, \text{gr1}, \operatorname{DisplayFunction} \rightarrow \$\operatorname{DisplayFunction}, \operatorname{AspectRatio} \rightarrow 1];$$

El resultado se muestra en la figura 9.20

- 9-19. En un plasma magnetizado por un campo uniforme pueden propagarse, en la dirección de dicho campo, ondas polarizadas circularmente. Las polarizadas a derechas (ondas R)¹⁵ tienen un número de onda

¹⁵En este caso utilizamos la notación usual en física de plasmas, R (Right) para D y L (Left) para I .

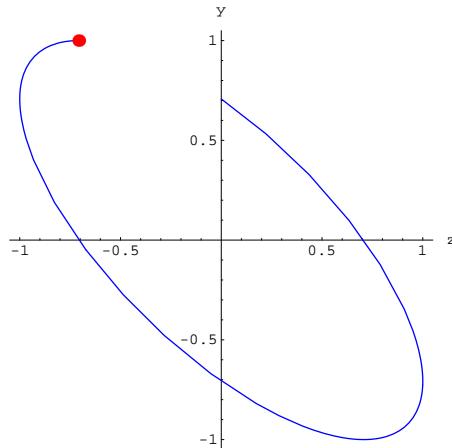


Figura 9.20:

$$\beta_R = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\Omega}{\omega}}}$$

y las polarizadas a izquierdas (ondas L)

$$\beta_L = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 + \frac{\Omega}{\omega}}}$$

donde Ω es la frecuencia ciclotrónica de los electrones y ω_p la frecuencia de plasma.

Halle la ley de rotación, de Faraday, del plano de polarización, el formado por el campo eléctrico y la dirección de propagación, de una onda monocromática plana y linealmente polarizada que se propaga a lo largo del campo magnético.

Suponga que el vector eléctrico está polarizado en la dirección x en el plano $z = 0$.

Solución :

Suponga que la onda, de acuerdo con la figura 9.21-a, se propaga en la dirección del eje z y, en el plano $z = 0$, está polarizada linealmente en la dirección del eje x .

$$\vec{E}(0, t) = A \cos \omega t \hat{x}$$

Debemos determinar, cómo nos pide el enunciado, la función $\phi_F(z)$ que describe la rotación del plano de polarización. Para ello, de acuerdo con el problema 9-18, descompongamos la onda en dos polarizadas circularmente.

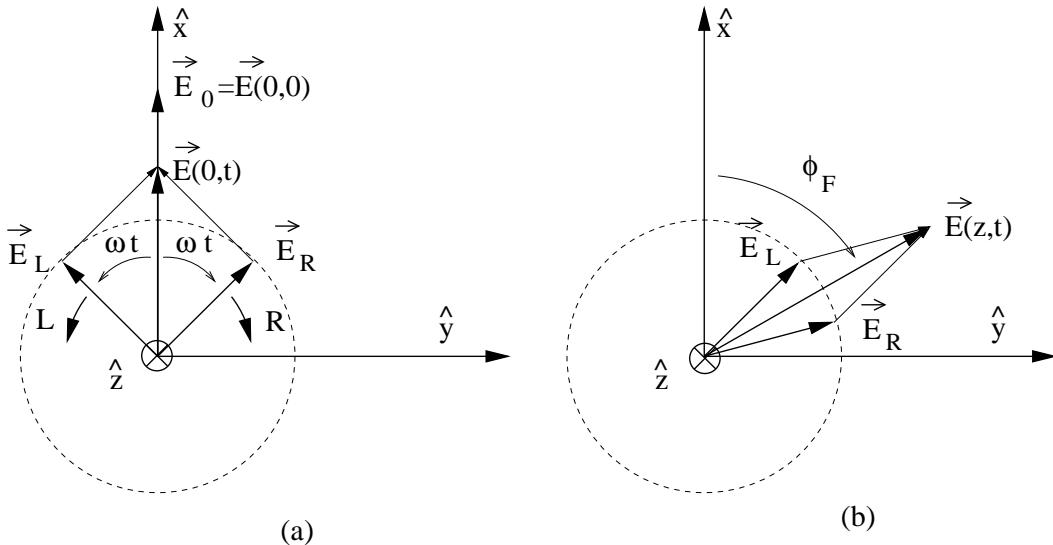


Figura 9.21:

$$\vec{E}_R(0, t) = \frac{1}{2} A (\cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y})$$

$$\vec{E}_L(0, t) = \frac{1}{2} A (\cos \omega t \hat{x} - \sin \omega t \hat{y})$$

De acuerdo con el enunciado, cada uno de estos modos circulares se propaga con distinto número de onda, β_R y β_L o, lo que es lo mismo, con distintas velocidades de fase $v_R = \frac{\omega}{\beta_R}$ y $v_L = \frac{\omega}{\beta_L}$, por lo que para $z \neq 0$ el argumento ωt debe ser substituido por $\omega t - \beta z$, con lo que el campo total puede escribirse de la forma

$$\vec{E}(z, t) = \frac{A}{2} (\cos \alpha_R + \cos \alpha_L) \hat{x} + \frac{A}{2} (\sin \alpha_R - \sin \alpha_L) \hat{y}$$

donde

$$\alpha_R = \omega t - \beta_R z \quad , \quad \alpha_L = \omega t - \beta_L z$$

El ángulo que $\vec{E}(z, t)$ forma con el eje x será, figura 9.21b¹⁶

$$\begin{aligned}\phi_F &= \operatorname{arctg} \left(\frac{E_y}{E_x} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \alpha_R - \sin \alpha_L}{\cos \alpha_R + \cos \alpha_L} \right) = \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_R - \alpha_L}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_R - \alpha_L) = \frac{1}{2} (\beta_L - \beta_R) z = C_F z\end{aligned}$$

Se llega a la conclusión de que el ángulo girado, el de rotación de Faraday $\Phi_F(z)$, es independiente del tiempo y proporcional a la distancia

¹⁶ Consulte las tablas de fórmulas.

z recorrida. La onda sigue estando linealmente polarizada pero con el plano de polarización rotado con respecto al que tenía en el origen.

Apéndice A

Resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace

A.1. Introducción

Este capítulo trata de la solución de las ecuaciones de Poisson y Laplace con diversas técnicas. Sus contenidos pueden abordarse desde cualquier punto de este texto, en particular, parte del mismo puede estudiarse una vez introducidas dichas ecuaciones en los primeros capítulos.

A.2. Solución analítica de la ecuación de Poisson

A.2.1. Ejemplos del uso de las ecuaciones de Poisson y Laplace

Ya vimos que los campos \vec{F} que son irrotacionales en una cierta región del espacio, cumplen en ella una ecuación de tipo Poisson.

Si en \mathcal{V}

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \mathcal{D}(\vec{r}) \\ \nabla \wedge \vec{F}(\vec{r}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla f(\vec{r})$$

y

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = -\mathcal{D}(\vec{r}) \quad (\text{A.1})$$

La ecuación homogénea, ecuación de Laplace

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = 0 \quad (\text{A.2})$$

que será válida en regiones donde \vec{F} sea solenoideal.

El problema que se plantea es la búsqueda de la solución de estas ecuaciones en un cierto volumen y bajo unas ciertas condiciones de contorno. Se ha visto que las condiciones de Dirichlet, o las mixtas, en las cuales se fija el valor de f en al menos parte de la superficie del contorno, aseguran la unicidad del potencial, mientras que las condiciones de Neumann, en las que se fija solamente la componente normal del campo F_n , implican la unicidad de este último.

La resolución de la ecuación de Poisson puede llevarse a cabo sumando a la solución general de la ecuación de Laplace una solución particular de la de Poisson y ajustando los coeficientes de esta suma para cumplimentar las condiciones de contorno.

Muchos problemas importantes de campos electrostáticos, campos magnetostáticos y corrientes estacionarias responden a este tipo de ecuaciones.

Para medios no conductores de clase A , el campo electrostático cumple las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r}) \\ \nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

y

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r}) \quad (\text{A.3})$$

En condiciones estáticas y ausencia de corrientes de conducción, el campo \vec{H} cumple

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = \rho_M(\vec{r}) \\ \nabla \wedge \vec{H}(\vec{r}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

y

$$\nabla^2 U(\vec{r}) = -\rho_M(\vec{r}) \quad (\text{A.4})$$

Para corrientes estacionarias, supuesta la presencia de campos electromotores conocidos \vec{E}'

$$\left. \begin{array}{l} \vec{j} = \sigma \vec{E}_T = \sigma (\vec{E} + \vec{E}') , \quad \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{E}'(\vec{r}) \\ \nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

y

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{E}'(\vec{r}) \quad (\text{A.5})$$

En este planteamiento del problema $\frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r})$, $\rho_M(\vec{r})$ y $\nabla \cdot \vec{E}'(\vec{r})$ se suponen conocidos y fijos en todo el volumen \mathcal{V} dentro del cual queremos hallar la solución.

A.2.2. Principio de superposición

En algunos casos es útil el uso del principio de superposición que se deduce de la linealidad de la ecuación de Poisson.

Si $f_i(\vec{r})$ es una solución de la ecuación

$$\nabla^2 f_i(\vec{r}) = -\mathcal{D}_i(\vec{r})$$

que cumple una de las condiciones de contorno

$$[f_i]_{\mathcal{S}} = f_{i\mathcal{S}} \quad \text{ó} \quad \left[\frac{\partial f_i}{\partial n} \right]_{\mathcal{S}} = -F_{in\mathcal{S}}$$

entonces

$$f = \sum_{i=1}^N \lambda_i f_i$$

es una solución de $\nabla^2 f = -\mathcal{D}$, donde

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathcal{D}_i$$

con la condición de contorno

$$f_S = \sum_{i=1}^N \lambda_i f_{iS} \quad \text{ó} \quad F_{nS} = \sum_{i=1}^N \lambda_i F_{inS}$$

lo que puede comprobarse por simple substitución.

Esto permite, a veces, descomponer un problema complejo en otros más sencillos, como ilustraremos más adelante.

A.2.3. Expresión integral de la ecuación de Poisson

Antes de exponer el método de Green de solución de la ecuación de Poisson veremos como ésta puede ser puesta en forma integral. Para ello haremos uso de las identidades de Green.

Identidades de Green :

Si h y g son dos funciones definidas en \mathcal{V} . Por el teorema de la divergencia

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (h \nabla g) dv = \oint_{\mathcal{S}} h \nabla g \cdot \vec{n} ds$$

Desarrollando la divergencia y escribiendo la derivada direccional de la forma $\nabla g \cdot \vec{n} \equiv \frac{\partial g}{\partial n}$

$$\int_{\mathcal{V}} (h \nabla^2 g + \nabla h \cdot \nabla g) dv = \oint_{\mathcal{S}} h \frac{\partial g}{\partial n} ds \quad (\text{A.6})$$

que es la *primera identidad de Green*.

Cambiando $g \leftrightarrow h$ y restando, obtenemos

$$\int_{\mathcal{V}} (h \nabla^2 g - g \nabla^2 h) dv = \oint_{\mathcal{S}} (h \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial h}{\partial n}) ds \quad (\text{A.7})$$

la cual es la *segunda identidad de Green*.

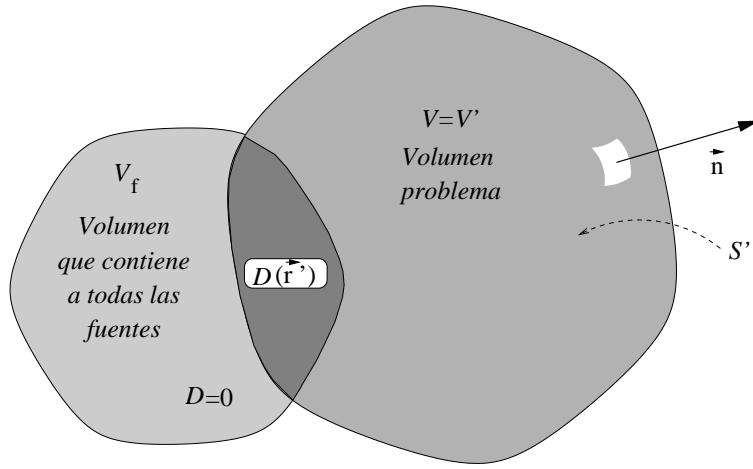


Figura A.1:

Expresión integral de la ecuación de Poisson :

Para obtener una ecuación integral que nos exprese el valor del potencial $f(\vec{r})$ en un punto $\vec{r} \in \mathcal{V}$, integraremos A.7 sobre un $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$ que no tiene por qué incluir a todas las fuentes y haremos $g = f(\vec{r}')$ y $h = \frac{1}{R}$. Reordenando los términos

$$\underbrace{- \int_{\mathcal{V}'} f(\vec{r}') \nabla'^2 \left(\frac{1}{R} \right) dv'}_{(A)} = \underbrace{- \int_{\mathcal{V}'} \frac{1}{R} \nabla'^2 f(\vec{r}') dv'}_{(B)} + \underbrace{\int_{S'} \frac{1}{R} \nabla' f(\vec{r}') \cdot \vec{n}' ds'}_{(C)} - \underbrace{\int_{S'} f(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \vec{n}' ds'}_{(D)}$$

Puesto que, como ya se ha visto, $\nabla^2 (1/R) = -4\pi\delta(\vec{R})$

$$(A) = 4\pi [f(\vec{r}')]_{\vec{r}'=\vec{r}} = 4\pi f(\vec{r}) \quad \text{para } \vec{r} \in \mathcal{V}$$

Teniendo en cuenta que $\nabla'^2 f(\vec{r}') = -\mathcal{D}(\vec{r}')$, podemos escribir

$$(B) = \int_{\mathcal{V}'} \frac{\mathcal{D}(\vec{r}')}{R} dv'$$

expresión que, multiplicada por $\frac{1}{4\pi}$ y extendiendo \mathcal{V}' a todas las fuentes, nos daría por si sola $f(\vec{r})$. Sin embargo tomaremos \mathcal{V}' como un volumen arbitrario que podrá contener a una parte de las fuentes, a ninguna o todas.

Por último, substituyendo $\nabla' f(\vec{r}') = -\vec{F}(\vec{r}')$ en (C) y $\nabla'(1/R) = \vec{R}/R^3$ en (D), tenemos

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\mathcal{D}(\vec{r}')}{R} dv' - \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left[\frac{f(\vec{r}') (\vec{n}' \cdot \vec{R})}{R^3} + \frac{\vec{F}(\vec{r}') \cdot \vec{n}'}{R} \right] ds' \quad (\text{A.8})$$

Esta ecuación no constituye una solución porque, según hemos visto en la sección 9.1.2.1, no es posible fijar al mismo tiempo el potencial y la componente normal del campo en un mismo punto del contorno.

Claramente los términos (C) y (D) aparecen en compensación de las fuentes no incluidas en \mathcal{V}' y que, por lo tanto, no han sido tenidas en cuenta. (C) tiene la forma de integral de potencial monopolar y (D) de potencial dipolar. Así, pues, las cargas eléctricas o polos magnéticos no tenidos en cuenta al integrar sobre \mathcal{V}' se substituyen por unas distribuciones superficiales de polos y dipolos, eléctricos o magnéticos en su caso, situados en el contorno.

En la solución de la ecuación de Laplace, ya que $\mathcal{D}(\vec{r}') = 0$ en $\vec{r}' \in \mathcal{V}'$, la integral sobre el contorno representa a las fuentes que necesariamente debe haber fuera del volumen problema puesto que dentro de él no las hay. En caso contrario el campo en \mathcal{V}' sería nulo por carecer de fuentes.

A.2.4. Método de Green

Con objeto de introducirnos en el uso del método de Green para resolver ecuaciones diferenciales, ilustraremos su aplicación a la solución del problema de Poisson con condiciones de Dirichlet.

Para ello definiremos como *funciones de Green* a las soluciones generales de las ecuaciones

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{R}) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla'^2 G'(\vec{r}', \vec{r}) = -\delta(\vec{R}) \quad (\text{A.10})$$

donde se ha tenido en cuenta que $\delta(\vec{R}) = \delta(-\vec{R})$.

Como puede verse en A.9, $G(\vec{r}, \vec{r}')$ es el potencial que se mediría en \vec{r} debido a una fuente puntual situada en \vec{r}' ($\frac{q}{\varepsilon} = 1$ en el caso electrostático) ¹.

De la misma forma, $G'(\vec{r}', \vec{r})$ es el potencial que una fuente puntual colocada en \vec{r}' produce en \vec{r} . Una solución particular para A.9 y A.10 es la solución con simetría esférica

$$G_p = \frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi |r - \vec{r}'|} = G'_p$$

Si a esta le añadimos la solución general de la ecuación de Laplace $G_L(\vec{r}, \vec{r}')$, $G'_L(\vec{r}', \vec{r})$ tenemos

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi R} + G_L(\vec{r}, \vec{r}') \\ G'(\vec{r}', \vec{r}) &= \frac{1}{4\pi R} + G'_L(\vec{r}', \vec{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Esta última será la expresión general de la función de Green correspondiente a una fuente puntual en \vec{r}' observada en \vec{r} .

¹Téngase en cuenta que ∇ opera sobre \vec{r} por lo que en esta ecuación $\vec{r}' = c\vec{e}$.

Volviendo a hacer uso de la segunda identidad de Green, con $h = G'(\vec{r}', \vec{r})$ y $g = f(\vec{r}')$ y $\vec{r} \in \mathcal{V}'$

$$f(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}'} G'(\vec{r}', \vec{r}) \mathcal{D}(\vec{r}') dv' + \oint_{\mathcal{S}'} \left[G'(\vec{r}', \vec{r}) \frac{\partial f(\vec{r}')}{\partial n'} - f(\vec{r}') \frac{\partial G'(\vec{r}', \vec{r})}{\partial n'} \right] ds' \quad (\text{A.12})$$

que puede ser convertida en solución para un problema con condiciones de contorno de Dirichlet definiendo la *función de Green para condiciones de Dirichlet* G_D , solución particular que cumple la condición de contorno

$$[G_D(\vec{r}, \vec{r}')]_{\mathcal{S}} = 0 \quad (\text{A.13})$$

es decir eligiendo las constantes indeterminadas de la función de Green de manera que ésta se anule en el contorno.

En este caso, la función de Green es simétrica, como demostraremos más adelante,

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = G'_D(\vec{r}', \vec{r}) = G_D$$

Substituyendo esta función en A.12, obtenemos la solución del potencial en \mathcal{V} que corresponde a la condición de Dirichlet $[f(\vec{r}')]_{\mathcal{S}'} = f_s(\vec{r}')$

$$f(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}'} G'_D \mathcal{D} dv' - \oint_{\mathcal{S}'} f_s \frac{\partial G'_D}{\partial n'} ds' \quad (\text{A.14})$$

que es una verdadera solución del problema de Dirichlet porque, al ser $[G_D]_{\mathcal{S}'} = 0$, nos desaparece la integral asociada a la componente normal del campo. Algo parecido podemos hacer para condiciones de Neumann [Jackson].

Para el potencial electrostático, $f = V$ y $\mathcal{D} = \frac{\rho}{\epsilon}$, luego

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{V}'} G_D \rho dv' - \oint_{\mathcal{S}'} V_s \frac{\partial G_D}{\partial n'} ds' \quad (\text{A.15})$$

Como todos los métodos generales de solución, en casos concretos éste puede presentar dificultades insalvables. La utilidad del método de Green es, sin embargo, considerable.

El problema de Dirichlet en el que se especifican las fuentes $\mathcal{D}(\vec{r}')$ en \mathcal{V}' y se fija el valor $f_s(\vec{r}')$ del potencial en el contorno, se desdobra en dos:

- Busqueda del potencial producido por una fuente puntual unitaria en \mathcal{V}' cuando todos los puntos del contorno están a potencial nulo ².
- Realización de las integrales de A.15 ³.

Por otra parte, es interesante resaltar que una misma función de Green sirve para el cálculo del potencial en un mismo volumen pero con fuentes y condiciones de contorno distintas.

²Este problema es más sencillo que el planteado por un potencial $f_s(\vec{r}')$ arbitrario.

³Como último recurso, estas integrales pueden llevarse a cabo numéricamente.

Para terminar, investigaremos la simetría de G_D . Sean las funciones $G'_D(\vec{r}', \vec{r}_1)$ y $G'_D(\vec{r}', \vec{r}_2)$, las cuales cumplen

$$\left. \begin{aligned} \nabla'^2 G'_D(\vec{r}', \vec{r}_1) &= -\delta(\vec{r}' - \vec{r}_1) \\ \nabla'^2 G'_D(\vec{r}', \vec{r}_2) &= -\delta(\vec{r}' - \vec{r}_2) \end{aligned} \right\} [G'_D]_{S'} = 0$$

Substituyendo $h = G'_D(\vec{r}', \vec{r}_1)$ y $g = G'_D(\vec{r}', \vec{r}_2)$ en la segunda identidad encontramos que, efectivamente, es simétrica.

$$G'_D(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = G'_D(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

A.2.5. Método de las imágenes

El método de las imágenes se basa en el Teorema de Unicidad, según el cual, si una función f es solución de la ecuación de Poisson $\nabla^2 f = -\mathcal{D}$ en todo el volumen problema y cumple condiciones de contorno adecuadas, ésta f es la única solución de nuestro problema. Aunque no es un método general, es aplicable a una serie de problemas de singular importancia, no sólo en el caso de campos estáticos, lo que justifica su interés. En particular, permitirá el cálculo sencillo de la función de Green para geometrías simples.

Esencialmente, la solución del problema de contorno se consigue substituyendo dicho contorno por un espacio imagen, constituido por medios y fuentes imagen y situados en el exterior del volumen de interés, o volumen problema, de forma tal que sigan cumpliéndose las condiciones de contorno impuestas y que en el interior no se alteren las fuentes \mathcal{D} especificadas.

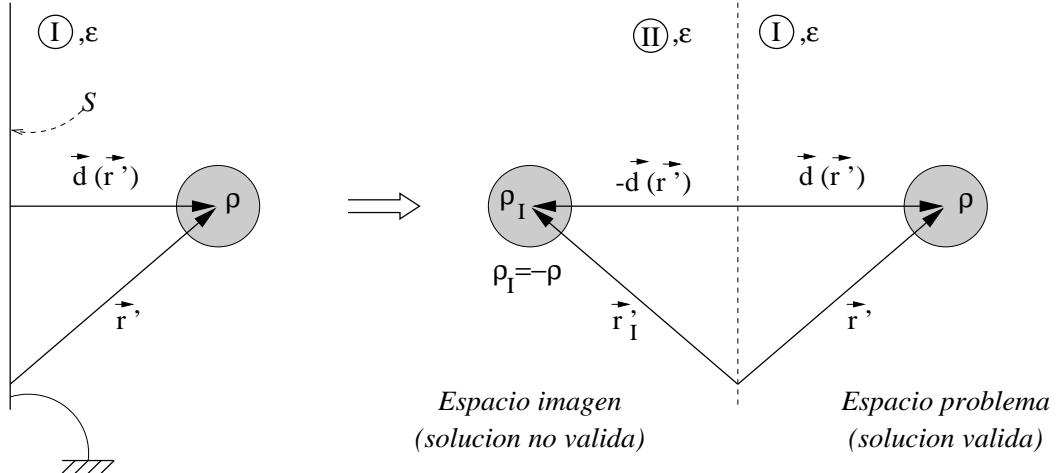


Figura A.2:

En la figura A.2 se presenta un caso simple consistente en un sistema de cargas $\rho(\vec{r}')$ frente a un plano conductor a potencial nulo.

El volumen de interés es el semiespacio a la derecha del plano conductor y el contorno del problema es la superficie S . Las condiciones que se cumplen en este problema son

de tipo Dirichlet. En el semiespacio de la izquierda no se han especificado ni los medios ni las fuentes, lo que no nos permite decir nada acerca del potencial existente en dicha región. Si nosotros nos figuramos ahora a este semiespacio como lleno de un medio con constante ε y con una distribución de cargas de signo contrario a las especificadas (ρ_I es la imagen especular de ρ)

$$\rho(\vec{d}) = -\rho_I(-\vec{d}) \quad , \quad \varepsilon_I = \varepsilon$$

por simetría, el potencial $V_S = 0$ y, puesto que no hemos alterado la región (I) ni el potencial de su contorno, el campo producido en esta nueva situación es el mismo que existía en el problema primitivo en dicha región. La solución obtenida no es válida para la región (II) puesto que en ella hemos fijado arbitrariamente los medios y las fuentes.

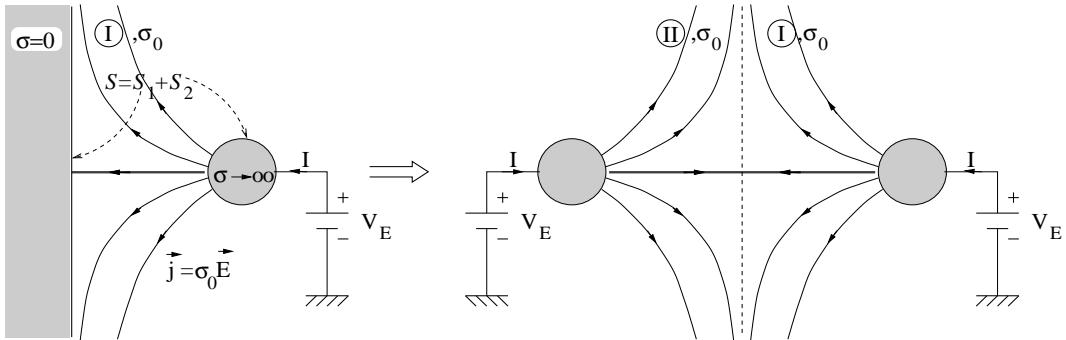


Figura A.3:

En la figura A.3 se plantea un problema típico de electrodos en medios de conductividad finita. En este caso, un electrodo (conductor ideal con $\sigma \rightarrow \infty$) inyecta una intensidad I a un medio de conductividad finita σ_0 , separado por un plano del medio de la izquierda, que es no conductor ($\sigma = 0$). Resolvemos el problema en el medio de conductividad finita, cuyo contorno es $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$, donde \mathcal{S}_1 es la interfaz con el medio no conductor y \mathcal{S}_2 la superficie del electrodo. Dado que la corriente no fluye en el medio no conductor, en \mathcal{S}_1 puede imponerse la condición de tipo Neumann $(E_n = 0)_{\mathcal{S}_1}$. El electrodo es equipotencial, por lo que en su superficie puede imponerse la condición de tipo Dirichlet $(V)_{\mathcal{S}_2} = V_E$, con lo que, en conjunto, las condiciones son mixtas.

El espacio imagen estaría constituido por un electrodo simétrico con respecto a \mathcal{S}_1 inmerso en un medio de la misma conductividad σ_0 .

Algo parecido, figura A.4, podemos hacer con sistemas de corrientes frente a materiales magnéticos ideales. En virtud de la ley de refracción, las líneas de campo serán perpendiculares a la superficie externa \mathcal{S}_1 del medio. Por lo tanto, el potencial magnético $U_{\mathcal{S}_1} = cte$ y puede tomarse como nulo. El espacio imagen estaría constituido por un medio de permeabilidad μ_0 y una espira simétrica de la primitiva con respecto a \mathcal{S}_1 , pero recorrida en sentido contrario.

No abordaremos el tema en extenso [Lorrain y Corson, Reitz et al., Jackson]; nos limitaremos a describir la aplicación del método al cálculo del potencial electrostático producido por cargas en presencia de superficies conductoras.

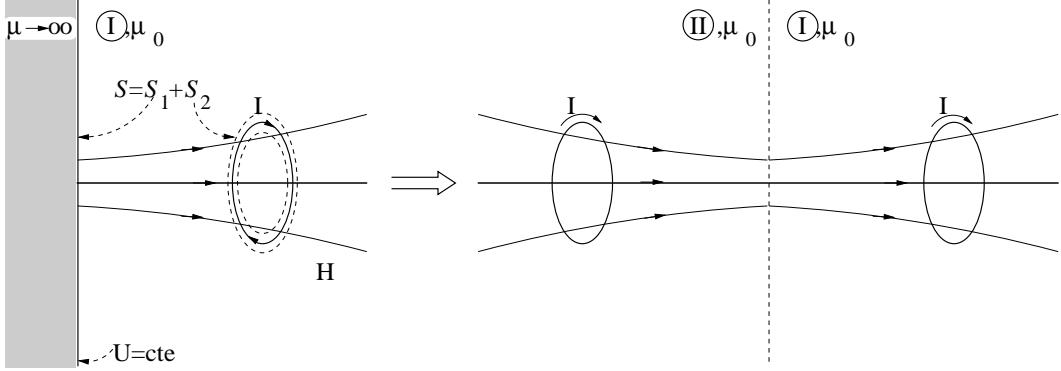


Figura A.4:

A.2.5.1. Imágenes sobre un plano conductor; función de Green

Consideremos a una carga puntual situada en el punto $(d, 0, 0)$ frente al plano conductor $x = 0$ que está a potencial nulo.

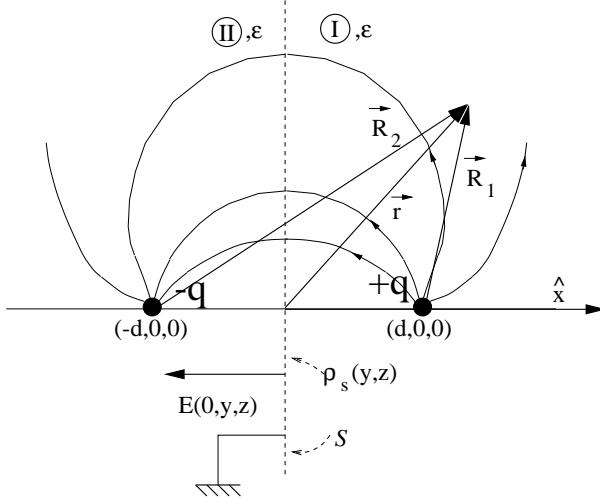


Figura A.5:

La carga q atraerá, por influencia, cargas de signo contrario estableciendo en \mathcal{S} una densidad de carga $\rho_s(y, z)$ que apantalla al campo dentro del conductor.

$$\rho(y, z) = \epsilon \vec{E}(0, y, z) \cdot \vec{n}$$

Según vemos en la figura A.5, para la región (I) tendremos un campo que será el resultado de superponer el coulombiano de q con el de su imagen $-q$.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\vec{R}_1}{R_1^3} - \frac{\vec{R}_2}{R_2^3} \right) , \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

donde

$$\vec{R}_1 = (x - d, y, z) , \quad \vec{R}_2 = (x + d, y, z)$$

La fuerza que la carga ejerce sobre el plano, o la que el plano ejerce sobre el conductor, será la de atracción entre q y su imagen.

$$\vec{F} = q \vec{E}_{-q} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{(2d)^2} \hat{x}$$

Es interesante resaltar que el trabajo necesario para traer a la carga q desde el infinito a su posición final no puede obtenerse como producto de dicha carga por el potencial $V_{-q}(\vec{d})$ que produce la imagen en d porque al mover q se mueve también su imagen.

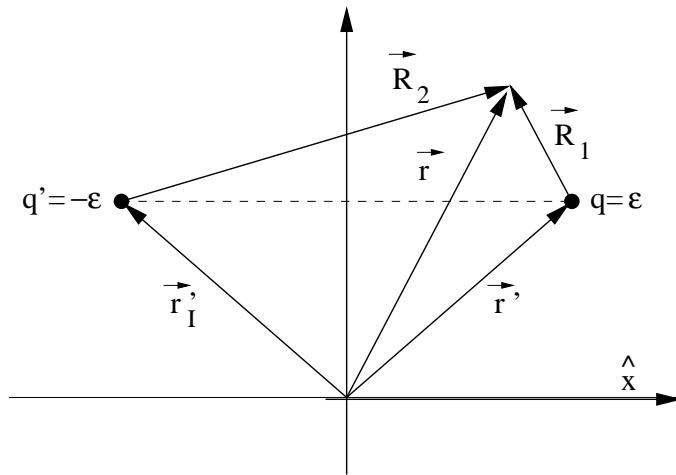


Figura A.6:

Para obtener la función de Green $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = G'_D(\vec{r}', \vec{r})$ colocaríamos una carga $q = \varepsilon$ en \vec{r}' y calcularíamos el potencial en \vec{r} . Si, como se muestra en la figura A.6, colocamos al plano en el plano yz y la carga a una distancia x del mismo

$$\vec{r} = (x, y, z) , \quad \vec{r}' = (x', y', z') , \quad \vec{R}_1 = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\vec{r}'_I = (-x', y', z') , \quad \vec{R}_1 = \vec{r} - \vec{r}'_I$$

Luego

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_I|} \right)$$

A.2.5.2. Imágenes sobre una esfera

Podemos también demostrar que la imagen de una carga q , frente a una esfera con potencial nulo, es otra carga q' de signo contrario y de distinta magnitud. Si la esfera estuviese a un potencial no nulo, bastaría con hacer uso de una segunda imagen q'' y situársela en el centro de la esfera.

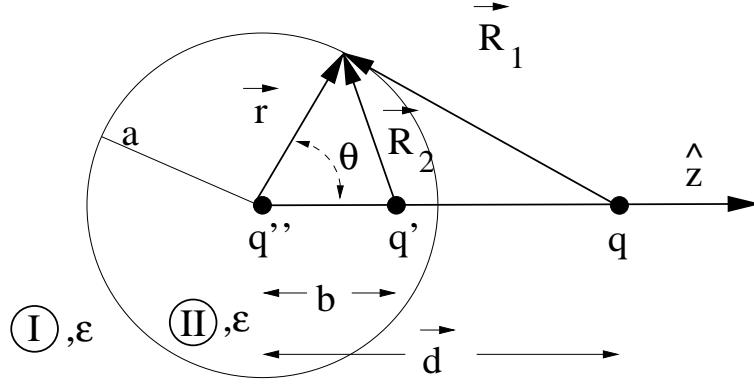


Figura A.7:

Empezaremos considerando el primer caso. Supongamos, figura A.7, un par de cargas q y q' situadas en $z = d$ y $z = b$ respectivamente. El potencial creado en un punto de la esfera será

$$V(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \underbrace{\left(\frac{q}{R_1(a)} + \frac{q'}{R_2(a)} \right)}_A = 0$$

donde $A = 0$ y

$$R_1(a) = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}, \quad R_2(a) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

Elevando (A) al cuadrado y agrupando términos, tenemos que

$$\underbrace{q'^2(a^2 + d^2) - q^2(a^2 + b^2)}_B + 2a \underbrace{(bq^2 - dq'^2)}_C \cos \theta = 0$$

Para que esto sea cierto en toda la superficie de la esfera, es decir, para cualquier θ , será necesario que $B = 0$, $C = 0$. Dado que, para que el potencial de la esfera sea nulo, es preciso que las cargas sean de signo contrario y que la imagen debe estar en el interior de la esfera, $b < a$, los parámetros de la imagen son

$$q' = -q \frac{a}{d}, \quad b = \frac{a^2}{d} \quad (\text{A.16})$$

Estas relaciones siguen siendo válidas si intercambiamos la región (I) por la (II) y q por q' . Es decir, son válidas para cargas q en el interior de una esfera ($d < a$).

Podemos calcular el potencial producido por una carga q frente a una esfera conductora, a potencial V_0 sin más que añadir una carga en el origen de magnitud

$$q'' = V_0 4\pi \varepsilon a, \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{q}{|\vec{r} - d\hat{z}|} + \frac{q'}{|\vec{r} - b\hat{z}|} + \frac{q''}{r} \right) \quad (\text{A.17})$$

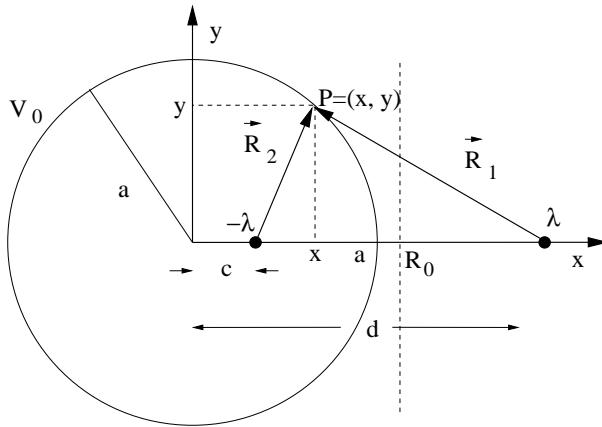


Figura A.8:

A.2.5.3. Imágenes sobre superficies cilíndricas

Por último, investigaremos el potencial creado por una línea cargada uniformemente, con densidad lineal de carga λ , en presencia de un cilindro conductor a potencial V_0 , paralelo a la anterior y de radio a . Suponemos que, como se muestra en la figura A.8, dicha línea se encuentra a una distancia d del centro del cilindro.

Probaremos el uso de una línea imagen con densidad lineal $-\lambda$. Nos planteamos por lo tanto, el cálculo de la distancia c del origen a la que deberá colocarse esta imagen.

Dado que en este caso no es posible tomar como origen de potenciales al infinito, lo tomaremos en una línea equidistante R_0 de la línea y de su imagen. El potencial producido por la línea con carga λ a una distancia R de la misma es

$$V(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln(R_0/R)$$

y, si el potencial del cilindro es V_0 , en cualquier punto de este

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln(R_2/R_1) \quad (\text{A.18})$$

donde

$$R_1 = \sqrt{(d-x)^2 + y^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

por lo que invirtiendo la ecuación y elevándola al cuadrado, tenemos que

$$R_2^2 = A R_1^2, \quad A = e^{4\pi\varepsilon V_0/\lambda}$$

Operando, se obtiene el siguiente resultado

$$x^2 + y^2 + \frac{2x(c - Ad)}{1 - A} = \frac{Ad^2 - c^2}{1 - A}$$

si queremos que la circunferencia esté centrada en el origen, el término proporcional a x debe anularse, luego

$$A = dfcd$$

Teniendo en cuenta este resultado y que el radio de dicha circunferencia es a , tenemos que $A = a^2/d^2$ y

$$c = \frac{a^2}{d} \quad (\text{A.19})$$

Luego, la imagen de la primera línea sobre el cilindro de radio a está situada en c y tiene la misma densidad lineal con signo opuesto.

El potencial del cilindro es V_0 . Paticularizando A.18 al punto $\vec{r} = (a, 0)$ se llega a la conclusión de que

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon} \ln(d/a) \quad (\text{A.20})$$

A.3. Resolución analítica de la ecuación de Laplace; método de separación de variables

A.3.1. Introducción

Aunque la solución analítica completa de la ecuación de Laplace sólo es factible en un número de casos, si es posible la obtención de soluciones generales, en diversos sistemas coordenados, para medios lineales homogéneos e isótropos. Veremos a continuación como pueden llenarse las condiciones de contorno en simetría cartesiana, cilíndrica o esférica, trabajando sobre ejemplos concretos. También apuntaremos brevemente el uso de métodos especiales, como los basados en las variables complejas, para la resolución de problemas bidimensionales.

De nuevo se pretende solamente introducir el tema, por lo que la presentación no será completa ni rigurosa. Tratamientos más amplios pueden encontrarse en prácticamente toda la bibliografía previamente citada y en [Morse y Feshbach, Abramowitz y Stegun, Arfken y Weber, Wylie, Jackson, Panofsky y Phillips, Konopinski, Weisstein, Tijonov].

Para la obtención de soluciones generales haremos uso del método de separación de variables, el cual permite la expresión de dicha solución como producto de funciones de una variable. Se puede demostrar, aunque nosotros no lo haremos, que la solución así obtenida es completa, por lo que la solución particular a cualquier problema físico bien planteado se obtiene dando valores adecuados a las constantes indeterminadas de dicha solución general.

A.3.2. Solución en coordenadas cartesianas

La ecuación

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

admite soluciones del tipo

$$f(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

Substituyendo más arriba, excluyendo la solución trivial $f = 0$ y dividiendo por $f(x, y, z)$, obtenemos

$$\underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{u(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{v(y)} + \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{w(z)} = 0$$

La ecuación anterior puede escribirse como suma de tres funciones, cada una de las cuales depende de una variable independiente distinta. Esto sólo es posible si cada una de ellas es igual a una constante. La suma de estas tres constantes ha de ser igual a cero. Anotaremos estas constantes de la forma $u(x) = -k_x^2$, $v(y) = -k_y^2$, $w(z) = -k_z^2$, con lo que

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (\text{A.21})$$

Esto conduce a las tres ecuaciones unidimensionales de segundo orden

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 X \quad (\text{A.22a})$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 Y \quad (\text{A.22b})$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 Z \quad (\text{A.22c})$$

Así, pues, para cada valor k_x , las soluciones posibles de la ecuación de $X(x)$ tienen la forma

$$X_k(x) = \begin{cases} A_{1k} e^{jk_x x} + A_{2k} e^{-jk_x x} & , \text{ para } k_x^2 > 0 \\ A_1 x + A_2 & , \text{ para } k_x = 0 \\ A_{1k} e^{\kappa_x x} + A_{2k} e^{-\kappa_x x} & , \text{ para } \kappa_x^2 \equiv -k_x^2 > 0 \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Haciendo uso de las relaciones de Euler

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad e^\alpha = \cosh \alpha + \sinh \alpha$$

pueden ponerse las anteriores expresiones en función de senos y cosenos, circulares o hiperbólicos.

La solución general de la ecuación de Laplace será, por lo tanto,

$$f_G = \sum_{\forall k_x, k_y} X_{k_x}(x) Y_{k_y}(y) Z_{k_z}(z), \quad k_z = \sqrt{-k_x^2 - k_y^2} \quad (\text{A.24})$$

Expresión en la que la sumatoria se extiende a todos los valores posibles de k_x, k_y, k_z .

La solución particular de un problema determinado implica el cálculo de las infinitas constantes $A_{1k}, A_{2k}, B_{1k}, B_{2k}, C_{1k}, C_{2k}$, así como el de los posibles valores de k_x, k_y, k_z que son compatibles con las condiciones de contorno establecidas.

Para el cálculo de los coeficientes de la solución general suele ser conveniente el uso de las propiedades de ortogonalidad de los conjuntos de funciones $\{e^{j\alpha}\}$, $\{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, y $\{\cosh \alpha, \sinh \alpha\}$.

A veces es útil el recurso al principio de superposición. Así, pués, el problema de contorno de la figura, en el que las cuatro caras de la caja están a distinto potencial, puede descomponerse en dos problemas equivalentes al que acabamos de describir, según se muestra en la figura A.9,

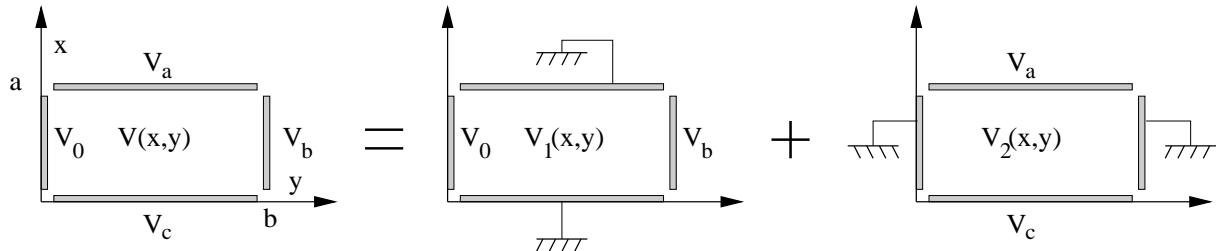


Figura A.9:

A.3.3. Solución en coordenadas cilíndricas

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas toma la forma

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

la cual admite soluciones separables del tipo

$$f(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z)$$

Operando de forma análoga a la utilizada en la sección anterior, obtenemos

$$\frac{1}{R \rho} \frac{d}{d \rho} \left(\rho \frac{d R}{d \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d \varphi^2} + \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{d z^2}}_{w(z)=k^2=-\kappa^2} = 0$$

donde aparece ya separada la función $w(z)$.

La solución $Z(z)$ es, pués, del mismo tipo que en cartesianas⁴

$$Z_k(z) = \begin{cases} C_{1k} e^{kz} + C_{2k} e^{-kz} & , \text{ para } k^2 > 0 \\ C_1 z + C_2 & , \text{ para } k = 0 \\ C_{1k} e^{jkz} + C_{2k} e^{-jkz} & , \text{ para } \kappa^2 \equiv -k^2 > 0 \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

⁴En general, k^2 puede ser complejo.

Si excluimos el origen y multiplicamos por ρ^2

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 + \underbrace{\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}_{v(\varphi)=-n^2} = 0$$

De esta forma separamos la función $v(\varphi)$, por lo que la dependencia según φ puede ser escrita como

$$\Phi_n(\varphi) = B_{1n} \cos n\varphi + B_{2n} \sin n\varphi \quad (\text{A.26})$$

donde n deberá ser entero si el rango de variación de φ cubre todo el intervalo $[0, 2\pi]$ puesto que, para que la solución sea única deberá cumplirse $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$.

En caso contrario son admisibles las soluciones

$$\begin{aligned} \Phi_0(\varphi) &= B_1 \varphi + B_2 & , \quad n = 0 \\ \Phi_\nu(\varphi) &= B_{1\nu} e^{\nu\varphi} + B_{2\nu} e^{-\nu\varphi} & , \quad \nu^2 = -n^2 \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

La ecuación radial resultante ya no es tan simple. Multiplicando por R

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (k^2 \rho^2 - n^2) R = 0$$

Ecuación que para $k = n = 0$ admite la solución sencilla

$$R_{00}(\rho) = A_1 \ln \rho + A_2 \quad , \quad k = n = 0 \quad (\text{A.28})$$

Para $k = 0, n \neq 0$, ensayando soluciones del tipo $R = A \rho^m$, se obtienen dos soluciones independientes para $m = \pm n$

$$R_{0n}(\rho) = A_{1n} \rho^n + A_{2n} \rho^{-n} \quad , \quad k = 0 \quad (\text{A.29})$$

En el caso de que $k \neq 0$, haciendo el cambio de variables $p = k\rho$, la ecuación radial queda de la forma

$$p \frac{d}{dp} \left(p \frac{dR}{dp} \right) + (p^2 - n^2) R = 0 \quad (\text{A.30})$$

que es la *ecuación de Bessel*.

Para k y n reales, admite soluciones polinómicas [Wylie, Arfken y Weber]

$$R_{kn}(p) = R_n(p) = A_{1n} J_n(p) + A_{2n} J_{-n}(p) \quad (\text{A.31})$$

donde $J_n(p)$ y $J_{-n}(p)$ son las *funciones de Bessel* de primera especie y de orden $\pm n$. Estas funciones, que son linealmente independientes para n no entero, se expresan como suma de una serie infinita

$$J_n(p) = \left(\frac{p}{2} \right)^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(i+n+1)} \left(\frac{p}{2} \right)^{2i}$$

donde Γ es la *función gamma*. En el caso en que n es entero $\Gamma(i+n+1) = (n+i)!$, de donde se deduce que

$$J_{-n}(p) = (-1)^n J_n(p)$$

Se hace necesario, en consecuencia, buscar nuevas soluciones linealmente independientes de éstas. Las funciones de Bessel de segunda especie, o *funciones de Neumann*, se definen como

$$N_n(p) = \frac{J_n(p) \cos n\pi - J_{-n}(p)}{\operatorname{sen} n\pi}$$

Puede demostrarse que éstas son independientes de las $J_n(p)$ incluso en el límite $n \rightarrow \text{entero}$.

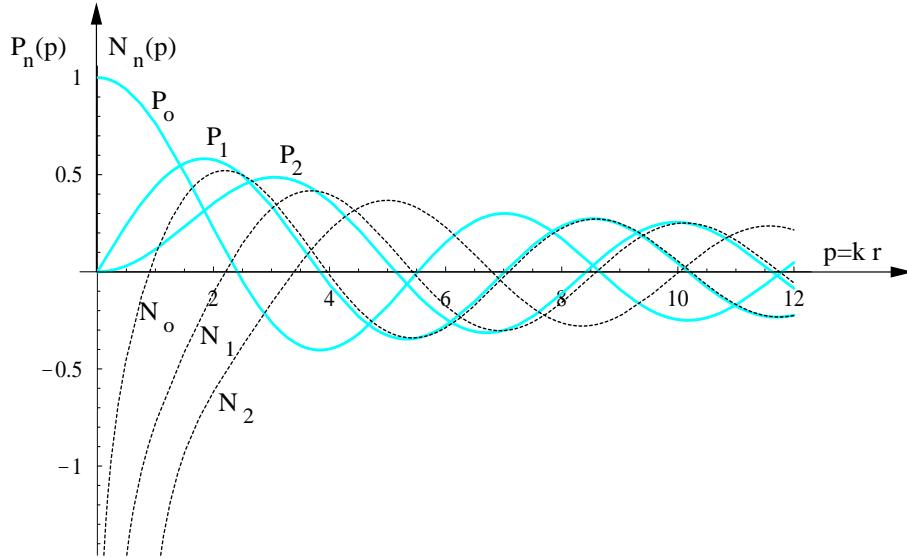


Figura A.10:

Las funciones de Bessel, véase la figura A.10, se califican de *regulares* porque son finitas en el origen

$$\lim_{p \rightarrow 0} J_n(p) \rightarrow \frac{p^n}{2^n n!}$$

mientras que a las de Neumann se les califica de *irregulares* porque son singulares en dicho punto

$$\lim_{p \rightarrow 0} N_0(p) \rightarrow \frac{2}{\pi} \ln p$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} N_{n \geq 1}(p) \rightarrow -\frac{2^n (n-1)!}{\pi p^n}$$

Para valores grandes de p , estas funciones toman los valores asintóticos

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} J_n(p) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \cos \left[p - (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} N_n(p) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \sin \left[p - (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2} \right]$$

Para el estudio de la propagación de ondas es usual la utilización de las *funciones de Hankel* de primera y segunda especie, definidas, respectivamente, como

$$H_n^{(1)}(p) = J_n(p) + j N_n(p)$$

$$H_n^{(2)}(p) = J_n(p) - j N_n(p)$$

de forma que

$$R_n(p) = A H_n^{(1)}(p) + B H_n^{(2)}(p)$$

y que son conjugadas entre sí.

La dependencia de esta función para puntos lejanos es del tipo

$$\lim_{p \rightarrow \infty} H_n(p)^{(1), (2)} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi p}} e^{\pm j [p - (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2}]}$$

Más detalles pueden encontrarse en la bibliografía.

A.3.4. Solución en coordenadas esféricas

La ecuación de Laplace puede escribirse en coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$$

En éste caso ensayamos la separación de variables en la forma

$$f(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$$

Substituyendo y multiplicando por $(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta)/f$, tenemos, excluyendo los puntos para los que $r = 0$, ó $\theta = 0$

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left[\frac{1}{R r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + \underbrace{\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}_{= -n^2} = 0$$

donde nos aparece separada la variable φ de la misma forma que en cilíndricas. Para no recargar la exposición supondremos que el intervalo de φ es $[0, 2\pi]$ y que, por lo tanto n es real y entero.

$$\Phi_n(\varphi) = C_{1n} \cos n\varphi + C_{2n} \operatorname{sen} n\varphi , \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (\text{A.32})$$

La separación de las variables r y θ se logra dividiendo por $\operatorname{sen}^2 \theta$.

$$\underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right)}_{=l(l+1))} + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{n^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} = 0$$

donde, se ha escrito la constante de separación radial como $l(l + 1)$. La ecuación correspondiente toma la forma

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l + 1) R = 0$$

Ensayando soluciones del tipo $f = A r^a$ se obtiene la ecuación $a(a + 1) = l(l + 1)$ cuyas soluciones son $a = l, -(l + 1)$. La función radial es, por lo tanto

$$R_l(r) = A_{1l} r^l + A_{2l} r^{-(l+1)} \quad (\text{A.33})$$

La ecuación polar resultante es

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l + 1) - \frac{n^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right] \Theta = 0$$

que, haciendo el cambio $\xi = \cos \theta$, pone de manifiesto que sus soluciones son función de $\cos \theta$

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right] + \left[l(l + 1) - \frac{n^2}{1 - \xi^2} \right] \Theta = 0 \quad (\text{A.34})$$

Ésta es la ecuación asociada o *generalizada de Legendre*. Admite soluciones polinómicas del tipo

$$\Theta_l^n = B_{1nl} P_l^n(\xi) + B_{2nl} Q_l^n(\xi) \quad (\text{A.35})$$

donde P_l^n y Q_l^n son los *polinomios asociados de Legendre* de primera y segunda especie y de orden (n, l) [Wylie].

Para problemas con simetría azimutal⁵, $f = f(r, \theta)$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$ y $n = 0$. La ecuación generalizada se reduce en este caso a la de *Legendre*

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right] + l(l + 1) \Theta = 0 \quad (\text{A.36})$$

cuyas soluciones $P_l = Q_l = P_l(\xi)$ son polinomiales de orden l , *polinomios de Legendre*.

Efectivamente, substituyendo en la ecuación de Legendre los polinomios

$$P_l(\xi) = \sum_{i=0}^l a_i \xi^i$$

⁵Los problemas propuestos más adelante se limitan a esta simetría.

e igualando a cero los coeficientes de las potencias de ξ , comprobamos que [Wylie]

$$P_l(\xi) = \sum_{i=0}^L \frac{(-1)^i (2l - 2i)!}{2^i i! (l-i)! (l-2i)!} \xi^{l-2i} , \quad \begin{cases} L = \frac{l}{2} & \text{para } l \text{ par} \\ L = \frac{l-1}{2} & \text{para } l \text{ impar} \end{cases}$$

Los primeros polinomios son

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = \xi$$

$$P_2 = \frac{1}{2} (3 \xi^2 - 1) \tag{A.37}$$

$$P_3 = \frac{1}{2} (5 \xi^3 - 3 \xi)$$

$$P_4 = \frac{1}{8} (35 \xi^4 - 30 \xi^2 + 3)$$

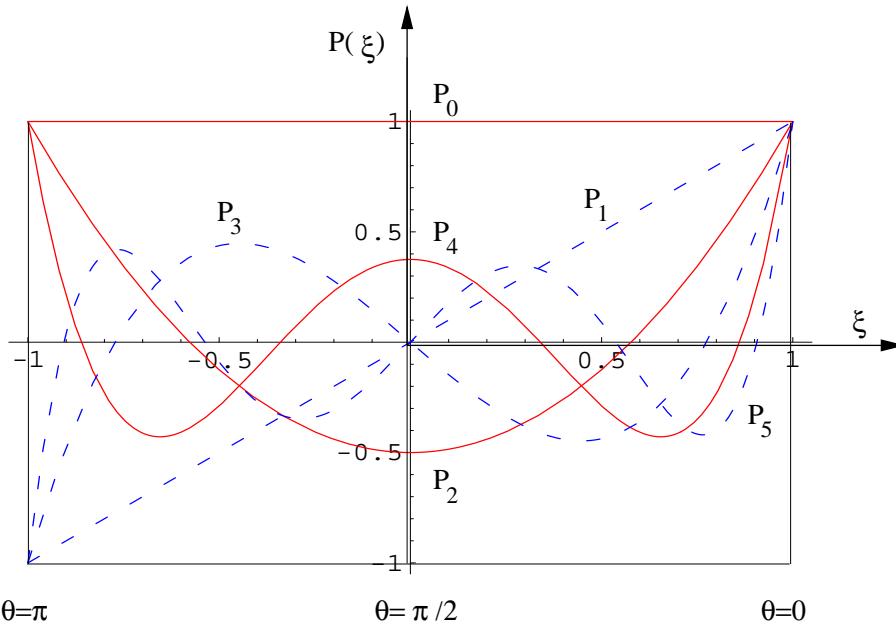


Figura A.11:

De entre las propiedades de estos polinomios resaltaremos sólo las principales:

- En la versión que aquí se presenta, figura A.11, los polinomios se han normalizado de manera que

$$P_l(\xi = 1) = 1 , \forall l$$

- Es fácil comprobar que P_l tiene la misma paridad que el índice

$$P_l(\xi) = (-1)^l P_l(-\xi) \quad (\text{A.38})$$

Como puede verse en la figura A.11

$$P_l(\xi = 0) = 0, \quad l \text{ impar}, \quad P_l(\xi = 0) \neq 0, \quad l \text{ par}$$

- Por inspección puede comprobarse que los polinomios son generados por la fórmula de Rodrigues:

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l \quad (\text{A.39})$$

- Los polinomios así definidos son ortogonales, en el intervalo $\xi \in [-1, +1]$

$$\int_{-1}^{+1} P_{l'} P_l d\xi = \frac{2}{2l + 1} \delta_{ll'} \quad (\text{A.40})$$

La ortogonalidad puede demostrarse multiplicando la ecuación de Legendre por $P_{l'}$ y por P_l sucesivamente, restando e integrando. El valor de la norma puede calcularse haciendo uso de la fórmula de Rodrigues e integrando por partes l veces la integral de más arriba. Para obtener polinomios ortonormales en el intervalo de $\theta \in [0, \pi]$, habría que multiplicar P_l por $\sqrt{\frac{2l+1}{2}}$.

- Para problemas con simetría azimutal, la solución general queda de la forma

$$f(r, \theta) = \sum_0^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\xi) \quad (\text{A.41})$$

A.4. Solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones mediante el uso de transformaciones complejas

Muchos problemas de potencial interesantes pueden aproximarse como uniformes en una dirección determinada, lo que permite resolverlos en el plano transversal a dicha dirección. Existe un cierto número de procedimientos simplificados especialmente indicados para este tipo de problemas. Unos son versiones más simples de métodos aplicables en tres dimensiones y otros tienen un carácter específico para potenciales bidimensionales. No abordaremos en detalle estos métodos de los cuales puede encontrarse cumplida exposición en la bibliografía ⁶.

Como introducción al tema, nos limitaremos a la búsqueda de una expresión específica de la solución general de la ecuación de Laplace en dos dimensiones.

⁶Véase Smythe y Jackson

Sea $f(z)$ una función analítica de la variable compleja z

$$z = x + jy \quad , \quad f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

donde

$$x = Re[z] \quad , \quad y = Im[z]$$

$$u = Re[f] \quad , \quad v = Im[f]$$

Veremos que tanto $u(x, y)$ como $v(x, y)$ son soluciones de la ecuación de Laplace. Efectivamente, figura A.12, al desplazarnos en el plano z desde el punto z al $z + dz$ nos desplazamos en el plano f desde el punto f al $f + df$.

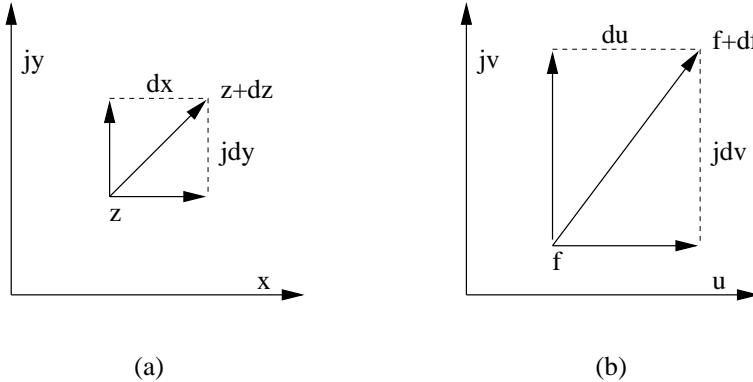


Figura A.12:

La derivada de f con respecto a z es

$$\frac{df}{dz} = \frac{du + jdv}{dx + jdy} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y}\right)jdy}{dx + jdy}$$

y, para una función analítica, por definición, debe ser independiente de la dirección del desplazamiento dz . En particular para

$$dz = dx \Rightarrow \frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.42})$$

y para

$$dz = jdy \Rightarrow \frac{df}{dz} = -j\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{A.43})$$

de forma que, si la derivada ha de ser única, deberán ser iguales las partes reales y las imaginarias de A.42 y de A.43

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A.44})$$

Estas son las ecuaciones de Cauchy-Riemann o condiciones de analiticidad de $f(z)$ de las que es fácil deducir que

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0, \quad \begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ \nabla^2 v = 0 \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

Ecuaciones que muestran como, dada una función analítica arbitraria, tanto su parte real como su parte imaginaria cumplen la ecuación de Laplace, siendo ortogonales entre sí las curvas $u = cte$ y $v = cte$. Esto último significa que si $u(x, y)$ cumple unas condiciones de contorno determinadas, esta función será la solución del problema de potencial, las curvas $u = cte$ serán las equipotenciales y las $v = cte$ las líneas de campo. De esta forma, por tanteo, buscando funciones apropiadas, pueden solucionarse problemas interesantes.

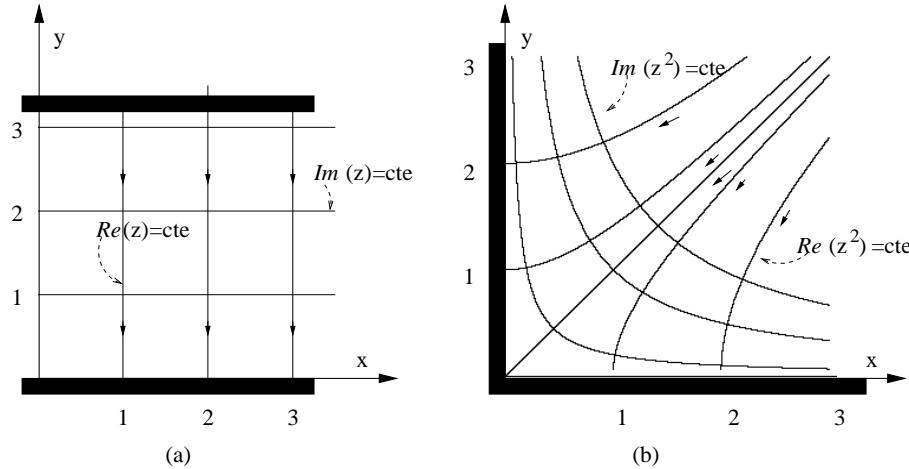


Figura A.13:

Como ejemplo de funciones analíticas simples podemos citar a las potencias de z

$$f_n(z) = z^n = (x + jy)^n = r^n e^{jn\varphi} = r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$$

donde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\varphi = \arg z = \operatorname{artg} \frac{y}{x}$. Recordemos que $r^n \cos n\varphi$ y $r^n \sin n\varphi$ eran posibles soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. La figura A.13-a representa, en el plano (x, y) , las partes real e imaginaria de z y en A.13-b las de z^2 . En ambas figuras se muestra como, por ejemplo, las curvas $Im[f] = cte$ pueden corresponder a las curvas equipotenciales compatibles con los conductores indicados y las $Re[f] = cte$ a las líneas de campo eléctrico.

También es interesante la función

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

que es analítica, salvo en el punto $z = 1$ ($x = 1, y = 0$), y está relacionada con la transformación de impedancias en líneas de transmisión. La representación de las curvas $u = cte$ $v = cte$, para esta función, recibe el nombre de diagrama de Smith, el cual se representa en la figura A.14.

Los puntos donde una función compleja es singular corresponden, consecuentemente, con singularidades del campo.

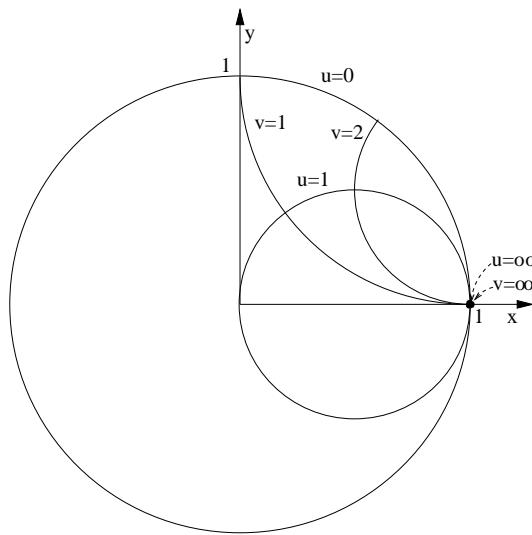


Figura A.14:

A.5. Solución experimental y gráfica de las ecuaciones de Poisson y Laplace

A.5.1. Introducción

Ya hemos visto que sólo en casos muy específicos, cuando la estructura es simple y el grado de simetría alto, es posible encontrar solución analítica de los problemas electromagnéticos. En la práctica es a menudo necesario recurrir a soluciones no analíticas y de precisión diversa. La disponibilidad creciente de medios de cálculo potentes hace que la solución numérica, al ser asequible, adquiera cada vez mayor relevancia⁷.

Los métodos experimentales y gráficos fueron importantes en el pasado en la resolución aproximada de estas ecuaciones. Aunque ésto no es así actualmente, siguen poseyendo un interés didáctico al poner en evidencia la analogía entre distintas aplicaciones de las ecuaciones que nos ocupan.

A.5.2. Métodos experimentales

Experimentalmente pueden determinarse las distribuciones de campo bien sea de forma directa o bien haciendo uso de analogías. No hay que olvidar que no sólo son análogos, en nuestro contexto, los problemas irrotacionales electrostáticos, magnetostáticos y de conducción, sino que existen problemas equivalentes en mecánica de fluidos, calor, gravedad, elasticidad, variables estocásticas, etc., por lo que cualquier problema correspondiente a un cierto tipo de campo y a unas ciertas condiciones de contorno puede

⁷Ya se ha aplicado el cálculo numérico para la solución de algunos problemas y en el apéndice B se estudiarán los fundamentos de los algunos métodos de este tipo que son de uso común en electromagnetismo.

encontrar una analogía, fácilmente modelable y mesurable experimentalmente, en otro tipo de campo.

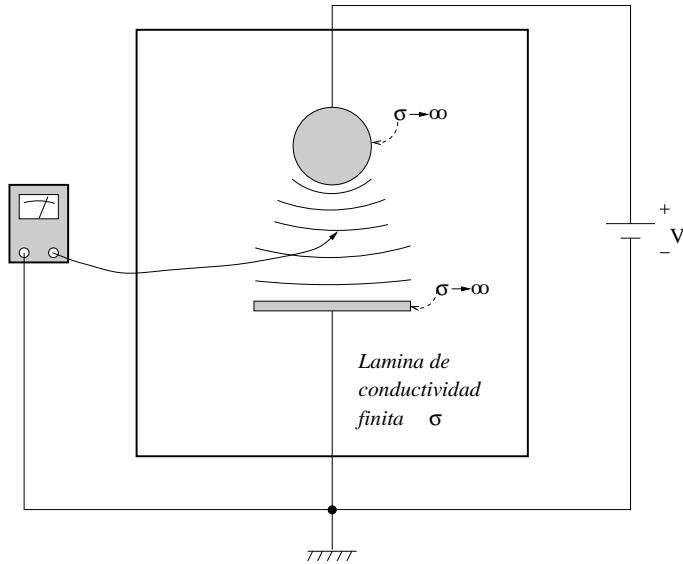


Figura A.15:

Desde el punto de vista físico, la analogía más utilizada es la existente con los problemas de conducción. Cuando la geometría del problema es bidimensional se puede determinar la estructura de curvas equipotenciales haciendo uso de láminas cuya resistencia por cuadrado $R_c = \frac{1}{\sigma e}$, donde e es el espesor de la lámina, sea uniforme. Estas láminas pueden ser de papel especial, o de líquido ligeramente conductor, método de la cuba electrolítica. El dispositivo experimental es el que se muestra esquemáticamente en la figura A.15.

En el caso del papel conductor, se pintan los electrodos con una pintura altamente conductora y entre ellos se establece la diferencia de potencial correspondiente. Midiendo con un voltímetro de alta impedancia el potencial de cada punto de la zona entre electrodos, podemos establecer experimentalmente la estructura de las superficies equipotenciales de un problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.

Este tipo de procedimientos, en las mejores condiciones, proporciona soluciones válidas dentro de un margen de error de varias unidades por ciento.

A.6. Métodos gráficos

Los métodos gráficos son menos precisos pero pueden ejecutarse con papel y lápiz. Gráficamente pueden resolverse problemas bidimensionales de Laplace y, con algo más de dificultad, problemas con simetría axial [Popovic] e incluso problemas de Poisson. Consideraremos solamente campos laplacianos bidimensionales. Sea un campo

$$\vec{F}(x, y) = -\nabla f(x, y)$$

que cumpla la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

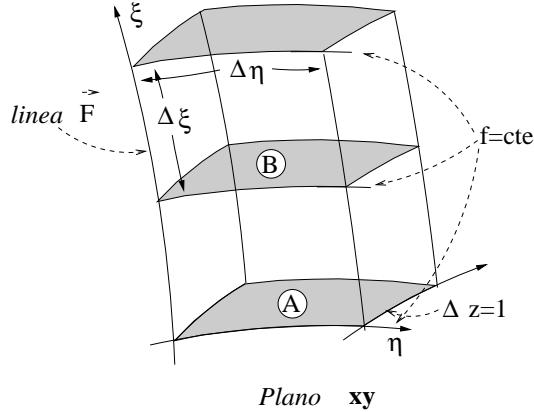


Figura A.16:

Consideremos un tubo elemental de flujo de espesor $\Delta z = 1$. Si ξ es la distancia a lo largo de las líneas de campo y η la distancia a lo largo de las equipotenciales, el campo F y el flujo $\Delta\Phi$ que circula por el tubo, vendrán expresados por

$$F = \simeq \frac{\Delta f}{\Delta \xi}, \quad \Delta\Phi \simeq F \Delta\eta$$

Para $\Delta\xi$ y $\Delta\eta$ suficientemente pequeños.

Puesto que el flujo que atraviesa a las secciones (A) y (B) es el mismo

$$F \Delta\eta = F' \Delta'\eta, \quad \frac{\Delta f}{\Delta \xi} \Delta\eta = \frac{\Delta' f}{\Delta' \xi} \Delta'\eta$$

Si dibujamos dos familias de curvas ortogonales, compatibles con las condiciones de contorno, que formen una cuadrícula curvilínea lo suficientemente tupida y que cumpla la condición, para cada cuadrado curvilíneo,

$$\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} \simeq \frac{\Delta'\eta}{\Delta'\xi} \simeq 1 \quad (\text{A.46})$$

tendremos que

$$\Delta\Phi = \Delta'\Phi = \Delta f = \Delta' f \quad (\text{A.47})$$

Hecho esto, habremos dividido el espacio problema en tubos elementales de flujo, de corriente, de campo eléctrico o de campo magnético, por cada uno de los cuales circula el mismo flujo $\Delta\Phi$, y en zonas separadas por equipotenciales equiespaciadas en Δf .

Así, pues, si el medio es un conductor de conductividad σ , habremos dividido el plano en cuadrados curvilíneos, tanto más próximos a cuadrados rectos cuanto más fina sea la división, de resistencia

$$R_c = \frac{\Delta V}{j \Delta \eta} = \frac{\Delta V}{\sigma E \eta} = \frac{1}{\sigma}, \quad \Delta z = 1 \quad (\text{A.48})$$

Si el problema es electrostático, el flujo de \vec{D} que circula por el tubo puede relacionarse con la densidad de carga superficial ρ_s

$$\Delta \Phi = D \Delta S = \epsilon E \eta = \rho_s \Delta \eta = \Delta Q$$

y la capacidad equivalente del cuadrado sería

$$C_c = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon E \eta}{\Delta V} = \epsilon, \quad \Delta z = 1 \quad (\text{A.49})$$

Por el mismo procedimiento podemos comprobar que la reluctancia de un cuadrado de material magnético es

$$\mathcal{R}_c = \frac{1}{\mu}, \quad \Delta z = 1$$

Para calcular los parámetros de un macrorectángulo de N_Φ tubos y N_f equipotenciales, basta con tener en cuenta que

$$\Phi = n_\Phi \Delta \Phi, \quad f = N_f \Delta f \quad (\text{A.50})$$

Como se deduce de A.48, A.49 y A.50

$$RC = \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

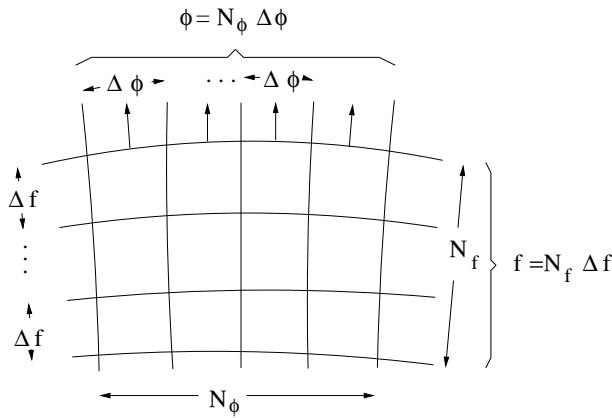


Figura A.17:

Para dibujar las familias de líneas de campo y curvas equipotenciales, son útiles una serie de reglas y, muy especialmente, la experiencia. Existen técnicas aplicables a regiones con más de un dieléctrico y con fuentes, pero aquí sólo citaremos las reglas básicas para medios homogéneos sin fuentes.

Fijaremos nuestra atención en un problema de conducción:

1. Dibujar el contorno del problema.
2. Dibujar un número adecuado de equipotenciales, con $\Delta V = cte$, teniendo en cuenta que los electrodos son equipotenciales y que las líneas de campo eléctrico son tangenciales a las superficies de separación con los medios no conductores y, por tanto, las equipotenciales son perpendiculares a las mismas. Si existen zonas donde presumiblemente el campo sea uniforme, es aconsejable empezar el dibujo por esa zona.
3. Tener también en cuenta que, por el poder de las puntas, el campo es más intenso en las zonas superficiales convexas de la superficie de los conductores, por lo que las equipotenciales se acercan a estas zonas y se alejan de las cóncavas.
4. Dibujar las líneas de campo procurando guardar, al mismo tiempo, la ortogonalidad con las equipotenciales y la regla de cuadrado (A.46) $\Delta\xi \simeq \Delta\eta$. Las posibles fracciones de cuadrado pueden ignorarse en un principio.
5. En las regiones de campo débil pueden aparecer polígonos curvilíneos que difieran considerablemente del cuadrado por lo que podría ser necesario subdividirlos en cuadrados menores.
6. Reiterar este proceso hasta que las reglas anteriores se cumplan de la forma más razonable posible. Para ésto puede utilizarse lápiz y goma de borrar o, mejor aún, un papel milimetrado para los contornos y papel transparente para las sucesivas iteraciones.

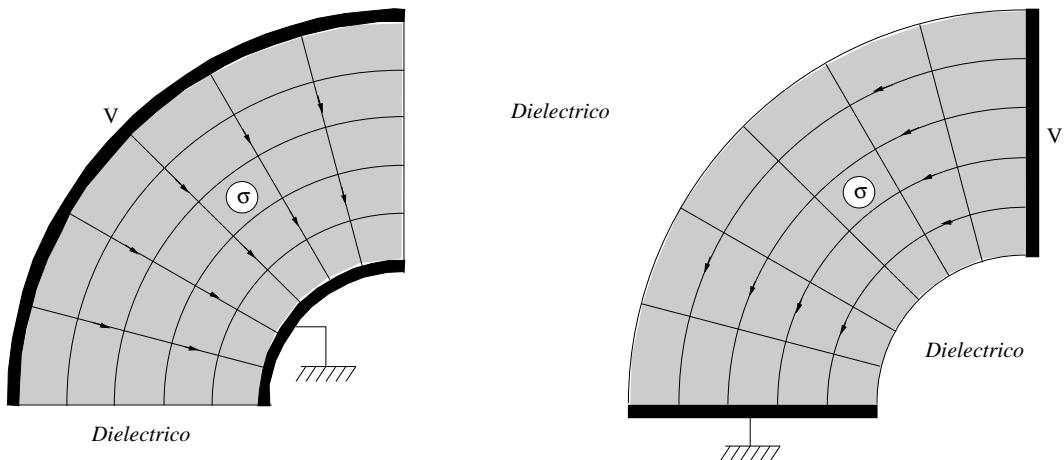


Figura A.18:

En las figuras se muestra la función dual que, en este tipo de problemas, ejercen las líneas equipotenciales y las de corriente, las superficies electródicas y las interfaces conductor-dieléctrico.

A.7. Problemas

- a-1. Considere una esfera de radio a , figura A.19, cargada con una densidad uniforme ρ , salvo en una cavidad esférica excéntrica, centrada en b y de radio c siendo $b + c \leq a$. Calcule el campo eléctrico en el hueco.

Solución:

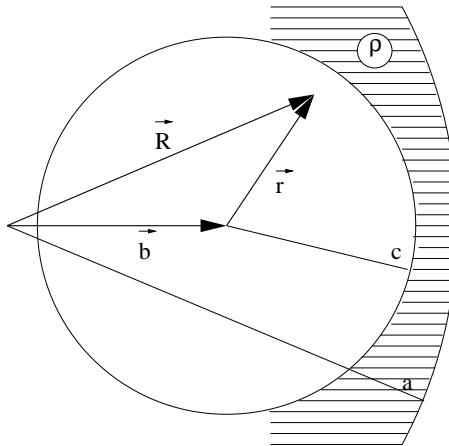


Figura A.19:

Podemos utilizar el principio de superposición para descomponer las cargas del enunciado en dos distribuciones de simetría esférica. La primera sería la esfera de radio a , con densidad ρ , y la segunda la cavidad pero con densidad $-\rho$. La suma de estas fuentes equivale a las enunciadas.

El campo interior de la primera es

$$\vec{E}_1 = \frac{Q(R)}{4\pi \epsilon R^3} \vec{R} = \frac{\rho}{3\epsilon} \vec{R}$$

luego, sumándole la contribución de la segunda

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon} (\vec{R} - \vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon} \vec{b}$$

ya que $\vec{R} = \vec{b} + \vec{r}$

- a-2. Un cilindro de radio a , por el que circula una corriente I uniformemente distribuida, tiene un hueco cilíndrico excéntrico, centrado en b y de radio c ($b + c \leq a$). Calcule el campo magnético en el hueco.
- a-3. Utilice el método de Green para calcular el potencial en el eje z , $z \geq 0$, debido a una distribución de potencial $V(x, y, 0)$, tal que

$$V(x, y, 0) = \begin{cases} V_0 & , \rho < a \\ 0 & , \rho \geq a \end{cases}$$

siendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- a-4. Una carga puntual q se sitúa a una distancia d de un plano conductor infinito conectado a tierra. Obténgase la carga total inducida sobre el plano integrando directamente la densidad de carga superficial inducida en el mismo.

Solución:

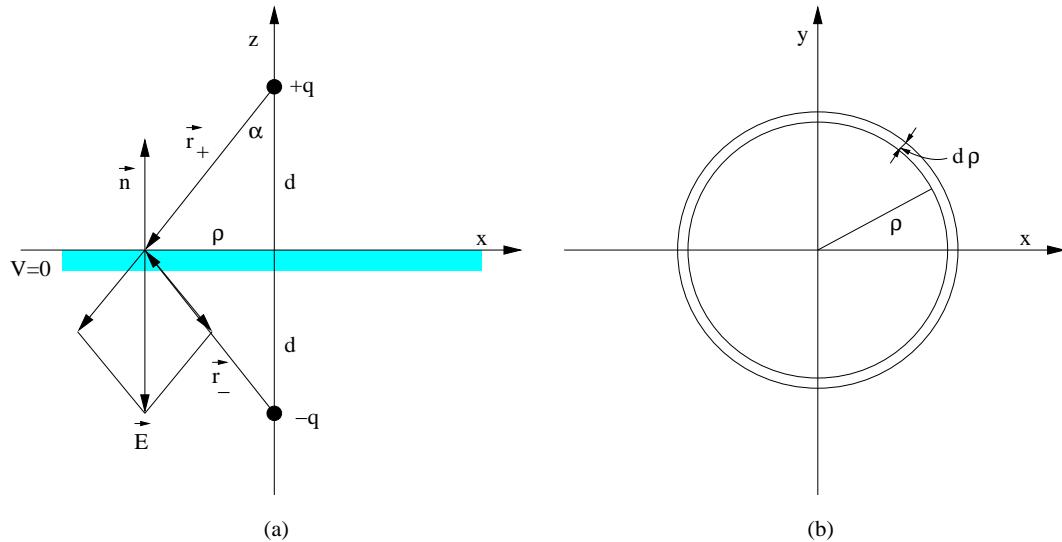


Figura A.20:

En la figura A.20a se representa, en el plano $y = 0$, a la carga q , a la distancia d del conductor, y a su imagen. Dada la simetría del problema, el campo eléctrico en dicho conductor es perpendicular al mismo.

$$\vec{E} = E_z \hat{z} , \quad E_z = -2 \frac{q}{4\pi \epsilon r^2} \cos \alpha$$

donde

$$\cos \alpha = \frac{d}{r} , \quad r = \sqrt{d^2 + \rho^2}$$

En la superficie del conductor la densidad superficial de carga es

$$\rho_s = \epsilon \vec{E} \cdot \vec{n} = -\frac{q d}{2\pi (d^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Integrando sobre la superficie del conductor, figura A.20b, y tomando $ds = 2\pi \rho d\rho$

$$Q = -q d \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(d^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

En las tablas encontramos que

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

por lo que

$$Q = -q$$

- a-5. Un dipolo \vec{p} se orienta normalmente a un plano conductor infinito y a una distancia d del mismo. El plano está a potencial cero. Calcule la fuerza ejercida por el dipolo sobre el plano.
- a-6. Halle el trabajo mínimo necesario para llevar al infinito a una carga q desde una distancia $d = x$ de un plano conductor indefinido a potencial nulo.
- a-7. Una carga q , de masa m , pende de un hilo de longitud l sobre un plano conductor a potencial nulo. Si se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio y se deja libre, determine el movimiento de la carga. La distancia del punto de sujeción al plano es $2l$.
- a-8. Considere a una partícula cargada situada entre dos planos conductores al mismo potencial y situados en $x = \pm a$. Encuentre la ley de recurrencia que permite calcular la serie de imágenes que generan el campo en el espacio entre las placas. De acuerdo con el resultado, averigüe cuál es el signo de la fuerza que actúa sobre la carga.

Solución:

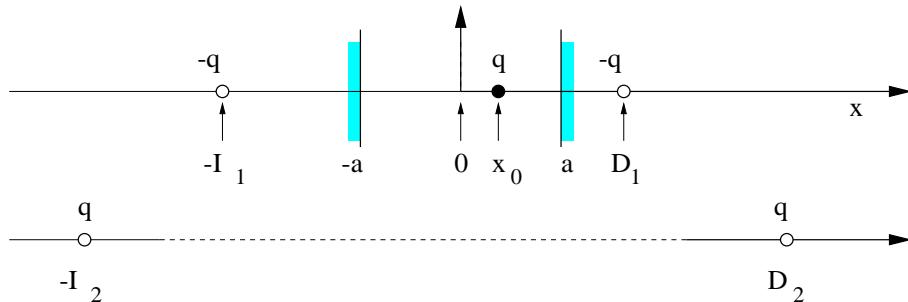


Figura A.21:

Dado que los dos planos están al mismo potencial, los consideramos descargados y los tomamos como origen de los potenciales.

En la parte superior de la figura A.21 se representa a la carga situada a la distancia x_0 del origen. La imagen de la derecha se encontrará a la distancia $a - x_0$ del plano de la derecha y a la distancia

$$D_1 = 2a - x_0$$

del origen.

Esta carga, junto con la primera, hacen que el potencial del conductor de la derecha se anule, pero no el del izquierdo.

De forma análoga, situando una imagen a la izquierda, a la distancia

$$I_1 = x_0 + 2a \Rightarrow$$

q y esta última imagen anularían el potencial en el conductor izquierdo.

Con estas tres cargas ninguno de los conductores estaría a potencial nulo, por lo que habrá que continuar hallando imágenes de las imágenes previas.

Así, pues, la imagen situada en D_1 está a la distancia $D_1 + a$ del conductor de la izquierda y la imagen correspondiente estará a la misma distancia de dicho plano y a

$$I_2 = D_1 + 2a \Rightarrow$$

del origen.

la recurrencia para las distancias y las cargas es

$$D_1 = 2a - x_0 , \quad I_1 = 2a + x_0$$

$$D_i = I_{i-1} + 2a , \quad I_i = D_{i-1} + 2a , \quad i = 2, 3, \dots , \quad q_i = (-1)^i$$

Las coordenadas son

$$xD_i = D_i , \quad xI_i = -I_i$$

el potencial en el plano xy es el producido por la carga y sus imágenes

Una aproximación del potencial correspondiente a N imágenes a la izquierda y otras tantas a la derecha, es

$$V(x, y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} + \sum_{i=1}^N (-1)^i \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x - xD_i)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - xI_i)^2 + y^2}} \right\} \right)$$

Se calcula y representa mediante el siguiente programa Mathematica.

Gráficas con Mathematica *imag – dosplanos.nb:*

Representación de las cargas

```

Remove["Global`*]; Off[General :: "spell1"];

$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12};

tD = Table[{0, 0}, {i, 1, 4}]; tI = tD; tD[[1, 1]] = 2 * 1 - .5; tI[[1, 1]] = 2 * 1 + .5;

Do[{tD[[i, 1]] = tI[[i - 1, 1]] + 2 * 1, tI[[i, 1]] = tD[[i - 1, 1]] + 2 * 1}, {i, 2, 4}];

xD = tD; xI = -tI;

xn = Join[Table[xD[[i]], {i, 1, 4, 2}], Table[xI[[i]], {i, 1, 4, 2}]];

xp = Join[Table[xD[[i]], {i, 2, 4, 2}], Table[xI[[i]], {i, 2, 4, 2}]];

lineaD = {{1, -1/2}, {1, 1/2}};

grplacaD = Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Line[lineaD]}];

lineaI = {{-1, -1/2}, {-1, 1/2}};

grplacaI = Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Line[lineaI]}];

lineay = {{0, -1/4}, {0, 1/4}};

gry = Graphics[{RGBColor[0, 1, 0], Line[lineay]}];

lineax = {xI[[4]], xD[[4]]}; grx = Graphics[{RGBColor[0, 1, 0], Line[lineax]}];

```

```

puntoq = {{.5, 0}}; grq = Graphics[{PointSize[.02], RGBColor[1, 0, 0], Point/@puntoq}];

grcargasn = Graphics[{PointSize[.02], RGBColor[0, 0, 1], Point/@xn}];

grcargasp = Graphics[{PointSize[.02], RGBColor[.83, 0.01, 0.1], Point/@xp}];

Show[gry, grx, grq, grplacaD, grplacaI, grcargasn, grcargasp];

```

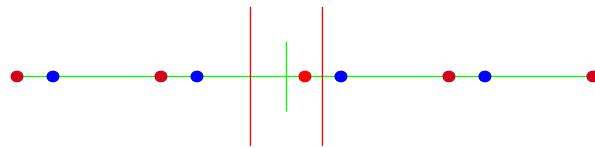


Figura A.22:

La figura A.22 muestra la posición de la carga y sus imágenes. Las cargas positivas son puntos rojos y las negativas azules.

Representación del potencial

```
Remove["Global`*"]
```

$$\text{NN} = 100; \mathbf{a} = \mathbf{1}; \mathbf{xc} = \frac{\mathbf{a}}{2};$$

```
tD = Table[{0, 0}, {i, 1, NN}]; tI = tD;
```

$$tD[[1, 1]] = 2 * a - xc; tI[[1, 1]] = 2 * a + xc;$$

```
Do[{tD[[i, 1]] = tI[[i - 1, 1]] + 2 * a, tI[[i, 1]] = tD[[i - 1, 1]] + 2 * a}, {i, 2, NN}];
```

$$\mathbf{x}\mathbf{D} = \mathbf{t}\mathbf{D}; \mathbf{x}\mathbf{I} = -\mathbf{t}\mathbf{I};$$

```
xn = Join[Table[xD[[i]], {i, 1, NN, 2}], Table[xI[[i]], {i, 1, NN, 2}]];
```

```
xp = Join[Table[xD[[i]], {i, 2, NN, 2}], Table[xI[[i]], {i, 2, NN, 2}]];
```

$$\nabla p = 0; \text{Do}[Vp = Vp + \frac{1}{\sqrt{(xp[[i, 1]] - x)^2 + y^2}}, \{i, 1, NN\}];$$

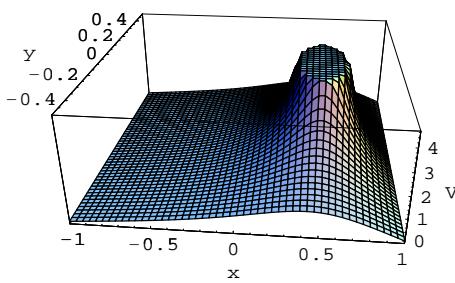
$$Vn = 0; \text{Do}[Vn = Vn + -\frac{1}{\sqrt{(xn[[i, 1]] - x)^2 + y^2}}, \{i, 1, NN\}];$$

$$V = Vp + Vn + \frac{1}{\sqrt{(xc - x)^2 + y^2}};$$

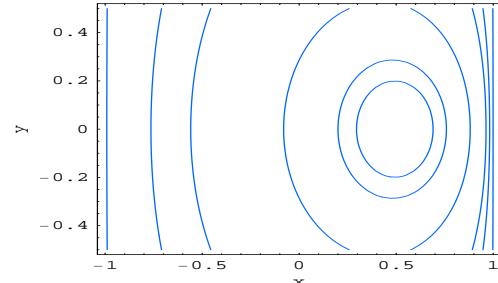
```
gr2 = Plot3D[V, {x, -a, a}, {y, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}}, ViewPoint \rightarrow \{-2, 0.5, 1\},  
PlotPoints \rightarrow 50, AxesLabel \rightarrow \{"x", "y", "V"\}];
```

```
gr3 = ContourPlot[V, {x, -a, a}, {y, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}}, ContourStyle \rightarrow Hue[0.6],  
Contours \rightarrow \{0.01, 0.15, 0.3, 1, 2.5, 4\}, ContourShading \rightarrow False,  
PlotPoints \rightarrow 50, FrameLabel \rightarrow \{"x", "y"\}];
```

La figura A.23a representa tridimensionalmente al potencial entre las placas. Puede observarse como en éstas el potencial es nulo, tendiendo a infinito en la posición de la carga. La A.23b representa las curvas equipotenciales que rodean a la carga y que son rectas paralelas a las placas en la proximidad de las mismas.



(a)



(b)

Figura A.23:

- a-9. Suponga que una carga q está situada entre dos semiplanos conductores, conectados a tierra, que, como se indica en la figura A.24, forman entre sí un ángulo α . Compruebe que el numero de imágenes necesarias es finito si π/α es un número entero. Hágalo apoyándose en el caso en que $\alpha = \pi/3$.

Tome $\alpha = 90^\circ$ y coloque la carga a distancias a y b de cada uno de los semiplanos. Calcule:

- La fuerza ejercida por la carga sobre ambos conductores.
- La densidad de carga inducida sobre los conductores.

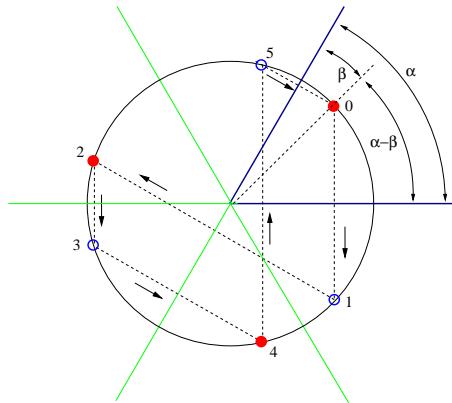


Figura A.24:

- a-10. En la experiencia de Coulomb para comprobar la ley del inverso del cuadrado de la distancia, se mide la fuerza que ejercen entre sí dos esferas conductoras, de radio a , cargadas al mismo potencial V_0 .

- Halle la ley de recurrencia de las posiciones y magnitudes de las cargas imagen.
- Represente gráficamente el potencial producido por ambas esferas.
- Determine la corrección, debida al fenómeno de influencia, que es necesario introducir en los resultados experimentales para confirmar la dependencia r^{-2} a distancias comparables con a .

Solución:

Trataremos la cuestión (a). La (b) se resuelve en el programa Mathematica *imag-dosesferas.nb*.

Como puede verse en la figura A.25, la simetría del problema implica que en el plano medio se cumpla la condición de Neumann

$$E_x\left(\frac{1}{2}d_1, y, z\right) = 0$$

Podemos abordar este problema por dos caminos:

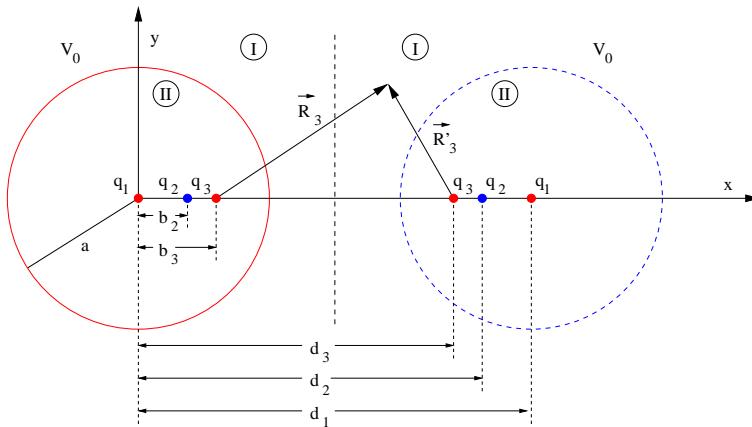


Figura A.25:

- Como una esfera a potencial V_0 frente al plano medio con la condición especificada anteriormente.
- Como un problema de imágenes entre dos esferas.

Seguiremos la segunda vía para la cual se hará uso de las relaciones de la imagen de una carga q sobre una esfera

$$q' = -q \frac{a}{d} , \quad b = \frac{a^2}{d}$$

Comenzaremos por colocar dos cargas idénticas

$$q_1 = 4\pi \varepsilon a V_0$$

rojas en la figura A.25, en el centro de cada una de ellas. Por separado harían equipotencial V_0 a su esfera respectiva, pero en conjunto ésto no es cierto porque la q_1 de la derecha perturba el potencial de la esfera izquierda y viceversa.

A continuación, nos planteamos el problema de imagen de la q_1 de la derecha sobre la esfera de la izquierda y colocamos la carga imagen q_2 en el interior de la misma, con lo que restauramos el potencial V_0 en su superficie y perturbaron el de la esfera derecha.

La introducción sucesiva de las imágenes q_2, q_3, \dots sobre una y otra esfera, proporciona correcciones decrecientes que, en el límite, harán equipotenciales a las dos esferas.

De acuerdo con la figura, los dos primeros pasos de la serie son

$$q_1 = 4\pi \varepsilon a V_0 , \quad b_1 = 0 , \quad d_1 = d$$

$$q_2 = -q_1 \frac{a}{d_1} , \quad b_2 = \frac{a^2}{d_1} , \quad d_2 = d - b_2$$

y los valores iniciales y las iteraciones

$$q_1 = 4\pi \varepsilon a V_0 , \quad b_1 = 0 , \quad d_1 = d$$

$$q_i = -q_{i-1} \frac{a}{d_{i-1}} , \quad b_i = \frac{a^2}{d_{i-1}} , \quad d_i = d - b_i , \quad i = 2, 3 \dots$$

El potencial producido por las cargas iniciales y $N - 1$ parejas de imágenes es

$$V(x, y) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R'_i} \right)$$

donde

$$R_i = \sqrt{(x - b_i)^2 + y^2} , \quad R'_i = \sqrt{(x - d_i)^2 + y^2}$$

La convergencia está asegurada porque la serie es alternada y decreciente en valor absoluto.

Las siguientes figuras son generadas por *imag-dosesferas.nb*.

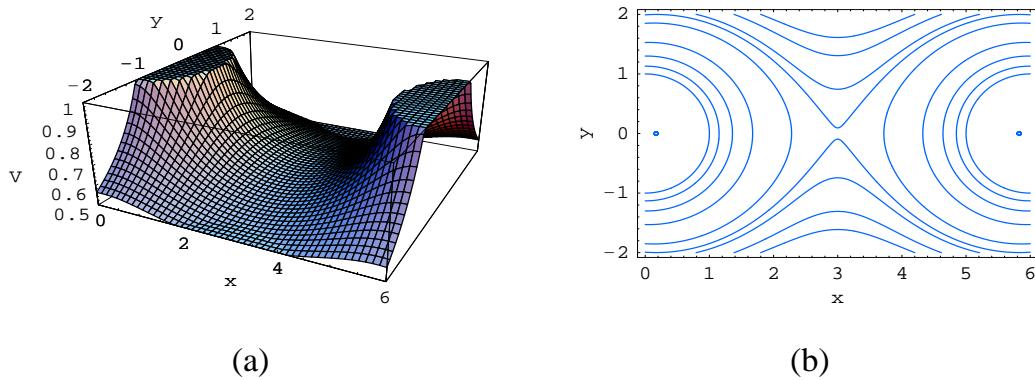


Figura A.26:

La figura A.26a es la representación tridimensional del potencial $V(x, y)$ y la A.26b la de las líneas equipotenciales.

- a-11. Halle el potencial producido por una esfera metálica de radio a , a potencial V_0 , cuyo centro se encuentra a una distancia d de un plano conductor a potencial nulo. Supuesto que el eje z es perpendicular al plano y pasa por el centro de la esfera, Dibuje la gráfica de la densidad superficial de carga en la esfera en función del ángulo polar.

- a-12. Un hilo conductor por el que circula una corriente I es paralelo a un bloque ferromagnético con $\mu \rightarrow \infty$ y está situado a una distancia d del bloque. Calcule el campo magnético en el semiespacio donde está el hilo. Calcule el campo magnético superficial.

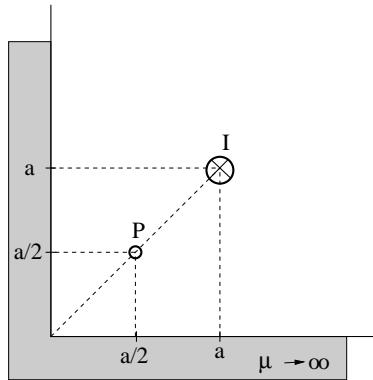


Figura A.27:

- a-13. Un hilo conductor que transporta una corriente I está situado en el centro de una región vacía entre de dos bloques ferromagnéticos con $\mu \rightarrow \infty$ y separados una distancia d . Calcule el campo magnético en la región entre los dos bloques.
- a-14. Por el conductor de la figura A.27 circula una corriente I y esta situado a una distancia a de planos ferromagnético ideales. Calcule el campo magnético en el punto P .
- a-15. Un guía de onda bifilar está constituida por dos cables cilíndricos de radio a . Haga uso del método de las imágenes para calcular su capapacidad por unidad de longitud.

Solución:

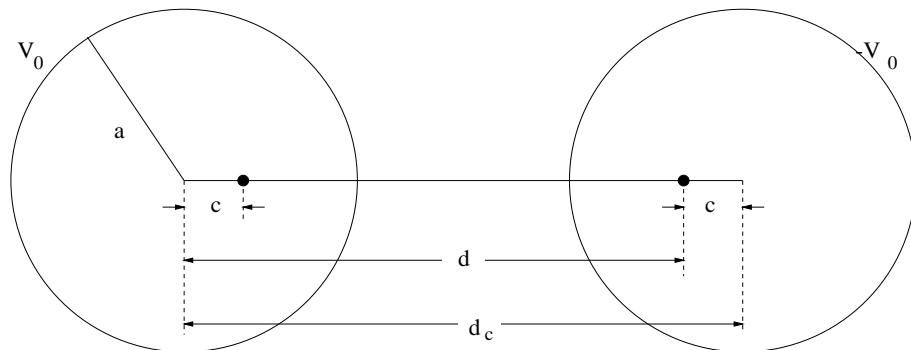


Figura A.28:

En la figura A.28 se representa un corte de la guía. El radio de cada uno de los cables es a y sus centros se hallan separados una distancia

d_c .

De acuerdo con lo visto en la sección A.2.5.3, la carga imagen de la λ , situada a la distancia d del centro del cable izquierdo, es $-\lambda$ y está situada a la distancia c de su centro. Según A.19

$$\frac{a}{d} = e^{-2\pi \varepsilon V_0/\lambda}, \quad c = \frac{a^2}{d}$$

y el potencial

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon} \ln(d/a)$$

Por simetría, la circunferencia de radio a , situada a la distancia $d_c = d+c$, es también equipotencial; $V = -V_0$.

Aplicando el teorema de Gauss a una superficie que envuelva al conductor de la derecha, comprobaremos que la carga depositada sobre su superficie es, por unidad de longitud, igual a λ . Luego la diferencia de potencial entre ambos cables es $2V_0$ y

$$C = \frac{\lambda}{2V_0} = \frac{\pi \varepsilon}{\ln(d/a)}$$

Expresando V_0 en función de d_c y de a y haciendo uso de la notación $x \equiv d/a$ y $\alpha \equiv d_c/2a$, se obtiene la ecuación

$$x^2 - 2\alpha x + 1 = 0$$

de cuyas posibles soluciones debemos quedarnos con la

$$x = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

La solución $x' = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ debe descartarse porque la distancia de los cables debe ser mayor que el diámetro de los mismos, luego $\alpha > 1$, y $d > a$, luego $x > 1$, mientras que de esta solución resulta $x' < 1$ para $\alpha > 1$. Compruebe esto último.

La capacidad, expresada en función de los datos del problema es, por lo tanto

$$C = \frac{\pi \varepsilon}{\ln \left\{ \frac{d_c}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d_c}{2a}\right)^2 - 1} \right\}}$$

- a-16. La figura A.29 representa a una caja, infinitamente larga en las direcciones z e y limitada por una banda a potencial V_0 en el plano $y = 0$ y por dos semiplanos a potencial nulo en $x = 0$ y $x = a$.

- a) Calcule el potencial en el interior de la caja.
 b) ¿Cómo se verá modificada esta solución si limitamos la caja en la dirección y terminándola en $y = b$ con una banda a potencial V_b ?

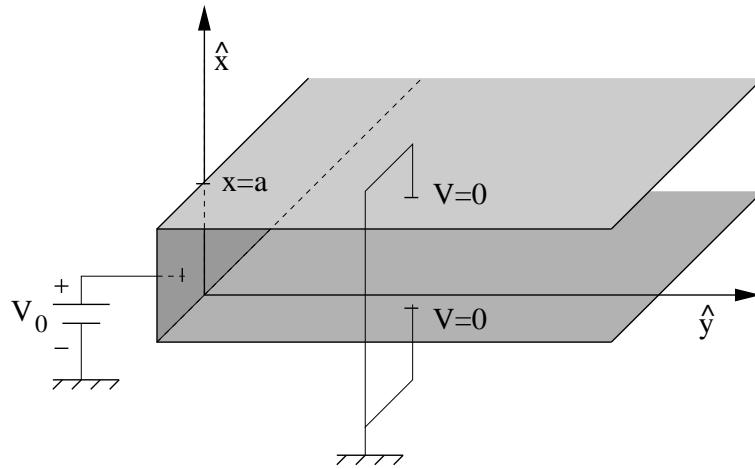


Figura A.29:

Solución:

a) Dadas las condiciones de contorno del problema, éste es bidimensional, luego $V = V(x, y)$. Las constantes k_x y k_y deberán, por lo tanto, cumplir la relación

$$k_x^2 + k_y^2 = 0$$

Las condiciones de contorno que debemos aplicar son, en principio

$$V(x, 0) = V_0 \quad , \quad 0 < x < a$$

$$V(0, y) = V(a, y) = 0 \quad , \quad y > 0$$

Puesto que para $y \rightarrow \infty$ no se especifica la existencia de ningún tipo de fuentes y los planos $x = 0$ y $x = a$ están a potencial nulo, se supone que la cuarta condición de contorno que nos falta es

$$V(x, \infty) = 0 \quad , \quad 0 < x < a$$

Comprobaremos que, al ser finito el dominio de la solución en la dirección x e infinito en la y , resultará cómodo tomar

$$k_x^2 = -k_y^2 \equiv k^2$$

donde k es real y positivo.

Partimos de la solución general

$$V_G = \sum_{\forall k} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{\forall k} \left(A_{1k} e^{jkx} + A_{2k} e^{-jkx} \right) \left(B_{1k} e^{ky} + B_{2k} e^{-ky} \right)$$

Si tenemos en cuenta, en primer lugar, que

$$v(0, y) = 0 \Rightarrow A_{1k} = -A_{2k}$$

podremos escribir⁸

$$V = \sum_{\forall k} A_k \operatorname{sen}(kx) Y_k(y)$$

lo que justifica la elección de $k_x^2 = k^2$.

Si ahora aplicamos la condición $V(a, y) = 0$ encontramos que sólo son posibles aquellos valores de k que hacen que los valores nulos de $\operatorname{sen} kx$ coincidan con los extremos del intervalo $(0, a)$

$$k = n \frac{\pi}{a}, \quad n = \text{entero}$$

Vemos que k se cuantifica al limitar el intervalo según la dirección x . Luego

$$V = \sum_{n>0} A_n \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{x}{a}\right) Y_n(y)$$

Haciendo uso de la condición $V(x, \infty) = 0$ encontramos que los $B_{1n} = 0$ porque están asociados a términos crecientes con y .

$$V = \sum_{n>0} A_n \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{x}{a}\right) e^{-n\pi \frac{y}{a}}$$

Por último, debemos cumplimentar la condición $V(x, 0) = V_0$ para $0 < x < a$

$$V_0 = \sum_{n>0} A_n \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \quad (\text{A.51})$$

El cálculo de los coeficientes puede llevarse a cabo, de forma más general, teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones seno y coseno en el intervalo $[0, a]$.

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(n'\pi \frac{x}{a}\right) dx = \frac{1}{2} a \delta_{nn'}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación A.51 por $\operatorname{sen}\left(n\pi \frac{x}{a}\right)$ e integrando

⁸ A_k , \mathcal{A}_n y A_n son distintas entre sí y sus relaciones mutuas son fácilmente deducibles.

$$A_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin(n\pi \frac{x}{a}) dx = \begin{cases} 0 & , \text{ n par} \\ \frac{4V_0}{n\pi} & , \text{ n impar} \end{cases}$$

La solución particular que cumple las condiciones de contorno será

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n, \text{impar}} \frac{1}{n} \sin(n\pi \frac{x}{a}) e^{-n\pi \frac{y}{a}}$$

Realizaremos las gráficas de este potencial por medio de un programa Mathematica.

Gráficas con Mathematica *poisson – cartesianas – a.nb:*

```
Remove["Global`*"]; Off[General :: "spell1"];
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 12};
```

Tomamos valores normalizados para la dimensión a y para V₀.

$$\mathbf{a = 1; V0 = 1;}$$

Elegimos el valor NN = impar de posibles coeficientes. Dado que, en este caso, los pares serán nulos, el número de los coeficientes no nulos será $\frac{NN+1}{2}$.

De a NN los valores 1, 2, … para ver como se va aproximando la solución.

$$\mathbf{NN = 49;}$$

```
Tablapot = Table[\frac{4 V0}{n \pi} \ Sin[\frac{n \pi x}{a}] \ Exp[-\frac{n \pi y}{a}], {n, 1, NN, 2}];
nn = Dimensions[Tablapot][[1]];
V = 0;
Do[V = V + Tablapot[[i]], {i, 1, nn}]
```

```
poisson1a = Plot3D[V, {x, 0, a}, {y, 0, \frac{a}{2}}, ViewPoint -> {2, 0, 1},
PlotPoints -> 30, AxesLabel -> {"x", "y", "V"}];
```

```
poisson2a = ContourPlot[V, {x, 0, a}, {y, 0, \frac{a}{2}}, ContourStyle -> Hue[0,2],
FrameLabel -> {"x", "y"}]
```

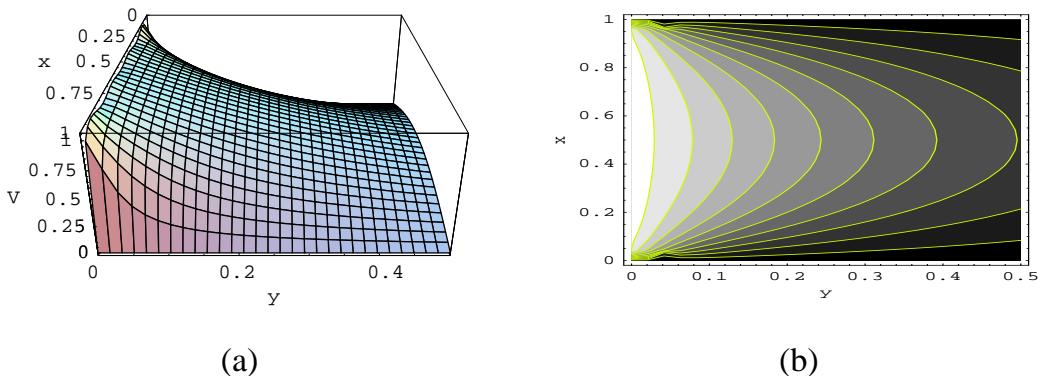


Figura A.30:

La figura A.30a muestra la gráfica tridimensional $V(x, y)$. La figura A.30b muestra el correspondiente gráfico de contorno, en el que se marcan las líneas equipotenciales.

A continuación se representan las secciones de la gráfica del potencial para distintos valores $y = \text{cte}$. De esta forma podremos observar que al distanciarnos del origen va disminuyendo la importancia de los armónicos superiores, de forma que, para y grande, sólo es apreciable la contribución del primer armónico ($n = 1$). Téngase en cuenta que el armónico decrece de la forma $\frac{V(y+\lambda_n)}{V(y)} = \frac{1}{e}$ a lo largo de la distancia

$$\lambda_n = \frac{a}{\pi} \frac{1}{n}$$

Elegimos el valor concreto de $y = \text{mul} \times a$ especificando el valor del término multiplicador.

mul = 0;

```

poisson3a = Plot[{V/.y → mul*a, V0}, {x, 0, a}, PlotRange → All,
  PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
  GridLines → {{1}, None}, AxesLabel → {"x", "V"}];

```

La sección $y = 0$ (**mul** = 0), figura A.31, muestra el FENÓMENO DE GIBBS. Éste muestra la no idoneidad del desarrollo de Fourier para la aproximación de funciones discontinuas.

b) Si ahora, por ejemplo, limitamos la caja en la dirección y terminándola en $y = b$ con una banda a potencial V_b , habrá que substituir la condición $V(x, \infty) = 0$ por $V(x, b) = V_b$, con lo que $B_{1n} \neq 0$ y deberemos escribir

$$V = \sum_{n>0} \operatorname{sen}(n\pi \frac{x}{a}) \left(A_n e^{n\pi \frac{y}{a}} + B_n e^{-n\pi \frac{y}{a}} \right)$$

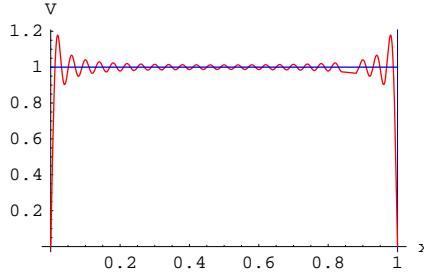


Figura A.31:

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} V_0 = V(x, 0) &= \sum_{n>0} \sin(n\pi \frac{x}{a}) (A_n + B_n) \\ V_b = V(x, b) &= \sum_{n>0} \sin(n\pi \frac{x}{a}) \left(A_n e^{n\pi \frac{b}{a}} + B_n e^{-n\pi \frac{b}{a}} \right) \end{aligned}$$

por lo que, multiplicando ambos miembros de las ecuaciones anteriores por $\sin(n\pi \frac{x}{a})$ e integrando sobre el intervalo $0 \leq x \leq a$, los coeficientes del desarrollo se deducirán del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A_n + B_n &= \frac{4V_0}{n\pi} \\ A_n e^{n\pi \frac{b}{a}} + B_n e^{-n\pi \frac{b}{a}} &= \frac{4V_b}{n\pi} \quad \text{para } n=\text{impar} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

y

$$\begin{aligned} A_n + B_n &= 0 \\ A_n e^{n\pi \frac{b}{a}} + B_n e^{-n\pi \frac{b}{a}} &= 0 \quad \text{para } n=\text{par} \end{aligned}$$

de estas últimas ecuaciones se deduce que, para $n = \text{par}$

$$B_n = -A_n \Rightarrow A_n \operatorname{senh}(n\pi \frac{b}{a}) = 0 \Rightarrow B_n = A_n = 0$$

porque $n\pi \frac{b}{a} > 0$ para $n > 0$. Nos quedamos, como en la cuestión anterior de este problema, con los coeficientes de índice impar.

Resolviendo el sistema de ecuaciones A.52, tenemos que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{n\pi} \frac{V_b - V_0 e^{-n\pi \frac{b}{a}}}{\operatorname{senh}(n\pi \frac{b}{a})} \\ B_n &= -\frac{2}{n\pi} \frac{V_b - V_0 e^{n\pi \frac{b}{a}}}{\operatorname{senh}(n\pi \frac{b}{a})} \end{aligned}$$

y la solución resultante

$$V = \sum_{n, \text{ impar}} \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{x}{a} \right) \left(A_n e^{n\pi \frac{y}{a}} + B_n e^{-n\pi \frac{y}{a}} \right)$$

El programa *poisson–cartesianas–b.nb*, similar al anteriormente descrito, nos proporciona la figura A.32a, que es la representación 3D de $V(x, y)$, y la A.32b que muestra las líneas equipotenciales.

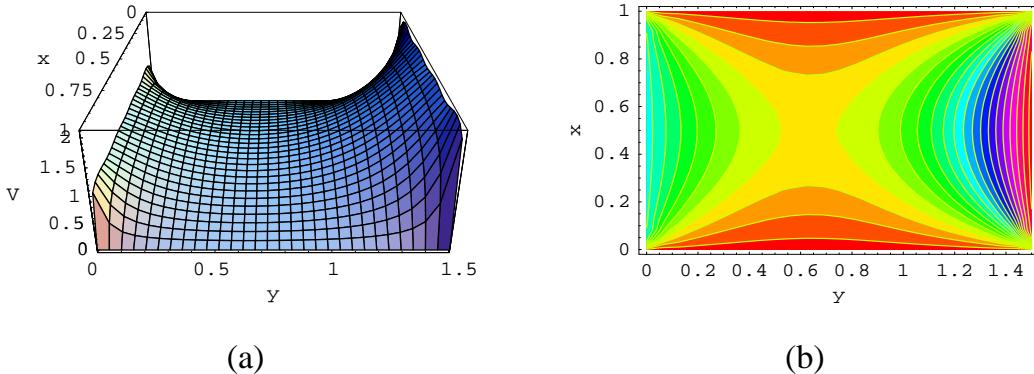


Figura A.32:

- a-17. Halle el potencial en la región encerrada por cuatro planos conductores colocados en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = b$, a potenciales V_1 , V_2 , V_3 y $V_4 = 0$ respectivamente. Apóyese en el problema anterior y haga uso del principio de superposición.

- a-18. Calcule la resistencia del conductor que muestra la figura A.33.

Solución:

En el conductor $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ y

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\varphi} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

Tomemos $V_1 = 0$ y $V_2 = V_0$ y situemos los electrodos ideales en los planos $\varphi = 0$ y $\varphi = \varphi_0$. Las condiciones de contorno en estos planos se expresan de la forma

$$V_1 = V(\rho, 0, z) = 0 \quad , \quad V(\rho, \varphi_0, z) = V_0$$

En las fronteras con el exterior no conductor, las condiciones de contorno implican la tangencialidad del campo

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad , \quad z = 0, c$$

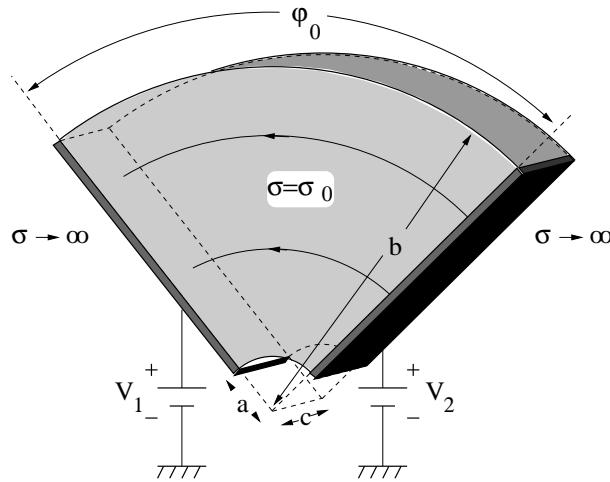


Figura A.33:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 \quad , \quad \rho = a, b$$

El conductor de conductividad σ_0 está definido, por lo tanto, en el dominio

$$a \leq \rho \leq b \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \quad , \quad 0 \leq z \leq c$$

en el cual $\varphi_0 < 2\pi$ y $\rho \neq 0$.

Para no complicar, dada la simplicidad de la geometría en cuestión, ensayaremos la solución más simple posible y la justificaremos a posteriori apoyándonos en el teorema de unicidad. En consecuencia, supondremos $n = k = 0$.

De acuerdo con A.25,A.27 y A.28, podemos escribir la solución de la forma ⁹

$$V(\rho, \varphi, z) = (A_1 \ln \rho + A_2)(B_1 \varphi + B_2)(C z + 1)$$

Puesto que no partimos de la solución más general, no será necesario aplicar todas las condiciones de contorno

Aplicando las condiciones en los planos z

$$\frac{\partial V}{\partial z} = R(\rho) \Phi(\varphi) C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

y

⁹Sacamos factor común C_2 y redefinimos los coeficientes.

$$V(\rho, \varphi) = (A_1 \ln \rho + A_2)(B \varphi + 1)$$

Aplicando la condición en $\varphi = 0$

$$V(\rho, 0) = A_1 \ln \rho + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = A_2 = 0$$

y

$$V(\rho, \varphi) = B \varphi$$

Por último, de la condición en $\varphi = \varphi_0$

$$V(\rho, \varphi_0) = B \varphi_0 = V_0 \Rightarrow B = \frac{V_0}{\varphi_0}$$

El potencial y el campo buscados son

$$V(\varphi) = \frac{V_0}{\varphi_0} \varphi, \quad \vec{E} = E_\varphi \hat{\varphi}, \quad E_\varphi = -\frac{V_0}{\varphi_0} \frac{1}{\rho}$$

Este campo cumple con las condiciones de contorno, por lo que el teorema de unicidad nos asegura que esta solución es correcta y es única. Efectivamente, el campo es tangencial a las paredes fronteras del vacío, cuya conductividad es nula, y normal a los electrodos.

Para hallar la resistencia, debemos calcular la intensidad, es decir, el flujo de $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ a través de cualquier sección $\varphi = \text{cte}$.

Tomando $\vec{j} \uparrow \uparrow \vec{ds}$

$$I = \int_{\rho=a}^b \int_{z=0}^c |j_\varphi| d\rho dz = \frac{\sigma_0 c}{\varphi_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) V_0$$

Con lo que la resistencia resulta ser

$$R = \frac{\varphi_0}{\sigma_0 c \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

- a-19. Sea un hilo recto de sección circular y radio a , de material magnético ideal $\mu \rightarrow \infty$, sumergido perpendicularmente en un campo magnético uniforme \vec{H}_0 , como en la figura A.34. Calcule el campo magnético en todos los puntos del espacio.

Solución:

Una vez introducido el hilo, este perturbará el espacio circundante modificando el campo inicialmente uniforme, con lo que $\vec{H} = \vec{H}(\rho, \varphi)$.

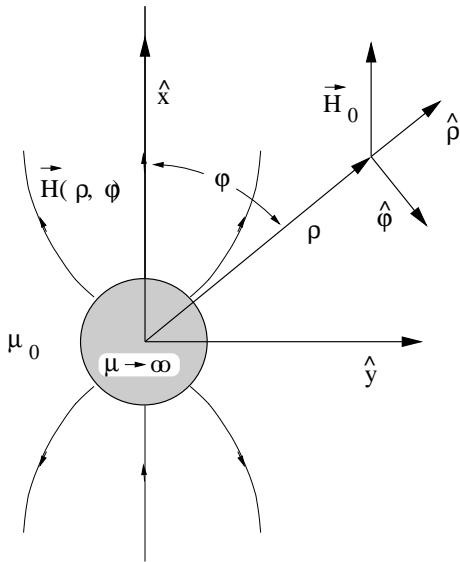


Figura A.34:

La primera condición de contorno , para $(\rho \rightarrow \infty, \varphi)$, es

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \vec{H}(\rho, \varphi) = \vec{H}_0 = H_0 \hat{x} = H_0 \cos \varphi \hat{\rho} - H_0 \sin \varphi \hat{\varphi}$$

La segunda se establece en (a, φ)

$$H_\varphi(a, \varphi) = 0$$

porque el hilo tiene permeabilidad infinita y, según la ley de refracción de las líneas de campo, $\vec{H}(a, \varphi)$ debe ser perpendicular a la superficie.

Puesto que $\vec{H} = -\nabla U$, las condiciones de contorno pueden ser expresadas en función del potencial magnético escalar:

- Para $\rho \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -H_0 \cos \varphi, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = +H_0 \sin \varphi$$

e integrando

$$U(\rho \rightarrow \infty, \varphi) = -H_0 \rho \cos \varphi$$

Hemos anulado la constante de integración puesto que ésta sólo afecta al origen de los potenciales.

- Para $\rho = a$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial U(a, \varphi)}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U(a, \varphi)}{\partial \varphi} = 0$$

Puesto que el intervalo de φ es $[0, 2\pi]$, n debe ser real y entero y, dada la forma de la condición en el infinito, debe contener al término $(n = 1, k = 0)$, con $A_2 = 0$. Es necesario que $n = 1$ porque, en caso contrario ($n > 1$), para $\rho \rightarrow \infty$ el potencial presentaría dependencias de $\cos n\varphi$.

También, dada la simetría del potencial

$$U = U(\rho, \varphi) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \Rightarrow k = 0$$

Tomamos, por lo tanto una solución del tipo

$$U(\rho, \varphi) = R_{01}(\rho) \cos \varphi = \left(A_1 \rho + A_2 \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi$$

$$\frac{\partial U(a, \varphi)}{\partial \varphi} = - \left(A_1 a + A_2 \frac{1}{a} \right) \sin \varphi = 0$$

Luego $A_2 = -A_1 a^2$ y aplicando la condición en el infinito

$$U(\rho, \varphi) = -H_0 \rho \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \cos \varphi$$

Vemos, pues, que el tomar la constante de integración del gradiente de potencial como nula equivale a situar el origen del potencial en la superficie del hilo.

a-20. Demuestre, derivando la fórmula de Rodrigues y haciendo uso de la ecuación generalizada de Lagrange, que

$$\frac{d P_l}{d \xi} = \frac{l}{\xi^2 - 1} (\xi P_l - P_{l-1})$$

a-21. Partiendo del potencial en el eje z , halle

- a) El potencial producido por un anillo circular, de radio a y cargado uniformemente con una carga total Q , en un punto cualquiera del espacio.
- b) El campo Eléctrico hasta el término cuadripolar.

Solución:

- a) El potencial producido por un hilo circular uniformemente cargado, problema 2-13, es

$$V = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

Escribiendo $K = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0}$, V puede expresarse de las formas

$$V = K \frac{1}{z \sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}}} = K \frac{1}{a \sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}}}$$

Derivando, o acudiendo al libro de fórmulas se tiene que

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dots , \quad -1 < x \leq 1$$

de lo que se deduce que, para $|z| > a$

$$V = K \frac{1}{z \sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}}} = K \left(\frac{1}{z} - \frac{a^2}{2} \frac{1}{z^3} \dots \right)$$

Por otra parte, en coordenadas esféricas, para problemas con simetría azimutal, el potencial se expresa de la forma

$$V(r, \theta) = \sum_0^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\xi)$$

donde $\xi = \cos \theta$

En particular, en el eje z , donde $\theta = 0$, $P_l(\xi) = 1$, y $r = z$

$$V(z) = \sum_0^{\infty} \left(A_l z^l + B_l z^{-(l+1)} \right)$$

Comparando el desarrollo anterior, tenemos que

$$A_l = 0 , \quad B_0 = K , \quad B_1 = 0 , \quad B_2 = -K \frac{a^2}{2} \dots$$

$$V(r, \theta) = K \left(\frac{1}{r} - \frac{a^2}{2} \frac{1}{r^3} P_2(\cos \theta) + \dots \right) , \quad |z| > a$$

El resto se deja como ejercicio.

- a-22. Una esfera metálica de radio a está dividida en dos hemisferios aislados entre sí. Calcule el momento dipolar de la esfera cuando ambos hemisferios se conectan a tensiones de $+V$ y $-V$ Voltios, respectivamente.

Encuentre la expresión válida para $r < a$.

Solución:

Como en el problema anterior, partimos de la expansión en coordenadas esféricas del potencial. Dado que dentro del dominio de la solución $r \rightarrow \infty$ y ésta debe ser finita, $A_l = 0$. Por otra parte, al poseer la distribución

simetría impar, también debe ser impar la solución, por lo que sólo pueden intervenir en la misma los polinomios de Legendre con este tipo de simetría, es decir, los correspondientes a l impar. Luego

$$V(a, \theta) = \sum_{l=impar}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\xi)$$

Nosotros estamos interesados en el término dipolar, correspondiente al coeficiente B_1 . Para hallarlo, hacemos uso de la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

$$\int_{-1}^{+1} P_{l'} P_l d\xi = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

En nuestro caso,

$$V(a, \theta) = \begin{cases} V & \text{para } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V & \text{para } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

y

$$\int_0^{+1} P_l^2 d\xi = \frac{1}{2l+1} \Rightarrow \int_0^{+1} P_1^2 d\xi = \frac{1}{3}$$

Multiplicando V por P_1 e integrando

$$\int_0^{+1} V \xi d\xi = \frac{B_1}{3a^2} = \frac{1}{2} V \Rightarrow B_1 = \frac{3}{2} a^2 V$$

El potencial dipolar puede expresarse de las formas

$$V_d = B_1 \frac{1}{r^2} \cos\theta = \frac{p \cos\theta}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

por lo que

$$p = 6\pi \varepsilon_0 a^2 V$$

a-23. En el interior de un condensador plano, cuya distancia entre placas es d , existe un campo $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$.

- a) Si en una de las placas introducimos un pequeño defecto, que modelamos como una protuberancia hemisférica de radio $a \ll d$, calcule la perturbación que la misma produce sobre el potencial inicial $V_0(r, \theta)$.

- b) Calcule el campo en la cúspide de la hemisferia, suponga que el dieléctrico es aire y razoné en que medida afecta este defecto al potencial V_r al cual dicho dieléctrico sufre una ruptura.

Solución:

- a) En la figura A.35 se muestra un corte del condensador en el plano $y = 0$.

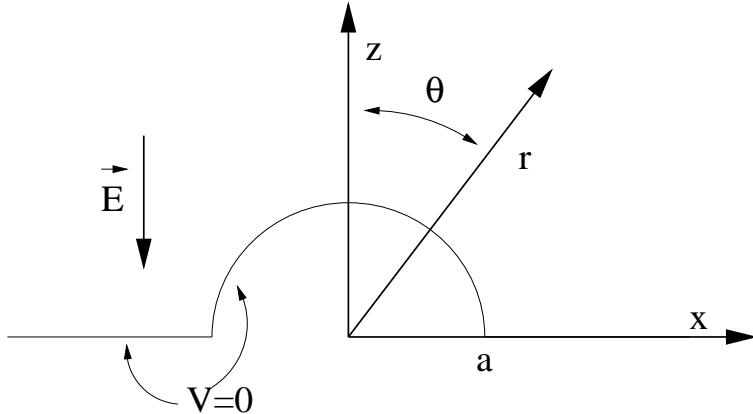


Figura A.35:

La solución general en coordenadas esféricas es

$$V(r, \theta) = \sum_0^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\xi)$$

Puesto que el enunciado nos dice que $a \ll d$, se nos pide una solución aproximada y basta con que la expresemos con el mínimo número de términos significativos.

La condición anterior nos permite suponer que lejos de la protuberancia, el campo existente es \vec{E}_0 y el potencial

$$V \simeq V_0 = E_0 z = E_0 r \cos \theta , \quad r \gg a$$

Luego

$$A_1 = E_0 , \quad A_l = 0 \text{ para } l \neq 1$$

Por otra parte, para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $V = 0$, por lo que en la solución sólo deben intervenir los P_l de índice impar. Nos quedamos, pués, con los términos asociados a P_1 , que son los primeros significativos. También son posibles, aunque menos significativos, los correspondientes a B_3 , etc..

$$V(r, \theta) \simeq (A_1 r + B_1 r^{-2}) \cos \theta$$

El coeficiente B_1 corresponde a la perturbación que, obviamente, es de tipo dipolar. Para calcularlo aplicaremos la condición $V(a) = 0$ para $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$$A_1 a + B_1 a^{-2} = 0 \Rightarrow B_1 = -A_1 a^3 = -E_0 a^3$$

La cuestión (b) se deja como ejercicio.

- a-24. En el seno de un dieléctrico, de constante ϵ_1 , en el cual existe un campo eléctrico uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$, se introduce una esfera dieléctrica de constante ϵ_2 y radio a . Halle el potencial y los campos \vec{E} y \vec{D} resultantes.

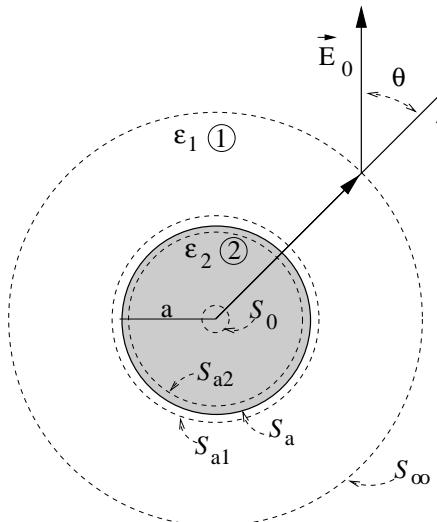


Figura A.36:

Solución:

Como se muestra en la figura A.36, debemos obtener la solución de la ecuación de Laplace en dos regiones, (1) y (2), separadas por una superficie de discontinuidad S_a . Los límites de la región (1) vienen dados por el contorno $S_1 = S_{a1} + S_\infty$, donde S_∞ es una esfera de radio infinito y S_{a1} una superficie próxima a la de discontinuidad pero en el medio (1).

Los límites de la región (2) son, $S_2 = S_{a2} + S_0$, siendo S_0 una superficie de radio elemental que rodea al origen; ya hemos visto que en el proceso de obtención de las soluciones separables se ha excluido el punto $r = 0$, para dividir por r , tanto en coordenadas esféricas como en cilíndricas.

Dentro de la superficie S_0 no existe ninguna singularidad del campo, al no haber especificado la existencia de cargas en $r = 0$, por lo que

podemos fijar el potencial del origen en cualquier valor finito. Tomemos, pues, el punto $r = 0$ como origen de potenciales.

$$V(0, \theta) = 0$$

Para \mathcal{S}_∞ , podemos fijar condiciones tipo Neumann. Dado que muy lejos de la esfera el campo seguirá siendo igual al primitivo \vec{E}_0

$$\vec{E}(\infty, 0) = \vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$$

por lo que, la componente radial es

$$E_r(\infty, 0) = E_0 \cos \theta$$

Para \mathcal{S}_a , según se vio en la sección 9.1.1, nos hacen falta dos relaciones de conexión. Podemos utilizar la continuidad del potencial y, puesto que no se especifican cargas superficiales, la continuidad de la componente normal de \vec{D} .

Resumiendo, las condiciones de contorno de nuestro problema serán

- En \mathcal{S}_0

$$V_2(0, \theta) = 0 \quad (\text{A.53})$$

- En \mathcal{S}_a

$$V_2(a, \theta) = V_1(a, \theta) \quad (\text{A.54a})$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial V_2(a, \theta)}{\partial r} = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1(a, \theta)}{\partial r} \quad (\text{A.54b})$$

- En \mathcal{S}_∞

$$\frac{\partial V_1(\infty, \theta)}{\partial r} = -E_0 \cos \theta \Rightarrow V_1(\infty, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta + cte \quad (\text{A.55})$$

Si expresamos las soluciones generales en (1) y en (2) de la forma

$$V_1 = \sum_0^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\xi)$$

$$V_2 = \sum_0^{\infty} \left(C_l r^l + D_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\xi)$$

Aplicando las condiciones de contorno A.53

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_2 = C_0 + \sum_{l=0}^{\infty} D_l r^{-(l+1)} P_l(\xi) = 0$$

de donde

$$C_0 = 0 \quad , \quad D_l = 0 \quad \forall l \quad (\text{A.56})$$

Queda, pués

$$V_2 = \sum_{l=1}^{\infty} C_l r^l P_l(\xi) = C_1 r \cos \theta + \sum_{l=2}^{\infty} C_l r^l P_l(\xi)$$

De la condición de contorno A.54 se deduce que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial V_1}{\partial r} &= \sum_{l=1}^{\infty} l A_l r^{l-1} P_l(\xi) = A_1 \cos \theta + \sum_{l=2}^{\infty} l A_l r^{l-1} P_l(\xi) = \\ &= -E_0 \cos \theta \end{aligned}$$

de donde

$$A_1 = -E_0 \quad , \quad A_l = 0 \quad \forall l > 1 \quad (\text{A.57})$$

Resulta, por lo tanto

$$V_1 = A_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta + \sum_{l=2}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\xi)$$

La primera condición A.54a en \mathcal{S}_a es

$$V_1(a, \theta) = V_2(a, \theta)$$

luego

$$A_0 + \frac{B_0}{a} + \left(\frac{B_1}{a^2} - E_0 a - C_1 a \right) \cos \theta + \sum_{l=2}^{\infty} \left(B_l a^{-(l+1)} - C_l a^l \right) P_l(\xi) = 0$$

de donde, dada la ortogonalidad de los $P_l(\xi)$

$$A_0 + \frac{B_0}{a} = 0 \quad (\text{A.58})$$

$$B_1 - C_1 a^3 = E_0 a^3 \quad (\text{A.59})$$

$$B_l - C_l a^{2l+1} = 0 \quad \forall l > 1 \quad (\text{A.60})$$

La segunda condición A.54b en \mathcal{S}_a es

$$\varepsilon_2 \frac{\partial V_2(a, \theta)}{\partial r} = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1(a, \theta)}{\partial r}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1}{a^2} B_0 + \left(\varepsilon_2 C_1 + \frac{2\varepsilon_1}{a^3} B_1 + \varepsilon_1 E_0 \right) \cos \theta + \\ + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\varepsilon_2 l C_l a^{l-1} + \varepsilon_1 (l+1) B_l r^{-(l+2)} \right) P_l(\xi) = 0 \end{aligned}$$

Lo cual, junto con A.58, implica que

$$B_0 = 0 \Rightarrow A_0 = 0 \quad (\text{A.61})$$

y

$$B_1 + \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon_1} a^3 C_1 = -\frac{a^3}{2} E_0 \quad (\text{A.62})$$

$$B_l + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{l}{l+1} a^{2l+1} C_l = 0 \quad \forall l > 1 \quad (\text{A.63})$$

Restando A.60 y A.63 obtenemos

$$B_l = C_l = 0 \quad \forall l > 1 \quad (\text{A.64})$$

De A.59 y A.62 obtenemos

$$C_1 = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 , \quad B_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^3 E_0 \quad (\text{A.65})$$

con lo que las soluciones para el potencial son

$$\begin{aligned} V_1 &= \left[\underbrace{-E_0 r}_{(a)} + \underbrace{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^3 E_0 \frac{1}{r^2}}_{(b)} \right] \cos \theta \\ V_2 &= -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 r \cos \theta \end{aligned}$$

Los resultados podrían haberse previsto de una forma más intuitiva y rápida aunque aquí los hayamos deducido con cierto detalle.

El término (a) representa al potencial generatriz del campo primario uniforme \vec{E}_0 . En cuanto al término (b), podemos identificarlo claramente con un potencial dipolar

$$V_d = \frac{1}{4\pi \varepsilon_1} \frac{P \cos \theta}{r^2}$$

de donde se deduce que, desde la región (1), la esfera se ve como un dipolo de magnitud

$$\vec{p} = \frac{4\pi \varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^3 E_0 \hat{z}$$

Esto es cualitativamente previsible porque el campo \vec{E}_0 polariza al medio y crea cargas de polarización en la superficie de separación de los dos medios

$$\rho_{SP} = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \hat{r}$$

de forma que, si $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, el dipolo tiene la dirección del campo, reforzándolo en el medio (1) y apantallándolo en el (2), y sentido contrario al campo si $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

En el interior de la esfera el campo eléctrico es proporcional al aplicado

$$\vec{E}_2 = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \vec{E}_0 < \begin{cases} < \vec{E}_0 & , \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1 \\ > \vec{E}_0 & , \quad \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \end{cases}$$

Para \vec{D} tenemos

$$\vec{D}_2 = \frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \vec{D}_0 \begin{cases} > \vec{D}_0 & , \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1 \\ < \vec{D}_0 & , \quad \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \end{cases}$$

El resumen de estos resultados se presenta en la figura A.37

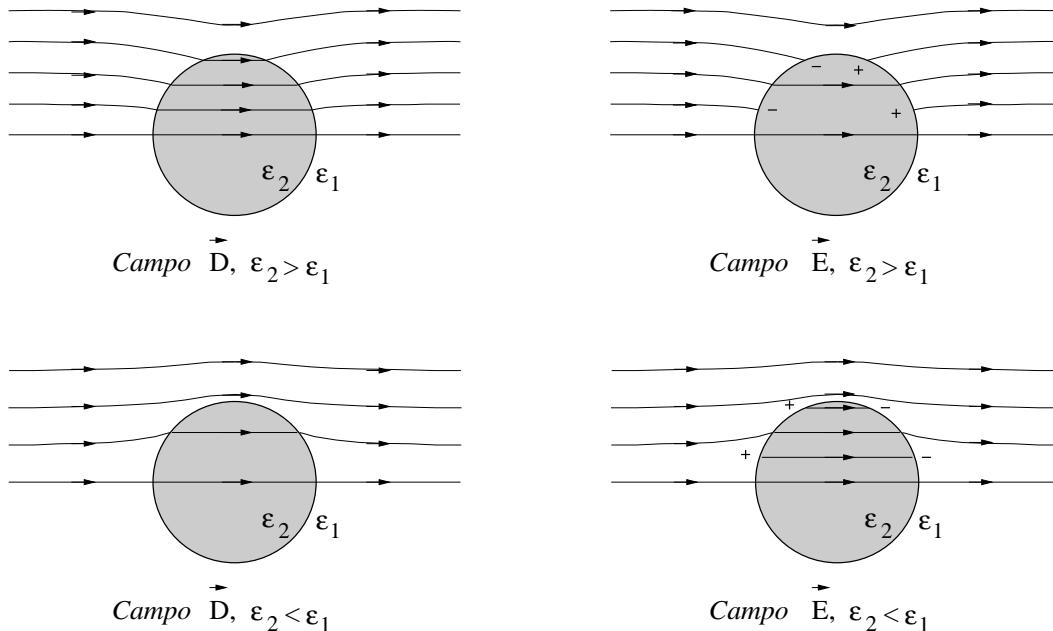


Figura A.37:

- a-25. Una esfera conductora, de radio a y a potencial $V = 0$, se coloca en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0 \hat{z}$. Halle el potencial y el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.

- a-26. Una esfera magnética de radio a y permeabilidad μ se encuentra en el vacío en el seno de un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Calcule el campo magnético en cualquier punto del espacio.
- a-27. Calcule el campo magnético que crea una esfera de radio a uniformemente imanada con una magnetización \vec{M} en la dirección del eje z .
- a-28. Una esfera hueca de radio interior a , exterior b y permeabilidad μ se sitúa en un campo magnético uniforme \vec{B}_0 . Calcule \vec{H} en la cavidad.
- a-29. Considere una esfera conductora de radio a dividida en dos zonas aisladas, un casquete esférico a potencial V_0 y el resto a potencial cero. Utilice el método de Green para calcular el potencial en cualquier punto del eje de simetría del casquete esférico.
- a-30. Un electrodo semiesférico, de muy alta conductividad, se introduce en la Tierra (conductor pobre). Determinar la resistencia del sistema si fluye una corriente I desde el electrodo a la Tierra. Discuta qué sucedería si una persona que tenga un calzado no aislante se aproxima al electrodo. Suponga que la conductividad de la Tierra es $\sigma = 10^{-2} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, que la corriente que entra al electrodo sea de 1000 A , que uno de los pies está a una distancia de 1 m del electrodo y que la distancia entre ambos pies es de $0,75 \text{ m}$. ¿A qué tensión se verá sometida dicha persona? Calcule el campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra.

Solución:

Dado que el aire no es conductor, la corriente y el campo eléctrico deben ser tangenciales en la separación de ambos medios. Bajo estas condiciones, la imagen de una carga es del mismo signo que ésta y la imagen del semiespacio es simétrica al suelo.

Apéndice B

Aplicaciones numéricas

En este apéndice trataremos los fundamentos de una serie de métodos numéricos aplicados comúnmente a la solución de problemas electromagnéticos, esencialmente, los problemas de Poisson, de difusión y de propagación. Analizaremos los aspectos básicos y los ilustraremos mediante programas Mathematica sencillos. Dejaremos a la bibliografía¹ un tratamiento más amplio y riguroso.

B.1. Ecuación de Poisson

En su forma diferencial, la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = -\mathcal{D}(\vec{r}) \quad (\text{B.1})$$

es del tipo

$$\mathcal{L} f(\vec{r}) = g(\vec{r}) \quad (\text{B.2})$$

donde $\mathcal{L} = \nabla^2$ es un operador lineal, f una función incógnita y g una función conocida.

El curso de la solución numérica de esta ecuación diferencial suele conducir a un sistema de ecuaciones algebráicas lineales que puede escribirse de la forma

$$\tilde{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} , \quad A_{ij} x_j = b_i \quad (\text{B.3})$$

donde \tilde{A} es la matriz de los coeficientes de las ecuaciones, \vec{b} el vector de los términos independientes y \vec{x} el vector de incógnitas. Las componentes de este último pueden representar a los valores del potencial en una red de puntos del espacio problema o, simplemente, a los coeficientes de un desarrollo en serie.

La solución final se obtiene invirtiendo la ecuación anterior

$$\vec{x} = \tilde{A}^{-1} \cdot \vec{b} \quad (\text{B.4})$$

La inversión directa de \tilde{A} puede ser problemática por diversas razones. En particular, en espacios de dos o tres dimensiones, con un número de incógnitas razonable, el coste

¹[Burden, Demidowitsch, Morton, Volkov]

computacional de memoria y tiempo de cálculo, o la acumulación de errores de redondeo, pueden resultar excesivos. Los distintos métodos que presentamos difieren entre sí por el camino seguido para el planteamiento del sistema de ecuaciones y por la estrategia adoptada para la inversión aproximada de este último.

B.1.1. Métodos de residuos pesados

Sea \bar{f} una solución aproximada de la ecuación B.2 en \mathcal{V} , obtenida como combinación lineal de un conjunto adecuado de *funciones base* independientes $\{f_j(\vec{r})\}$, $j = 1, 2 \dots, N$.

$$f \simeq \bar{f} = \alpha_j f_j(\vec{r}) \quad (\text{B.5})$$

donde $\{\alpha_j\}$ es un conjunto de coeficientes que minimizan, de alguna forma, la diferencia entre la solución aproximada y la exacta. Al ser N un número necesariamente finito, las soluciones obtenidas por este tipo de métodos es aproximada salvo que la solución pertenezca al espacio subtendido por las funciones base.

Definimos el *residuo* como el resultado de aplicar el operador \mathcal{L} a la diferencia entre la solución aproximada y la exacta.

$$\rho(\vec{r}) \equiv \mathcal{L}\bar{f}(\vec{r}) - g(\vec{r}) = \alpha_j \mathcal{L} f_j(\vec{r}) - g(\vec{r}) \quad (\text{B.6})$$

Si $\bar{f}(\vec{r}) = f(\vec{r})$, $r = 0$.

Los métodos de residuos pesados se basan en la anulación de las integrales

$$R_i = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) p_i(\vec{r}) dv = 0 \quad (\text{B.7})$$

donde $\{R_i\}$ son los *residuos pesados* y $\{p_i(\vec{r})\}$, $i = 1, 2 \dots, N$, las *funciones peso*².

La elección concreta de un conjunto de funciones peso nos proporciona distintos métodos de esta familia.

B.1.1.1. Método de Galerkin

El método de Galerkin toma como funciones peso a las funciones base

$$p_i(\vec{r}) = f_i(\vec{r})$$

Substituyendo en B.7

$$\int_{\mathcal{V}} f_i(\vec{r}) [\alpha_j \mathcal{L} f_j(\vec{r}) - g(\vec{r})] dv = 0$$

que puede escribirse en forma matricial

$$b_i = A_{ij} x_j$$

identificando a

²Tomaremos la misma dimensión para las funciones base y peso

$$b_i = \int_{\mathcal{V}} f_i(\vec{r}) g(\vec{r}) dv , \quad A_{ij} = \int_{\mathcal{V}} f_i(\vec{r}) \mathcal{L} f_j(\vec{r}) dv , \quad x_j = \alpha_j$$

siendo g y f_j conocidos y α_j los coeficientes que hay que determinar para que $R_i = 0 \ \forall i$. Una vez calculados estos coeficientes, la solución aproximada viene dada por la expresión B.5.

B.1.1.2. Método de ajuste puntual

El método de ajuste puntual³ toma como funciones peso a las delta de Dirac

$$p_i(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

en una red de puntos $\{\vec{r}_i\}$ de \mathcal{V} .

Luego, escribiendo $[\mathcal{L} f_j(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_i} = \mathcal{L} f_j(\vec{r}_i)$, B.8 toma la forma

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) [\alpha_j \mathcal{L} f_j(\vec{r}) - g(\vec{r})] dv = \alpha_j \mathcal{L} f_j(\vec{r}_i) - g(\vec{r}_i) = 0 \quad (\text{B.8})$$

lo que equivale a forzar el cumplimiento de la ecuación diferencial en cada uno de los puntos de la red.

En este caso

$$b_i = g(\vec{r}_i) , \quad A_{ij} = \mathcal{L} f_j(\vec{r}_i) , \quad x_j = \alpha_j$$

B.1.1.3. Método de mínimos cuadrados

Este método puede interpretarse como dos problemas equivalentes:

- La minimización de un error cuadrático, definido de la forma

$$E = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r})^2 dv$$

- La anulación de residuos pesados eligiendo las funciones peso

$$p_i(\vec{r}) = \mathcal{L} f_i(\vec{r})$$

Efectivamente, para minimizar el error cuadrático hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0$$

lo que equivale, como puede comprobarse derivando, a

$$\int_{\mathcal{V}} \mathcal{L} f_i(\vec{r}) [\alpha_j \mathcal{L} f_j(\vec{r}) - g(\vec{r})] dv = 0$$

³En inglés se conoce por los nombres *point collocation (matching) method*.

B.1.2. Método de los momentos

El método de los momentos⁴⁵ permite la solución del problema de Poisson en su versión integral y, en particular, hallar la distribución de carga en la superficie de un sistema de conductores, conocido el potencial a que se encuentra cada uno de ellos. A partir de la distribución de carga se obtiene, de forma directa, el campo y el potencial en cualquier punto del espacio.

Para ilustrar el uso de este método en electromagnetismo, se aplicará al cálculo de la distribución de carga sobre la superficie de un conductor a potencial conocido V_0 , según se muestra en la figura B.1.

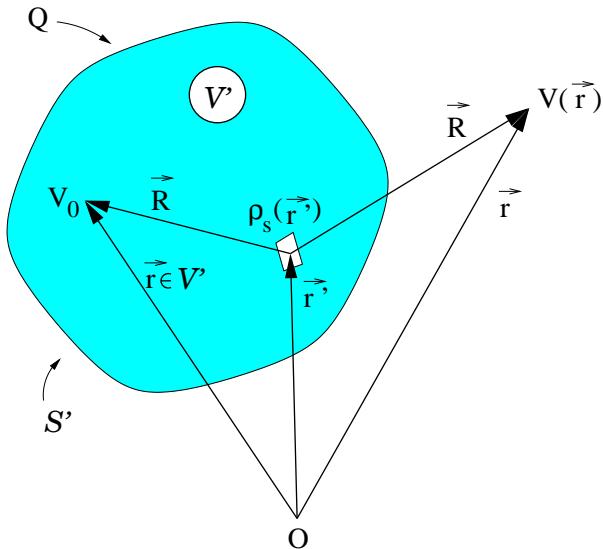


Figura B.1:

La solución de la ecuación de Poisson, siendo tanto $V(\vec{r})$ como $\rho(\vec{r})$ desconocidos, salvo en el conductor, puesto que está al potencial V_0 , puede abordarse numéricamente a partir de su expresión integral

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}') ds'}{R} \quad (\text{B.9})$$

Tomando a \vec{r} en el interior del conductor

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}') ds'}{R} \quad (\text{B.10})$$

donde V_0 es el potencial en cualquier punto del interior del volumen \mathcal{V}' del conductor, R la distancia entre el punto interior $\vec{r}' \in \mathcal{V}'$, en el que se calcula el potencial, y otro

⁴Véase [Harrington].

⁵El momento de orden n de una función $f(x)$ es $M_n[f(x)] = \int x^n f(x) dx$. Este método utiliza integrales análogas a la anterior, en las que x^n se substituye por una función peso $p(x)$, que, por extensión, reciben el nombre genérico de *momento*.

genérico de $\vec{r}' \in \mathcal{S}'$, en el que se evalúa la densidad (véase la figura B.1) ⁶.

La solución de la ecuación B.10 conduce a la obtención de la densidad superficial de carga sobre el conductor. Esta última ecuación puede expresarse de forma análoga a la B.2.

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{r}') [f(\vec{r}')] = g(\vec{r}) \quad (\text{B.11})$$

donde \mathcal{L} es un operador integral lineal que, aplicado a una función $f = f(\vec{r}')$ desconocida, da como resultado una función $g(\vec{r})$ conocida. En el caso que nos ocupa

$$\mathcal{L}[] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{S}'} [] \frac{ds'}{R} , \quad f(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') , \quad g(\vec{r}) = V_0$$

Para resolver B.11 seguiremos un camino análogo al utilizado en la sección anterior. Elegimos una base $\{f_j(\vec{r}')\}$ de dimensión N , para aproximar la solución de la forma

$$f(\vec{r}') \simeq \bar{f}(\vec{r}') = \alpha_j f_j(\vec{r}') \quad (\text{B.12})$$

donde $\{\alpha_j\}$ serán también los coeficientes a determinar.

Dada la linealidad del operador \mathcal{L} , la introducción de la expresión B.12 en la ecuación B.11, da lugar a una versión aproximada de esta última

$$\alpha_j \mathcal{L} f_j(\vec{r}') = g(\vec{r}) \quad (\text{B.13})$$

A continuación se eligen N funciones peso $\{p_i(\vec{r})\}$ y se halla un producto interno ⁷ de la ecuación B.13 con los mismos.

$$\alpha_j \langle p_i, \mathcal{L} f_j \rangle = \langle p_i, g \rangle \quad (\text{B.14})$$

Este sistema de ecuaciones, en el que los productos internos son escalares conocidos y las α_i son las incógnitas, puede escribirse en la forma matricial ya mencionada

$$A_{ij} x_j = b_i \quad (\text{B.15})$$

donde

$$A_{ij} = \langle p_i, \mathcal{L} f_j \rangle , \quad b_i = \langle p_i, g \rangle , \quad x_j = \alpha_j$$

Como en los casos anteriores, la solulción es

$$f \simeq \alpha_j f_j$$

⁶Si el potencial se calcula en un punto de \mathcal{S}' , en su proximidad ($\vec{r} \in \mathcal{S}' \rightarrow \vec{r}'$) y $\frac{1}{R} \rightarrow \infty$, por lo que la integral presenta una singularidad en $\vec{r}' = \vec{r}$. Esta dificultad puede soslayarse colocando los puntos de observación en el interior de \mathcal{V} .

⁷El producto interno de una función F con una función p suele definirse como una integral que, en el caso presente, se realiza sobre las coordenadas \vec{r} . Lo anotaremos de forma abreviada como $\langle p, F \rangle$. Véase la siguiente aplicación para concretar las elecciones de funciones base y peso y las del producto interno.

B.1.2.1. Aplicación al cálculo de la capacidad de un hilo conductor delgado:
metodo_momentos.nb

8

En la figura B.2a se representa un segmento recto de hilo conductor, cuyo radio es a y cuya longitud es l , que se ha centrado sobre el eje coordenado z . Se calculará la densidad de carga a lo largo del mismo en función del potencial a que se encuentra con respecto al infinito.

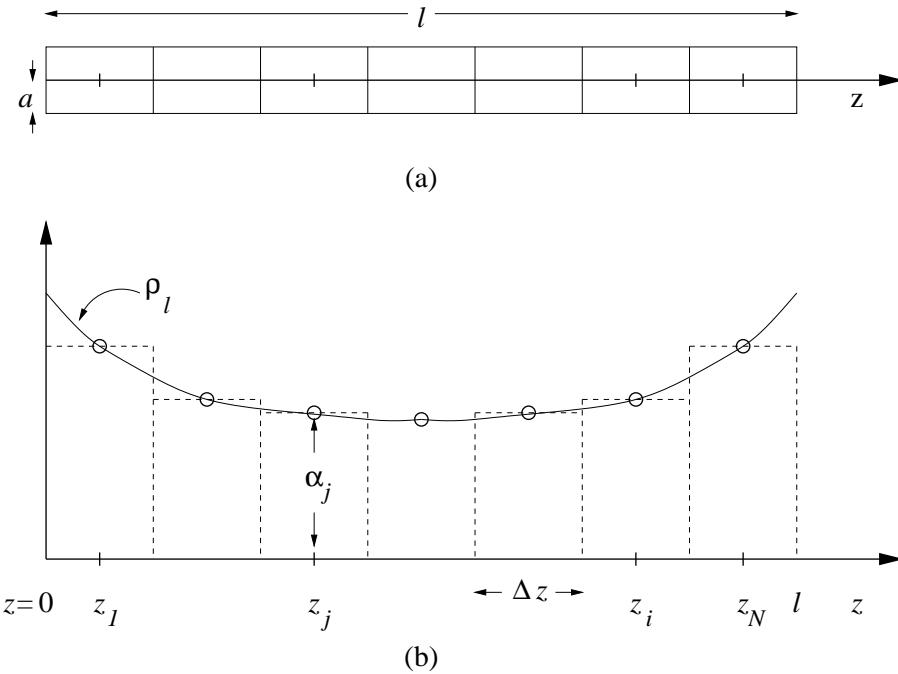


Figura B.2:

El segmento se ha dividido en N celdas de igual longitud Δz , cuyos puntos centrales servirán de referencia para las funciones peso y base. Los $\{z_i\}$ para las primeras y los $\{z_j\}$ para las segundas.

Por simplicidad, elegimos como funciones peso a las delta de Dirac

$$p_i(z) = \delta(z - z_i) \quad (\text{B.16})$$

centradas en las z_i .

Tomamos como producto interno de $p_i(z)$ con $F(z)$

$$\langle p_i, F \rangle \equiv \int_{z=0}^l \delta(z - z_i) F(z) dz = F(z_i) \quad (\text{B.17})$$

por lo que p_i extrae el valor de F en el punto z_i .

⁸Véase [Umashankar]

Como funciones base, véase la figura B.2b, se toman pulsos unitarios de anchura Δz y centrados en los puntos z_j

$$f_j(z) = \begin{cases} 1 & , z_j - \frac{\Delta z}{2} \leq z' \leq z_j + \frac{\Delta z}{2} \\ 0 & , \text{en cualquier otro punto} \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Se ha supuesto que el conductor tiene forma cilíndrica de sección circular con un radio $a \ll l$, lo que permite despreciar la carga depositada en las bases y tener en cuenta solamente a aquella depositada en la cara lateral.

Dada la simetría del problema, al coincidir el eje del hilo con el z , $\rho_s = \rho_s(a, z')$, dado que no depende de la coordenada φ . Esto permite definir una densidad lineal de carga

$$\rho_l(z') = 2\pi a \rho_s(z') \quad (\text{B.19})$$

que se tomará como función incógnita.

La ecuación B.10 es válida, y no presenta problemas de singularidades, si los puntos de observación z_i se sitúan sobre el eje z , en el interior de \mathcal{V}' , y las cargas sobre la superficie lateral del hilo. Según puede verse en la figura B.3

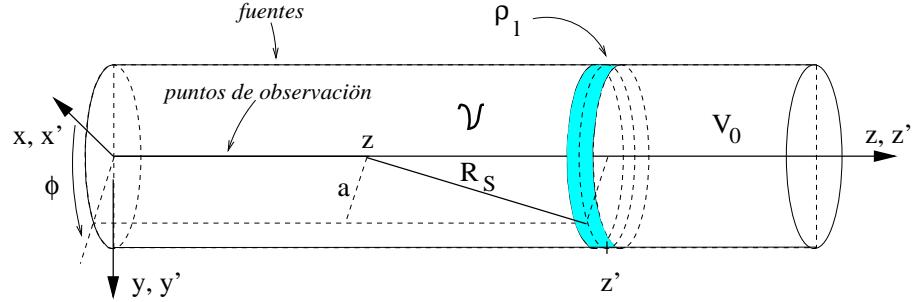


Figura B.3:

$$R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \quad (\text{B.20})$$

Dado que R es invariante ante la permutación de z y z' , puede también considerarse a las cargas situadas en el eje y y a los puntos de observación en la superficie.

Las funciones y operadores de la ecuación B.11 son

$$f = \rho_l(z') \quad , \quad \mathcal{L}() = \int_{z'=0}^l () \frac{dz'}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}} \quad , \quad g = 4\pi\epsilon_0 V_0 \quad (\text{B.21})$$

y los vectores y matrices de B.15

$$A_{ij} = (\mathcal{L}f_j)_{z=z_i} = \int_{z'=x_j-\frac{\Delta z}{2}}^{x_j+\frac{\Delta z}{2}} \frac{dz'}{\sqrt{a^2 + (z_i - z')^2}} \quad , \quad b_i = g(z_i) = 4\pi\epsilon_0 V_0 \quad (\text{B.22})$$

Una vez resuelta la ecuación B.15, la capacidad del hilo será

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V_0} = \frac{1}{V_0} \int_{z=0}^l \rho_l dz \\ &= \frac{1}{V_0} \Delta z \sum_i^N \alpha_i \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

La resolución de un ejemplo concreto se realizará mediante *Mathematica*.

Programa Mathematica *metodo_momentos.nb*:

La solución numérica del problema propuesto requiere el cumplimiento de algunas restricciones. Por tratarse de un hilo delgado, $a \ll l$. Además debe cumplirse la condición $\Delta z > a$.

```
Remove["Global`*"];
```

(B.24)

```
$TextStyle = {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14};
```

(B.25)

Elección de los valores de la longitud del hilo **l metros**, el radio **a metros** y el número de segmentos **N = NN**. Se puede experimentar con el programa asignándole distintos valores a estas variables.

```
l = 1; a = 0.001; NN = 99;
```

(B.26)

Se dan los valores de $\varepsilon_0 = \text{e0}$, de la longitud del intervalo $\Delta z = \text{Dz}$ y el de $\mathbf{g} = 4\pi\varepsilon_0 V_0$.

$$\text{e0} = 8.8510^{-12}; \text{Dz} = \frac{1}{\text{NN}}; \mathbf{g} = 1;$$
(B.27)

La última asignación implica darle al potencial el valor $V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Se continúa por la inicialización de ciertos vectores y la definición de otros: $(x_i) = \text{alfa}$, $(b_i) = \text{beta}$, $(z_i) = \text{zi}$, $(z_j) = \text{zj}$, $(A_{ij}) = \mathbf{L}$ y $(z_i, x_i) = \text{lalfa}$.

```
alfa = Table[0, {i, 1, NN}]; beta = Table[g, {i, 1, NN}];
```

(B.28)

```
zi = Table[Dz/2 + (i - 1) * Dz, {i, 1, NN}]; zj = zi;
```

(B.29)

```
L = Table[0, {i, 1, NN}, {j, 1, NN}]; lalfa = Table[0, {i, 1, NN}, {j, 1, 2}];
```

(B.30)

Cálculo de la matriz L :

$$\text{int} = \int_A^B \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}};$$
(B.31)

$$\text{Do}[\mathbf{L}[[\mathbf{i}, \mathbf{j}]] = \text{int}/.\{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{zj}[[\mathbf{j}]] - \frac{\mathbf{Dz}}{2}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{zj}[[\mathbf{j}]] + \frac{\mathbf{Dz}}{2}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{zi}[[\mathbf{i}]]\}, \{\mathbf{j}, 1, \mathbf{NN}\}, \{\mathbf{i}, 1, \mathbf{NN}\}]; \quad (\text{B.32})$$

LinearSolve[A, b] encuentra el vector x solución de la ecuación matricial $A \cdot x = b$.

$$\mathbf{alfa} = \text{LinearSolve}[\mathbf{L}, \mathbf{beta}]; \quad (\text{B.33})$$

Se genera la gráfica $\rho_l(z)$, previa la la construcción de la matriz *lalfa*

$$\text{Do}[\{\mathbf{lalfa}[[\mathbf{i}, 1]] = \mathbf{zi}[[\mathbf{i}]], \mathbf{lalfa}[[\mathbf{i}, 2]] = \mathbf{alfa}[[\mathbf{i}]]\}, \{\mathbf{i}, 1, \mathbf{NN}\}]; \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{grafalfa} = & \text{ListPlot}[\mathbf{lalfa}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 1.1 * \mathbf{alfa}[[1]]\}, \\ & \text{PlotLabel} \rightarrow \text{" Densidad de carga"}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{"z", "densidad"\}, \\ & \text{Axes} \rightarrow \text{True}, \text{GridLines} \rightarrow \{\{0.5, 1\}, \{\mathbf{alpfa}[(\mathbf{NN} + 1)/2], \mathbf{alpfa}[[1]]\}\}, \\ & \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 0, 0], \text{AbsolutePointSize}[2]\}]; \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

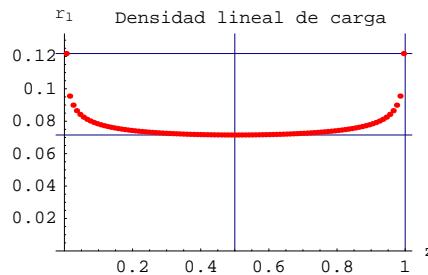


Figura B.4:

Cálculo de la carga en culombios y la capacidad en picofaradios

$$\mathbf{Q} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{NN}} \mathbf{alfa}[[\mathbf{i}]]; \quad (\text{B.36})$$

$$\mathbf{CpF} = 4 * \mathbf{Pi} * \mathbf{e0} * \mathbf{Q} * 10^{12} \quad (\text{B.37})$$

B.1.3. Método de diferencias finitas

Este método hace uso de las diferencias finitas centradas para aproximar la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = -\mathcal{D}(\vec{r}) \quad (\text{B.38})$$

Para ilustrar su fundamento⁹, figura B.5, abordaremos el problema bidimensional definiendo una red uniforme y rectangular que incluya al dominio del problema. Sólo romperemos la regularidad de la red en el contorno, sobre el que situaremos nudos en los puntos de intersección con los hilos de la misma.

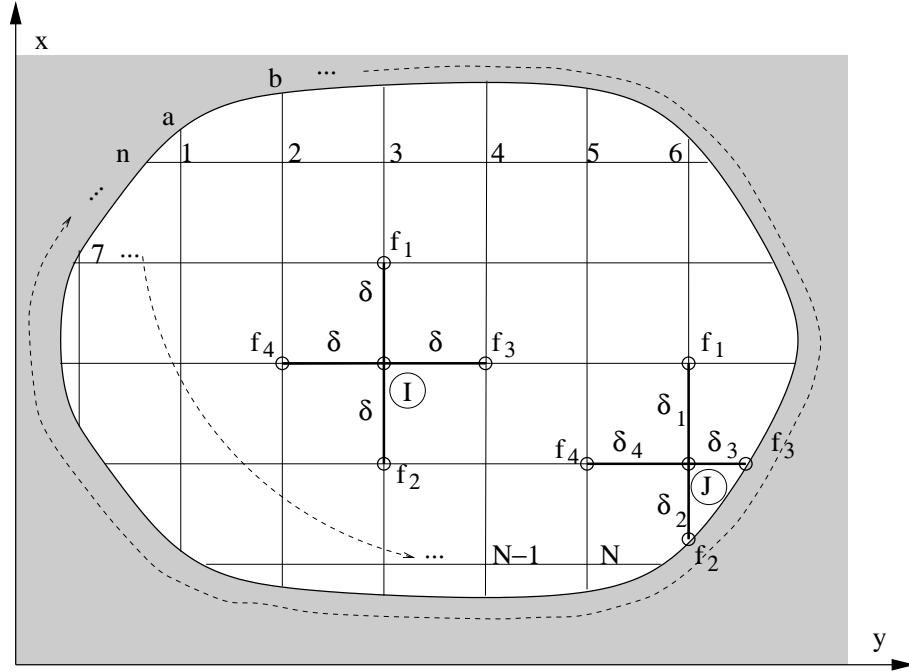


Figura B.5:

De esta forma se obtienen estrellas regulares, como la correspondiente al nudo $I = (x_i, y_i)$ y sus cuatro vecinos

$$(x_i \pm \delta, y_i) , (x_i, y_i \pm \delta)$$

y estrellas irregulares, que contienen nudos del contorno, como la que rodea a $J = (x_j, y_j)$, compuesta por nudos a distancias desiguales de J . En general, los nudos vecinos son

$$(x_j + \delta_1, y_j) , (x_j - \delta_2, y_j) , (x_j, y_j + \delta_3) , (x_j, y_j - \delta_4)$$

En cualquier caso, si las δ son suficientemente pequeñas, podemos desarrollar el potencial en serie de Taylor alrededor de cualquier nudo (x, y)

$$f(x + \delta, y) = f(x, y) + \delta \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(\delta^3)$$

Dando a δ los valores $\pm\delta$, restando y despreciando términos de orden $O(\delta^3)$, obtenemos

$$\frac{df}{dx} \simeq \frac{f(x + \delta, y) - f(x - \delta, y)}{2\delta} \quad (\text{B.39})$$

⁹Véase [Smith]

Sumando y despreciando términos de orden $O(\delta^4)$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \simeq \frac{f(x + \delta, y) + f(x - \delta, y) - 2f(x, y)}{\delta^2} \quad (\text{B.40})$$

y

$$\nabla^2 f \simeq \frac{1}{\delta^2} (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0) \quad (\text{B.41})$$

donde, véase la figura anterior, para simplificar la notación, se ha escrito $f_0 = f(x, y)$, $f_1 = f(x + \delta, y)$, etc.

Para las estrellas irregulares podemos aproximar $\nabla^2 f$ dando a δ los valores δ_1 y δ_2 en el desarrollo en la dirección x y δ_3 y δ_4 en el correspondiente a la dirección y .

Despejando las derivadas segundas y despreciando términos de orden $O(\delta^3)$, se obtiene

$$\nabla^2 f \simeq \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 - \alpha_0 f_0 \quad (\text{B.42})$$

donde los coeficientes correctores son

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2}{\delta_1(\delta_1 + \delta_2)}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{\delta_2(\delta_1 + \delta_2)}, \quad \alpha_3 = \frac{2}{\delta_3(\delta_3 + \delta_4)} \\ \alpha_4 &= \frac{2}{\delta_4(\delta_3 + \delta_4)}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta_1 \delta_2} + \frac{1}{\delta_3 \delta_4} \right) \end{aligned}$$

En general, si la divergencia del campo en cada punto es \mathcal{D}_0 , obtenemos las siguientes ecuaciones en diferencias finitas

$$f_0 = \frac{1}{4\alpha_0} \left[\mathcal{D}_0 + \sum_{l=1}^4 \alpha_l f_l \right] \quad (\text{B.43})$$

Estableciendo esta ecuación para todos los nudos interiores del volumen problema $0 \rightarrow i = 1 \dots N$ tendremos N ecuaciones con N incógnitas.

Si al nudo i le corresponde una estrella regular, los coeficientes α son todos iguales a la unidad. En caso contrario toman los valores indicados anteriormente.

Las ecuaciones B.43 forman un sistema de N ecuaciones no homogéneas que puede expresarse de la forma B.3, donde \tilde{A} es, para N grande, una matriz de tipo disperso ('en inglés 'sparse'), con pocos elementos no nulos, \vec{x} es el vector incógnita cuyos componentes son los N potenciales de los nudos internos y \vec{b} el vector de datos, cuyas componentes son combinaciones lineales de las divergencias \mathcal{D}_i y de los potenciales de los nudos frontera, f_a, \dots, f_n .

De esta forma queda planteado el problema de Poisson con condiciones de Dirichlet. El planteamiento de condiciones tipo Neumann se deja para más adelante.

B.1.3.1. Resolución iterativa del sistema de ecuaciones

Cuando N es grande y el problema no es unidimensional, la inversión directa del sistema de ecuaciones no es factible. No obstante, si la matriz \tilde{A} es dispersa, como es nuestro caso, el sistema resultante se presta a una solución iterativa aproximada. Como en todo proceso iterativo utilizado en problemas estáticos, se hace necesaria una

estimación previa del resultado \vec{x}^0 . La convergencia del método depende de lo ajustada que sea esta estimación pero, en la práctica, no siempre es sencillo hacerla por lo que a menudo se recurre a tomar $\vec{x}^0 = \vec{0}$. Mencionaremos sólo los métodos más simples.

Método de Jacobi. Consiste en aplicar la expresión B.43, reiterada y ordenadamente, a todos los puntos de la red, $m = 1 \cdots N$. Los valores de la solución en los nudos de la estrella se toman de la iteración previa. Es decir

$$f_m^k = \frac{1}{4\alpha_m} \left[\mathcal{D}_m + \sum_{l=1}^4 \alpha_l f_l^{k-1} \right] \quad (\text{B.44})$$

el valor de potencial en el nudo m , en la iteración $k - esima$, se estima en función de los potenciales f_l^{k-1} , estimados en la iteración anterior, de los nudos de su estrella.

El proceso iterativo se termina cuando se alcanza un grado de convergencia adecuado, es decir, cuando la diferencia entre dos estimaciones sucesivas, x^{k-1} y x^k es lo suficientemente pequeña.

Este proceso requiere una memoria de dimensión $2N$. N para almacenar los f^{k-1} y otros tantos para los f^k .

Método de Gauss-Seidel. Mejora la eficacia del anterior reduciendo la memoria a la mitad y acelerando notablemente la convergencia. Se aplica la expresión

$$f_m^k = \frac{1}{4\alpha_m} \left[\mathcal{D}_m + \sum_{l=1}^4 \alpha_l f_l^* \right] \quad (\text{B.45})$$

que sólo difiere de la anterior en que los datos de las sucesivas iteraciones se almacenan siempre en el mismo lugar de la memoria, siendo f_l^* los valores ya calculados ¹⁰ para f_l en el momento en que se va a calcular f_m^k .

Método de relajación. Este método , a su vez, acelera la convergencia con respecto al de Gauss-Seidel.

Si al segundo miembro de B.45 le sumamos y restamos el valor previamente calculado para el centro de la estrella $f_m^{k-1} \equiv f_m^*$, la fórmula de actualización del método Gauss-Seidel puede escribirse de la forma

$$f_m^k = f_m^* + R_m^* \quad (\text{B.46})$$

donde

$$R_m^* = \frac{1}{4\alpha_m} \left[\mathcal{D}_m + \sum_{l=1}^4 \alpha_l f_l^* \right] - f_m^* \quad (\text{B.47})$$

se define como el *residuo*, en el instante anterior al cálculo de f_m^k , correspondiente al nudo m . La aplicación de B.46 equivale a la anulación del residuo en dicho nudo, modificando al mismo tiempo el de los nudos adyacentes.

¹⁰Bién sea en la iteración anterior o en la actual.

El *método de relajación* modifica la expresión anterior en el sentido de no sumar el residuo sino una cantidad proporcional al mismo.

$$f_m^k = f_m^* + a R_m^* \quad (\text{B.48})$$

Cuando $a > 1$ se dice que el proceso es de *sobrerelajación*¹¹ y, cuando $a < 1$, de *subrelajación*, que no tomaremos en consideración en lo sucesivo. Si $a = 1$, el método se reduce al de Gauss-Seidel.

Aunque existen reglas prácticas para la relajación manual¹², los ordenadores necesitan algoritmos sistemáticos. Para evitar que el proceso se inestabilice debe utilizarse una sobrerelajación, con $1 \leq a < 2$. El valor óptimo es tanto más próximo a 2 cuanto mayor es el número N de incógnitas.

El proceso de relajación termina cuando todos los residuos alcanzan valores inferiores a una cota prefijada.

B.1.3.2. Aplicación al estudio del condensador plano: *metodo_DF_SOR_condensador.nb*

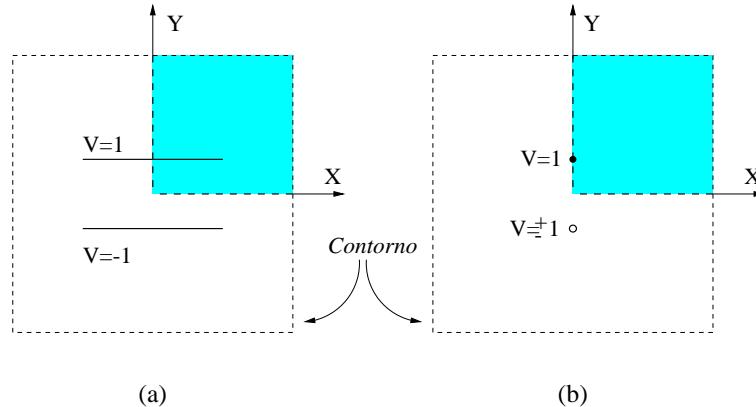


Figura B.6:

En la figura B.6 proponemos algunos problemas bidimensionales fácilmente resolubles mediante el método de las diferencias finitas. En ellos aparecen electrodos, de conductividad $\sigma \rightarrow \infty$ y a distintos potenciales, inmersos en un medio de conductividad finita σ y rodeados de otro medio cuya conductividad es nula o infinita. Dado que el dominio de un problema numérico es necesariamente finito, la frontera del mismo debe ser una curva finita que en el caso presente es el rectángulo externo. También puede considerarse que el plano de la figura corresponde a la sección de un problema análogo, con simetría de traslación a lo largo del eje z y resoluble mediante la ecuación de Laplace bajo las mismas condiciones de contorno.

La figura B.6b corresponde a problemas con dos electrodos puntuales. Si ambos electrodos tienen el mismo potencial, los dos ejes son de simetría por lo que sólo se necesita

¹¹Suele anotarse con las siglas "método SOR" (Successive Over-Relaxation).

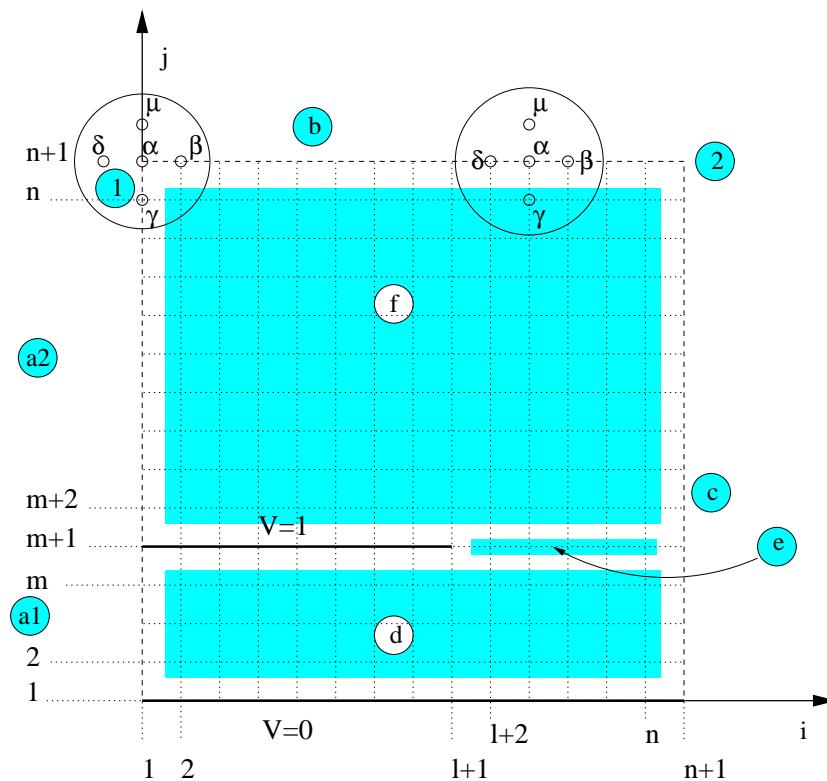
¹²Véase Ramo

la solución en el rectángulo sombreado. Si los potenciales son de igual magnitud y distinto signo, las solución del primer cuadrante (sombreado en la figura) es antisimétrica respecto a la del cuarto, con lo que sigue bastando con la solución en el primero¹³.

La figura B.6a corresponde al problema de una lámina poco conductora en la que se introducen dos electrodos lineales iguales y paralelos¹⁴. Este porblema es análogo al de un condensador bidimensional plano incluido en un medio de constante dieléctrica $\epsilon \neq 0$ y rodeado por un medio con $\epsilon = 0$. Esto último no es realista pero, dado que la frontera exterior se encuentra en una región de campo bajo, la solución en la zona cercana a las placas no difiere substancialmente a la correspondiente a un dominio ilimitado. A continuación se describe un programa Mathematica que resuelve este problema.

Planteamiento:

Red numérica



Cada nudo se describe por las coordenadas ($x_i = (i - 1) \times h$, $y_j = (j - 1) \times h$) o por los índices (i, j), donde $\{i, 1, n + 1\}$ y $\{j, 1, n + 1\}$. La notación $\{i, n_1, n_2\}$ indica que el índice i toma los valores enteros $n_1, n_1 + 1, \dots, n_2$.

Nudos interiores

En las estrellas correspondientes a nudos interiores, los residuos, expresión B.47 pueden expresarse de la forma la forma

$$R_\alpha = \frac{1}{4} (V_\beta + V_\gamma + V_\delta + V_\mu) - V_\alpha \quad (\text{B.49})$$

Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno se aplican al perímetro del cuadrante y a la semiplaca del condensador, de longitud $l \times h$.

Estas condiciones son de Dirichlet en:

1. La línea $y = 0$, ($\{i, 1, n + 1\}, 1$). Dado que las dos placas están a potenciales de igual magnitud y distinto signo, el potencial en dicha línea debe ser

$$V = 0$$

2. La placa ($\{i, 1, l + 1\}, m + 1$). En ésta se especifica

$$V = 1$$

En el resto del contorno las condiciones son de tipo Neumann:

1. En el tramo **b** ($\{i, 2, n\}, n+1$), correspondiente al borde de la lámina, figura B.7, el campo es tangencial y su componente normal es nula. Se cumple, por lo tanto, la condición de Neumann

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

Si nos fijamos en la estrella marcada en este borde, la aproximación en diferencias centradas es, segun la expresión B.39,

$$\frac{V_\mu - V_\gamma}{2h} = 0 \Rightarrow V_\mu = V_\gamma \quad (\text{B.50})$$

donde, en este caso, μ es un nudo no incluido en la red. Eliminando V_μ de la expresión B.49 se tiene

$$R_\alpha = \frac{1}{4} (2V_\gamma + V_\delta + V_\beta) - V_\alpha \quad (\text{B.51})$$

En el tramo **c** ($n+1, \{j, 2, n\}$), por razones análogas,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

y

$$R_\alpha = \frac{1}{4} (2V_\delta + V_\gamma + V_\mu) - V_\alpha \quad (\text{B.52})$$

2. En los nudos de las esquinas **1** (1, n+1) y **2** (n+1, n+1) se cumplen ambas condiciones $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$.

En **1**, los puntos exteriores son δ y μ , con lo que

$$R_\alpha = \frac{1}{2} (V_\beta + V_\gamma) - V_\alpha \quad (\text{B.53})$$

En **2**

$$R_\alpha = \frac{1}{2} (V_\delta + V_\gamma) - V_\alpha \quad (\text{B.54})$$

3. En los tramos **a1** (1, j, 2, m) y **a2** (1, j, m+2, n) se cumple la condición $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ ya que la simetría entre el primer y segundo cuadrante implica que

$$V_\delta = V_\beta \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

de lo cual resulta

$$R_\alpha = \frac{1}{4} (2V_\beta + V_\gamma + V_\mu) - V_\alpha \quad (\text{B.55})$$

El programa que se describe en el siguiente apartado actualiza los valores del potencial en cada nudo comenzando por la frontera, **a1**, **a2**, **1**, **b**, **2** y **c**. A continuación actualiza el interior (**d**, **e** y **f**) y elabora una estimación de la convergencia sumando los valores absolutos de los residuos.

Programa Mathematica: *metodo_DF_SOR_condensador.nb*:

$$\text{Remove}["Global' * "]; \quad (\text{B.56})$$

$$\$TextStyle = \{\text{FontFamily} \rightarrow "Times", \text{FontSize} \rightarrow 14\}; \quad (\text{B.57})$$

Se especifican:

- Los valores de $n = \text{NN}$, $m = \text{MM}$ y $l = \text{LL}$.

$$\text{NN} = 30; \text{MM} = 10; \text{LL} = 15; \text{itmax} = 1000; \quad (\text{B.58})$$

- El valor de la constante de relajación $a = \text{AA}$. Este valor es óptimo para este problema y para las especificaciones anteriores.

$$\text{AA} = 1.95; \quad (\text{B.59})$$

- El número máximo de iteraciones **itmax** y la cota de error **emax** que alcanzará el resultado si el número de iteraciones realizadas no supera a *itmax*.

$$\mathbf{itmax = 1000 ; emax = 0,001;} \quad (\text{B.60})$$

Se inicializan las matrices que han de almacenar los valores del potencial y del error resultante después de cada iteración. A esta última se le asigna un valor monodimensional que, posteriormente, mediante la orden Append, irá incrementando sus dimensiones hasta que haya almacenado los sucesivos valores de el error resultante al final de cada una de las iteraciones realizadas *k*.

$$\mathbf{v = Table[0, \{i, 1, NN + 1\}, \{j, 1, NN + 1\}];} \quad (\text{B.61})$$

$$\mathbf{errorit = Table[0, \{i, 1, 1\}];} \quad (\text{B.62})$$

El potencial en la placa es $V = 1$.

$$\mathbf{Do[v[[i, MM + 1]] = 1, \{i, LL + 1\}];} \quad (\text{B.63})$$

En la figura B.8 representa gráficamente el potencial inicial de la red.

$$\mathbf{ListPlot3D[Transpose[v], ViewPoint \rightarrow \{0, 0, 2\}, PlotRange \rightarrow \{0, 1\}];} \quad (\text{B.64})$$

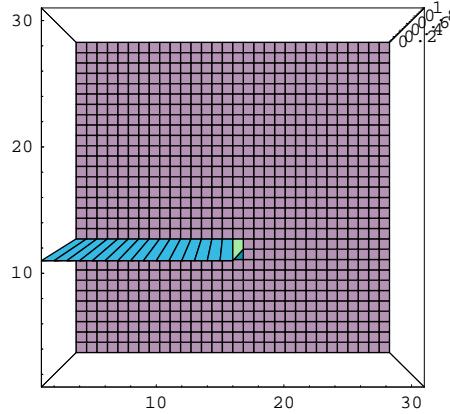


Figura B.8:

Se dan valores iniciales al número **k** de iteraciones realizadas y al **error** cometido en las sucesivas iteraciones

$$\mathbf{k = 0; error = 1;} \quad (\text{B.65})$$

Se llevan a cabo iteraciones sucesivas mientras que el error sea mayor que el máximo estipulado pero sin sobrepasar el número máximo de iteraciones *itmax*. Esto se realiza

mediante el lazo condicional **While**, cuyo formato es *While[condición, cuerpo de la iteración]*¹⁵. *cuerpo* es un conjunto de órdenes sucesivas separadas por (;) y *condición* es una condición lógica tal que, mientras ésta se cumple, *cuerpo* se ejecuta iterativamente. Cuando deja de cumplirse, el lazo finaliza. La orden B.65, *error* = 1, permite que la primera iteración comience ya que *error* > *emax*. Dado que esta orden no cabe en una página, será necesario distribuirla en dos.

While[(*error* > *emax*)&&(*k* < *itmax*), (B.66)

error = 0; *k* = *k* + 1; (B.67)

Do[(B.68)

$$\text{res} = \frac{1}{4}(2 * v[[1 + 1, j]] + v[[1, j + 1]] + v[[1, j - 1]]) - v[[1, j]]; \\$$

$$v[[1, j]] = v[[1, j]] + AA * \text{res},$$

{*j*, 2, MM}];

Do[(B.69)

$$\text{res} = \frac{1}{4}(2 * v[[1 + 1, j]] + v[[1, j + 1]] + v[[1, j - 1]]) - v[[1, j]]; \\$$

$$v[[1, j]] = v[[1, j]] + AA * \text{res},$$

{*j*, MM + 2, NN}];

$$\text{res} = \frac{1}{2}(v[[1, NN]] + v[[2, NN + 1]]) - v[[1, NN + 1]]; (B.70)$$

$$v[[1, NN + 1]] = v[[1, NN + 1]] + AA * \text{res};$$

$$\text{res} = \frac{1}{2}(v[[NN, NN + 1]] + v[[NN + 1, NN]]) - v[[NN + 1, NN + 1]]; (B.71)$$

$$v[[NN + 1, NN + 1]] = v[[NN + 1, NN + 1]] + AA * \text{res};$$

Do[(B.72)

$$\text{res} = \frac{1}{4}(2 * v[[i, NN]] + v[[i - 1, NN + 1]] + v[[i + 1, NN + 1]])$$

$$- v[[i, NN + 1]]; \\$$

$$v[[i, NN + 1]] = v[[i, NN + 1]] + AA * \text{res},$$

{*i*, 2NN}];

Do[(B.73)

$$\text{res} = \frac{1}{4}(2 * v[[NN, j]] + v[[NN + 1, j + 1]] + v[[NN + 1, j - 1]])$$

$$- v[[NN + 1, j]]; \\$$

$$v[[NN + 1, j]] = v[[NN + 1, j]] + AA * \text{res},$$

{*j*, 2, NN}];

El lazo se ha cortado en esta línea pero continúa en la página siguiente

¹⁵Consúltese la ayuda de Mathematica.

Do[(B.74)

$$\text{res} = \frac{1}{4}(\mathbf{v}[[\mathbf{i} + 1, \mathbf{j}]] + \mathbf{v}[[\mathbf{i} - 1, \mathbf{j}]] + \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{j} + 1]] + \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{j} - 1]]) - \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{j}]]; \\ \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{j}]] = \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{j}]] + \mathbf{AA} * \text{res};$$

error = error + Abs[res],

{ $\mathbf{i}, 2, \mathbf{NN}$ }, { $\mathbf{j}, 2, \mathbf{MM}$ }];

Do[(B.75)

$$\text{res} = \frac{1}{4}(\mathbf{v}[[\mathbf{i} + 1, \mathbf{MM} + 1]] + \mathbf{v}[[\mathbf{i} - 1, \mathbf{MM} + 1]] + \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{MM} + 1 + 1]] \\ + \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{MM} + 1 - 1]])$$

- $\mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{MM} + 1]];$

$\mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{MM} + 1]] = \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{MM} + 1]] + \mathbf{AA} * \text{res};$

error = error + Abs[res],

{ $\mathbf{i}, \mathbf{LL} + 2, \mathbf{NN}$ }];

Do[(B.76)

$$\text{res} = \frac{1}{4}(\mathbf{v}[[\mathbf{i} + 1, \mathbf{j}]] + \mathbf{v}[[\mathbf{i} - 1, \mathbf{j}]] + \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{j} + 1]] + \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{j} - 1]]) - \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{j}]]; \\ \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{j}]] = \mathbf{v}[[\mathbf{i}, \mathbf{j}]] + \mathbf{AA} * \text{res};$$

error = error + Abs[res],

{ $\mathbf{i}, 2, \mathbf{NN}$ }, { $\mathbf{j}, \mathbf{MM} + 2, \mathbf{NN}$ }];

If[$\mathbf{k} == 1, \mathbf{errorit}[[\mathbf{k}]] = \mathbf{error}, \mathbf{errorit} = \mathbf{Append}[\mathbf{errorit}, \mathbf{error}]$] (B.77)

]; (B.78)

- El lazo condicional comienza en la línea B.66, donde se establece la *condición*, y termina en la B.78.
- En la línea B.67 se inicializa $\mathbf{error} = 0$ para que al final de la iteración esta variable contenga la suma de los errores calculados a lo largo de esta iteración en los nudos interiores. Asimismo, se actualiza el valor de k que identifica a la iteración en curso.
- Los lazos **Do** que comienzan en las líneas B.68 y B.69 calculan los valores de los potenciales en los nudos de los tramos del contorno **a1** y **a2**¹⁶.
- En la línea B.70 se calcula el residuo del nudo de esquina **1** y en la siguiente el potencial correspondiente. En la B.71 y la siguiente se hacen los mismos cálculos para el nudo **2**.
- Los **Do** que comienzan en las líneas B.72 y B.73 aplican las condiciones de contorno a los nudos de **b** y **c**.

¹⁶Véase la figura B.7.

- Los **Do** que comienzan en las líneas B.74, B.75 y B.76 calculan los valores del potencial en las zonas **d**, **e** y **f** respectivamente.
- El **If** de la línea B.77 construye la lista **errorit**, de dimensión k , que contiene los errores (*error*) calculados en todas las iteraciones realizadas.

Resuelto el problema, se lee el número de iteraciones realizadas **it**

$$\mathbf{it} = \mathbf{k} \quad (\text{B.79})$$

y se comprueba que el error alcanzado es inferior a *emax*.

$$\mathbf{error} \quad (\text{B.80})$$

Por último, se realizan las siguientes gráficas:

- Evolución de la convergencia del proceso de iteración, figura B.9.

```
ListPlot[errorit, PlotJoined → True,
          PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0], AxesLabel → {"k", "error"}];
```

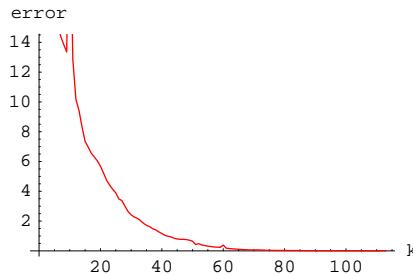
(B.81)


Figura B.9:

- Líneas equipotenciales para $v = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$.

```
ListContourPlot[Transpose[v], ColorFunction → Hue,
          Contours → {0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9}];
```

(B.82)

Según se observa en la figura B.10, las equipotenciales son normales al contorno de la izquierda, por simetría, y a los de arriba y derecha porque el campo es tangencial a los mismos. La simetría del primer contorno exige también que la componente normal del campo se anule en él.

- Potencial a lo largo de las siguientes líneas paralelas entre sí:

- Central ($i=0$).
- Extremo de condensador ($i=LL+1$).

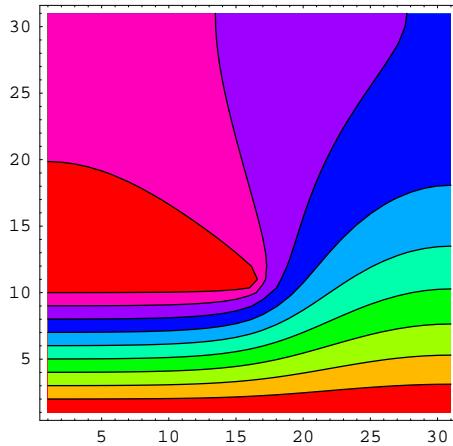


Figura B.10:

- Fuera del condensador ($i = LL + 6$).

$$\mathbf{v1} = \text{Table}[0, j, 1, NN + 1]; \quad (B.83)$$

$$\text{Do}[\mathbf{v1}[[j]] = \mathbf{v}[[1, j]], j, NN + 1] \quad (B.84)$$

```
v1gr = ListPlot[v1, PlotJoined -> True,
  PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], AxesLabel -> {"i", "V"}, 
  DisplayFunction -> Identity];
```

$$\mathbf{v2} = \text{Table}[0, j, 1, NN + 1]; \quad (B.86)$$

$$\text{Do}[\mathbf{v2}[[j]] = \mathbf{v}[[LL + 1, j]], j, NN + 1] \quad (B.87)$$

```
v2gr = ListPlot[v2, PlotJoined -> True,
  PlotStyle -> RGBColor[0, 1, 0], AxesLabel -> {"i", "V"}, 
  DisplayFunction -> Identity];
```

$$\mathbf{v3} = \text{Table}[0, j, 1, NN + 1]; \quad (B.89)$$

$$\text{Do}[\mathbf{v3}[[j]] = \mathbf{v}[[LL + 6, j]], j, NN + 1] \quad (B.90)$$

```
v3gr = ListPlot[v3, PlotJoined -> True, (B.91)
```

```
PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1], AxesLabel -> {"i", "V"},  
DisplayFunction -> Identity];
```

```
Show[v1gr, v2gr, v3gr, DisplayFunction -> $DisplayFunction]; (B.92)
```

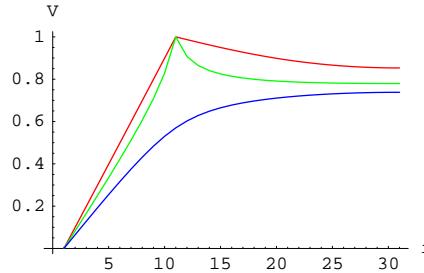


Figura B.11:

La figura B.11 muestra conjuntamente los potenciales de las tres líneas. El de la central en rojo, el de la del extremo en verde y el de la externa en azul.

El programa *metodo_DF-SOR_condensador.nb* resuelve el problema de los dos electrodos puntuales. Aquí sólo se muestran sus resultados: $V(x, y)$ en la figura B.12 y las líneas equipotenciales en la B.13.

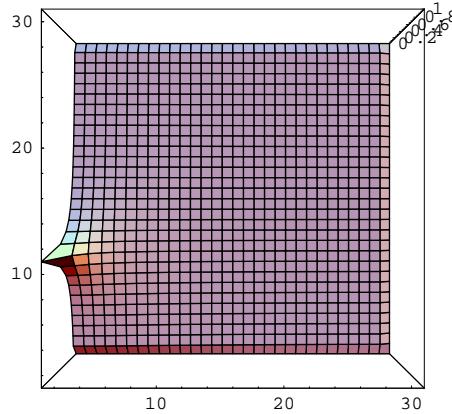


Figura B.12:

B.1.4. Métodos variacionales

Algunos de los métodos numéricos más utilizados para la solución de problemas electromagnéticos se fundamentan en principios variacionales. Aquí los introduciremos

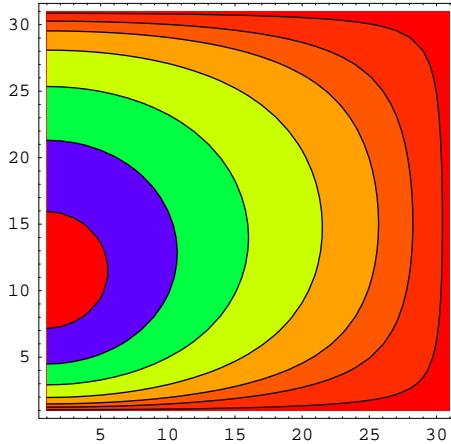


Figura B.13:

para el tratamiento de la ecuación de Poisson. Consideraremos la generalización de la misma que es aplicable a medios dieléctricos no homogéneos. Para éstos se cumple que

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho , \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} , \quad \vec{E} = -\nabla V$$

donde, en principio, suponemos que ε es una función continua de \vec{r} en \mathcal{V} ¹⁷.

En consecuencia, el potencial cumple una ecuación del tipo

$$\nabla \cdot (\eta \nabla f) = -g \quad (\text{B.93})$$

siendo, en este caso, $\eta = \varepsilon$, $f = V$ y $g = \rho$

Los métodos numéricos variacionales substituyen la resolución directa de esta ecuación, con las condiciones de contorno pertinentes, por la solución aproximada de

$$\left(\frac{\partial \Phi(\varphi)}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=f} = 0$$

donde $\Phi(\varphi)$ es un funcional que se definirá más adelante. Esto equivale a buscar la función $\varphi = f$ que hace estacionario (mínimo) a $\Phi(\varphi)$ ¹⁸.

Cálculo variacional:

Empecemos recordando que, por definición, una función $\phi(x)$ es *estacionaria* en x_0 si

$$\left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right)_{x=x_0} = 0$$

Un desplazamiento δx , pequeño pero arbitrario, a partir de x_0 , produce una primera variación $\delta\phi = 0$.

¹⁷Para simplificar, consideraremos que ρ , ε , y V son funciones reales. La extensión del problema al dominio complejo es sencilla. Las discontinuidades de ε pueden tenerse en cuenta mediante condiciones de continuidad adecuadas

¹⁸Éste funcional suele interpretarse como la 'energía del sistema'.

Efectivamente, se define como *primera variación* de ϕ a

$$\delta\phi \equiv \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \delta x \quad (\text{B.94})$$

Dado que en un punto estacionario $\left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\right)_{x=x_0} = 0$, también lo es cualquier $\delta\phi$ alrededor de dicho punto.

Desarrollando en serie $\phi(x + \delta x)$ y despreciando términos de orden $O(\delta^2)$, se comprueba que $\delta\phi \simeq \phi(x + \delta x) - \phi(x)$

Nos interesa resaltar que el operador δ conmuta con el de derivación parcial, ya que, al ser δx independiente de x ,

$$\delta \left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \delta x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \delta x \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi)$$

En concreto

$$\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi) \quad (\text{B.95})$$

Estos conceptos son extensibles a funciones de varias variables y a funcionales.

Sea \mathcal{V} el volumen del problema. En el contorno \mathcal{S} fijamos condiciones de Dirichlet, Neumann o mixtas, que pueden formularse convenientemente con las expresiones

$$[f]_{\mathcal{S}_1} = f_s \Rightarrow [\delta f]_{\mathcal{S}_1} = 0 \quad (\text{B.96})$$

$$[\eta \vec{n} \cdot \nabla f + \beta f]_{\mathcal{S}_2} = \gamma \quad (\text{B.97})$$

donde \mathcal{S}_1 es aquella parte de \mathcal{S} en la que se cumplen condiciones de Dirichlet, \mathcal{S}_2 aquella otra en la que se cumplen las mixtas, \vec{n} la normal a \mathcal{S} y β y γ funciones definidas en \mathcal{S}_2 .

Las condiciones de Dirichlet fijan el valor del potencial para cada punto de la superficie \mathcal{S}_1 , por lo que la primera variación del potencial δf en dichos puntos es nula. Para que la solución sea única, este tipo de condiciones debe fijarse en al menos un punto del contorno. Por esta razón, también se les denomina *condiciones esenciales*.

En las condiciones de Neumann, expresión B.97 con $\beta = 0$, lo que fijamos es la componente normal del campo $\vec{F} = -\nabla f$

$$[F_n]_{\mathcal{S}} = F_{ns} = -[\nabla f \cdot \vec{n}]_{\mathcal{S}} = -\frac{\gamma}{\eta}$$

Si en la expresión B.97 hacemos $\beta \neq 0$ en alguna zona del contorno, las condiciones serán mezcladas.

En particular, si $\beta = \gamma = 0$, las condiciones que se cumplen son las homogéneas de Neumann $\nabla f \cdot \vec{n} = 0$.

En resumen, se divide la superficie en tres partes $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3$. En la primera, que puede reducirse a un solo punto o extenderse a toda la superficie, se imponen condiciones de Dirichlet. Opcionalmente, pueden imponerse condiciones mixtas en la segunda y ninguna condición en la tercera. Este último caso equivale a la imposición de la condición de Neumann homogénea en \mathcal{S}_3 .

Definiremos el funcional

$$\Phi(\varphi) \equiv \int_{\mathcal{V}} \left\{ \frac{1}{2} \eta \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi - g \varphi \right\} dv + \int_{\mathcal{S}_2} \left\{ \frac{1}{2} \beta \varphi^2 - \gamma \varphi \right\} ds \quad (\text{B.98})$$

y demostraremos que es estacionario para $\varphi(\vec{r}) = f(\vec{r})$, donde $f(\vec{r})$ es la solución de B.93 que cumple las condiciones de contorno especificadas, de tipo B.96 o B.97. Ésto nos permitirá substituir la búsqueda directa de la solución f por la de una función φ que haga estacionario al funcional $\Phi(\varphi)$.

Para comprobarlo, demostraremos que

$$[\delta\Phi(\varphi)]_{\varphi=f} = 0$$

Variando B.98 ¹⁹

$$\delta\Phi(\varphi) = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \eta \nabla \varphi \cdot \nabla \delta\varphi dv}_{(I)} - \int_{\mathcal{V}} \delta\varphi g dv + \int_{\mathcal{S}_2} \delta\varphi \{\beta \varphi - \gamma\} ds \quad (\text{B.99})$$

Para escribir la integral (I) se ha tenido en cuenta que $\delta(\nabla \varphi) = \nabla(\delta\varphi)$, según se vio en B.94.

Si recordamos que $\nabla \cdot (\lambda \vec{a}) = \lambda \nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla \lambda$ y hacemos $\vec{a} = \eta \nabla \varphi$ y $\lambda = \delta\varphi$

$$(I) = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\delta\varphi \eta \nabla \varphi) dv}_{II} - \int_{\mathcal{V}} \delta\varphi \nabla \cdot (\eta \nabla \varphi) dv$$

y, aplicando el teorema de la divergencia a II ,

$$(I) = \int_{\mathcal{S}_2} \delta\varphi \eta \nabla \varphi \cdot \vec{n} ds - \int_{\mathcal{V}} \delta\varphi \nabla \cdot (\eta \nabla \varphi) dv$$

donde se ha tenido en cuenta que $\delta\varphi = 0$ en \mathcal{S}_1 y $\nabla \varphi \cdot \vec{n} = 0$ en \mathcal{S}_3 .

Substituyendo esta ultima expresión en B.99, se tiene que

$$\delta\Phi(\varphi) = - \int_{\mathcal{V}} \delta\varphi \{\nabla \cdot (\eta \nabla \varphi) + g\} dv + \int_{\mathcal{S}_2} \delta\varphi \{\eta \vec{n} \cdot \nabla \varphi + \beta \varphi - \gamma\} ds = 0$$

Vemos, pués, que $\delta\Phi = 0$ para cualquier $\delta\varphi$ arbitrario porque, según B.93, en \mathcal{V}

$$\nabla \cdot (\eta \nabla \varphi) + g = 0$$

y, según B.97, en \mathcal{S}_2

$$\eta \vec{n} \cdot \nabla \varphi + \beta \varphi - \gamma = 0$$

Luego la función $\varphi = f$ hace estacionario a $\Phi(\varphi)$, es decir,

$$\left(\frac{\partial \Phi(\varphi)}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=f} = 0 \quad (\text{B.100})$$

En lo que sigue, estudiaremos métodos que permiten, con mayor o menor eficacia, la resolución aproximada de este problema.

¹⁹Las variaciones sólo afectan a las funciones de φ .

B.1.4.1. Método de Ritz

20

Para aproximar la solución de la ecuación B.100, este método substituye φ por un desarrollo

$$\bar{f}(\alpha_1, \dots, \alpha_N, x) = \alpha_i \varphi_i(x) \quad (\text{B.101})$$

\bar{f} es función de un conjunto $\{\alpha_i\}_N$, de dimensión N , de coeficientes a determinar. $\{\varphi_i\}_N$ es otro conjunto, de la misma dimensión, de funciones *base*²¹ cuya elección es determinante para la eficacia de este método.

Si se substituye $\varphi \rightarrow \bar{f}$ en B.100, el mínimo de Φ se busca solamente dentro del espacio subtendido por la base elegida. Teniendo en cuenta que, en este caso, $\Phi = \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, la ecuación anterior equivale al sistema de N ecuaciones con N incógnitas

$$\frac{\partial \Phi(\bar{f})}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{B.102})$$

cuya solución $\{\alpha_i\}_N$ nos permite obtener el valor óptimo de \bar{f} , el más próximo posible a f dentro del espacio subtendido por la base.

Hay que tener en cuenta que, al ser N finito, la solución encontrada será, en general sólo una aproximación de la solución exacta f . Sólo en el caso de que la base elegida sea completa para la solución buscada, $\bar{f} = f$. En dos o tres dimensiones, sobre todo si el contorno no es simple, esto no suele ser factible, lo que limita grandemente la utilidad de este tipo de métodos. Esta dificultad se soslaya mediante las técnicas empleadas en las distintas versiones del método de los elementos finitos.

Ilustraremos el uso del método que nos ocupa con un ejemplo unidimensional.

B.1.4.2. Ejemplo 1: *ejemplo_Ritz.nb*

Tomaremos como ejemplo de uso del método de Ritz a un problema de Poisson con una condición de Neumann homogénea.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -g(x) \quad , \quad g = 1 - x \quad (\text{B.103})$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y con las condiciones de contorno

$$f(0) = 0 \quad , \quad \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=1} = 0 \quad (\text{B.104})$$

Primero se planteará el problema de forma analítica y después se buscará la solución empleando el método de Ritz. Se comprobará que las soluciones encontradas por uno y otro método son idénticas porque, en éste caso, es fácil buscar una base completa de la solución. Como ya hemos comentado anteriormente, ésto sólo es posible en problemas cuya solución más simple es precisamente la analítica.

²⁰O de Rayleigh-Ritz.

²¹También se les conoce como funciones de interpolación o de expansión.

Programa Mathematica *ejemplo_Ritz.nb*:

Solución analítica:

```
Remove[Global`*]; Off[General :: spell1];
```

```
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 11};
```

Se integra la ecuación B.103

$$\mathbf{f} = \mathbf{1} - \mathbf{x};$$

$$\mathbf{V} = \int \left(\mathbf{a2} - \int \mathbf{f} dx \right) dx + \mathbf{a1}$$

donde **a1** y **a2** son las constantes de integración, y se aplican las condiciones de contorno B.104 en los extremos del intervalo.

$$\mathbf{V0} = \mathbf{V}/.x \rightarrow 0;$$

$$\mathbf{Vn1} = \partial_x \mathbf{V}/.x \rightarrow 1;$$

A partir de estas condiciones se calculan las constantes de integración *a1* y *a2*.

```
ecuaciones = {V0 == 0, Vn1 == 0};
```

```
solreglas = Solve[ecuaciones, {a1, a2}];
```

solreglas es una lista $\{\{a1 \rightarrow ?, a2 \rightarrow ?\}\}$ que contiene la regla de asignación de valor a *a1* y *a2*. Para sacar estos valores de la lista, se ejecutan las órdenes siguientes:

```
a1 = a1/.solreglas; a2 = a2/.solreglas;
```

```
a1 = a1[[1]]; a2 = a2[[1]];
```

con lo que se completa la solución. Su expresión puede verse ejecutando la orden siguiente

V

En la figura B.14 puede comprobarse que $(\frac{dV}{dx})_{x=1} = 0$.

```
Plot[V, {x, 0, 1}], PlotRange -> All,
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}, AxesLabel -> {"x", "V"}];
```

Solución por el método de Ritz:

Comenzamos eligiendo la función de prueba: Es evidente que la solución es un polinomio de tercer grado.

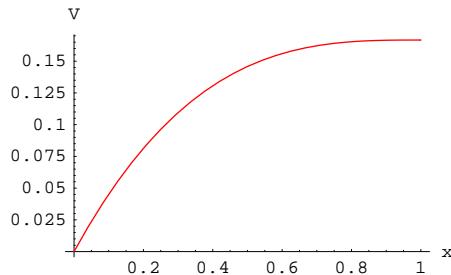


Figura B.14:

$$f_i = c_0 + c_1 * x + c_2 * x^2 + c_3 * x^3;$$

Sólo es necesario imponer la condición de contorno en $x = 0$. La de Neumann homogénea se cumple automáticamente al minimizar el funcional.

$$f_{i0} = f_i / . x \rightarrow 0;$$

Se calcula c_0 .

$$\text{ccreglas} = \text{Solve}[f_{i0} == 0, \{c_0\}];$$

$$c_0 = c_0 / . \text{ccreglas};$$

$$c_0 = c_0[[1]]; \quad$$

A continuación se calcula el funcional del problema.

$$F_i = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (\partial_x f_i)^2 - f * f_i \right) dx;$$

y se formula y soluciona el sistema de ecuaciones.

$$F_{i1} = \partial_{c1} F_i, F_{i2} = \partial_{c2} F_i, F_{i3} = \partial_{c3} F_i;$$

$$\text{ecuaciones} = \{F_{i1} == 0, F_{i2} == 0, F_{i3} == 0\};$$

$$\text{ritzreglas} = \text{Solve}[\text{ecuaciones}, \{c_1, c_2, c_3\}];$$

$$c_1 = c_1 / . \text{ritzreglas}; c_2 = c_2 / . \text{ritzreglas}; c_3 = c_3 / . \text{ritzreglas};$$

$$c_1 = c_1[[1]]; c_2 = c_2[[1]]; c_3 = c_3[[1]]; \quad$$

Puede comprobarse que $V = \varphi$

fi

Como ya se ha comentado, la solución $\varphi = V$ porque la base $\{\varphi_i(x)\} = \{1, x, x^2, x^3\}$ escogida es completa para la solución general.

B.1.4.3. Ejemplo 2: Método de Ritz (elementos finitos)

Como introducción al método de los elementos finitos, nos plantearemos la solución del problema anterior mediante el uso de un tipo particular de funciones base.

Según puede verse en la figura B.15a, el dominio del problema se ha dividido en intervalos, que denominaremos *elementos* y ordenaremos por el índice $i = 1, 2 \dots N - 1$, limitados por *nudos* situados en posiciones x_i , $i = 1, 2 \dots N$. El elemento $e = i$ está delimitado por los nudos x_i y x_{i+1} y la función base $\varphi_i(x)$ es tal que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, interpola linealmente $f_i(x_i) = 1$ con $f_i(x_{i-1}) = 0$ y $f_i(x_{i+1}) = 0$ y $f_i(x) = 0$ para $x \leq x_{i-1}$ ó $x \geq x_{i+1}$. En el punto x_1 de la frontera se toma $x_{i-1} = x_1$ y en el x_N se toma $x_{i+1} = x_N$.

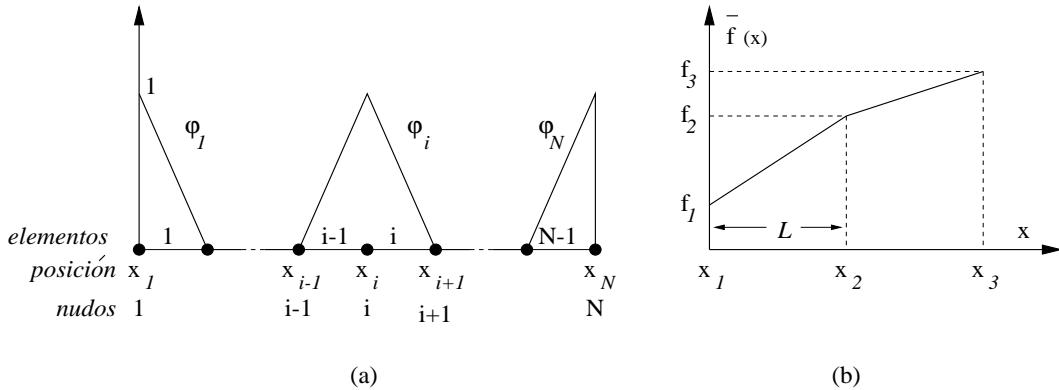


Figura B.15:

De acuerdo con lo anterior, podemos escribir la función de prueba, que en adelante denominaremos *función de prueba global*, como

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^N f_i \varphi_i(x) \quad (\text{B.105})$$

donde $f_i \equiv \alpha_i$ son los coeficientes a determinar.

En este ejemplo tomaremos $N = 3$, es decir, figura B.15b, dividiremos el dominio en dos elementos y, para simplificar, les daremos la misma longitud L . Resumiendo

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 1, \quad L = x_{i+1} - x_i = 0.5$$

Es fácil de comprobar que $\bar{f}(x)$ es una función continua que interpola linealmente a los valores de los coeficientes f_1, f_2 y f_3 . En consecuencia, podemos reescribir la ecuación B.105 de la forma

$$\bar{f}(x) = \sum_{e=1}^{N-1} f^e(x) = f^1(x) + f^2(x) \quad (\text{B.106})$$

donde $f^e(x)$ es la función de prueba del elemento $e = i$, o *función de prueba local*, definida, figura B.15b, como

$$f^i(x) = \begin{cases} f_i + p_i(x - x_i), & \text{para } x \in e = i \\ 0 & , \text{ fuera de } e \end{cases}, \quad p_i = \frac{1}{L} (f_{i+1} - f_i) \quad (\text{B.107})$$

siendo p_i la pendiente de $\bar{f}(x)$ dentro del elemento $e = i$ ²².

Debemos resolver la ecuación B.103 con las condiciones de contorno B.104 de las que, como en el ejemplo anterior, sólo es necesario implementar la de Dirichlet

$$f_1 = 0$$

El funcional B.98 se concreta en este caso de la forma²³

$$\begin{aligned} \Phi(f_2, f_3) &= \int_{x=0}^1 \left(\frac{d\bar{f}(x)}{dx} \right)^2 dx + \int_{x=0}^1 (x - 1) \bar{f}(x) dx \\ &= \Phi^1 + \Phi^2 \end{aligned} \quad (\text{B.108})$$

donde $\frac{d\bar{f}(x)}{dx}$ es la pendiente de la función de prueba global y Φ^i es el funcional local del elemento i

$$\Phi^i(f_i, f_{i+1}) = \frac{1}{2} L (p_i)^2 + \int_{x=x_i}^{x_{i+1}} (x - 1) f^i(x) dx \quad (\text{B.109})$$

puesto que $\frac{df^i}{dx} = p_i = cte.$

Tomando los datos del problema y substituyendo B.106 en la ecuación anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= -\frac{1}{6} f_2 + (f_2)^2 \\ \Phi^2 &= -\frac{1}{12} f_2 + (f_2)^2 - \frac{1}{24} f_3 - 2 f_2 f_3 + (f_3)^2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones que debemos resolver son

²²Para escribir $\bar{f}(x)$ en la forma de la expresión B.106 habría sido necesario utilizar la operación unión \cup en vez de la suma, puesto que con la suma se duplican los valores de la función en los nudos. De todas formas, como para construir el funcional hay que integrar, esta discrepancia con la B.105 no afecta al resultado.

²³Al tener f_1 un valor fijo, no aparece como variable del funcional.

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial f_2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial f_2} = 0 , \quad \frac{\partial \Phi^2}{\partial f_3} = 0$$

f_3 es el valor de la función de prueba en el último nudo por lo que sólo aparece en el funcional del último elemento.

En concreto

$$2f_2 - f_3 = \frac{1}{8} , \quad f_2 - f_3 = -\frac{1}{48} \Rightarrow f_2 = \frac{7}{48} , \quad f_3 = \frac{1}{6}$$

La figura B.16 muestra la solución exacta, en rojo, y la aproximada, la línea quebrada, en azul.

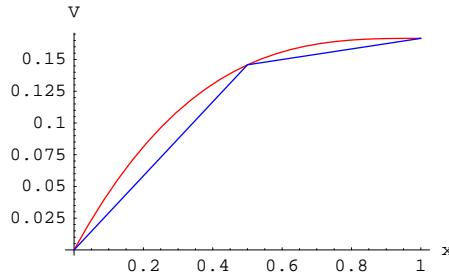


Figura B.16:

B.1.4.4. Método de los elementos finitos (Ritz)

Con el ejemplo anterior hemos puesto de manifiesto las características fundamentales de los métodos de elementos finitos ²⁴ tomando como base el método de Ritz, pero es evidente que puede hacerse un planteamiento análogo basándose en métodos no variacionales como el de Galerkin. En la práctica es necesario ajustar la solución a un número muy superior de elementos. Por esta razón, en lo que sigue plantearemos esta cuestión con algo más de generalidad.

En la actualidad, estos métodos se aplican de forma eficaz a problemas escalares y vectoriales de muy distinto tipo y cabe resaltar, como una de las características más interesantes, su capacidad para modelar superficies curvas y adaptar su red de forma que suministre información más o menos densa en distintas zonas de \mathcal{V} y puedan analizarse con más precisión las zonas en las que la dicha solución varía más rápidamente.

A diferencia de los métodos básicos de Ritz y de Galerkin, que resultan ineficaces para problemas no demasiado simples, los métodos de los elementos finitos hacen uso, en general, de funciones de prueba *locales* $f^e(\vec{r})$ definidas en pequeños *elementos* $\mathcal{V}^e \in \mathcal{V}$. De esta forma, la elección de las funciones base deja de ser determinante y pasa a un plano secundario. Si los elementos son pequeños, la aproximación de la solución dentro de los mismos puede llevarse a cabo con una base de pequeña dimensión. En la práctica, la más utilizada es, al mismo tiempo, la más simple, la correspondiente a una interpolación lineal, como ya hemos visto en el ejemplo anterior.

²⁴Véase [Jin].

La elaboración de un programa completo y de uso general es relativamente compleja y queda fuera de nuestros propósitos.

Pueden distinguirse los siguientes pasos básicos para la solución de un problema de elementos finitos.

1. División del dominio \mathcal{V} en elementos.
2. Selección de las funciones de prueba \bar{f} .
3. Formulación del sistema de ecuaciones.
4. Solución del sistema de ecuaciones.
5. Análisis y presentación de los resultados.

Algo parecido puede hacerse para describir otros métodos numéricos pero ésto es particularmente útil en el caso que nos ocupa.

El primer paso se califica de *preproceso* porque suele hacerse con programas, comerciales o de dominio público, que pueden ser bastante complejos y que son utilizados como meras cajas negras. Los tres pasos siguientes constituyen el *proceso* de solución del problema y el último, que no responde a reglas fijas, se denomina *postproceso*.

Después de comentar cada uno de los pasos anteriores, ilustraremos el conjunto de este proceso aplicandolo a la solución del ejemplo propuesto en B.1.4.2.

División del dominio \mathcal{V} en elementos:

En este paso se divide el dominio \mathcal{V} del problema en elementos y se describen de una forma adecuada.

Nos limitaremos a elementos simples como los mostrados en la figuras B.17:

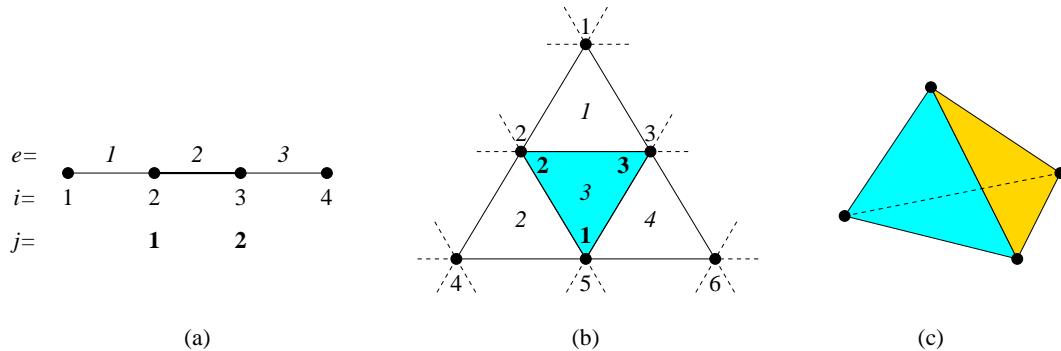


Figura B.17:

- Segmentos rectos, figura B.17a , para el caso unidimensional (1D).
- Triángulos, figura B.17b , para el caso bidimensional (2D).
- Tetraedros, figura B.17c , para el caso tridimensional (3D).

Existen otras muchas posibilidades que no tomaremos en consideración.

La división del dominio implica la definición de una red de nudos. Según se observa en la figura anterior, los segmentos contienen dos nudos, los triángulos tres y los tetraedros cuatro. Los elementos contiguos comparten nudos: en el caso (1D) cada nudo interior pertenece a dos elementos y a uno solo el primero y el último. En los casos (2D) y (3D) el número de celdas a que pertenece un nudo depende de la división concreta que se lleve a cabo e, incluso, del nudo concreto dentro de un mismo elemento. En la figura B.17b son seis los elementos a que pertenece cada uno de los nudos mostrados, pero esto no es una regla general.

Para describir la geometría del espacio discretizado, es necesario enumerar todos los elementos y describir a cada nudo dando sus coordenadas y ordenándolos, localmente dentro de cada uno de los elementos a los que pertenece y globalmente dentro de \mathcal{V} . Esto da muchas opciones y el costo de cálculo depende de por cuál se opte.

Si M es el número de elementos, n el de nudos de un elemento²⁵ y N el número total de nudos, ordenaremos a los elementos por el índice e y a los nudos por el índice *global* i y por el *local* j .

$$\begin{aligned} e &= 1, \dots, M \\ i &= 1, \dots, N \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned} \tag{B.110}$$

En la figura B.17b se muestra una posible forma de este ordenamiento. Los números locales se escriben en letra negrita.

Las ecuaciones resultantes del planteamiento del problema pueden expresarse por medio de matrices *de bandas*. La anchura de banda es función de la máxima diferencia entre los números globales de los nudos de cada elemento por lo que es útil el uso de una numeración que minimice dicha diferencia. Procediendo de esta manera se reduce la memoria y tiempo de cálculo necesarios. Una opción cómoda, pero no siempre eficaz, es la de elegir el orden que facilite al máximo la elaboración del programa de cálculo. Existen programas que realizan estas tareas de división en elementos, 1D, 2D y 3D, de espacios arbitrarios y optimizan la ordenación del conjunto.

Selección de las funciones de prueba:

La función de prueba global \bar{f} se expresa como suma de funciones de prueba locales f^e ²⁶.

$$\bar{f}(\vec{r}) = \sum_{e=1}^M f^e(\vec{r}) \tag{B.111}$$

donde f^e está definida en el elemento e , es nula fuera de dicho elemento y es continua con la funciones de prueba de los elementos adyacentes en la frontera con los mismos. Ésto asegura la continuidad de la función de prueba global en \mathcal{V} .

²⁵Para simplificar, suponemos, como corresponde a los elementos de la figura B.17, que el número de nudos de todos los elementos es el mismo.

²⁶En lo sucesivo será necesario hacer uso del símbolo \sum incluso en el caso en que se repitan los índices.

Para los elementos de la figura B.17, particularmente para los triángulos, la función de prueba local más utilizada es la que interpola linealmente los valores f_j^e , $j = 1, \dots, n$ de los nudos del elemento e ²⁷.

$$f^e(\vec{r}) = \alpha_1^e + \alpha_2^e x + \alpha_3^e y \quad (\text{B.112})$$

Dado que ésta es una función interpolante, en las posiciones de los nudos j debe ser igual a f_j^e .

$$f^e(\vec{r}_j) = f_j^e, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.113})$$

donde \vec{r}_j es el vector coordenado de cada uno de dichos nudos. Si los elementos son lo suficientemente pequeños, esta función es apropiada para aproximar la solución. En las zonas donde esta última varía más rápidamente puede refinarse la red utilizando elementos de menor tamaño.

Como puede verse en la figura B.17b, la recta que une a los nudos **1** y **2** (numeración local) del elemento **3**, es la frontera que separa a este elemento del **2**, por lo que la funciones de prueba respectivas, f^3 y f^2 , interpolan linealmente f_2 y f_5 (numeración global). \bar{f} es, por lo tanto, una función continua en \mathcal{V} .

Forzando la condición B.113 se tiene que²⁸

$$f^e(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n C_j^e(\vec{r}) f_j^e \quad (\text{B.114})$$

donde las funciones $C_j^e(\vec{r})$ son funciones de la posición dentro del elemento \mathcal{V}^e y f_j^e los valores, a determinar, de la solución en los nudos correspondientes.

Dadas la condiciones B.113, la C_j^e toman el valor 1 en el nudo j y 0 en los demás nudos del elemento, así como en su exterior.

$$C_j^e(\vec{r}_k) = \delta_{jk} \quad (\text{B.115})$$

Puesto que al calcular el funcional Φ estas fuciones se integran, dan lugar a constantes. En consecuencia $\Phi = \Phi(f_1, \dots, f_N)$, es decir, es un función de los valores de la función de prueba \bar{f} en los nudos de la red global.

En concreto, para el elemento 3

$$\begin{aligned} C_1^3(\vec{r}) &= \frac{1}{2\mathcal{A}^3} [(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + x_2y_3 - x_3y_2] \\ C_2^3(\vec{r}) &= \frac{1}{2\mathcal{A}^3} [(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y + x_3y_1 - x_1y_3] \\ C_3^3(\vec{r}) &= \frac{1}{2\mathcal{A}^3} [(y_1 - y_2)x + (x_1 - x_2)y + x_1y_2 - x_2y_1] \end{aligned} \quad (\text{B.116})$$

donde

²⁷En 3D se añadiría a f^e el término $c_3^e * z$.

²⁸Ésta es una alternativa a la expresión B.107.

$$\mathcal{A}^3 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3) \quad (\text{B.117})$$

es \pm el área del elemento 3.

Formulación del sistema de ecuaciones:

De lo anterior se deduce que la función global de prueba buscada es la que hace estacionario a Φ . Es decir, aquella cuyos coeficientes cumplen el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \Phi(f_1, \dots, f_N)}{\partial f_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{B.118})$$

Si las condiciones de contorno exigen que algunos de los f_i sean constantes, será necesario eliminar de la serie anterior las ecuaciones correspondientes porque Φ no sería función de los mismos.

Substituyendo la función de prueba global B.111 en el funcional B.98, éste puede escribirse de la forma

$$\Phi(f_i) = \sum_{e=1}^M \Phi^e \quad (\text{B.119})$$

donde

$$\Phi^e(f_j^e) = \int_{V^e} \left\{ \frac{1}{2} \alpha \nabla f^e \cdot \nabla f^e - g f^e \right\} dv + \int_{S_2^e} \left\{ \frac{1}{2} \beta (f^e)^2 - \gamma f^e \right\} ds \quad (\text{B.120})$$

V^e es el volumen del elemento y S_2^e la parte del contorno S_2 tocada por el elemento. Si el elemento es interior, o $\beta = \gamma = 0$, la integral de superficie se anula.

Φ^e puede expresarse de esta forma porque $(\bar{f})^2 = \sum_{e=1}^M (f^e)^2$ dado que, al ser f^e nulo fuera de e , los productos cruzados $f^e f^{e'} = 0$ para $e \neq e'$.

Si el nudo i está incluido en m elementos, los $e = 1, \dots, m$ ²⁹, cuya numeración no tiene por qué ser correlativa, el sistema de ecuaciones B.118 se escribe de la forma

$$\frac{\partial \Phi(f_1, \dots, f_N)}{\partial f_i} = \sum_{e=1}^m \frac{\partial \Phi^e}{\partial f_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{B.121})$$

Cada una de estas ecuaciones consta de m términos. En general, m no tiene el mismo valor en los distintos nudos de una misma red. En particular, para los nudos interiores de la figura B.17a $m = 2$, para los de la frontera $m = 1$ y para los interiores de la figura B.17b $m = 6$.

La reconstrucción de esta ecuación a partir del cálculo de los distintos términos $\frac{\partial \Phi^e}{\partial f_i}$, teniendo en cuenta la relación existente entre las ordenaciones local y global, se conoce como proceso de *ensamblaje*.

Substituyendo B.114 en B.120

²⁹Haremos uso del mismo índice e , ya utilizado globalmente, para describir a estos m elementos.

$$\Phi^e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}^e f_j^e f_k^e - \sum_{j=1}^n b_j^e f_j^e \quad (\text{B.122})$$

donde

$$A_{jk}^e = \int_{\mathcal{V}^e} \alpha(\vec{r}) \nabla C_j^e(\vec{r}) \cdot \nabla C_k^e(\vec{r}) dv + \int_{\mathcal{S}_2^e} \beta(\vec{r}) C_j^e(\vec{r}) C_k^e(\vec{r}) ds \quad (\text{B.123})$$

$$b_j^e = \int_{\mathcal{V}^e} g(\vec{r}) C_j^e(\vec{r}) dv + \int_{\mathcal{S}_2^e} \gamma(\vec{r}) C_j^e(\vec{r}) ds \quad (\text{B.124})$$

Obviamente, los coeficientes $A_{jk}^e = A_{kj}^e$ son las componentes de una matriz simétrica $\tilde{A}_{n \times n}^e$.

Derivando en B.122 con respecto a f_i (ordenación global)

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial f_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}^e \delta_{ji} f_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}^e f_j \delta_{ki} - \sum_{j=1}^n b_j^e \delta_{ji}$$

en donde se ha tenido en cuenta que $\frac{\partial f_j}{\partial f_i} = \delta_{ji}$ y $\frac{\partial f_k}{\partial f_i} = \delta_{ki}$.

De acuerdo con lo anterior y que $\sum_{k=1}^n A_{ik}^e f_k = \sum_{j=1}^n A_{ji}^e f_j$ porque \tilde{A}^e es simétrica y en la segunda sumatoria puede intercambiarse el nombre del índice j con el del k . El resultado es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^e}{\partial f_i} &= 0 && , \text{ nudo } i \text{ no incluido en } e \\ \frac{\partial \Phi^e}{\partial f_i} &= \sum_{k=1}^n A_{ik}^e f_k - b_i^e && , \text{ en caso contrario} \end{aligned} \quad (\text{B.125})$$

sistema de ecuaciones que ha de resolverse es, en principio, el correspondiente a la expresión B.121

$$\sum_{e=1}^m \frac{\partial \Phi^e}{\partial f_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{B.126})$$

o, de acuerdo con B.125

$$\sum_{e=1}^m \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^e f_k^e - b_i^e \right) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{B.127})$$

Recordaremos que el superíndice e designa a los elementos que contienen al nudo i , siendo este último subíndice global, y que el subíndice k es local y describe a los nudos de cada uno de estos elementos.

Para darle forma explícita a estas ecuaciones han de ensamblarse, por medio de una tabla de correspondencias, de forma que todo pueda expresarse en función de los índices

globales. De ésto resulta una matriz global $\tilde{A}_{N \times N}$ a bandas, simétrica y, en general, poco densa ('sparse')³⁰, y un vector global de términos independientes \vec{b}_N .

Comprobaremos que en 1D, con ligeras modificaciones de la definiciones de \tilde{A} y \vec{b} , la matriz será tridiagonal, lo que permitirá resolver el sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss sin pivotación, que es muy eficiente, y reducir la memoria de la dimensión N^2 a la $2N + N$ ³¹ y el correspondiente tiempo de cálculo.

Solución del sistema de ecuaciones:

Dadas las características de \tilde{A} , el uso de programas eficientes para la adecuada ordenación global y la resolución del sistema de ecuaciones resultante podrá reducir de forma considerable la memoria y el tiempo de cómputo necesarios.

Análisis y presentación de los resultados:

Esta etapa suele ser más complicada que en otros métodos dada la forma normalmente irregular de la distribución de los dominios.

En el siguiente ejemplo, este problema y el de ensamblaje se presentarán de forma simplificada al emplear una distribución regular de elementos. Para mayores complejidades debe acudirse a la bibliografía.

B.1.4.5. Ejemplo: *ejemplo_elem_finitos_1D.nb*

Volvemos a ocuparnos del mismo problema propuesto en la sección B.1.4.2

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -g(x) , \quad g = 1 - x \quad (\text{B.128})$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y con las condiciones de contorno

$$f(0) = 0 , \quad \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=1} = 0 \quad (\text{B.129})$$

Para resolverlo, hemos elegido una red uniforme con N nudos y $N - 1$ elementos de longitud

$$L = \frac{1}{N - 1} , \quad x_i = (i - 1)L \quad (\text{B.130})$$

tal y como se muestra en la figura B.18.

En el caso 1D, la ordenación óptima de nudos y elementos es muy simple, ya que basta con la numeración global de los nudos.

- Nudos: $i = 1, \dots, N$.
- Elementos: $e = i = 1, \dots, N - 1$.
- Nudos pertenecientes al elemento i : $j = i, i + 1$

³⁰La mayor parte de sus elementos son nulos.

³¹ $2N$ para \tilde{A} y N para \vec{b} .

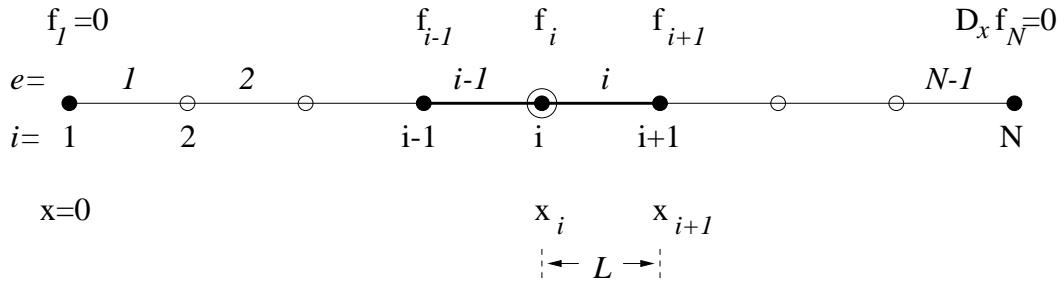


Figura B.18:

Dado que en este caso $\alpha = 1$ y $\beta = \gamma = 0$, el funcional B.120 se reduce a

$$\Phi^i(f_i, f_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{df^i}{dx} \right)^2 - g f^i \right\} dx \quad (\text{B.131})$$

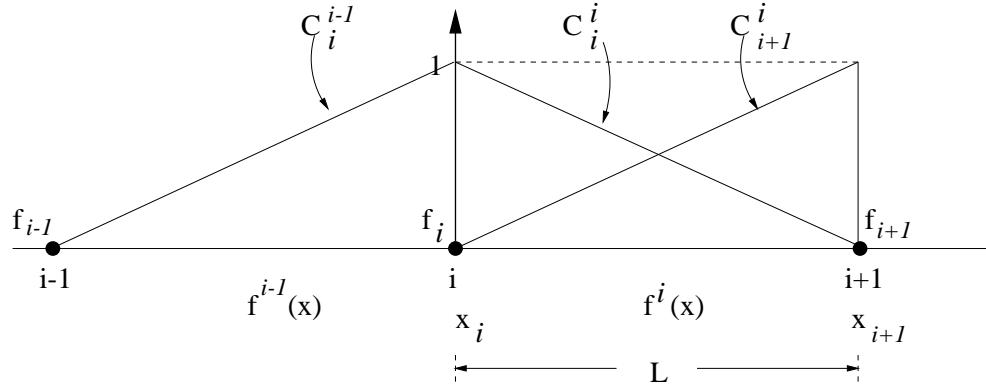


Figura B.19:

La función de prueba del elemento i , véase la figura B.19, es

$$f^i(x) = C_i^i(x) f_i + C_{i+1}^i(x) f_{i+1} \quad (\text{B.132})$$

expresión en la que no es necesario emplear el superíndice $e = i$ para anotar el potencial del nudo, y

$$C_i^{i-1}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{L} , \quad C_i^i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{L} , \quad C_{i+1}^i(x) = \frac{x - x_i}{L} \quad (\text{B.133})$$

que cumplen la condición B.115 dado que $L = x_{i+1} - x_i$.

Haciendo uso de la numeración global e integrando, las componentes A_{ij}^e toman la forma

$$\begin{aligned} A_{i,i}^i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{d}{dx} C_i^i(x) \right)^2 dx = \frac{1}{L} \\ A_{i,i+1}^i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} C_i^i(x) \frac{d}{dx} C_{i+1}^i(x) dx = -\frac{1}{L} \end{aligned} \quad (\text{B.134})$$

En el problema propuesto, $\alpha = 1 \neq \alpha(x)$ y la longitud de todos los elementos es la misma, de lo que resulta que estas componentes son independientes de i . No ocurre lo mismo con los b_j^e ya que g es función de x . En este deberemos calcular $b_i^i + b_i^{i-1}$.

$$\begin{aligned} b_i^i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) C_i^i(x) dx , \quad b_i^{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) C_i^{i-1}(x) dx \\ b_i^i &= \frac{1}{2} L + \frac{1}{3} L^2 - \frac{1}{2} L^2 i , \quad b_i^{i-1} = \frac{1}{2} L + \frac{2}{3} L^2 - \frac{1}{2} L^2 i \\ b_i^i + b_i^{i-1} &= L + L^2 - L^2 i \end{aligned} \quad (\text{B.135})$$

Para los nudos de la frontera, el $i = 1$ y el $i = N$, $m = 1$ y, para los interiores, $m = 2$. Luego, las ecuaciones B.121 tienen la forma

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial f_i} + \frac{\partial \Phi^{i-1}}{\partial f_i} = 0 , \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (\text{B.136})$$

$$\frac{\partial \Phi^{N-1}}{\partial f_N} = 0 , \quad i = N \quad (\text{B.137})$$

$\frac{\partial \Phi^1}{\partial f_1} \equiv 0$, es decir, es idénticamente nula puesto que $f_1 = cte$ y, por lo tanto, Φ no depende de este parámetro. En $i = N$ la condición es de Neumann homogénea, por lo que no es necesario implementarla. Teniendo ésto en cuenta y haciendo uso de B.127³²

$$\begin{aligned} (A_{2,2}^1 + A_{2,2}^2) f_2 + A_{2,3}^2 f_3 &= b_2^1 + b_2^2 , \quad i = 2 \\ A_{i,i-1}^{i-1} f_{i-1} + (A_{i,i}^{i-1} + A_{i,i}^i) f_i + A_{i,i+1}^i f_{i+1} &= b_i^{i-1} + b_i^i , \quad i = 3, \dots, N-1 \\ A_{N,N-1}^{N-1} f_{N-1} + A_{N,N}^{N-1} f_N &= b_N^{N-1} , \quad i = N \end{aligned} \quad (\text{B.138})$$

en la primera ecuación $f_1 = 0$ y en la última, véase B.137, f_N sólo aparece en el funcional del último elemento Φ^{N-1} .

Estas ecuaciones, según B.134 y B.135, pueden escribirse de la forma

³²El superíndice, el e , designa a los elementos que contienen al nudo descrito por el primer subíndice, el global i . Estos elementos son el $i-1$ y el i . El segundo subíndice, el k , es local y describe a los nudos de cada uno de estos elementos, (el i y el $i+1$ para el elemento i).

$$-c_i f_{i-1} + a_i f_i - d_i f_{i+1} = b_i \quad , \quad i = 2, \dots, N \quad (\text{B.139})$$

En general, de la simetría de la matriz (A_{ij}) se tiene que $c_i = d_{i-1}$. En nuestro caso

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{L}, \quad c_2 = 0, \quad d_2 = \frac{1}{L}, \quad b_2 = L - L^2, \quad i = 3 \\ a_i &= \frac{2}{L}, \quad c_i = d_i = \frac{1}{L}, \quad b_i = L + L^2 - L^2 i, \quad i = 3, \dots, N-1 \\ a_N &= \frac{1}{L}, \quad c_N = \frac{1}{L}, \quad d_N = 0, \quad b_N = \frac{1}{2}L + \frac{2}{3}L^2 - \frac{1}{2}L^2 N, \quad i = N \end{aligned} \quad (\text{B.140})$$

Concretando, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} a_2 f_2 - d_2 f_3 &= b_2 \quad \rightarrow i = 2 \\ -c_3 f_2 + a_3 f_3 - d_3 f_4 &= b_3 \quad \rightarrow i = 3 \\ \dots &\dots \\ -c_i f_{i-1} + a_i f_i - d_i f_{i+1} &= b_i \quad \rightarrow i = 3, \dots, N-1 \\ \dots &\dots \\ -c_{N-1} f_{N-2} + a_{N-1} f_{N-1} - d_{N-1} f_N &= b_{N-1} \quad \rightarrow i = N-1 \\ -c_N f_{N-1} + a_N f_N &= b_N \quad \rightarrow i = N \end{aligned} \quad (\text{B.141})$$

Si $f_1 = B \neq 0$ en la ecuación para $i = 2$, la escribiríamos de la misma forma pero modificando $b_2 \rightarrow b_2 + c_2 B$.

Este sistema de ecuaciones es tridiagonal y se resuelve muy eficazmente por el método de eliminación de Gauss.

Método de eliminación de Gauss (sin pivotación):

Este método consiste en eliminar sucesivamente una variable de cada una de las ecuaciones $i = 3, \dots, N$, con ayuda de la ecuación anterior, reduciendo el número de incógnitas respectivas a dos, salvo en la ecuación N en la que se obtiene directamente el valor f_N . Finalizada la primera etapa, actuando en sentido inverso $i = N-1, \dots, 2$, se calcula sucesivamente el resto de las incógnitas. Se trata, pues, de un proceso bidireccional, de eliminación de variables en sentido ascendente y de cálculo de las incógnitas en el sentido contrario.

Anotemos

$$a_2 = \alpha_2, \quad b_2 = \beta_2 \quad (\text{B.142})$$

Si se despeja f_2 de la primera ecuación, se elimina de la segunda, se hace uso de la relación de simetría $c_i = d_{i-1}$ y de que $d_N = 0$ y se generaliza el resultado, se tiene que

$$\alpha_i f_i - d_i f_{i+1} = \beta_i, \quad \alpha_N f_N = \beta_N$$

siendo

$$\alpha_i = a_i - \frac{(d_{i-1})^2}{\alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = b_i + \frac{d_{i-1} \beta_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \quad (\text{B.143})$$

Nótese que a y b son los valores iniciales de las constantes, α y β las modificaciones de las anteriores y que d no se modifica.

A continuación se calculan en sentido inverso las f_i

$$\begin{aligned} f_N &= \frac{\beta_N}{\alpha_N} \\ f_i &= \frac{\beta_i}{\alpha_i} + \frac{d_i}{\alpha_i} f_{i+1} \quad , \quad i = N-1, \dots, 2 \end{aligned} \quad (\text{B.144})$$

donde f_{i+1} ya ha sido calculada.

Programa Mathematica *ejemplo_elem_finitos_1D.nb*:

```
Remove[Global`*]; Off[General :: spell1];
```

```
$TextStyle = {FontFamily -> "Courier", FontSize -> 11};
```

La solución **V** del problema propuesto se encuentra en el ejemplo B.1.4.2.

$$V = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6};$$

Ahora buscaremos la aproximación de esta solución mediante el método de elementos finitos.

Elegimos el número total de nudos **NN** y expresamos la longitud **L** de cada elemento en función del mismo.

$$NN = 11;$$

$$L = \frac{1}{NN - 1};$$

Definimos el vector **fi** = $\{f_i\}$ que almacenará los potenciales en los nudos.

$$fi = Table[0, \{i, 1, NN\}];$$

y los vectores **a** = $\{a_i\}$ y **b** = $\{b_i\}$, que almacenarán a_i y b_i y sus modificaciones α_i y β_i , y **d** = $\{d_i\}$, cuyas componentes no se alteran.

$$a = Table[\frac{2}{L}, \{i, 1, NN\}]; a[[1]] = 0; a[[NN]] = \frac{1}{L};$$

$$b = Table[L + L^2 - L^2 * i, \{i, 1, NN\}];$$

$$b[[1]] = 0 \quad b[[NN]] = \frac{1}{2}L + \frac{2}{3}L^2 - \frac{1}{2}L^2 * NN;$$

$$\mathbf{d} = \text{Table}\left[\frac{1}{\mathbf{L}}, \{\mathbf{i}, 1, \text{NN} - 1\}\right]; \mathbf{d}[1] = \mathbf{0};$$

Se modifican los valores de a_i y b_1 de acuerdo con las expresiones B.143

$$\text{Do}[\mathbf{a}[[\mathbf{i}]] = \mathbf{a}[[\mathbf{i}]] - \frac{\mathbf{d}[[\mathbf{i} - 1]]^2}{\mathbf{a}[[\mathbf{i} - 1]]}, \{\mathbf{i}, 3, \text{NN}\}];$$

$$\text{Do}[\mathbf{b}[[\mathbf{i}]] = \mathbf{b}[[\mathbf{i}]] + \frac{\mathbf{d}[[\mathbf{i} - 1]] * \mathbf{b}[[\mathbf{i} - 1]]}{\mathbf{a}[[\mathbf{i} - 1]]}, \{\mathbf{i}, 3, \text{NN}\}];$$

y se calculan las f_i de acuerdo con las B.144.

$$\mathbf{f}[[\text{NN}]] = \frac{\mathbf{b}[[\text{NN}]]}{\mathbf{a}[[\text{NN}]]};$$

$$\text{Do}[\mathbf{f}[[\mathbf{i}]] = \frac{\mathbf{b}[[\mathbf{i}]]}{\mathbf{a}[[\mathbf{i}]]} + \frac{\mathbf{d}[[\mathbf{i}]]}{\mathbf{a}[[\mathbf{i}]]} \mathbf{f}[[\mathbf{i} + 1]], \{\mathbf{i}, \text{NN} - 1, 2, -1\}];$$

Presentación de resultados:

En primer lugar formaremos la tabla $\mathbf{f2} = \{x_i, f_i\}$

$$\mathbf{f2} = \text{Table}[\{\mathbf{L} * (\mathbf{i} - 1), \mathbf{f}[[\mathbf{i}]]\}, \mathbf{i}, 1, \text{NN}];$$

y representamos $V_i = f_i$ frente a x en la figura B.20.

```
ListPlot[f2, PlotRange → All,
PlotStyle → {RGBColor[0, 1, 0], AbsolutePointSize[3]},
AxesLabel → {"x", "V"}];
```

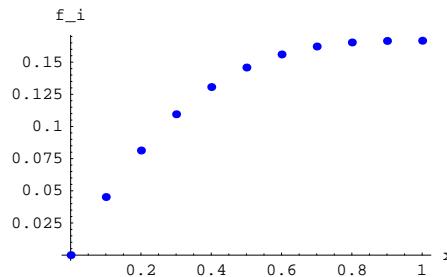


Figura B.20:

A continuación calcularemos y representaremos el error relativo cometido al sustituir a la solución analítica por la numérica.

Determinamos el máximo de los f_i , $(f_i)_{\text{maximo}} = \mathbf{mfi}$.

$$\mathbf{mfi} = \text{Max}[\mathbf{f}];$$

Hacemos una interpolación de primer orden de la serie $\{x_i, f_i\}$ para obtener la función de prueba $\bar{f} = \text{finter}$

$$\text{finter} = \text{Interpolation}[\text{fi2}, \text{InterpolationOrder} \rightarrow 1]$$

y definimos el error relativo.

$$\text{erel} = \frac{\text{finter}[x] - V}{m_f};$$

Puede comprobarse que éste es nulo, dentro de la resolución del ordenador, en los nudos x_i .

$$\text{erel}/.x \rightarrow 0.5$$

Por último, representamos el error relativo en la figura B.21.

```
Plot[erel, {x, 0, 1}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0], AxesLabel -> {"x", "erel"}];
```

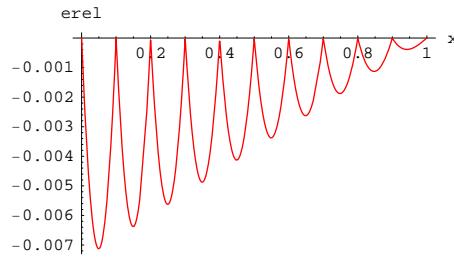


Figura B.21:

B.2. Ecuación de ondas

B.2.1. Propagación de ondas en medios no homogéneos (1D). *FDTD – 1D – medios.nb*.

En esta sección ampliaremos el estudio ya realizado para el vacío de método *FDTD*³³³⁴, sección 4.6, programa *FDTD_1D – vacio.nb*, por lo que la lectura de esta sección debe hacerse en paralelo con la anterior.

Abordaremos dos nuevas cuestiones:

- La propagación de ondas a través de medios con propiedades no homogéneas.

³³En recuerdo de K. Umashankar.

³⁴véase [Taflove].

- La división del campo total \vec{E} en dos sumandos

$$\vec{E} = \vec{E}^{in} + \vec{E}^{di}$$

donde \vec{E}^{in} es el *campo incidente* y \vec{E}^{di} es el *campo dispersado*, y la partición del espacio numérico en dos zonas: la de campo dispersado y la de campo total. Esto se logra mediante el uso de un *algoritmo de iluminación*.

El programa que propondremos tiene una estructura distinta a la del mencionado más arriba. En particular, mientras que este último está basado en el uso de funciones discretas, aquí recurriremos directamente a las listas – matrices– para almacenar los campos y operar con ello. Esto es mucho más eficiente que el empleo de funciones y es lo más común en los programas que se escriben para este tipo de problemas en otros lenguajes de programación.

Ecuaciones de onda:

Tomaremos como ecuaciones de partida

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{B.145}$$

Nos limitaremos a considerar medios lineales no magnético.

Siguiendo la misma pauta que en la sección antes mencionada, normalizamos las variables de la forma

$$\vec{e} = \frac{\vec{E}}{c}, \quad \tau = ct \tag{B.146}$$

y consideramos a una onda polarizada en la dirección del eje y , que se propaga en la dirección del eje x .

De acuerdo con ésto, \vec{e} sólo tiene componente y y \vec{B} componente z , con lo que las ecuaciones de onda se reducen a

$$\varepsilon_r(x) \frac{\partial e_y(x, \tau)}{\partial \tau} = -\gamma(x) e_y - \frac{\partial B_z(x, \tau)}{\partial x} \tag{B.147}$$

$$\frac{\partial B_z(x, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial e_y(x, \tau)}{\partial x} \tag{B.148}$$

donde $\gamma(x) = Z_0 \sigma(x)$ y $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$.

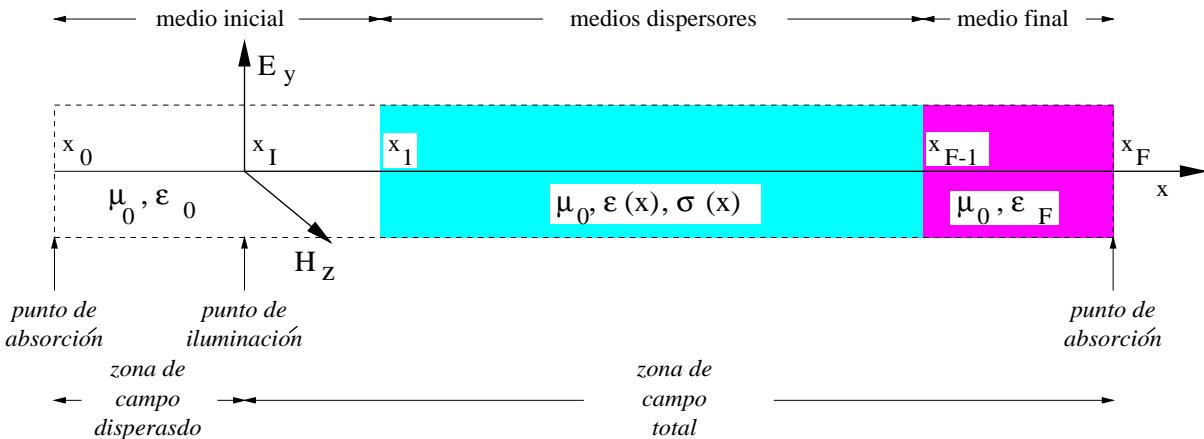


Figura B.22:

Dominio del problema:

El problema que planteamos está definido, en principio, en el dominio ($-\infty < x < \infty$) pero, como se indica en la figura B.22, se reduce numéricamente al $[x_0 \leq x \leq x_F]$ mediante la aplicación de condiciones de contorno adecuadas en x_0 y x_F .

Según la figura anterior, el espacio numérico se divide en tres tipos de medio:

a) *Vacio*, medio inicial. La onda incidente viaja a través de este primer medio hacia los medios dispersores y éstos reaccionan generando los campos dispersados que viajan en sentido contrario.

b) *Dispersores*. En el intervalo $[x_1, x_{F-1}]$ se encuentran los medios dispersores, cuyas propiedades vienen descritas por

$$\mu = \mu_0, \quad \epsilon_r = \epsilon_r(x), \quad \sigma = \sigma(x)$$

En los ejemplos contemplados aquí, el espacio será homogéneo a trozos, es decir, las propiedades serán constantes dentro de cada medio.

c) *Medio final*. Este último medio sera un dieléctrico ideal homogéneo o un conductor ideal. En el primer caso en el punto final x_F se imponen condiciones absorbentes y, en caso contrario, condiciones reflectantes.

En este mismo espacio definiremos dos zonas.

$\alpha)$ *Zona de campo dispersado*, en la que sólo se calcula el campo dispersado. El campo incidente se simula como una onda que viaja en el sentido positivo del eje x a partir del *punto de iluminación* x_I , el cual se sitúa en el interior del medio inicial.

$\beta)$ *Zona de campo total*, en la que se calcula el campo total.

Red numérica:

Tal y como se describe en la sección 4.6, el espacio y el tiempo se discretizan a intervalos δx y δt , pero numeraremos los nudos de una forma distinta a la utilizada en la figura 4.14. Esta numeración, figura B.23, es más apropiada para el manejo de matrices³⁵.

³⁵Las componentes de una matriz de dimensión N se referencian por su posición dentro de la misma

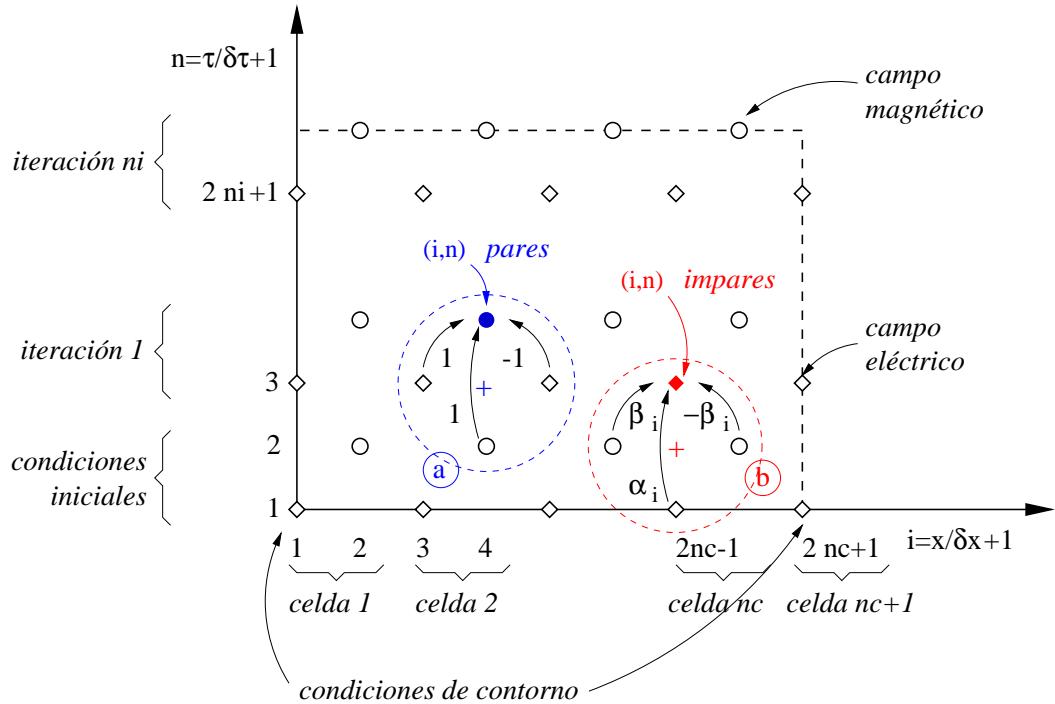


Figura B.23:

$$x = (i - 1)\delta x \quad , \quad i = 0, \dots, 2nc + 1$$

$$\tau = (n - 1)\delta\tau \quad , \quad n = 0, \dots, 2ni + 2 \quad (\text{B.149})$$

En este caso: ³⁶

- \vec{e} se evalúa en posiciones *impares* $i = 1, 3, \dots, 2nc + 1$ y en instantes *impares* $n = 1, 3, \dots, 2ni + 1$ (en la figura '◊').
- \vec{B} se evalúa en posiciones *pares* $i = 0, 2, \dots, 2nc$ y en instantes *pares* $i = 2, 4, \dots, 2ni + 2$ (en la figura '○').

Discretización de los operadores:

Como en la sección anteriormente referenciada, se aproximarán las derivadas mediante diferencias finitas centradas, $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} \simeq D_\alpha[f(\alpha)]$.

$$D_\alpha[f(\alpha)] = \frac{1}{2h} \{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)\}$$

mediante un índice $j = 1, 2, \dots, N$.

³⁶En la literatura de FDTD, se suele localizar al campo eléctrico en (i, n) , donde i y n son enteros, y al magnético en $(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$.

Pero para discretizar la ecuación la ecuación B.147 se requieren valores de e_y en instantes pares, los correspondientes a B_y . Para colocar adecuadamente a estas componentes del campo, se aproxima dicho valor mediante un promedio temporal. Como puede comprobarse desarrollando en serie $f(\tau + \delta\tau)$ y $f(\tau - \delta\tau)$

$$P_\tau[f(\tau)] = \frac{1}{2} \{f(\tau + \delta\tau) + f(\tau - \delta\tau)\} \simeq f(\tau)$$

En adelante anotaremos estas operaciones de la forma

$$D_\alpha[f(\alpha)] \equiv D_\alpha \circ f \quad , \quad P_\tau[f(\tau)] \equiv P_\tau \circ f$$

Avance temporal:

Como en el caso anterior, para obtener los algoritmos de avance temporal de los campos, debemos deducir las versiones discretas de las ecuaciones B.147 y B.148 y despejar las componentes en el momento actual en función de valores calculados anteriormente. Haremos uso de la notación $f(i, n) \equiv f_i^n$, $\varepsilon_r(i) \equiv \epsilon_i$ y tendremos en cuenta que en las relaciones de avance temporal e debe aparecer en lugares e instantes impares y B en lugares e instantes pares.

En este caso, como puede verse en la figura B.23, situamos el centro de las dos estrellas en $i, n - 1$, donde (i, n) son impares para la estrella (b) y pares para la (a).

De esta forma, la ecuación B.147 da lugar a

$$\epsilon_i D_\tau \circ e_i^{n-1} = -\gamma_i P_\tau \circ e_i^{n-1} - D_x \circ B_i^{n-1} \quad , \quad i, n = \text{impares} \quad (\text{B.150})$$

y la B.148 a

$$D_\tau \circ B_i^{n-1} = -D_x \circ e_i^{n-1} \quad , \quad i, n = \text{pares} \quad (\text{B.151})$$

Elegiremos, como en la sección 4.6

$$\delta x = \delta\tau = \delta$$

con lo que aseguramos la estabilidad en el vacío y en los demás medios, con tal de que nos limitemos a valores de $\varepsilon_r \geq 1$.

Despejando e_i^n de B.150 y B_i^n de B.151 se obtienen los *algoritmos de avance temporal*

$$e_i^n = \alpha_i e_i^{n-2} + \beta_i [B_{i-1}^{n-1} - B_{i+1}^{n-1}] \quad , \quad i, n = \text{impares} \quad (\text{B.152})$$

$$B_i^n = B_i^{n-2} + e_{i-1}^{n-1} - e_{i+1}^{n-1} \quad , \quad i, n = \text{pares} \quad (\text{B.153})$$

donde

$$\alpha_i = \frac{\epsilon_i - \delta\gamma_i}{\epsilon_i + \delta\gamma_i} \quad , \quad \beta_i = \frac{1}{\epsilon_i + \delta\gamma_i} \quad (\text{B.154})$$

Como ya hemos dicho, los medios que trataremos son homogéneos a trozos. Ahorramos una cantidad substancial de memoria si en vez de almacenar el valor de las

constantes α_i y β_i en todos los nudos impares, sólo almacenamos los valores para cada uno de los medios y en el programa determinamos a qué medio pertenece el nudo sobre el que operamos. En este caso, si el número total de medios es M referiremos las constantes a un índice m

$$\alpha_m , \beta_m , m = 1, 2 \dots, M$$

Condiciones iniciales:

Las condiciones iniciales, como en la sección 4.6, se imponen en los dos primeros instantes, ($n = 1, 2$) en este caso, pero dado que se simula la onda incidente mediante un algoritmo específico de iluminación, todos estos nudos se inicializan al valor 0.

$$e_y(i, 0) = 0 , \quad i = 1, 3, \dots, 2nc + 1$$

$$B_z(i, 1) = 0 , \quad i = 0, 2, \dots, 2nc \quad (\text{B.155})$$

Condiciones de contorno:

Las condiciones reflectantes son las mismas empleadas en la sección 4.6. En este caso se expresan de la forma

$$\text{Condiciones reflectantes} \rightarrow \begin{cases} e_1^n = 0 \\ e_{2nc+1}^n = 0 \end{cases} \quad (\text{B.156})$$

La condición absorbente en el origen es la ya estudiada, salvo por la nueva numeración. La del extremo final, en el caso de que el último medio sea un dieléctrico, es distinta porque la velocidad normalizada de propagación de las ondas $\nu \equiv \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \neq 1$.

A continuación deduciremos esta condición de una forma más general que en el caso anterior.

El campo e de la onda que viaja hacia la frontera final es del tipo $e = f(u = x - \nu \tau)$. Derivando se comprueba que esta función cumple la ecuación unidireccional de onda

$$\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial e}{\partial \tau} = 0$$

Deduciremos el algoritmo de absorción mediante la aproximación de esta ecuación en el nudo $(2nc, n - 1)$, marcado con una cruz en la figura B.24.

Aproximaremos los operadores de la forma

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow D_x \circ P_\tau , \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \rightarrow D_\tau \circ P_x$$

donde $D \circ P$ ³⁷³⁸ indica la aplicación sucesiva de los operadores. Luego

³⁷Esta operación es commutativa.

³⁸Téngase en cuenta que $P \circ f \simeq f \Rightarrow D \circ P \circ f \simeq D \circ f$.

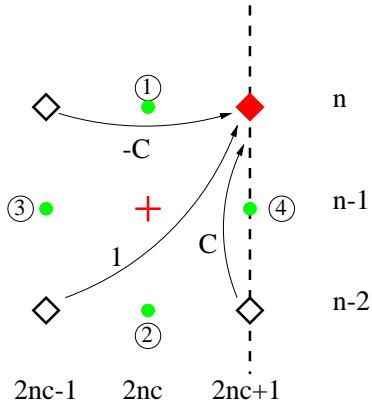


Figura B.24:

$$(D_x \circ P_\tau + \frac{1}{\nu} D_\tau \circ P_x) \circ e_{2nc}^{n-1} = 0$$

Consideremos $D_x \circ P_\tau \circ e_{2nc}^{n-1}$. Según se muestra en la figura anterior, la aplicación de P_τ al centro approxima al campo como el promedio de su valor en los puntos (1) y (2) y la aplicación de D_x al resultado aproxima la derivada espacial en el centro como la media de la derivada espacial en cada uno de estos últimos puntos. Rotando los índices x y τ obtendríamos el resultado para $D_\tau \circ P_x \circ e_{2nc}^{n-1}$. Substituyendo en la ecuación anterior y despejando e_{2nc+1}^n se obtiene la condición absorbente en $2nc + 1$.

$$\text{Condiciones absorbentes} \rightarrow \begin{cases} e_1^n = e_3^{n-2} \\ e_{2nc+1}^n = e_{2nc-1}^{n-2} + C [e_{2nc+1}^{n-2} - e_{2nc-1}^n] \end{cases} \quad (\text{B.157})$$

donde

$$C = \frac{1 - \nu}{1 + \nu}, \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (\text{B.158})$$

Si el medio final es el vacío, $C = 0$ y la condición absorbente en su extremo coincide con la de la figura 4.14.

Durante la ejecución del programa se almacenarán únicamente los valores más recientes de los campos, por lo que cuando se actualizan los valores e_i^n para los puntos interiores se borran e_3^{n-2} y e_{2nc-1}^{n-2} . En el programa aplicamos las condiciones absorbentes después de dicho cálculo por lo que guardaremos estos valores en variables auxiliares específicas antes de dicha actualización (Véase el siguiente programa).

$$\mathbf{eiz} = e_3^{n-2}, \quad \mathbf{ede} = e_{2nc-1}^{n-2} \quad (\text{B.159})$$

Iluminación:

En la sección 4.6 se iluminaba —se generaban ondas que se propagaban a través del medio— mediante unas condiciones iniciales apropiadas. Esto no es factible para la propagación de pulsos largos o funciones periódicas. Aquí daremos una alternativa más versátil.

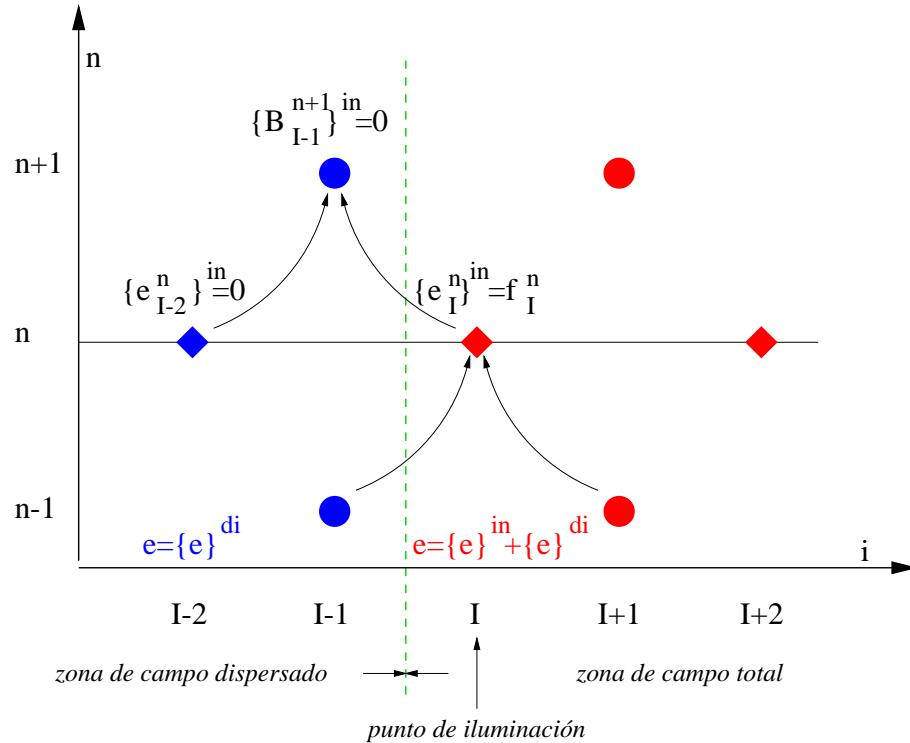


Figura B.25:

Se supone que una onda incidente, de la forma

$$e^{in}(x, \tau) = B^{in}(x, \tau) = f(x, \tau)$$

vía desde $-\infty$ hacia los medios. Numéricamente, figura B.25, este campo se simulará a partir del entorno del *punto de iluminación*, el nudo $i = I$, que situamos en un nudo impar del interior del medio inicial, el vacío. Este nudo, y todos los que se encuentran a su derecha, pertenecen a la *zona de campo total* mientras que los que quedan a su izquierda pertenecen a la *zona de campo dispersado*. La frontera entre ambas zonas, marcada por la línea vertical discontinua, quedará, por lo tanto, en una posición indefinida entre las I e $I - 1$. Queremos que en la zona de campo dispersado no aparezca el campo incidente y que en la otra aparezca el campo total.

Puesto que la onda incidente viaja hacia la derecha a través del medio inicial, el vacío, $f(x, \tau) = f(u = x - \tau)$ o, concretando a los nudos fronterizos, los valores teóricos de los campos son

$$\{e_i^n\}^{in} = f_i^n \quad (\text{B.160})$$

$$\{B_{I-1}^{n+1}\}^{in} = f_{I-1}^{n+1} \quad (\text{B.161})$$

Para el medio inicial $\alpha = \beta = 1$ y las ecuaciones de avance toman la forma

$$e_i^n = e_i^{n-2} + B_{i-1}^{n-1} - B_{i+1}^{n-1} \quad , \quad i, n = \text{impares} \quad (\text{B.162})$$

$$B_i^n = B_i^{n-2} + e_{i-1}^{n-1} - e_{i+1}^{n-1} \quad , \quad i, n = \text{pares} \quad (\text{B.163})$$

Este algoritmo, que se ha deducido para la onda total, es aplicable al interior de cualquiera de las dos zonas pero no lo es para las posiciones I e $I - 1$ porque en las ecuaciones correspondientes se mezclan componentes del campo total con componentes del campo dispersado, puesto que forzamos a que en la zona izquierda $\{e\}^{in} = 0$ y $\{B\}^{in} = 0$. Pero podemos suplir el término que nos falta por su valor teórico correspondiente.

Así, pues, B.162 puede escribirse en (I, n) de la forma

$$e_I^n = e_I^{n-2} + [B_{i-1}^{n-1} + \{B_{i-1}^{n-1}\}^{in}] - B_{i+1}^{n-1}$$

puesto que, si el algoritmo funciona, $B_{i-1}^{n-1} = \{B_{i-1}^{n-1}\}^{di}$.

Teniendo en cuenta a B.163 y a B.161, el algoritmo de iluminación para el campo eléctrico en la posición I puede expresarse como

$$e_I^n = (e_I^n)_{FDTD} + f_{i-1}^{n-1} \quad (\text{B.164})$$

donde $(e_I^n)_{FDTD}$ es la parte de e_I^n que se obtiene mediante la aplicación del algoritmo FDTD para el avance temporal y f_{i-1}^{n-1} la corrección necesaria para introducir el campo incidente.

Procediendo de la misma forma para el nudo $(I - 1, n + 1)$, obtenemos el algoritmo correspondiente al campo magnético

$$B_{I-1}^{n+1} = (B_{I-1}^{n+1})_{FDTD} + f_I^n \quad (\text{B.165})$$

Luego, para cada campo, primero se aplica el algoritmo de avance a todas las posiciones, incluidas las $I - 1$ ó I en su caso, y a continuación se suma el término corrector.

B.2.1.1. Programa: FDTD - 1D - medios.nb

En este programa puede optarse por la ejecución de uno entre dos ejemplos. El número de medios se limita a $\mathbf{M} = 3$: el inicial, un dispersor y el final y normalizamos el incremento espacial y el temporal de forma que

$$\delta = 1 \text{ m}$$

- En el primer ejemplo, el dispersor es un adaptador de cuarto de onda entre el primer medio y el final.

La iluminación será de tipo armónico

$$f(x, \tau) = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (x - x_I - \tau)$$

donde $\lambda = cT$ es la longitud de onda y T el periodo de la onda.

El segundo cumple la relación entre impedancias

$$Z_2 = \sqrt{Z_0 Z_3} \Rightarrow \epsilon_2 = \sqrt{\epsilon_3}$$

y, dado que $\lambda_2 = \nu T$, su longitud debe ser

$$L_2 = \frac{\lambda_2}{4} = \frac{\lambda}{4\sqrt{\epsilon_2}}$$

- En el segundo ejemplo, el medio dispersor es disipativo, $\sigma \neq 0$, y el final un conductor ideal.

La iluminación tendrá la forma de un pulso tipo coseno elevado, de anchura λ , modulado por una función seno.

$$f(x, \tau) = \frac{1}{2 \times 0.65} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - x_I - \tau) \right) * \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (x - x_I - \tau)$$

para $0 \leq \tau - x + x_I \leq \lambda$, y

$$f(x, \tau) = 0 \quad \text{en otro caso}$$

Definido sin la modulación el pulso tendría un valor medio nulo y su espectro estaría centrado en el origen de frecuencias. El método FDTD no es apropiado para la simulación de ondas con un gran contenido de frecuencias cuasiestáticas, por lo que el pulso propuesto es más adecuado, ya que la modulación con el seno de una cierta frecuencia, $\frac{c}{\lambda}$ en este caso, tralada el espectro del pulso inicial centrándolo sobre esta frecuencia ³⁹.

Antes de escribir un programa numérico es conveniente establecer la estructura del mismo: variables, operaciones a realizar, etc. Como punto de partida suele ser útil el dibujo de un diagrama de flujo y la descripción de sus distintos bloques.

Diagrama de flujo del programa:

En la figura B.26 se representa un diagrama de flujo del programa que queremos escribir. Las flechas indican la dirección de flujo de la información.

Para problemas más complejos puede ser necesario el dibujo de un diagrama básico y acompañarlo de otros a distinto nivel de detalle. Aquí nos basta con el primero.

A continuación describiremos cada uno de estos bloques.

³⁹Véase el apéndice L.

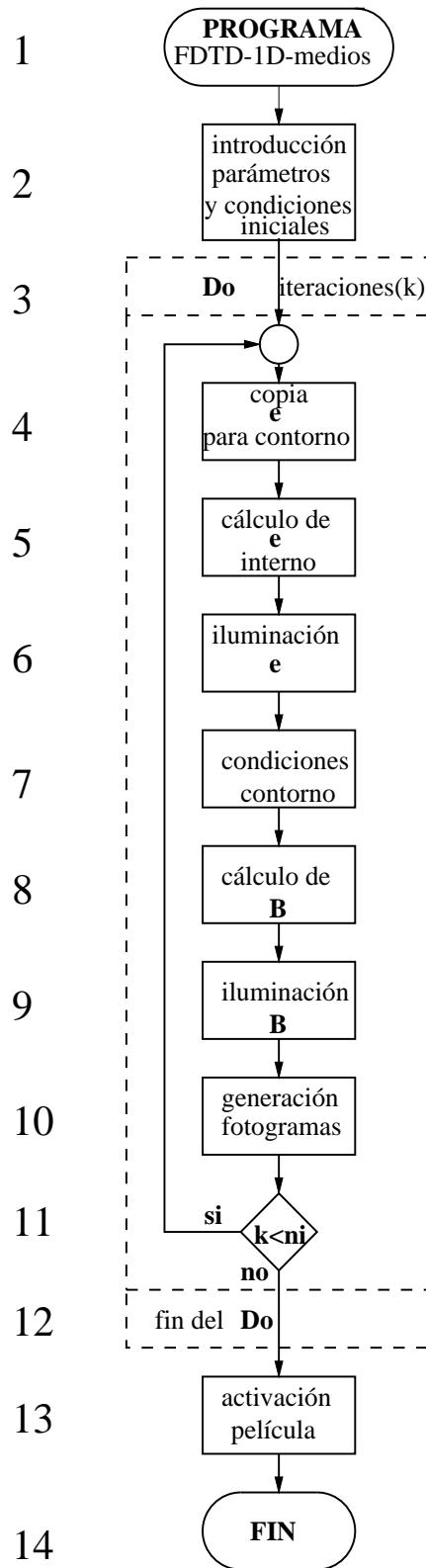


Figura B.26:

1. Este bloque es la cabecera que da nombre al programa.
2. En este otro se dan los pasos previos al cálculo iterativo de los campos.

Parámetros geométricos:

Comenzamos por definir el número **M** de medios y el número de celdas **nL** $\equiv \frac{\lambda}{2\delta}$ equivalente a λ^{40} .

A continuación se ofrece la posibilidad de ejecutar uno de los dos ejemplos propuestos mediante la asignación interactiva de los valores 1 ó 2 a la variable **ejemplo**.

Para cada uno de estos ejemplos se asignan valores a las longitudes de los medios **nL1**, **nL2** y **nL3**, al punto de iluminación **II**⁴¹ y a sus constantes.

- En el primer ejemplo

$$\mathbf{nL1} = 2 * \mathbf{nL} , \quad \mathbf{II} = 2 * \mathbf{nL} + 1 , \quad \mathbf{nL2} = \frac{\mathbf{nL}}{4 \sqrt{\mathbf{epsilon2}}} , \quad \mathbf{nL3} = \frac{\mathbf{nL}}{2} + 1$$

$$\mathbf{epsilon2} = \frac{25}{16} , \quad \mathbf{epsilon3} = \mathbf{epsilon2}^2 , \quad \mathbf{gamma2} = 0 , \quad \mathbf{gamma3} = 0$$

Se da a nL y a ϵ_2 valores tales que todos estos números sean enteros.

- En el segundo

$$\mathbf{nL1} = 3 * \mathbf{nL} , \quad \mathbf{II} = 4 * \mathbf{nL} + 1 , \quad \mathbf{nL2} = 2 * \mathbf{nL} , \quad \mathbf{nL3} = 0$$

$$\mathbf{epsilon2} = 1 , \quad \mathbf{epsilon3} = 1 , \quad \mathbf{gamma2} = 0.005 , \quad \mathbf{gamma3} = 0$$

De acuerdo con la figura B.23, la última celda del tercer medio contiene solamente al nudo $2nc + 1$, donde

$$\mathbf{nc} = \mathbf{nL1} + \mathbf{nL2} + \mathbf{nL3}$$

es el número de celdas completas.

Parámetros temporales:

En primer lugar decidimos el número de fotogramas **nfo** que queremos obtener y cada cuantas iteraciones, **nif** queremos hacerlas. El número total de iteraciones a realizar será

$$\mathbf{ni} = \mathbf{nif} * \mathbf{nfo}$$

⁴⁰Todos números introducidos deben ser enteros positivos, salvo las constantes de los medios.

⁴¹Como en otras ocasiones, escribimos el índice *I* como *II*, etc., porque Mathematica protege ciertos nombres que dentro de la misma tienen un significado concreto.

Es necesario determinar estos parámetro de forma que **ni** sea suficiente para que la película muestre todos los aspectos importantes del problema y que la ejecución no se demore excesivamente.

Constantes de los algoritmos de avance:

Se calculan las constantes de los medios α_m y β_m y se almacenan en las matrices **alfa** y **beta**.

Funciones de iluminación:

Se definen las funciones $f[ii, n]$ que determinan la onda armónica del primer ejemplo y la pulsada del segundo.

Condiciones iniciales:

Se inicializa a $\vec{0}$ la matriz **campos** en al que se almacenarán e y B .

Otras definiciones:

Se calcula la constante **CC** del algoritmo de absorción en la posición final $2nc + 1$ para el primer ejemplo y se calculan numéricamente expresiones que sería necesario computar un número elevado de veces durante el lazo siguiente: las posiciones del inicio de los dos últimos medios **I2** e **I3**, la última posición **ifB** del campo magnético, la última interior del campo eléctrico **ife** y la de la frontera derecha **ifi**.

3. Aquí se indica el comienzo del lazo **Do** que calculará los campos para cada una de las iteraciones. El índice de iteración será el $k = 1, 2 \dots ni$.

Es importante, con objeto de no saturar al ordenador, que los cálculos masivos se hagan de forma numérica. Para ello se hace uso de la función **N[]**.

4. Se comienza reservando las componentes del campo electrico cercanas a la frontera de acuerdo con las expresiones B.159.
5. Este bloque representa al **Do , ii = 3, 5 … , 2 ife** que calcula las componentes interiores del campo eléctrico mediante la fórmula de avance B.152.
6. Se ilunina el campo eléctrico de acuerdo con B.164 y la figura B.25. En la función $f(i, n)$ debe expresarse el índice temporal en función del de la iteración. En este caso $n = 2 * k + 1$.

7. Se aplican las condiciones de contorno. En la primera posición se aplica la absorbente B.157.

En la última posición, según el caso, se aplicará la reflectante

$$\text{campos}[[2 * n + 1]] = 0$$

o la absorbente

$$\text{campos}[[2 * n + 1]] = \text{ede} + C * \text{campos}[[2 * n + 1]] - C * \text{campos}[[2 * n - 1]]$$

Un **Which** gobernado por la variable **ejemplo** adapta este cálculo a cada una de las opciones.

8. Este bloque representa a un **Do** , **ii = 2, 4 ··· , ife**, que calcula las componentes del campo magnético mediante la fórmula de avance B.153.
9. Se ilumina el campo magnético de acuerdo con B.165 y con las mismas opciones ya descritas.
10. Se generan las gráficas del campo eléctrico y del magnético en función de (*ii*) y se unen mediante un **Show** y se muestran.
11. Este es la prueba condicional que determina si se han ejecutado todas las iteraciones especificadas en el **Do** temporal. Es parte de dicha orden.
12. Indica la finalización del lazo.
13. Se agrupan los fotogramas y, con un doble *clik*, se activa la película.
14. Otro doble *clik* detiene la película y finaliza la ejecución del programa.

Programa: *FDTD – 1D – medios.nb*:

```
Remove["Global`*"]; Off[General :: "spell1"];
```

```
$TextStyle = {FontFamily → "Courier", FontSize → 12};
```

Parámetros geométricos:

```
M = 3; nL = 100;
```

```
ejemplo =
```

```
Input["Si desea ejecutar el primer ejemplo, introduzca el valor 1,  
si desea ejecutar el segundo introduzca el 2"];
```

```
Which[ejemplo == 1,
```

$$\{nL1 = 2 * nL; II = 2 * nL + 1; nL2 = \frac{nL}{4\sqrt{\epsilon_2}};$$

$$nL3 = \text{Round}[\frac{nL}{\sqrt{\epsilon_3}}]; \epsilon_2 = \frac{25}{16};$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_2^2; \gamma_2 = 0; \gamma_3 = 0; \},$$

$$\text{ejemplo} == 2,$$

$$\{nL1 = 3 * nL; II = 4 * nL + 1; nL2 = 2 * nL; nL3 = 0; \epsilon_2 = 1;$$

$$\epsilon_3 = 1; \gamma_2 = 0.005; \gamma_3 = 0\},$$

$$\text{True, Print["Valor erroneo de ejemplo"]};$$

$$nc = nL1 + nL2 + nL3;$$

Parámetros temporales:

$$nfo = 100; nif = \text{Ceiling}[\frac{2 * nc}{nfo}];$$

$$ni = nfo * nif;$$

Propiedades de los medios:

$$\epsilon = \text{Table}[1, \{nn, 1, M\}];$$

La siguiente orden es un ejemplo de como generar una serie de variables, en este caso las ϵ 's. La función **ToString**[] convierte en texto al índice **nn** y la **StringJoin**[] agrega este texto al "epsilon". Por último, la orden **ToExpression**[] convierte el texto "epsilon nn " a formato ejecutable, es decir, en la variable **epsilon nn** . De esta forma,

dichas variables pueden almacenarse automaticamente en el vector **epsilon**. Este proceso se hace necesario cuando el número de datos a manejar es elevado.

```

Do[
  epsilon[[nn]] = ToExpression[StringJoin["epsilon", ToString[nn]]],
  {nn, 2, M};

  gamma = Table[0, {nn, 1, M}];

Do[
  gamma[[nn]] = ToExpression[StringJoin["gamma", ToString[nn]]],
  {nn, 2, M};

  alfa = Table[1, {nn, 1, M}]; beta = alfa;

  Do[
    {alfa[[m]] = epsilon[[m]] - gamma[[m]],
     epsilon[[m]] + gamma[[m]]};
    beta[[m]] = 1 / (epsilon[[m]] + gamma[[m]]},
    {m, 2, M};
  
```

Funciones de iluminación:

```

If[ejemplo == 1,
  f[ii_, n_] = Sin[\[Pi]/nL (ii - II - n)],
  f[ii_, n_] = 1/(2 * 0.65) (1 - Cos[\[Pi]/nL (ii - II - n)]) * Sin[\[Pi]/nL (ii - II - n)];

```

Condiciones iniciales:

```
campos = Table[0, {ii, 1, 2 * nc + 1}];
```

Otras definiciones:

$$\text{CC} = \frac{\sqrt{\text{epsilon3}} - 1}{\sqrt{\text{epsilon3}} + 1};$$

$$\text{I2} = 2 * \text{nL1} + 1; \text{I3} = \text{I2} + 2 * \text{nL2};$$

```
ifB = 2 * nc; ife = 2 * nc - 1; ifi = 2 * nc + 1;
```

Do temporal:

```
Do[{m = 1, eiz = campos[[3]], ede = campos[[2 * nc - 1]],  

  Do[{If[(ii == I2) || (ii == I3), m = m + 1],  

    campos[[ii]] = N[alfa[[m]] * campos[[ii]] +  

      beta[[m]] * (campos[[ii - 1]] - campos[[ii + 1]])]},  

    {ii, 3, ife, 2}],  

  Which[ejemplo == 1, campos[[II]] = N[campos[[II]] + f[II - 1, 2 * k]],  

    ejemplo == 2&&k < (nL + 1),  

    campos[[II]] = N[campos[[II]] + f[II - 1, 2 * k]],  

    campos[[1]] = eiz,  

    If[ejemplo == 1, campos[[ifi]] = ede + CC * campos[[2 * nc + 1]]  

      - CC * campos[[2 * nc - 1]],  

      campos[[ifi]] = 0],  

    Do[campos[[ii]] = N[campos[[ii]] + campos[[ii - 1]] - campos[[ii + 1]]],  

    {ii, 2, ifB, 2}],  

    Which[ejemplo == 1,  

      campos[[II - 1]] = N[campos[[II - 1]] + f[II, 2 * k + 1]],  

      ejemplo == 2&&k < (nL + 1),  

      campos[[II - 1]] = N[campos[[II - 1]] + f[II, 2 * k + 1]],  

      If[Mod[k, nif] == 0,  

        {tcampose = Table[{ii, campos[[ii]]}, {ii, 1, 2 * nc + 1, 2}],  

        tcampsB = Table[{ii, campos[[ii]]}, {ii, 2, 2 * nc, 2}],  

        gre = ListPlot[tcampose, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0],  

          GridLines -> {{II, {Dashing[{.01, .01}], RGBColor[1, 0, 0]}},  

            {I2, {RGBColor[0, 1, 0]}}, {I3, {RGBColor[0.5, 0, 1]}}, {-1, 1}},  

          PlotJoined -> True, PlotRange -> {-1.3, 1.3},  

          DisplayFunction -> Identity],  

        grB = ListPlot[tcampsB, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1],  

          PlotJoined -> True, PlotRange -> {-1.3, 1.3},  

          DisplayFunction -> Identity],  

        Show[gre, grB, DisplayFunction -> $DisplayFunction]}],  

{k, 1, ni}];
```

El **If** del segundo **Do** incrementa el índice de medios al pasar por cada una de las fronteras.

El primer **Which** ilumina el campo eléctrico según el ejemplo elegido. La diferencia entre estos ejemplos es que la duración del pulso se extiende solamente a las primeras **nL** iteraciones.

A continuación se aplica la condición absorbente izquierda y con el **If** siguiente la correspondiente a la derecha.

El **If[Mod[k, nif] <> 0]** genera y muestra los fotogramas.

En la figura B.27 se presentan cuatro fotogramas de la película correspondiente al primer ejemplo.

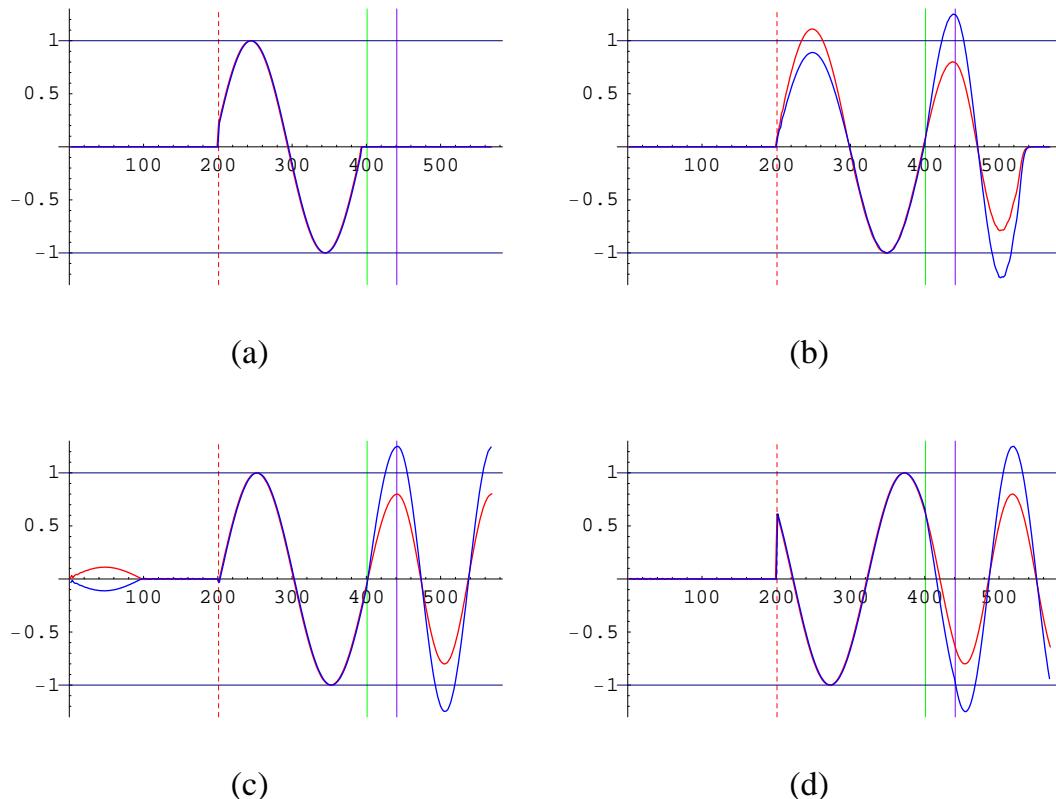


Figura B.27:

- Iteración 96 (figura B.27a): Muestra como el algoritmo de iluminación ha generado, a partir del punto de iluminación (línea vertical discontinua), una onda senoidal que viaja hacia la derecha y está a punto de llegar a la frontera del segundo medio.
- Iteración 198 (figura B.27b): La onda incidente ha atravesado ya el segundo medio sin llegar al final del tercero. Puede verse, por la modificación de las amplitudes en el primer medio, como las reflexiones en las discontinuidades crean ondas dispersadas que viajan hacia la izquierda. La primera reflexión, en la primera frontera (posición 400), está a punto de llegar al punto de iluminación.

- Iteración 300 (figura B.27c): La reflexiones han traspasado ya el punto de iluminación. La primera está a punto de ser absorbida en el origen. La segunda ha alcanzado la posición 100 interfiriendo destructivamente con la primera.
- Iteración 360 (figura B.27d): Dentro del dominio numérico se comprueba que la lámina de cuarto de onda funciona efectivamente como acoplador de la energía incidente desde el primer medio al tercer medio, haciendo que la reflexión en estado estacionario sea nula.

En la figura B.28 se presentan seis fotogramas de la película generada en el segundo ejemplo.

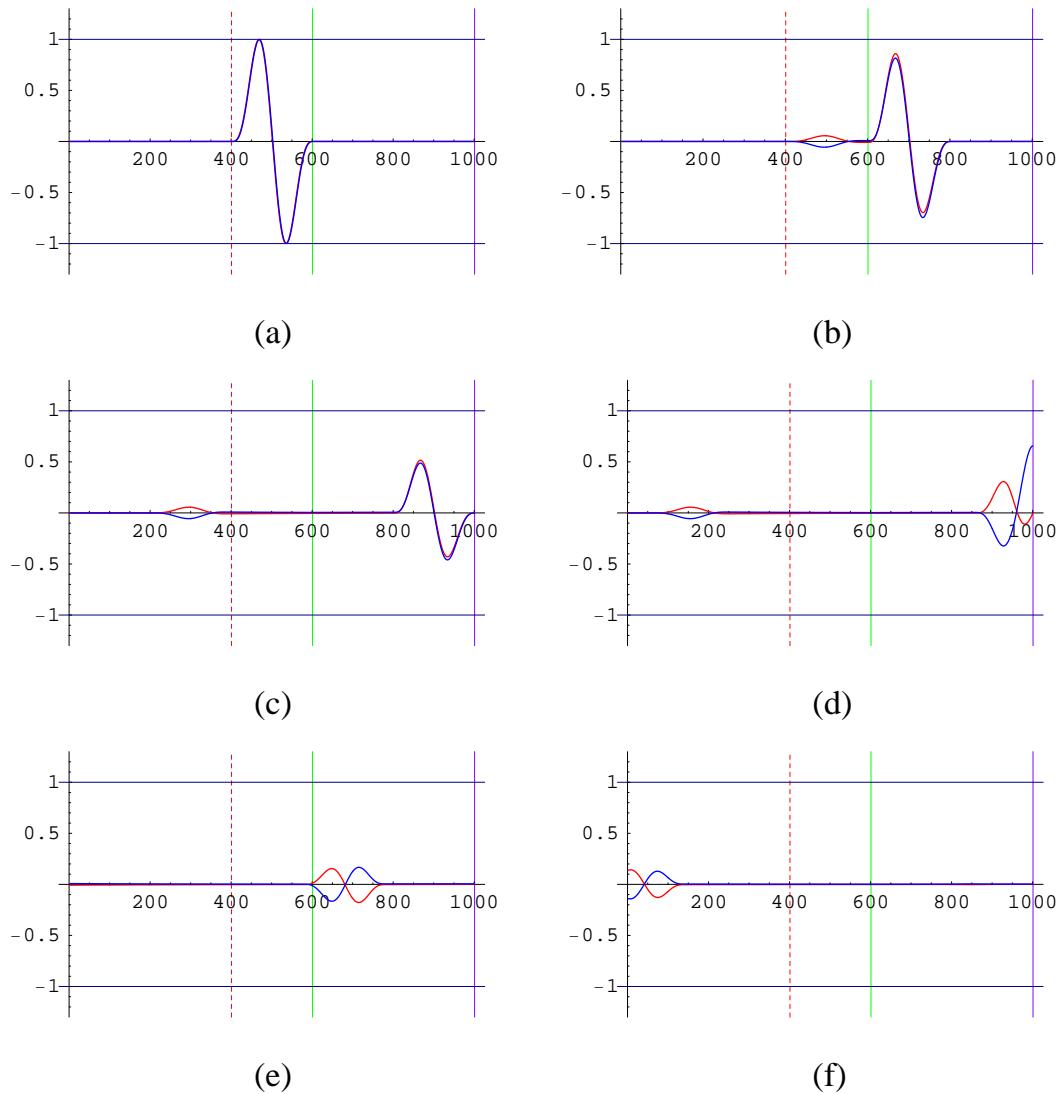


Figura B.28:

- Iteración 100 (figura B.28a): Sólo aparecen dos medios porque el tercero es un plano perfectamente reflectante. Ya se ha generado el pulso.
- Iteración 200 (figura B.28b): Las ondas reflejada y transmitida se deforman en distinta medida; tanto el coeficiente de reflexión como el de transmisión, para cada componente espectral del pulso, dependen de la frecuencia. La transmitida se está atenuando a lo largo de su propagación, su frente está más atenuado que su cola. La reflejada, que es pequeña, está más atenuada que la transmitida.
- Iteración 300 (figura B.28c): El pulso transmitido está llegando al plano conductor visiblemente atenuado. El reflejado en la primera frontera ha traspasado el punto de iluminación.
- Iteración 370 (figura B.28d): El pulso transmitido está sufriendo una reflexión total en la frontera de la derecha; el campo eléctrico se anula en dicho punto cambiando su signo y haciendo que el vector de Poynting se dirija ahora hacia la izquierda.
- Iteración 510 (figura B.28e): El pulso reflejado por el plano llega, más atenuado y deformado, a la primera frontera del segundo medio.
- Iteración 830 (figura B.28f): El pulso anterior se transmite al primer medio, por el que se ha propagado sin atenuarse, y sufre una reflexión que es inapreciable en esta figura. En este intante, el pulso transmitido está siendo absorbido en la frontera de la izquierda.

Apéndice C

Campo magnético terrestre

Es conocido desde la antiguedad que la Tierra tiene un campo magnético asociado. Gilbert, según puede leerse en su libro *De Magnete*, publicado en el 1.600, talló una piedra magnética en forma de esfera y comprobó que las líneas de fuerza se proyectan sobre su superficie en direcciones análogas a las marcadas por la aguja de marear sobre la de la Tierra. Llevado por esta experiencia concluye que esta última constituye realmente un immenso imán.

Sólo recientemente se ha podido llegar al convencimiento de que la causa es fundamentalmente otra: el núcleo terrestre se configura en una dinamo cuyos campos marginales son los que observamos desde el exterior. Actualmente existen fundamentos sólidos para pensar que el mecanismo de dinamo, en solitario o acompañado de otros, existe en la mayor parte de los objetos celestes, los cuales están dotados de campos magnéticos globales que permean a todo su volumen y que juegan un papel primordial en la explicación de sus propiedades y estructura. Estos campos son fuertes y dan lugar a una intensa actividad; su importancia sólo es comparable a la del campo gravitatorio.

C.1. Estructura básica de la Tierra

La estructura del planeta Tierra es muy compleja y en parte poco conocida. A continuación se da una visión simplificada de la misma con objeto de apoyar la descripción de la forma y el origen del campo magnético.

El planeta puede considerarse que consta de dos partes fundamentales, separadas por una brusca variación de la densidad de masa. Esta interfaz, usualmente llamada *superficie terrestre*, separa a la *Tierra interna*, con densidades de 1 a $13 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$ y forma casi esférica de radio $R = 6.371 \text{ Km}$, y a la *Tierra externa*, poco densa, de forma muy variable y que se extiende a unos $10 R$ por la parte diurna y a más de $60 R$ por la nocturna. Ambas partes están impregnadas por el campo magnético terrestre, o *magnetosfera*, y viajan solidariamente a través de la capa externa del Sol, que recibe el nombre de *viento solar*. Éste está constituido por materia ionizada y campo magnético procedentes del Sol. Es precisamente el frente supersónico de choque, producido por la velocidad relativa supersónica entre el viento y la Tierra, el que comprime y deforma fuertemente a la magnetosfera externa, como se muestra esquemáticamente en la figura

C.1.

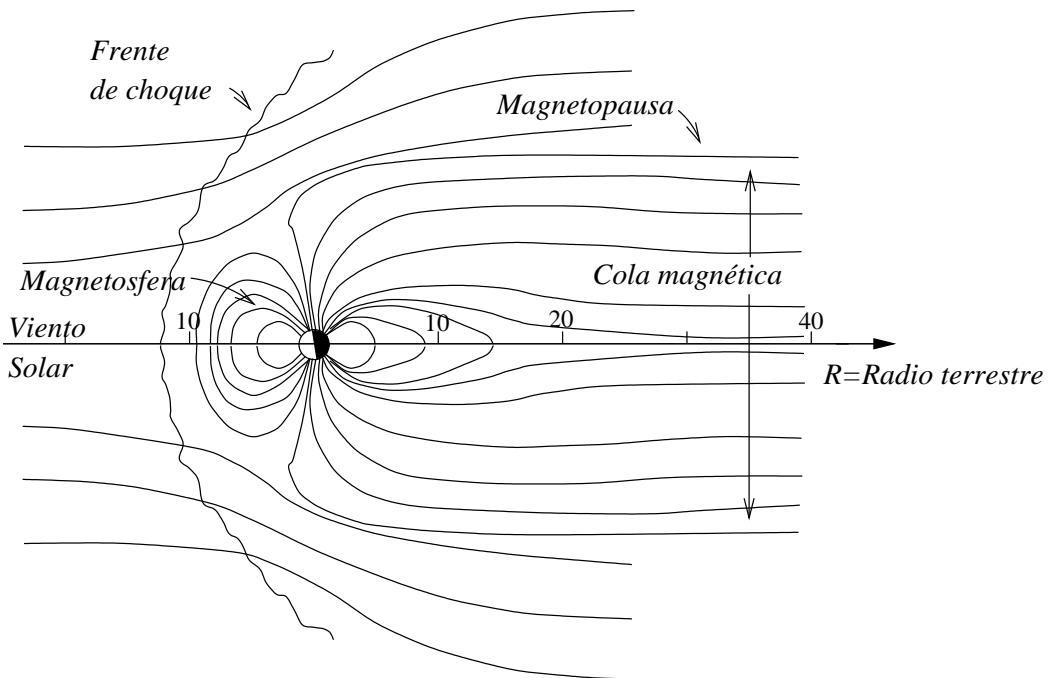


Figura C.1: Magnetosfera

La *biosfera* ocupa los primeros estratos de ambas partes de la Tierra. Se caracteriza por contener corteza, aire y agua. La primera es sólida y los segundos fluidos, todos poco ionizados, malos conductores y con una composición, densidad y temperatura aptos para la generación y el sustento de la vida. Aunque el efecto del campo magnético terrestre sea aparentemente poco relevante en la experiencia cotidiana, es necesario tener en cuenta que la biosfera existe, tal y como hoy la conocemos, porque la magnetosfera externa actúa de escudo protector contra el viento solar repeliendo o atrapando a la mayor parte de la materia ionizada. Sin esta protección la vida sería difícil; durante los breves episodios de inversión del campo magnético principal, en los cuales esta protección decrece en eficacia, parece comprobado un brusco aumento de las mutaciones genéticas.

Por encima de la superficie, de los 60 – 70 Km hasta unos 1000 Km, se encuentra la *ionosfera*, una zona ionizada y altamente conductora cuya estructura es muy compleja y con variaciones marcadas y rápidas. Alrededor de un 5 % del campo magnético superficial se debe a corrientes aposentadas en estas regiones.

La superficie es bien conocida y también lo es en parte la Tierra externa. A este conocimiento contribuyen considerablemente los satélites artificiales, por ejemplo los de la serie COSMOS. Del interior, salvo en lo que concierne a la corteza superficial, sólo se dispone de información indirecta proporcionada por la sismología y por conjjeturas basadas en modelos teórico-empíricos.

Bajo el suelo podemos considerar dos zonas diferenciadas desde el punto de vista eléctrico por su conductividad: el *núcleo*, altamente conductor, y el *manto* y la *corteza* de conductividad pequeña aunque no despreciable. A su vez, el núcleo se compone de

dos partes: el *núcleo interno*, con un radio de $1.240 \pm 10 \text{ Km}$, y el *núcleo externo* que se extiende hasta un radio de $3483 \pm 2 \text{ Km}$. Todo el núcleo es muy homogéneo en composición, fundamentalmente hierro, aunque el interno es sólido y el externo fluido.

Se supone que el núcleo externo está dotado de un movimiento de convección y de rotación no uniforme que acoplado al campo magnético lo amplifica mediante un mecanismo de dinamo autoexcitada. Este movimiento convectivo no es observable directamente y sus fuentes energéticas tampoco se conocen con certeza. Entre ellas podrán contarse la energía cinética de rotación y la de desintegración del potasio K^{40} que se supone disuelto en el propio núcleo; de hecho, bastaría una potencia modesta, la suministrada por una central nuclear de tipo medio, para mantener al campo magnético terrestre.

Dado que la temperatura interna sobrepasa a la de Curie más allá de unos 25 Km por debajo de la superficie, la Tierra no puede ser el gran imán propugnado por Gilbert (La temperatura de Curie, del orden de $600^\circ C$ para los minerales de interés, es aquella por encima de la cual los materiales ferromagnéticos pasan a ser paramagnéticos). La temperatura del núcleo se estima en unos $3 - 4.000^\circ C$.

C.2. Morfología del campo magnético superficial

El campo magnético en la superficie de la Tierra viene siendo medido sistemáticamente desde el tiempo de Gauss. Su obra *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus*, publicada en 1838, puede considerarse como el punto de partida del moderno Geomagnetismo.

Puesto que la superficie terrestre es externa a las fuentes del campo - su origen reside principalmente en el núcleo terrestre, un 95 %, y en la ionosfera - éste es representable en sus proximidades por un potencial escalar que cumple la ecuación de Laplace y que puede ser desarrollado en serie de armónicos esféricos con respecto al eje de rotación y al centro terrestre. La contribución interna vendría representada por una serie convergente de las potencias de (a/r) , donde a es el radio de la Tierra y r la distancia al centro de la misma, y la contribución externa por una serie en potencias de (r/a) . Gauss demuestra que el promedio anual del campo total se debe sólo a las fuentes internas, por lo que la aportación externa varía con periodo corto sobre una media nula.

El potencial debido a las fuentes internas se expresa mediante el desarrollo:

$$\begin{aligned} U_{int} &= \sum_{n=1}^{\infty} a \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} S_n(\theta, \lambda) \\ S_n &= \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) [g_n^m \cos(m\lambda) + h_n^m \sin(m\lambda)] \end{aligned}$$

donde P_n^m son los polinomios asociados de Legendre, g_n^m y h_n^m constantes a determinar y λ y θ la longitud y la latitud geográficas.

En la expresión anterior, los términos en los cuales $n = 1$ ($m = 0, 1$) corresponden a un dipolo centrado e inclinado con respecto al eje de rotación. Si a esta aportación

se añade la de los coeficientes con $n = 2$ ($m = 0, 1, 2$), el campo resultante sigue siendo el de un dipolo, pero descentrado. A este dipolo se le da el sobrenombre de *dipolo geomagnético*. Sus coordenadas son (para el año 1965) $x = 38$, $y = 324$, $z = 107$ Km y su eje está inclinado hacia las intersecciones, Boreal ($80, 1^\circ N, 273, 3^\circ E$) y Austral ($76, 3^\circ S, 121, 2^\circ E$). El resto de los coeficientes representan a contribuciones multipolares de orden superior.

El momento del dipolo geomagnético es actualmente

$$m_T \simeq 8 \times 10^{22} A \cdot m^2$$

Las medidas de Gauss muestran que la mayor contribución se debe a la componente de este dipolo en la dirección del eje geográfico (eje de giro). Además ésta resulta ser mucho más estable que las demás. Las componentes dipolares orientadas en el plano equatorial geográfico aportan un 11 % del campo, y las multipolares de orden superior aportan otro tanto.

En la mayor parte de la literatura se utiliza el calificativo 'geomagnético' para designar a los términos asociados al dipolo geomagnético: meridianos, paralelos, etc.. Así, pues, los polos geomagnéticos son las intersecciones de eje del dipolo con la superficie, el plano ecuatorial geomagnético es el perpendicular al eje geomagnético, etc..

En cualquier caso, el campo total, el que se mide con la brújula, es el dipolar geomagnético distorsionado por el resto de las contribuciones. También para este campo total se definen polos, ecuador y meridianos magnéticos que no coinciden con los anteriores ni con los geográficos.

Las contribuciones no dipolares se ponen de manifiesto en los mapas magnéticos en una docena o más de regiones de *anomalía magnética* que globalmente se desplazan en dirección W a la velocidad de unos 0.18° año $^{-1}$. Esto último sugiere la posibilidad de que el núcleo posea una velocidad angular de giro no homogénea, circunstancia que es determinante en el efecto dinamo.

En la figura C.2a se representa al campo magnético ideal que produciría un dipolo situado en el centro de la Tierra. El campo real es más complejo; es costumbre medirlo en la superficie de la Tierra con respecto al sistema coordenado local y con la nomenclatura que se indica en la figura C.2b:

F es la intensidad del campo magnético, X es su proyección sobre la dirección del polo Norte geográfico en el plano horizontal, Y la proyección en la dirección Este, perpendicular a la primera y en el plano horizontal, Z la proyección en la dirección del Nadir (vertical hacia abajo) y H la componente horizontal.

El ángulo I con que F se hunde por debajo del horizonte se llama *inclinación* y el D con que se desvía del Norte, hacia el Este, se llama *declinación*.

Los polos magnéticos se definen como aquellos puntos en los que el campo magnético total tiene una inclinación $I = 90^\circ$ (Norte) e $I = -90^\circ$ (Sur). El polo Norte magnético se sitúa en el norte de Canadá y el Sur, en posición casi diametral, en la costa antártica. El ecuador magnético es la isoclina (curva de igual inclinación) $I = 0$. Los meridianos magnéticos son las curvas tangentes a la componente horizontal por lo que tampoco coinciden con los meridianos geomagnéticos que son las intersecciones de los planos que contienen al eje geomagnético con la superficie de la Tierra.

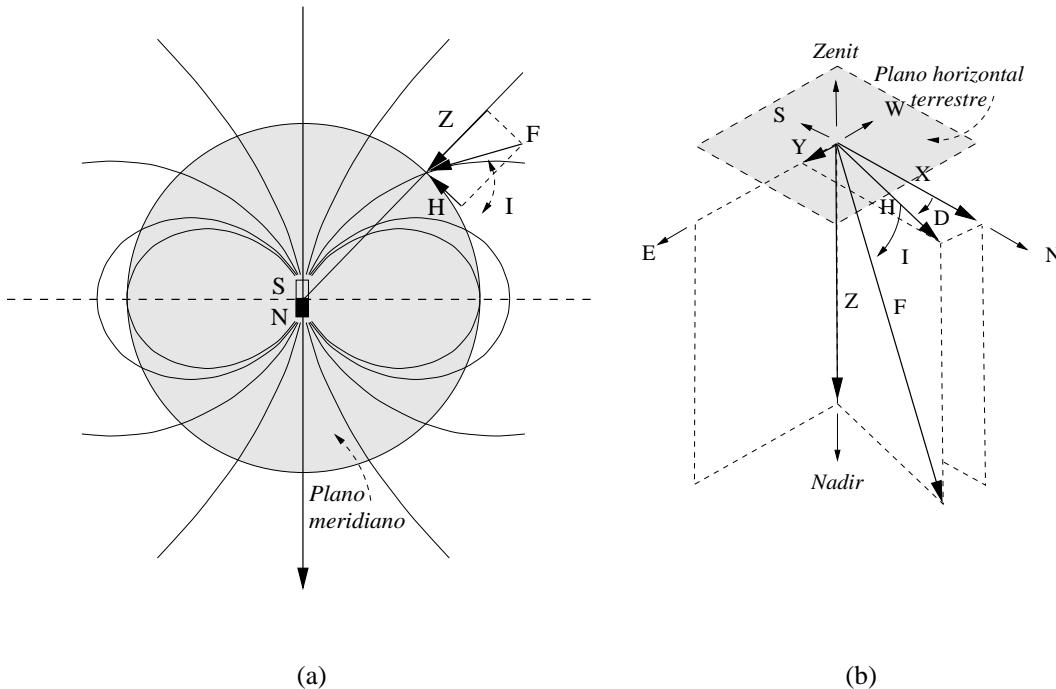


Figura C.2: Componentes del campo magnético superficial

De acuerdo con las definiciones anteriores, el campo es horizontal en el ecuador magnético, con un valor de $B_{max} = 0.31 G^{-1}$, y vertical en los polos, con un valor $Z_{max} = 2 B_{max}$.

C.3. Campo fuera de la superficie

El campo en el interior del núcleo no es medible pero, dentro de los modelos de dinamo posibles, se le supone un valor muy superior al geomagnético, del orden de 100 G , y con una geometría fundamentalmente toroidal (líneas de campo rodeando al eje terrestre). El campo externo, esencialmente poloidal, debido al dipolo, constituiría un pequeño campo marginal fugado del interior del núcleo. Es por tanto en el núcleo donde se almacena la mayor parte de la energía magnética.

Por encima de la superficie, la estructura del campo se ve modificada por las aportaciones externas, sufriendo una fuerte distorsión en las regiones lejanas debido a la interacción con el viento solar (véase la figura C.1). La magnetosfera queda delimitada de este último por una superficie de campo nulo que se denomina *magnetopausa*. Entre el frente de choque y la magnetopausa existe una región, la *magnetovaina*, donde la velocidad y los campos del viento solar aparecen altamente perturbados. En la magnetosfera exterior existe una serie de regiones, como los *cinturones de Van Allen*, y tienen lugar una gran cantidad de fenómenos interesantes cuya descripción no cabe en este espacio.

$^1G = \text{gauss. } 1 G = 10^{-4} T.$

C.4. Variaciones temporales del campo magnético terrestre

Todas las contribuciones al campo magnético presentan un grado mayor o menor de variabilidad temporal. Las internas son de variación lenta con períodos característicos superiores al siglo: *variación secular*. Las externas varían de forma mucho más rápida quedando prácticamente anuladas en los promedios anuales.

Como ya se ha indicado, la componente dipolar en la dirección del eje terrestre es la más estable: hasta fechas recientes se pensaba que su actual orientación Sur era permanente. No obstante el desarrollo reciente de la ciencia del Paleomagnetismo ha permitido establecer cuantitativamente que esta componente varía no sólo en magnitud sino en signo, habiendo cambiado su orientación numerosas veces a lo largo de la historia geológica de la Tierra. Su magnitud fluctúa lentamente de forma aleatoria (era un 6 % superior al actual hace 150 años, inferior en un 50 % hace 5.000 años, superior en un 50 % hace 15.000 años, una cuarta parte hace 500.000 años) pero su valor absoluto se ha mantenido comparable al actual durante al menos 2.700 millones de años. Su signo, sin embargo, sufre cambios bruscos cada $10^5 - 10^7$ años; se realizan en tiempos relativamente cortos del orden de los 15.000 años (ha permanecido en la dirección Sur durante los últimos 700.000 años salvo, posiblemente, durante unos breves episodios de inversión). Las componentes dipolares perpendiculares al eje varían de forma aleatoria sobre media nula y dan lugar a una precesión del eje geomagnético alrededor del terrestre con un periodo de $10^4 - 10^6$ años. El promedio de la dirección del eje geomagnético, desde el Cuaternario hasta el presente, coincide con el eje de giro con una dispersión de unos 20° . Las contribuciones multipolares varían más rápidamente, con períodos del orden del siglo, dando lugar, entre otros efectos, a la migración global hacia el Oeste de las anomalías.

Las contribuciones externas, más rápidas que las anteriores, presentan periodicidades de 12 hora, un día, veintisiete días, un año, etc. y están relacionadas con el movimiento de la Tierra, del Sol e incluso de la Luna. Son importantes también las fluctuaciones aperiódicas, como las tormentas y los pulsos magnéticos que aparecen, con el retraso correspondiente, después de los períodos de actividad excepcional del Sol.

C.5. Principio de la dinamo autoinducida

Como ya se ha dicho, se desconocen los detalles del movimiento convectivo del núcleo y sus fuentes energéticas y los fenómenos a explicar son numerosos y complejos. Por otra parte la teoría magnetohidrodinámica de los fluidos conductores es difícil y sus predicciones son muy sensibles a las condiciones particulares del problema. No obstante, descartados otros posibles mecanismos de producción del campo, tales como la magnetización permanente o la retención del campo magnético primordial de la nube de polvo preestelar, la teoría de la dinamo autoinducida es el único candidato firme para la explicación del mecanismo de generación del campo magnético terrestre.

Aunque no es posible extenderse aquí en esta cuestión, sobre la que actualmente se vierte un considerable esfuerzo de investigación, si que es posible ilustrar al menos el

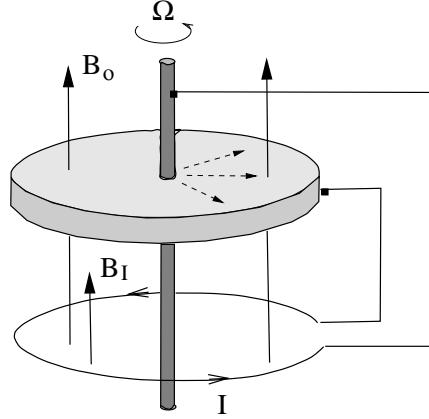


Figura C.3: Autodinamo

principio básico de funcionamiento de este tipo de dinamos, esto es, la posibilidad de una dinamo excitada por el campo magnético que ella misma produce. La dinamo de disco homopolar propuesta por Bullard en 1955 constituye un modelo, simplificado al máximo, cuyo análisis servirá para este propósito. Corresponde al esquema de la figura C.3.

Consta de un disco conductor, de radio l , que gira con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$ alrededor de su eje, y de un solenoide, coaxial con el disco, con N espiras y resistencia total R , que hace contacto con el borde del disco y con su eje. Suponemos que inicialmente existe un campo magnético semilla \vec{B}_0 , en la dirección del eje, al que se le añade el \vec{B}_I producido en la misma dirección y sentido por el solenoide.

Los electrones que se mueven con el disco sienten una fuerza por unidad de carga

$$\vec{E} = (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{B} = \omega r B \hat{r}$$

donde B es el campo total, suma del inicial más el del solenoide. Este último puede aproximarse al de un solenoide indefinido, $B_I = \mu_0 N I$, siendo I la intensidad que circula por el mismo. La fuerza electromotriz aplicada a este último es:

$$\mathcal{E} = \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \Omega l^2 (B_0 + B_I)$$

Puesto que la intensidad es $I = \mathcal{E}/R$, despejando,

$$I = \frac{1}{2R} \frac{\Omega l^2 B_0}{1 - \frac{1}{2} \Omega l^2 \frac{N}{R}}$$

Como puede verse, existe una frecuencia crítica de giro

$$f_c \equiv \frac{\Omega_c}{2\pi} = \frac{R}{\pi l^2 \mu_0 N}$$

a la cual la intensidad puede ser distinta de cero y finita en ausencia del campo inicial B_0 . Para un disco de radio $l = 1 \text{ m}$ y un solenoide con una resistencia por cada espira

$R/N = 1 \Omega$, $f_c = 2,5 \times 10^5 \text{ rev.s}^{-1}$. Esta frecuencia es realmente muy elevada para el dispositivo experimental en cuestión, pero las dimensiones del núcleo y los parámetros que caracterizan su movimiento hacen que el mecanismo de dinamo autoinducida sea con toda probabilidad el causante de la parte principal del campo magnético terrestre.

C.6. Campo magnético de otros objetos celestes

Los campos magnéticos asociados a los objetos celestes pueden tener un origen distinto al del efecto dinamo. Este puede ser el caso de las estrellas magnéticas y los púlsares que poseen un momento dipolar no alineado con el eje de rotación, en muchos casos perpendicular al mismo, y campos muy superiores al del Sol (el campo solar no sería medible ni siquiera desde la estrella más cercana). Los cuerpos grandes, conductores, densos y poco turbulentos, pueden retener el campo primordial. En cualquier caso, los objetos lejanos no son resolubles espacialmente por lo que es difícil conjeturar sobre la estructura y el origen de sus campos magnéticos.

Más observables son los planetas, el Sol y nuestra propia Galaxia, para los cuales el único mecanismo posible de generación del campo es el dinamo.

El Sol pudiera retener algo del campo primordial en su núcleo no convectivo, pero su campo externo se genera en una estrecha capa convectiva cuya superficie superior observamos con detalle. El panorama presentado es extremadamente heterogéneo y en parte sorprendente, con numerosas estructuras como los tubos magnéticos, los granos y las manchas solares, entre las cuales se compone una frenética actividad. El campo magnético global es del orden del de la Tierra y varía casi periódicamente con un periodo de unos 22 años.

La capa convectiva de la Tierra es relativamente más gruesa, es el núcleo líquido, pero no es observable ni siquiera en su superficie.

La Galaxia, sin embargo, es transparente. Se conoce su movimiento de giro no uniforme y el carácter turbulento del plasma interestelar. Por sus características conocidas no es posible que retenga una parte significativa del campo primordial. Nuestra posición de observación es interior a la dinamo por lo que se detecta efectivamente un campo magnético de tipo toroidal. La componente poloidal no es medible ni tampoco las variaciones temporales del campo dadas las grandes constantes de tiempo del movimiento galáctico.

Por lo que respecta a los planetas solares, sólo poseen campo magnético apreciable aquellos con períodos de rotación cortos y con núcleo convectivo conductor suficientemente grande. Este es el caso de Júpiter, que tiene un periodo de unas 11 horas y cuyo núcleo es presumiblemente una aleación de hidrógeno metálico y helio; su campo es unas 20 veces el de la Tierra. Marte, que por su baja densidad es poco probable que posea un núcleo comparable al de la Tierra, carece de campo o éste es muy débil. Las rocas de la Luna, sin embargo, presentan una magnetización remanente comparable con la de las terrestres lo que, dadas las circunstancias, constituye una incógnita de difícil explicación.

En la actualidad, la información sobre el sistema solar crece a diario y, en parte, es directamente accesible a través de diversos puntos de la red internet a los que es

recomendable visitar.

Apéndice D

Sistemas de conductores y espiras

En este capítulo abordaremos el tratamiento específico de los sistemas de conductores en campos eléctricos estáticos y de espiras en campos magnéticos estacionarios. Ambos problemas, que tienen importancia práctica, no admiten, en general, una solución analítica exacta aunque pueden simplificarse mediante la introducción de coeficientes geométricos adecuados que caractericen el comportamiento global de los conductores y las espiras. Estos coeficientes, de capacidad o inducción en cada caso, pueden calcularse mediante expresiones apropiadas o medirse experimentalmente.

Estudiaremos también las fuerzas y los pares que aparecen en tales sistemas.

D.1. Sistemas de conductores

D.1.1. Coeficientes de potencial y de capacidad

En este capítulo escribiremos explícitamente las sumatorias, renunciando al convenio de índices repetidos, para simplificar la lectura de las expresiones correspondientes.

Podemos estudiar el comportamiento electrostático de un sistema de conductores sin necesidad de resolver explícitamente la ecuación de Poisson.

Supongamos, como se muestra en la figura D.1, un sistema de conductores inmersos en un dieléctrico de constante ε . Comprobaremos que existe una relación lineal entre los potenciales que adquieren los conductores y las cargas depositadas en sus superficies.

Coloquemos una carga $Q_i \neq 0$ en el conductor i y hagamos $Q_j = 0 \forall j \neq i$. Esta distribución de cargas creará en el espacio un campo cuyo potencial describiremos como $V_0(\vec{r})$ y que será la solución de la ecuación de Laplace compatible con las condiciones de contorno impuestas.

$$0 = \int_{\mathcal{S}_j} \rho_{s_j} ds, \quad Q_i = \int_{\mathcal{S}_i} \rho_{s_i} ds = -\varepsilon \int_{\mathcal{S}_i} (\nabla V_0 \cdot \vec{n}_i) ds$$

donde ρ_{s_i} es la densidad superficial de carga en la superficie \mathcal{S}_i del conductor i .

Dado que $V_0(\vec{r})$ es solución de la ecuación de Laplace, también lo es el potencial $V_1(\vec{r}) = \lambda V_0(\vec{r})$, donde λ es una constante arbitraria, el cual será compatible con la

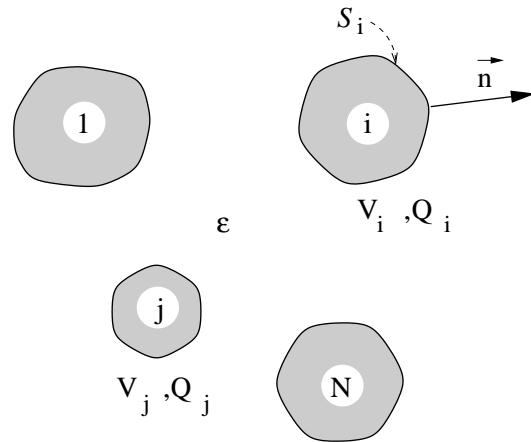


Figura D.1:

condición de contorno

$$Q'_i = -\lambda \epsilon \int_{S_i} (\nabla V_0 \cdot \vec{n}_i) ds = \lambda Q_i$$

Al multiplicar $V_0(\vec{r})$ por λ , hemos multiplicado por la misma cantidad a los potenciales de las superficies de todos los conductores y a las cargas superficiales de los mismos. Luego, entre las cargas y los potenciales existe una relación lineal de proporcionalidad.

Así, pues, si colocamos cargas arbitrarias Q_i en las superficies de los conductores S_i , la relación entre éstas y los potenciales V_i de los mismos será del tipo

$$V_j = \sum_{i=1}^N P_{ij} Q_i , \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} = (P_{ij}) \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} \quad (D.1)$$

donde los coeficientes P_{ij} , que llamaremos *coeficientes de potencial*, tienen carácter geométrico y pueden calcularse en función de la estructura de los conductores y de los medios dieléctricos en que están inmersos.

Invirtiendo la matriz (P_{ij}) , obtenemos

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j , \quad (C_{ij}) = (P_{ij})^{-1} \quad (D.2)$$

donde a la matriz (C_{ij}) la llamaremos, genéricamente, matriz de los *coeficientes de capacidad*. Con más propiedad, los elementos C_{ii} se denominan de capacidad y los C_{ij} , $i \neq j$, de inducción. Estos coeficientes se expresan en *faradios*.

Los coeficientes de capacidad y de potencial pueden medirse, según se desprende

de D.1 y D.2, haciendo uso de las expresiones

$$P_{ij} = \left(\frac{V_i}{Q_j} \right)_{Q_l=0}, \quad \forall l \neq j$$

$$C_{ij} = \left(\frac{Q_i}{V_j} \right)_{V_l=0}, \quad \forall l \neq j$$

Para medir P_{ij} , medimos el potencial que adquiere el conductor i cuando en el j hemos colocado una carga $Q_j \neq 0$ y en todos los demás cargas nulas, $Q_l = 0$ para $l \neq j$.

La energía del sistema de conductores se podrá expresar, de acuerdo con 9.38, en función de estos coeficientes ¹

$$W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} P_{ij} Q_i Q_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} V_i V_j \quad (\text{D.3})$$

Antes de analizar las propiedades básicas de los coeficientes, desarrollaremos un teorema de interés para sistemas de conductores.

D.1.2. Teorema de reciprocidad de Green

Demostraremos que si V_i son los potenciales de los conductores i cuando sobre las superficies existen cargas Q_i y V'_i cuando las cargas son Q'_i , se cumple la siguiente relación

$$\sum_i Q_i V'_i = \sum_j Q'_j V_j \quad (\text{D.4})$$

que es el *teorema de reciprocidad de Green*.

Para probarlo, supongamos un sistema de n cargas puntuales q_i cuyas posiciones relativas vienen fijadas por las distancias r_{ij} . La carga q_j está situada en un punto fijo en el que el potencial, debido al resto de las cargas, es

$$V_j = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{r_{ji}}$$

donde $i \neq j$ en la sumatoria puesto que excluimos el potencial singular de la propia carga.

Si ahora colocamos cargas distintas, q'_j en las mismas posiciones j anteriores

$$V'_i = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \sum_{j \neq i} \frac{q'_j}{r_{ij}}$$

por lo que

$$\sum_i q_i V'_i = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q'_j}{r_{ij}} = \sum_j q'_j V_j \quad (\text{D.5})$$

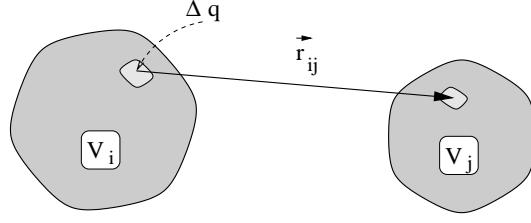


Figura D.2:

Dividiendo la superficie de los conductores en pequeños elementos con cargas Δq , como se muestra en la figura D.2, agrupando todos los términos que están al mismo potencial y aplicando D.5 se obtiene la expresión de partida D.4.

En particular, si en un principio hacemos $Q_i = Q$ y $Q_j = 0$, para $j \neq i$, y después hacemos $Q'_j = Q$ y $Q'_i = 0$ para $i \neq j$, tenemos que

$$V'_i = V_j$$

Es decir, la contribución al potencial del conductor j debida a una carga Q depositada en el conductor i , es la misma que tendría lugar en el conductor i si dicha carga Q fuera depositada en el conductor j .

D.1.3. Propiedades fundamentales de los coeficientes

a) Las matrices de los coeficientes de potencial y de capacidad son *simétricas*:

$$P_{kl} = P_{lk} , \quad C_{kl} = C_{lk} \quad (\text{D.6})$$

Para probarlo, hagamos

$$Q_k \neq 0 , \quad Q_i = 0 \quad \forall i \neq k$$

$$Q'_l \neq 0 , \quad Q'_j = 0 \quad \forall j \neq k$$

por lo que, según el teorema de reciprocidad

$$Q_k V'_k = Q'_l V_l$$

y, según D.1,

$$V_l = P_{lk} Q_k , \quad V'_k = P_{kl} Q'_l \Rightarrow Q_k P_{kl} Q'_l = Q'_l P_{lk} Q_k$$

y, dividiendo por $Q'_l Q_k$, tenemos que

$$P_{kl} = P_{lk}$$

de aquí se deduce también que la matriz de capacidad es simétrica.

b) Los coeficientes de potencial son *positivos* y los diagonales son mayores que los de fuera de la diagonal:

$$P_{ii} \geq P_{ij} \geq 0 , \quad i \neq j \quad (\text{D.7})$$

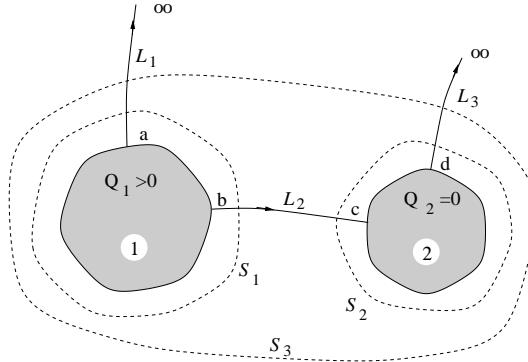


Figura D.3:

Esta propiedad no es fácil de probar rigurosamente, pero razonaremos sobre la figura D.3 en la que, para simplificar, representaremos sólo a dos conductores. En el conductor (1) hemos colocado una carga positiva $Q_1 > 0$ y en el (2) una carga nula.

Puesto que la carga de (1) es igual a la total del sistema, calculando los flujos del campo eléctrico a través de las distintas superficies,

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi_3 = \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_1}{\varepsilon} > 0, \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

luego, del conductor (1) parten líneas de campo, ya que $\Phi_1 > 0$, todas las cuales deben morir en el infinito, porque $\Phi_1 = \Phi_3$, aunque algunas de ellas pueden pasar previamente por el conductor (2).

$$V_1 = P_{11} Q_1 = \int_{a, \mathcal{L}_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$$

y, puesto que $Q_1 > 0$, $P_{11} > 0$.

Si algunas de las líneas que parten de (1) inciden en (2), dado que $\phi_2 = 0$, el mismo flujo de la línea debe partir de (2) hacia el infinito. Luego

$$V_2 = P_{21} Q_1 = \int_{d, \mathcal{L}_3}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \geq 0$$

$$P_{21} \geq 0.$$

Por otra parte

$$V_1 = \int_{b, \mathcal{L}_2}^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_2 \Rightarrow V_1 = P_{11} Q_1 \geq V_2 = P_{21} Q_1 \Rightarrow$$

$$P_{11} \geq P_{21}$$

Es también necesario tener en cuenta la posibilidad de que ninguna línea de campo que parta de (1) llegue a (2). Veremos esta posibilidad en el próximo epígrafe, al estudiar el apantallamiento.

¹En adelante no anotaremos que la suma es sobre N elementos.

D.1.4. Apantallamiento. Condensadores

Se dice que un conductor k apantalla a otro l cuando el segundo está envuelto totalmente por el primero. En lo sucesivo supondremos que en el interior de k sólo está l . Bajo estas condiciones, veremos que

$$P_{lj} = P_{kj} \forall j, \quad C_{ll} = -C_{lk}, \quad C_{lj} = 0, \quad \forall j \neq k, l \quad (\text{D.8})$$

Es decir, el conductor que apantalla asume todas las relaciones del conductor apantallado con el resto de los conductores.

En la figura D.4 se representa a tres conductores, estando el (1) apantallado por el (2).

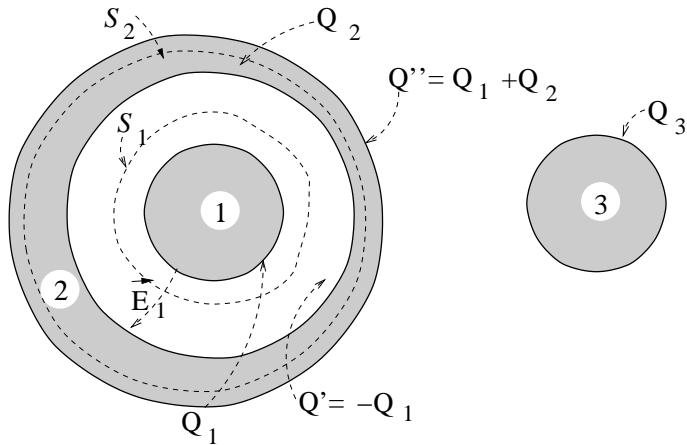


Figura D.4:

- En primer lugar demostraremos que $P_{lj} = P_{kj} \forall j$. Para ello hagamos $Q_2 \neq 0$, $Q_1 = Q_3 = 0$.

Puesto que S_1 envuelve al conductor (1), que no contiene carga

$$\Phi_1 = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 = 0 \text{ y } V_1 = V_2 \Rightarrow P_{12} Q_2 = P_{22} Q_2 \Rightarrow$$

$$P_{12} = P_{22}$$

Si ahora hacemos $Q_3 \neq 0$ y $Q_1 = Q_2 = 0$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow P_{13} Q_3 = P_{23} Q_3 \Rightarrow$$

$$P_{13} = P_{23}$$

con lo cual queda demostrada la primera proposición.

- Para demostrar que $C_{ll} = -C_{lk}$, hagamos $Q_1 = 0, V_3 = 0$.

Por ser $Q_1 = 0, V_1 = V_2$ y

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$C_{11} = -C_{12}$$

- Por último, demostraremos que $C_{lj} = 0$, $\forall j \neq k, l$ tomando $Q_1 = 0, V_3 \neq 0$

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3 = 0 \Rightarrow$$

$$C_{13} = 0$$

Como se muestra en la figura D.4, la superficie S_2 está en el seno del conductor (2) y, puesto que el campo eléctrico estático en el interior de un conductor es nulo

$$\Phi_2 = \frac{Q_1 + Q'}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow Q' = -Q_1 \quad (\text{D.9})$$

Luego, en la cara interna del conductor que apantalla aparece una carga igual y contraria a la depositada en la superficie del conductor apantallado. Además, puesto que $Q_2 = Q' + Q''$, en la cara externa del conductor que apantalla aparece una carga $Q'' = Q_1 + Q_2$.

Como puede observarse, la región comprendida entre (1) y (2) se comporta eléctricamente con independencia de lo que ocurre fuera de ella, por lo que se dice que está *apantallada*.

Se define como *condensador* al conjunto de la cara interna del conductor que apantalla, la externa del apantallado y la región intermedia, y se define su capacidad mediante el parámetro positivo

$$C \equiv \frac{Q_1}{V_1 - V_2} (> 0) \quad (\text{D.10})$$

A partir de las propiedades ya demostradas, puede demostrarse que

$$C = C_{11} = -C_{12} = \frac{1}{P_{11} - P_{22}} \quad (\text{D.11})$$

Definimos la energía almacenada en el condensador como

$$W_C = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q' V_2) = \frac{1}{2} Q_1 (V_1 - V_2)$$

y, simplificando la notación, escribiendo $Q_1 = Q$ y $V = V_1 - V_2$

$$W_C = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2C} Q^2 \quad (\text{D.12})$$

Los condensadores reales no pueden responder exactamente a esta definición porque, para que sean útiles el conductor interno ha de ser accesible y para ello es necesario

romper el apantallamiento con objeto de poder conectar con él. Además, el conductor que apantalla se relaciona con el resto de los conductores del entorno creando en la práctica pequeñas *capacidades parásitas* que, en algunos casos, han de tenerse en cuenta. La construcción de los condensadores se lleva a cabo de forma que estas desviaciones de la idealidad no introduzcan perturbaciones excesivas en el comportamiento de los mismos.

Los condensadores reales pueden asociarse en paralelo, conectando eléctricamente a los conductores internos de los condensadores individuales, así como a los conductores externos.

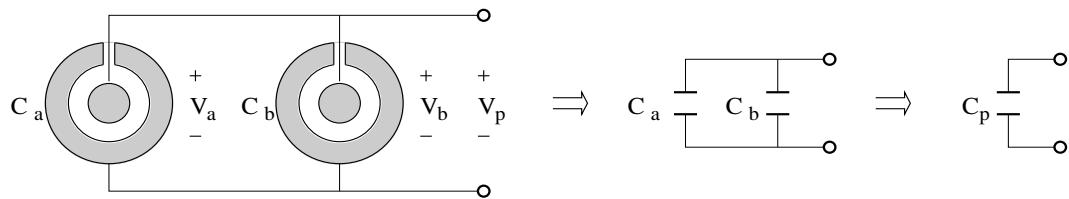


Figura D.5:

Como puede comprobarse, figura D.5 en la conexión en paralelo, $V_p = V_a = V_b$ y $Q_p = Q_a + Q_b = C_a V_a + C_b V_b = (C_a + C_b) V_p \Rightarrow$

$$C_p = C_a + C_b \quad (\text{D.13})$$

La conexión en serie, entre capacidades reales, necesita una consideración más detallada, que no vamos a hacer aquí.

El condensador más simple, figura D.6, es el condensador plano, consistente en dos placas metálicas planas, de superficie S , situadas a una pequeña distancia d y entre las cuales hay un dieléctrico de constante ϵ .

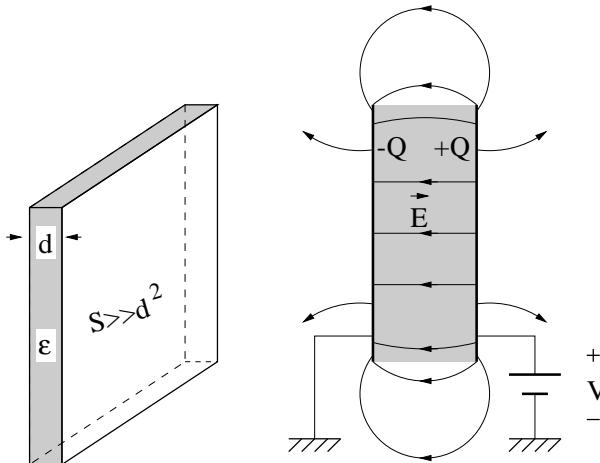


Figura D.6:

Despreciando el *efecto de bordes*, es decir, suponiendo que el campo eléctrico en el interior, salvo en una pequeña región cercana a los bordes, es uniforme, como si las

placas fueran de dimensión infinita, es fácil calcular la capacidad de este condensador ².

$$C \simeq \varepsilon \frac{S}{d}$$

D.1.5. Fuerzas y pares en sistemas de conductores

El cálculo de las fuerzas y los pares que actúan sobre las distintas partes de un sistema eléctrico dado suele ser complicado pero, bajo ciertas circunstancias, los principios de conservación de la energía pueden facilitar esta tarea.

Supongamos un sistema estático de conductores y dieléctricos, con coeficientes P_{ij} (C_{ij}), cargas Q_i y potenciales V_i determinados.

Con objeto de calcular la fuerza que actúa sobre una cualquiera de sus partes, imaginemos transformaciones lentas del sistema anterior con la posible participación de una fuente de energía externa. Puesto que la fuerza en cuestión tiene lugar en una situación estática, su valor no dependerá de la transformación que imaginemos, aunque sí su expresión formal. Veremos como, haciendo el balance energético de dos transformaciones distintas, obtenemos dos expresiones distintas, pero equivalentes, de la fuerza.

En situación estática, las fuerzas mecánicas equilibran a las eléctricas de forma que ninguna de las partes del sistema puede desplazarse o girar. Si, por un instante, relajamos la fuerza mecánica que actúa sobre una parte del sistema, las fuerzas eléctricas desplazarán al elemento relajado efectuando un trabajo que implica pérdida de energía del sistema electromagnético. Para un desplazamiento elemental $d\vec{l}$, este trabajo es

$$dW_{el} = \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (\text{D.14})$$

También podemos inyectar sobre dicho sistema, de forma simultánea, energía dW_{ex} procedente de una fuente externa al mismo. Si, además ponemos en juego la energía potencial, el principio de conservación puede expresarse, en este caso, de la forma

$$dW + dW_{el} = dW_{ex} \quad (\text{D.15})$$

donde dW es el incremento de la energía potencial eléctrica almacenada en el sistema que ha tenido lugar en una transformación elemental, dW_{el} . Veamos como, a partir de la expresión anterior, pueden obtenerse las distintas expresiones de la fuerza ya apuntadas.

Expresión de la fuerza y el par a carga constante:

Supongamos, en primer lugar, que el sistema está aislado y que en los conductores hay unas cargas Q_i . Tenemos, pues, que $dW_{ex} = 0$.

$$dW_{el} = -dW_{el}$$

es decir, el trabajo se realiza a expensas de una disminución equivalente de la energía potencial, por lo que, escribiendo

$$dW = \nabla W \cdot d\vec{l}$$

²Ya lo hemos hecho en un problema anterior.

tenemos que

$$\vec{F} = -(\nabla W)_Q \quad (\text{D.16})$$

donde el subíndice Q indica que, al estar el sistema aislado, las cargas Q_i de los conductores han debido permanecer constantes en la transformación ficticia.

Si la parte sobre la que relajamos las fuerzas mecánicas realiza un giro, en vez de un desplazamiento, tendremos

$$dW_{el} = \vec{T} \cdot d\vec{\theta}$$

donde \vec{T} es el par eléctrico actuante y $d\vec{\theta}$ el ángulo girado alrededor de $\hat{\theta}$. Tenemos, pues, que

$$\vec{T} = -(\nabla_\theta W)_Q, \quad \nabla_\theta = \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} \quad (\text{D.17})$$

Expresión de la fuerza y el par a potencial constante:

También podemos imaginar unas transformaciones en las que sean los potenciales V_i los que permanezcan constantes y no las cargas, figura D.7. Bastaría la utilización de unas baterías que mantuviesen constantes a los potenciales durante la transformación.

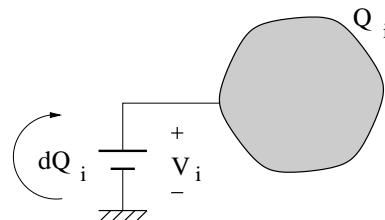


Figura D.7:

Esto implica que para mantener constante el potencial V_i del conductor i , debe suministrarse una carga dQ_i y, por lo tanto, todas las baterías suministrarían al sistema una energía externa

$$dW_{ex} = \sum_i V_i dQ_i$$

con lo que ahora el balance energético será

$$dW + dW_{el} = dW_{ex}$$

es decir, el trabajo que realizan las fuerzas eléctricas se equilibra con un aporte de energía externa y con un decremento de la energía potencial.

Pero, al ser $V_i = cte$, según D.3

$$dW = \frac{1}{2} \sum_i V_i dQ_i = \frac{1}{2} dW_{ex}$$

y

$$dW_{el} = dW$$

de donde deducimos que

$$\vec{F} = (\nabla W)_V \quad (\text{D.18a})$$

$$\vec{T} = (\nabla_\theta W)_V \quad (\text{D.18b})$$

y, volviendo a hacer uso de las expresiones D.3, podemos escribir D.16, D.17 y D.18 de la forma

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_i Q_j \nabla P_{ij} = +\frac{1}{2} \sum_{i,j} V_i V_j \nabla C_{ij}$$

Para el par se obtienen expresiones análogas.

D.2. Sistemas de espiras

D.2.1. Coeficientes de inducción de un sistema de tubos de corriente o espiras

Existe un paralelismo formal entre el tratamiento que se da a los sistemas de espiras en presencia de un campo magnético estacionario y el que se ha dado a los conductores en un campo electrostático. El flujo Φ cortado por una espira podría jugar aquí el papel análogo al del potencial V del conductor, la intensidad tendría su análogo en Q y el coeficiente de inducción magnética L_{ij} en el eléctrico P_{ij} .

No obstante, la expresión D.3 nos ofrece la alternativa de definir los coeficientes geométricos en función de la energía almacenada en el campo. Con objeto de no restringirnos al tratamiento de espiras y poder englobar en nuestro tratamiento a los tubos de corriente, para los cuales no está definido el flujo, tomaremos esta última alternativa en la definición de los coeficientes de inducción.

Supongamos, figura D.8, en principio, un sistema de N tubos de corriente estacionaria recorridos cada uno por una densidad de corriente \vec{j}_i y una intensidad I_i .

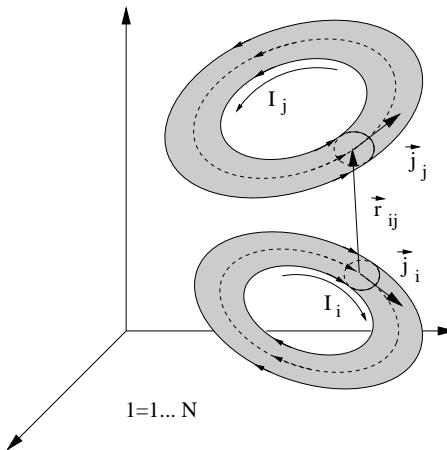


Figura D.8:

Demostraremos que la energía magnética almacenada en los campos generados por el sistema de corrientes puede expresarse como función cuadrática de las intensidades totales que circulan por cada uno de los tubos.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j \quad (\text{D.19})$$

donde L_{ij} son coeficientes geométricos; dependen de la geometría de los tubos de corriente y de su posición mutua y son independientes de las corrientes que circulan por los mismos. Estos coeficientes se expresan en *henrios*.

La matriz (L_{ij}) es simétrica, como veremos más adelante. Los elementos diagonales $L_{ii} = L_i$ reciben el nombre de *coeficiente de autoinducción* de la espira i y los de fuera de la diagonal, L_{ij} ($i \neq j$) el de *coeficientes de inducción mutua* entre la espira i y la j .

Antes de comprobar que es posible esta expansión cuadrática de la energía del campo en función de las intensidades, haremos algunas consideraciones.

Supongamos que todas las intensidades son nulas salvo la I_i y la I_j

$$W = \frac{1}{2} L_i I_i^2 + \frac{1}{2} L_j I_j^2 + L_{ij} I_i I_j$$

donde hemos tenido en cuenta la simetría de los coeficientes de inducción, $L_{ij} = L_{ji}$. Tenemos, por lo tanto, tres términos energéticos diferenciados

$$W = W_i + W_j + W_{ij}$$

de los cuales, los dos primeros corresponden a las energías propias de los tubos i y j , y el tercero a la energía de interacción entre ambos. Así, pues, si realizamos una transformación en la que lo único que cambie sea la posición mutua entre el tubo i y el j , los términos W_i y W_j permanecerán invariables, mientras que W_{ij} cambiará de valor.

La definición que hemos hecho implícitamente de los coeficientes de inducción puede concretarse en las expresiones

$$L_i = \frac{2W_i}{I_i^2} \quad \text{y} \quad L_{ij} = \frac{W_{ij}}{I_i I_j} \quad (\text{D.20})$$

A continuación comprobaremos el carácter geométrico de los coeficientes de inducción.

Según se vio en la sección 9.2, para medios lineales la energía magnética puede calcularse por medio de la integral

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_T} \vec{j} \cdot \vec{A} dv = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\mathcal{V}_i} \vec{j}_i \cdot \vec{A} dv_i \quad (\text{D.21})$$

donde $\mathcal{V}_T = \sum_{i=1}^N \mathcal{V}_i$, \mathcal{V}_i y \vec{j}_i son el volumen y la densidad de corriente del tubo i , mientras que \vec{A} es el potencial vector producido por todos los tubos de corriente. Según la figura D.8, el potencial producido en la región del tubo i será la suma de las contribuciones de todos los tubos, incluido el i . Para medios homogéneos

$$\vec{A}(\vec{r}_i) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_j \int_{\mathcal{V}_j} \frac{\vec{j}_j}{r_{ij}} dv_j$$

con lo que

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{V}_j} \frac{\vec{j}_i \cdot \vec{j}_j}{I_i I_j r_{ij}} dv_i dv_j \right) I_i I_j$$

De aquí se deduce que

$$L_{ij} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{V}_j} \frac{\vec{j}_i \cdot \vec{j}_j}{I_i I_j r_{ij}} dv_i dv_j \quad (\text{D.22})$$

Esta es la fórmula de *Neumann* en la que se aprecia la simetría de los coeficientes y el carácter geométrico de los mismos, ya que el término $\vec{j}_i \cdot \vec{j}_j / I_i I_j$ es independiente de la magnitud de las corrientes.

En el caso de las espiras (tubos filiformes), podemos expresar el elemento de volumen como $dv = (d\vec{s} \cdot d\vec{l})$ y, como en la sección 2.3.1, tomar $d\vec{s} \uparrow \uparrow \vec{j} \uparrow \uparrow d\vec{l}$, con lo que

$$L_{ij} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{V}_j} \frac{\vec{j}_i \cdot \vec{j}_j}{I_i I_j r_{ij}} (d\vec{s}_i \cdot d\vec{l}_i) (d\vec{s}_j \cdot d\vec{l}_j)$$

y, finalmente

$$L_{ij} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}_i} \oint_{\mathcal{L}_j} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{r_{ij}} \quad (\text{D.23})$$

Esta última expresión se obtiene de la anterior sin más que intercambiar las posiciones de \vec{j} y $d\vec{l}$, lo que es lícito por ser $\vec{j} \uparrow \uparrow d\vec{l}$, y tener en cuenta que $I = \vec{j} \cdot d\vec{s}$, puesto que, al ser el tubo filiforme, $d\vec{s}$ es el área de la sección total del tubo.

La integral D.23 es singular cuando $i = j$ y, de hecho, la autoinducción de una espira filiforme es infinita, aunque en la práctica la sección de una espira es siempre no nula, por lo que el cálculo mediante la expresión D.22 da un valor finito para su autoinducción.

Volviendo al principio de esta sección, los coeficientes de inducción mutua, en el caso de espiras, aparecen como coeficientes de proporcionalidad entre flujos e intensidades, véase la figura D.9.

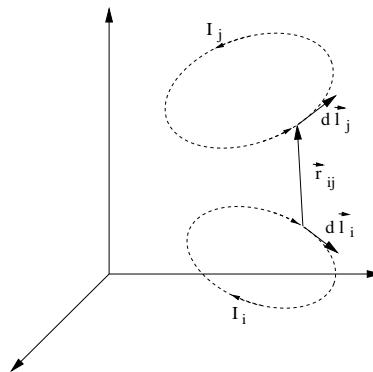


Figura D.9:

El flujo cortado por la espira i es

$$\Phi_i = \oint_{\mathcal{L}_i} \vec{A} \cdot d\vec{l}_i$$

y, a su vez,

$$\vec{A}(\vec{r}_i) = \sum_j \frac{\mu}{4\pi} I_j \oint_{\mathcal{L}_j} \frac{d\vec{l}_j}{r_{ij}} = \sum_j \vec{A}_j(\vec{r}_i) \Rightarrow \Phi_i = \sum_j \Phi_{ij} \Rightarrow L_{ij} = \frac{\Phi_{ij}}{I_j} \quad (\text{D.24})$$

donde Φ_{ij} es el flujo que corta la espira i debido a la corriente que circula por la espira j .

Esta expresión suele ser más útil que la D.23 para calcular los L_{ij} y lo mismo ocurre con la D.20 respecto a la D.22.

Teniendo en cuenta D.24, la energía potencial de un sistema de espiras podrá escribirse de la forma

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i I_i \quad (\text{D.25})$$

En el resto del tema nos limitaremos al estudio de las espiras dada la importancia práctica de las mismas.

D.2.2. Fuerza electromotriz inducida. Generadores y transformadores

Aunque más adelante trataremos de las corrientes cuasiestacionarias con más detenimiento, consideraremos la fuerza electromotriz inducida en la espira i cuando el flujo que corta, Φ_i , varía con el tiempo (suponemos que esta variación es lenta para no apartarnos del carácter estacionario de las corrientes).

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_j \Phi_{ij} = \\ &= \sum_j \underbrace{\left(-L_{ij} \frac{dI_j}{dt} \right)}_T + \sum_j \underbrace{\left(-I_j \frac{dL_{ij}}{dt} \right)}_G \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Como vemos, a la fuerza electromotriz inducida en la espira i contribuyen dos tipos de términos: términos de tipo *transformador* (T) y términos de tipo *generador* (G). Los primeros inducen fuerzas electromotrices a través de una variación temporal de las intensidades, mientras que en los segundos ésto se logra haciendo variar la geometría del sistema, lo que permite el acople de energía mecánica a sistemas eléctricos. En los mecanismos representados por estos términos reside la base de los transformadores y de los generadores y motores.

D.2.3. Asociación de inductores

Cuando hablamos de autoinducciones o inducciones mutuas, o de inductores en general, nos estaremos refiriendo a dispositivos físicos fabricados exprofeso para presentar un valor determinado del coeficiente de inducción. Por lo general, constan de un carrete de vueltas múltiples de hilo conductor arrolladas sobre un núcleo de material magnético o sobre el mismo aire.

Los inductores pueden asociarse en serie o en paralelo, de forma que entre ellos exista o no acoplamiento. Adoptaremos la notación usual de L para la autoinducción y M para la inducción mutua.

Como veremos más adelante, la fuerza electromotriz en una autoinducción ideal coincide con el negativo de la diferencia de potencial que, a su vez, desde ahora, denominaremos indistintamente como caída de tensión.

$$V = -\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt}$$

En la asociación serie, la intensidad que pasa por los dos carretes es la misma.

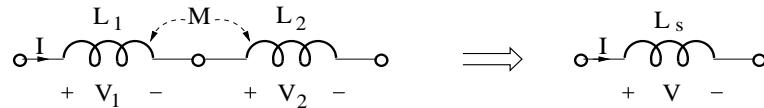


Figura D.10:

La figura D.10 representa a dos inducciones conectadas en serie y acopladas magnéticamente con un coeficiente de inducción mutua M que puede ser positivo o negativo.

$$\begin{cases} V = V_1 + V_2 = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt} \\ I = I_1 = I_2 \end{cases} \Rightarrow L_S = L_1 + L_2 + 2M \quad (\text{D.27})$$

En la asociación paralelo, figura D.11, la caída de tensión en ambas inducciones es la misma.

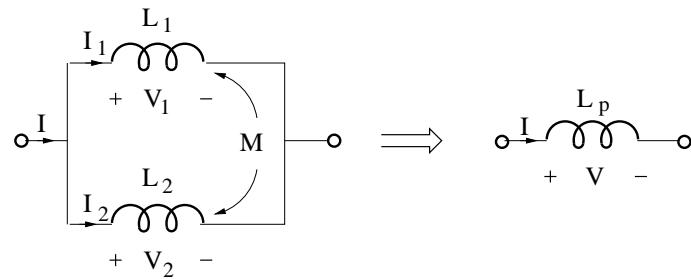


Figura D.11:

Ahora se cumple que

$$\begin{cases} V = V_1 = V_2 \\ I = I_1 + I_2 \end{cases} \Rightarrow V = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} = M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} = L_p \frac{dI}{dt}$$

donde

$$L_p = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (\text{D.28})$$

Cuando no hay acoplamiento entre las inducciones, sus leyes de asociación toman forma análoga a las de asociación de resistencias.

Para

$$M = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_S = L_1 + L_2 \\ \frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \end{cases}$$

D.2.4. Fuerzas y pares sobre un conjunto de espiras

Podemos obtener expresiones para las fuerzas y los pares que actúan sobre un sistema de espiras y medios magnéticos lineales, en régimen estacionario, por procedimientos análogos a los empleados en la sección D.1.5.

El trabajo realizado por las fuerzas magnéticas al llevar a cabo un desplazamiento, elemental e imaginario, de una parte del sistema, será, como en el caso eléctrico

$$\Delta W_{mag} = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

energía que deberá ser aportada por fuentes externas ΔW_{ex} o por una disminución de la energía potencial ΔW . En consecuencia

$$\Delta W_{mag} + \Delta W = \Delta W_{ex}$$

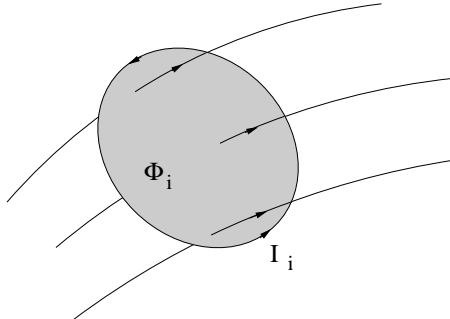


Figura D.12:

Imaginaremos dos transformaciones sencillas, con objeto de obtener expresiones útiles de la fuerza: en la primera, mantendremos fijas las intensidades I_i que circulan por las espiras y en la segunda mantendremos constantes los flujos Φ_i , según se muestra en la figura D.12.

a) Supongamos $I_i = cte$.

Si variamos la geometría del sistema mediante un desplazamiento, variarán los flujos cortados por las espiras y también la energía potencial. Según D.25

$$(\Delta W)_{I_i} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Delta \Phi_i$$

Estos cambios de flujo dan lugar a unas fuerzas electromotrices en cada espira

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta \Phi_i}{\Delta t}$$

donde $\frac{\Delta \Phi_i}{\Delta t}$ es la velocidad de variación del flujo cortado por la espira i . Puesto que esta fuerza electromotriz inducirá cambios en la intensidad que circula por la espira, para que ésta permanezca constante habrá que emplear una fuerza electromotriz externa \mathcal{E}_{ie} que contrarreste a la anterior.

$$\mathcal{E}_{ie} = -\mathcal{E}_i = \frac{\Delta \Phi_i}{\Delta t}$$

Lo cual implica la aportación de una energía externa ΔW_{ex} , figura D.13,

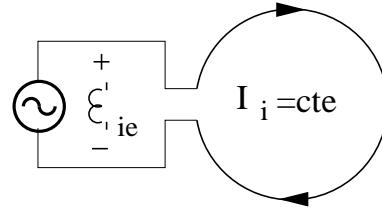


Figura D.13:

$$\Delta W_{ex} = \sum_i \mathcal{E}_{ie} I_i \Delta t = \sum_i I_i \Delta \Phi_i = 2 \Delta W$$

con lo que tenemos

$$\Delta W = \Delta W_{mag}$$

y

$$\vec{F} = (\nabla W)_I \quad (D.29a)$$

$$\vec{T} = (\nabla_\theta W)_I \quad (D.29b)$$

b) Consideremos ahora el caso en que se mantengan constantes los flujos Φ_i .

Dado que $\Delta \Phi_i = 0$, $\Delta W_{ex} = 0$ y, al no haber aportación externa de energía

$$\Delta W = -\Delta W_{mag}$$

con lo que

$$\vec{F} = -(\nabla W)_\Phi \quad (D.30a)$$

$$\vec{T} = -(\nabla_\theta W)_\Phi \quad (D.30b)$$

D.2.5. Sistemas de espiras con núcleo magnético

En la práctica, es interesante la posibilidad de reforzar y canalizar el flujo producido por un sistema de espiras o carretes conductores. Esto es posible mediante el uso de núcleos de materiales magnéticos de alta permeabilidad, pues, como vimos en la sección 9.1.1.1, un material con $\mu_r \rightarrow \infty$ confina completamente a las líneas de campo magnético. De esta forma, el toroide constituirá un tubo de flujo magnético.

Como ejemplo, calcularemos los campos y flujos producidos en el toroide de la figura D.14 y, a partir de estos, determinaremos los coeficientes de inducción de sus carretes.

Suponemos que el núcleo es muy permeable, $\mu_r \gg 1$, y que, para simplificar, el diámetro de su sección es mucho menor que el radio del mismo. Bajo estas condiciones, el campo magnético interior es de módulo constante y dirección azimutal.

Para calcular este último, integremos a lo largo del toroide

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \int_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{s} = I_T = I_1 N_1 + I_2 N_2 \\ H \mathcal{L} \end{cases}$$

donde los signos de las intensidades serán positivos si los flujos producidos por las mismas tienen la dirección elegida para el camino \mathcal{L} o negativo en caso contrario. Tenemos, por lo tanto, que

$$H = \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\mathcal{L}}, \quad B = \mu H$$

El campo total es la suma del producido por cada uno de los carretes. Así, podemos escribir

$$B = B_1 + B_2$$

$$B_1 = \frac{\mu}{\mathcal{L}} N_1 I_1, \quad B_2 = \frac{\mu}{\mathcal{L}} N_2 I_2$$

Dado que el material es muy permeable, B puede alcanzar valores elevados.

Por otra parte, como $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, el flujo de \vec{B} a través de cualquier sección del núcleo es

$$\Phi_0 = \int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{s} \simeq B S_0$$

donde S_0 es la sección, uniforme, del toroide.

Puesto que $S_1 = N_1 S_0$ y $S_2 = N_2 S_0$ son las secciones equivalentes de cada uno de los carretes, los flujos cortados por cada uno de ellos son

$$\Phi_1 = S_1 B = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \quad \Phi_2 = S_2 B = \Phi_{21} + \Phi_{22}$$

siendo $\Phi_{ij} = S_i B_j$ los flujos cortados por el carrete i y producidos por el j

$$\Phi_{11} = S_1 B_1 = \frac{\mu S_0}{\mathcal{L}} N_1^2 I_1 \quad \Phi_{12} = S_1 B_2 = \frac{\mu S_0}{\mathcal{L}} N_1 N_2 I_2$$

$$\Phi_{21} = S_2 B_{S_1} = \frac{\mu S_0}{\mathcal{L}} N_1 N_2 I_1 \quad \Phi_{22} = S_2 B_{S_2} = \frac{\mu S_0}{\mathcal{L}} N_2^2 I_2$$

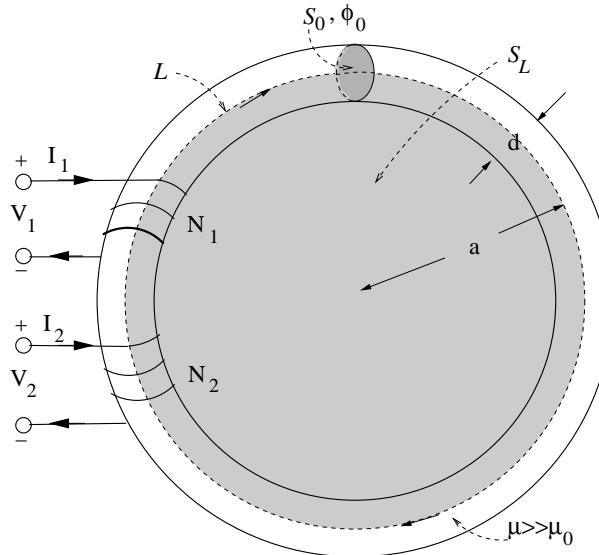


Figura D.14:

A partir de aquí, teniendo en cuenta D.24, obtenemos los coeficientes de inducción

$$L_1 = \frac{\mu S_0}{\mathcal{L}} N_1^2, \quad L_2 = \frac{\mu S_0}{\mathcal{L}} N_2^2 \quad (\text{D.31})$$

$$M = \frac{\mu S_0}{\mathcal{L}} N_1 N_2 \quad (\text{D.32})$$

Por lo tanto, estos coeficientes se ven afectados por el mismo factor μ_r/\mathcal{L} que el campo \vec{B} .

Por lo que respecta a la energía almacenada en el sistema, es decir, el trabajo que nos cuesta establecer las corrientes I_1 e I_2 , podemos expresarla como

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^2 L_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \frac{\mu S_0}{\mathcal{L}} \underbrace{[N_1 I_1 + N_2 I_2]^2}_{(a)} \quad (\text{D.33})$$

o, de forma equivalente, integrando sobre el núcleo la densidad de energía magnética,

$$W = \frac{1}{2\mu} \int_{V_N} B^2 dv$$

donde V_N es el volumen del núcleo

D.2.5.1. El transformador ideal

Vemos, pues, que para establecer corrientes finitas deberíamos invertir una energía proporcional a μ_r/\mathcal{L} y que si este factor tiende a infinito, la energía también tendería a infinito, a menos que el término (a) de D.33 se anule.

Un transformador ideal es un dispositivo como éste, en el que teóricamente $\mu_r/\mathcal{L} \rightarrow \infty$. Como no disponemos de infinita energía, en el transformador ideal

$$N_1 I_1 = -N_2 I_2 \Rightarrow \\ I_2 = -\frac{1}{a} I_1 , \quad a = \frac{N_2}{N_1} \quad (\text{D.34})$$

donde a es la *relación de espiras* de secundario a primario.

El transformador ideal funciona de forma que si por el primer carrete, *primario*, se inyecta una intensidad I_1 , por el segundo, *secundario*, circulará una intensidad en sentido opuesto y de la magnitud necesaria para contrarrestar el flujo producido por la primera.

En la práctica, ese flujo Φ_0 , aunque pequeño, no será nulo, de forma que si en el primario aplicamos una caída de tensión V_1 , por la ley de inducción de Faraday, Φ_0 variará con el tiempo según

$$V_1 = \frac{d}{dt} (N_1 \Phi_0) \Rightarrow \frac{d\Phi_0}{dt} = \frac{V_1}{N_1}$$

y, a su vez, esta variación de flujo provocará una caída de tensión en el secundario

$$V_2 = \frac{d}{dt} (N_2 \Phi_0) = \frac{N_2}{N_1} V_1 \\ V_2 = a V_1 \quad (\text{D.35})$$

Luego el transformador transforma intensidades y tensiones.

En la figura D.15 se representa al circuito equivalente de un transformador ideal a cuyo secundario se le ha conectado una resistencia, o carga resistiva, R_2 .

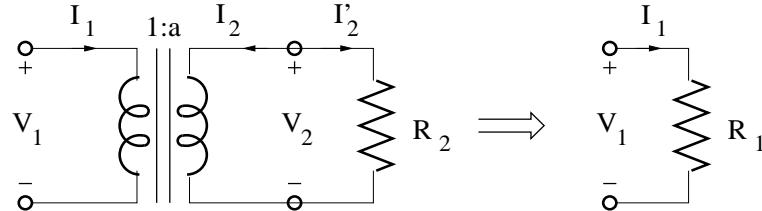


Figura D.15:

Esta configuración se comporta, vista desde el primario, como si fuera una resistencia

$$R_1 \equiv \frac{V_1}{I_1} = \frac{(V_2/a)}{(-a I_2)} = \\ = \frac{1}{a^2} R_2 \quad (\text{D.36})$$

Más adelante nos será fácil comprobar que esta relación de conversión sigue siendo válida para cualquier tipo de impedancias.

D.2.6. Circuitos magnéticos lineales

Supongamos que, como se indica en la figura D.16, debemos analizar las relaciones de flujos y corrientes estacionarias en una estructura no trivial de materiales lineales, altamente permeables, y arrollamientos.

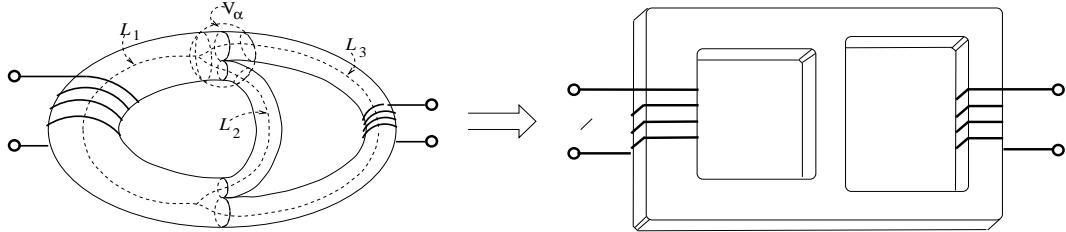


Figura D.16:

La solución precisa de este tipo de problemas es difícil y en la práctica suele ser necesario y suficiente resolverlos con márgenes considerables de error. Para estos fines puede hacerse una analogía entre las ecuaciones de circuitos de corrientes estacionarias y las ecuaciones de estos sistemas o *circuitos magnéticos*.

Si hallamos la circulación de \vec{H} a lo largo de un camino cerrado en el interior del circuito

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_L} \vec{j} \cdot d\vec{s} = I_T$$

Definiremos la *fuerza magnetomotriz* ξ como la intensidad total cortada por la superficie S_L que se apoya sobre \mathcal{L} .

$$\xi = I_T = \quad (D.37)$$

$$= \sum_i N_i I_i = \sum_i \xi_i$$

donde N_i es el número de espiras del carrete i y ξ_i la fuerza magnetomotriz de ese carrete.

Como vimos en el tema de corrientes estacionarias, es posible fabricar tubos de corriente con terminales eléctricamente bien definidos. Este no es el caso normal en circuitos magnéticos pero, dentro del generoso margen de error que nos permitiremos, es posible delimitar suficientemente bien segmentos de camino tales como los \mathcal{L}_i , \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_3 . Para un camino cerrado, por ejemplo $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H} \cdot d\vec{l} \simeq \sum_{j=1,2} \int_{\mathcal{L}_j} \vec{H} \cdot d\vec{l} \simeq \sum_{j=1,2} \Phi_j \int_{\mathcal{L}_j} \frac{dl}{\mu S_j} = \sum_{j=1,2} \Phi_j \mathcal{R}_j$$

donde se ha definido la *reluctancia* \mathcal{R}_j de la rama j

$$\mathcal{R}_j \equiv \int_{\mathcal{L}_j} \frac{dl}{\mu S_j} = \frac{1}{\Phi_j} \int_{\mathcal{L}_j} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$\mathcal{R}_j \simeq \frac{\mathcal{L}_j}{\mu \mathcal{S}_j} \quad (\text{D.38})$$

En estas expresiones hemos tomado caminos de integración esencialmente paralelos a las líneas de campo y dentro de cada una de las secciones del tubo, entre bifurcaciones, hemos escrito $\Phi \simeq B S = \mu H S$ y sacado Φ fuera de la integral. Con la definición de la reluctancia, análoga a la que ya hemos hecho de la resistencia, podemos escribir una expresión análoga a la segunda ley de Kirchhoff

$$\sum_i \xi_i = \sum_j \Phi_j \mathcal{R}_j \quad (\text{D.39})$$

Además, puesto que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, integrando sobre el volumen \mathcal{V}_α que envuelve al nudo α del circuito, obtenemos una expresión correspondiente a la primera ley

$$\sum_i \Phi_i = 0 \quad (\text{D.40})$$

Esta analogía permite aplicar las mismas técnicas ya utilizadas para circuitos eléctricos al análisis de circuitos magnéticos. Así, pués, podemos representar al circuito equivalente de la figura anterior de acuerdo con la figura D.17.

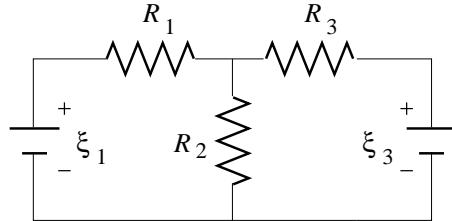


Figura D.17:

El electroimán:

Por el procedimiento anterior podemos hacer un análisis aproximado del electroimán, dispositivo con el que se generan campos magnéticos fuertes en una región accesible. Esta región, que se llama *entrehierro*, permite hacer uso del campo para fines diversos.

En la figura D.18 se representa a un electroimán de sección uniforme \mathcal{S} y piezas polares planas. El hierro, o núcleo, tiene una permeabilidad $\mu \gg \mu_0$ y longitud \mathcal{L} , mientras que el entrehierro, de longitud $l \ll \mathcal{L}$, tiene la permeabilidad del aire, μ_0 . La longitud l suele ser también pequeña frente a las dimensiones transversales del tubo, por lo que, despreciando efectos de bordes, la sección equivalente del entrehierro puede aproximarse a \mathcal{S} . Tenemos, pués, que

$$\xi = \Phi (\mathcal{R}_h + \mathcal{R}_e) , \quad \mathcal{R}_h = \frac{\mathcal{L}}{\mu \mathcal{S}} , \quad \mathcal{R}_e = \frac{l}{\mu_0 \mathcal{S}}$$

y, dado que $\Phi = B_h S = B_e S$, B es aproximadamente uniforme, $B_h \simeq B_e = B$, y

$$B = \mu \frac{N I}{\mathcal{L} \left(1 + \mu_r \frac{l}{\mathcal{L}} \right)}$$

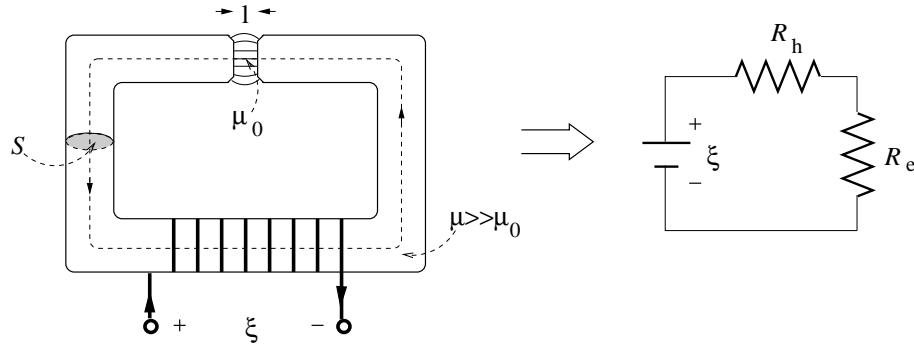


Figura D.18:

Campo que, como podemos comprobar ³, es muy superior al que produciría un carrete con el mismo número de vueltas, uniformemente distribuidas, pero sin el núcleo de hierro, $B_0 = \mu_0 \frac{NI}{\mathcal{L}}$.

D.2.7. Circuitos magnéticos no lineales

Los materiales magnéticos no lineales tienen un comportamiento muy complejo que dificulta el análisis general de los circuitos que los contengan; estudiaremos dos circuitos interesantes como son el anillo de Rowland y el circuito con imán permanente.

El anillo de Rowland:

El anillo de Rowland es un circuito simple que permite medir la relación $B \leftrightarrow H$ en materiales ferromagnéticos. Como se muestra en la figura D.19, el anillo se construye con el material magnético que se quiere estudiar y la dimensión transversal S de su sección debe ser pequeña frente a su longitud \mathcal{L} . Sobre el núcleo se arrollan dos carretes con un número adecuado de vueltas N_1 y N_2 .

Podemos fijar el valor de $H(t)$ por medio de la intensidad $I(t)$ inyectada en el primario.

$$H(t) = \frac{N_1}{\mathcal{L}} I(t)$$

El campo magnético resultante se mide integrando la caída de tensión del secundario.

$$\Phi(t) = N_2 B(t) S \quad , \quad V(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad , \quad B(t) = \frac{1}{N_2 S} \int V(t) dt$$

³Véase relación de problemas.

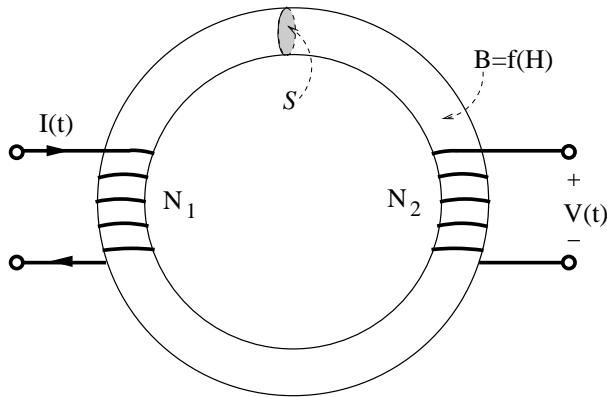


Figura D.19:

El imán permanente:

Por último, analizaremos los circuitos magnéticos con imanes. En la figura se representa esquemáticamente una configuración típica de *imán* de laboratorio. Para simplificar supondremos que la sección S es uniforme, que las líneas de campo están confinadas en el imán y el hierro y que en el pequeño entrehierro, la dispersión es despreciable.

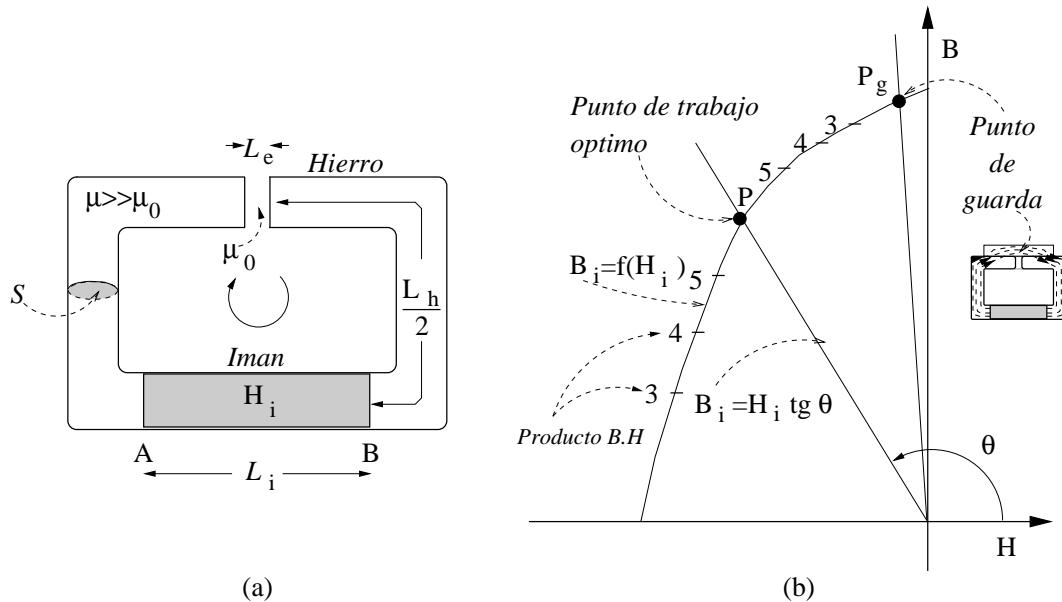


Figura D.20:

Como puede verse, en la figura D.20a el imán completo está constituido por un imán permanente de longitud L_i , una sección de hierro dulce, de longitud L_h y permeabilidad lineal μ y el entrehierro de longitud L_e y permeabilidad μ_0 . La energía de este circuito no se obtiene de un arrollamiento sino del imán permanente que se supone que opera en el ciclo de histéresis máximo. Bajo estas condiciones, como en el caso del electroimán,

B es tambien uniforme, es decir la densidad de flujo magnético tiene el mismo valor en el imán, en el hierro y en entrehierro ($B_i = B_h = B_e = B$). Nuestro objetivo es calcular este campo y las magnitudes que derivan de él.

Hallando la circulación de \vec{H} a lo largo del circuito

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l}}_X + \underbrace{\int_{B, \text{ imán}}^A \vec{H} \cdot d\vec{l}}_Y = 0$$

La integral (X) discurre por el hierro y el entrehierro, que son medios lineales, por lo que su resultado puede escribirse como $X = \Phi (\mathcal{R}_h + \mathcal{R}_e)$. (Y) tiene lugar a lo largo del imán, luego $Y = H_i \mathcal{L}_i$.

$$\Phi (\mathcal{R}_h + \mathcal{R}_e) = -H_i \mathcal{L}_i$$

y teniendo en cuenta que $\Phi = B \mathcal{S}$

$$B = -\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{S} (\mathcal{R}_h + \mathcal{R}_e)} H_i = H_i \tan \theta \quad (\text{D.41})$$

$$\text{siendo } \tan \theta = -\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{S} (\mathcal{R}_h + \mathcal{R}_e)}.$$

Esta expresión es la ecuación de la recta, de pendiente negativa y que pasa por el origen, que se representa en el plano (B, H_i) en la figura D.20 junto con la función que describe al ciclo de histéresis máximo. Ambas forman un sistema de ecuaciones no lineal que podemos resolver gráficamente determinando su intersección. El punto de trabajo se encuentra, por lo tanto en el segundo cuadrante.

En las condiciones más usuales de diseño se trata de disponer de la mayor energía magnética posible en el volumen del entrehierro

$$W_e = \frac{1}{2} (B H_i) \mathcal{V}_e = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \mathcal{S} \mathcal{L}_e$$

Si la reluctancia del hierro puede despreciarse frente a la del entrehierro, lo que usualmente es cierto,

$$\frac{\mathcal{L}_h}{\mu} \ll \frac{\mathcal{L}_e}{\mu_0} , \quad \mathcal{R}_h + \mathcal{R}_e \simeq \mathcal{R}_e = \frac{\mathcal{L}_e}{\mu_0 \mathcal{S}}$$

De acuerdo con esto

$$B = \frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{L}_e} \mu_0 H_i$$

$$W_e \simeq \frac{1}{2} (B H_i) (\mathcal{S} \mathcal{L}_i) = \frac{1}{2} (B H_i) \mathcal{V}_i$$

Luego, para optimizar la energía en el entrehierro, deberemos procurar que el punto de trabajo P corresponda a un producto $B_i H_i$ máximo. En la figura (b) el ciclo de histéresis aparece graduado proporcionalmente a dicho producto.

Los mecanismos despolarizadores por los que un imán permanente pierde su imanación son complejos, pero haremos notar que la existencia de un campo desimanador, campo H_i negativo, o, lo que es lo mismo, la existencia de energía en el entrehierro, favorece la lenta despolarización del imán. Por esta razón, cuando no se utiliza el imán, se le debe colocar una guarda o pieza de hierro dulce que, al puentejar al entrehierro, reduce la reluctancia del circuito. De esta forma, $|\tan \theta|$ crece disminuyendo el producto ($B.H$).

D.3. Problemas

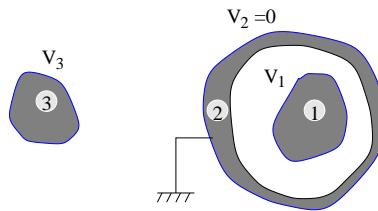


Figura D.21:

- d-1. Considere dos conductores separados por un tercero conectado a tierra tal como se indica en la figura D.21. Calcule Q_1 , Q_2 y Q_3 en función de los datos dde la figura y compruebe que la carga total es nula.

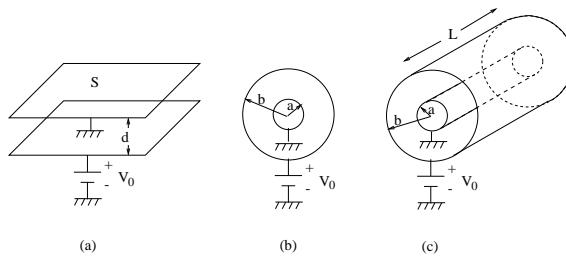


Figura D.22:

- d-2. Halle la capacidad de los condensadores representados en la figura D.22, el primero plano, el segundo esférico y el tercero cilíndrico. Todos ellos están llenos de un dieléctrico de constante ϵ y la distancia entre placas es muy inferior al resto de las dimensiones.

- d-3. Dado un condensador constituido por placas semicirculares, como se muestra en la figura D.23, halle:

- La capacidad en función de α .
- El par ejercido sobre el dieléctrico si entre las placas se mantiene una diferencia de potencial V_0 .
- Lo mismo si, una vez establecida la diferencia de potencial inicial V_0 , se desconecta la batería y se introduce el dieléctrico.
- El trabajo total que cuesta introducir el dieléctrico en las condiciones de los apartados b y c.

- d-4. Un condensador plano, de superficie $S = a \times b$ y distancia entre placas c , se introduce en un líquido de constante dieléctrica ϵ y densidad d hasta una altura $h = \frac{b}{2}$. Halle cuanto sube o baja el dieléctrico en los siguientes casos:

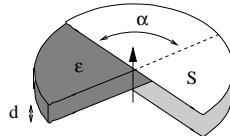


Figura D.23:

- a) Entre las placas existe una diferencia de potencial V_0 .
- b) La carga de las placas es Q_0 .

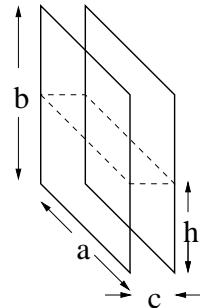


Figura D.24:

d-5. A un lado de una lámina plana ilimitada, de espesor a , recorrida por una densidad de corriente uniforme, hay un campo magnético tangencial B_0 mientras que al otro lado el campo es nulo. Halle:

- a) Las fuerzas que actúan sobre cada elemento de volumen de la lámina.
- b) Relacione estas fuerzas con una posible presión magnética.
- c) Aplique los resultados anteriores al cálculo de la presión que soporta un cierto solenoide, de longitud infinita, en los casos en que se generan campos magnéticos internos de 10^4 y 10^6 gauss, respectivamente.

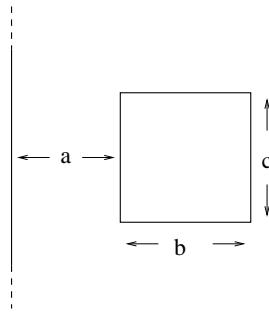


Figura D.25:

d-6. Calcule el coeficiente de inducción mutua entre los dos conductores de la figura D.25

- d-7. Calcule el coeficiente de autoinducción de una bobina toroidal de radio a y sección circular de radio b con un total de N espiras uniformemente distribuidas.

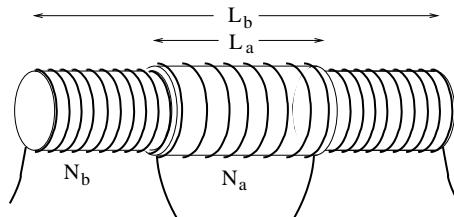


Figura D.26:

- d-8. Dados dos solenoides coaxiales de radios aproximadamente iguales a R , como se muestra en la figura D.26, determine:

- El coeficiente de inducción mutua.
- El coeficiente de acoplamiento.

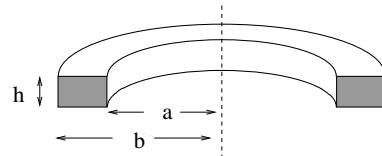


Figura D.27:

- d-9. Calcule el coeficiente de autoinducción de un toroide de sección rectangular que se muestra en la figura D.27. El número total de espiras es N e I la intensidad que circula por ellas.

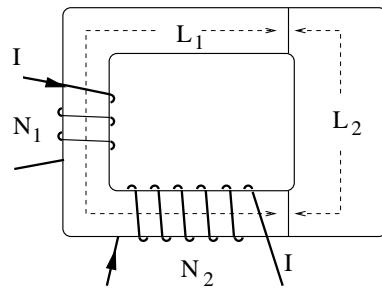


Figura D.28:

- d-10. En el circuito magnético de la figura D.28, halle:

- El flujo magnético si $I = 1 \text{ A}$.
- La intensidad necesaria para que el flujo magnético a través del circuito sea de $5 \times 10^4 \text{ Wb}$.

Datos: $N_1 = 100$ vueltas, $N_2 = 200$ vueltas, $\mu_{r1} = 1000$, $\mu_{r2} = 5000$, $L_1 = 50 \text{ cm}$, $L_2 = 20 \text{ cm}$, $S_1 = 20 \text{ cm}^2$, $S_2 = 40 \text{ cm}^2$, donde N es el número de vueltas y S el área de la sección.

d-11. Determine B y H en el entrehierro, de aire, del circuito de la figura D.29.

Datos: $N = 200$ vueltas, $I = 1 \text{ A}$, $\mu_r = 5000$, $L_0 = 5 \text{ mm}$, $L_1 = 50 \text{ cm}$, $L_2 = 20 \text{ cm}$, $S_0 = S_2 = 10 \text{ cm}^2$, $S_1 = 5 \text{ cm}^2$.

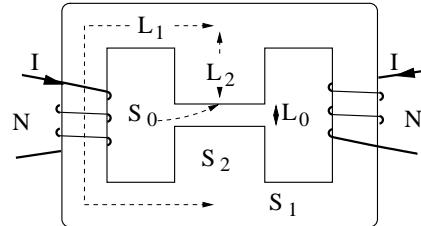


Figura D.29:

d-12. En la figura D.30b se muestra la curva de magnetización inicial del material ferromagnético que constituye el núcleo del circuito que se representa en D.30a. Determine I para que la densidad de flujo del campo magnético en el entrehierro sea de 1 T .

Datos:

$$N = 100 \text{ vueltas}, L_0 = 2 \text{ mm}, S_0 = 1 \text{ cm}^2, L = 3 \text{ cm}, S = 2 \text{ cm}^2$$

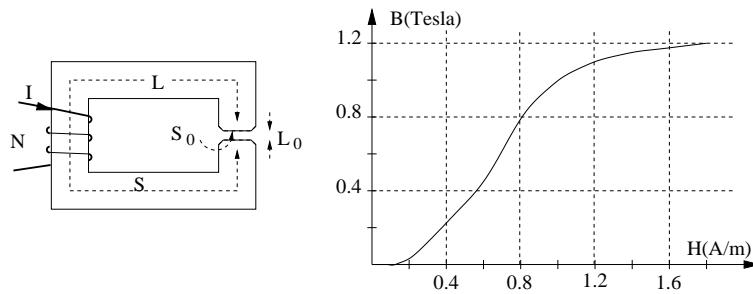


Figura D.30:

Apéndice E

Corrientes cuasiestacionarias. Teoría de Circuitos

E.1. Introducción

Teóricamente, las ecuaciones de Maxwell, con unas condiciones iniciales y de contorno adecuadas, tienen una solución única para cada problema electromagnético. En la práctica, sin embargo, la estructura de los medios puede ser tan compleja que hagan impracticable una solución exacta. Afortunadamente, algunos problemas de gran importancia, que no son manejables dentro del formalismo de la teoría de campos, admiten tratamientos aproximados alternativos.

Así, pues, en el límite de las altas frecuencias, el formalismo de la *óptica de rayos* permite resolver problemas que desde otro punto de vista serían excesivamente complicados. Puesto que estos temas se incluyen tradicionalmente en la Optica, no nos ocuparemos más de ellos.

Otro tanto ocurre en el límite de bajas frecuencias con la *teoría de circuitos*. La simplicidad con que los circuitos eléctricos pueden ser representados y estudiados confiere a estos una gran importancia. Importancia que viene resaltada por el hecho de que el mismo formalismo es aplicable a otros muchos problemas análogos de tipo mecánico, térmico, atómico, etc. Los sistemas de corrientes cuasiestacionarias, que definiremos más adelante, pueden estudiarse por la versión más simple de la teoría de circuitos, la de parámetros localizados, que permite representar a dichos sistemas por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

En lo que sigue se hará a una rápida exposición de los fundamentos de la *teoría de circuitos de parámetros localizados* o de *corrientes cuasiestacionarias*.

E.2. Conexión entre la teoría de campos y la de Circuitos

[Gómez].

Haremos uso del mismo tipo de convenio ya utilizado para circuitos de corrientes estacionarias e introduciremos nueva nomenclatura, como *tensión*, *caída de potencial* u otra que se definirá en su momento, que es de uso normal en esta disciplina

La teoría de circuitos de parámetros localizados estudia el comportamiento de sistemas electromagnéticos, *circuitos*, que pueden ser descritos como interconexiones de diversos tipos de elementos de dos terminales.

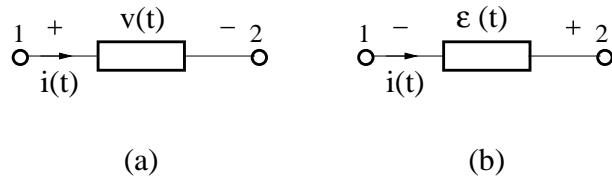


Figura E.1:

Entendemos por *elemento de dos terminales* un sistema con dos *terminales*, bien definidos desde el punto de vista eléctrico, entre los que puede establecerse, con poca ambigüedad, una relación integro-diferencial entre la intensidad que pasa por el elemento y la caída de tensión a través del mismo. Los sentidos de referencia mutua entre las caídas de potencial e intensidades los tomaremos como se indica en la figura E.1a para los elementos que llamaremos pasivos y en sentido contrario, figura E.1b, para los elementos activos ideales o fuerzas electromotrices.

Un análisis riguroso de las condiciones bajo las que este tipo de tratamiento es válido está fuera de lugar pero algunas consideraciones generales pueden acotarnos el problema con suficiente precisión [Landau y Lifchitz MC].

Analizaremos las condiciones bajo las cuales el estado electromagnético global de estos elementos puede ser descrito mediante dos variables de tipo eléctrico. Una de ellas será la intensidad y la otra la caída de potencial, a la que nos referiremos indistintamente como caída de tensión.

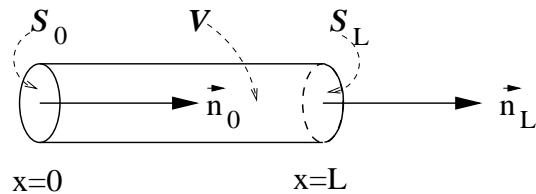


Figura E.2:

En primer lugar, veamos cuando puede hablarse de *la intensidad que circula por un tubo* de corriente. Si consideramos una sección de tubo como la de la figura E.2, para corrientes no estacionarias tendremos, de acuerdo con la ecuación de continuidad de la corriente de conducción e integrando en un instante determinado sobre el volumen \mathcal{V}

$$\int_{S_L} \vec{j} \cdot d\vec{s} - \int_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho dv \Rightarrow \\ i(L) - i(0) = -\frac{dQ}{dt}$$

donde i es la intensidad que circula por el tubo en un instante determinado y Q la carga almacenada en el mismo.

La intensidad que circula por el tubo no es uniforme, $i = i(x, t)$, de forma que la diferencia entre la intensidad que entra y la que sale de la sección del tubo está relacionada con la variación temporal de la carga neta almacenada en el mismo.

Para una corriente estacionaria

$$i(L) = i(0) \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0$$

Definiremos como corrientes cuasiestacionarias a aquellas para las que estas relaciones se cumplen aproximadamente

$$|i(L) - i(0)| = \left| \frac{dQ}{dt} \right| \ll |i(x)|$$

Esta condición permite prescindir de la dependencia espacial de la intensidad y definir una única intensidad para toda la longitud L del elemento.

Es interesante expresar las condiciones de estacionariedad para corrientes armónicas. Puesto que las corrientes tienen la misma dependencia espacio-temporal que los campos, éstas tendrán, en general, el carácter de onda. Simplificando el problema, escribiremos¹

$$\begin{aligned} i(x, t) &= I_0 \cos \omega (t - \frac{x}{v}) = \operatorname{Re} \left[I_0 e^{j\omega(t - \frac{x}{v})} \right] \Rightarrow \\ I(L, t) &= I_0 e^{j\omega t} e^{-j\omega \frac{L}{v}} = I(0, t) e^{-j\omega \frac{L}{v}} \end{aligned}$$

donde v es la velocidad de fase.

Para valores de $\frac{\omega L}{v} \ll 1$ el término $e^{-j\omega \frac{L}{v}}$ puede desarrollarse en serie, con lo que

$$I(L, t) \simeq I(0, t) (1 - j\omega \frac{L}{v}) \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\Delta I}{I} \right| = \frac{\omega L}{v}$$

donde $\Delta I = I(L, t) - I(0, t)$.

Diremos que una corriente es cuasiestacionaria cuando el error relativo cometido en la aproximación es experimentalmente despreciable, o, dado que $\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$, la condición $\frac{\omega L}{v} \ll 1$ equivale a

$$L \ll \lambda \tag{E.1}$$

Así, pues, podremos suponer que por un tubo de corriente circula una intensidad $i \neq i(x)$ cuando sus dimensiones máximas sean muy inferiores a la mínima longitud de onda de las componentes de frecuencia significativas de la señal que se propaga por él.

Por otra parte, llamaremos *tensión*, o voltaje, a la medida proporcionada por un voltímetro cuando los campos son variables con el tiempo. Veremos bajo qué condiciones el voltaje medido coincide aproximadamente con la caída de potencial.

¹En adelante se anotará en minúsculas a las magnitudes temporales reales y con mayúsculas a los fasores correspondientes a funciones monofrecuencia del tipo $f = F_0 \cos \omega t = \operatorname{Re} [F = F_0 e^{j\omega t}]$.

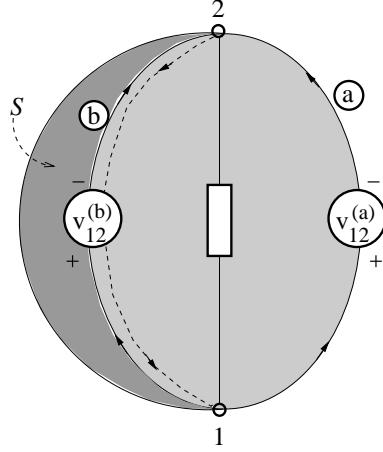


Figura E.3:

Si tocamos con los terminales de un voltímetro los puntos 1 y 2, figura E.3 , de forma que los cables formen el camino (a), el voltaje medido será

$$\begin{aligned} v_{12}^{(a)} &\equiv \int_{1,(a)}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{2,(a)}^1 \nabla V \cdot d\vec{l} - \int_{1,(a)}^2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2 - \frac{d}{dt} \left[\int_{1,(a)}^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

que no coincide con la diferencia o *caída de potencial* $V_1 - V_2$.

Por el camino (b), se medirá

$$v_{12}^{(b)} = \int_{1,(b)}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2 + \frac{d}{dt} \left[\int_{2,(b)}^1 \vec{A} \cdot d\vec{l} \right]$$

por lo que, restando

$$\Delta v_{12} = v_{12}^{(a)} - v_{12}^{(b)} = -\frac{d}{dt} \Phi(\vec{B})$$

Vemos que la diferencia entre dos medidas viene dada por la fuerza electromotriz generada por los campos magnéticos en el camino (a) + (-b).

Si nos fijamos sólo en los campos de radiación, asociado al campo eléctrico existe un campo magnético

$$B \simeq \frac{E}{v}$$

Escribiendo $\mathcal{S} = L^2$, tendremos, para una onda armónica de frecuencia ω

$$|\frac{d}{dt} \Phi| \simeq \omega B \mathcal{S} = \omega \frac{E L^2}{v}$$

y, teniendo en cuenta que $v_{12} \simeq E L$,

$$|\frac{d}{dt} \Phi| \simeq v_{12} \frac{\omega L}{v} \Rightarrow |\frac{\Delta v_{12}}{v_{12}}| \simeq \frac{\omega L}{v} \ll 1$$

Luego llegamos a la conclusión de que, para que estos campos de radiación no provoquen una incertidumbre apreciable en la medida del voltaje, la longitud del elemento y la de los cables del instrumento de medida deben cumplir la condición E.1

$$L \ll \lambda$$

La presencia de estos campos magnéticos, asociados a las corrientes de conducción lentamente variables, será tenida en cuenta extendiendo el concepto de coeficiente de inducción a las corrientes cuasiestacionarias.

E.3. Elementos fundamentales

Los elementos fundamentales de la teoría de circuitos lineales, de parámetros localizados y de dos terminales, son la resistencia, la autoinducción, la capacidad y los generadores. En su configuración ideal derivan de las definiciones correspondientes dadas para corrientes estacionarias y campos electrostáticos.

Para las resistencias, autoinducciones y capacidades, que son elementos incapaces de suministrar energía neta al exterior y que llamaremos *elementos pasivos*, haremos uso del convenio apuntado en el párrafo anterior, figura E.4.

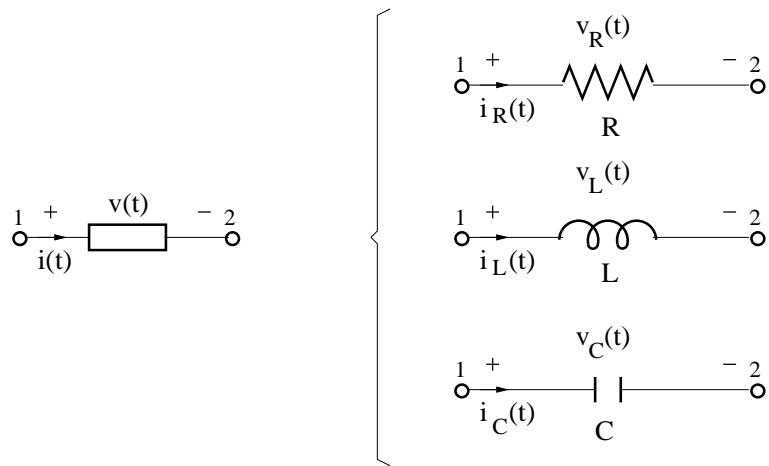


Figura E.4:

La resistencia es un elemento *dissipativo*, consume energía debido al efecto Joule. La autoinducción almacena energía magnética y el condensador energía eléctrica.

Llamaremos a $v(t) \simeq V_1 - V_2$ *caída de tensión* del terminal (1) al terminal (2) del elemento. Bajo las condiciones impuestas en el párrafo anterior, su medida por el voltímetro coincidirá con el voltaje.

Resistencia:

Definimos como *resistencia ideal* a un conductor ómico, con σ finita, dentro del cual las fuerzas electromotrices son despreciables, tanto las electromotoras como las de Faraday, es decir, los campos eléctricos en su interior son conservativos. Consideramos,

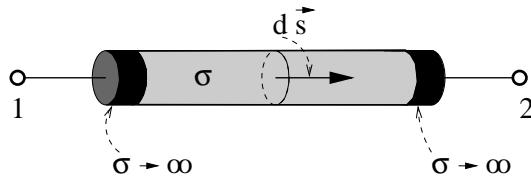


Figura E.5:

como se muestra en la figura E.5, que los terminales (1) y (2) están constituidos por conductores ideales ($\sigma \rightarrow \infty$).

El parámetro resistencia R se define de la misma forma que en la sección 7.19 para corrientes estacionarias . Allí se definió como la relación existente entre la circulación del campo total y la intensidad que circula por el tubo de corriente. Esta relación que, en general, es complicada, en los medios que llamamos óhmicos se reduce a una constante.

$$R \simeq \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{i}$$

y, despreciando las fuerzas electromotrices

$$\vec{E} = -\nabla V, \quad R = \frac{V_1 - V_2}{i} = \frac{v}{i}$$

$$v = i R \quad (\text{E.3})$$

Autoinducción:

La *autoinducción ideal* es un elemento, de resistencia nula, $\sigma \rightarrow \infty$, en el que las fuerzas electromotrices existentes son generadas por los flujos variables asociados a las corrientes cuasistacionarias que circulan por el mismo. La inducción mutua entre dos elementos se define de forma análoga ².

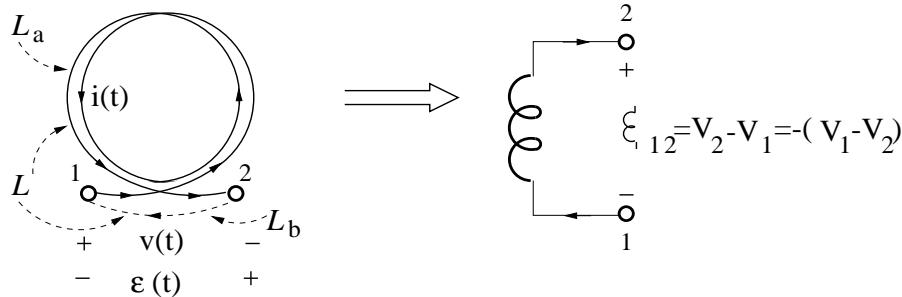


Figura E.6:

En la figura E.6 se representa un camino cerrado $\mathcal{L} = \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b$.

\mathcal{L}_a es un camino para el que $\frac{d\Phi}{dt}$ es muy significativo. \mathcal{L}_b es un camino externo al carrete que corta un flujo despreciable en comparación con el anterior.

²Véase la sección D.2.1.

Dado que no existen campos electromotores \vec{E}'

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Bajo este supuesto, podemos calcular aproximadamente la fuerza electromotriz despreciando la integral sobre \mathcal{L}_b e integrando sobre \mathcal{L}_a .

$$\begin{aligned}\varepsilon \simeq \varepsilon_{12} &= - \int_{1,\mathcal{L}_a}^2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \\ &= \underbrace{\int_{1,\mathcal{L}_a}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{=0} + \int_{1,\mathcal{L}_a}^2 \nabla V \cdot d\vec{l} = -(V_1 - V_2) = -v_L(t)\end{aligned}$$

donde la integral de \vec{E} se anula porque $R = 0$.

Lo anterior puede resumirse de la forma

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &\simeq \varepsilon_{12}(t) = -L \frac{di(t)}{dt} = -v_L(t) \\ v_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt}\end{aligned}\tag{E.4}$$

En este caso estamos igualando la caída de tensión $v_L = V_1 - V_2$, véase al figura E.4, a la fuerza electromotriz inducida cambiada de signo.

Condensador:

En D.1.4, para campos estáticos, se ha definido la capacidad de un condensador como

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Desde el punto de vista de la teoría de circuitos, definimos como *condensador ideal* a un elemento constituido por unas armaduras conductoras ideales, con un dieléctrico ideal sin pérdidas y sin ningún tipo de fuerzas electromotrices. Ésto supone despreciar la parte no conservativa del campo, debida a la ley de inducción de Faraday, que necesariamente existe cuando los campos eléctricos varían con el tiempo.

Bajo la aproximación anterior, podemos escribir

$$C \simeq \frac{Q(t)}{v_C(t)}\tag{E.5}$$

La carga almacenada en las placas del condensador será

$$Q(t) = Q_0 + \int_0^t i(t) dt$$

donde $Q_0 = Q(t = 0)$. De acuerdo con ésto, la caída de tensión entre las placas es

$$v_C(t) = v_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt\tag{E.6}$$

donde $v_0 = v(t = 0)$.

Fuentes de tensión e intensidad:

Entre los elementos activos ideales, definiremos los *generadores ideales de tensión (intensidad)* como aquellos elementos que mantienen entre sus terminales una tensión (intensidad) independiente de las condiciones externas. Se denominan activos porque son capaces de suministrar energía neta al exterior.

Para corrientes estacionarias definíamos la fuente de tensión ideal como una sección de tubo de corriente con resistencia nula.

$$i R = 0 = \int_1^2 (-\nabla V + \vec{E}_R) \cdot d\vec{l} \Rightarrow \varepsilon_{12} = V_2 - V_1$$

y en el que la fuerza electromotriz $\varepsilon_{12} = \varepsilon(t)$ es independiente de i . La fuente de tensión, o batería ideal, mantenía entre sus bornes, o terminales, una diferencia de potencial fija e igual a su fuerza electromotriz. Extenderemos la validez de esta definición al caso de corrientes cuasiestacionarias, admitiendo que la diferencia de potencial es variable, $v(t)$, pero independiente de $i(t)$.

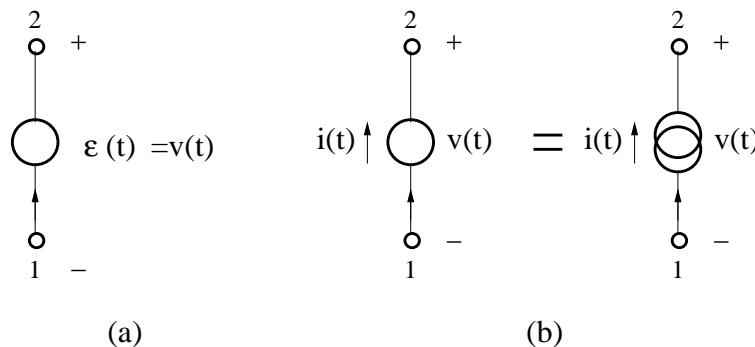


Figura E.7:

Los símbolos y las referencias vienen representados en la figura E.7.

La potencia suministrada al exterior es

$$P(t) = \varepsilon(t) i(t) \quad (\text{E.7})$$

Como puede verse en la figura, el convenio de signos de referencia para la fuerza electromotriz es el contrario que para la tensión. En este caso la intensidad entra al elemento por el terminal negativo y sale por el positivo.

Puesto que $\varepsilon(t)$, en las fuentes de tensión, e $i(t)$, en las de intensidad, sólo dependen de las características internas de dichas fuentes, diremos que estas son *fuentes independientes*.

Los elementos no lineales juegan un papel importante en la práctica. Más adelante, en el apéndice F, hablaremos de los transistores pero por ahora citaremos solamente al diodo ideal. El *diodo ideal* es un elemento pasivo unidireccional: tiene resistencia nula cuando la tensión aplicada es positiva e infinita en caso contrario.

La figura E.8 muestra la curva característica $i_D \leftrightarrow v_D$ para el diodo, así como los convenios de referencia. Además de la relación entre los signos de la tensión y la

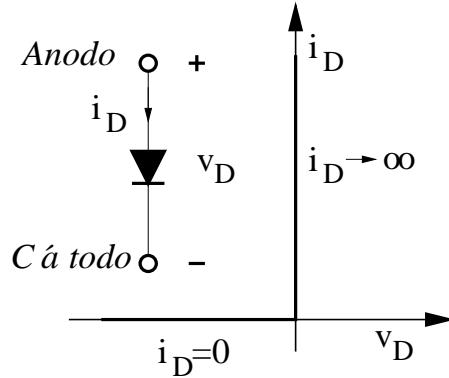


Figura E.8:

intensidad, que es la correspondiente a los elementos pasivos, por ser un elemento unidireccional, se hace necesario relacionar la dirección positiva de la intensidad con la dirección privilegiada de conducción.

E.3.1. Elementos reales

Los elementos reales, como es natural, no se ajustan a ningún modelo exacto pero las desviaciones pequeñas de la idealidad pueden ser modeladas complicando en cierto grado los modelos ideales.

Así, por ejemplo, la resistencia del hilo con que se fabrica una autoinducción no suele ser despreciable a baja frecuencia y para frecuencias altas empiezan a ser notables los efectos capacitivos. Un posible modelo de una autoinducción real, válido para un cierto rango de frecuencias, puede ser el de la figura E.9.

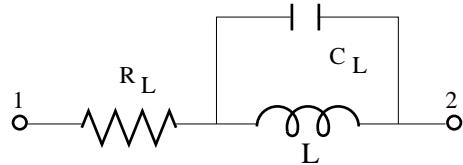


Figura E.9:

En adelante, cuando hablaremos de *fuentes reales* nos referiremos a modelos lineales de fuentes en los que se tiene en cuenta que, en la práctica, es imposible materializar una fuente cuya variable de salida no dependa, aunque sólo sea en pequeña medida, de las condiciones externas. En otras palabras, la caída de tensión (intensidad) de una fuente de tensión (intensidad) no puede ser totalmente independiente de la intensidad (tensión) que aparezca entre sus terminales. El modelo de la fuente real será, pues, el de la figura E.10.

Para la fuente de tensión real, la tensión de salida es

$$v_s(t) = \varepsilon_0(t) - v'(t) = \varepsilon_0(t) - O_z * i_s(t) \quad (\text{E.8})$$

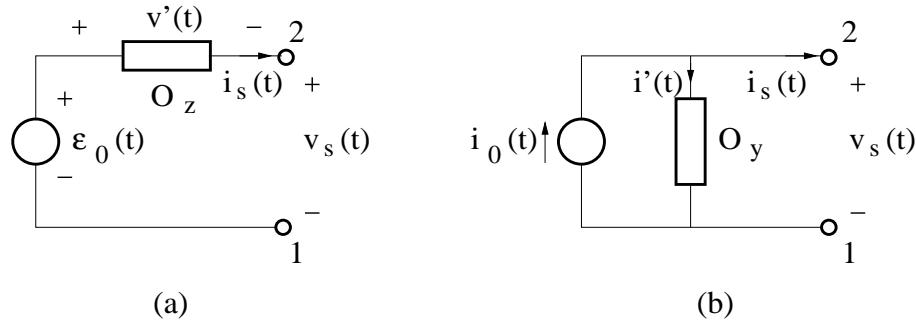


Figura E.10:

donde O_z^3 es un operador integro-diferencial lineal que opera (*) sobre la intensidad de salida i_s .

Para la fuente de intensidad real, la intensidad de salida es

$$i_s(t) = i_0(t) - i'(t) = i_0(t) - O_y * v_s(t) \quad (\text{E.9})$$

donde O_y es también un operador lineal.

E.4. Leyes de Kirchhoff

Las leyes de Kirchhoff no son sino la expresión, en términos de corrientes, caídas de tensión y fuerzas electromotrices, de las leyes de Maxwell bajo las condiciones enunciadas en la sección E.2. Previamente al enunciado de las mismas, recordaremos algunas definiciones ya establecidas e introduciremos algunas nuevas, aplicables a circuitos de parámetros localizados al tiempo que haremos algunas aclaraciones pertinentes.

Definiciones

- *Elemento de dos terminales*: Sistema que puede ser descrito por una relación integro-diferencial que liga la caída de tensión entre dos terminales y la intensidad que circula entre ellos.
 - *Elemento lineal*: Aquel en el que la relación entre $v(t)$ e $i(t)$ es lineal.
 - *Elemento independiente del tiempo*: Aquel cuyos parámetros son independientes del tiempo.
 - *Circuito*: Sistema resultante de la interconexión de dos o más elementos.
 - *Circuito pasivo*: Circuito capaz de almacenar o disipar energía y que puede devolver parte de la energía almacenada , pero no es capaz de suministrar una energía neta al exterior.

³La notación O_z (O_y) indica que el operador tiene dimensión de impedancia (admitancia), como se verá más adelante.

- *Circuito activo*: Circuito capaz de suministrar una energía neta al exterior.
- *Rama*: Interconexión de elementos que puede ser descrita, como un elemento, por una relación de la tensión y la intensidad entre dos terminales.
- *Nudo*: Punto de interconexión de dos o más elementos o ramas.
- *Malla*: Conjunto de ramas que constituye un camino cerrado, dentro del circuito, sin pasar dos veces por el mismo nudo.

La representación gráfica de un circuito físico no es unívoca, ya que las definiciones de nudos y ramas tampoco dan una representación gráfica unívoca. Esto no es ningún inconveniente sino todo lo contrario.

Leyes de Kirchhoff

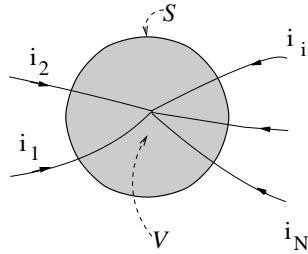


Figura E.11:

Como ya hemos visto, incluyendo la corriente de desplazamiento en los condensadores, las corrientes cuasiestacionarias cumplen, aproximadamente, la condición

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$$

Si aplicamos esto a un volumen, figura E.11, que encierre a un nudo en el que concurren N ramas con intensidades incidentes i_i , $i = 1 \dots N$, tendremos

$$\sum_i i_i = 0 \tag{E.10}$$

que expresa la *primera ley de Kirchhoff*.

Para enunciar la segunda ley, consideremos, en principio, un tubo de corriente cuasiestacionaria compuesto de una concatenación en serie de fuentes de fuerza electromotriz y elementos pasivos como el mostrado en la figura E.12.

Integrando el campo conservativo a lo largo de un camino dentro del tubo

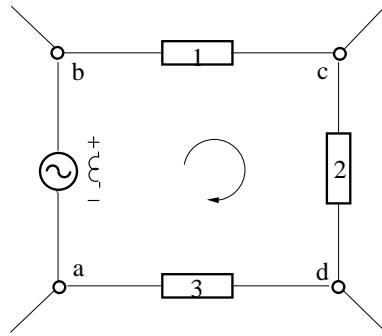


Figura E.12:

$$\begin{aligned}
 \oint dV &= \left(\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \right) dV = 0 \Rightarrow \\
 (\mathcal{E} - V_a) + (V_c - V_b) + (V_d - V_c) + (V_a - V_d) &= 0 \Rightarrow \\
 -\mathcal{E} + v_1 + v_2 + v_3 &= 0
 \end{aligned}$$

que, en el caso de que a lo largo del camino existan varios elementos de cada clase, puede extenderse a cualquier malla y escribir

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_j v_j \quad (\text{E.11})$$

Ésta es una forma de expresar la *segunda ley de Kirchhoff*, en la que la primera sumatoria se extiende a todas las fuerzas electromotrices y la segunda a todas las caídas de potencial debidas a las resistencias, autoinducciones y condensadores.

E.5. Respuesta a una excitación armónica

A pesar de que funciones $i(t)$ y $v(t)$ que no sean de cuadrado sumable no son físicamente aceptables, si que son físicamente útiles. En particular, el estudio de la respuesta de un circuito a una entrada armónica pura, *respuesta en frecuencia*, tiene un interés general puesto que, sobre la base de ésta, puede reconstruirse la respuesta a una entrada de cuadrado sumable haciendo uso de la transformada de Fourier. En concreto, comprobaremos que, aunque las señales armónicas no son estrictamente transformables por Fourier, pueden ser tratadas con un formalismo análogo al utilizado en el apéndice G, expresión G.4.

Para simplificar, nos planteamos la resolución de un circuito con una sola variable independiente, $y(t)$, y una sola incógnita, $x(t)$, que representan indistintamente a tensiones o intensidades armónicas.

La primera tiene amplitud X_0 y fase δ

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$$

y la segunda, amplitud Y_0 y fase α .

$$y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

La aplicación de las leyes de Kirchhoff nos permitirá obtener una ecuación lineal en derivadas totales y con coeficientes constantes y reales que ligan a ambas variables.

$$L_A x(t) = L_B y(t)$$

donde L_A y L_B son operadores lineales con coeficientes constantes de orden n y m respectivamente.

$$\underbrace{\left[a_n \frac{d^n}{dt^n} + \dots + a_0 \right]}_{L_A} x(t) = \underbrace{\left[b_m \frac{d^m}{dt^m} + \dots + b_0 \right]}_{L_B} y(t) \quad (\text{E.12})$$

Podemos resolver esta ecuación, como hicimos con los campos, utilizando el formalismo fasorial, es decir, extendiendo analíticamente al plano complejo a las variables en cuestión. Para ello definiremos

$$Y(t) = y(t) + j g(t) , \quad g(t) = Y_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

A $Y(t)$ lo llamaremos *fasor temporal* de $y(t)$. Podemos expresarlo de las formas

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_0 [\cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha)] = \\ &= Y_0 e^{j(\omega t + \alpha)} = \\ &= Y_0 e^{j\alpha} e^{j\omega t} = \\ &= Y e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

donde $Y = Y_0 e^{j\alpha}$ es el *fasor independiente del tiempo* o, simplemente, fasor de entrada.

Es evidente, por superposición lineal, que si $x(t)$ es la respuesta a $y(t)$

$$\begin{aligned} X(t) &= x(t) + j z(t) = X_0 [\cos(\omega t + \delta) + j \sin(\omega t + \delta)] = \\ &= X_0 e^{j(\omega t + \delta)} = \\ &= X_0 e^{j\delta} e^{j\omega t} = \\ &= X e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

es la respuesta a $Y(t)$ y que la respuesta real, buscada es

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}[X(t)] = \operatorname{Re}[X e^{j\omega t}] = \\ &= X_0 \cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Substituyendo en E.12 y teniendo en cuenta que $\frac{dX}{dt} = j\omega X = s X$

$$L_A X(t) = L_B Y(t) \Rightarrow X L_A e^{j\omega t} = Y L_B e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$X(s) = T(s) Y(s) \quad (\text{E.16})$$

$$T(s) \equiv \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \quad (\text{E.17})$$

siendo $T(s)$ la *función de transferencia* de la variable Y a la X

E.5.1. Representación fasorial; impedancias y admitancias

A las relaciones integrodiferenciales entre la tensión y la intensidad de los elementos, resistencia, capacidad y autoinducción

$$\begin{aligned} v_R(t) &= i_R(t) R & \rightarrow i_R &= \frac{1}{R} v_R(t) \\ v_L(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} & \rightarrow i_L(t) &= \frac{1}{L} \int v_L(t) dt \\ v_C(t) &= \frac{1}{C} \int i_C(t) dt & \rightarrow i_C(t) &= C \frac{dv_C(t)}{dt} \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

les corresponden relaciones algebraicas complejas cuando las variables son armónicas. Si tomamos como entrada a la intensidad y como salida a la tensión, las funciones de transferencia reciben el nombre de *impedancia*. Si lo hacemos al revés reciben el de *admitancia*. Así, pués, las impedancias son

$$V = I Z \ , \ \begin{cases} Z_R = R \\ Z_L = L s \equiv j\omega L \\ Z_C = \frac{1}{C s} \equiv \frac{1}{j\omega C} \end{cases} \quad (\text{E.19})$$

y las admitancias

$$I = V Y \ , \ Y = \frac{1}{Z} \ , \ \begin{cases} Y_R = \frac{1}{R} \\ Y_L = \frac{1}{L s} \equiv \frac{1}{j\omega L} \\ Y_C = C s = j\omega C \end{cases} \quad (\text{E.20})$$

En adelante se utilizará la misma notación tanto para los fasores dependientes del tiempo como para los independientes del mismo ya que las relaciones anteriores son válidas en ambos casos.

En el plano complejo, estas impedancias y admitancias, forman los siguientes diagramas fasoriales representados en la figura E.13.

Si, por ejemplo,

$$i = I_0 \cos(\omega t + \alpha) \Rightarrow I = I_0 e^{j\alpha} \equiv I_0, \underline{\alpha}$$

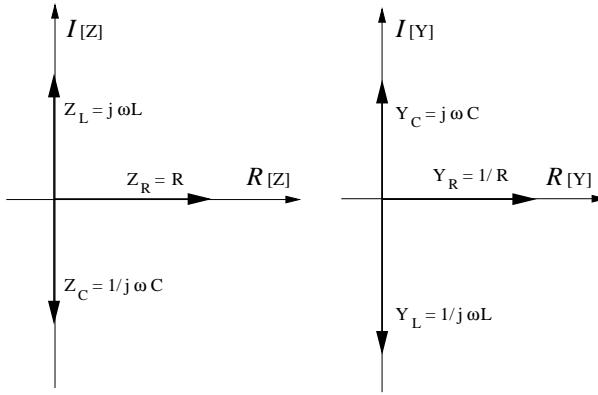


Figura E.13:

$$V_R = I R = I_0 R e^{j\alpha} = V_{R0} e^{j\alpha} \Rightarrow v_R(t) = \operatorname{Re}[V_R e^{j\omega t}] = V_{R0} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$V_L = \omega L I_0 e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})} = V_{L0} e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})} \Rightarrow v_L(t) = V_{L0} \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$V_C = \frac{I_0}{\omega C} e^{j(\alpha - \frac{\pi}{2})} = V_{C0} e^{j(\alpha - \frac{\pi}{2})} \Rightarrow v_C(t) = V_{C0} \cos(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2})$$

Es decir, la caída de tensión en la resistencia está en fase con la intensidad, mientras que la de la autoinducción esta adelantada en $\frac{\pi}{2}$ y la del condensador atrasada en $\frac{\pi}{2}$.

En la figura E.14 se representan $i(t)$, $v_R(t)$, $v_L(t)$ y $v_C(t)$ para $\alpha = 0$.

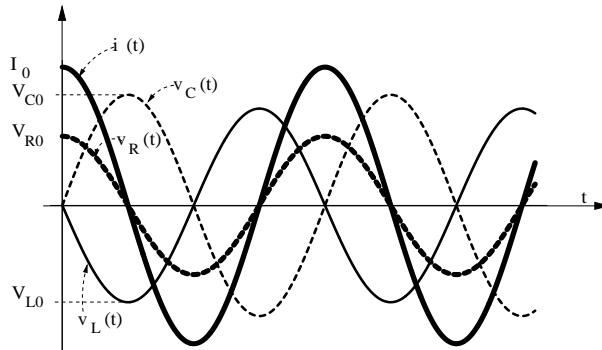


Figura E.14:

El diagrama de fasores dependientes del tiempo está representado en la figura E.15. Los fasores temporales giran con velocidad uniforme ω y sus proyecciones sobre el eje real nos dan el valor instantáneo de las variables.

Basta con hacer uso del diagrama de los fasores independientes del tiempo, el cual corresponde al instante $t = 0$ en el del dependiente del tiempo.

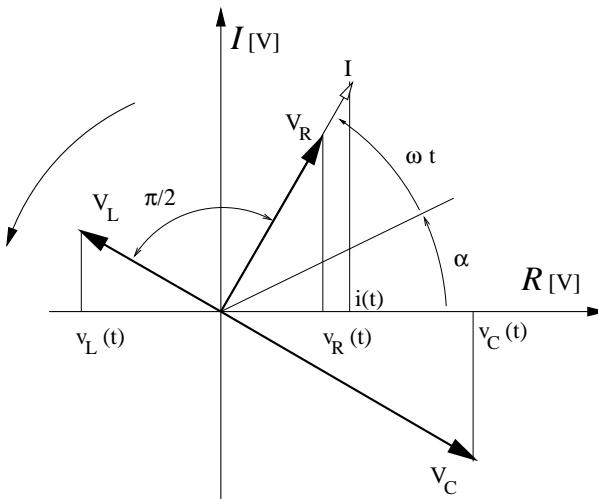


Figura E.15:

E.5.2. Asociación de elementos

Por asociación de elementos fundamentales pueden obtenerse elementos de dos terminales más complejos o *ramas*.

Ac continuación consideraremos los dos tipos más simples de asociación de impedancias: la serie y la paralelo.

Asociación serie:

En la asociación serie, figura E.16, la intensidad que circula por cada elemento es la misma y las caídas de tensión se suman.

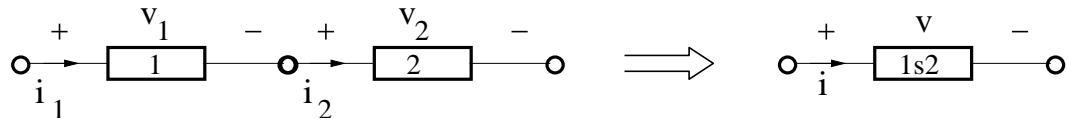


Figura E.16:

$$i_1 = i_2 = i \quad , \quad v = v_1 + v_2$$

Para corrientes armónicas

$$V = I Z_s \quad , \quad Z_s = Z_1 + Z_2 \quad (\text{E.21})$$

Asociación paralelo:

En el caso de la asociación paralelo, figura E.17

$$v_1 = v_2 = v \quad , \quad i = i_1 + i_2$$

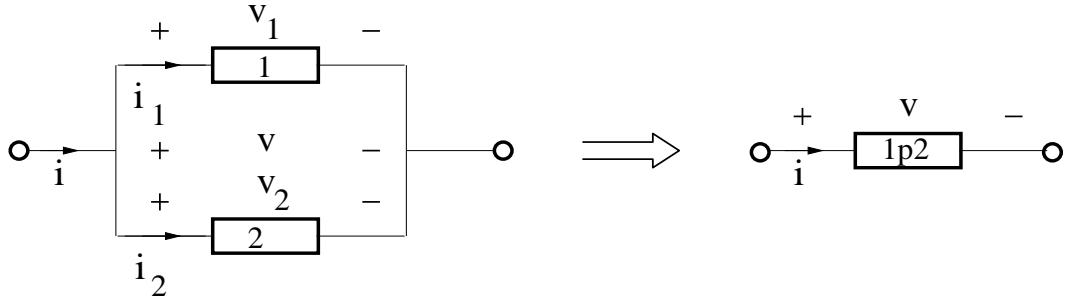


Figura E.17:

$$I = Y_p V \quad , \quad Y_p = Y_1 + Y_2 \quad , \quad \frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (\text{E.22})$$

E.6. Métodos de análisis

E.6.1. Introducción

Las leyes de Kirchhoff permiten la obtención de las ecuaciones que describen el comportamiento de cualquier circuito. En la práctica, dado que estos circuitos pueden presentar una estructura complicada, conviene seguir una metodología ordenada para el planteamiento y solución de dichas ecuaciones. El tema es bastante amplio y aquí sólo queremos presentar los rasgos fundamentales de los métodos de análisis por mallas y por nudos. Por no complicar la exposición limitaremos nuestra consideración a los circuitos planos; circuitos que pueden ser representados en el plano sin cruces entre ramas. Para comprender la nomenclatura, los convenios de signos y la forma de aplicar las leyes, nos basaremos en el ejemplo concreto de la figura E.18.

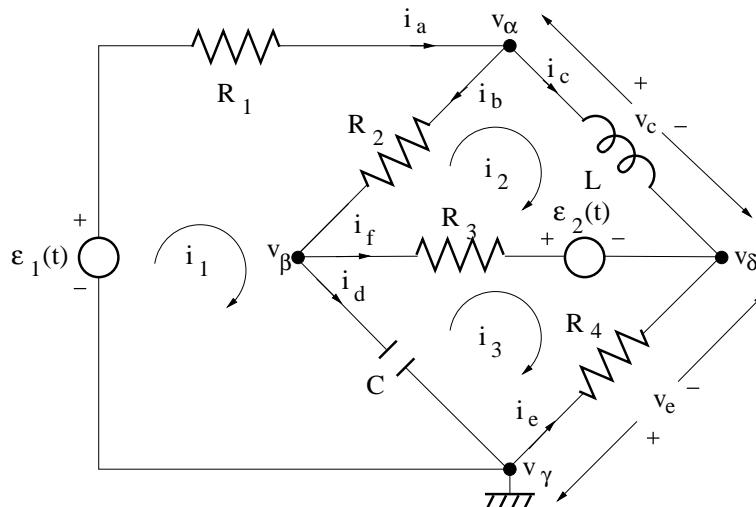


Figura E.18:

Se han representado

$$\begin{aligned} N &= 4 \text{ nudos} & (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ R &= 6 \text{ ramas} & (a, b, c, d, e, f) \\ M &= 3 \text{ mallas} & (1, 2, 3) \end{aligned}$$

Como variables independientes aparecen las fuentes de fuerza electromotriz $\mathcal{E}_1(t)$ y $\mathcal{E}_2(t)$ (Podríamos haber introducido fuentes de intensidad pero lo dejaremos para más adelante).

Dividiremos las variables dependientes en dos grupos:

- Variables de malla y nudo.

$$\begin{aligned} a &- \text{ Intensidades de malla: } (i_1, i_2, i_3). \\ b &- \text{ Tensiones de nudo: } (v_\alpha, v_\beta, v_\gamma = 0, v_\delta) \end{aligned}$$

Para facilitar el análisis, se elige un sentido único para las intensidades de todas las mallas, a derechas en este caso, y un nudo, el γ , como referencia o *tierra*.

Describiremos dos métodos de análisis basados, respectivamente, en la primera y la segunda ley de Kirchhoff.

- Variables de rama.

$$\begin{aligned} c &- \text{ Intensidades de rama: } (i_a, i_b, i_c, i_d, i_e, i_f) \\ d &- \text{ Tensiones de rama: } (v_a, v_b, v_c, v_d, v_e, v_f). \end{aligned}$$

Una vez resuelto el problema para las intensidades de malla o las tensiones de nudo, pueden calcularse otras variables que dependen de las anteriores, como las intensidades de rama, por ejemplo

$$i_a = i_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - v_\alpha}{R_1} , \quad i_b = i_1 - i_2 = \frac{v_\alpha - v_\beta}{R_2} , \quad i_d = C \frac{dv_\beta}{dt} , \quad \dots$$

a las cuales se les ha asignado un sentido arbitrario de referencia, como el marcado en la figura.

$$v_c = v_\alpha - v_\delta = v_\beta , \quad v_e = v_\gamma - v_\delta = -v_\delta , \quad \dots$$

Observese que se toma como referencia positiva para las tensiones de rama a aquel nudo del que sale la intensidad de referencia de la rama correspondiente.

Aplicación de las leyes de Kirchhoff:

Las leyes de Kirchhoff, en el dominio temporal, han sido enunciadas mediante las expresiones E.10 y E.11

También pueden expresarse en el dominio de la frecuencia aplicando la transformada de Fourier o representando fasorialmente a las variables

$$\sum_i I_i = 0 , \quad \sum_i V_i = \sum_j \mathcal{E}_j \quad (\text{E.23})$$

donde las letras mayúsculas representan a los fasores o a las densidades espectrales correspondientes.

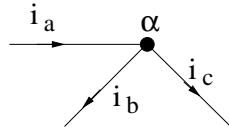


Figura E.19:

Así, por ejemplo, con las referencias indicadas y tomando como positivas las intensidades que entran en el nudo, se tiene que, para el nudo (α), figura E.19 ⁴

$$i_a - i_b - i_c = 0 , \quad I_a - I_b - I_c = 0$$

y, para la malla (3), figura E.20

$$-v_C + v_{R_3} - v_{R_4} = -\varepsilon_2 , \quad -V_C + V_{R_3} - V_{R_4} = -\mathcal{E}_2$$

Se han tomado como positivas a las fuerzas electromotrices tales que, al recorrer la malla en el sentido de referencia establecido para la misma, uno se encuentra primero con su referencia negativa. La regla contraria se sigue para las caídas de potencial.

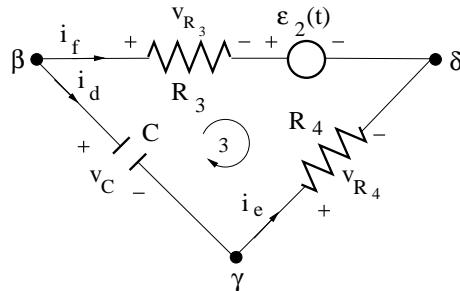


Figura E.20:

Para plantear correctamente las ecuaciones del sistema basta con establecer, haciendo uso de las leyes de mallas y nudos, un número de ecuaciones, linealmente independientes, que sea suficiente para describir las relaciones entre las intensidades y caídas de tensión en todas las ramas.

⁴Se han tomado como positivas las intensidades entrantes y negativas las salientes. Puede tomarse el convenio contrario pero conviene adoptar el mismo criterio para todos los nudos.

E.6.2. Equivalencia entre fuentes reales de tensión y de intensidad

Para las corrientes armónicas, las fuentes reales pueden representarse como se muestra en la figura E.21. En la primera se representan como fuente de tensión con fuerza electromotriz V_0 e impedancia de salida Z_0 y en la segunda como fuente de intensidad con intensidad motriz I_0 y admitancia de salida Y_0 . Las relaciones fasoriales que las caracterizan son, respectivamente

$$V_s = V_0 - I_s Z_0 \quad (\text{E.24})$$

$$I_s = I_0 - V_s Y_0 \quad (\text{E.25})$$

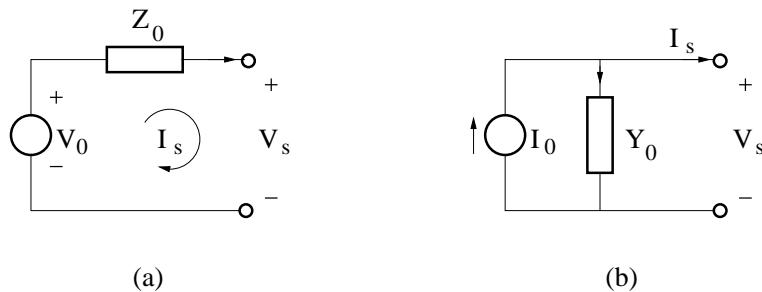


Figura E.21:

Dividiendo E.24 por Z_0 y tomando

$$I_0 = \frac{V_0}{Z_0}, \quad Y_0 = \frac{1}{Z_0}$$

se comprueba que la fuente de intensidad y la de tensión son equivalentes.

Si las fuentes se modelan como ideales, con impedancia nula o admitancia infinita, tal conversión no es posible. Para el análisis de mallas es necesario convertir a todas las fuentes a fuente de tensión y en el de nudos a fuente de intensidad. Si en un circuito aparece una fuente no convertible, éste deberá ser analizado por el método apropiado.

E.6.3. Análisis de mallas

En este método de solución se calculan las intensidades de malla. Una vez hecho ésto podemos hallar cualquier otra variable dependiente. Para aplicarlo haremos uso previamente de la equivalencia entre fuentes de tensión e intensidad de forma que en el circuito sólo aparezcan las primeras.

Puesto que, para cualquier nudo α_i que pertenezca a la malla (i), la intensidad de malla i_i entra y sale, la primera ley de Kirchhoff se cumple automáticamente. Hay que plantear, por lo tanto, tantas ecuaciones de malla linealmente independientes como puedan establecerse en el circuito. Establecer intensidades independientes equivale a encontrar mallas independientes. En la figura E.22 se reproduce la E.18 con la notación adecuada para el análisis de mallas.

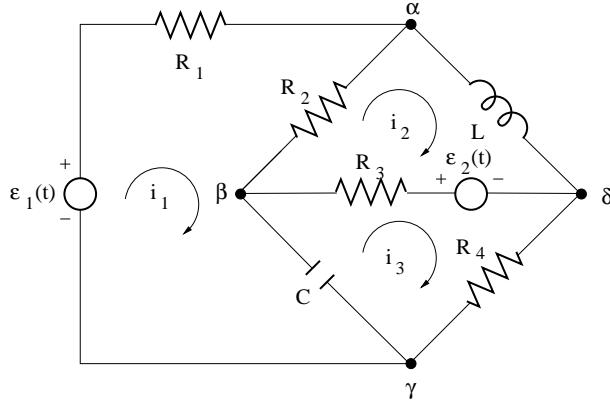


Figura E.22:

En el dominio temporal, las ecuaciones de las tres mallas elegidas son

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_2 + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_3) dt + V_{C0} \\ \varepsilon_2 &= (i_2 - i_3) R_3 + (i_2 - i_1) R_2 + L \frac{di_2}{dt} \\ -\varepsilon_2 &= i_3 R_4 + \frac{1}{C} \int_0^t (i_3 - i_1) dt - V_{C0} + (i_3 - i_2) R_3\end{aligned}$$

Nótese que V_{C0} aparece con signo positivo en la ecuación de la primera malla y con negativo en la tercera. Ésto se debe a que, para esta tensión se ha tomado como referencia a la intensidad i_1

Si nos restringimos a la respuesta armónica y escribimos $j\omega \rightarrow s$ ⁵

$$\begin{aligned}E_1 = \mathcal{E}_1 &= I_1 (R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}) - I_2 R_2 - I_3 \frac{1}{Cs} \\ E_2 = \mathcal{E}_2 &= -I_1 R_2 + I_2 (R_3 + R_2 + Ls) - I_3 R_3 \\ E_3 = -\mathcal{E}_2 &= -I_1 \frac{1}{Cs} - I_2 R_3 + I_3 (R_3 + R_4 + \frac{1}{Cs})\end{aligned}$$

donde E_i son las fuerzas electromotrices correspondientes a cada una de las mallas.

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{11} & \mathcal{Z}_{12} & \mathcal{Z}_{13} \\ \mathcal{Z}_{21} & \mathcal{Z}_{22} & \mathcal{Z}_{23} \\ \mathcal{Z}_{31} & \mathcal{Z}_{32} & \mathcal{Z}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

La matriz de impedancias (\mathcal{Z}_{ij}) tiene las siguientes propiedades:

- Es simétrica, por lo que $\mathcal{Z}_{ij} = \mathcal{Z}_{ji}$.

⁵Algo análogo se obtiene si substituimos los operadores $\int() dt \rightarrow \frac{1}{s}$ y $\frac{d}{dt} \rightarrow s$.

- Los elementos diagonales \mathcal{Z}_{ii} son la suma de las impedancias de la malla (i).
- Los elementos no diagonales \mathcal{Z}_{ij} ($i \neq j$) son la suma, cambiada de signo, de las impedancias de la rama común a las mallas (i) y (j).

El cálculo de I_j es inmediato haciendo uso de la regla de Cramer.

$$I_j = \sum_i A_{ji} E_i , \quad A_{ji} = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} \quad (\text{E.26})$$

donde Δ_{ji} es el cofactor del elemento \mathcal{Z}_{ji} y Δ es el determinante de la matriz (\mathcal{Z}_{ij}) .

E.6.4. Análisis de nudos

Para el análisis de nudos es necesario convertir todas las fuentes de tensión en fuentes de intensidad haciendo uso de la equivalencia entre ellas.

En la figura E.23 se muestran las fuentes de intensidad equivalentes a las de tensión de la figura E.22 y en la figura E.24 el circuito resultante para el análisis de nudos.

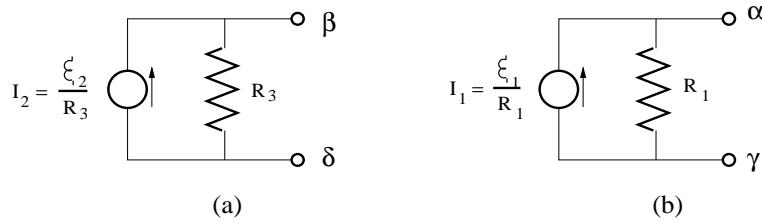


Figura E.23:

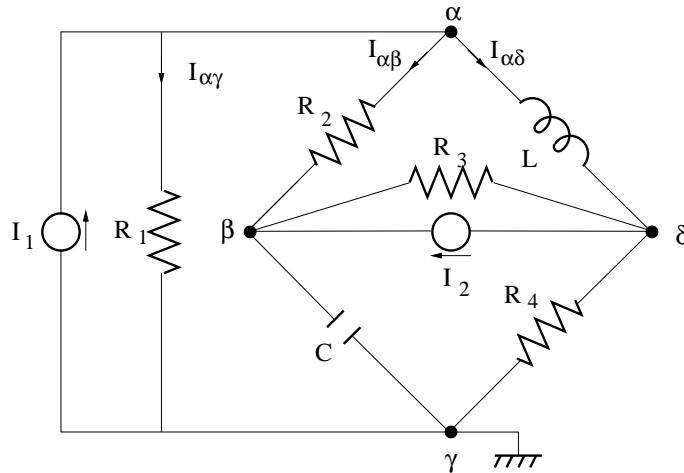


Figura E.24:

Puesto que hemos tomado como nudo de referencia al γ ($v_\gamma = 0$), tendremos que calcular las tensiones v_α , v_β y v_δ de los nudos α , β y δ con respecto al γ en función de las fuentes de intensidad existentes en el circuito.

Para establecer un procedimiento sistemático, plantearemos la ley de nudos, para fasores, de la siguiente forma:

1. Escribimos en el primer miembro la suma de las intensidades de las fuentes, con referencia positiva las que inciden en el nudo y negativa las que salen del mismo.
Para el nudo α , $I_\alpha = I_1$.
2. En el segundo miembro se escribe la suma de las intensidades que salen del nudo por las admitancias pasivas. Para el nudo α esta suma es $I_{\alpha\beta} + I_{\alpha\delta} + I_{\alpha\gamma}$.

Así, pues, para el circuito

$$\begin{aligned} I_\alpha &= I_1 = (V_\alpha - V_\beta) \frac{1}{R_2} + (V_\alpha - V_\delta) \frac{1}{L_s} + (V_\alpha - 0) \frac{1}{R_1} \\ I_\beta &= I_2 = (V_\beta - V_\alpha) \frac{1}{R_2} + (V_\beta - V_\delta) \frac{1}{R_3} + (V_\beta - 0) C_s \\ I_\delta &= -I_2 = (V_\delta - V_\alpha) \frac{1}{L_s} + (V_\delta - V_\beta) \frac{1}{R_3} + (V_\delta - 0) \frac{1}{R_4} \end{aligned}$$

que, en forma matricial, se escribe de forma análoga a como se hace en el análisis de mallas

$$\begin{pmatrix} I_\alpha \\ I_\beta \\ I_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{\alpha\alpha} & \mathcal{Y}_{\alpha\beta} & \mathcal{Y}_{\alpha\delta} \\ \mathcal{Y}_{\beta\alpha} & \mathcal{Y}_{\beta\beta} & \mathcal{Y}_{\beta\delta} \\ \mathcal{Y}_{\delta\alpha} & \mathcal{Y}_{\delta\beta} & \mathcal{Y}_{\delta\delta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \\ V_\delta \end{pmatrix}$$

La matriz de admitancias (\mathcal{Y}_{ij}) , $i, j = \alpha, \beta, \delta$ tiene las siguientes propiedades:

- Es simétrica, por lo que $\mathcal{Y}_{ij} = \mathcal{Y}_{ji}$.
- Los elementos diagonales \mathcal{Y}_{ii} son la suma de las admitancias para las que el nudo (i) es común.
- Los elementos no diagonales \mathcal{Y}_{ij} ($i \neq j$) son la suma, cambiada de signo, de las admitancias de las ramas que unen a los nudos (i) y (j).

E.7. Teoremas fundamentales

Existen numerosos teoremas relativos a diversos aspectos de la teoría de circuitos. De entre ellos sólo consideraremos los más fundamentales [Le Page y Seely, Balabanian y Bickart].

E.7.1. Teorema de superposición

Supongamos que un circuito cualquiera tiene un conjunto de fuentes independientes de intensidad I_{0i} y de tensión \mathcal{E}_{0j} . Dada la linealidad del sistema, cualquier variable dependiente del circuito, I_x o V_x , puede expresarse como combinación lineal de las

fuentes independientes. Sea X la variable dependiente e $\{Y_i\}$ el conjunto de variables independientes.

$$X = \sum_i A_i Y_i = \sum_i X_i \quad (\text{E.27})$$

donde A_i son constantes y

$$X_i = A_i Y_i = (X)_{Y_j=0} , \quad \forall j \neq i$$

Es decir, la respuesta X de un sistema lineal a un conjunto de entradas independientes Y_i puede expresarse como la suma de las respuestas parciales X_i a una sola de las entradas Y_i .

E.7.2. Teoremas de Thevenin y Norton

Enunciados :

- Teorema de Thevenin

Un circuito puede ser representado, desde cualquier par de nudos, A y B , como una fuerza electromotriz ideal en serie con una impedancia.

$$V_s = \mathcal{E}_T - I_s Z_T \quad (\text{E.28})$$

- Teorema de Norton

Un circuito puede ser representado, desde cualquier par de nudos, A y B , como una fuente de intensidad ideal y una impedancia en paralelo.

$$I_s = I_N - V_s Y_N \quad (\text{E.29})$$

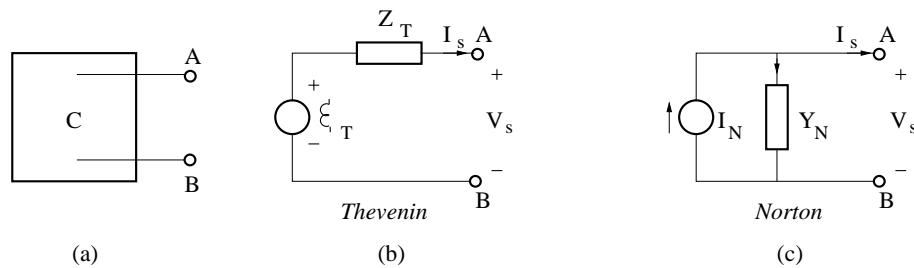


Figura E.25:

Es evidente, figura E.25, que el teorema de Norton se deduce del de Thevenin, sin más que aplicar la equivalencia entre fuentes de tensión y de intensidad

$$I_N = \frac{\mathcal{E}_T}{Z_T} , \quad Y_N = \frac{1}{Z_T} \quad (\text{E.30})$$

donde \mathcal{E}_T es la fuerza electromotriz Thevenin, I_N la intensidad Norton, Z_T la impedancia de salida Thevenin e Y_N la admitancia de salida Norton.

Demostración :

Basta con demostrar uno de los dos enunciados.

Sin perder generalidad consideraremos un circuito con dos mallas, como el encerrado en el bloque de puntos de la figura E.26.

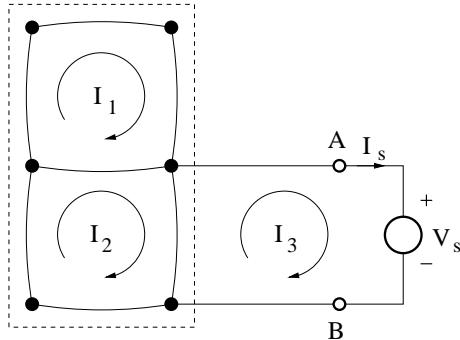


Figura E.26:

Saquemos al exterior los terminales A y B , a los que conectaremos la fuente de tensión ficticia que representará a la tensión de salida V_s . Con esto habremos añadido al circuito una malla más, por la que circula una intensidad $I_3 = +I_s$, donde I_s es la intensidad de salida. Apliquemos la expresión E.26 para calcular la intensidad de la nueva malla.

Si llamamos Δ' al determinante del circuito con $M + 1$ mallas

$$I_3 = \sum_{i=1}^{M+1} A_{3i} \mathcal{E}_i$$

donde las $A_{3i} = \frac{\Delta'_{3i}}{\Delta'}$ son constantes de proporcionalidad. Véase que a este resultado podemos llegar sin más que apelar al teorema de superposición.

Si escribimos $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}'_3 - V_s$, donde \mathcal{E}'_3 es la fuerza electromotriz de la malla (3) que está incluida en el circuito primitivo y $-V_s$ la externa, afectada del signo resultante del convenio del convenio de referencias, se tiene que

$$I_s = I_3 = \underbrace{A_{31} \mathcal{E}_1 + A_{32} \mathcal{E}_2 + A_{33} \mathcal{E}'_3}_{I_N} - \underbrace{A_{33} V_s}_{Y_N} \quad (\text{E.31})$$

siendo I_N la fuente de intensidad Norton y Y_N la admitancia Norton. Los parámetros thevenin se obtienen a partir de estos haciendo uso de las relaciones de conversión E.30.

Formas de calcular los parámetros Thevenin y Norton :

De lo anterior se desprende que disponemos de distintas opciones para calcular la fuerza electromotriz y la impedancia Thevenin, bien sea teóricamente o de forma experimental. Entre otras, pueden emplearse las siguientes:

- Oteniendo la ecuación análoga a la E.31, es decir, resolviendo el sistema de $M + 1$ mallas, igualando el término que es función de las fuentes dependientes a I_N e identificando el que multiplica a I_s con Y_N .

- Observando que según el teorema de Thevenin E.28

$$\mathcal{E}_T = (V_s)_{I_s=0} \quad , \quad Z_T = \left(-\frac{V_s}{I_s} \right)_{\mathcal{E}_i=0} \quad (\text{E.32})$$

Para obtener \mathcal{E}_T haremos $I_s = 0$, es decir, no colocaremos ninguna impedancia de carga externa entre los terminales $A - B$ y mediremos con un voltímetro $V_{AB} = V_s$. La impedancia Thevenin se obtiene anulando, cortocircuitando, todas las fuentes de fuerza electromotriz internas, con lo que $\mathcal{E}_T = 0$, y hallando la relación entre una tensión V_s aplicada al circuito y la intensidad $I = -I_s$ que entra en el mismo. En la práctica, para anular cada una de las \mathcal{E}_i , será necesario desconectar la fuente correspondiente y unir los cables de conexión respectivos, es decir, cortocircuitarlos. En cuanto al resto de las operaciones, son las que hace, precisamente, un óhmetro.

- Si se ha calculado \mathcal{E}_T de la forma descrita anteriormente, la impedancia Z_T puede obtenerse de la medida de I_s cuando los terminales $A - B$ se cortocircuitan.

$$Z_T = \frac{\mathcal{E}_T}{(I_s)_{V_s=0}} \quad (\text{E.33})$$

E.7.3. Potencia en corriente alterna

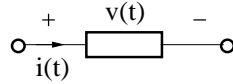


Figura E.27:

Supongamos, figura E.27, que una corriente $i(t)$ circula por un elemento pasivo provocando una caída de tensión $v(t)$. La energía $W(t)$ que, por unidad de tiempo, ceden las cargas $Q(t)$ que atraviesan al elemento será⁶

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt} v(t) = i(t) v(t) \quad (\text{E.34})$$

Sea

$$\left. \begin{array}{l} i(t) = I_0 \cos(\omega t) \\ v(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow P(t) = I_0 V_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$$

Teniendo en cuenta relaciones trigonométricas sencillas y definiendo $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, queda

$$P(t) = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos(2\omega t + \varphi) \quad (\text{E.35})$$

⁶cada carga individual q que atraviesa al elemento pierde una energía potencial $qv(t)$.

Observemos que la operación de calcular la potencia es no lineal, puesto que implica la multiplicación de dos variables, resultando la frecuencia multiplicada por dos.

Si calculamos el promedio temporal de $P(t)$, el segundo término, simétrico respecto del eje temporal, se anulará. Por tanto queda

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \varphi \quad (\text{E.36})$$

Esta expresión se conoce por el nombre vulgar de *ley del coseno de φ* y suele expresarse también en función de los valores eficaces de la tensión y la intensidad, definidos como

$$V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}} , \quad I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

En forma fasorial

$$I = I_0 , \quad V = V_0 e^{j\varphi}$$

con lo cual

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V I^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[I V^*] \quad (\text{E.37})$$

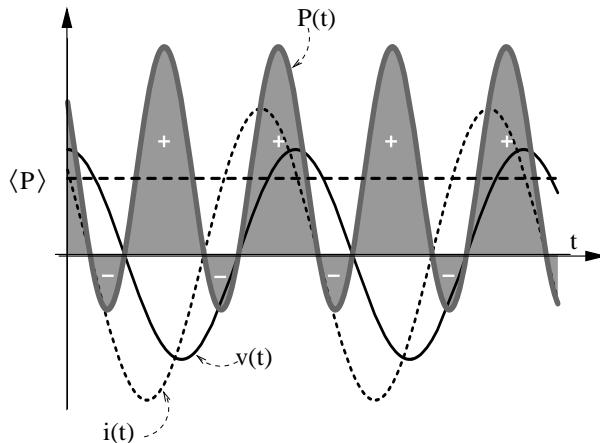


Figura E.28:

En la figura E.28 se representa a $P(t)$, $i(t)$ $v(t)$ en función de t . En ella se observa que, efectivamente, la frecuencia de oscilación de la potencia es doble que la de la tensión e intensidad y que $P(t)$ puede descomponerse en un término medio $\langle P(t) \rangle$ más otro variable de media nula. En general, la potencia será en parte positiva, las cargas ceden energía al elemento, y en parte negativa, las cargas toman energía del elemento. En el caso de los elementos pasivos, la parte positiva es siempre mayor o igual a la negativa.

Si $v(t)$ e $i(t)$ están en fase, $\varphi = 0$, toda la energía se disipa en el elemento, figura E.29, y la potencia media es

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} I_0 V_0$$

Esto corresponden a elementos disipativos que no almacenan energía, es decir, a la resistencia ideal.

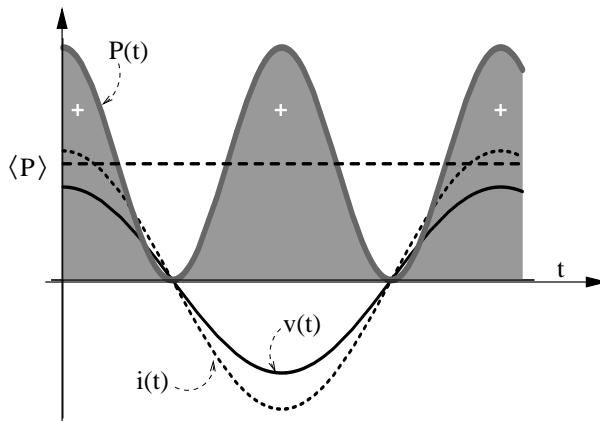


Figura E.29:

Cuando $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi = 0$ y

$$\langle P(t) \rangle = 0$$

En la figura E.30 se ve que la energía media es nula y toda la energía cedida al elemento es posteriormente recuperada por las cargas, por lo que la potencia media cedida es nula. Este es el caso de los elementos no disipativos, como la capacidad o la inducción ideales, que sólo pueden almacenar energía pero no disiparla.

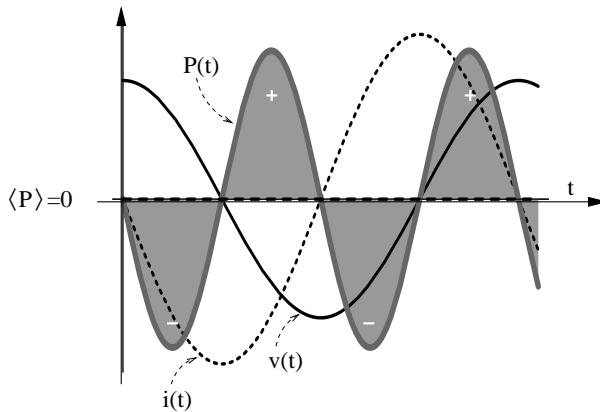


Figura E.30:

Concretando para elementos simples se tiene lo siguiente:

- Resistencia.

En una resistencia la intensidad y la tensión están en fase, de manera que

$$P(t) = \frac{1}{2} I_0 V_0 + \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos(2\omega t)$$

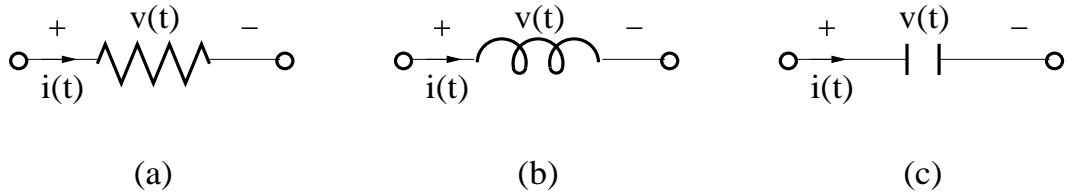


Figura E.31:

■ Condensador.

Como se ha visto en la representación fasorial, en un condensador, la tensión está retrasada $\frac{\pi}{2}$ respecto a la intensidad, con lo cual $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ y

$$P(t) = \frac{1}{2} I_0 V_0 \operatorname{sen}(2\omega t)$$

■ Autoinducción.

También vimos que en una autoinducción la tensión está adelantada en $\varphi = \frac{\pi}{2}$ respecto a la intensidad y, por lo tanto,

$$P(t) = -\frac{1}{2} I_0 V_0 \operatorname{sen}(2\omega t)$$

E.7.3.1. Teorema de la máxima transferencia de potencia

El teorema de Thevenin dice que cualquier circuito lineal, visto desde un par de terminales A y B , es equivalente a una fuente con una fuerza electromotriz \mathcal{E}_T e impedancia de salida Z_T .

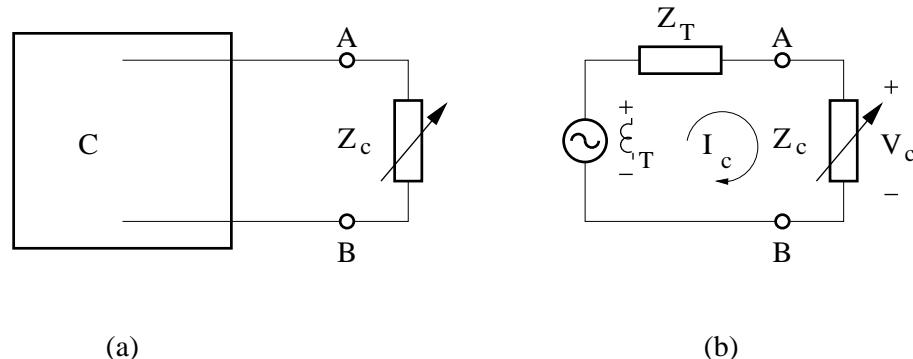


Figura E.32:

Supongamos, figura E.32, que entre A y B colocamos una impedancia de carga Z_c cuya magnitud podemos variar. La pregunta es: ¿qué relación ha de existir entre Z_T y Z_c para que la energía transferida por la fuente a la carga sea máxima?

Sea

$$Z_c = x e^{jy}, \quad Z_T = Z_{T0} e^{j\alpha}$$

La potencia media disipada en la carga es

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_c I_c^*]$$

donde

$$V_c = \frac{\mathcal{E}_t Z_c}{Z_T + Z_c}, \quad I_c = \frac{\mathcal{E}_t}{Z_T + Z_c} \Rightarrow I_c^* = \frac{\mathcal{E}_t^*}{Z_T^* + Z_c^*}$$

Substituyendo

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{|\mathcal{E}_t|^2}{|Z_T + Z_c|^2} \operatorname{Re}[Z_c]$$

Para obtener el valor máximo de $\langle P \rangle$, habrá que derivar respecto a x e y , e igualar a cero. Haciendo estas operaciones se obtiene

$$x = Z_{T0}, \quad y = -\alpha$$

de donde se deduce que, para que la carga consuma la máxima potencia,

$$(Z_c)_{max} = Z_T^* \quad (\text{E.38})$$

E.8. Estudio de los circuitos de primero y segundo orden

En los temas anteriores hemos revisado las características generales de la Teoría de Circuitos. En este nos detendremos en el estudio de los sistemas de primero y segundo orden que, naturalmente, al ser los más simples son también los más importantes.

Analizaremos, por vía de ejemplo, la respuesta transitoria y la estacionaria, para señales armónicas, de sistemas concretos.

E.8.1. Respuesta transitoria de sistemas lineales de primer orden

Estudiaremos los circuitos *serie RL* y *paralelo RC* y los *serie RC* y *paralelo RL*.

Circuitos serie RL y paralelo RC.

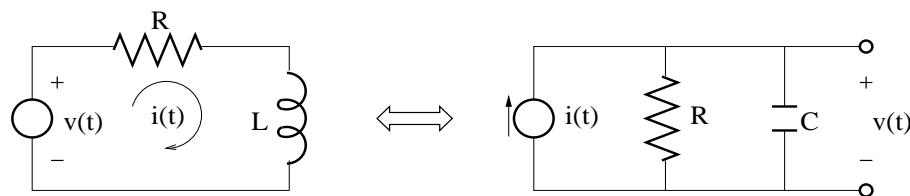


Figura E.33:

La figura E.33 representa a un circuito serie *RL* y su dual, el paralelo *RC*. Para el primero calcularemos la intensidad que circula por él, mientras que, para el segundo, calcularemos la caída de tensión $v(t)$. La dualidad se establece de la forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Serie} &\Leftrightarrow \text{Paralelo} \\
 v &\Leftrightarrow i \\
 L &\Leftrightarrow C \\
 R &\Leftrightarrow \frac{1}{R}
 \end{aligned}$$

Decimos que el segundo circuito es el dual del primero porque las ecuaciones diferenciales que los describen son análogas. Veámoslo:

1. Circuito serie.

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) \Rightarrow v(t) = i(t) R + L \frac{di(t)}{dt}$$

2. Circuito paralelo.

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) \Rightarrow i(t) = \frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt}$$

En virtud de esta analogía, podemos escribir una ecuación general para ambos circuitos

$$e(t) = x(t) + \tau \frac{dx(t)}{dt} \quad (\text{E.39})$$

donde τ recibe el nombre de *constante de tiempo del sistema*. $e(t)$, $x(t)$ y τ toman, en cada caso, los valores siguientes:

1. Circuito serie.

$$e(t) = \frac{v(t)}{R} , \quad x(t) = i(t) , \quad \tau = \frac{L}{R}$$

2. Circuito paralelo.

$$e(t) = i(t) R , \quad x(t) = v(t) , \quad \tau = R C$$

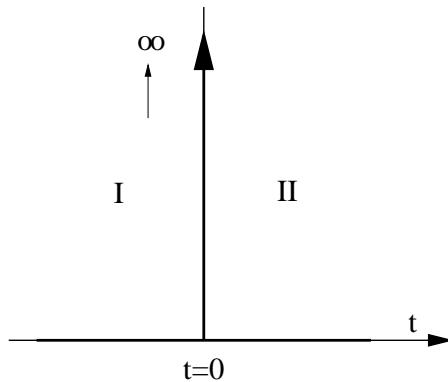


Figura E.34:

Empezaremos calculando la respuesta a un impulso en $t = 0$, como el que se muestra en la figura E.34. Para fijar ideas, consideremos al circuito serie y hagamos

$$v(t) = V_0 \tau \delta(t) \Rightarrow e(t) = E_0 \tau \delta(t), \quad E_0 = \frac{V_0}{R}$$

La respuesta del sistema a este tipo de entrada se llama *respuesta a un impulso* del sistema.

$$e(t) = x(t) + \tau \frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0 \\ \rightarrow \infty & \text{para } t \rightarrow 0 \end{cases}$$

En la región I la entrada $e(t) = 0$, por lo que tanto la autoinducción, en el primer circuito, como la capacidad, en el segundo, se encuentran en paralelo con una resistencia, la cual es un elemento que disipa energía. Cualquier energía que en $t \rightarrow \infty$ pudiera haber estado almacenada en forma de campo magnético (en L) o eléctrico (en C) ha sido disipada antes de cualquier instante cercano. Esto implica que

$$x(t < 0) = x_1(t) = 0$$

Para $t > 0$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow x = X_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

El valor de X_0 se determina relacionando los valores de $x(t)$ en el límite de las regiones I y II

$$x_{0+} \equiv \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} x(t) = X_0, \quad x_{0-} \equiv \lim_{t \rightarrow 0, t < 0} x(t) = 0$$

Integrando la ecuación diferencial E.39 desde $t = 0_-$ a $t = 0_+$

$$E_0 \tau \underbrace{\int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt}_{(a)=1} = E_0 \tau = \underbrace{\int_{0_-}^{0_+} x dt + \tau [x(0_+) - x(0_-)]}_{(b)=0} = \tau X_0 \Rightarrow X_0 = E_0$$

La integral $(b) = \underline{x} \Delta t = 0$, de acuerdo con el teorema integral del valor intermedio, ya que \underline{x} es un valor comprendido entre $x(0_-) = 0$ y $x(0_+) = X_0$ que se supone finito.

La solución

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

se representa en la figura E.35.

Busquemos ahora la solución de esta ecuación para una entrada que, como se muestra en la figura E.36, tiene forma de pulso.

Puesto que en esta entrada existen dos discontinuidades, en $t = 0$ y $t = t_1$, debemos resolver la ecuación diferencial encontrando soluciones generales para cada una de las tres regiones, I ($t < 0$), II ($0 \leq t \leq t_1$) y III ($t > t_1$) y conectarlas mediante condiciones de contorno adecuadas.

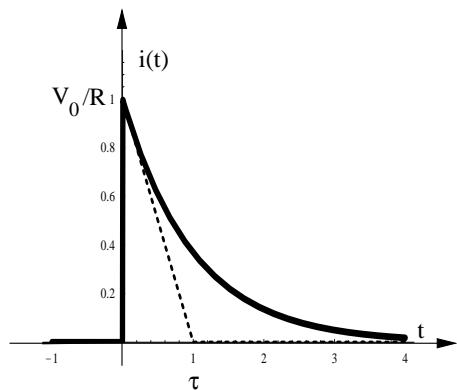


Figura E.35:

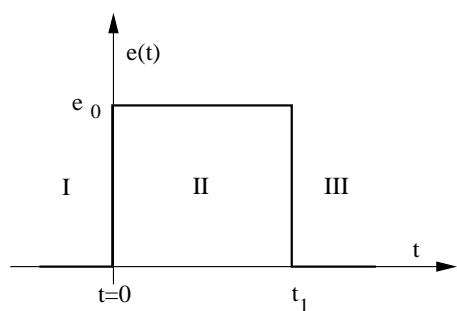


Figura E.36:

Las condiciones de contorno pueden establecerse por razonamientos físicos analizando los elementos del circuito capaces de almacenar energía, capacidades y autoinducciones, ya que son estos elementos los que están asociados a los operadores integrales o diferenciales.

En el circuito serie nos encontramos una autoinducción que forzará a la intensidad a tomar valores continuos ya que cualquier discontinuidad en la misma daría lugar a una caída de tensión infinita. De la misma forma, el condensador del circuito paralelo fuerza la continuidad de la tensión de salida, puesto que, para producir un salto brusco de esta tensión, haría falta una intensidad infinita. En ambos casos tendremos la condición de contorno: $x(t) = \text{continua}$. Consideré que, sin embargo, la respuesta a un impulso es discontinua en $t = 0$; esta respuesta se debe a una entrada de amplitud infinita lo que en la práctica sólo puede tomarse como idealización de un pulso alto y estrecho.

Podemos ahora analizar cuantitativamente el comportamiento de estos circuitos:

En la región I la entrada $e(t) = 0$, por lo que, como en el problema anterior,

$$x_1(t) = 0$$

En $t = 0_+$ ($t \rightarrow 0$, $t > 0$), $e(t)$ da un salto brusco de amplitud e_0 que, dada la continuidad de $x(t)$, no podrá aparecer como un salto brusco de esta variable. En el circuito serie, todo el salto de tensión aparecerá sobre la autoinducción L , con lo que

$$x(0_+) = 0 , \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_{0_+} = \frac{e_0}{\tau}$$

es decir, al principio de la región II $x(t)$ empieza a crecer desde el valor cero con una pendiente $\frac{e_0}{\tau}$. Conforme transcurre el tiempo $x(t)$ y la velocidad de crecimiento

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} (e_0 - x(t)) < \left(\frac{dx}{dt} \right)_{0_+}$$

se irán haciendo cada vez menores, terminando el proceso cuando $x(t) = e_0$.

Realmente, aunque $x(t) \rightarrow e_0$, dada la entrada propuesta, no se alcanza este límite porque para $t > t_1$ $e(t) = 0$ y la velocidad de variación de $x(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{x(t)}{\tau} < 0$$

se hace negativa, por lo que $x(t)$ empezará ahora a decrecer, cada vez más lentamente, hasta que $x(t) = 0$, para $t = \infty$.

Analizada cualitativamente la respuesta de estos circuitos pasaremos a la resolución de la ecuación diferencial correspondiente al primer circuito.

$$\frac{v(t)}{R} = i(t) + \tau \frac{di(t)}{dt}$$

La solución general de esta ecuación, i_g , puede expresarse como la suma de la solución general de la homogénea, i_{gh} más una solución particular de la completa, i_p .

$$i_g(t) = i_{gh}(t) + i_p(t)$$

La homogénea, $i + \tau \frac{di}{dt} = 0$, admite una solución de la forma

$$i_{gh}(t) = A e^{bt}$$

donde b es solución de la *ecuación característica*. Esta se obtiene substituyendo la solución en la ecuación diferencial y teniendo en cuenta que $A e^{bt} \neq 0$. Luego

$$\tau b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{\tau}$$

Por tanto:

$$i_{gh}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La solución general de la ecuación homogénea tiene la forma de un decrecimiento exponencial.

Busquemos ahora una solución particular de la ecuación completa.

Para $0 < t < t_1$ la ecuación tiene la forma

$$\frac{V_0}{R} = i(t) + \tau \frac{di(t)}{dt}$$

Probemos como solución particular $i_p = cte$. Por sustitución se comprueba que $i_p = \frac{V_0}{R}$. La solución general de la ecuación completa será

$$i_g(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_0}{R}$$

Para hallar la solución concreta $i_2(t)$ en la zona II , será necesario determinar el valor de la constante A , lo cual se logra aplicando la condición de continuidad de la intensidad ($x(t) = i(t)$) que se ha razonado anteriormente:

$$i_1(0_+) = i_2(0_-) \equiv \lim_{t \rightarrow 0^+, t > 0} i_2(t) \Rightarrow A = -\frac{V_0}{R}$$

por lo que

$$i_2(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

La solución en esta zona tiende a $\frac{V_0}{R}$. En un instante determinado $i(t)$ difiere de dicho límite en una cantidad

$$\Delta = i(\infty) - i(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dicha diferencia, según puede verse en la figura E.37, es del orden del 5% para $t \simeq 3\tau$ y del 1% para $t \simeq 5\tau$.

En la zona III ($t > t_1$), la ecuación tiene la forma

$$0 = i(t) + \tau \frac{di(t)}{dt}$$

cuya solución es del tipo

$$i_3(t) = A' e^{-\frac{t}{\tau}}$$

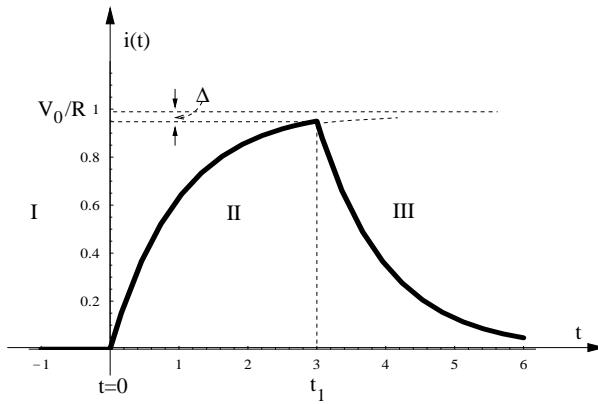


Figura E.37:

Aplicando la condición de continuidad en $t = t_1$

$$i_2(t_1) = i_3(t_1) \Rightarrow A' = \frac{V_0}{R} \left(e^{-\frac{t_1}{\tau}} - 1 \right)$$

e

$$i_3 = \frac{V_0}{R} \left(e^{-\frac{t_1}{\tau}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La figura E.37 muestra gráficamente el resultado.

De lo anterior resulta que, una vez pasado el transitorio, para $t \gg \tau$, la autoinducción no presenta resistencia al paso de la corriente. Esto concuerda con la expresión de la impedancia, $Z_L = j\omega L$, porque para una tensión constante, lo que corresponde a una frecuencia nula, $\omega = 0 \Rightarrow Z_L = 0$.

En la figura E.38 se representa la caída de tensión en R y en L .

$$v_R(t) = \begin{cases} V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) & \text{para } 0 < t < t_1 \\ V_0 \left(e^{-\frac{t_1}{\tau}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{para } t > t_1 \end{cases}$$

$$v_L(t) = \begin{cases} V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{para } 0 < t < t_1 \\ -V_0 \left(e^{-\frac{t_1}{\tau}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{para } t > t_1 \end{cases}$$

En el circuito paralelo RC , la solución es

$$v(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Circuitos serie RC y paralelo RL .

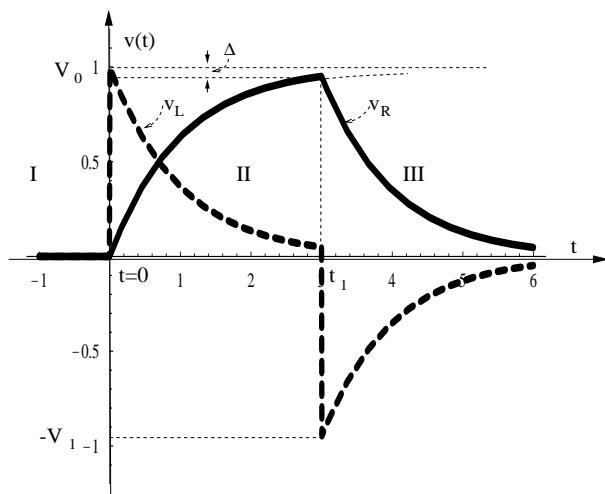


Figura E.38:

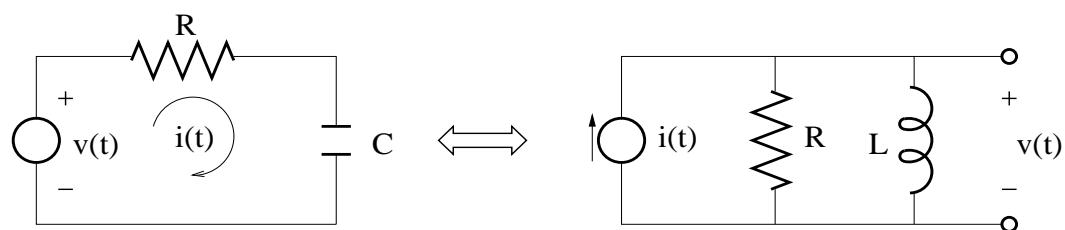


Figura E.39:

Se trata, como en el caso anterior, de dos circuitos duales. Tomaremos como referencia al primer circuito, en el que la intensidad cumple la siguiente ecuación

$$\frac{v(t)}{R} = i(t) + \frac{1}{RC} \int_0^t i dt + \frac{V_{0C}}{R}$$

V_{0C} es el valor inicial $V_C(0)$ de la caída de tensión del condensador. Esta ecuación tiene la forma

$$e(t) = x(t) + \frac{1}{\tau} \int_0^t x dt + K_0$$

aplicable a ambos circuitos. En este caso

$$e(t) = \frac{v(t)}{R} , \quad x(t) = i(t) , \quad \tau = RC , \quad K_0 = \frac{V_{0C}}{R}$$

Derivando la ecuación anterior y multiplicando por τ , se tiene que

$$\tau \frac{de(t)}{dt} = \tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Si tomamos la misma entrada del problema anterior, habrá que resolver la ecuación en las tres regiones, figura E.40-a.

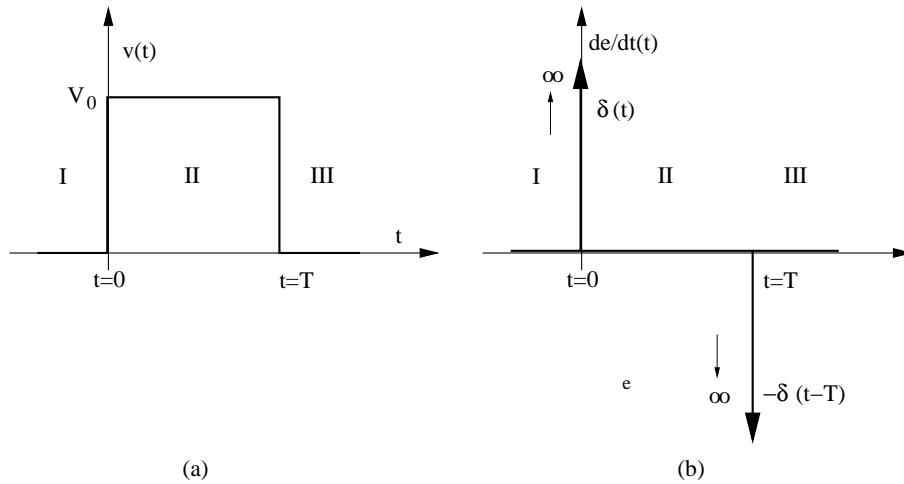


Figura E.40:

En todas las regiones el término independiente $\frac{de(t)}{dt} = 0$, salvo en las fronteras, en las que es singular. Efectivamente, como se muestra en la figura E.40-b,

$$\frac{dv_e(t)}{dt} = V_0 \{\delta(t) - \delta(t - T)\}$$

Luego las soluciones en el interior de dichas regiones son del tipo

$$x_1 = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} , \quad x_2 = A_2 e^{-\frac{t}{\tau}} , \quad x_3 = A_3 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Por razones ya expuestas en el apartado anterior $A_1 = 0 \Rightarrow x_1(t) = 0$. Debemos, por lo tanto, determinar A_2 y A_3 fijando condiciones de contorno adecuadas en $t = 0$ y $t = T$.

Puesto que el sistema es de primer orden, sólo necesitamos una condición de contorno en cada uno de estos puntos. Una forma de implementar estas condiciones es la siguiente:

En el primer circuito, cualquier discontinuidad ΔV en la tensión de entrada debe aparecer necesariamente a través de la resistencia puesto que, como hemos visto, la tensión a través del condensador es necesariamente continua. En el segundo, la intensidad que circula por la autoinducción es continua, por lo que cualquier salto brusco de intensidad ΔI debe aparecer en la resistencia.

Volviendo al primer circuito

$$\text{para } t = 0 \quad , \quad \Delta v = +V_0 \quad , \quad \Delta x = \Delta i = i_2(0) - i_1(0) = \frac{V_0}{R}$$

$$\text{para } t = T \quad , \quad \Delta v = -V_0 \quad , \quad \Delta x = i_3(T) - i_2(T) = -\frac{V_0}{R}$$

Dado que $i_1(0) = 0$

$$i_2(0) = \frac{V_0}{R} = A_2$$

de lo que se deduce que

$$i_2(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , \quad i_3(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

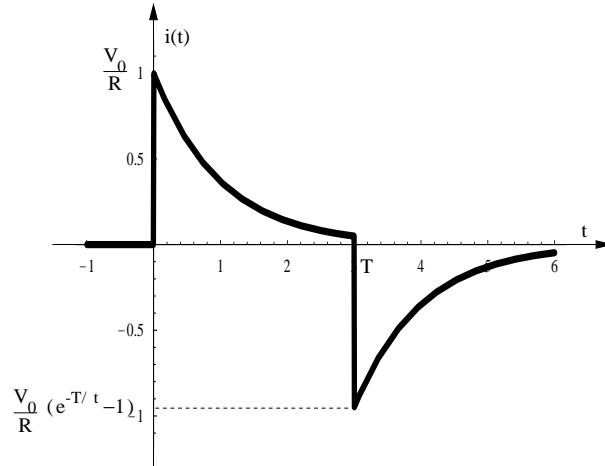


Figura E.41:

La figura E.41 representa a este resultado.

E.8.2. Respuesta en frecuencia de los circuitos de primer orden

En este apartado tomaremos como ejemplo los filtros de paso alta y de paso baja.

Filtros de paso alta; diferenciadores de baja frecuencia.

En la figura E.42 se representan dos circuitos de este tipo.

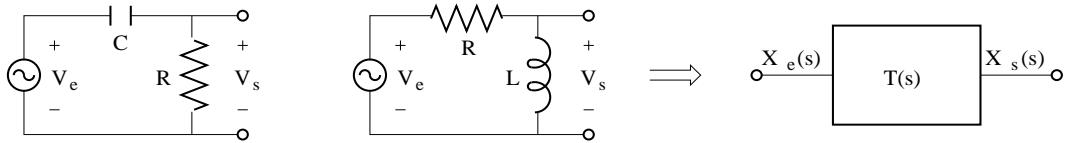


Figura E.42:

Podemos representar los circuitos por un bloque cuya función de transferencia $T(s) = T(j\omega) = T(\omega)$ describe la respuesta en frecuencia del sistema, es decir, la relación entre su entrada $X_e(s)$ y su salida $X_s(s)$. Esta es una función racional compleja definida como la razón entre los fasores que representan respectivamente a la señal de salida y a la de entrada.

$$T(s) = \frac{X_s(s)}{X_e(s)}$$

En nuestro problema

$$T(s) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Para el primer circuito

$$T(s) = \frac{R}{\frac{1}{C s} + R} = \frac{R C s}{1 + R C s} = \frac{\tau_1 s}{1 + \tau_1 s} , \quad \tau_1 = R C$$

Para el segundo

$$T(s) = \frac{\tau_2 s}{1 + \tau_2 s} , \quad \tau_2 = \frac{L}{R}$$

En definitiva, la función de transferencia de estos circuitos es

$$T(s) = \frac{\tau s}{1 + \tau s}$$

Obtenemos, por tanto, una función que tiene un cero simple en $s = 0$ y un polo simple en $s = -\frac{1}{\tau}$.

Otras formas de escribir la función son

$$T(s) = \frac{j \omega \tau}{1 + j \omega \tau} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

donde $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ es la *frecuencia de corte*, para la cual $|T| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por último, introduciendo una frecuencia normalizada $u \equiv \frac{\omega}{\omega_c}$ tenemos

$$T(s) = \frac{j u}{1 + j u} = \sqrt{\frac{u^2}{1 + u^2}}, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2} - \operatorname{artg} u}$$

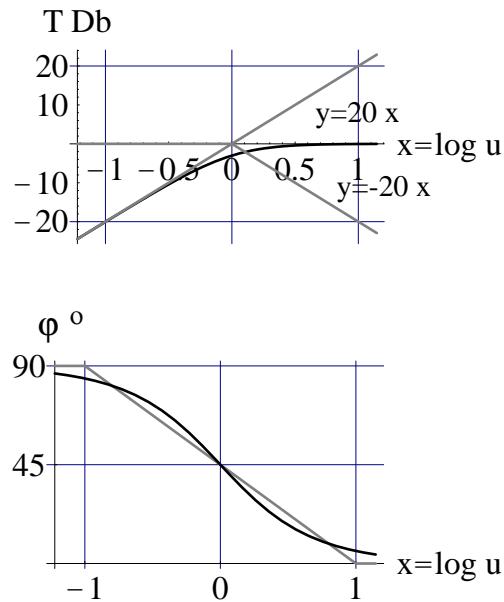


Figura E.43:

En la figura E.43 se representa el diagrama de Bode⁷ de esta función de transferencia, el cual describe la respuesta en frecuencia de los circuitos.

Vemos que el circuito atenúa las frecuencias bajas y deja intactas a las altas que se transfieren sin atenuación ni desfase.

Estos circuitos, como el *RL* de la figura E.44, actúan como diferenciadores a baja frecuencia.

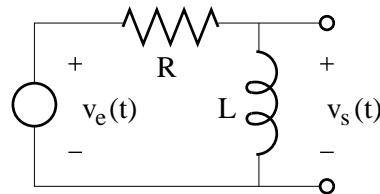


Figura E.44:

Supongamos que

$$|i| \ll |\tau \frac{di}{dt}| \Rightarrow |V_R| \gg |V_L|$$

Si tomamos para i la forma senoidal $i = I_0 \cos \omega t$, la condición anterior se concreta en

$$\frac{di}{dt} = -I_0 \omega \sin \omega t \Rightarrow I_0 \gg I_0 \omega \tau \Rightarrow \omega \ll \omega_c$$

⁷Véase el apéndice G.

por lo que el circuito actúa como un diferenciador en la zona de bajas frecuencias. Supuesto que el espectro de $v_e(t)$ está limitado por una frecuencia superior ω_{max} , por encima de la cual el espectro sea despreciable y tal que $\omega_{max} \ll \omega_c$,

$$i(t) \simeq \frac{v_e(t)}{R} \Rightarrow v_s(t) \simeq \tau \frac{d v_e(t)}{dt}$$

Filtros de paso baja; integradores de alta frecuencia.

Análogamente, circuitos, como los dos equivalentes de la figura E.45, nos filtran las frecuencias bajas.

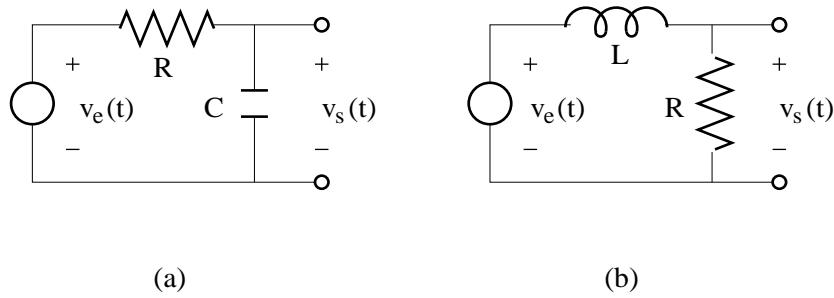


Figura E.45:

Para el circuito RC

$$V_s = V_e \frac{1}{1 + j u}, \quad u = \frac{\omega}{\omega_c}, \quad \tau = RC \Rightarrow$$

$$T(u) = \frac{1}{1 + j u} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad / \arg u$$

El diagrama de bode correspondiente viene dado en la figura E.46.

Estos circuitos, al contrario que los anteriores, dejan inalteradas a las frecuencias bajas mientras que atenúan y desfasan a las altas. De ahí su nombre de filtros de paso baja. También se les llama *integradores de alta frecuencia*, puesto que integran a una señal de entrada $v_e(t)$ cuyo contenido espectral por debajo de una frecuencia ω_{min} sea despreciable y tal que $\omega_{min} \gg \omega_c$. Efectivamente

$$v_s = v_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

$$v_e = i R + v_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \Rightarrow$$

$$\frac{v_e - v_{C0}}{R} = i + \frac{1}{\tau} \int_0^t i(t) dt$$

Tomando señales armónicas

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= I_0 \cos \omega t \\ \int i(t) dt &= \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega \gg \omega_c \Rightarrow$$

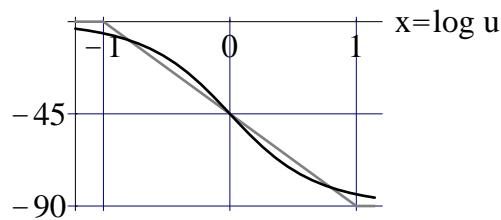
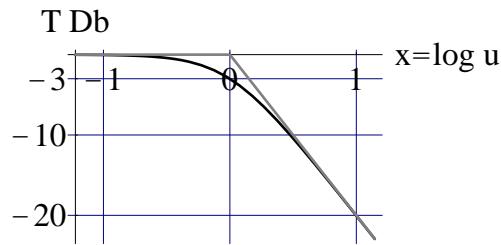


Figura E.46:

$$v_s(t) = v_{C0} + \frac{1}{\tau} \int_0^t (v_e - v_{C0}) dt$$

E.8.3. Transitorios en circuitos de segundo orden

Como ejemplos de circuitos de segundo orden, analizaremos a los *serie RLC* y *paralelo RLC* de la figura E.47.

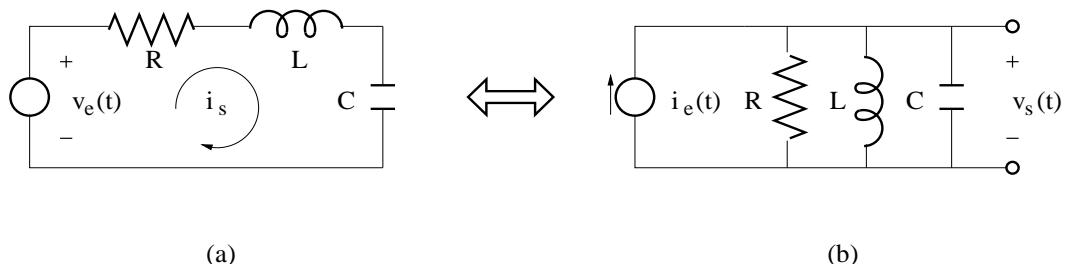


Figura E.47:

Estos circuitos son duales, como se comprueba aplicando las reglas enumeradas anteriormente.

Ecuaciones de los circuitos.

La ecuación del primer circuito es

$$v_e(t) = i_s(t) R + L \frac{di_s(t)}{dt} + v_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i_s(t) dt$$

y para el segundo

$$i_e(t) = \frac{v_s(t)}{R} + C \frac{dv_s(t)}{dt} + i_{L0} + \frac{1}{L} \int_0^t v_s(t) dt$$

Como es fácil comprobar, estas dos ecuaciones son análogas y podemos expresarlas de forma general mediante la ecuación

$$e(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2\delta\omega_0 x(t) + \omega_0^2 \int_0^t x(t) dt + K$$

donde ω_0 es la *frecuencia de resonancia* y δ , magnitud adimensional, la *razón de amortiguamiento*. Para uno y otro circuito

$$e(t) = \begin{cases} \frac{v_e(t)}{L} & , \text{ circuito serie} \\ \frac{i_e(t)}{C} & , \text{ circuito paralelo} \end{cases}, \quad x(t) = \begin{cases} i_s(t) & , \text{ circuito serie} \\ v_s(t) & , \text{ circuito paralelo} \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \delta \equiv \frac{1}{2Q} = \begin{cases} \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} & , \text{ circuito serie} \\ \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} & , \text{ circuito paralelo} \end{cases}$$

Q es el llamado *factor de calidad* o *factor Q* del circuito.

Si derivamos la ecuación general obtenemos

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\delta\omega_0 \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) \quad (\text{E.40})$$

donde el segundo término del segundo miembro representa al efecto disipativo y el tercero al resonante.

Solución general.

Si, por ejemplo, tomamos para el primer circuito una entrada

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{V_0}{L} \delta(t)$$

Salvo en el origen del tiempo, $\frac{de}{dt} = 0$ y se cumple la ecuación homogénea

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\delta\omega_0 \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (\text{E.41})$$

Su ecuación característica es

$$b^2 + 2\delta\omega_0 b + \omega_0^2 = 0$$

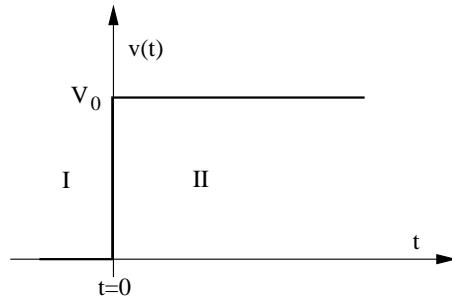


Figura E.48:

cuyas raíces son

$$\begin{aligned} b_1 &= -\delta \omega_0 + \omega_0 \sqrt{\delta^2 - 1} \\ b_2 &= -\delta \omega_0 - \omega_0 \sqrt{\delta^2 - 1} \end{aligned} \quad (\text{E.42})$$

La figura E.49 describe la evolución de las raíces en el plano complejo al variar continuamente el valor de δ .

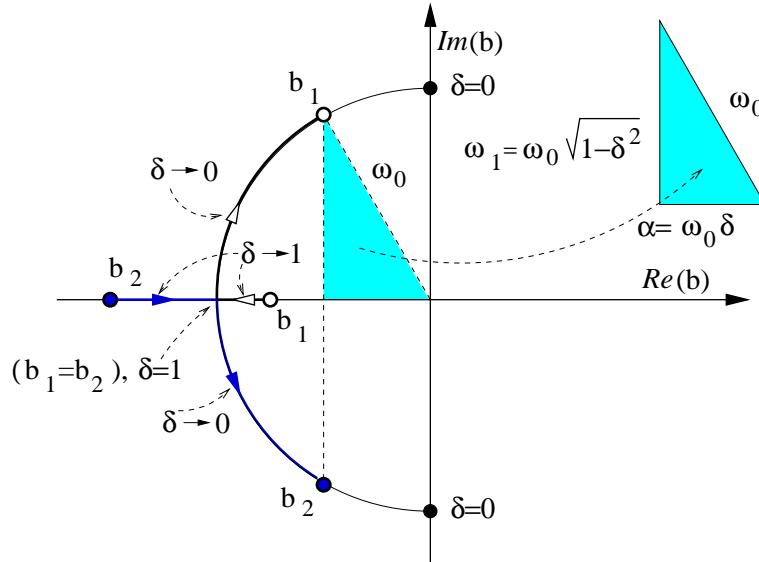


Figura E.49:

Para valores $\delta > 1$, ambas raíces son reales, $b_1 < 1$ y $b_2 > 1$. Conforme δ disminuye, éstas migran a lo largo del eje real hasta unirse cuando $\delta = 1$. A partir de este punto, ambas raíces se separan, a lo largo del círculo de radio ω_0 , manteniendo una relación de conjugación compleja, y la evolución termina cuando $\delta = 0$, en cuyo caso ocupan posiciones simétricas en el eje imaginario.

Según el caso, la solución general en las regiones I II, excluido el origen, es:

- Si $b_1 \neq b_2$

$$x_g(t) = A_1 e^{b_1 t} + A_2 e^{b_2 t} \quad (\text{E.43})$$

- Si, por el contrario, ambas raíces degeneran en una sola ($b_1 = b_2 = b$) es necesario buscar otra solución linealmente independiente. Esta es $t e^{bt}$, con lo que

$$x_g(t) = A_1 e^{bt} + A_2 t e^{bt} \quad (\text{E.44})$$

Condiciones de iniciales. Solución en cada uno de los casos.

Puesto que el sistema es de segundo orden, necesitamos dos condiciones de contorno para unir las soluciones en *I* y *II*. Estas condiciones se deducen de la magnitud finita de la caída de tensión en la autoinducción y de la intensidad que carga al condensador. La primera condición implica la continuidad de la intensidad y la segunda la continuidad de $v_c(t)$.

La primera condición se traduce en la continuidad de $x(t)$

$$x(0_+) = x(0_-)$$

Para $t < 0$, por las razones ya expuestas en la sección anterior, $x_1(t) = 0$, por lo que

$$x_2(0_+) = 0 \quad (\text{E.45})$$

La segunda implica que las posibles discontinuidades de la tensión de entrada sólo pueden aparecer en la resistencia o en la autoinducción

$$v_e = v_R + v_L + v_C \quad , \quad \Delta v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta v_e = \Delta v_R + \Delta v_L$$

Sin embargo,

$$\Delta i = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta v_R = R \Delta i = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta v_e = \Delta v_L$$

Siguiendo con el primer circuito, en $t = 0$

$$\Delta v_e = v_e(0_+) - v_e(0_-) = V_0 = L \left(\frac{di}{dt} \right)_{0_+}$$

lo que se traduce en la condición

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{0_+} = E_0 = \frac{V_0}{L} \quad (\text{E.46})$$

De la condición E.45 y de E.43 se deduce que, para $b_1 \neq b_2$

$$A_1 = -A_2 = A$$

y para $b_1 = b_2$, E.44,

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = A$$

y de E.46

$$A = \frac{E_0}{b_1 - b_2} \quad \text{para } b_1 \neq b_2$$

$$A = E_0 \quad \text{para } b_1 = b_2$$

La solución para $t > 0$ es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{E_0}{b_1 - b_2} (e^{b_1 t} - e^{b_2 t}) \quad \text{para } b_1 \neq b_2 \\ x(t) &= E_0 t e^{b t} \quad \text{para } b_1 = b_2 \end{aligned} \tag{E.47}$$

Podemos, pues, distinguir tres casos según el valor de δ :

1. *Sistema sobreamortiguado.* $\delta > 1$.

Las raíces son reales y distintas, $b_1, b_2 < 0$, $|b_1| < \omega_0 < |b_2|$. Empleando la notación $\tau \equiv -\frac{1}{b}$, la solución toma la forma

$$x = A \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) = \frac{E_0}{\omega_0 \sqrt{\delta^2 - 1}} e^{-\omega_0 \delta t} \operatorname{senh} \left(\omega_0 \sqrt{\delta^2 - 1} t \right)$$

2. *Sistema críticamente amortiguado.* $\delta = 1$.

Las raíces son iguales; caso degenerado. Ahora $b_1 = b_2 = -\omega_0$. Anotando $\tau_0 \equiv \frac{1}{\omega_0}$, la solución general debe escribirse como

$$x = A t e^{-\frac{t}{\tau_0}} = E_0 t e^{-\omega_0 t}$$

En la figura E.50 se representan las respuestas en los casos anteriores. La del sistema críticamente amortiguado es la que más rápidamente tiende a cero sin oscilar.

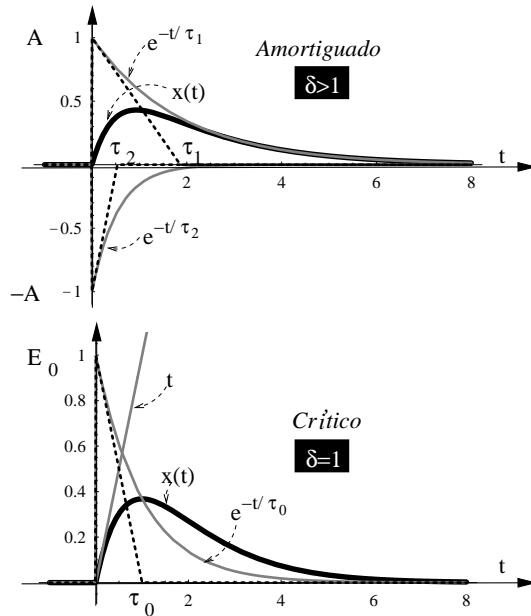


Figura E.50:

3. *Sistema débilmente amortiguado . $\delta < 1$.*

En este caso las raíces son complejas, conjugadas una de otra ($b_1 = b_2^*$), y pueden escribirse de la forma

$$b_1 = -\alpha + j\omega_1$$

$$b_2 = -\alpha - j\omega_1$$

donde

$$\alpha = \delta \omega_0 , \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \delta^2}$$

Nótese que, como se indicó en el comentario de la figura E.49

$$|b_1| = |b_2| = \omega_0$$

La caída de tensión en la resistencia del circuito serie es

$$v_R(t) = i(t) R = x(t) R = V_0 \frac{2\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t$$

Para la capacidad y la autoinducción

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_o^t i(t) dt , \quad v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

luego

$$\left. \begin{aligned} v_L(t) &= -\frac{V_0}{\sqrt{1 - \delta^2}} e^{-\alpha t} \sin (\omega_1 t - \varphi) \\ v_C(t) &= V_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} e^{-\alpha t} \sin (\omega_1 t + \varphi) \right] \end{aligned} \right\} , \quad \varphi = \operatorname{artg} \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta}$$

Como se observa en las figuras E.51, la caída de tensión máxima entre dos puntos del circuito puede sobrepasar al valor de pico de la excitación.

En el caso de la respuesta a una entrada escalón, para sistemas análogos al propuesto, es conveniente definir un parámetro que nos mida este exceso.

Se define el *sobredisparo*

como

$$s_0 \equiv \frac{V_{max} - V_0}{V_0}$$

y se puede demostrar que

$$s_0 = e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}}$$

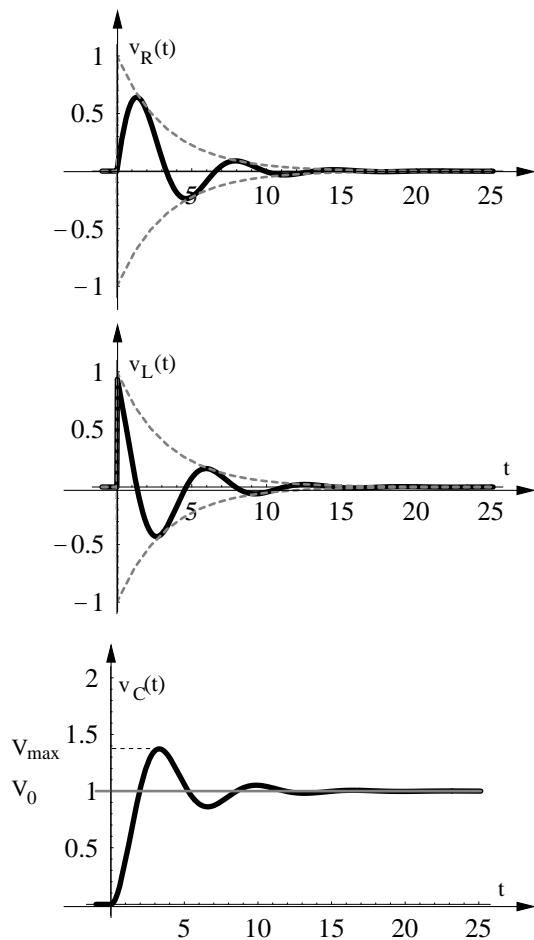


Figura E.51:

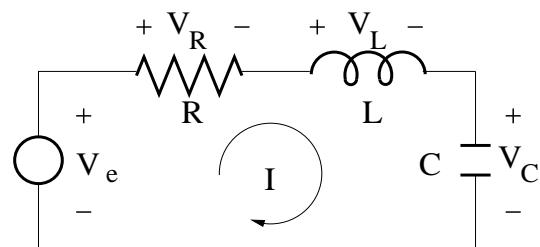


Figura E.52:

E.8.4. Respuesta en frecuencia de sistemas de segundo orden

Analizaremos la respuesta en frecuencia del circuito serie RLC , representado en la figura E.52.

La función de transferencia para la tensión en la resistencia puede expresarse de la forma

$$T_R(s) = \frac{V_R}{V_e} = \frac{2\delta \frac{s}{\omega_0}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\delta \frac{s}{\omega_0} + 1}$$

Esta función tiene, por lo tanto, un cero en $s = 0$ y dos polos. En función de la frecuencia normalizada $u \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$

$$T_R(u) = \frac{2\delta ju}{1 - u^2 + 2\delta ju} = \frac{2\delta u}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (2\delta u)^2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - \operatorname{artg} \frac{2\delta u}{1 - u^2}}$$

Otra expresión útil es en función de $Q = \frac{1}{2\delta}$

$$T_R(u) = \frac{1}{\sqrt{Q^2 (\frac{1}{u} - u)^2 + 1}}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - \operatorname{artg} \frac{u}{Q(1 - u^2)}}$$

De esta última expresión se deduce que $|T_R(u)|$ tiene un máximo para la frecuencia de resonancia $u = 1$ ($\omega = \omega_0$), la cual corresponde con un máximo de la intensidad, y de V_R , y un mínimo de la impedancia serie ($Z_{min} = Z_R$), tal y como puede verse en la figura E.53.

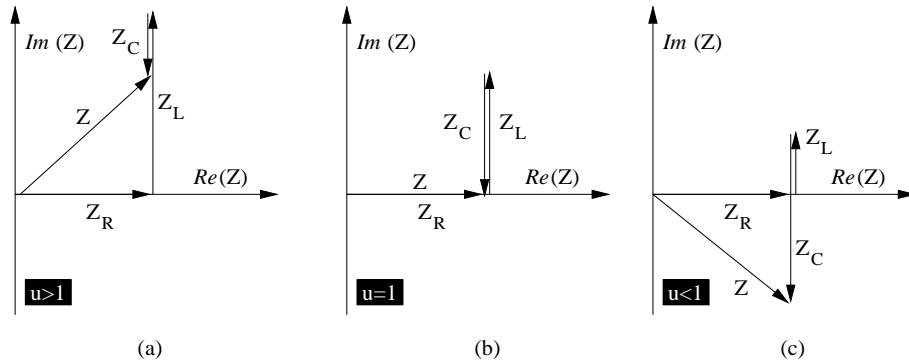


Figura E.53:

Aún podemos dar otra expresión normalizada de la función de transferencia en función de $\Delta \equiv \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = u - 1$

$$T_R(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + [Q\Delta (\frac{\Delta+2}{\Delta+1})]^2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + \operatorname{artg} \frac{\Delta+1}{Q\Delta(\Delta+2)}}$$

Para pequeñas desviaciones de la resonancia ($\Delta \ll 1$)

$$T_R(u) \simeq \frac{1}{\sqrt{1 + (2Q\Delta)^2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + \operatorname{artg} \frac{1}{2Q\Delta}}$$

Finalmente, cambiando la notación $x = 2Q\Delta$, obtenemos las expresiones simétricas respecto al punto $x = 0$

$$T_R(u) \simeq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2} + \operatorname{artg} \frac{1}{x}}$$

que describe adecuadamente el comportamiento del sistema para frecuencias próximas a la de resonancia. Estas funciones están representadas en la figura E.54.

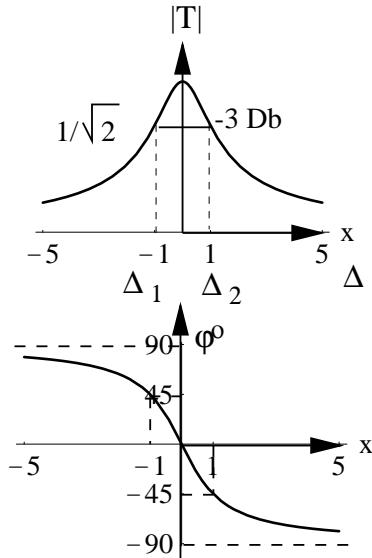


Figura E.54:

Se define la *frecuencia de corte a 3 Db*, como aquella para la cual T_R cae 3 Db por debajo de su valor resonante, es decir, para $x = 1$.

$$\Delta_1 = -\frac{1}{2Q} = -\delta, \quad \Delta_2 = \delta$$

y la *anchura de banda* como

$$B \equiv f_2 - f_1 = 2(f_2 - f_0) = 2\delta f_0 = \frac{f_0}{Q} \quad (\text{E.48})$$

Vemos, pues, que el ancho de banda del circuito es inversamente proporcional al factor de calidad del mismo.

En la figura E.55 se representa el diagrama de Bode de $T_R(u)$. La curva resultante es simétrica respecto a ω_0 .

La función de transferencia para el condensador es

$$T_C(u) = \frac{1}{1 - u^2 + 2\delta ju} = \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (2\delta u)^2}}, \quad \sqrt{-\operatorname{artg} \frac{2\delta u}{1 - u^2}}$$

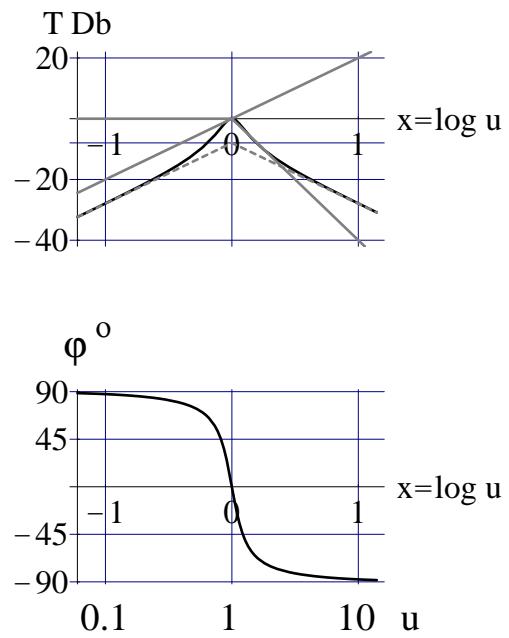


Figura E.55:

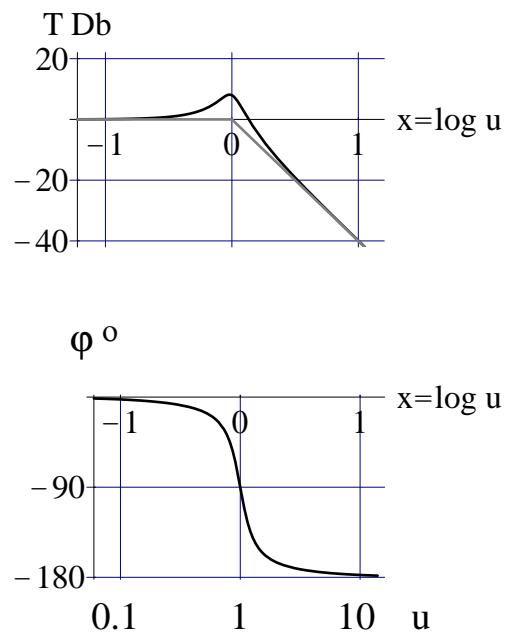


Figura E.56:

El diagrama de Bode correspondiente se muestra en la figura E.56
Por último, la función de transferencia para la autoinducción es

$$T_L(u) = \frac{-u^2}{1 - u^2 + 2\delta j u} = \frac{u^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (2\delta u)^2}}, \quad \pi - \text{artg} \frac{2\delta u}{1 - u^2}$$

El diagrama de Bode correspondiente viene dado por la figura E.57

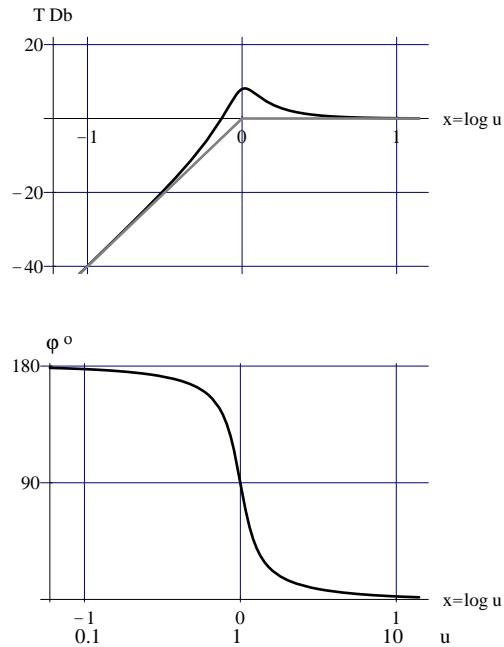


Figura E.57:

E.9. Problemas

e-1. Represente en el plano complejo los siguientes números complejos. Exprese cada uno de ellos en forma polar, exponencial y trigonométrica:

$$\begin{aligned} z &= 2 - 2j \quad , \quad z = 3 + 8j \quad , \quad z = -5 + 3j \quad , \quad z = -4 - 4j \\ z &= 5 \quad , \quad z = 6j \quad , \quad z = -4 \quad , \quad z = -5j \end{aligned}$$

e-2. Escriba en forma $R + jI$ los siguientes números complejos:

$$z = 15 e^{j\pi/4} \quad , \quad z = 5 e^{2j\pi/3} \quad , \quad z = -18 e^{3j\pi/2}$$

e-3. Efectue la operación que se indica:

- a) $z = 3 - 4j$. Halle zz^* (z^* es el complejo conjugado de z).
- b) $z = 20 / \underline{53^\circ}$. Halle $z + z^*$.
- c) $z = 10 / \underline{-40^\circ}$. Halle zz^* .
- d) $z = 2,5 e^{-j\pi/3}$. Halle zz^* .
- e) $z = r / \theta$. Halle z/z^* .

e-4. Halle las raíces que se indican de los siguientes números complejos:

$$z = (1)^{\frac{1}{4}} \quad , \quad z = (5 - 8j)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad z = (150 / \underline{-60^\circ})^{\frac{1}{2}} \quad , \quad z = (27 e^{-3j\pi/2})^{\frac{1}{3}}$$

e-5. Lleve a cabo las siguientes operaciones entre números complejos:

$$z = (-5 + 5j) - (7,07 / \underline{135^\circ}) \quad , \quad z = (3 - 2j)(1 - 4j) \quad , \quad z = \frac{(5 + 5j)}{(1 - j)}$$

e-6. Considere un dinamómetro, consistente en un muelle ideal con fricción, que cuelga de un punto fijo P . Halle:

- a) El circuito mecánico equivalente cuando de él cuelga una masa M ⁸.
- b) Un circuito eléctrico que responda a la misma ecuación diferencial.

e-7. En un medio viscoso se suelta una masa M cuya constante de fricción con el medio es ν . Halle:

- a) La velocidad de caída.
- b) Un fenómeno eléctrico análogo.

Solución:

Supuesto que la masa se suelta en $t = 0$, la fuerza, tal y como se indica en la figura E.58b, es una función escalón $F(t) = Mg u(t)$. Tomando el eje

⁸En los circuitos mecánicos lineales, la fricción es representada por el amortiguador, un elemento de dos terminales, $x = 0$ y $x = x$, tal que $F(x) = -f v_x(x)$

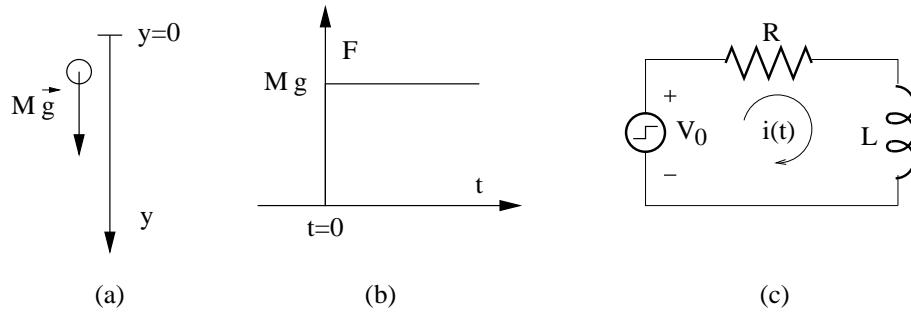


Figura E.58:

y como se indica en la figura E.58a, la ecuación del movimiento queda de la forma

$$F = Mg - \nu v = M \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = g, \quad \tau \equiv \frac{M}{\nu}$$

La solución requiere la aplicación de la condición de contorno $v(0_+) = v(0_-)$ puesto que la fuerza aplicada es finita. Sumando la solución general de la ecuación homogénea con una particular y aplicando la condición inicial, se tiene que

$$v(t) = v_{lim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

siendo $v_{lim} = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ la velocidad límite de caída en un fluido viscoso.

Este problema tiene su análogo en el del circuito serie RL , alimentado por un escalón de tensión, mostrado en la figura E.58c

e-8. Para cada uno de los elementos o asociación de elementos de la figura E.59:

- Determine su impedancia.
- Calcule las tensiones e intensidades indicadas cuando $i(t) = I_0 \cos \omega t$. Representelas gráficamente.
- Concrete los resultados del apartado anterior para el caso en que $I_0 = 1 \text{ A}$, $\nu = 1 \text{ KHz}$, $R = 1 \text{ K}\Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ y $C = 1 \mu\text{F}$.

e-9. La diferencia de potencial aplicada a la asociación RLC en paralelo de la figura E.60 es $v(t) = V_0 \sin \omega t$. Halle la intensidad de corriente que circula por cada rama así como la intensidad total i .

e-10. Dados los circuitos de la figura E.61, halle:

- El diagrama de fasores para las frecuencias, $f_1 = 20 \text{ KHz}$, $f_2 = 100 \text{ KHz}$, $f_3 = 500 \text{ KHz}$. Represente en el plano complejo V_e , V_{R1} , V_L , V_C , V_{R2} , I_1 , I_2 .

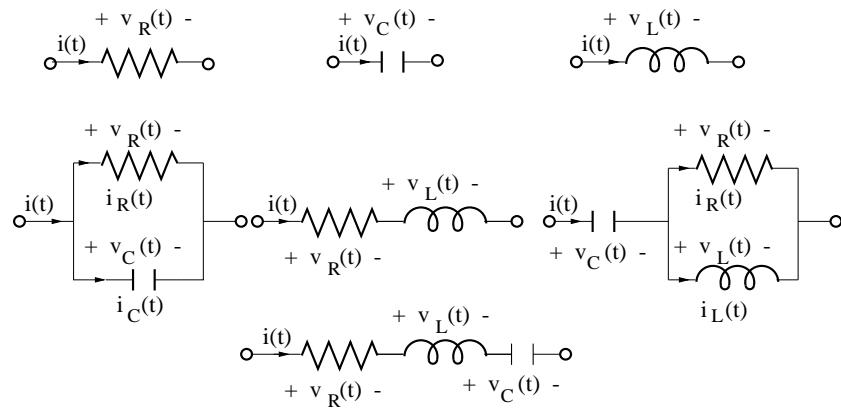


Figura E.59:

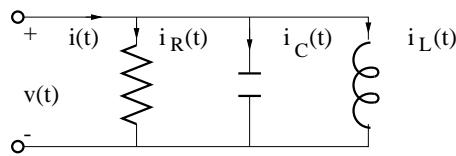


Figura E.60:

- b) $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para las frecuencias f_1 , f_2 y f_3 .
- c) $i_1(t)$, $i_2(t)$, $v_L(t)$ y $v_C(t)$ cuando $v_e(t) = V_0 u(t)$.
- d) Lo mismo, para $f = f_3$, cuando $v_e(t) = V_0 u(t) \cos \omega t$.

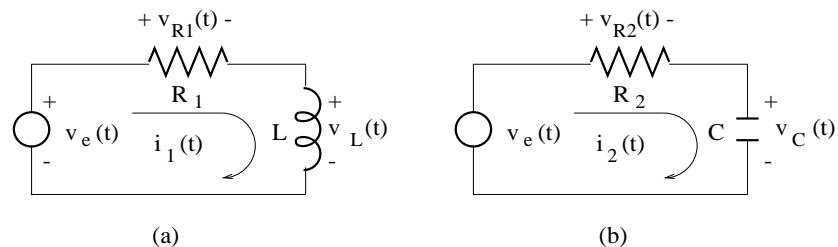


Figura E.61:

e-11. En el circuito de la figura E.62 halle:

- a) $i(t)$ para $f_1 = 100 \text{ Hz}$, $f_2 = 2 \text{ KHz}$ y $f_3 = 10 \text{ KHz}$, cuando $v_e(t) = 10 \cos \omega t \text{ V}$.
- b) $i(t)$ cuando $v_e = 10 u(t) \text{ V}$.
- c) $i(t)$ cuando $v_e = 10 u(t) \cos \omega t \text{ V}$.

e-12. El circuito de la figura E.63 representa a una SONDA ATENUADORA interpuesta entre los nudos A y B de un circuito y los terminales de entrada de un osciloscopio.

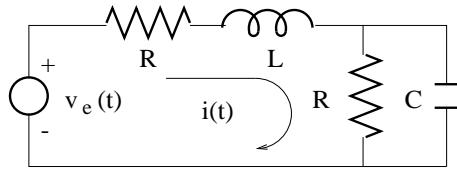


Figura E.62:

Halle la condición necesaria para que $v_e(t) = K v_0(t)$, donde v_e es la señal de entrada al osciloscopio, v_0 la señal de salida de la fuente y K una constante de atenuación independiente de la frecuencia. De esta forma, la señal de entrada del osciloscopio tiene exactamente la misma forma que la que se quiere medir ¿Cuál es el valor de la constante de atenuación?

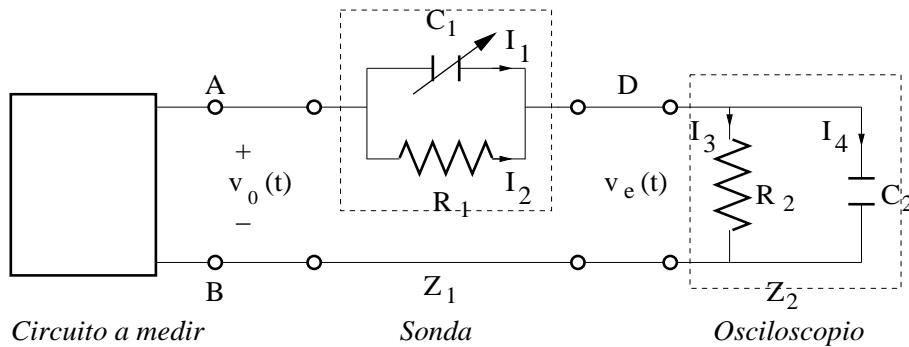


Figura E.63:

Solución:

El circuito de la figura es un divisor de tensión entre las impedancias de la sonda Z_1 y del osciloscopio Z_2

$$Z_1 = \frac{R_1}{1 + j\omega\tau_1} , \quad Z_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega\tau_2}$$

donde $\tau_1 = R_1 C_1$ y $\tau_2 = R_2 C_2$ son las constantes de tiempo de cada una de las impedancias

La función de transferencia es

$$T(\omega) = \frac{V_e(\omega)}{V_0(\omega)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega\tau_2}}{\frac{R_1}{1 + j\omega\tau_1} + \frac{R_2}{1 + j\omega\tau_2}}$$

Obviamente, la condición necesaria para que $T \neq T(\omega)$ es que

$$\tau_1 = \tau_2 \Rightarrow K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

La sonda se calibra mediante el ajuste del condensador variable C_1 de forma que al medir un pulso rectangular de prueba, su aspecto en la pantalla sea lo mas próximo posible a este último.

e-13. Halle $v_s(t)$ en el circuito de la figura E.64 cuando $v_e(t) = k t u(t)$.

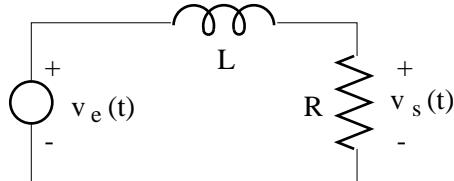


Figura E.64:

e-14. Halle $v_s(t)$ para el circuito de la figura E.65 con la entrada especificada en la misma.

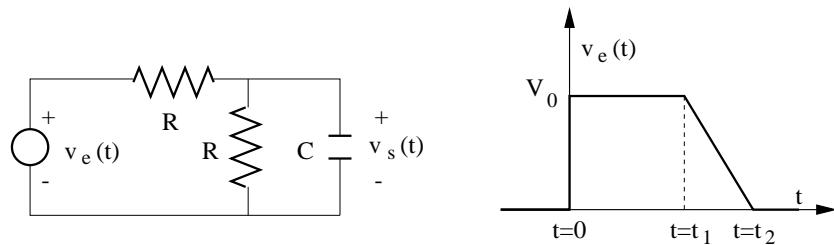


Figura E.65:

e-15. Halle $v_s(t)$ para el circuito de la figura E.66 con la entrada especificada en la misma.

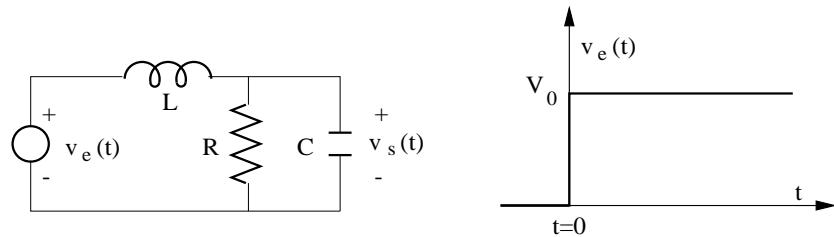


Figura E.66:

e-16. Halle la intensidad que circula por un circuito serie RLC, cuando $v_e(t) = 100 \operatorname{sen}(500t + \pi/4) u(t) \text{ V}$.

e-17. Demuestre que los valores máximos de la tensión en la autoinducción L y el condensador C de un circuito serie RLC se dan para las frecuencias

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\delta^2}} , \quad \omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

e-18. Demuestre que el sobredisparo de la tensión en el condensador de un circuito serie RLC es

$$s_0 = \exp\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)$$

e-19. En el circuito de la figura E.67, halle:

- a) La frecuencia a la cual V_s está en fase con V_e .
- b) La relación que debe existir entre sus componentes para que, a la frecuencia del apartado anterior, se verifique que $V_s = \frac{1}{3}V_e$.

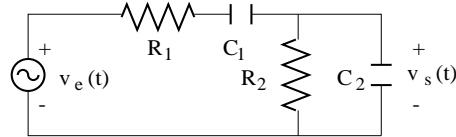


Figura E.67:

e-20. En el circuito de la figura E.68, halle la intensidad que circula por la impedancia Z .

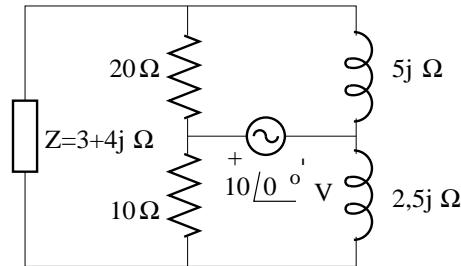


Figura E.68:

e-21. En el circuito de la figura E.69, halle la amplitud que debe tener la fuente de tensión V_2 : para que la caída de tensión en la resistencia de 4Ω sea nula.

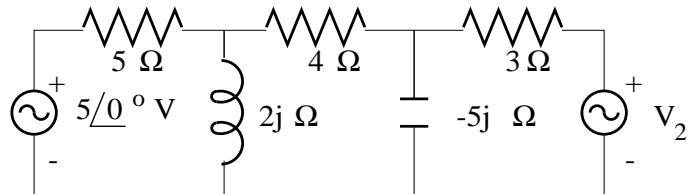


Figura E.69:

e-22. Para el circuito de la figura E.70, halle $v_s(t)$ cuando $v_e(t) = v_1(t) \cdot v_2(t)$, siendo $v_1(t) = 10 \cos \omega_1 t \text{ V}$ y $v_2(t) = \cos \omega_2 t \text{ V}$, con $\omega_1 = 5 \times 10^4 \text{ rad} \cdot s^{-1}$ y $\omega_2 = 10^6 \text{ rad} \cdot s^{-1}$.

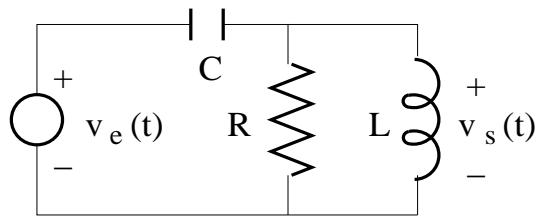


Figura E.70:

Solución: Descomponga la señal de entrada en suma de funciones armónicas puras y aplique el principio de superposición lineal.

- e-23. En el circuito de la figura E.71 $R^* = R + \Delta R$, $\Delta R \ll R$. Determine la relación aproximada entre $\frac{V_s}{V_e}$ y ΔR . Este puente de resistencias sirve para medir la desviación de una resistencia determinada con respecto a su valor nominal R .

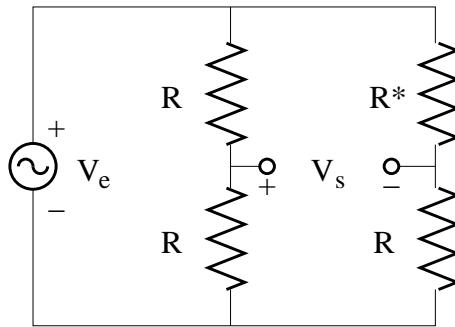


Figura E.71:

- e-24. En el circuito de la figura E.72 R_3 es variable. Demuestre que la amplitud de V_s no depende del valor de R_3 mientras que su fase es función del valor de esta resistencia. Dibuje un diagrama fasorial de las tensiones que aparecen en el circuito.

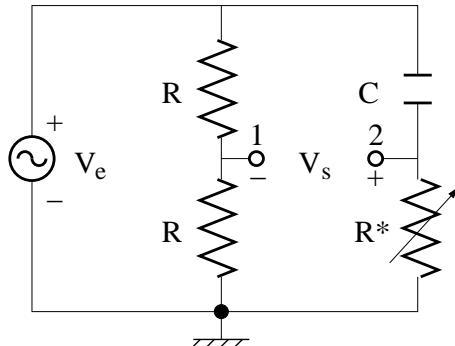


Figura E.72:

Solución:

Las dos ramas de la derecha son divisores de tensión

$$\frac{V_1}{V_e} = \frac{1}{2}, \quad \frac{V_2}{V_e} = \frac{j u}{1 + j u}$$

donde $u \equiv \omega R^* C$

Operando y teniendo en cuenta que $V_s = V_2 - V_1$, tenemos que

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-1 + j u}{2(1 + u^2)} = \frac{1}{2}, \quad / -\arctg u$$

Gráficamente podemos verlo mediante la representación en la figura E.73 del diagrama fasorial de V_e , V_s , V_1 , V_2 y V_C . Analice este diagrama.

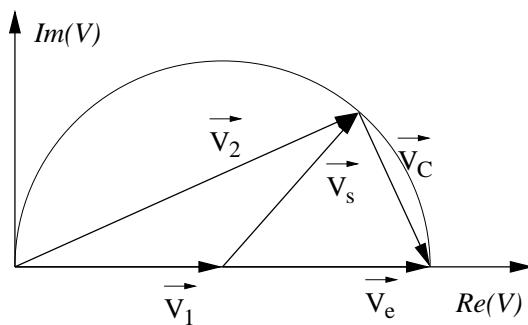


Figura E.73:

e-25. Demuestre que en los circuitos de la figura E.74

$$Q = 2\pi \left(\frac{\langle W_a \rangle}{\langle W_d \rangle} \right)_{\omega=\omega_0}$$

donde $\langle W_a \rangle$ es la energía media almacenada en el condensador y la autoinducción $y \langle W_d \rangle$ la energía media disipada en el circuito durante un periodo.

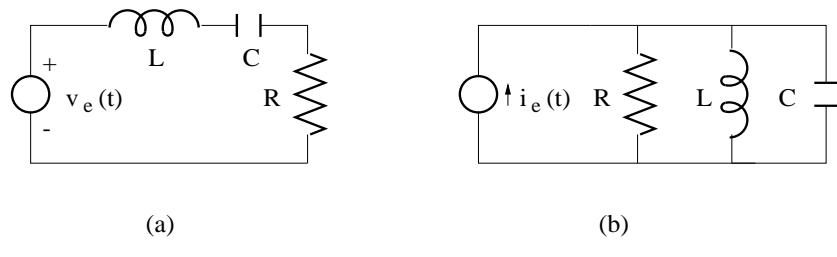


Figura E.74:

e-26. Halle la intensidad que circula por el condensador del circuito de la figura E.75.

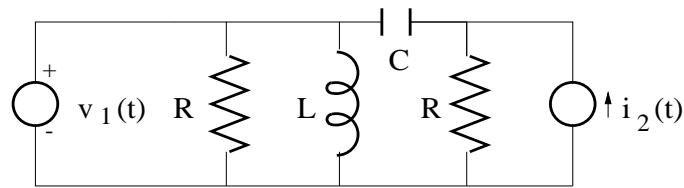


Figura E.75:

e-27. La figura E.76 representa el modelo equivalente de un segmento de guía de onda sin pérdidas que está cortocircuitada en su extremo. Resulta de la división de la misma en pequeños tramos de longitud $\Delta z \ll \lambda$, donde λ es la longitud de onda de la señal que se propaga por la guía, y su modelado mediante una autoinducción en serie $\mathcal{L} \Delta z$ y una capacidad en paralelo $C \Delta z$. Los parámetros \mathcal{L} y C son la autoinducción y la capacidad por unidad de longitud de la guía y la longitud de la onda que se propaga por la misma es $\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mathcal{L}C}}$ ⁹.

Escriba un programa numérico que resuelva el circuito para hallar las intensidades I_i que circulan por cada uno de los tramos y las tensiones V_i correspondientes. Represente estas variables, mediante una película, en función del tiempo.

Tóme los siguientes valores normalizados: $L = n \Delta z = 1.2 \lambda$, $\mathcal{L} = C = 1$, $\omega = 2\pi$, $V_0 = 1$.

Este problema constituye la base del método numérico de 'Modelado por Líneas de Transmisión' (TLM) para la solución de las ecuaciones de onda.

Solución:

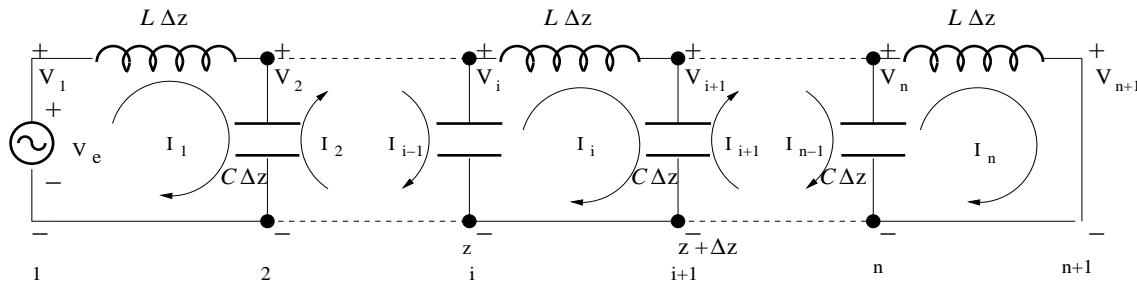


Figura E.76:

Sea $v_e(t) = V_0 \cos \omega t$.

A cada tramo $i = 1 \dots n$ de guía le corresponde una malla que está recorrida por la intensidad I_i . La primera incluye a la fuente de tensión V_0 , conocida, y la última está cortocircuitada en su extremo.

Para hallar las intensidades de malla será necesario plantear y resolver el sistema de ecuaciones de las mallas del circuito. En particular, para la (i)

⁹Véase B. García 'Fundamentos de Electrodinámica'.

$$-Z_C I_{i-1} + (Z_L + 2Z_C) I_i - Z_C I_{i+1} = 0$$

o, de otra forma,

$$-X_C I_{i-1}^* + (2X_C - X_L) I_i^* - X_C I_{i+1}^* = 0$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C \Delta z}, \quad X_L = \omega L \Delta z, \quad I_i^* = -j I_i$$

por lo que el sistema de ecuaciones puede ser escrito con coeficientes reales.

$$\begin{array}{lcl} (X_C - X_L) I_1^* & -X_C I_2^* & = V_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -X_C I_{i-1}^* & +(2X_C - X_L) I_i^* & -X_C I_{i+1}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -X_C I_{n-1}^* & +(X_C - X_L) I_n^* & = 0 \end{array} \rightarrow 1 < i < n$$

El sistema de ecuaciones es de tipo *tridiagonal* (la matriz de los coeficientes es tridiagonal)

$$\begin{array}{lcl} a_1 I_1^* & -b_1 I_2^* & = V_1 \\ -c_2 I_1^* & +a_2 I_2^* & -b_2 I_3^* \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -c_i I_{i-1}^* & a_i I_i^* & -b_i I_{i+1}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -c_{n-1} I_{n-2}^* & +a_{n-1} I_{n-1}^* & -b_{n-1} I_n^* \\ c_n I_{n-1}^* & +a_n I_n^* & = V_{n-1} \end{array} \rightarrow 1 < i < n$$

En nuestro caso

$$a_1 = a_n = X_C - X_L, \quad a_i = 2X_C - Z_L \text{ para } 1 < i < n, \quad c_i = b_i = b = X_C$$

$$V_1 = V_0, \quad V_i = 0 \text{ para } i > 1 \quad (\text{E.49})$$

Si $X_C > X_L$, los coeficientes a , b y c son positivos.

Este tipo de sistema de ecuaciones puede resolverse mediante el método de eliminación de Gauss (sin pivotación)¹⁰.

Método de eliminación de Gauss (sin pivotación):

¹⁰Véase M. Gasca. 'Cálculo Numérico'

Este método consiste en la eliminación sucesiva de una variable en cada una de las ecuaciones $i = 2, \dots, n$, con ayuda de la ecuación anterior, reduciéndo el número de incógnitas respectivas a dos, salvo en la última en la que se resuelve I_n^* .

Con este fin anotaremos

$$a_1 = \alpha_1 , \quad V_1 = \nu_1$$

Si se despeja I_1^* de la primera ecuación, se elimina de la segunda y se generaliza el resultado, se tiene que

$$\alpha_i I_i^* - b_i I_{i+1}^* = \nu_i$$

$$\alpha_i = a_i - \frac{c_i}{\alpha_{i-1}} b_{i-1} , \quad \nu_i = V_i + \frac{c_i}{\alpha_{i-1}} \nu_{i-1} \quad (\text{E.50})$$

¹¹

El resultado es una matriz triangular superior ($A_{ij} = 0$ para $i > j$) de la forma

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 I_1^* & -b_1 I_2^* & = \nu_1 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots & & \\ \alpha_i I_i^* & -b_i I_{i+1}^* & = \nu_i \rightarrow 1 < i < n \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots & & \\ \alpha_n I_n^* & = \nu_n & \end{array}$$

Este sistema de ecuaciones se resuelve calculando las I_i^* en sentido inverso ¹²

$$\begin{aligned} I_n^* &= \frac{\nu_n}{\alpha_n} \\ I_i^* &= \frac{\nu_i}{\alpha_i} + \frac{b_i}{\alpha_i} I_{i+1}^* , \quad i = n-1, \dots, 1 \end{aligned} \quad (\text{E.51})$$

donde I_{i+1}^* ya ha sido calculada.

Por último

$$I_i = j I_i^* , \quad V_i = (I_{i-1}^* - I_i^*) X_c \quad \text{para } 1 < i \leq n \quad (\text{E.52})$$

¹¹Nótese que d no se modifica, que a y V son los valores de las constantes iniciales y que α y ν son sus modificaciones. El método puede acumular errores grandes si α_i toma valores excesivamente pequeños.

¹²Los sistemas de ecuaciones en los que la matriz de los coeficientes es triangular se resuelven de forma similar a la que se describe a continuación.

y, pasando al dominio del tiempo,

$$\begin{aligned} i_i(t) &= I_i^* \operatorname{sen} \omega t \\ v_i(t) &= (I_{i-1}^* - I_i^*) X_C \cos \omega t \end{aligned}$$

Programa Mathematica prob – teocir – guia.nb:

```
(Remove["Global`*"]; Off[General :: "spell1"];
$TextStyle = {FontFamily → "Courier", FontSize → 12};
```

Especificamos los datos numéricos de frecuencia ω , autoinducción por unidad de longitud \mathbf{Ll} , capacidad por unidad de longitud \mathbf{Cc} y amplitud de la tensión de entrada $\mathbf{V1}$

$$\omega = 2\pi; \mathbf{Ll} = 1; \mathbf{Cc} = 1; \mathbf{V1} = 1;$$

número de segmentos \mathbf{n} en que se divide la longitud de la guía y número de fotos \mathbf{nn} que se tomará para hacer la película.

$$\mathbf{n} = 50; \mathbf{nn} = 160;$$

A continuación definimos las magnitudes derivadas que se utilizan en el programa: periodo \mathbf{T} , longitud de onda λ , longitud de la línea \mathbf{Lo} , longitud del segmento Δz , reactancias \mathbf{Xl} y \mathbf{Xc} y coeficientes del sistema de ecuaciones $\mathbf{a1}$, \mathbf{an} , \mathbf{ai} y \mathbf{b} .

$$\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\omega}; \lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mathbf{Ll} * \mathbf{Cc}}}; \mathbf{Lo} = 1.25 * \lambda;$$

$$\Delta z = \frac{\mathbf{Lo}}{\mathbf{n}}; \mathbf{Xl} = \omega * \mathbf{Ll} * \Delta z; \mathbf{Xc} = \frac{1}{\omega * \mathbf{Cc} * \Delta z};$$

$$\mathbf{a1} = \mathbf{Xc} - \mathbf{Xl}; \mathbf{an} = \mathbf{a1}; \mathbf{ai} = 2\mathbf{Xc} - \mathbf{Xl}; \mathbf{b} = \mathbf{Xc};$$

Definimos las matrices iniciales que guardarán los valores de los coeficientes $\alpha = (\alpha_i)$ y $\nu = (\nu_i)$, las intensidades $\mathbf{Ise}(I_i^*)$ y las gráficas de intensidad \mathbf{grizt} y de tensión \mathbf{grvzt} a lo largo de la línea y para cada fotograma de la película.

```

 $\alpha = \text{Table}[\mathbf{ai}, \{i, 1, n\}]; \alpha[[1]] = \mathbf{a1}; \alpha[[n]] = \mathbf{an};$ 
 $\nu = \text{Table}[0, \{i, 1, n\}]; \nu[[1]] = \mathbf{V1};$ 
 $\mathbf{Ise} = \text{Table}[0, \{i, 1, n\}];$ 
 $\mathbf{grizt} = \text{Table}[0, \{i, 1, nn\}];$ 
 $\mathbf{grvzt} = \text{Table}[0, \{i, 1, nn\}];$ 

```

Calculamos los coeficientes α_i y ν_i teniendo en cuenta que $c_i = b_i = b$.

$$\mathbf{Do}[\alpha[[\mathbf{i}]] = \alpha[[\mathbf{i}]] - \frac{\mathbf{b}^2}{\alpha[[\mathbf{i}-1]]}, \{\mathbf{i}, 2, \mathbf{n}\}];$$

$$\mathbf{Do}[\nu[[\mathbf{i}]] = \nu[[\mathbf{i}]] + \frac{\mathbf{b} * \nu[[\mathbf{i}-1]]}{\alpha[[\mathbf{i}-1]]}, \{\mathbf{i}, 2, \mathbf{n}\}];$$

Calculamos las amplitudes de las intensidades de malla I_i^* .

$$\mathbf{Ise}[[\mathbf{n}]] = \frac{\nu[[\mathbf{n}]]}{\alpha[[\mathbf{n}]]}; \mathbf{Do}[\mathbf{Ise}[[\mathbf{i}]] = \frac{\nu[[\mathbf{i}]]}{\alpha[[\mathbf{i}]]} + \frac{\mathbf{b}}{\alpha[[\mathbf{i}]]} \mathbf{Ise}[[\mathbf{i}+1]], \{\mathbf{i}, \mathbf{n}-1, 1, -1\}];$$

Situamos a las intensidades de malla $i_i(t)$ en el centro de dichas mallas y las guardamos en vectores $\{(i - \frac{1}{2}) * \Delta z, I_i^* * \cos(2\pi \frac{t}{T})\}$. Todos ellos se guardan en la función temporal **izt[t]**.

$$\mathbf{izt}[t] := \mathbf{Table}[\{(i - \frac{1}{2}) * \Delta z, \mathbf{Ise}[[i]] * \mathbf{Sin}[2\pi * \frac{t}{T}]\}, \{\mathbf{i}, 1, \mathbf{n}\}];$$

y algo semejante se hace con las tensiones $v_i(t)$ en cada uno de los nudos ($V_1 = 1$ y $V_{n+1} = 0$).

$$\begin{aligned} \mathbf{vzt}[t] &= \mathbf{Table}[\mathbf{If}[i == 1, \{0, \mathbf{Cos}[2\pi * \frac{t}{T}]\}, \\ &\quad \{(i - 1) * \Delta z, (\mathbf{Ise}[[i-1]] - \mathbf{Ise}[[i]]) * \mathbf{Xc} * \mathbf{Cos}[2\pi * \frac{t}{T}]\}], \{\mathbf{i}, 1, \mathbf{n}\}]; \end{aligned}$$

$$\mathbf{vzt}[t] = \mathbf{Append}[\mathbf{vzt}[t], \{\mathbf{Lo}, 0\}];$$

A continuación se generan las gráficas de la intensidad y la tensión que se incluirán en cada fotograma, sin mostrarlas. El índice i da valores al tiempo y el k ordena a los fotogramas.

$$\mathbf{k} = \mathbf{0};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Do}[\{\mathbf{k} = \mathbf{k} + 1, \mathbf{grizt}[[\mathbf{k}]] = \mathbf{ListPlot}[\mathbf{izt}[\mathbf{i}], \mathbf{PlotStyle} \rightarrow \mathbf{RGBColor}[1, 0, 0], \\ \mathbf{PlotRange} \rightarrow \{\{0, 1.25\}, \{-1, 1\}\}, \mathbf{GridLines} \rightarrow \{\{1, 1.25\}, \{-1, 1\}\}, \\ \mathbf{PlotJoined} \rightarrow \mathbf{True}, \mathbf{DisplayFunction} \rightarrow \mathbf{Identity}\}], \{\mathbf{i}, 0, T - \frac{T}{nn}, \frac{T}{nn}\}]; \end{aligned}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{0};$$

```
Do[{k = k + 1, grvzt[[k]] = ListPlot[vzt[i], PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1],
PlotRange -> {{0, 1.25}, {-1, 1}}, GridLines -> {{1, 1.25}, {-1, 1}},
PlotJoined -> True, DisplayFunction -> Identity]}, {i, 0, T - T/nn, T/nn}];
```

Concluimos mostrando las graficas de la intensidad y la tensión, conjuntamente.

```
Do[Show[grizt[[k]], grvzt[[k]], DisplayFunction -> $DisplayFunction], {k, 1, nn}]
```

Una vez generados los fotogramas, éstos pueden agruparse haciendo doble 'clic' sobre el paréntesis ']' que abarca a todas las figuras, el segundo desde el interior de la celda, y volviendo a realizar esta operación sobre la propia figura. Dos de estos fotogramas están representados en las figuras E.77, la del potencial en azul y la de la intensidad en rojo.

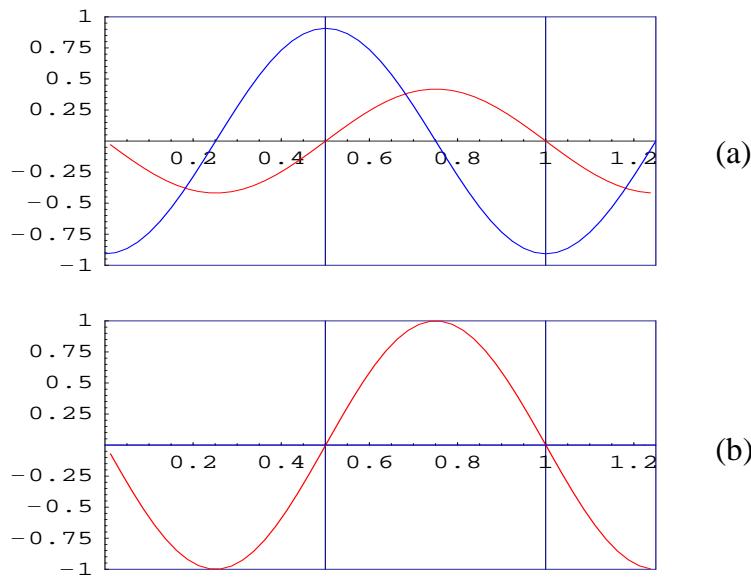


Figura E.77:

Lo que se ve es una onda estacionaria, resultante de la interferencia de la onda que viaja hacia el final de la guía con la reflejada en dicho extremo. La onda total no se propaga sino que ambas variables oscilan con nodos y vientos fijos.

Dado que la línea está cortocircuitada, la tensión en dicho extremo es nula y la intensidad máxima (figura E.77a). Entre ambas variables existe un desfase temporal y espacial tal que los nodos de una coinciden con los vientos de la otra y en el instante en que una alcanza su valor máximo, la otra es nula (figura

E.77b). La energía cambia de localización pero no se disipa. Cuando la intensidad es máxima la energía está asociada exclusivamente al campo magnético producido por las autoinducciones. Cuando es máxima la tensión la energía ha pasado a los condensadores y está asociada al campo eléctrico existente en su interior. En los demás casos, la energía es parcialmente eléctrica y magnética. En definitiva, la guía propuesta es un circuito resonante sin pérdidas.

Este modelo es válido también para el problema análogo de incidencia normal de una onda plana sobre la superficie plana de un conductor ideal y las conclusiones son asimismo análogas.

- e-28. Halle el valor de la impedancia de carga Z_c del circuito de la figura E.78 para que la energía disipada en la misma sea máxima. ¿Qué pasa con las impedancias que están en paralelo con la fuente de tensión $v_e(t)$?

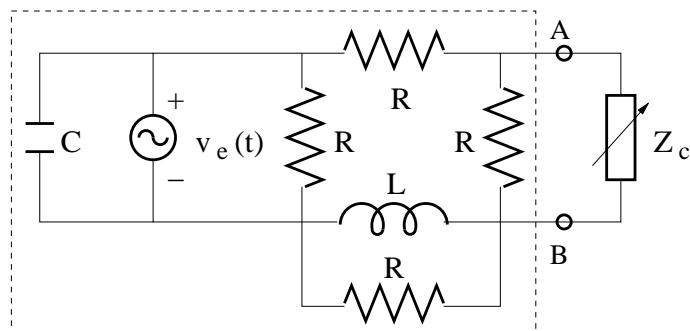


Figura E.78:

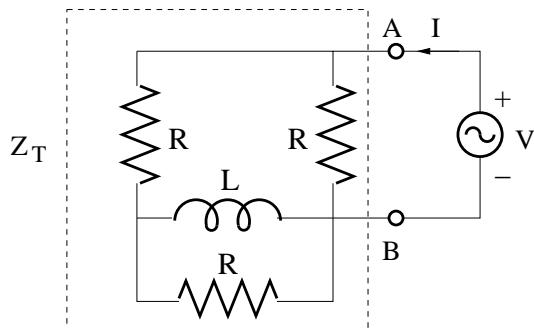


Figura E.79:

Solución

Para que la potencia disipada en la impedancia de carga sea máxima ésta ha de ser el complejo conjugado de la thevenin del circuito marcado por la línea de puntos en la figura E.78. Para calcular Z_T cortocircuitamos la fuente independiente y calculamos la impedancia entre los nudos A y B, de acuerdo con la figura E.79.

$$Z_T = Z_1 \parallel R , \quad Z_1 = R + Z_2 , \quad Z_2 = R \parallel Z_L$$

donde el símbolo $A \parallel B$ indica que la impedancia A está en paralelo con la B .

Programa Mathematica *impedancia – paralelo – serie.nb*:

```
Remove["Global`*"];
```

Definimos una función para calcular la asociación paralelo de dos impedancias.

$$Zp[A_, B_] = \frac{A * B}{A + B};$$

Escribimos la impedancia de la autoinducción como $Z_L = jX$

$$Z1 = Zp[R, i * X]; Z2 = R + Z1;$$

$$ZT = Simplify[ComplexExpand[Zp[R, Z2]]]$$

Para calcular la impedancia de carga tomamos los valores $R = X = 1$

$$Zc = Conjugate[ZT/.{R \rightarrow 1, X \rightarrow 1}]/N$$

- e-29. Halle la máxima potencia media que se le puede sacar a la fuente de la figura E.80 si la carga es una resistencia pura variable.

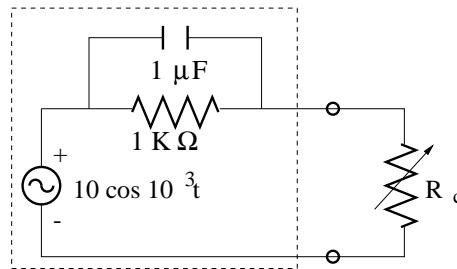


Figura E.80:

- e-30. Halle la intensidad que pasa por la rama de impedancia Z_0 del circuito de la figura E.81 mediante el método de mallas.
- e-31. Halle la intensidad que pasa por la rama de impedancia Z_0 del circuito de la figura E.82 utilizando el método de nudos.

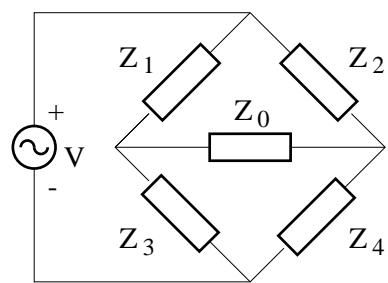


Figura E.81:

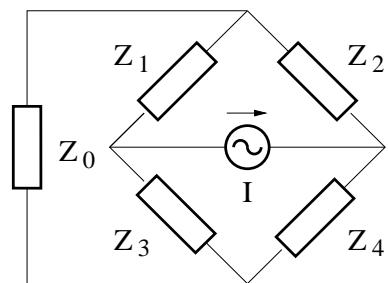


Figura E.82:

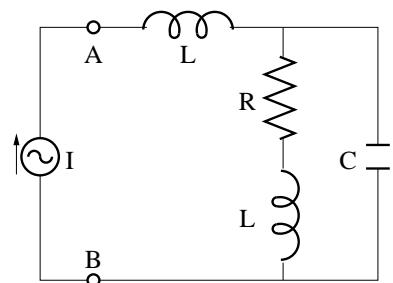


Figura E.83:

e-32. Halle, mediante el análisis de nudos, la admitancia de entrada (admitancia entre los nudos A y B del circuito a su derecha) del circuito de la figura E.83.

e-33. Halle, mediante el análisis de mallas, la impedancia de entrada (impedancia entre los nudos A y B del circuito a su derecha) del circuito de la figura E.84. Compare los resultados con los obtenidos en el problema anterior.

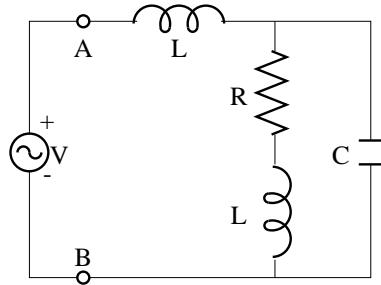


Figura E.84:

e-34. Haga uso del análisis de mallas, del de nudos, del principio de superposición y del teorema de Thevenin para hallar la intensidad que pasa por la resistencia del circuito de la figura E.85.

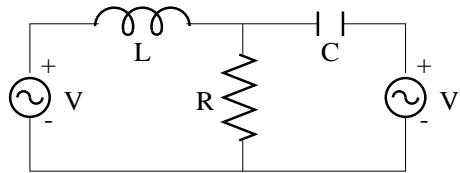


Figura E.85:

e-35. Halle el equivalente Thevenin y Norton de los circuitos de la figura E.86.

e-36. En el circuito de la figura E.87 la frecuencia de ambas fuentes es de 100 Hz. Halle la potencia suministrada a la resistencia R_2 en los siguientes casos:

- Calculando el equivalente Thevenin desde los nudos A – B.
- Aplicando sucesivamente los teoremas de Thevenin y Norton hasta reducir el circuito a una sola malla.

e-37. En el circuito da la figura E.88 calcule la intensidad que pasa por el condensador y la caída de tensión en los extremos de la resistencia R_0 .

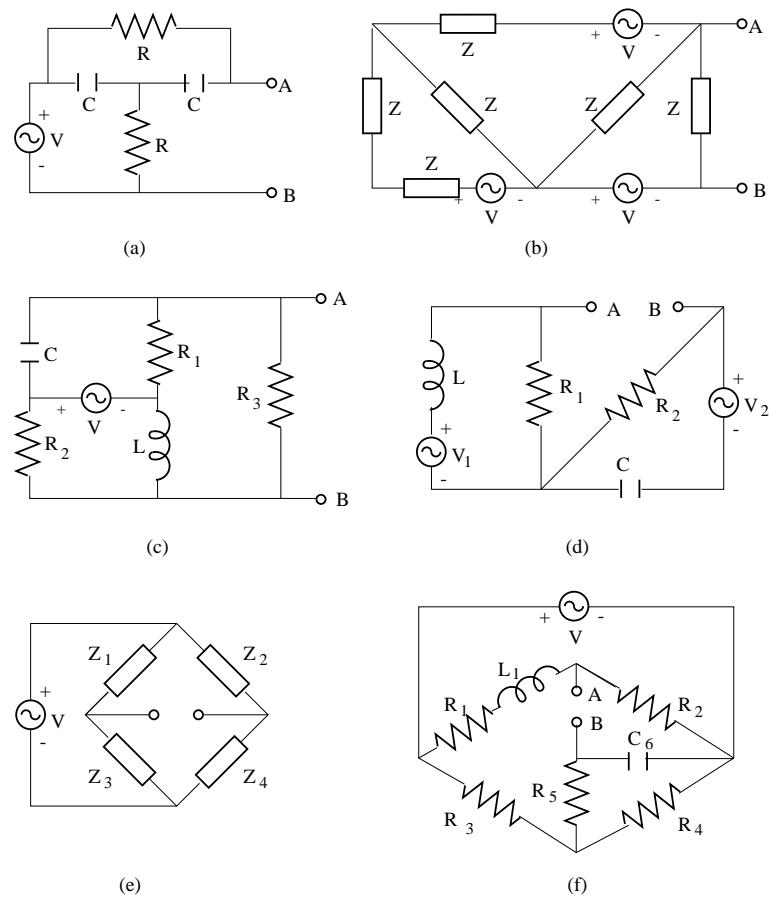


Figura E.86:

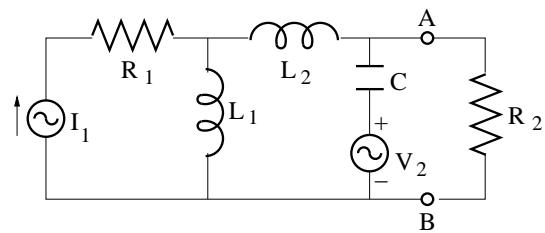


Figura E.87:

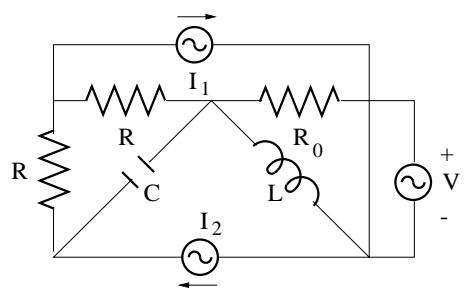


Figura E.88:

Apéndice F

Elementos de cuatro terminales. Transistores bipolares y de efecto de campo

F.1. Elementos de cuatro terminales

A continuación se definen los elementos de cuatro terminales de más interés. También se conocen como celdas o elementos de dos puertas: la $(1, 1')$ o *puerta de entrada* y la $(2, 2')$ o *puerta de salida*.

Entre los pasivos citaremos al *transformador ideal* que, como ya hemos visto, transforma intensidades y tensiones pero suministra a la salida la misma potencia que recibe en la entrada. El transformador real, por el contrario, disipa y almacena energía.

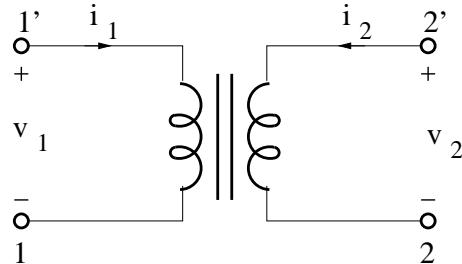


Figura F.1:

Las variables de salida de un transformador ideal, figura F.1, son proporcionales a las variables de entrada.

$$\left. \begin{array}{l} v_2 = a v_1 \\ i_2 = -\frac{1}{a} i_1 \end{array} \right\} \quad a = \frac{N_2}{N_1} \quad (\text{F.1})$$

La potencia de entrada

$$P_e = v_1 i_1 = P_s = -v_2 i_2$$

es igual a la potencia de salida.

Entre los cuadripolos activos citaremos a las *fuentes ideales controladas* o *fuentes dependientes*. Son fuentes que definen una relación entre dos variables: una de salida (dependiente o controlada) y otra de entrada (independiente o de control).

Los tipos más simples de fuentes controladas son:

- Fuente de tensión controlada por una tensión (*tensión - tensión*), figura F.2.

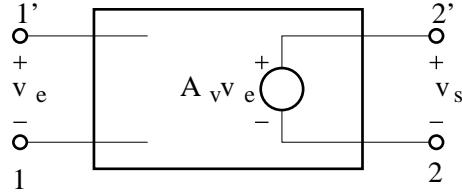


Figura F.2:

$$v_s(t) = A_v v_e(t) \quad (\text{F.2})$$

donde A_v es la *ganancia de tensión*.

- Fuente de intensidad controlada por una tensión (*tensión - intensidad*), figura F.3.

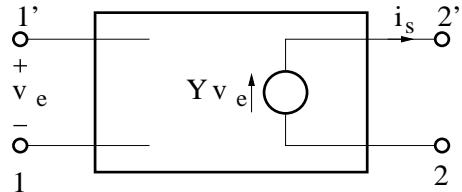


Figura F.3:

$$i_s(t) = Y v_e(t) \quad (\text{F.3})$$

donde Y es la *transadmitancia*.

- Fuente de tensión controlada por una intensidad (*intensidad - tensión*), figura F.4.

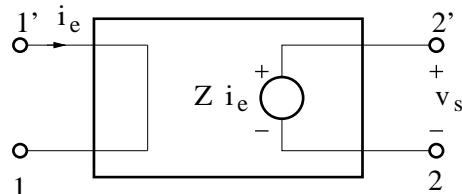


Figura F.4:

$$v_s(t) = Z i_e(t) \quad (\text{F.4})$$

donde Z es la *transimpedancia*.

- Fuente de intensidad controlada por una intensidad (*intensidad - intensidad*), figura F.5.

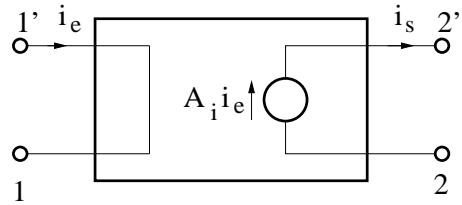


Figura F.5:

$$i_s(t) = A_i i_e(t) \quad (\text{F.5})$$

donde A_i es la *ganancia de intensidad*.

Los correspondientes modelos reales, de tipo lineal, se obtienen de los anteriores añadiendo elementos pasivos lineales no nulos. Veremos a continuación como, bajo ciertos condicionamientos, de un dispositivo físico tal como el transistor bipolar o el de efecto de campo, que físicamente son no lineales y que tienen tres terminales, pueden obtenerse modelos lineales de cuatro terminales.

F.2. Transistores bipolares y de efecto de campo

Un *transistor bipolar* real, véase la figura F.6-a, es un elemento con tres puntos físicos de conexión (patas) que corresponden a los tres terminales denominados emisor *E*, base *B* y colector *C*. Lo discutiremos en su configuración de emisor común , figura F.6-b¹, en la que se consideran cuatro terminales, dos de los cuales, uno de entrada y otro de salida, son comunes y corresponden al emisor.

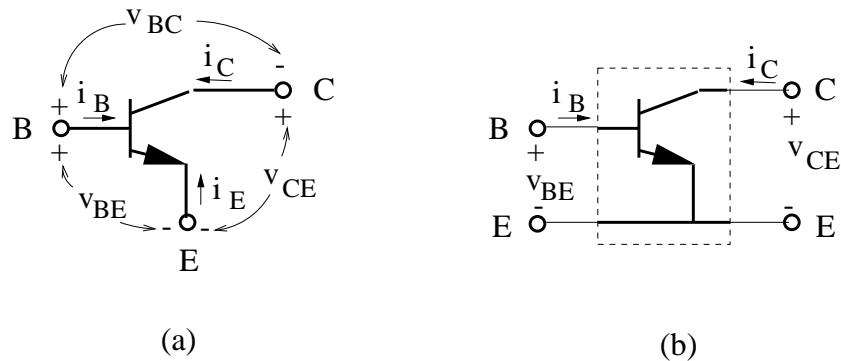


Figura F.6:

¹La dirección de la flecha grande en el emisor corresponde al transistor tipo *n-p-n*.

Como se deduce de las leyes de mallas y nudos

$$v_{BE} = v_{BC} + v_{CE}$$

$$i_B = -i_E - i_C$$

En general, el comportamiento de este sistema puede caracterizarse por dos funciones no lineales, ejemplos de las cuales se representan en las curvas características paramétricas de la figura F.7 (los subíndices con letras mayúsculas indican que las señales correspondientes no están limitadas en amplitud).

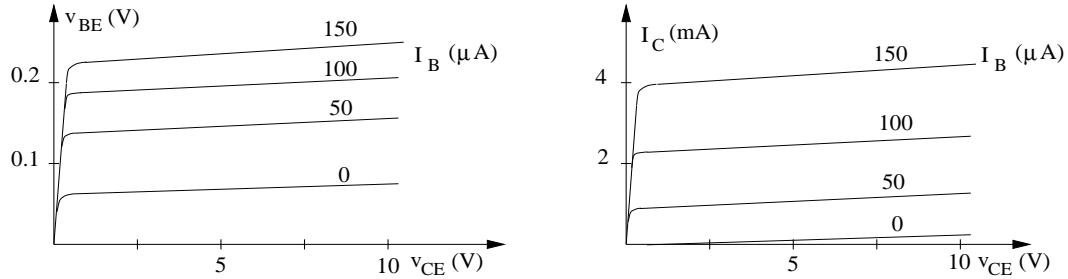


Figura F.7:

Si las variaciones de las señales son pequeñas, podemos linealizar estas relaciones:

$$dv_{BE} = \frac{\partial v_{BE}}{\partial i_B} di_B + \frac{\partial v_{BE}}{\partial v_{CE}} dv_{CE}$$

$$di_C = \frac{\partial i_C}{\partial i_B} di_B + \frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} dv_{CE}$$

De manera que, cambiando la notación

$$v_{be} \equiv dv_{BE}, \quad i_c \equiv di_C, \quad i_b \equiv di_B, \quad v_{ce} \equiv dv_{CE}$$

$$h_{ie} \equiv \frac{\partial v_{BE}}{\partial i_B}, \quad h_{re} \equiv \frac{\partial v_{BE}}{\partial v_{CE}}, \quad h_{fe} \equiv \frac{\partial i_C}{\partial i_B}, \quad h_{oe} \equiv \frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}}$$

se obtienen las relaciones lineales entre los parámetros de pequeña señal del transistor

$$v_{be} = h_{ie} i_b + h_{re} v_{ce}$$

$$i_c = h_{fe} i_b + h_{oe} v_{ce}$$

Matricialmente

$$\begin{Bmatrix} v_{be} \\ i_c \end{Bmatrix} = (h_{ij}) \cdot \begin{Bmatrix} i_b \\ v_{ce} \end{Bmatrix}$$

donde (h_{ij}) son los parámetros h del transistor bipolar. De aquí se deduce el circuito lineal equivalente para pequeña señal de la figura F.8.

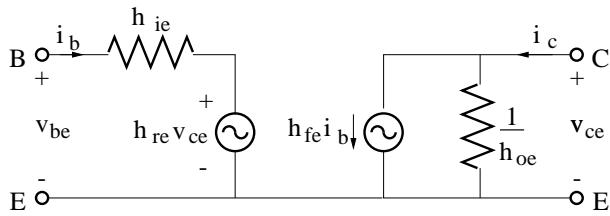


Figura F.8:

Casi siempre se puede tomar $h_{re} = 0$. En los casos más simples basta con suponer que $\frac{1}{h_{oe}} \rightarrow \infty$ y $h_{ie} = 0$. Teniendo esto en cuenta y escribiendo $\beta \equiv h_{fe}$, queda un circuito simplificado, figura F.9, correspondiente a una fuente de intensidad controlada por intensidad.

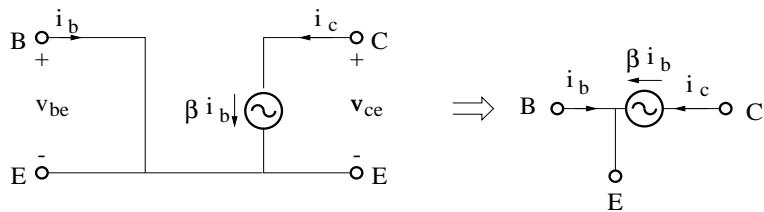


Figura F.9:

El *transistor efecto campo (FET)* puede tratarse de forma similar a la utilizada para el bipolar. Las tres patas del *FET* son la puerta ($G \rightarrow$ 'gate'), la fuente ($S \rightarrow$ 'source') y el sumidero($D \rightarrow$ 'drain'). Aquí se considerará en la configuración de fuente común, tal como se representa en la figura F.10-a.

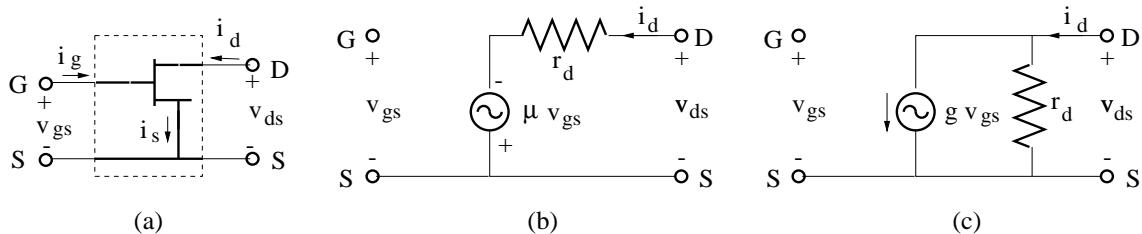


Figura F.10:

No obstante, por presentar una impedancia muy grande entre los dos terminales de entrada (G y S), no puede ser descrito adecuadamente mediante los parámetros h . El circuito equivalente de fuente común es el representado en la figura F.10-b y c. El primero de estos circuitos corresponde a una fuente de tensión controlada por tensión; μ es la ganancia de tensión y r_d la resistencia de sumidero, normalmente pequeña. El segundo, que se obtiene del anterior mediante la sustitución de la fuente de tensión por otra de intensidad, corresponde a una fuente de intensidad controlada por tensión, siendo $g = \frac{\mu}{r_d}$.

F.2.1. Análisis de circuitos con fuentes dependientes

Ilustraremos con sendos ejemplos como se aplican los análisis de mallas y de nudos en el caso de que existan fuentes dependientes.

Análisis de mallas :

Sea el amplificador de la figura F.11a, cuyo circuito equivalente se representa en la figura F.11b.

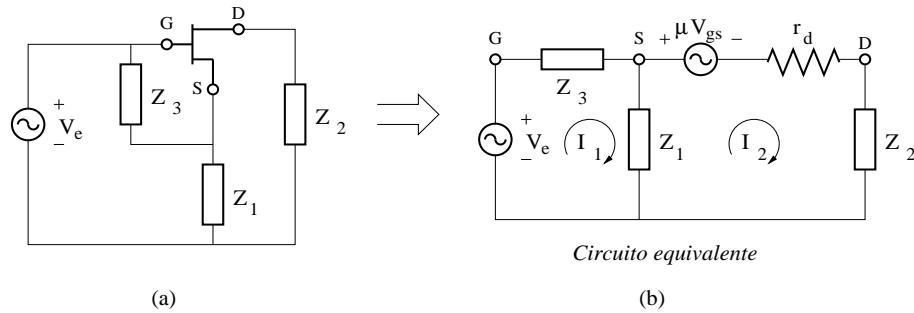


Figura F.11:

Planteemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} V_e \\ -\mu V_{gs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_1 \\ -Z_1 & Z_1 + Z_2 + r_d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

El problema no está resuelto aún, pues en el primer miembro figura V_{gs} que es una variable dependiente. El paso fundamental de este tipo de problemas es establecer la ecuación que relaciona a esta variable con las incógnitas del problema. En este caso es $V_{gs} = I_1 Z_3$. Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} V_e \\ -\mu V_{gs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu V_{gs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_e \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\mu Z_3 I_1 \end{pmatrix}}_{(A)}$$

La matriz (A) puede escribirse de la forma

$$(A) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu Z_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

por lo que, pasándola al segundo miembro, las ecuaciones de malla quedan de la forma

$$\begin{pmatrix} V_e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_1 \\ \mu Z_3 - Z_1 & Z_1 + Z_2 + r_d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

de la cual ya es inmediato obtener I_1 e I_2 .

Observemos que ahora la matriz (Y_{ij}) ya no es simétrica.

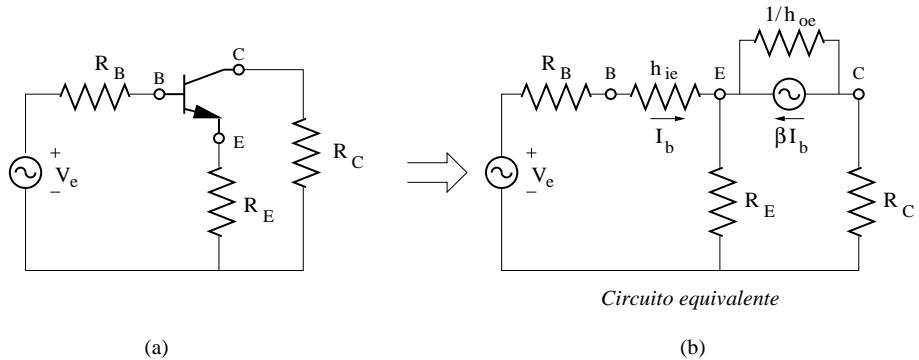


Figura F.12:

Análisis de nudos :

Sea el amplificador de la figura F.12a, cuyo circuito equivalente se representa en la figura F.12b.

Substituiremos la fuente de tensión por una fuente de intensidad, tal como se muestra en la figura F.13.

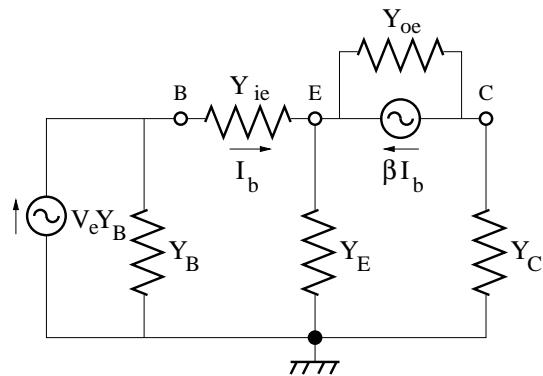


Figura F.13:

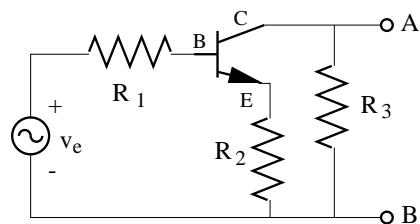
En este caso tenemos tres nudos, por lo que necesitaremos tres ecuaciones. Las incógnitas son las tensiones de los nudos V_B , V_C y V_E con respecto al nudo común (tierra).

Como en el caso anterior, el paso fundamental es encontrar la relación entre la intensidad de base I_B y las incógnitas: $I_B = Y_{ie}(V_B - V_E)$. La ecuación matricial resultante sería

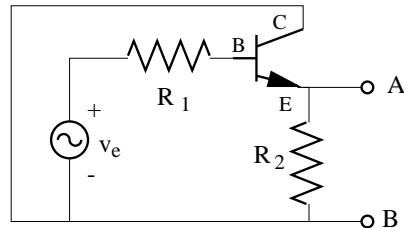
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_e Y_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta Y_{ie} (V_B - V_E) \\ \beta Y_{ie} (V_B - V_E) \end{pmatrix} + (\mathcal{Y}_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} V_B \\ V_E \\ V_C \end{pmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta Y_{ie} & \beta Y_{ie} & 0 \\ \beta Y_{ie} & -\beta Y_{ie} & 0 \end{pmatrix} + (\mathcal{Y}_{ij}) \right\} \cdot \begin{pmatrix} V_B \\ V_E \\ V_C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

F.3. Problemas

f-1. Haciendo uso del circuito equivalente simplificado del transistor bipolar, halle el equivalente Thevenin de los circuitos de la figura F.14 desde los nudos A y B.



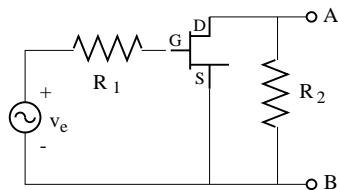
(a)



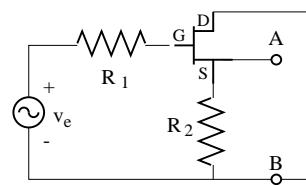
(b)

Figura F.14:

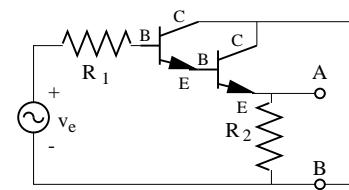
f-2. Halle el equivalente Thevenin desde los nudos A y B de los circuitos de la figura F.15. Utilice los circuitos equivalentes simplificados del transistor bipolar y del FET.



(a)



(b)



(c)

Figura F.15:

f-3. El circuito de la figura F.16 representa al esquema básico de un AMPLIFICADOR DIFERENCIAL, el cual está diseñado para trabajar con señal pequeña. Halle $v = v_{01} - v_{02}$ en función de v_{e1} y v_{e2} . Se supone que los transistores son idénticos. Haga uso del circuito equivalente simplificado del transistor bipolar.

Solución:

Para hallar la solución, substituiremos entre los nudos E B, y C, el circuito equivalente de la figura F.17a. Así mismo, substituiremos las fuentes de cada una de las entradas, junto con su resistencia de salida R_1 , por su fuente equivalente de intensidad. El circuito resultante se representa en la figura F.17b. Como esta figura corresponde a un modelo de señal pequeña, la fuente de alimentación de continua se convierte en un cortocircuito.

Dicho circuito sólo tiene dos nudos, el de tierra B y el A cuyo potencial lo escribiremos como v_A .

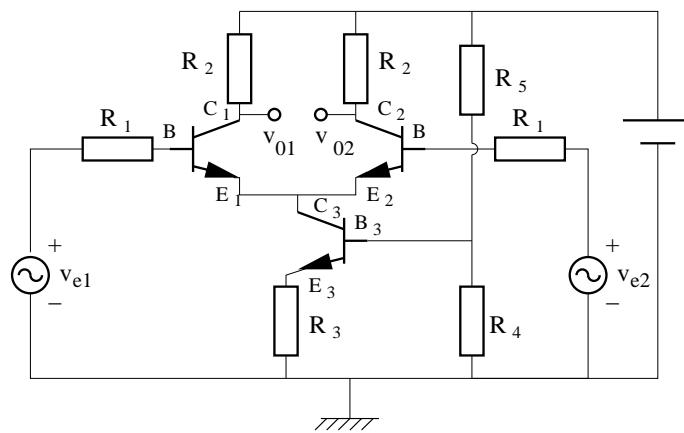


Figura F.16:

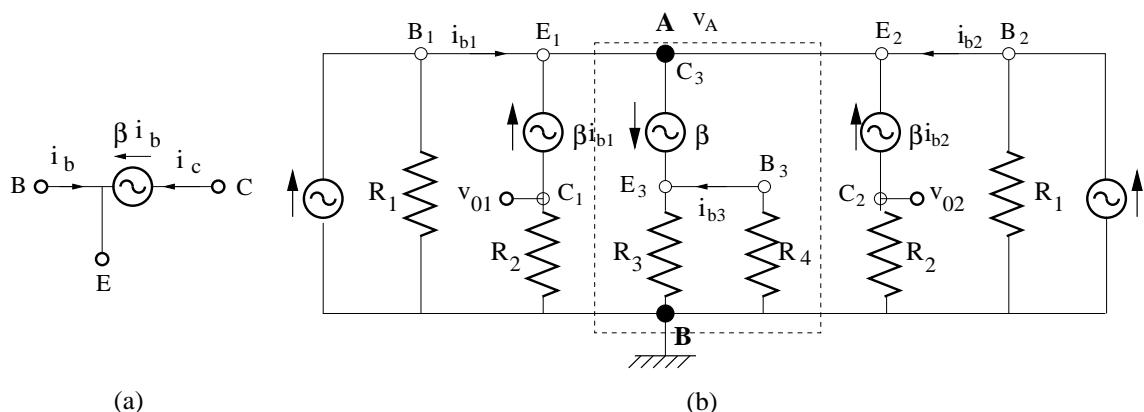


Figura F.17:

**Queremos expresar v en función de las tensiones de entrada v_{e1} y v_{e2} .
De acuerdo con el circuito**

$$v = \beta (1_{b1} - i_{b2}) R_2$$

Como se marca en la figura, las intensidades de base i_b circulan entre los nudos B y E . Aplicando la ley de nudos a los B , se tiene que

$$i_{b1} = i_1 - \frac{v_A}{R_1} , \quad i_{b2} = i_2 - \frac{v_A}{R_1}$$

donde, por la regla de equivalencia entre fuentes de tensión e intensidad

$$i_1 = \frac{v_{e1}}{R_1} , \quad i_2 = \frac{v_{e2}}{R_1}$$

por lo que

$$v = \frac{\beta R_2}{R_1} (v_{e1} - v_{e2})$$

Como puede verse, la rama asociada al transistor T_3 , enmarcada con líneas discontinuas, no juega ningún papel en el funcionamiento de pequeña señal. En realidad, su función es la de suministrar una polarización en corriente continua a los otros dos transistores.

Apéndice G

Sistemas lineales. Diagramas de Bode

G.1. Sistemas lineales

G.1.1. Ecuaciones de un circuito

Dado un circuito, la aplicación de las leyes de Kirchhoff nos permitirá obtener ecuaciones lineales en derivadas totales y con coeficientes constantes y reales que expliquen el comportamiento del mismo. Una vez elegido un numero adecuado de variables independientes $y_i(t)$, que consideraremos como *entradas* o *excitaciones* del circuito, o sistema, podemos obtener relaciones de éstas con una serie de variables dependientes x_i , que consideraremos como *respuestas* o *salidas*.

En el caso más simple, figura G.1, pero sin pérdida de generalidad, tendremos una sola entrada y una única salida.



Figura G.1:

La relación entre una y otra vendrá dada por la ecuación diferencial

$$L_A x(t) = L_B y(t)$$

Donde L_A y L_B son operadores lineales con coeficientes constantes de orden n y m respectivamente.

$$\underbrace{\left[a_n \frac{d^n}{dt^n} + \cdots + a_0 \right]}_{L_A} x(t) = \underbrace{\left[b_m \frac{d^m}{dt^m} + \cdots + b_0 \right]}_{L_B} y(t) \quad (\text{G.1})$$

Puesto que $y(t)$ es una señal conocida, aplicándole L_B , tenemos

$$L_A x(t) = \xi(t) \quad (\text{G.2})$$

donde $\xi(t) = L_B y(t)$ es también conocida.

Luego, para hallar $x(t)$, debemos resolver una ecuación de orden n , lo que hace necesario especificar n condiciones iniciales. Diremos que n es el orden del sistema.

G.1.2. Respuesta transitoria y estacionaria

Como es bien conocido, la solución general de G.2 es del tipo

$$x_g(t) = x_{gh}(t) + x_{pnh}(t)$$

donde x_{gh} es la solución general de la ecuación homogénea y x_{pnh} la particular de la ecuación no homogénea. Esta última se halla por cualquiera de los procedimientos usuales. La solución general de la homogénea podemos escribirla de la forma

$$x_{gh}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t}$$

donde s_i , $i = 1 \dots n$ son las raíces de la ecuación característica

$$a_n s^n + \dots + a_0 = \prod_{i=1}^n (s - s_i) = 0$$

Como ya sabemos, estas raíces son, en general, complejas

$$s_i = \alpha_i + j \beta_i$$

y, puesto que los coeficientes a_i son reales, las raíces s_i pueden aparecer como reales o como pares de raíces complejas conjugadas.

Si definimos las constantes de tiempo del sistema como $\tau_i \equiv -\frac{1}{\alpha_i}$, la respuesta será de la forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} e^{j \beta_i t} + x_{pnh}(t) \quad (\text{G.3})$$

Las constantes A_i quedan determinadas por las condiciones iniciales.

Si las constantes de tiempo son positivas ($\tau_i \geq 0$, $\alpha_i \leq 0$), el sistema se dice que es *estable*. Si para alguna raíz $\tau_i < 0$, el sistema es *inestable*. Es evidente que, puesto que en un sistema inestable la salida puede crecer indefinidamente aunque la entrada $y(t) = 0$, los sistemas pasivos deben ser inherentemente estables.

La figura G.2 resume gráficamente todo ésto representando a las raíces en el plano complejo s .

La entrada y la salida de un sistema real deben tener comienzo y final y, si las variables correspondientes están asociadas, como en nuestro caso las tensiones e intensidades, a transvases de energía, deberán ser de cuadrado sumable, es decir, deberán

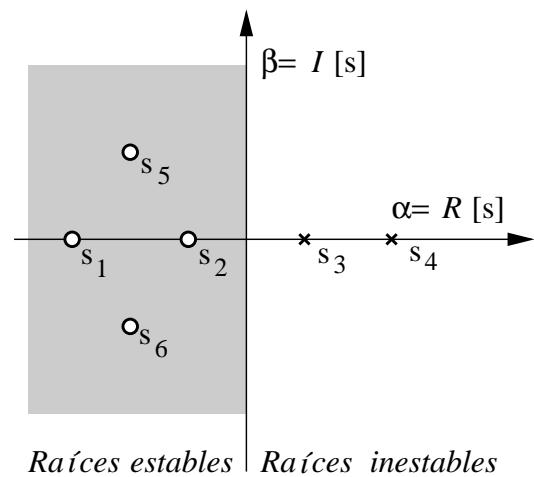


Figura G.2:

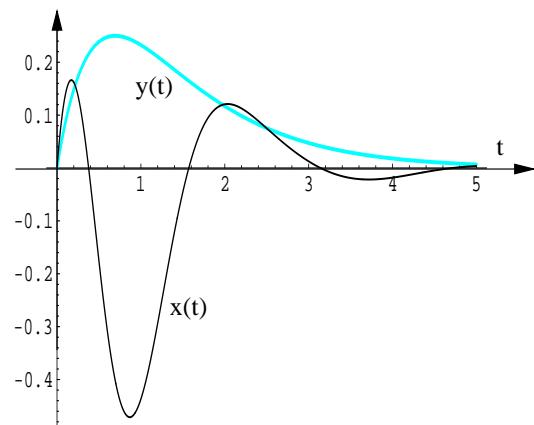


Figura G.3:

corresponder a energías finitas. En los circuitos pasivos, para los que la relación entre entrada y salida debe ser causal, la salida no podrá nunca preceder a la entrada.

De G.3 se deduce que, si se deja transcurrir un tiempo $t >> \tau_{max}$ mucho mayor que la máxima constante de tiempo del sistema, de la respuesta del mismo desaparecen los términos exponenciales. Llamaremos *respuesta estacionaria* a

$$x_e(t) = x(t >> \tau_{max})$$

A la primera parte de la respuesta se le suele calificar como *respuesta transitoria*

Comúnmente se restringe el término de respuesta estacionaria al caso en que $y(t)$, como se muestra en la figura G.4, es el producto de una función armónica por la función escalón unitario $u(t)$.

$$y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \alpha) u(t)$$

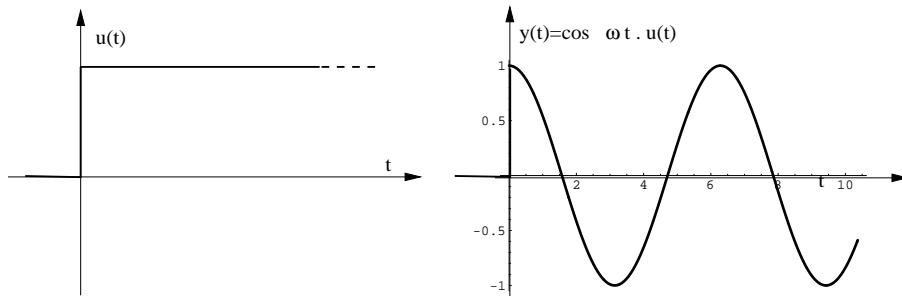


Figura G.4:

En este caso, una solución particular adecuada para la región $t > 0$ es

$$x_{ph}(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$$

que también es la solución estacionaria.

$$x_e(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$$

X_0 y δ se calculan, de forma fácil, pero engorrosa, sin más que aplicar L_A a x_e e identificar el resultado con $\xi(t)$.

La figura G.5 representa un ejemplo típico de entrada y salida de un sistema lineal.

Cuando $x(t)$ e $y(t)$ son transformables por Fourier, podemos obtener la respuesta del sistema hallando la transformada de ambos miembros de G.1

$$\mathcal{F}[L_A x(t)] = \mathcal{F}[L_B y(t)]$$

Si empleamos la notación $s \equiv j\omega$, la relación entre las componentes armónicas, transformadas de Fourier o *densidades espectrales* $\mathcal{X}(s)$ e $\mathcal{Y}(s)$, de la entrada y de la salida, puede escribirse

$$\mathcal{X}(s) = \mathcal{T}(s) \mathcal{Y}(s) \quad (\text{G.4})$$

$$\mathcal{T}(s) \equiv \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \quad (\text{G.5})$$

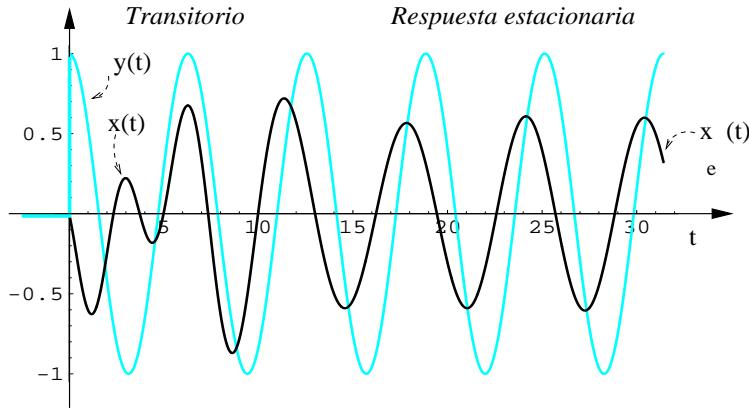


Figura G.5:

$T(s)$ es la *función de transferencia* del sistema y tiene la forma de función racional de la variable s ¹.

La solución del problema se obtiene hallando la transformada inversa de $\mathcal{X}(s)$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{X}(s)]$$

G.1.3. Diagrama de Bode

Los diagramas de Bode son representaciones logarítmicas del módulo y la fase de la función de transferencia que describen su dependencia de la frecuencia.

Puesto que

$$X(s) = T(s) Y(s)$$

para obtener el módulo X_0 y la fase δ de $X(s)$, basta obtener el módulo y la fase de la función de transferencia y componerlos con los de $Y(s)$. Si

$$\begin{aligned} T(s) &= |T| s^{j\varphi} \equiv |T|, \underline{\varphi}, \quad Y(s) = Y_0, \underline{\alpha} \Rightarrow \\ X(s) &= X_0, \underline{\delta} = Y_0 |T|, \underline{\alpha + \varphi} \end{aligned}$$

Los módulos se multiplican y las fases se suman. En el caso de división de complejos, los módulos se dividen y las fases se restan.

Ya disponemos de medios analíticos para el cálculo de $|T|$ y φ pero, en muchos casos, basta con realizarlo gráficamente.

Puesto que $T(s)$ es una función compleja, mostraremos por separado su módulo y su argumento o fase. Una simple inspección de este diagrama puede darnos una visión muy amplia del comportamiento del sistema.

En el primer diagrama se representa $y_1 = T_{Db} \equiv 20 \log |T|$ frente a $x = \log \omega$. T_{Db} es, por definición, la expresión de la amplitud en *Decibelios*².

¹En general interesa interpretar a s como una variable compleja $s = \alpha + j\beta$, con parte real

²El término *Deci* tiene su origen en la definición de la medida de potencia en Decibelios: $P_{Db} \equiv 10 \log |P|$, siendo la potencia proporcional al cuadrado de la amplitud.

En el segundo, $y_2 = \varphi = /T$ frente a $x = \log \omega$.

Si factorizamos las funciones polinómicas que aparecen en el numerador y denominador de la función de transferencia, esta tendrá la forma

$$T(s) = \frac{b_m (s - z_1) \cdots (s - z_m)}{a_n (s - p_1) \cdots (s - p_n)} \quad (\text{G.6})$$

donde z_i son los ceros y p_j los polos de la función de transferencia.

En nuestro caso, está claro que los coeficientes a_i y b_j son reales puesto que no son sino los de la ecuación correspondiente a un sistema real. Como un polinomio de coeficientes reales sólo puede tener raíces reales o complejas conjugadas, los ceros y los polos de nuestra $T(s)$ serán reales o complejos conjugados.

Las raíces complejas conjugadas se podrán poner en la forma

$$s_k = \alpha_k + j\beta_k, \quad s_l = \alpha_k - j\beta_k = s_k^*$$

donde s_k^* es el complejo conjugado de s_k . Luego, el producto del par conjugado toma la forma

$$(s - z_k)(s - z_l) = s^2 - 2s\alpha_k + |s_k|^2$$

E introduciendo las *frecuencias de resonancia*

$$\omega_k \equiv |s_k|$$

y los *factores de amortiguamiento*

$$\delta_k = -\frac{\alpha_k}{\omega_k}$$

se tiene

$$(s - z_k)(s - z_l) = s^2 - 2\delta_k \omega_k + \omega_k^2 \quad (\text{G.7})$$

Con esta notación y separando las raíces reales y complejas conjugadas, $T(s)$ toma la forma

$$T(s) = \frac{b_m}{a_n} s^l \frac{\prod_i (s - z_i) \prod_k (s^2 - 2\delta_k \omega_k + \omega_k^2)}{\prod_j (s - p_j) \prod_r (s^2 - 2\delta_r \omega_r + \omega_r^2)} \quad (\text{G.8})$$

donde i recorre los ceros reales
 j , , , , polos , ,
 k , , , , ceros complejos y sus conjugados
 r , , , , polos , , , , , , ,

l es el número de ceros en el origen, si es positivo, o el de polos en el origen, si es negativo.

Es conveniente utilizar la función de transferencia normalizada. Para ello definimos las constantes de tiempo τ y las frecuencias de corte ω_c

$$\tau_i \equiv -\frac{1}{\alpha_i} \equiv +\frac{1}{\omega_{c_i}}$$

con lo que

$$T(s) = \mathcal{K} s^l \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(\frac{s^2}{\omega_k^2} - 2\delta_k \frac{s}{\omega_k} + 1 \right)}{\prod_j (1 + \tau_j s) \prod_r \left(\frac{s^2}{\omega_r^2} - 2\delta_r \frac{s}{\omega_r} + 1 \right)} \quad (\text{G.9})$$

\mathcal{K} se denomina *ganancia de Bode*.

La función de amplitud es

$$\begin{aligned} y_1 &= 20 \log |T| = 20 \left\{ \log \mathcal{K} + l \log \omega + \sum_i \log \sqrt{1 + \tau_i^2 s^2} - \sum_j \log \sqrt{1 + \tau_j^2 s^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_k \log \sqrt{\left(1 - \frac{s^2}{\omega_k^2}\right)^2 + \left(2\delta_k \frac{s}{\omega_k}\right)^2} - \sum_r \log \sqrt{\left(1 - \frac{s^2}{\omega_r^2}\right)^2 + \left(2\delta_r \frac{s}{\omega_r}\right)^2} \right\} \quad (\text{G.10}) \end{aligned}$$

y la de fase

$$\begin{aligned} y_2 &= \varphi = \underline{\mathcal{K}} + l \frac{\pi}{2} + \sum_i \operatorname{artg}(\tau_i \omega) - \sum_j \operatorname{artg}(\tau_j \omega) + \\ &\quad + \sum_k \operatorname{artg} \left(\frac{2\delta_k \frac{s}{\omega_k}}{1 - \frac{s^2}{\omega_k^2}} \right) - \sum_r \operatorname{artg} \left(\frac{2\delta_r \frac{s}{\omega_r}}{1 - \frac{s^2}{\omega_r^2}} \right) \quad (\text{G.11}) \end{aligned}$$

Para la representación, o diagrama, de Bode es necesario dibujar cada uno de los términos de y_1 e y_2 y sumar.

Interesa definir previamente unas unidades adimensionales que miden los intervalos de frecuencia. Así, pués, entre ω_1 y ω_2 se dice que hay un numero de

$$\text{Décadas} : D_{12} \equiv \log_{10} \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$\text{Octavas} : O_{12} \equiv \log_2 \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Por ejemplo, entre ω_1 y ω_2 hay una década si $\omega_2 = 10\omega_1$ o una octava si $\omega_2 = 2\omega_1$. Veamos como se representaría cada uno de los sumandos de $T(s)$.

1. Ganancia de Bode: $T(j\omega) = \mathcal{K}$.

$$\mathcal{K} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \mathcal{K}_{Db} = 20 \log |\mathcal{K}| \\ y_2 = \varphi = \underline{\mathcal{K}} = \begin{cases} 0 & \text{para } \mathcal{K} > 0 \\ \pi & \text{para } \mathcal{K} < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{G.12})$$

La figura G.6 representa el correspondiente diagrama de Bode

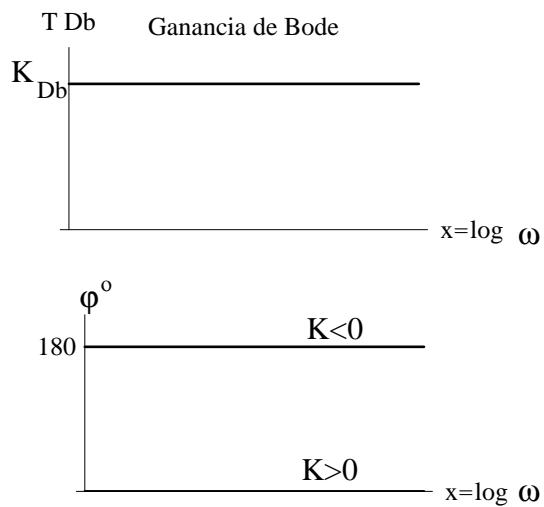


Figura G.6:

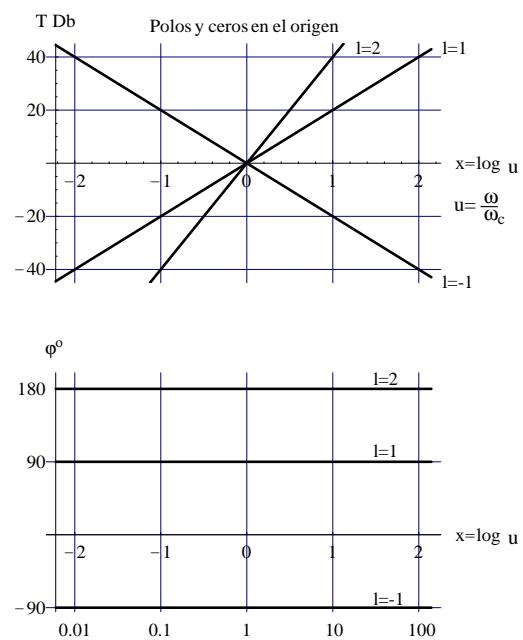


Figura G.7:

2. Ceros y polos en el origen: $T(j\omega) = (j\omega)^{\pm l}$.

$$(j\omega)^{\pm l} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = T_{Db} = \pm 20l \log \omega = \pm 20l x \\ y_2 = \varphi = /(\underline{j\omega})^{\pm l} = \pm l \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{G.13})$$

$y_1(x)$ es una recta de pendiente $\pm 20l$ Decibelios por década, como se muestra en la figura G.7.

3. Ceros y polos de primer orden: $T(j\omega) = (1 + j\omega \tau)^{\pm 1} = \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\pm 1}$.

$$\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\pm 1} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \pm 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \\ y_2 = \pm \operatorname{artg} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{cases} \quad (\text{G.14})$$

Las asíntotas y el punto central del diagrama son

$$\begin{aligned} \text{para } \omega \ll \omega_c & \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \\ \text{para } \omega = \omega_c & \begin{cases} y_1 = \pm 20 \log \sqrt{2} = \pm 3 \text{ Db} \\ y_2 = \pm \frac{\pi}{4} \end{cases} \\ \text{para } \omega \gg \omega_c & \begin{cases} y_1 = \pm 20 \log \frac{\omega}{\omega_c} = \pm (20x - 20 \log \omega_c) \\ y_2 = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Las asíntotas de alta frecuencia, para la función amplitud, tienen una pendiente de ± 20 Decibelios por década.

Cuando no se necesita mucha precisión, el diagrama puede aproximarse por tramos rectos. Para y_1 , despreciando errores inferiores a 3 Db, pueden utilizarse las asíntotas de baja y alta frecuencia. Para y_2 , en la zona alejada de la frecuencia de corte se aproxima por las asíntotas y en la cercana mediante un segmento recto. Según el caso pueden tomarse dos opciones, véase la figura G.8.

a) Segmento que pasa por los puntos

$$(\omega = 0.1 \omega_c, y_2 = 0), (\omega = \omega_c, y_2 = \pm \frac{\pi}{4}), (\omega = 10 \omega_c, y_2 = \pm \frac{\pi}{2})$$

b) Segmento que pasa por los puntos

$$(x = 0.2, y_2 = 0), (x = 1, y_2 = \pm \frac{\pi}{4}), (x = 2, y_2 = \pm \frac{\pi}{2})$$

Esta aproximación es tangente a la curva de fase en el punto central.

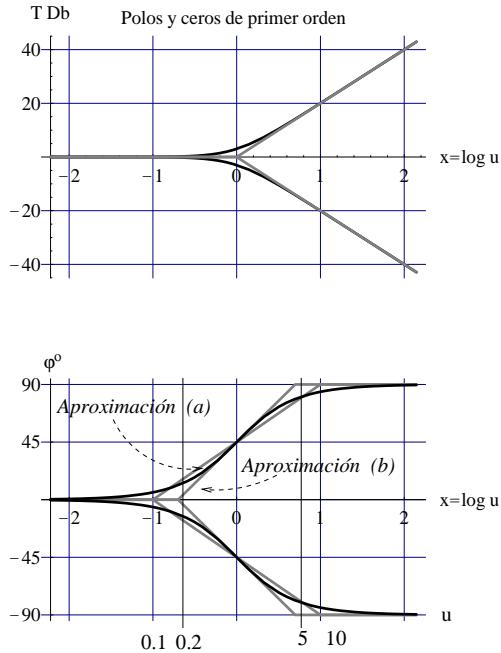


Figura G.8:

$$4. \text{ Ceros y polos de segundo orden: } T(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\delta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\pm 1}.$$

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\delta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\pm 1} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \pm 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\delta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \\ y_2 = \pm \operatorname{artg} \left(\frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \end{cases} \quad (\text{G.15})$$

Las asíntotas y el punto central del diagrama son

$$\begin{aligned} \text{para } \omega \ll \omega_0 & \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array} \right. \\ \text{para } \omega = \omega_0 & \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \pm f(\delta) \\ y_2 = \pm \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \\ \text{para } \omega \gg \omega_0 & \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \pm 40 \log \frac{\omega}{\omega_0} = \pm(40x - 40 \log \omega_0) \\ y_2 = \pm \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

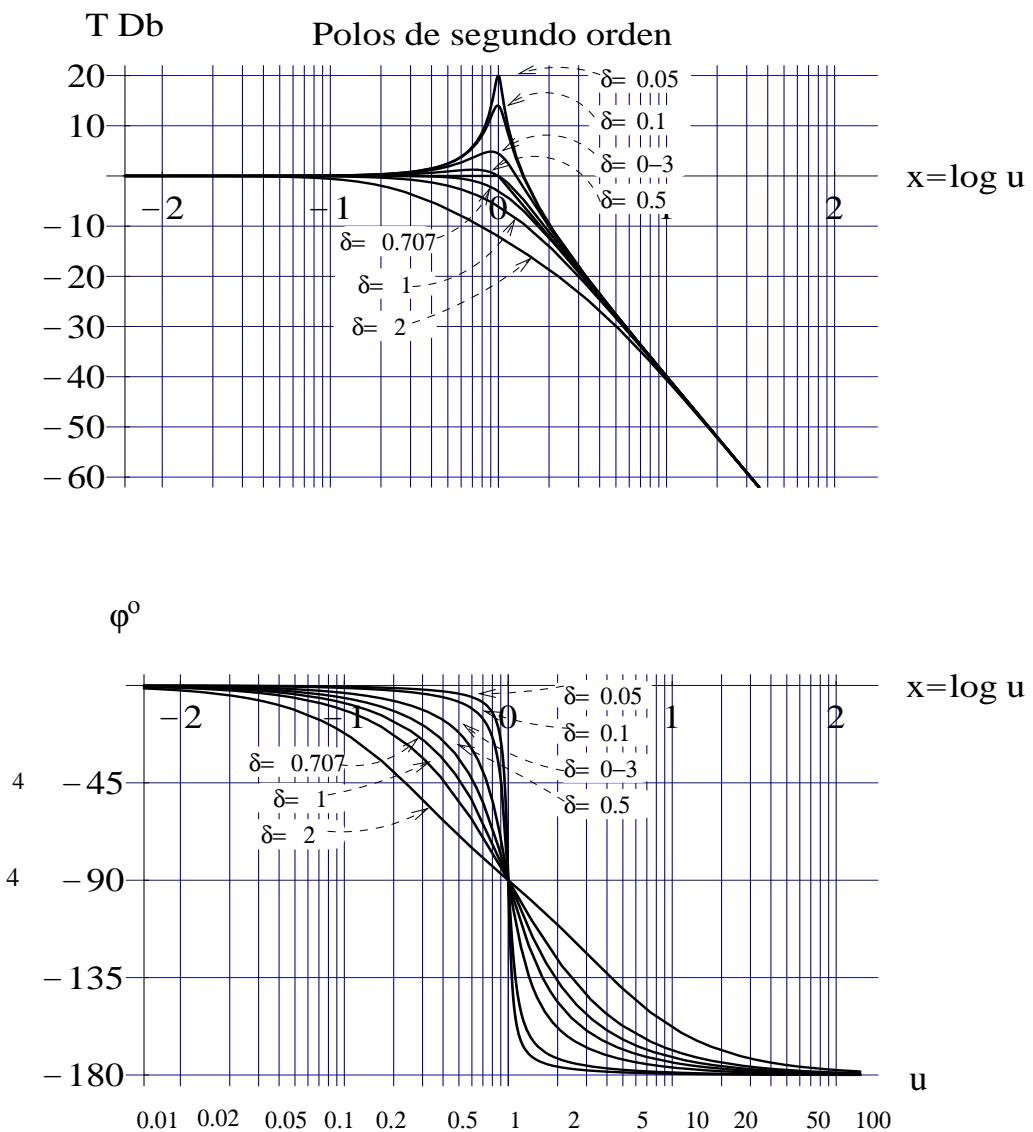


Figura G.9:

Como se ve en la figura G.9, en las cercanías de $\omega \sim \omega_0$ es necesario hacer una corrección en función de δ y las asíntotas de alta frecuencia, para la función amplitud, tienen una pendiente de ± 40 Decibelios por década.

G.2. Problemas

g-1. Halle los diagramas de Bode de amplitud y fase de las siguientes funciones de transferencia:

$$\text{a)} \ T_1 = \frac{100(1 + 0,1s)}{s(s^2 + 20s + 10^4)}, \quad s \equiv j\omega$$

$$\text{b)} \ T_2 = \frac{120(s + 2)}{s^2(s + 4)(s + 6)}$$

$$\text{c)} \ T_3 = \frac{1 + (j\omega/2) + (\omega/2)^2}{j\omega(1 + j\omega/0,5)(1 + j\omega/4)}$$

g-14

Apéndice H

Introducción histórica

Este es un libro de texto y los criterios empleados en su elaboración pretenden responder a éste carácter. Su orden y estructura están, hasta cierto punto, alejados de su posible génesis histórica; ni tan siquiera en la asignación de nombres propios, a conceptos y leyes, se pretende algún tipo de rigor o justicia históricos. Esto, que parece inevitable en un libro de esta naturaleza, tiene el inconveniente de enmascarar la visión del proceso por el cual los conceptos y teorías han ido formándose y evolucionando a través del tiempo como consecuencia de una continua e ingente labor de creación, verificación y desarrollo. Por otra parte, el uso de una argumentación y de un lenguaje depurados puede producir la impresión, superada la primera etapa de asimilación, de que los conceptos son más simples y definitivos de lo que realmente son.

Para subsanar esta situación, el lector debe acudir a otras fuentes. La historia de la teoría del campo electromagnético que, como todas las historias, es controvertida, debe ser contada por especialistas pero creemos útil exponer aquí un breve resumen con el que ilustrar, de forma superficial, sin pretensiones de rigor, la génesis de dicha teoría. Aunque es poco asequible y contiene algún error notable, la primera fuente que debería consultar quien desee ampliar y precisar conocimientos en este tema es el libro de Sir E. Whittaker [Whittaker]. Más asequible es el de [Berkson].

Comenzaremos, lo que constituye un lugar común, situando a los orígenes de la electricidad y del magnetismo, como los de la mayoría de las ramas de la Ciencia, en la antigua Grecia. Se atribuyen a Tales de Mileto (640-546), como primer sabio de Grecia, los primeros estudios de la atracción de objetos ligeros por el ámbar frotado y del hierro por la piedra imán. Para Tales, todo el Universo es un organismo vivo, incluso su parte inanimada, como lo demuestran las acciones del ámbar y del imán: el imán tiene alma porque atrae al hierro. Precisamente, el ámbar (electrón) y la magnetita, procedente ésta última de la vecina región de Magnesia, dan origen a los nombres Electricidad y Magnetismo.

Más adelante, Aristóteles (384-322), que abordó prácticamente todos los temas de su tiempo, propuso la adición de un quinto elemento, el éther, a los cuatro preconizados por Empédocles. Este ether, substrato universal, presunto soporte de la propagación de las interacciones, ha sido desterrado de las teorías físicas actuales pero ha jugado un papel fundamental en la conformación de la teoría electromagnética.

Hasta el siglo XIII de nuestra era no constan avances dignos de mención. Por entonces

empiezan los mareantes mediterráneos a utilizar la aguja magnética, flotando sobre un corcho, como referencia de rumbo. Pedro de Maricourt , más conocido como Peter Peregrinus, monta la aguja sobre un pivote y le añade el círculo graduado, dando lugar a la primera brújula. Hacia 1270, en carta a un amigo, describe sus esfuerzos por construir un móvil que aproveche la fuerza magnética, logro reservado a Faraday, y pone de manifiesto como los polos de un imán son inseparables y de naturaleza tal que se atraen entre contrarios y se repelen entre iguales. Construye una esfera de piedra imán y observa que las agujas magnéticas se alinean según los meridianos de la misma. No obstante, no acierta a identificar a la Tierra como a un imán.

Realmente, el origen científico del electromagnetismo hay que situarlo en el siglo XVII con la publicación por William Gilbert, en 1600, de *De Magnete Magneticisque Corporibus, et Magno Magnete Tellure* (Acerca del magnetismo, cuerpos magnéticos, y el gran imán Tierra) [Gilbert]. Construye, como Peregrinus, un imán esférico al que llama *Terrella* y descubre la declinación magnética que atribuye al hecho de que la Tierra es efectivamente un imán. Emplea por primera vez términos como atracción eléctrica, fuerza eléctrica y polo magnético que hoy son de uso cotidiano. Describe como *substancias eléctricas* a una serie de ellas que, como el ámbar, atraen a objetos poco pesados. En otra obra suya atribuye las órbitas planetarias a una cierta forma de magnetismo. Por último, no carece de interés el mencionar su demostración de que el ajo no destruye al magnetismo.

A partir de Gilbert se genera un vivo interés por las experiencias de tipo eléctrico. El invento de máquinas electrostáticas, por Otto Von Guericke y otros, así como el descubrimiento del condensador primitivo, la botella de Leyden, de incierto origen, permitieron disponer de cargas y tensiones mayores con que seguir experimentando.

La conducción eléctrica es descubierta por Gray y, poco después, DesagUILIER acuña los términos conductor y aislador.

Hacia 1733, Du Fay (1698-1739) pone de manifiesto la existencia de fenómenos de repulsión. Reconoce la existencia de dos estados de electrificación, a los que nombra como vítreo y resinoso, producidos por frotamiento en el vidrio y la resina, y que atribuye a la existencia de dos fluidos distintos.

Cantón (1749) fabrica el primer imán artificial y relaciona las alteraciones de la orientación de la brújula con las auroras boreales intuyendo el mecanismo de lo que hoy conocemos como tormentas magnéticas.

Podemos considerar que Benjamín Franklin (1706-1790) cierra una primera etapa del desarrollo de la electricidad. A él se debe el descubrimiento del poder de las puntas y la identificación del rayo y el trueno como grandes versiones de la chispa eléctrica y de su sonido. Ésto le lleva al invento del pararrayos. Su célebre experiencia de la cometa es un ejemplo de osadía científica pues, si bien salió ilesa de la prueba, costó la vida a varios de sus imitadores. Por último, aunque era partidario de la teoría de fluido único, designó a los estados de electrificación con los signos (+) y (-) que, según él, denotan que un cuerpo está cargado en exceso, carga positiva, o por defecto, carga negativa, de un único fluido. Este convenio, aunque tampoco concuerda con la identificación del fluido único con los electrones de un metal, es el que subsiste hasta nuestros días. La carga positiva (vitrea) es la que será repelida por vidrio frotado con seda y la negativa la que lo será por el lacre frotado con piel de gato. Symmer (1759) y otros sostienen, sin

embargo, que la materia ordinaria es neutra por contener partes iguales de dos fluidos imponderables a los que califican como electricidad positiva y negativa.

En una segunda etapa, desde Cavendish a Faraday, la electricidad y el magnetismo se hacen cuantitativos y sistemáticos, descubriendose los fenómenos de acoplamiento que permiten fundir a estas dos disciplinas, hasta ahora independientes, en una sola: el Electromagnetismo.

Cavendish (1731-1810) fue un extraordinario investigador y persona peculiar en extremo. Descubrió leyes fundamentales que no llevan su nombre, como la de Coulomb y la de Ohm: su timidez y desinterés por publicar fueron tales que su obra sólo pudo conocerse plenamente cuando, después de su muerte, sus papeles fueron publicados por Maxwell.

En 1767, Priestley deduce, por analogía con el fenómeno gravitatorio, que la interacción entre cargas debe seguir la ley del inverso del cuadrado de la distancia. En 1785, Charles Augustín Coulomb establece con precisión, en una extraordinaria experiencia, la ley que lleva su nombre, confirmando de esta manera las previsiones de Priestley.

Hasta aquí hemos seguido el progresivo desarrollo de la electricidad no encontrando nada paralelo en el magnetismo. El rompimiento de esta situación se posibilita con el descubrimiento de los potenciales de contacto y, como consecuencia, de la *pila voltaica* por Alessandro Volta (1741-1827). Volta inventa también el electróforo, precedente inmediato de los actuales condensadores.

De la misma forma que las máquinas electrostáticas y la botella de Leyden permitieron el desarrollo de la electricidad, las pilas voltaicas, al poner a disposición del experimentador cantidades substanciales de corriente, permitieron el desarrollo del magnetismo.

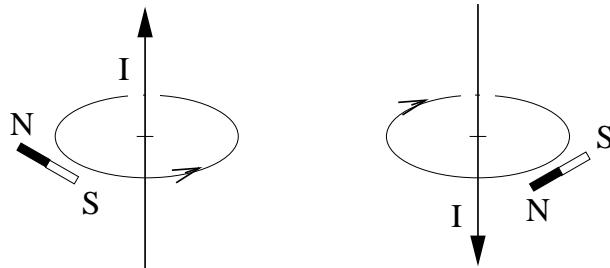


Figura H.1:

El descubrimiento, no casual, por Hans Christian Oersted (1777-1851) en 1819, de que una aguja magnética se alinea perpendicularmente a un hilo recto por el que pase una corriente, es decir, de la interacción entre corrientes e imanes, dio lugar a un resurgir en el estudio de los fenómenos magnéticos (véase la figura H.1).

Arago descubre que las corrientes atraen a las limaduras de hierro y que, además, son capaces de inducir el estado de imanación. Inmediatamente, André Marie Ampère (1775-1836) establece en 1820 la regla de la mano derecha, o regla del sacacorchos, según la cual, si un conductor que porte corriente se coge con la mano derecha de forma que el pulgar apunte en la dirección convencional de la corriente, del (+) al (-) de la pila, las líneas de fuerza magnética, cuya dirección viene determinada por la aguja magnética y

cuyo sentido es de sur a norte de la misma, rodean al hilo en el sentido indicado por el resto de los dedos(véase la figura H.2).

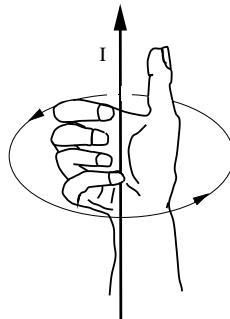


Figura H.2:

Descubre también que no sólo tienen lugar interacciones entre imanes y entre corrientes e imanes, sino que interacciones del mismo tipo se dan entre corrientes: dos espiras paralelas y coaxiales se atraen si son recorridas por corrientes en el mismo sentido y se repelen en caso contrario. Si, en esta última situación, a una de las espiras se le deja orientarse libremente, girará de forma que la corriente circule por ella en el mismo sentido que por la otra espira (véase la figura H.3).

Como concreción de estos hechos, generalizando a los *elementos de corriente* las nociones newtonianas de acción a distancia, aunque violando el principio de reacción, Ampère enuncia matemáticamente la ley de fuerzas entre corrientes. En esta ley se da la primera aplicación no trivial de las matemáticas al electromagnetismo y, aunque su validez se limita a corrientes cerradas, tiene el mismo rango de validez que la ley de Coulomb.

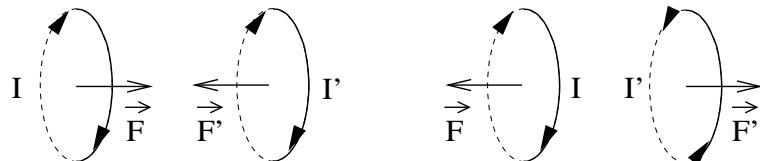


Figura H.3:

Como aportaciones adicionales de Ampère, no tan fundamentales como la anterior, pero importantes en todo caso, citaremos la concepción de los cuerpos imanados como conjunto de corrientes microscópicas permanentes, la construcción del primer solenoide y el invento del primer amperímetro, el de tangentes, que mide la corriente por la desviación que produce, al pasar por una espira, en una aguja magnética que, a su vez, está sometida al campo magnético terrestre.

Dentro de este periodo debemos dejar constancia del enunciado de la ley de Ohm (1787-1845) en 1827, aunque, como ya hemos dicho, había sido descubierta, pero no publicada, por Cavendish. También debemos citar a Humphry Davy (1778-1829), no sólo por ser un gran científico y conferenciante en esta materia, iniciador de los estudios

de conducción en líquidos y gases, inventor de la lámpara de arco, sino por ser el inspirador y maestro de Faraday, a quien contrató como ayudante de laboratorio, pero a quien no trató excesivamente bien; los celos profesionales le llevaron incluso a estorbar el nombramiento de Faraday como miembro de la Royal Society. Podemos presentar también a Dayy como ejemplo de científico imprudente, como tantos otros, pues probaba y olía todos los productos químicos con los que experimentaba, como el gas de la risa, que descubrió. Murió a temprana edad de una probable intoxicación química.

Con Michael Faraday (1791-1867) consideraremos cerrada una segunda etapa en la que la electricidad y el magnetismo se desarrollan casi por completo desde el punto de vista experimental y conceptual. En la siguiente, de Maxwell a Einstein, se completa el cierre de la teoría, terminando el acople del campo eléctrico con el magnético, dándole la expresión formal y conceptual con que hoy lo presentamos y comprobando experimentalmente, como en la brillante experiencia de Hertz, las predicciones teóricas.

La vida de Faraday es ejemplar desde el punto de vista científico y humano y su aportación al electromagnetismo, a la que sólo puede equipararse la de Maxwell, es fundamental. Sus descubrimientos en este área de la Ciencia, la inducción electromagnética, el comportamiento dieléctrico y diamagnético de la materia, la rotación de Faraday del plano de polarización de la luz, etc., están generados y presididos por una firme, aunque abierta, concepción del mundo en la que un continuo de líneas de fuerza, el mar o campo de fuerzas, constituye la única substancia física. Esta concepción, no exenta de ambigüedades y dificultades, permitirá a Maxwell y a sus sucesores desarrollar, en un proceso evolutivo, al electromagnetismo como la teoría clásica de campos que hoy conocemos.

Haciendo una exposición simplista del tema, podemos dividir las concepciones del mundo en el siglo XIX en dos grupos: la concepción newtoniana y el conjunto de las no newtonianas; conviene advertir que Newton, en carta a un discípulo, expone serias dudas sobre la razonabilidad de dicha concepción 'newtoniana'.

Los newtonianos ven al Universo como constituido por corpúsculos materiales, espacio vacío y fuerzas que actúan 'a distancia', entre corpúsculos, de forma directa e instantánea.

Las teorías no newtonianas niegan algún aspecto de la anterior, especialmente la existencia del vacío y de la acción a distancia. Descartes equipara a la materia con la extensión y explica la interacción como acción de contacto superficial. Leibnitz, que rechaza el vacío, asigna fuerzas repulsivas a todos los puntos de la materia, no sólo a las partículas de tamaño finito, para explicar la impenetrabilidad de los cuerpos. Para Kant, masa y extensión son equiparables, los cuerpos materiales son regiones continuas de fuerzas puntuales repulsivas, que 'llenan' el espacio que ocupan y actúan sólo sobre los puntos de fuerza contiguos, y fuerzas atractivas que actúan a distancia y no 'llenan' el espacio a través del que actúan.

Faraday es firmemente antinewtoniano y su más claro precedente está en Oersted. Para este último, todos los tipos de interacciones son equivalentes y convertibles entre sí y a las básicas de atracción y repulsión. Su descubrimiento de la interacción entre corrientes e imanes es el resultado de su búsqueda de la conversión de la fuerza eléctrica en fuerza magnética. Esta búsqueda de lo que ahora llamaríamos el *Campo unificado*, será también una constante en Faraday, quien intenta, repetidamente, demostrar la

equivalencia entre la fuerza magnética y la gravitatoria. A los 25 años, tres después de empezar su carrera científica, dice no atreverse a afirmar positivamente que la atracción de agregación y la afinidad química sean realmente lo mismo que la acción gravitatoria y la atracción eléctrica 'Pero tengo para mí que si...'. Estas ideas las plasma en un oscuro pero fructífero principio de conservación de las fuerzas que luego encontraría su concreción en los principios de conservación de energía y momento con Mayer, Helmholtz, Joule, Poynting, etc. Faraday cree en la substancialidad, o realidad, de las líneas de fuerza, que constituyen la única substancia física y que, en definitiva, el Universo es un inmenso mar, o campo, de fuerzas en el cual los puntos de fuerza actúan sobre los contiguos dando lugar a una propagación de las acciones. Faraday visualiza el 'conflicto eléctrico' de Oersted como un continuo de líneas de fuerza que interpenetra al espacio circundante provocando un estado de tensión en la materia, la cual constituye unidad con la fuerza. Estas líneas de fuerza son móviles pero dotadas de una cierta 'pereza' (hoy diríamos 'inercia'), debido a lo cual la interacción lleva un tiempo: 'Me inclino a comparar la difusión de las fuerzas magnéticas, a partir de un polo magnético, con las vibraciones sobre la superficie del agua perturbada... . Me inclino a pensar que la teoría vibratoria se aplica satisfactoriamente a estos fenómenos igual que se aplica al sonido y, muy probablemente, a la luz.'

Junto con esta firme concepción, siempre abierta a las ideas ajenas, Faraday poseía una extraordinaria capacidad para pasar de la idea abstracta a la experiencia concreta sin ningún proceso intermedio matemático más allá del álgebra elemental. Efectivamente, era uno de los diez hijos de un herrero y ejercía de aprendiz de encuadrador cuando entró a trabajar como ayudante en el laboratorio de Davy. No tenía formación matemática ni científica previa y, salvo a las leyes de la electrolisis, no llegó a dar expresión cerrada a ninguno de sus descubrimientos. Esta laguna será cubierta por Maxwell.

James Clerk Maxwell (1831-1879) es, en cierto modo, la antítesis y el complemento de Faraday; de familia aristocrática, poseía una extensa cultura y una sólida formación matemática que le permitió publicar su primer trabajo matemático a los catorce años. Basándose en la obra de Faraday pero modificando algunos conceptos e interpretaciones, Maxwell estructura matemáticamente la teoría electromagnética y la completa con la introducción de la corriente de desplazamiento.

Maxwell justifica la concepción de acción contigua admitiendo la existencia de un medio, de características muy peculiares, que actúa de soporte de dichas acciones. Este medio hipotético es el éther, el *éther luminífero* que ya se había postulado para la propagación de la luz, del cual propone modelos complejos, sometidos a las leyes de la mecánica de Newton, que le permiten estructurar matemáticamente a la teoría electromagnética. Como consecuencia del modelo propuesto aparece una *corriente de desplazamiento*, asociada a los remolinos del éther, cuya importancia no reconoce hasta años más tarde, apuntando en su *Tratado* que esta es una de las principales peculiaridades de su teoría.

Por analogía con la teoría elástica, en la que la velocidad de las ondas transversales es proporcional a la raíz cuadrada del cociente entre rigidez y densidad del medio, Maxwell deduce que la velocidad de las ondas transversales que se propagan por el éther coinciden con la velocidad de la luz, lo que sugiere el carácter electromagnético de la misma.

El modelo de éther empleado por Maxwell no era en modo alguno completo, pudiendo

decirse que era a un mismo tiempo fantástico e inverosímil. Dadas las dificultades que encuentra para construir un modelo físicamente satisfactorio, opta por prescindir de él, aunque nunca deja de pensar que la verdadera explicación de sus ecuaciones debe residir en un mecanismo sometido a las leyes de Newton.

Maxwell vuelve por fin a enunciar sus ecuaciones electromagnéticas con independencia de cualquier explicación mecánicista y comprueba directamente, a partir de ellas, que los campos cumplen una ecuación de onda en la que la velocidad de fase coincide con la velocidad de la luz. El carácter electromagnético de la luz fue puesto de manifiesto por Hertz , con sus experiencias de propagación de ondas electromagnéticas en 1887, y por Zeeman en 1896 al demostrar que existían cargas capaces de moverse con aceleración suficiente como para radiar dentro del espectro visible.

La contribución de Maxwell a la estructuración matemática del electromagnetismo es básica: por una parte, incorpora las aportaciones de los matemáticos europeos, Laplace, Gauss, etc. y, por otra, introduce nuevos conceptos como el del rotacional [Maxwell].

No obstante la exposición de sus ecuaciones se hace componente a componente; el lenguaje analítico vectorial fue introducido, no sin oposición, por Heaviside y Gibbs. Posteriormente se desarrollan aspectos parciales importantes como la teoría de los potenciales y la teoría del electrón en las que cabe resaltar especialmente la contribución de Hendrik Antoon Lorentz (1835-1928) y las de Poincaré, Abraham, etc. , pero concluiremos con una breve relación del proceso de crisis de las teorías del éther, resuelta por Einstein, dentro de su teoría de la relatividad especial, con la eliminación del mismo dado no es necesario.

Las teorías del éther surgen impulsadas por el deseo de encontrar un medio elástico que, según la teoría ondulatoria de la luz, fuese capaz de soportar ondas luminosas. Casi todas pueden ser consideradas como intentos de dar una explicación unificada de los campos sobre la base de las leyes de Newton.

La principal dificultad que aparece en un principio es la de encontrar un medio que permita la transmisión de las ondas transversales pero no de las longitudinales. Los modelos que surgen son numerosos y, aparte del ya mencionado de Maxwell, citaremos el gran esfuerzo hecho en este sentido por Lord Kelvin (W. Thomson) a quien se deben varios modelos ingeniosos.

El éxito de la teoría de Maxwell y la posterior confirmación por Hertz del carácter propagativo de las ondas radiadas parece, por una parte, confirmar la hipótesis de un éther soporte de la propagación y, por otra, pone de manifiesto nuevas dificultades.

En primer lugar, Helmholtz demuestra que las tensiones de Maxwell no permitirían el equilibrio del éther, por lo que sus distintas partes deberían estar en movimiento, y por otra, como es fácil de comprobar, las leyes de Maxwell no son invariantes frente a las transformaciones de Galileo, por lo que si la velocidad de la luz en un determinado sistema es c , en otro sistema que esté en movimiento con respecto al primero, la velocidad de la luz debería ser distinta. Sin embargo las experiencias diseñadas para medir las variaciones de la velocidad de la luz, como la de Michelson y Morley (1887), fracasan, haciendo patente la imposibilidad o, al menos, la dificultad de medir la velocidad de los cuerpos con respecto al éther.

Los numerosos intentos de salvar esta situación llevan a emitir hipótesis sobre el éther que lo hacen cada vez más insubstancial y contradictorio. Mientras que Hertz

supone que los cuerpos en movimiento arrastran al éther circundante, Lorentz supone todo lo contrario.

A grandes rasgos, la teoría del electrón de Lorentz consiste en suponer que los cuerpos ponderables están constituidos por una multitud de diminutas partículas cargadas, positiva y negativamente, que se mueven a través del éther sin perturbarle. Aunque rechaza la existencia del sistema de referencia absoluto de Newton, Lorentz piensa que este éther, en el que cada una de sus partes están en reposo con respecto a las demás, constituye una referencia privilegiada con respecto a la cual las leyes de Maxwell son estrictamente válidas. Por otra parte, el resultado negativo de la experiencia de Michelson le induce a emitir la hipótesis de que los cuerpos se achatan en la dirección de su movimiento con respecto al éther. Este enunciado, junto con el de la dilatación temporal de Poincaré, dan lugar a las transformaciones de coordenadas que llevan su nombre. Con todo ésto, Lorentz, como él mismo reconoce, lleva al extremo la crisis de la concepción del éther: no es afectado por los cuerpos pero él si los afecta, está en reposo pero no es posible detectar el movimiento con respecto al mismo, es, en definitiva, totalmente insubstancial.

Cerraremos esta etapa citando la solución dada por Einstein a este problema mediante su Teoría de la Relatividad Restringida, enunciada en su célebre artículo *Sobre la Electrodinámica de los Cuerpos en Movimiento* (1905). Einstein postula la invarianza del módulo de la velocidad de la luz y la covarianza, o invarianza, de las leyes frente a las transformaciones de coordenadas entre sistemas inerciales, rechazando la existencia del éther como sistema privilegiado.

Antes de concluir deberemos decir algo acerca de la cuantificación de la carga. En principio fue sugerida por Faraday como simple regla práctica para el estudio de la electrolisis. Helmholtz piensa que en la electrolisis deben transportarse verdaderos átomos de Electricidad. Crookes (1832-1919) hace la misma afirmación con respecto a los rayos catódicos y demuestra que son desviados por el imán. El descubridor del electrón es Sir Joseph John Thomson (1853-1937) quien mide la relación entre su carga y su masa y hace la primera estimación del valor de la carga, valor que es medido con precisión por Millikan (1913) estableciendo al mismo tiempo, sin lugar a dudas, el carácter cuántico de la carga.

La carga puntual se manifiesta como una entidad problemática, siéndolo aún en la actualidad, como se pone de manifiesto en la teoría de Lorentz. Es precisamente Lorentz, que enunció su teoría antes de que se descubriera el electrón, quien le pone el nombre a dicha partícula, nombre que había sido sugerido anteriormente por Stoney para designar a la cantidad mínima de carga.

No queremos extendernos hablando de la gran familia de partículas elementales, pues eso pertenece a otra historia, pero sí mencionaremos a Dirac, que añade el espín al electrón (1927), como efecto cuántico relativista, y propone la existencia de monopolios magnéticos (1931) que, dentro de su teoría cuántica, deberían su existencia a la cuantificación de la carga.

Ya, para finalizar, apuntaremos unas últimas consideraciones o conclusiones.

Conclusión:

El electromagnetismo clásico cubre un amplio rango de fenómenos de forma satisfactoria. Pero hay otros que quedan fuera de su ámbito, bien sea porque los toma como base o bien porque quedan fuera de su rango de predicción:

- Desde el punto de vista clásico se postula la existencia de dos tipos de carga eléctrica, (+) y (-) (dos tipos de monopolos eléctricos). La carga gravitatoria es, sin embargo, de un sólo signo.
- Los monopolos magnéticos no existen. Ya hemos apuntado la posibilidad de su existencia, desde el punto de vista cuántico, pero, si existen, son tremadamente elusivos. Hoy en día hay un gran interés en su detección, siendo importante señalar la experiencia del español Cabrera que detectó lo que pudiera ser la presencia, aún sin confirmar, de un monopolo.
- La carga está siempre asociada a una cierta cantidad de masa. Sin masa, una carga sería un ente 'imposible'.
- Clásicamente, la cuantificación de la carga es indiferente. La teoría de los quarks, de Gell Man y Swinger, asigna una carga inferior a la electrónica, $-\frac{1}{3} e$ y $\frac{2}{3} e$, a estas partículas.
- El universo es neutro (No se conoce ningún mecanismo de creación de carga neta).
- Las fuerzas gravitatorias y nucleares quedan fuera de la teoría.
- Así mismo quedan fuera de la teoría todos los fenómenos cuánticos y, en particular, las propiedades microscópicas de la materia. Nosotros emplearemos, a pesar de ello, conceptos clásicos para describir las propiedades básicas de los medios, pero lo haremos conscientes de la impropiedad de la herramienta.
- Por último diremos que, debido a la problemática asociada a las cargas puntuales, el fenómeno de reacción por radiación no encuentra una explicación totalmente satisfactoria dentro de la electrodinámica clásica.

Cerraremos por fin esta reseña histórica relatando como, desde sus comienzos, esta es una disciplina conceptual y de no fácil asimilación (véase [Sommerfeld]). Hittorf, científico eminentemente pero algo timorato, cayó en una grave depresión provocada por el sentimiento de incapacidad que le produjo el estudio infructuoso del Tratado de Maxwell. Compadecidos, sus amigos le convencieron para que fuese a descansar unos días en el campo. Pero descubrieron con consternación, al despedirlo en la estación, que dicho Tratado formaba parte del equipaje.

Afortunadamente, gracias a Heaviside y otros, la situación ya no es tan extrema y, por supuesto, sigue sin ser recomendable llevarse los libros para trabajar durante los fines de semana. Así sea.

h-10

Apéndice I

Sistemas de unidades

A pesar de los esfuerzos por implantar un único sistema de unidades persiste aún el uso de distintos sistemas según el entorno científico y docente en cuestión. Los más utilizados son el *Sistema gaussiano* y el *Sistema internacional* (SI o MKSA); este último será el que emplearemos en el texto. Desde el punto de vista físico es totalmente indiferente el sistema o marco que se emplee en la descripción de los fenómenos físicos. Desde el punto de vista práctico, cualquier parcela de la Física puede ser descrita con la misma propiedad mediante el uso de uno u otro de los sistemas candidatos. No existe ningún argumento sólido que permita establecer una preferencia si no es el de que la literatura sobre ciertos temas está tradicionalmente escrita en un determinado sistema y que trabajar con uno que no sea el habitual es engoroso. Además, el número de sistemas, variantes incluidas, es grande y su nomenclatura confusa.

Tomando el criterio de que los sistemas de unidades son herramientas para ordenar y facilitar el trabajo del físico y no objetos de disgresión que lo aparten de su tarea, procederemos a exponer el tema olvidando la historia previa y con la mayor concisión posible. Quien se interese más profundamente en estas materias puede consultar [Bridgman, Sena, Jackson, Panofsky y Phillips].

Como es bien sabido, el número de unidades fundamentales, así como el de sus dimensiones, es en gran medida arbitrario. Podemos definir la intensidad como la carga que atraviesa una determinada superficie por unidad de tiempo

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (\text{I.1})$$

con lo que la relación entre las dimensiones de la intensidad y de la carga queda fijada de la forma

$$[Q] = [IT]$$

pero físicamente no hay inconveniente para definir la intensidad como proporcional a $\frac{dq}{dt}$

$$I = k \frac{dq}{dt}$$

Tampoco hay nada que nos impida asignarle a k un valor numérico y unas dimensiones cualesquiera. En el sistema *gaussiano modificado* se hace $k = \frac{1}{c}$, $[k] = [L^{-1}T]$,

donde c es la velocidad de la luz, pero en los sistemas de uso general se toma $k = 1$ y adimensional, a lo que nos atendremos en adelante.

Algo similar ocurre con la definición de la magnitud del campo eléctrico. Aunque puede definirse como proporcional a la relación entre la magnitud de la fuerza sufrida por una pequeña carga estática y la magnitud de dicha carga, en todos los sistemas se toma a la constante de proporcionalidad como igual a la unidad y adimensional

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_q}{q}, \quad [E] = [MLT^{-3}I^{-1}] \quad (\text{I.2})$$

Con estas excepciones, para la intensidad y el campo eléctrico, plantearemos el problema con todos los grados de libertad restantes aunque, en una primera etapa, nos limitaremos a considerar el caso del vacío.

El conjunto de leyes electromagnéticas en el vacío puede escribirse de la forma

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\frac{d\vec{F}}{dv} = \rho \vec{E} + k_1 \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (\text{I.4})$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = k_2 \rho \quad (\text{I.5})$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -k_3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.6})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.7})$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = k_4 \vec{j} + k_5 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I.8})$$

Como puede observarse, no hemos introducido constantes en I.3, ecuación de continuidad, debido a que se ha definido la intensidad según I.1, ni en la parte eléctrica de la fuerza de Lorentz I.4, por haber hecho uso de la definición I.2 para el campo eléctrico.

Mostraremos a continuación que de las cinco constantes introducidas solo dos son independientes: en primer lugar, hallando la divergencia a I.8 y haciendo uso de I.5 y de I.3, obtenemos

$$k_4 = k_2 k_5 \quad (\text{I.9})$$

Si ahora consideramos una región del espacio sin corrientes, $\vec{j} = 0$, aplicamos el rotacional a ambos miembros de I.8, desarrollamos y tenemos en cuenta I.7 y I.6

$$\nabla^2 \vec{B} - k_3 k_5 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

ecuación de onda que nos permite identificar al producto de las dos constantes con el inverso del cuadrado de la velocidad de la luz

$$k_3 k_5 = \frac{1}{c^2} \quad (\text{I.10})$$

Por último, si medimos la fuerza ejercida entre dos cargas, por una parte, y la fuerza por unidad de longitud ejercida por una corriente estacionaria, que circula por

un conductor filiforme, recto e indefinido, sobre otra del mismo tipo que circule por un conductor análogo y paralelo al primero, por otra, tendremos

$$\vec{F}_q = k_2 \frac{q q'}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (\text{I.11})$$

$$\frac{d\vec{F}}{dl} = 2 k_1 k_4 \frac{II'}{4\pi\rho} (-\hat{\rho}) \quad (\text{I.12})$$

La expresión I.11 se deriva directamente de I.5. Para obtener I.12 partiríamos de I.8 con $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$, por ser estacionaria la corriente, calcularíamos el campo magnético producido por una de las corrientes y después aplicaríamos la parte magnética de la expresión de la fuerza de Lorentz I.4.

Puesto que la definición I.1 nos permite relacionar cargas con intensidades, midiendo experimentalmente las fuerzas I.11 y I.12, podemos comprobar que la relación numérica

$$\frac{k_2}{k_1 k_4} = c^2 \quad (\text{I.13})$$

se cumple de forma muy precisa.

Las relaciones I.9, I.10 y I.13 nos dejan solo dos constantes independientes. Inspeccionando estas expresiones y tomando como constantes arbitrarias, $k_1 = a$, $k_1 k_4 = b$ tenemos que

$$\begin{aligned} k_1 &= a \\ k_2 &= b c^2 \\ k_3 &= a \\ k_4 &= \frac{b}{a} \\ k_5 &= \frac{1}{a c^2} \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

y las leyes electromagnéticas en el vacío quedan de la forma

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.15})$$

$$\frac{d\vec{F}}{dv} = \rho \vec{E} + a \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (\text{I.16})$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = b c^2 \rho \quad (\text{I.17})$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -a \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.18})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.19})$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \frac{b}{a} \vec{j} + \frac{1}{a c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I.20})$$

Una vez elegido el sistema de unidades mecánicas, *cgs* o *MKS*, a emplear, la asignación arbitraria de un valor numérico y unas dimensiones a las constantes a y b nos proporcionarán diversos sistemas de unidades.

Tabla 1. Constantes (vacío)¹

¹En *SI*, $\mu_0 c^2$ se escribe con la notación $\frac{1}{\epsilon_0}$, luego $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$.

Sistema de unidades	Unidades mecánicas	a [a]	b	[b]
SI (MKSA)	MKS	1 -	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$	$MLT^{-2} I^{-2}$
Heaviside-Lorentz	cgs	c^{-1} $T L^{-1}$	c^{-2}	$T^2 L^{-2}$
Gaussiano (cgs)	cgs	c^{-1} $T L^{-1}$	$4\pi c^{-2}$	$T^2 L^{-2}$
Electrostático (esu)	cgs	1 -	$4\pi c^{-2}$	$T^2 L^{-2}$
Electromagnético (emu)	cgs	1 -	4π	-

Según vemos en la tabla anterior, las dimensiones elegidas para a y b son, en general, de tipo mecánico y, en muchos, casos nulas. Solo el *SI* introduce una unidad de tipo eléctrico I , el *Amperio absoluto*, que se define, de acuerdo con la expresión I.12, como *la corriente que, al circular por dos hilos paralelos, de sección despreciable, rectos e indefinidos, separados en el vacío por la distancia de un metro, dan lugar a una fuerza transversal entre ellos de $2 \times 10^{-7} N \cdot m^{-1}$.*

Los dos primeros sistemas se dice que son *racionalizados* por razones discutibles que no traeremos aquí. Bástenos saber que las expresiones de las ecuaciones de Maxwell en los sistemas rationalizados no contienen explícitamente el factor 4π .

La descripción fenomenológica de la materia polarizable nos plantea nuevas opciones:

- Si definimos el momento dipolar \vec{p} de un sistema de cargas de la forma

$$\vec{p} = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' \quad (\text{I.21})$$

las cargas equivalentes de polarización se expresan, en función del vector polarización \vec{P} , como

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (\text{I.22})$$

- Si hubiésemos optado por introducir una constante de proporcionalidad en la definición

$$\vec{p} = \alpha \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$$

la carga equivalente habría venido dada por

$$\rho_p = -\frac{1}{\alpha} \nabla \cdot \vec{P}$$

En todos los sistemas considerados esta constante se toma igual a la unidad por lo que, teniendo en cuenta I.22 y I.17,

$$\nabla \cdot \vec{E} = b c^2 (\rho + \rho_p) \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{E} + b c^2 \vec{P}) = b c^2 \rho \quad (\text{I.23})$$

Para substituir al vector \vec{P} se define al vector \vec{D} con divergencia proporcional a ρ

$$\vec{D} = \beta(\vec{E} + b c^2 \vec{P}) = \beta \vec{E} + \lambda \vec{P} , \quad \beta = \frac{\lambda}{b c^2} \quad (\text{I.24})$$

donde λ es otra constante arbitraria.

De forma análoga, la definición del momento dipolar magnético de la forma

$$\vec{m} = \gamma \left(\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \wedge \vec{j}(\vec{r}') dv' \right) \quad (\text{I.25})$$

nos conduce a una expresión para la corriente equivalente de magnetización, en función del vector magnetización,

$$\vec{j}_M = \frac{1}{\gamma} \nabla \wedge \vec{M}$$

Por otra parte, la variación temporal de la polarización del medio produce una corriente de polarización

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

La introducción de estas corrientes como fuentes vectoriales de \vec{B} modifica la ecuación I.20 de forma que

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{B} &= \frac{b}{a} \left(\vec{j} + \frac{1}{\gamma} \nabla \wedge \vec{M} + \frac{1}{bc^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) \\ \nabla \wedge \left(\vec{B} - \frac{b}{a\gamma} \vec{M} \right) &= \frac{b}{a} \left(\vec{j} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

Por las mismas razones que antes, definimos un vector \vec{H} que substituirá a \vec{M}

$$\vec{H} = \delta \left(\vec{B} - \frac{b}{a\gamma} \vec{M} \right) = \delta \vec{B} - \lambda \vec{M}, \quad \gamma = \frac{b\delta}{a\lambda} \quad (\text{I.27})$$

donde, como puede verse, se ha renunciado a un grado de libertad al tomar el mismo coeficiente λ para \vec{M} y para \vec{P} . Lo hacemos así porque ésta es la práctica seguida en todos los sistemas que hemos tomado en consideración.

Resumiendo, el conjunto de las ecuaciones de Maxwell I.15, I.16, I.17, I.18, I.19 y I.20, puede ser escrito en función de cuatro constantes a , b , δ , λ y otras dos, β y γ , derivadas de las anteriores.

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.28})$$

$$\frac{d \vec{F}}{d v} = \rho \vec{E} + a \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (\text{I.29})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \lambda \rho \quad (\text{I.30})$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -a \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.31})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.32})$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \delta \frac{b}{a} \left(\vec{j} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (\text{I.33})$$

Lo mismo puede hacerse con las definiciones de los momentos dipolares I.21 y I.25

$$\vec{p} = \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' \quad (I.34)$$

$$\vec{m} = \gamma \left(\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \wedge \vec{j}(\vec{r}') dv' \right), \quad \gamma = \frac{b \delta}{a \lambda} \quad (I.35)$$

y para los vectores \vec{D} I.24 y \vec{H} I.27

$$\vec{D} = \beta \vec{E} + \lambda \vec{P}, \quad \beta = \frac{\lambda}{b c^2} \quad (I.36)$$

$$\vec{H} = \delta \vec{B} - \lambda \vec{M} \quad (I.37)$$

Los valores correspondientes a cada uno de los sistemas de unidades vienen relacionados en la Tabla 2. Para las dimensiones de las constantes consultese la Tabla 1.

Tabla 2. Constantes (Medios materiales)

Sistema	a	b	δ	λ	β	γ
MKSA	1	μ_0	μ_0^{-1}	1	ε_0	1
H-L	c^{-1}	c^{-2}	1	1	1	c^{-1}
cgs	c^{-1}	$4\pi c^{-2}$	1	4π	1	c^{-1}
esu	1	$4\pi c^{-2}$	c^2	4π	1	1
emu	1	4π	1	4π	c^{-2}	1

Aunque con este cuadro pueden expresarse las ecuaciones básicas en cualquier sistema de unidades, expondremos en tablas específicas las ecuaciones, unidades y reglas de conversión para los dos sistemas más usuales: el MKSA y el Gaussiano (Tabla 3).

Tabla 3. Expresiones en MKSA y Gaussiano

MKSA	cgs
$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
$\frac{d\vec{F}}{dv} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$	$\frac{d\vec{F}}{dv} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{B}$
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$
$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\nabla \wedge \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\vec{p} = \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$	$\vec{p} = \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$
$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \wedge \vec{j}(\vec{r}') dv'$	$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int_{\mathcal{V}'} \vec{r}' \wedge \vec{j}(\vec{r}') dv'$
$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$
$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$

Como puede verse en dicha tabla, en el sistema gaussiano aparece el factor c^{-1} asociado a todos los términos en los que se da una derivación temporal, tales como $\frac{1}{c} \vec{j}$, $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, etc. Esto facilita la sustitución de la variable t por ct , lo que puede representar una ventaja formal para la formulación covariante relativista de las leyes electromagnéticas.

No hemos tratado hasta ahora a los potenciales porque en su definición no se introduce ninguna nueva constante. Evidentemente, podríamos introducir dos nuevas constantes arbitrarias pero no es esta la costumbre.

Teniendo en cuenta que \vec{B} es solenoidal

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$$

y substituyendo en I.18

$$\left(\nabla \wedge \vec{E} + a \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} = \nabla V - a \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

con lo que, en concreto,

$$\text{MKSA} \rightarrow \vec{E} = \nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \text{cgs} \rightarrow \vec{E} = \nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Tenemos ya datos suficientes para convertir fórmulas de un sistema a otro, pero la Tabla 4 permite llevar a cabo esta conversión más fácilmente. Para ello basta con substituir literalmente todos los símbolos de la columna *MKSA* por la *cgs* y viceversa.

Tabla 4. Conversión de fórmulas

MKSA	cgs
$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$	c
(\vec{E}, V)	$\frac{1}{\sqrt{4\pi \varepsilon_0}} (\vec{E}, V)$
\vec{D}	$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}} \vec{D}$
$(\rho, q, \vec{j}, I, \vec{P})$	$\sqrt{4\pi \varepsilon_0} (\rho, q, \vec{j}, I, \vec{P})$
(\vec{B}, \vec{A})	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} (\vec{B}, \vec{A})$
\vec{H}	$\frac{1}{\sqrt{4\pi \mu_0}} \vec{H}$
\vec{M}	$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}} \vec{M}$
σ	$4\pi \varepsilon_0 \sigma$
$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$	ε
$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$	μ
$(R, L, \frac{1}{C})$	$\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} (R, L, \frac{1}{C})$

Por último, la Tabla 5 recoge las unidades, y factores de conversión entre el sistema MKSA y el cgs.

Tabla 5. Conversión de unidades^{2, 3, 4}

Cantidad	Unidad MKSA	Equivalente en cgs
Longitud, l	Metro, m	10^2 cm , Centímetro
Masa, m	Kilogramo, Kg	10^3 gr , Gramo
Tiempo, t	Segundo, s	1 s , Segundo
Fuerza, F	Newton, N	10^5 Dina
Trabajo, Energía, W	Julio, J	10^7 Ergio
Carga, Q	Culombio, C	$3 \times 10^9 \text{ Estatculombio}$
Corriente, I	Amperio, A	$3 \times 10^9 \text{ Estatamperio}$
Densidad corriente, J	$A \cdot m^{-2}$	$3 \times 10^5 \text{ Estatamp.cm}^{-2}$
Potencial eléctrico, V	Voltio	$(1/300) \text{ Estatvoltio}$
Campo eléctrico, E	$V \cdot m^{-1}$	$(1/3) \times 10^{-4} \text{ Estatvoltio.cm}^{-1}$
Polarización, P	$C.m^{-2}$	$10^5 \text{ Statcul.cm}^{-2}$
Desplazamiento, D	$C.m^{-2}$	$4 \times 3 \times 10^5 \text{ Estatvolt.cm}^{-1}$
Conductividad, σ	$S.m^{-1} (S.m^{-1})$	$3^2 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}$
Resistencia, R	Ohmio, Ω	$(1/3^2) \times 10^{-11} \text{ s} \cdot cm^{-1}$
Capacidad, C	Faradio, F	$3^2 \times 10^{11} \text{ cm}$
Flujo magnético, Φ	Weber, W	$10^8 \text{ gauss} \cdot cm^{-2} (\text{Maxwell})$
Inducción magnética, B	Tesla, T	10^4 Gauss
Intensidad magnética, H	$A - vuelta.m^{-1}$	$4\pi \times 10^{-3} \text{ Oersted}$
Magnetización, M	$A \cdot m^{-1}$	$\frac{1}{4\pi} \times 10^4 \text{ gauss}$
Inductancia, L, M	Henrio, H	$(l/3^2) \times 10^{-11} \text{ erg}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{Estatamp}^{-1}$

²Las unidades fundamentales están escritas en letra negrita.³La cifra **3** en negrita representa a $\mathbf{3} \equiv c \times 10^{-10} \text{ cm} \cdot s^{-1} \simeq 2,997\,924\,58$.⁴La unidad de la admitancia es el *Siemens* (S). $S \equiv \Omega^{-1}$.

Apéndice J

Teoría de campos

Suponemos al lector familiarizado con el análisis vectorial ordinario, por lo que el tratamiento que aquí se le da al tema será sencillo e intuitivo. Se recordarán los fundamentos de los campos vectoriales tridimensionales. La bibliografía es abundante y asequible ¹.

La representación en un espacio tridimensional del campo electromagnético, que realmente es un sólo campo tensorial, de orden 2 y de dimensión 4, requiere el recurso a los campos pseudovectoriales: el campo eléctrico es vectorial y el magnético pseudovectorial. Esta dificultad se soslayará restringiendo el orden cíclico de los vectores base (a derechas).

J.1. Campos escalares y vectoriales

La descripción clásica del Universo se lleva a cabo mediante la asignación a cada punto del espacio de una serie de magnitudes físicas; cada una de ellas constituye un *campo*, función de la posición \vec{r} y del tiempo t . Un campo se dice que es *escalar* si, expresado en un sistema de unidades concreto, asigna a cada punto un número. Un campo *vectorial* asigna a cada punto un vector, definido por un módulo, número positivo, una dirección y un sentido. En general, las magnitudes físicas tienen estructura tensorial.

Las reglas algebraicas de operación entre escalares son, obviamente, las correspondientes a operaciones numéricas mientras que para vectores definiremos las operaciones de suma, producto por un escalar, producto escalar entre dos vectores y producto vectorial. Sea el escalar λ y los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Podemos definir geométricamente la *suma* de vectores, figura J.1, según la regla del triángulo

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

La resta puede definirse a través del *negativo* de un vector

$$\vec{b} = (-\vec{a}) \quad \text{si} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

donde $\vec{0}$ es un vector de módulo nulo.

¹Un tratamiento algo más formal puede encontrarse en [García Olmedo]

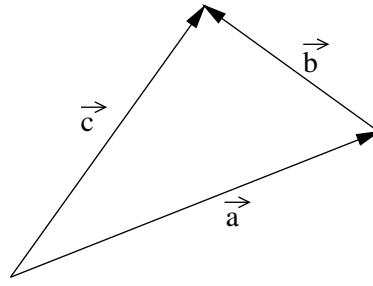


Figura J.1:

Si escribimos el módulo de un vector de cualquiera de las formas

$$a \equiv |\vec{a}| = \text{m\'odulo de } \vec{a}$$

y definimos el *producto de un vector por un escalar* de la forma

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

donde $b = \lambda |a|$, la dirección de \vec{b} es la misma que la de \vec{a} y sus sentido son iguales (opuestos), seg\'un λ sea positivo (negativo).

Definimos como *vector unitario* de un vector \vec{a} , a

$$\hat{a} \equiv \frac{\vec{a}}{a}$$

donde, claramente, $|\hat{a}| = 1$.

As\'i, pu\'es, la suma de dos vectores puede escribirse de la forma

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = a \hat{a} + b \hat{b}$$

donde a y b se denominan, las *proyecciones oblicuas* de \vec{c} . Diremos que \vec{c} ha sido descompuesto en las direcciones \hat{a} y \hat{b} .

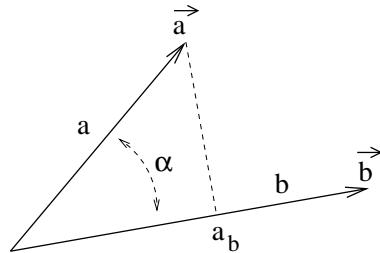


Figura J.2:

Se denomina *producto escalar*, o producto interno, de dos vectores que formen entre s\'i un \'angulo α , a

$$\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \alpha = a_b b = a b_a$$

donde, figura J.2, a_b (b_a) es la *proyección ortogonal* de \vec{a} (\vec{b}) en la dirección de \hat{b} (\hat{a}).

Diremos que \vec{a} y \vec{b} son *ortogonales*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{si} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

De lo anterior se deduce que el cuadrado del módulo

$$a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

y que el ángulo que forman dos vectores viene dado por

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a b}$$

J.2. Representación gráfica de los campos

Una forma de representar a los campos escalares es mediante sus *superficies equiporciales* y a los vectoriales por sus *líneas de campo*.

Se definen como líneas de campo, figura J.3a, aquellas que son tangentes al campo en todos sus puntos. Sus ecuaciones vienen dadas por

$$\frac{dl_1}{F_1} = \frac{dl_2}{F_2} = \frac{dl_3}{F_3} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} d\vec{r} = d\vec{l} \\ \vec{F} \uparrow\uparrow d\vec{l} \end{cases}$$

Definiremos como *tubo de campo*, figura J.3b, a una región del espacio limitada por una superficie cuyas generatrices son líneas de campo.

Por ejemplo, el potencial y el campo producidos por una carga eléctrica puntual, figura J.3c, vienen dados por

$$V = K \frac{1}{r} , \quad \vec{E} = K \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Las superficies equipotenciales son esféricas y las líneas de campo radiales.

El campo magnético producido por una corriente I que circula, en la dirección del eje z , por un hilo recto indefinido es

$$\vec{B} = K \frac{\hat{\varphi}}{\rho}$$

Sus líneas de campo, figura J.3d, son azimutales, en la dirección del vector unitario $\hat{\varphi}$.

En las figuras J.3e y J.3f se representan las superficies equipotenciales y las líneas de campo correspondientes a pares de cargas del mismo signo y de distinto signo, respectivamente.

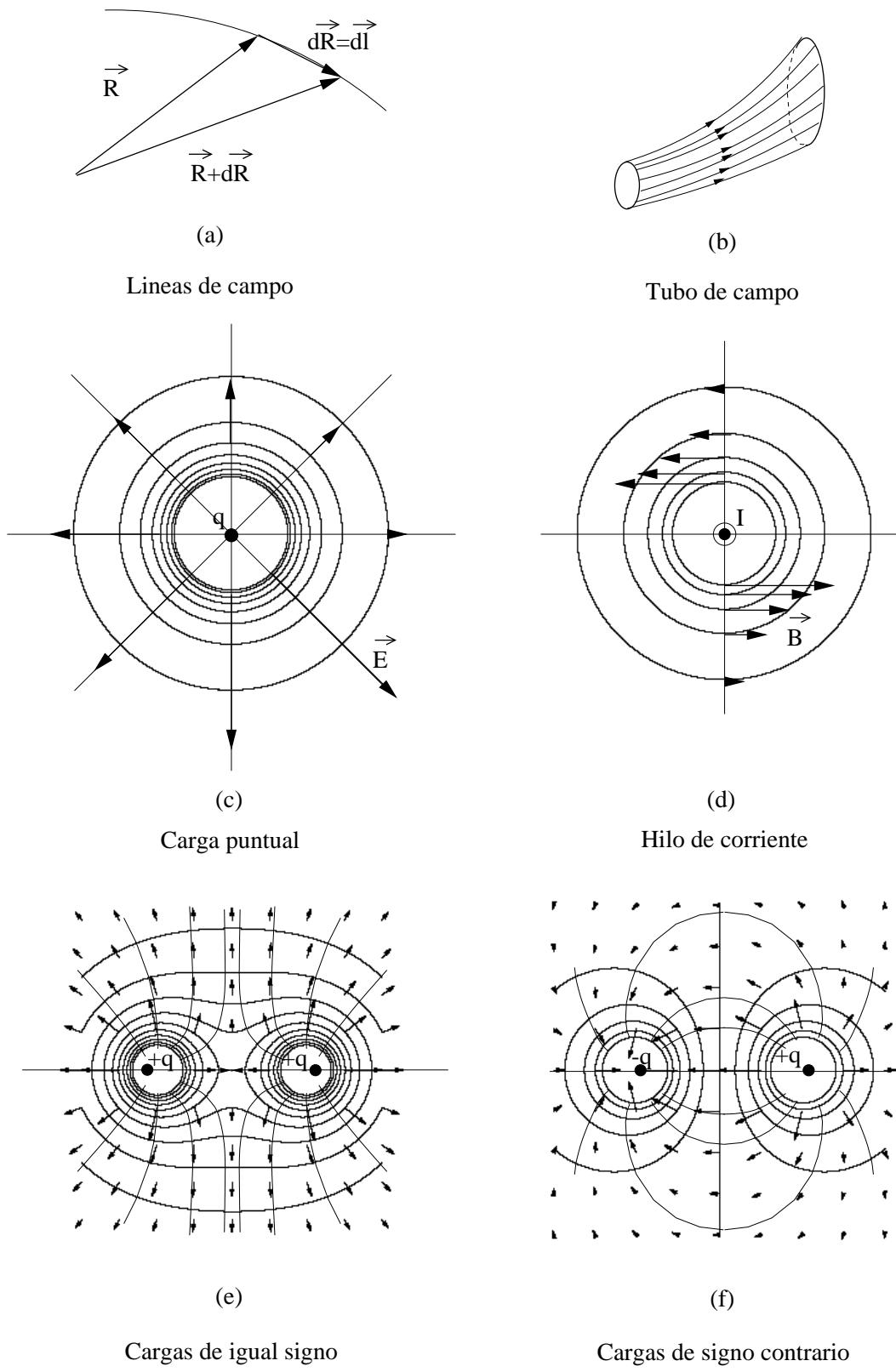


Figura J.3:

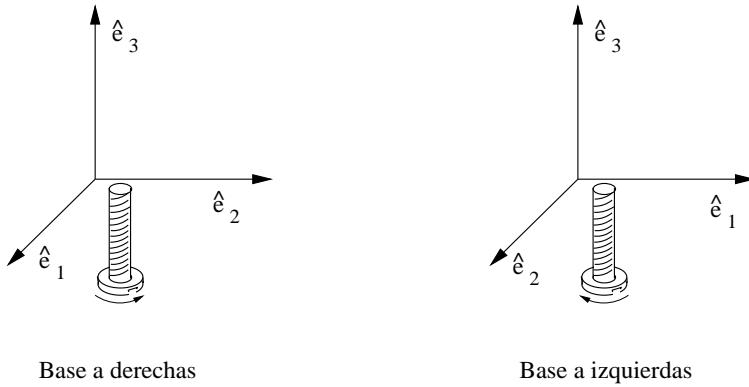


Figura J.4:

J.2.1. Base vectorial

Un conjunto de tres vectores \hat{e}_i ($i = 1, 2, 3$) que sea linealmente independiente (vectores no colineales ni coplanarios) forma una *base vectorial*. Es decir, cualquier vector puede expresarse como combinación lineal de los vectores de base. Nos limitaremos a considerar bases ortogonales y unitarias.

Dados tres vectores unitarios y ortogonales

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} , \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

siempre será posible expresar un vector arbitrario de la forma

$$\vec{c} = \sum_{i=1}^3 c_i \hat{e}_i \equiv c_i \hat{e}_i \quad (\text{J.1})$$

expresión en la que se hace uso del convenio de suma sobre índices repetidos.

Efectivamente, es fácil comprobar que

$$c_i = \hat{e}_i \cdot \vec{c} , \quad c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = \sum_{i=1}^3 c_i^2$$

Diremos que c_i son las *componentes*, o proyecciones normales de \vec{c} , en la base de vectores unitarios \hat{e}_i . Esta base será *a derechas* (a izquierdas) si un tornillo, con rosca a derechas y girando de \hat{e}_1 a \hat{e}_2 según el ángulo más corto, avanza en la dirección (en la dirección contraria) de \hat{e}_3 .

La representación de un vector con respecto a una base determinada se hace mediante sus componentes $\vec{c} \rightarrow (c_1, c_2, c_3)$. La relación entre las componentes de un mismo vector con respecto a dos bases distintas se describe mediante una *ley de transformación*. Se denomina *transformación propia* (impropia) a la que de una base a derechas (izquierdas) pasa otra base a derechas (izquierdas). En otras palabras, las transformaciones propias

son aquellas en las que no cambia el orden cíclico de los vectores de base, por ejemplo, entre dos bases a derechas

$$\hat{e}_1 \rightarrow \hat{e}_2 \rightarrow \hat{e}_3 , \quad \hat{e}'_1 \rightarrow \hat{e}'_2 \rightarrow \hat{e}'_3$$

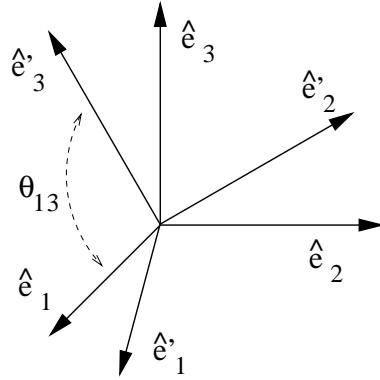


Figura J.5:

Es fácil obtener las leyes de transformación de las componentes de un vector entre bases ortogonales. Un vector \vec{c} se expresará con respecto a los vectores unitarios \hat{e}'_j y los \hat{e}_i , según J.1, como

$$\vec{c} = c'_j \hat{e}'_j = c_i \hat{e}_i$$

por lo que, multiplicando escalarmente por \hat{e}'_j

$$c'_j = c_i \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j \equiv \sum_{i=1}^3 c_i \cos \theta_{ij} = a_{ji} c_i \quad (\text{J.2})$$

donde $a_{ji} = \cos \theta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j = a_{ij}$.

Se dice que $\vec{d} = d_i \hat{e}_i$ es un *pseudovector* cuando sus componentes d_i se transforman como las de un vector para transformaciones propias pero tienen el signo contrario a las de un vector para transformaciones impropias; el pseudovector conserva el módulo y la dirección, como el vector, pero cambia de sentido cuando la transformación es impropia. Esta distinción entre el carácter vectorial y el pseudovectorial de las magnitudes físicas es teóricamente interesante² pero se soslayará restringiéndonos, en adelante, al uso de bases vectoriales derechas.

J.2.2. Sistemas de referencia

Un punto P del espacio, véase la figura J.6, queda determinado por sus *coordenadas* con respecto a un *sistema de referencia*, o sistema de coordenadas, \mathcal{S} . Dichas coordenadas son las componentes del *vector de posición* \vec{r} con respecto a los vectores de base \hat{e}_i . El vector de posición liga a un *punto origen* O con P .

²Un pseudovector es en realidad una parte de un tensor. Este es el caso del pseudovector campo magnético y del vector tridimensional campo eléctrico. Ambos son parte de un tensor de orden dos y cuatro dimensiones, el de campo electromagnético.

Un sistema de referencia consta de un punto origen y una base vectorial. En la figura J.6 se muestra como, al cambiar de sistema de referencia, se cambia de origen y de base y, por lo tanto, de vector de posición y de coordenadas.

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{D} \quad (\text{J.3})$$

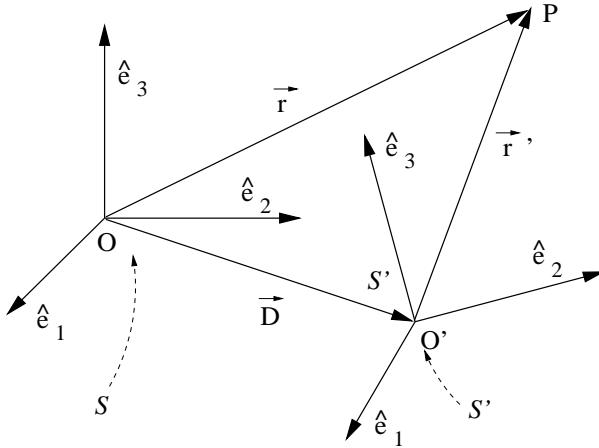


Figura J.6:

Nos limitamos a considerar sistemas de referencia \mathcal{S} y \mathcal{S}' que sean cartesianos y rectangulares. Si, además, tienen un origen común O ($\vec{OO}' = \vec{0}$), véase la figura J.5, los vectores de posición en ambos sistemas son los mismos y la transformación entre las coordenadas del primer sistema (x_1, x_2, x_3) y las del segundo (x'_1, x'_2, x'_3) , son formalmente idénticas a las transformaciones de las componentes de un vector frente al cambio de base. De acuerdo con J.2

$$x'_j = a_{ji} x_i$$

Si expresamos $\vec{D} = x_i \hat{e}_i$ y multiplicamos J.3 por \hat{e}'_j , tendremos

$$x'_j = a_{ji}(x_i - D_i) , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{J.4})$$

que expresa las coordenadas del punto P en el sistema \mathcal{S}' en función de las correspondientes en \mathcal{S} y de las componentes de \vec{D} con respecto a este último sistema.

Un cambio de sistema de referencia, en general, va acompañado de un cambio de origen, lo que implica un cambio de vector de posición. Al mismo tiempo, se cambia de base vectorial. Estos dos cambios modifican también las coordenadas de los puntos del espacio. No obstante, los tensores y, en particular, los escalares y vectores, son en sí entidades geométricas, que pueden ser descritas desde distintos sistemas de referencia, pero que aunque cambie su apariencia, son invariantes ante las transformaciones de coordenadas.

Si los vectores unitarios de uno y otro sistema son los mismos, es decir, $\hat{e}'_i = \hat{e}_i$, las transformaciones se reducen a

$$x'_j = x_j - D_j \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{J.5})$$

ya que, en este caso $a_{ji} = \delta_{ji}$.

J.2.3. Producto vectorial

A continuación definiremos el *producto vectorial*, o producto externo. Dados dos vectores, se define el producto vectorial como un pseudovector³, tal que, figura J.7, para un triángulo a derechas

$$\vec{d} \equiv \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \quad , \quad d = a b |\sin \alpha| \quad , \quad \vec{d} \perp \vec{a}, \vec{b} \quad (\text{J.6})$$

siendo la dirección de \vec{d} la que corresponde a un triángulo a derechas $\vec{a} \rightarrow \vec{b} \rightarrow \vec{d}$ y α el mínimo ángulo que forman los vectores \vec{a} y \vec{b} .

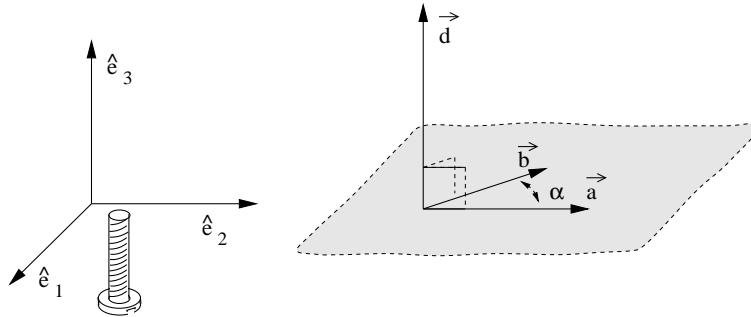


Figura J.7:

\vec{d} tiene, por lo tanto, por módulo a $d = a b |\sin \alpha|$, su dirección es perpendicular al plano formado por \vec{a} y \vec{b} y su sentido viene determinado por la regla del tornillo a derechas (izquierdas) para sistemas de referencia a derechas (izquierdas). El producto vectorial entre un vector y un pseudovector tiene carácter vectorial. Por esta razón, el campo magnético \vec{B} es un pseudovector, mientras que la fuerza, en particular la magnética de Lorentz, y el campo eléctrico son vectores.

Nos limitaremos en adelante a los sistemas a derechas. Bajo estas condiciones, podemos expresar a los vectores unitarios ortogonales, de la forma

$$\hat{e}_k = \hat{e}_i \wedge \hat{e}_j \quad , \quad i \neq j \neq k \neq i \quad , \quad i \rightarrow j \rightarrow k$$

es decir, cada uno de ellos puede obtenerse como producto vectorial de los otros dos, si el orden cíclico $i \rightarrow j \rightarrow k$ es el correspondiente a la regla del tornillo a derechas.

Según ésto, teniendo en cuenta la anticomutatividad del producto vectorial

$$\vec{d} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3) \wedge (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3) =$$

$$= \hat{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \hat{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \hat{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

³El producto vectorial entre un pseudovector y un vector es un vector

o, en forma de determinante simbólico

$$\vec{d} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

J.3. Operaciones diferenciales e integrales sobre escalares y vectores

J.3.1. Gradiente

Supongamos que en un sistema coordenado ortogonal hacemos un desplazamiento de

$$d\vec{l} = dl_i \hat{e}_i$$

Si, en ese entorno, la función escalar λ tiene derivadas definidas, en el desplazamiento $d\vec{l}$ sufre un incremento elemental $d\lambda$ que escribiremos de las siguientes formas

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial l_i} dl_i \equiv \nabla \lambda \cdot d\vec{l}$$

donde hemos empleado la notación

$$\nabla \lambda \equiv \text{grad } \lambda \equiv \hat{e}_i \frac{\partial \lambda}{\partial l_i} \quad (\text{J.7})$$

$\nabla \lambda$ es, pues, un vector cuyas componentes son las derivadas espaciales de la función escalar en las direcciones de cada uno de los ejes coordinados. A este vector lo llamaremos *gradiente* de λ y al operador

$$\nabla \equiv \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial l_i}$$

operador *gradiente* o 'nabla'.

Si anotamos como \hat{l} al vector unitario en la dirección del desplazamiento, la variación del escalar, por unidad de longitud en dicha dirección, la *derivada direccional*, será

$$\frac{d\lambda}{dl} = \nabla \lambda \cdot \hat{l}$$

expresión de la que se deduce que:

a) La variación más rápida de λ tiene lugar en la dirección del gradiente; es decir, cuando $\nabla \lambda \uparrow\uparrow \hat{l}$. λ crece en el sentido de \hat{l} ⁴.

b) El gradiente, figura J.8, es perpendicular a las superficies equiescalares: cuando $\nabla \lambda \perp \hat{l} \Rightarrow d\lambda = 0$.

⁴El símbolo $\uparrow\uparrow$ indica que los dos vectores son paralelos y en la misma dirección.

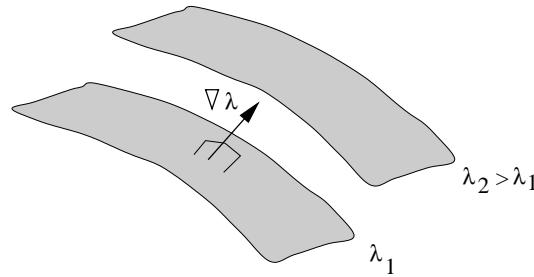


Figura J.8:

J.3.2. Flujo y divergencia

Dada una función vectorial \vec{a} , tendrá para nosotros gran interés, en muchas situaciones, el cálculo del *flujo* de dicho vector a través de una superficie S cualquiera.

$$\Phi(\vec{a}) \equiv \int_S \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds$$

donde \vec{n} es el vector unitario normal a la superficie. Su sentido se toma, figura J.9, para superficies cerradas, hacia fuera del volumen V que se ha definido como interno a S y, para superficies abiertas, el de avance de un tornillo a derechas que gire en el sentido preestablecido de circulación sobre el contorno L en el que se apoya la superficie.

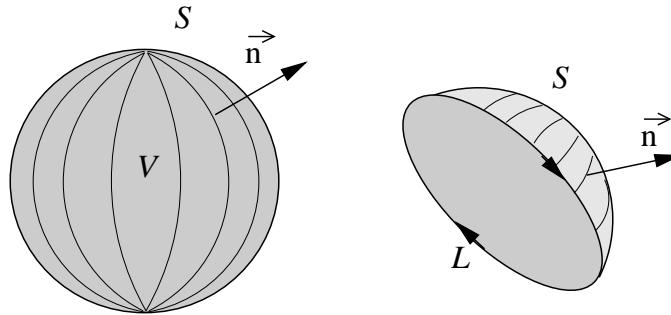


Figura J.9:

Si hallamos el flujo de un campo vectorial sobre una superficie S que encierre a un volumen V , el resultado podrá ser positivo, nulo o negativo. En el primer caso diremos que en V existe un balance positivo de fuentes escalares o, con otras palabras, que, en conjunto, el campo diverge de V . Si el flujo es negativo hablaremos de sumideros, fuentes negativas o convergencia del campo.

Para un punto P podemos definir un parámetro que nos mida la densidad de fuentes existente en el mismo. Para ello definimos la *divergencia*, o densidad de fuentes, como, figura J.10

$$\operatorname{div} \vec{a} \equiv \nabla \cdot \vec{a} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{a} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} \quad (\text{J.8})$$

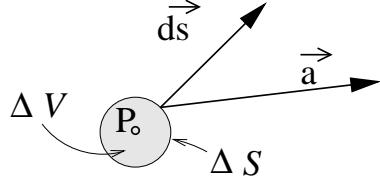


Figura J.10:

J.3.3. Circulación y rotacional

Otra integral importante para nosotros es la circulación de un vector. Para llevar a cabo la circulación de un vector es necesario, en general, especificar los puntos de comienzo y final, el camino \mathcal{L} a recorrer, por medio de su ecuación, y el sentido de recorrido.

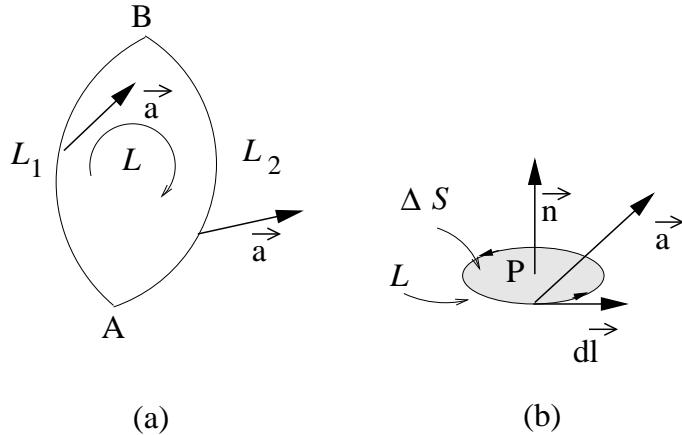


Figura J.11:

$$\mathcal{C} = \int_{A(\mathcal{L})}^B \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

Si la circulación cerrada de un campo

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

es nula, cualquiera que sea el camino escogido, dicho campo recibe el nombre de *irrotacional*. También se le califica de *conservativo* dado que si el campo en cuestión es de fuerzas, estan no realizan trabajo neto si el camino es cerrado; se conserva la energía.

Para un campo conservativo, la integral entre dos puntos cualesquiera, A y B , es independiente del camino por la que se realice. Efectivamente, como se muestra en la figura J.11a, a lo largo del camino $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{A(\mathcal{L}_1)}^B \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{B(\mathcal{L}_2)}^A \vec{a} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{A(\mathcal{L}_1)}^B \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{A(\mathcal{L}_2)}^B \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

De la misma forma que la divergencia, que es un escalar, caracteriza al comportamiento del flujo en el entorno de un punto, podemos caracterizar al comportamiento de la circulación alrededor del mismo por medio del pseudovector *rotacional*. La proyección de este vector sobre una dirección arbitraria del espacio \vec{n} , figura J.11b, se define como

$$(rot \vec{a})_n \equiv (\nabla \wedge \vec{a}) \cdot \vec{n} \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\mathcal{L}} \vec{a} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \quad (J.9)$$

donde ΔS es una superficie elemental, que es normal a la dirección \vec{n} y contiene a P , y \mathcal{L} es su contorno. Si el rotacional es distinto de cero diremos que el campo rodea al punto o que es *rotacional* en dicho punto.

J.3.4. Operador Laplaciana

Se define como *laplaciana* de una función escalar λ a la divergencia del gradiente de dicha función. Se escribe con las notaciones

$$\Delta \lambda \equiv \nabla^2 \lambda$$

y se define como

$$\nabla^2 \lambda \equiv div(\text{grad } \lambda) = \nabla \cdot (\nabla \lambda) \quad (J.10)$$

También interesa a veces hablar de la Laplaciana de un vector, definida de la forma

$$\nabla^2 \vec{a} \equiv \text{grad}(div \vec{a}) - rot(rot \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) \quad (J.11)$$

expresión que sólo en coordenadas cartesianas puede ser interpretada como

$$\nabla^2 \vec{a} = \nabla^2 a_x \hat{x} + \nabla^2 a_y \hat{y} + \nabla^2 a_z \hat{z}$$

J.4. Teoremas integrales

De los múltiples teoremas integrales, algunos de los cuales introduciremos en otra ocasión, citaremos aquí sólo a los dos más utilizados en este texto: el *teorema de la divergencia* o de *Gauss* y el *teorema del rotacional* o de *Stokes*. Las demostraciones elementales, no rigurosas, son sencillas y figuran en muchos libros de fácil acceso. Señalaremos solamente la necesidad de que los campos sean de buen comportamiento y que la divergencia y el rotacional sean continuos y acotados en la región de interés.

J.4.1. Teorema de la divergencia

La integral, sobre un volumen arbitrario \mathcal{V} , de la divergencia de un vector es igual al flujo de éste a través de la superficie \mathcal{S} que envuelve a dicho volumen.

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{a} dv = \oint_{\mathcal{S}} \vec{a} \cdot d\vec{s} \quad (J.12)$$

También es útil la igualdad que deriva del teorema anterior (véase la relación de problemas)

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \wedge \vec{a} dv = - \oint_{\mathcal{S}} \vec{a} \wedge d\vec{s} \quad (J.13)$$

J.4.2. Teorema del rotacional

El flujo del rotacional de un vector, a través de una superficie \mathcal{S} abierta y arbitraria, es igual a la circulación de dicho vector a lo largo del contorno \mathcal{L} de la misma. La dirección de circulación y la de la normal están ligadas por el convenio ya mencionado.

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \wedge \vec{a}) \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{L}} \vec{a} \cdot d\vec{l} \quad (\text{J.14})$$

donde \mathcal{S} es una superficie abierta y \mathcal{L} su contorno.

J.5. Coordenadas curvilíneas ortogonales

Propiedades generales:

A lo largo del texto se hará uso de sistemas coordinados que, como el cartesiano, el esférico y el cilíndrico, pertenecen al tipo de sistemas coordinados curvilíneos ortogonales. En estos sistemas, figura J.12, los distintos puntos del espacio se describen especificando las tres superficies, pertenecientes a tres familias distintas, que se cortan ortogonalmente en dicho punto.

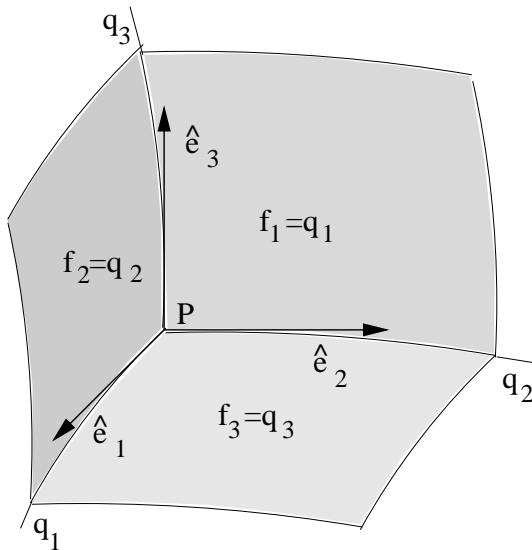


Figura J.12:

Las coordenadas (q_1, q_2, q_3) de un punto determinado (P), serán los valores de los parámetros correspondientes a las superficies

$$f_1(x, y, z) = q_1 , \quad f_2(x, y, z) = q_2 , \quad f_3(x, y, z) = q_3$$

que se cortan en el punto P .

Los vectores unitarios en cada punto vendrán dados por

$$\hat{e}_i = \frac{\nabla f_i}{|\nabla f_i|} \quad (\text{J.15})$$

y, puesto que las tres familias son ortogonales, también los vectores unitarios lo serán

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

En general, salvo para el sistema cartesiano, el triedro unitario tiene una orientación distinta en cada punto del espacio.

El vector desplazamiento elemental $d\vec{l}$ se define como

$$d\vec{l} \equiv dl_i \hat{e}_i \quad (\text{J.16})$$

donde dl_i es la distancia, en la dirección \hat{e}_i , entre las superficies $f_i = q_i$ y $f_i = q_i + dq_i$.

Las distancias elementales dl_i dependen, en general, de las coordenadas del punto y del incremento de la coordenada dq_i , por lo que escribiremos⁵

$$dl_i = h_i(q_1, q_2, q_3) dq_i \quad (\text{J.17})$$

donde los h_i son los *factores de escala*.

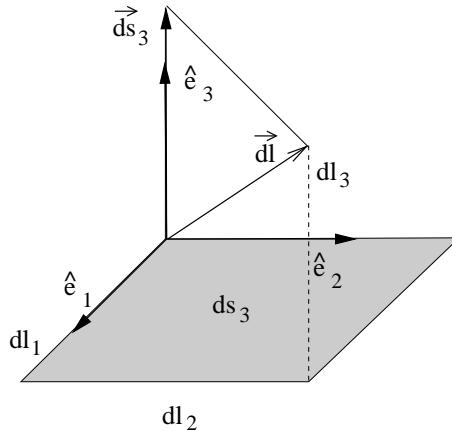


Figura J.13:

Los elementos de superficie vendrán dados por

$$d\vec{s}_k = dl_i dl_j \hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = h_i h_j dq_i dq_j \hat{e}_k \quad (\text{J.18})$$

donde $i \rightarrow j \rightarrow k$ es el orden cíclico a derechas.

El elemento de volumen es

$$dv = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (\text{J.19})$$

⁵Cuando, como en este caso, el índice (i) que aparece en el primer miembro está repetido en el segundo, no se aplica la regla de suma sobre índices repetidos.

El vector de posición de un punto se expresa de la forma

$$\vec{r} = r \hat{r} = r_i \hat{e}_i , \quad r_i = \hat{e}_i \cdot \vec{r} \quad (\text{J.20})$$

donde r es la distancia del punto al origen y \hat{r} es el vector unitario que, en el punto, tiene el sentido opuesto al origen. En cada sistema, las componentes r_i de este vector se obtendrán proyectando \vec{r} sobre la dirección \hat{e}_i .

Expresiones de los operadores en coordenadas ortogonales:

No es difícil demostrar, de acuerdo con las definiciones J.7, J.8, J.9 y J.10 y haciendo aproximaciones de primer orden, que las expresiones siguientes tienen validez general (Consultense los textos correspondientes).

$$\nabla \lambda = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \lambda}{\partial q_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \lambda}{\partial q_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \lambda}{\partial q_3} \hat{e}_3 , \quad \nabla_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (\text{J.21})$$

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial a_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial a_2 h_1 h_3}{\partial q_2} + \frac{\partial a_3 h_1 h_2}{\partial q_3} \right] \quad (\text{J.22})$$

$$\nabla \wedge \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix} \quad (\text{J.23})$$

$$\nabla^2 \lambda = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \lambda}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \lambda}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \lambda}{\partial q_3} \right) \right] \quad (\text{J.24})$$

J.5.1. Sistemas Coordenados

Coordenadas cartesianas:

Las superficies coordenadas son planos de las familias

$$f_1 = x = q_1 , \quad f_2 = y = q_2 , \quad f_3 = z = q_3$$

A los vectores unitarios los anotaremos de la forma

$$\hat{e}_1 = \hat{x} , \quad \hat{e}_2 = \hat{y} , \quad \hat{e}_3 = \hat{z}$$

Puesto que las tres coordenadas tienen dimensión espacial, sus incrementos coincidirán con las componentes del vector desplazamiento elemental, por lo que

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

Como puede verse en la figura J.14

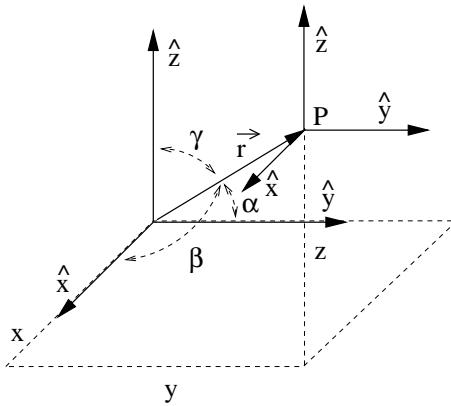


Figura J.14:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ x &= r \cos \alpha \\ y &= r \cos \beta \\ z &= r \cos \gamma\end{aligned}$$

Coordenadas esféricas:

En este caso, figura J.15a, tomamos como superficies coordenadas

$$\begin{aligned}f_1 &= r = q_1 \quad , \quad 0 < r < \infty \quad , \quad \text{superficie coordenada radial} \\ f_2 &= \theta = q_2 \quad , \quad 0 < \theta < \pi \quad , \quad \text{superficie coordenada cenital} \\ f_3 &= \varphi = q_3 \quad , \quad 0 < \varphi < 2\pi \quad , \quad \text{superficie coordenada azimutal}\end{aligned}$$

La primera familia está constituida por las superficies esféricas, centradas en el origen, de radio r , los semiconos de semiaciclo θ centrados en el eje z y los semiplanos que contienen a dicho eje y que forman un ángulo φ con el plano $y = 0$.

Los vectores unitarios son

$$\hat{e}_1 = \hat{r} \quad , \quad \hat{e}_2 = \hat{\theta} \quad , \quad \hat{e}_3 = \hat{\varphi}$$

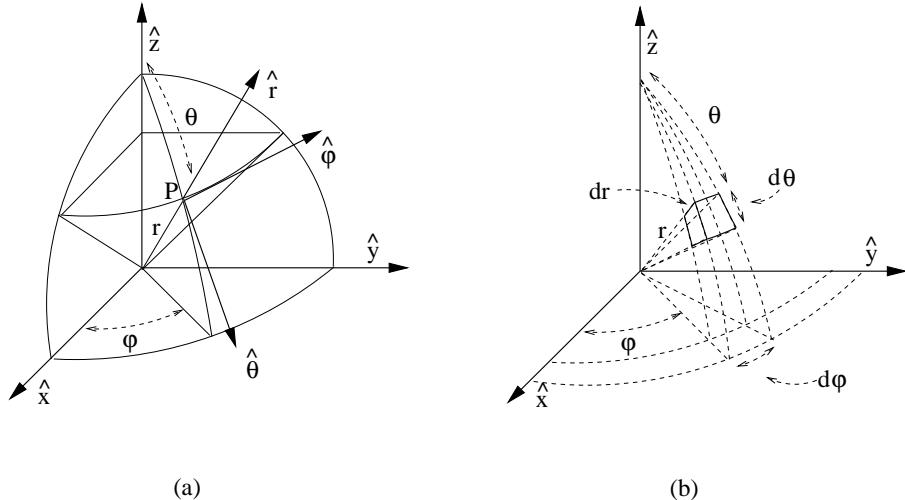


Figura J.15:

las componentes de $d\vec{l}$

$$dl_1 = dr \quad , \quad dl_2 = r d\theta \quad , \quad dl_3 = r \sin \theta d\varphi$$

por lo que

$$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = r \quad , \quad h_3 = r \sin \theta$$

y el vector de posición

$$\vec{r} = r \hat{r} = r (\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})$$

Por último, el elemento de volumen es, figura J.15b,

$$dv = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Coordenadas cilíndricas:

Las superficies coordenadas son, respectivamente, cilindros de radio ρ centrados en el eje z , semiplanos que contienen a dicho eje y planos $z = cte$

$$\begin{aligned}f_1 &= \rho = q_1 \quad , \quad 0 < r < \infty \\f_2 &= \varphi = q_2 \quad , \quad 0 < \theta < 2\pi \\f_3 &= z = q_3\end{aligned}$$

los vectores unitarios

$$\hat{e}_1 = \hat{\rho} \ , \ \hat{e}_2 = \hat{\varphi} \ , \ \hat{e}_3 = \hat{z}$$

las funciones h_i

$$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = \rho \quad , \quad h_3 = 1$$

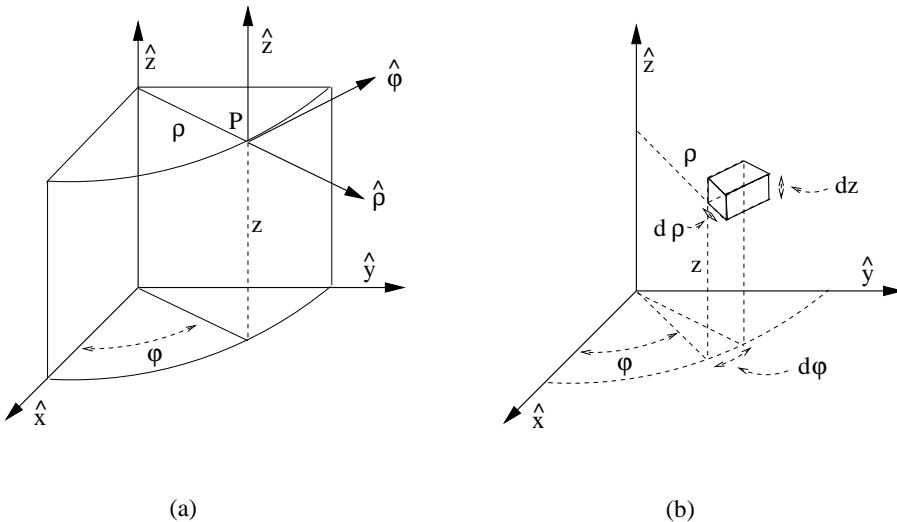


Figura J.16:

el vector de posición

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} = \rho \cos \varphi \hat{x} + \rho \sin \varphi \hat{y} + z \hat{z}$$

y el elemento de volumen

$$dv = \rho d\rho d\theta d\varphi$$

En el formulario, al final del tomo, se ofrece un resumen explícito de lo anteriormente expuesto.

J.6. Problemas

j-1. Dado el vector de posición del punto A, $\vec{A} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, halle:

- El vector unitario correspondiente.
- El vector de posición, de un punto B, perpendicular a \vec{A} , con el mismo módulo y contenido en el plano $z = 0$.
- El vector de posición que define al cuarto vértice C de un cuadrado cuyos tres primeros vértices son el origen, A y B.
- La ecuación de la recta \overline{AB} .
- La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano del cuadrado.
- La ecuación de la circunferencia inscrita en el cuadrado.
- El vector unitario normal a la superficie de la esfera con centro en el plano del cuadrado y cuya intersección con el mismo es la circunferencia del apartado anterior.

j-2. Calcule la matriz de una transformación que gire el vector $(1, 1, 0)$ al $(0, 1, 1)$. Halle su determinante.

j-3. Escriba las matrices (a_{ij}) y determine el carácter de propia o impropia de las transformaciones:

- $x' = -x, y' = y, z' = z$
- $x' = -x, y' = -y, z' = z$

Compruebe lo anterior transformando al pseudovector $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, donde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ son vectores.

Solución:

a) Teniendo en cuenta la ley de trasformación de coordenadas cuando $O = O'$, véase la expresión ??, la matriz de la transformación de coordenadas, que en este caso coincide con la de base, tiene la forma

$$\tilde{a} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con esto, los nuevos vectores unitarios, $\hat{x}' = -\hat{x}, \hat{y}' = \hat{y}$ y $\hat{z}' = \hat{z}$, corresponden a un triángulo a izquierdas, según se muestra en la figura J.17.

Se puede comprobar, contestando a la parte (b), que la inversión de un número impar de ejes implica una transformación impropia. En caso contrario la transformación correspondiente es propia.

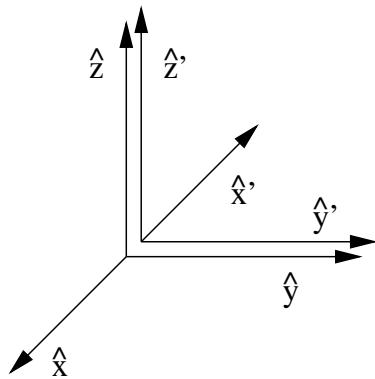


Figura J.17:

- j-4. Sea \vec{r} el vector de posición. Halle la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.

Solución:

El vector de posición en coordenadas cilíndricas (véase el resumen de formulario), es

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

Los vectores unitarios $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$ en el punto $P = (\rho, \varphi, z)$ están contenidos en el plano $z = z$, como se muestra en la figura J.18.

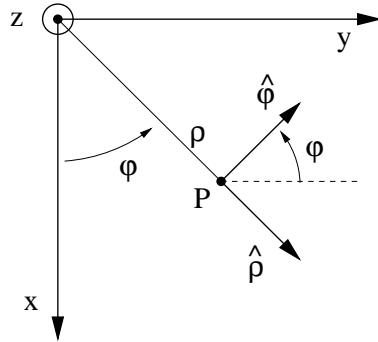


Figura J.18:

$\hat{\rho}$ es perpendicular a la superficie del cilindro de radio ρ , en la sentido de ρ creciente. $\hat{\varphi}$ es perpendicular al semiplano φ y en el sentido creciente de esta variable.

$$\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

A diferencia de \hat{z} , los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$ varian a lo largo una trayectoria $\vec{r}(t)$. Derivando estos últimos vectores se tiene que

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{\varphi}, \quad \frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \hat{\rho}$$

por lo que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_\rho \hat{\rho} + v_\varphi \hat{\varphi} + v_z \hat{z}$$

donde

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}, \quad v_\varphi = \rho \frac{d\varphi}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Volviendo a derivar

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_\rho \hat{\rho} + a_\varphi \hat{\varphi} + a_z \hat{z}$$

$$a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \quad a_\varphi = \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\varphi}{dt}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Dejaremos como ejercicio la última parte del problema.

- j-5. Demuéstrese que si una partícula se mueve de forma que \vec{r} y \vec{v} sean perpendiculares entre sí, su trayectoria se confina a una esfera.

Solución:

Dado que \vec{r} y \vec{v} son perpendiculares

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

por lo que, integrando, se tiene que

$$x^2 + y^2 + z^2 = cte = R^2$$

donde R es el radio de la esfera.

Si el movimiento estuviese contenido en un plano, la trayectoria sería una circunferencia.

- j-6. Demuestre las relaciones N.1 y N.2 del formulario (apéndice N).

- j-7. Calcule el gradiente y la derivada direccional, en la dirección $(1, 1, 1)$, de la función $f = 3x^2y + 2yz^3 - x$ en el punto $(1, -1, 1)$.

j-8. Definimos los vectores

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (x, y, z) \\ \vec{r}' &= (x', y', z') \\ \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}' = (x - x', y - y', z - z')\end{aligned}$$

Asimismo definimos las operaciones:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ \nabla' f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x'}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial z'} \right)\end{aligned}$$

Demuestre que se cumplen las relaciones

- a) $\nabla f(R) = -\nabla' f(R) = \hat{R} \cdot \frac{df}{dR}$
- b) $\nabla (1/R) = -\frac{\hat{R}}{R^3}$

Solución:

Sólo apuntaremos que

$$\nabla_x f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial x} = \frac{df(R)}{dR} \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{df(R)}{dR} \frac{\partial R}{\partial R_x} \frac{\partial R_x}{\partial x}$$

donde $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ y $R_x = x - x'$ y, por lo tanto,

$$\frac{\partial R_x}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial R_x}{\partial x'} = -1$$

j-9. Demuestre las relaciones N.6 y N.9 del formulario.

j-10. Calcule en el punto $(1, -1, 1)$ la divergencia y el rotacional del campo vectorial $\vec{A} = x^2 z \hat{x} - 3y^3 z^2 \hat{y} - xy^2 z \hat{z}$.

j-11. Demuestre las relaciones N.10 y N.15 del formulario.

j-12. Demuestre las relaciones N.16 y N.21 del formulario.

j-13. Demuestre la relación N.28 del formulario.

Solución:

Sea $\vec{k} = cte$ un vector constante y arbitrario y \vec{x} un campo vectorial.

Definamos $\vec{a} = \vec{k} \wedge \vec{x}$ y apliquemos el teorema de Gauss a este vector.

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{k} \wedge \vec{x}) dv = \oint_S (\vec{k} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{n} ds \quad (\text{J.25})$$

De acuerdo con el resumen de formulario

$$\nabla \cdot (\vec{k} \wedge \vec{x}) = -\vec{k} \cdot \nabla \wedge \vec{x}$$

puesto que $\nabla \wedge \vec{k} = \vec{0}$, y

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{k}) = \vec{k} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{x})$$

Substituyendo en J.25 y sacando $(\vec{k} \cdot)$ de las integrales

$$\vec{k} \cdot \left(\int_V \nabla \wedge \vec{x} dv - \int_S \vec{n} \wedge \vec{x} ds \right) = 0$$

y, por ser \vec{k} arbitrario,

$$\int_V \nabla \wedge \vec{x} dv = \int_S \vec{n} \wedge \vec{x} ds$$

- j-14. Dado un campo central, cuya magnitud dependa solamente de la distancia r al centro, demuestre que es irrotacional.

Solución:

Según el formulario, en coordenadas esféricas y teniendo en cuenta que $\vec{A} = (f(r), 0, 0)$

$$\nabla \wedge \vec{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{d}{dr} & 0 & 0 \\ f(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- j-15. Demuestre que, en coordenadas cartesianas, se puede escribir: $\Delta \vec{A} = \Delta A_x \hat{x} + \Delta A_y \hat{y} + \Delta A_z \hat{z}$.

- j-16. Determine los Jacobianos $\mathcal{J} \left(\frac{x, y, z}{\rho, \varphi, z} \right)$ y $\mathcal{J} \left(\frac{x, y, z}{r, \theta, \varphi} \right)$.

- j-17. Calcule la circulación del campo $\vec{A} = (2x - y^2) \hat{x} + 3yz \hat{y} + \hat{z}$, desde el punto $a = (0, 0, 0)$ al $c = (1, 1, 1)$, a lo largo del camino $C = a \rightarrow b \rightarrow c$, donde $b = (1, 0, 0)$ (véase la figura J.19).

Solución:

Debemos realizar la integral, véase la figura J.19

$$I = \int_{a(C)}^c \vec{A} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_{a(C1)}^b \vec{A} \cdot d\vec{l}}_{I1} + \underbrace{\int_{b(C2)}^c \vec{A} \cdot d\vec{l}}_{I2}$$

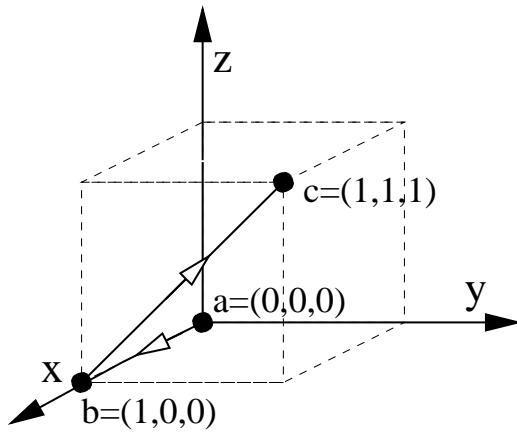


Figura J.19:

- Camino $\mathcal{C}1$: A lo largo de este camino $y = 0, z = 0$, luego

$$I1 = \int_0^1 (A_x)_{y=0,z=0} dx$$

- Camino $\mathcal{C}2$: A lo largo de este otro $x = 1, y = z \Rightarrow dy = dz$ y

$$I2 = \int_0^1 (A_y + A_z)_{x=1,y=z} dz$$

Complete analíticamente el problema y compruebe el resultado con el siguiente programa.

Programa Mathematica *prob - h17.nb*:

```
A = {2x - y^2, 3y * z, 1};
Ax1 = A[[1]]/.{y -> 0, z -> 0};
Aymz2 = (A[[2]] + A[[3]])/.{x -> 1, y -> z};
```

$$\text{INT} = \int_0^1 \text{Ax1} dx + \int_0^1 \text{Aymz2} dz$$

j-18. Plantee el cálculo del flujo de un vector \vec{A} a través de la superficie definida lateralmente por $x^2 + y^2 = a^2$ y por las áreas circulares resultantes de la intersección de la superficie anterior con los planos $z = z_1$ y $z = z_2$. Traduzcalo a un programa Mathematica y considere los siguientes casos:

- a) $\vec{A} = \vec{r}, a = 2, z_1 = 0$ y $z_2 = 2$. Realice los cálculos analíticamente y compruébelos aplicando el programa.

b) $\vec{A} = K \frac{\vec{r}}{r^3}$, $a = 2$, $z_1 = -1$ y $z_2 = 1$. Resuélvalo haciendo uso del teorema de Gauss y mediante el programa.

Solución:

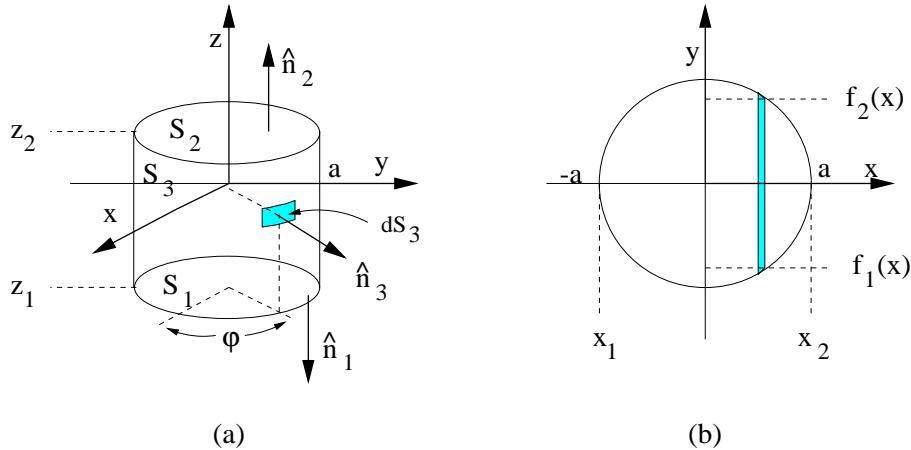


Figura J.20:

Según podemos ver en la figura J.20a, debemos calcular el flujo a través de las bases del cilindro y de su superficie lateral.

En el primer caso, debemos realizar la integral

$$\Phi_b = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \vec{A} \cdot \vec{n} dy$$

donde $\vec{n} = \pm \hat{z}$, según el caso, y $f_1(x) = -f_2(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$.

En el segundo, el dominio es rectangular y

$$\Phi_l = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{2\pi} \vec{A} \cdot \vec{n} d\varphi$$

siendo $\vec{n} = \hat{r} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$.

Programa Mathematica prob - h18.nb:

Planteamos la solución del apartado (b).

Flujo por las bases

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 2; \mathbf{z1} = -1; \mathbf{z2} = 1; \\ \mathbf{f1} &= -\sqrt{\mathbf{a}^2 - \mathbf{x}^2}; \mathbf{f2} = -\mathbf{f1}; \\ \mathbf{x1} &= -\mathbf{a}; \mathbf{x2} = \mathbf{a}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}; \quad \mathbf{r2} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}; \quad \mathbf{ur} = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{\mathbf{r2}}} \\
\mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi * \text{eps}} \frac{\mathbf{q} * \mathbf{ur}}{\mathbf{r2}}; \\
\mathbf{normal1} &= \{0, 0, -1\}; \quad \mathbf{normal2} = \{0, 0, 1\}; \\
\mathbf{fxy1} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{normal1} / \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z1}; \quad \mathbf{fxy2} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{normal2} / \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Phi1} &= \int_{x1}^{x2} \left(\int_{f1}^{f2} \mathbf{fxy1} \, dy \right) dx; \\
\mathbf{Phi2} &= \int_{x1}^{x2} \left(\int_{f1}^{f2} \mathbf{fxy2} \, dy \right) dx;
\end{aligned}$$

Los paréntesis que encierran a la segunda integral no son necesarios. Se han utilizado para resaltar la estructura de la doble integral.

Flujo lateral

$$\begin{aligned}
\mathbf{normal3} &= \{\cos[\mathbf{fi}], \sin[\mathbf{fi}], 0\}; \\
\mathbf{ffiz} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{normal3} / \{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} * \cos[\mathbf{fi}], \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{a} * \sin[\mathbf{fi}]\}) * \mathbf{a};
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Phi3} = \int_{z1}^{z22} \left(\int_0^{2\pi} \mathbf{ffiz} \, d\mathbf{fi} \right) dx;$$

Flujo total

$$\mathbf{Phi} = \mathbf{N}[\mathbf{Phi1} + \mathbf{Phi2} + \mathbf{Phi3}]$$

- j-19. Calcule el trabajo realizado por un campo de fuerzas $\vec{A} = xy\hat{x} + y^2\hat{y}$ en un desplazamiento desde el origen hasta el punto $a = (1, 1)$ a lo largo de la curva $y = x^2$.
- j-20. Demuestre que el campo de fuerzas $\vec{A} = (2xy + z^3)\hat{x} + x^2\hat{y} + 3xz^2\hat{z}$ es conservativo y calcule el trabajo realizado en un desplazamiento desde $(1, -2, 1)$ a $(3, 1, 4)$.
- j-21. Determine el flujo del campo vectorial $\vec{A} = z\hat{x} + x\hat{y} + 3y^2z\hat{z}$ a través de una superficie limitada por los planos, $x = 0, x = l, y = 0, y = l, z = 0, z = l$. Llévelo a cabo por integración directa y mediante el teorema de la divergencia.
- j-22. Calcule la circulación del campo vectorial $\vec{A} = (x^3 - y)\hat{x} + (y^2 + x)\hat{y}$ desde el punto $a = (0, 1)$ hasta $b = (1, 2)$ a lo largo de:
- $a \rightarrow b$
 - $a \rightarrow (1, 1) \rightarrow b$
 - La parábola $x = t^2 + 1$

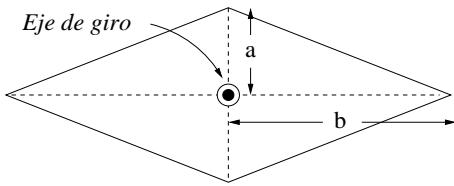


Figura J.21:

- j-23. Calcule el momento de inercia de una aguja magnética de forma romboidal como la representada en la figura J.21. La masa total es M . Haga uso de la simetría del problema para su resolución.
- j-24. Calcule el momento dipolar de la distribución plana de carga eléctrica, definida en el plano xy , correspondiente a las regiones $0 < x \leq 1$, $-30^\circ \leq \varphi \leq 30^\circ$, $\rho = 1$ y $0 > x \geq -1$, $120^\circ \geq \varphi \geq 60^\circ$, $\rho = -1$. ρ es la densidad de carga.
- j-25. Halle el flujo del vector de posición a través de la superficie del cubo limitado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ (véase la figura J.22) ⁶.

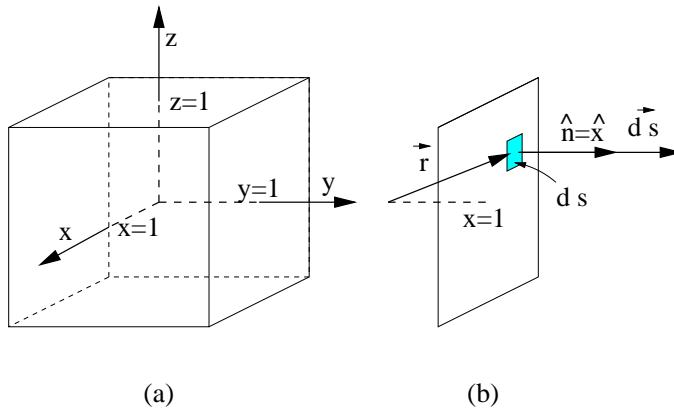


Figura J.22:

- j-26. Calcule el flujo de un campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$ a través de (véase la figura J.23)
- una superficie esférica de radio a
 - la hemisferia de radio a centrada en el origen y definida en $z \geq 0$

- j-27. Dados los campos vectoriales:

a)

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\vec{r}}{a} & \text{para } r \leq a \\ \hat{r} \frac{a^2}{r^2} & \text{para } r > a \end{cases}$$

⁶Haga uso de las simetrías del problema.

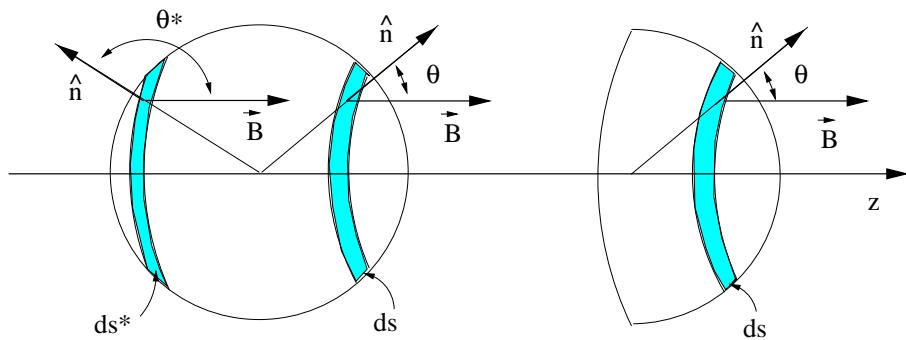


Figura J.23:

b)

$$\vec{B} = \begin{cases} \hat{\varphi} \frac{\rho}{a} & \text{para } \rho \leq a \\ \hat{\varphi} \frac{a}{\rho} & \text{para } \rho > a \end{cases}$$

dibuje las líneas de campo, halle las fuentes escalares y vectoriales en cada zona y clasifique los campos.

Apéndice K

La Delta de Dirac

La función δ de Dirac no es propiamente una función; su encuadramiento riguroso, desde el punto de vista matemático, requiere el uso de la teoría de distribuciones desarrollada por L. Schwartz (véase [Friedman]). No obstante, la δ puede expresarse como límite de una sucesión de funciones, lo que nos permitirá dar una idea intuitiva y operativa de la misma. (Véanse los apéndices de [Novozhilov, Levich-I, Born y Wolf] y las tablas [Spiegel et al.]).

Esta función tiene una gran utilidad en física y nos permitirá, entre otras cosas, expresar magnitudes singulares en un punto como límite de magnitudes continuas¹.

K.1. Definición

A) En una dimensión, definiremos a la *δ de Dirac*, figura K.1a, como una función de medida nula

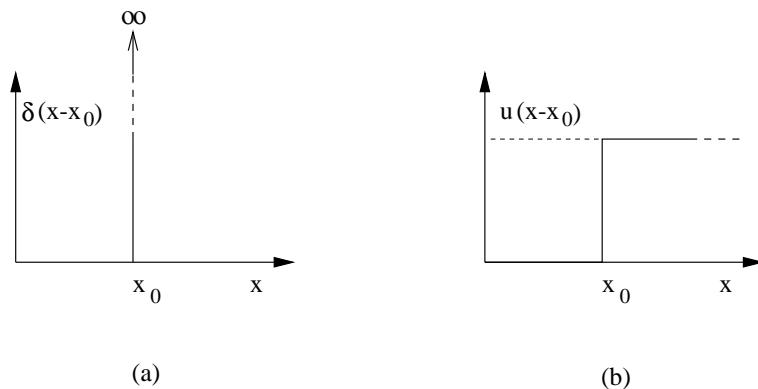


Figura K.1:

¹El concepto de límite se utilizará en este contexto de forma no convencional.

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq x_0 \\ \rightarrow \infty & \text{para } x \rightarrow x_0 \end{cases} \quad (\text{K.1})$$

que, además, tiene área unidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \quad (\text{K.2})$$

De otra forma

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{si } x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

por anularse $\delta(x)$ para todo $x \neq 0$.

B) En tres dimensiones

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ \rightarrow \infty & \text{para } \vec{r} \rightarrow \vec{r}_0 \end{cases}, \quad \int_{V \rightarrow \infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dv = 1 \quad (\text{K.3})$$

De la definición anterior se deduce que las dimensiones de la delta tridimensional son las de el inverso del volumen.

$$[\delta(\vec{r})] = L^{-3} \quad (\text{K.4})$$

Como ya hemos dicho, no existe ninguna función que tenga exactamente las propiedades enunciadas, pero se verá más adelante que podemos imaginar diversas sucesiones $\delta_a(\vec{r} - \vec{r}_0)$, dependientes del parámetro a , tales que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

de forma que se podrá siempre disponer de verdaderas funciones que, para $a < \varepsilon$ arbitrariamente pequeño, cumplan las condiciones anteriores con la necesaria precisión. Esto, desde el punto de vista físico es plenamente satisfactorio y nos evita, por ahora, situar a la δ en un contexto más riguroso. Operativamente, entenderemos que el resultado de cualquier operación en la que intervenga esta función será el correspondiente al límite, cuando $a \rightarrow 0$, de los resultados obtenidos empleando δ_a .

C) En coordenadas curvilíneas q_i , debemos escribir

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \delta(q_1 - q_{10}) \delta(q_2 - q_{20}) \delta(q_3 - q_{30}) \quad (\text{K.5})$$

donde el factor $\frac{1}{h_1 h_2 h_3}$ se introduce porque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(q_i - q_{i0}) dq_i = 1$$

y debe cumplirse la condición de normalización K.3.

D) Suele ser útil la definición de δ como la derivada de la función unitaria de Heaviside, figura K.1b, o función escalón unitario

Puede comprobarse que la derivada de esta función cumple las condiciones prescritas

$$\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} u(x - x_0) \equiv u'(x - x_0) , \quad u(x - x_0) = \int_{-\infty}^x \delta(x - x_0) dx \quad (\text{K.6})$$

K.2. Propiedades

a) La propiedad fundamental de la δ es la de *desplazamiento*:

Si $f(\vec{r})$ es una función de buen comportamiento

$$f(\vec{r}_0) = \int_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dv \quad (\text{K.7})$$

La demostración intuitiva de esta propiedad es fácil si aplicamos sucesivamente las dos propiedades definitorias de la δ e integramos sobre sobre un pequeño volumen $\Delta\mathcal{V} < \epsilon$ que contenga al punto \vec{r}_0 , véase la figura K.2

$$\int_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dv = \int_{\Delta\mathcal{V}} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dv = f(\vec{r}_0) \int_{\Delta\mathcal{V}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dv = f(\vec{r}_0)$$

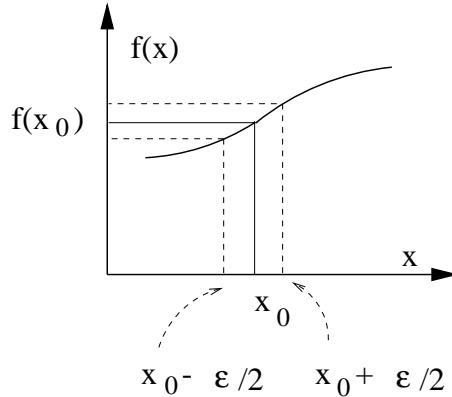


Figura K.2:

b) δ no es una función y su "derivada" tampoco lo es pero, sin embargo, podemos definir sus propiedades mediante el proceso de límite enunciado al principio. Simbólicamente, escribiremos $\frac{d}{dx} \delta(x - x_0) \equiv \delta'(x - x_0)$.

Haciendo uso de $\delta_a(x - x_0)$ e integrando por partes, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'_a(x - x_0) dx = \underbrace{[f(x) \delta_a(x - x_0)]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta_a(x - x_0) dx$$

y, tomando el límite para $a \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0) \quad (\text{K.8})$$

De forma general

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0) \quad (\text{K.9})$$

Otras propiedades de interés están reseñadas en el apéndice de formulario.

K.3. Ejemplos de sucesiones de funciones que aproximan a la delta de Dirac

Desde el punto de vista práctico, es preferible definir $\delta(x)$ como 'límite' de familias paramétricas de funciones, de área unitaria, relacionadas entre sí mediante un cambio de escala. Dada la función $\varphi(x)$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$, definimos

$$\delta_a(x) \equiv \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x}{a}\right)$$

que, efectivamente, son funciones de área unitaria.

Diremos que

$$\delta(x) =' \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x) \quad (\text{K.10})$$

Si²

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) f(x) dx = f(0) \quad (\text{K.11})$$

En los siguientes ejemplos se toman las δ_a como sucesiones de:

- Pulsos cuadrados, figura K.3a.

$$\delta_a(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } |x - x_0| > \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a} & \text{para } |x - x_0| < \frac{a}{2} \end{cases}$$

²Al escribir ' $\lim_{a \rightarrow 0}$ ' en la expresión anterior, queremos indicar que no estamos haciendo un uso normal del concepto de límite; en realidad, queremos indicar que, en el límite $a \rightarrow 0$, $\delta_a(x)$ cumple con la propiedad fundamental de la delta de Dirac K.7.

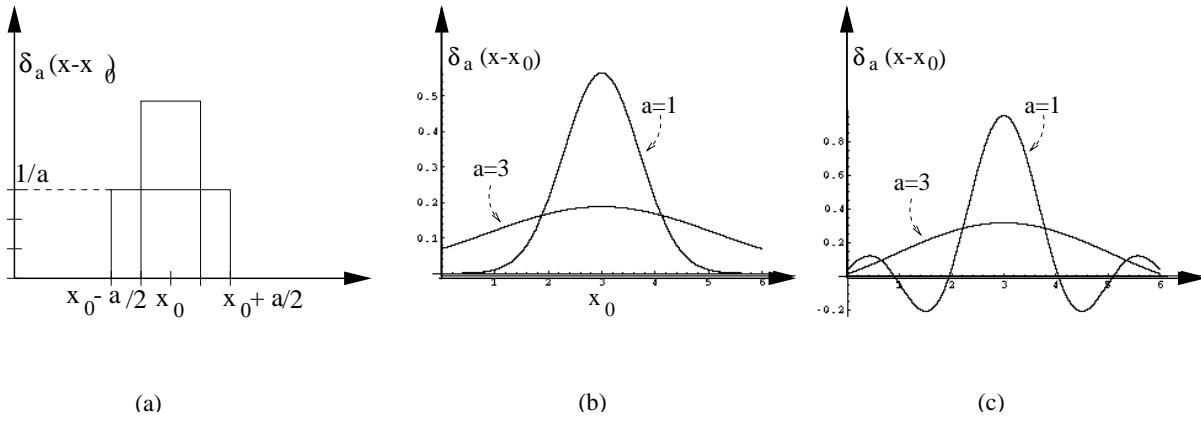


Figura K.3:

- Funciones gaussianas, figura K.3b.

$$\delta_a(x - x_0) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-(\frac{x-x_0}{a})^2}$$

- Funciones seno sobre arco, figura K.3c.

$$\delta_a(x - x_0) = \frac{\operatorname{sen}[a(x - x_0)]}{\pi(x - x_0)}$$

K.4. Otras expresiones útiles de la δ

a) Nosotrosaremos un uso frecuente de la expresión

$$\delta(\vec{R}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \nabla'^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) \quad (\text{K.12})$$

donde ∇ opera sobre las componentes de \vec{r} y ∇' sobre las de \vec{r}' . La función $\frac{1}{r}$ es singular en el origen y, para poder aplicar estrictamente el teorema de Gauss, deben ser continuos el vector y sus primeras derivadas. Pero podemos salvar esta dificultad empleando una δ_a con a pequeño pero finito.³.

Veamos que $\delta(\vec{r})$, así definida, es efectivamente una delta de Dirac, figura K.4a. Puede comprobarse por diferenciación directa que

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \begin{cases} 0 & \text{para } \vec{r} \neq \vec{0} \\ \text{indefinida } (\infty) & \text{para } \vec{r} \rightarrow \vec{0} \end{cases}$$

³Véase el problema k-3.

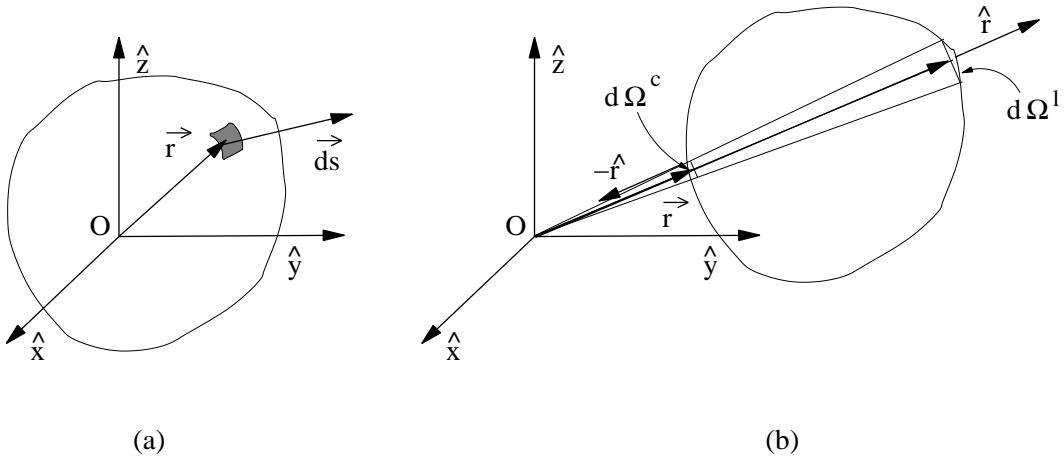


Figura K.4:

y, además, la integral de esta función, en un $\mathcal{V} \rightarrow \infty$, o que contenga $\vec{r} = \vec{0}$, es igual a la unidad.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dv &= \int_{\vec{r} = \vec{0} \in \mathcal{V}} \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] dv = \oint_S \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{s} = \\ &= - \oint_S \frac{\hat{r} \cdot \vec{n}}{r^2} ds = - \oint_S d\Omega = -4\pi \end{aligned}$$

Efectivamente, de acuerdo con N.53

$$\frac{d\vec{s} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{ds_r}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi \equiv d\Omega$$

donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido con que se ve $d\vec{s}$ desde el origen.

Si se incluye el origen en \mathcal{V}

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi$$

Si el volumen no contiene al origen, figura K.4b, las contribuciones de $d\Omega^c$ y $d\Omega^l$ se anulan entre sí por ser iguales y contrarias, por lo que el ángulo sólido subtendido por la superficie es nulo.

De acuerdo con ésto,

$$\delta(\vec{R}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla_R^2 \left(\frac{1}{R} \right), \quad \nabla_{R_x} f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R_x} = \frac{\partial f(R)}{\partial x} = -\frac{\partial f(R)}{\partial x'}$$

b) En mecánica cuántica, y en el estudio de propagación de ondas, es muy útil la expresión

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k^3} e^{j\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)} d^3 k \quad (\text{K.13})$$

donde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ es el vector de onda y $d^3k = dk_x, dk_y, dk_z$.

K.5. Ecuaciones de continuidad

A partir de las definiciones microscópicas de las densidades dadas en el capítulo 1 pueden obtenerse las ecuaciones de continuidad, o de conservación, de la carga neta y de cada una de las especies de carga que componen el sistema.

Derivando la densidad de carga 1.5

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t} \{q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))\} = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{\partial q_i}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))}_{(a)} + \underbrace{\sum_{i=1}^N q_i \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))}_{(b)} \end{aligned}$$

El término (a), como los demás de esta expresión, corresponde a un número de partículas que aparece, por unidad de tiempo y de volumen, en (\vec{r}, t) . Al escribir simbólicamente $\frac{\partial q_i}{\partial t}$ se indica que las partículas en cuestión, aunque tienen carga q_i mientras existen, pueden aparecer ($\frac{\partial |q_i|}{\partial t} > 0$), o desaparecer ($\frac{\partial |q_i|}{\partial t} < 0$) del entorno de (\vec{r}, t) , por procesos de creación o destrucción de carga. Si se tiene en cuenta que existen cargas de ambos signos y que, por el principio de neutralidad, en cada punto e instante se crea o se destruye tanta carga positiva como negativa, (a) puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial q_i}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) = \tau_+(\vec{r}, t) - \tau_-(\vec{r}, t) = 0$$

donde τ_{+-} son las tasas de creación de carga positiva y negativa (carga de cada signo creada por unidad de volumen y tiempo en (\vec{r}, t)). Por el principio de neutralidad del universo, las tasas son iguales y su diferencia nula.

El término (b) puede tratarse fácilmente mediante el cambio de variable $\vec{\kappa}(\vec{r}, t) \equiv \vec{r} - \vec{r}_i(t)$, que es función de \vec{r} y de t (a través de $\vec{r}_i(t)$), lo que permite expresar a la delta de Dirac como $\delta(\vec{\kappa})$ y derivarla como función de función⁴. De esta forma

$$\begin{aligned} q_i \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) &= q_i \frac{\partial \delta(\vec{\kappa})}{\partial \vec{\kappa}} \cdot \frac{\partial \vec{\kappa}}{\partial t} = -q_i \vec{v}_i \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) = \\ &= -\nabla \cdot \{q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))\} = -\nabla \cdot \vec{j}_i \end{aligned} \quad (\text{K.14})$$

⁴Se hará uso de la notación general $\partial/\partial \vec{\kappa} \rightarrow (\partial/\partial \kappa_x, \partial/\partial \kappa_y, \partial/\partial \kappa_z)$. En particular, $\partial/\partial \vec{r} \rightarrow \nabla$.

En los pasos anteriores se ha tenido en cuenta que

$$\frac{\partial \vec{\kappa}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{r}_i(t)}{\partial t} = -\vec{v}_i(t) , \text{ que } \frac{\partial \delta(\vec{\kappa})}{\partial \vec{\kappa}} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

y se ha hecho uso del desarrollo de la divergencia del producto de un escalar por un vector teniendo en cuenta que $\vec{v}_i(t)$ no depende de \vec{r} .

Substituyendo en las ecuaciones anteriores, se deduce la ecuación de continuidad de la carga neta

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{K.15})$$

Si se expresa la densidad de carga neta como $\rho = \rho_+ + \rho_-$, suma de las densidades de carga positiva y negativa, se obtienen las ecuaciones de continuidad para las cargas de ambos signos

$$\nabla \cdot \vec{j}_{+-} + \frac{\partial \rho_{+-}}{\partial t} = \tau_{+-} \quad (\text{K.16})$$

K.6. Problemas

k-1. Demuestre que $\delta(x - x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{dS(x)}{dx}$, donde:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_0 \\ \frac{x-x_0}{\epsilon} & \text{para } x_0 \leq x \leq x_0 + \epsilon \\ 1 & \text{para } x > x_0 + \epsilon \end{cases}$$

Solución:

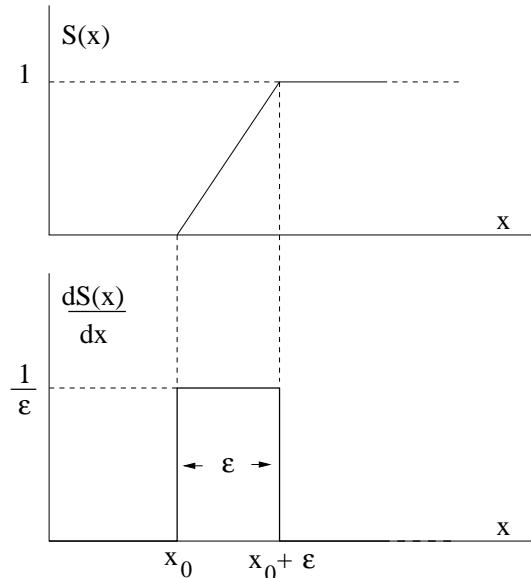


Figura K.5:

Como se muestra en la figura K.5

$$\frac{dS(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_0 \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{para } x_0 \leq x \leq x_0 + \epsilon \\ 0 & \text{para } x > x_0 + \epsilon \end{cases}$$

$\frac{dS(x)}{dx}$ cumple las condiciones de la $\delta(x - x_0)$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{dS(x)}{dx} \rightarrow \infty , \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \epsilon$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dS(x)}{dx} dx = 1$$

k-2. Demuestre que $\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a = \delta(x)$ para

$$\delta_a = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \cos 2\pi \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \right) & \text{para } |x| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{para } |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

Solución:

Programa Mathematica prob - I2.nb

Estudiaremos unos cuantos elementos de la serie $\delta_a = \text{da}$ dando a a valores enteros $1 = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} n &= 4; \\ \text{da} &= \text{If}[x < \frac{a}{2} \&& x > -\frac{a}{2}, \frac{1}{a} \left(1 - \text{Cos}[2\pi \frac{x - \frac{a}{2}}{a}] \right), 0]; \end{aligned}$$

Definimos dos listas, **area** y **graficas**, de dimensión n , para almacenar los valores de las áreas y las gráficas de las δ_a correspondientes a los distintos valores de a .

$$\text{area} = \{0\}; \text{Do}[\text{area} = \text{Append}[\text{area}, 0], \{i, 2, n\}];$$

$$\text{graficas} = \text{area};$$

Calculamos las áreas.

$$\text{Do}[\text{area}[i] = \left(\int_{-a}^a \text{da} \, dx \right) /. a \rightarrow i, \{i, 1, n\}];$$

y representamos sus valores en la figura K.6

$$\begin{aligned} \text{ListPlot}[\text{area}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 0, 0], \\ \text{AbsolutePointSize}[5\}], \text{AxesLabel} \rightarrow \{"a", "area"\}]; \end{aligned}$$

comprobando que $\text{area} = 1$ en todos los casos.

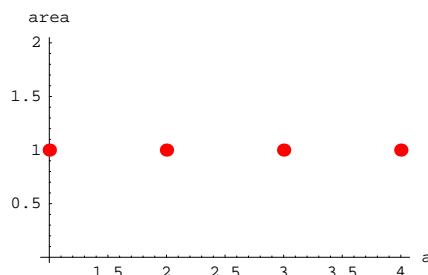


Figura K.6:

Realizamos las distintas gráficas sin mostrarlas

```
Do[graficas[[i]] = Plot[da/.a → i, {x, -0.6 * i, 0.6 * i},
  PlotStyle → RGBColor[1 - (i - 1)/n, 0, i/n],
  DisplayFunction → Identity], {i, 1, n}];
```

y las representamos superpuestas en la figura K.7

```
Show[graficas, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

mostrando que, conforme la anchura de la función decrece, la altura h crece de forma que $\lim_{a \rightarrow 0} h = \infty$.

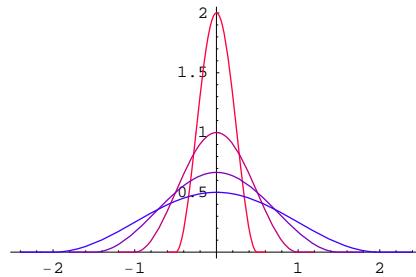


Figura K.7:

k-3. Demuestre

a) Que la función

$$f_a = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{r^3}{a^3} \right) & \text{para } r \leq a \\ -\frac{1}{4\pi r} & \text{para } r > a \end{cases}$$

tiene un gradiente ∇f_a continuo cuya divergencia $\nabla^2 f_a$ es también continua.

b) Que $\lim_{a \rightarrow 0} \nabla^2 f_a = \delta(\vec{r})$.

Solución:

Programa Mathematica prob – I3.nb

Comenzamos haciendo los cálculos analíticamente. Dejamos el cálculo sin ordenador como ejercicio.

```
Remove["Global`*"]; Off[General::"spell1"];
```

Definimos la función en el interior **frint** y en el exterior **frext** de la esfera de radio a y comprobamos que es continua.

$$\text{frint} = -\frac{1}{2\pi * a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{r^3}{a^3} \right); \text{frext} = -\frac{1}{4\pi * r};$$

$$(\text{frint} - \text{frext})/.r \rightarrow a$$

Dado la función depende sólo de r , la única componente del gradiente que no es nula es la radial. Nos limitamos, pues, al cálculo de última.

Definimos la función gradiente, **grad[f_]**, de forma que pueda aplicarse a una función de nombre arbitrario, se lo aplicamos a las funciones anteriores y comprobamos la continuidad del vector resultante.

$$\text{grad}[f_] := \partial_r f;$$

$$\text{vecAint} = \text{Expand}[\text{grad}[frint]]$$

$$\text{vecAext} = \text{Expand}[\text{grad}[frext]]$$

$$(\text{vecAint} - \text{vecAext})/.r \rightarrow a$$

Hacemos lo mismo para la divergencia **div[f_]**

$$\text{div}[f_] := \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 * f);$$

$$\text{divint} = \text{Expand}[\text{div}[\text{vecAint}]]$$

$$\text{divext} = \text{Expand}[\text{div}[\text{vecAext}]]$$

$$(\text{divint} - \text{divext})/.r \rightarrow a$$

y comprobamos que ésta, en el origen, tiende a ∞ cuando $a \rightarrow 0$

$$\text{Limit}[\text{divint}/.\{r \rightarrow 0, a \rightarrow 0\}]$$

Para finalizar, verificamos que la integral de volumen de $\nabla^2 f_a$ es la unidad. Hacemos este cálculo para valores arbitrarios $\mathbf{a} = \mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \mathbf{2};$$

$$\text{diva} = \text{divint}/.\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{n}$$

$$\text{volumen} = 4\pi \int_0^n \text{diva} * r^2 dr$$

Seguimos con la representación gráfica de cada una de estas funciones.

$$\text{Remove}["Global`*"]; \text{Off}[\text{General} :: "spell1"];$$

```
$TextStyle = {FontFamily → "Courier", FontSize → 12};
```

Primero representamos f_a para $a=1$ en la figura K.8.

$$\text{fra} = \text{If}[r \leq a, -\frac{1}{2\pi * a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^3}{2a^3} \right), -\frac{1}{4\pi * r}];$$

```
Plot[{fra/.a → 1, 0}, {r, 0, 2}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 0]}, GridLines → {{1}, None}];
```

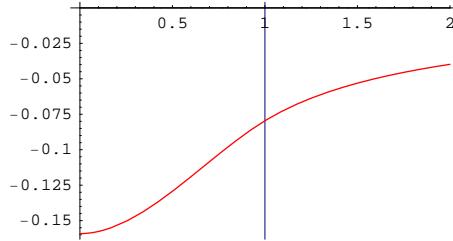


Figura K.8:

a continuación, su gradiente en la figura K.9

$$\text{vecA} = (\partial_r \text{fra});$$

```
Plot[vecA/.a → 1, {r, 0, 2}, PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1], GridLines → {{1}, None}];
```

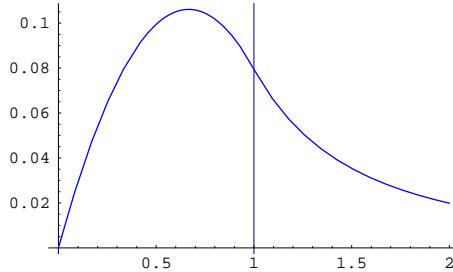


Figura K.9:

y, por último, su divergencia en la figura K.10. Ésta la representamos para tres valores distintos de a .

$$\text{div} = 2 \frac{\text{vecA}}{r} + \partial_r \text{vecA};$$

```
grafdiv = {0}; Do[grafdiv = Append[grafdiv, 0], {i, 1, 2}];
```

```
Do[{Which[i == 1, {rc = 1, gc = 0, bc = 0}, i == 2, {rc = 0, gc = 1, bc = 0},  
i == 3, {rc = 0, gc = 0, bc = 1}], grafdiv[[i]] =  
Plot[div/.a -> Sqrt[i], {r, 0, 2}, PlotStyle -> RGBColor[rc, gc, bc],  
DisplayFunction -> Identity, PlotRange -> All]}, {i, 1, 3}];  
  
Show[grafdiv, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

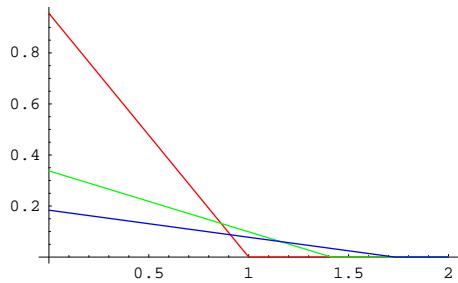


Figura K.10:

Apéndice L

Desarrollo en serie y Transformada de Fourier

Nos limitaremos aquí a recordar brevemente los aspectos fundamentales del desarrollo y la transformada de Fourier. Basándonos en estas técnicas daremos una mayor generalidad al estudio de los sistemas lineales y a la propagación de ondas electromagnéticas.

L.1. Desarrollo en serie de Fourier

Sea $f(t)$ una función continua de una variable t en el intervalo $[a, b]$. Dentro de ese intervalo es posible representar a $f(t)$ como

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(t)$$

siempre que $\{\phi_i(t)\}$ sea un conjunto de funciones ortogonal y completo en dicho intervalo.

La ortogonalidad implica que

$$\int_a^b \phi_i \phi_j dt = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

En particular el conjunto de funciones

$$1, \cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{L.1})$$

es ortogonal en cualquier intervalo $I = [t_0, t_0 + T_0]$, donde $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. T_0 es el *periodo fundamental*, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ la *frecuencia (angular) fundamental* y n el *número armónico*. Además es completo para funciones continuas y acotadas dentro I .

La ortogonalidad es fácilmente comprobable, ya que

$$\left. \begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(2\pi n \frac{t}{T_0}) \cos(2\pi n' \frac{t}{T_0}) dt \\ & \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(2\pi n \frac{t}{T_0}) \sin(2\pi n' \frac{t}{T_0}) dt \end{aligned} \right\} = \delta_{nn'} \frac{T_0}{2} \quad (\text{L.2})$$

Por tanto, si $f(t)$, figura L.1, es acotada y continua en I , podrá expresarse en este último como

$$f(t) = f_d(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t) \quad (\text{L.3})$$

$f_d(t)$ es el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ y coincide con esta función en el intervalo I pero no fuera del mismo donde se repite periódicamente.

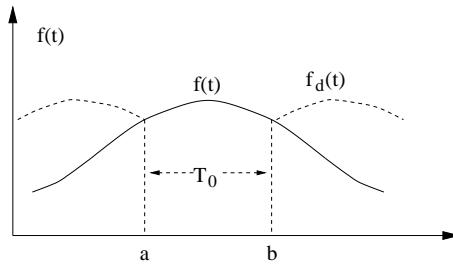


Figura L.1:

Sus coeficientes son

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \cos n \omega_0 t dt , \quad n = 0, 1, 2 \dots \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) \sin n \omega_0 t dt , \quad n = 1, 2 \dots \end{aligned} \quad (\text{L.4})$$

Este desarrollo será también válido para el intervalo $(-\infty, \infty)$ si $f(t)$ es periódica de periodo T_0 .

Si se tienen en cuenta las fórmulas de Euler, podemos expresar L.3 en forma compleja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j n \omega_0 t} \quad (\text{L.5})$$

siendo

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} f(t) e^{-j n \omega_0 t} dt \quad (\text{L.6})$$

En definitiva, el desarrollo en serie de Fourier consiste en transformar la función $f(t)$, dentro de un intervalo I , en un número infinito de coeficientes c_n , que contienen la misma información que $f(t)$ en dicho intervalo.

Dado que no podemos tomar infinitos términos del desarrollo, en la práctica se aproxima a $f_p(t)$ mediante

$$f^N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{L.7})$$

Se puede demostrar que la función error cuadrático

$$E^2 = \int_a^b [f(t) - f'^N(t)]^2 dt , \quad f'^N(t) = \sum_{n=-N}^N c'_n e^{jn\omega_0 t}$$

se minimiza haciendo $c'_n = c_n$, por lo que L.7 es la serie de Fourier que mejor approxima a $f_p(t)$ desde el punto de vista del error cuadrático.

L.2. Transformada de Fourier

Hemos visto que el desarrollo en serie de Fourier nos sirve para representar funciones en un intervalo finito e incluso, cuando son periódicas, en un intervalo infinito.

Veremos que, bajo ciertas condiciones, funciones que se extienden en el tiempo en el intervalo $(-\infty, \infty)$ admiten, si no el desarrollo anterior, una transformación, la de Fourier, que resulta de extender el concepto de desarrollo.

Las funciones más comunes en física, son de cuadrado sumable ¹

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \text{finita}$$

Se puede demostrar que esta condición es suficiente, aunque no necesaria, para que exista la transformada.

Volviendo al desarrollo, observamos que los coeficientes $c_n \rightarrow 0$, cuando $T_0 \rightarrow \infty$. Si queremos obtener una representación de funciones que se extiendan en un intervalo infinito, debemos modificar el desarrollo de forma que se soslaye este problema.

Sea un intervalo finito $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ y desarrollemos $f(t)$ dentro de él.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} , \quad c_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau$$

Substituyendo c_n en la expresión de $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_0 t}$$

Si ahora escribimos $\Delta\omega \equiv \omega_0$ y definimos una nueva variable $\omega \equiv n\Delta\omega = n\omega_0$, en el límite $T_0 \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ y

¹Esta condición no la cumplen, entre otras, la funciones armónicas puras, aunque las incluiremos entre las transformables con ayuda de la delta de Dirac.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{L.8})$$

expresión de la *transformada inversa de Fourier* de la función $F(\omega)$, donde

$$F(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(t)] = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{L.9})$$

es la *transformada directa de Fourier*. Entrambas forman el par de transformadas de Fourier.

En este texto se han escrito las variables como t y ω , notación correspondiente a funciones temporales y armónicas, que son variable duales. Este formalismo puede utilizarse para cualquier otro par de variables duales, como x y k , donde la primera es la variable espacial y $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ su dual, y para cualquier número de dimensiones.

En la trasformada inversa L.8 aparece la constante $1/2\pi$ multiplicando a la integral y el signo $(-)$ en el argumento de la exponencial, lo cual es objeto de convenio. En otros textos la constante se reparte entre la transformación directa L.9 y la inversa y el signo se intercambia entre éstas. El producto de ambas constantes debe ser tal que $C_i C_d = \frac{1}{2\pi}$ y los signos de los argumentos de las exponenciales correspondientes deben ser opuestos. Hay que tener en cuenta que es necesario que la transformada inversa de la transformada directa debe resultar en la función inicial:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(t)]] = f(t)$$

Al consultar tablas o referencias, es preciso tener muy presente las opciones utilizadas en cada caso. En particular, nosotros empleamos la convención utilizada en este apéndice para t pero, según el caso, se introduce en la exponencial uno u otro signo.

En el formulario se reseñan algunas de las propiedades de esta transformada.

L.3. Ejemplos

L.3.1. Desarrollo en serie

Sea la función de la figura L.2a. Ésta no tiene transformada de Fourier por no ser de cuadrado sumable. Sin embargo, se puede desarrollar en serie por ser periódica de periodo T_0 . Los coeficientes del desarrollo son

$$c_n = \frac{A}{2} \frac{\operatorname{sen} n \frac{\pi}{2}}{n \frac{\pi}{2}}$$

Estos coeficientes pueden expresarse, como números complejos en función de su módulo $|c_n|$ y su fase φ como $c_n e^{j\varphi}$ (véase la figura L.2b).

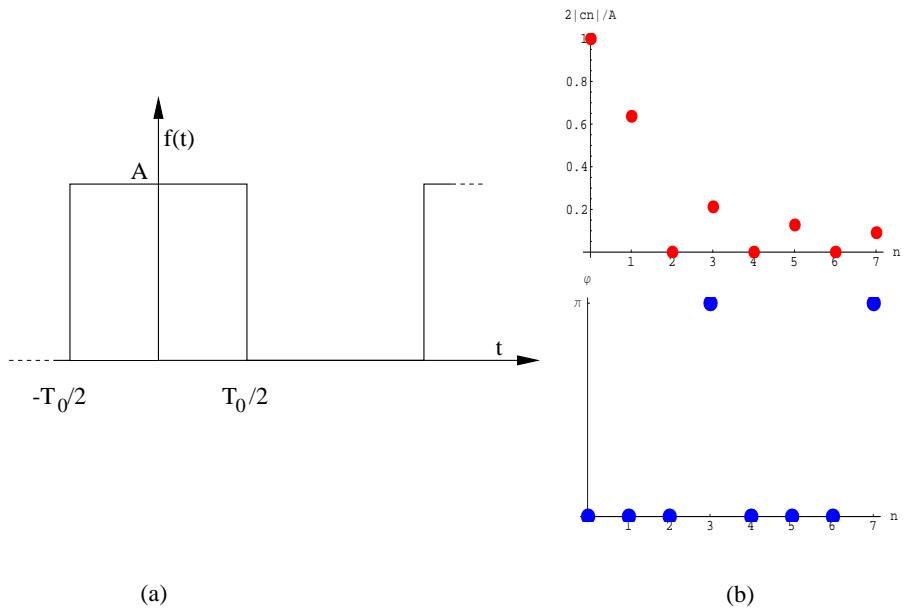


Figura L.2:

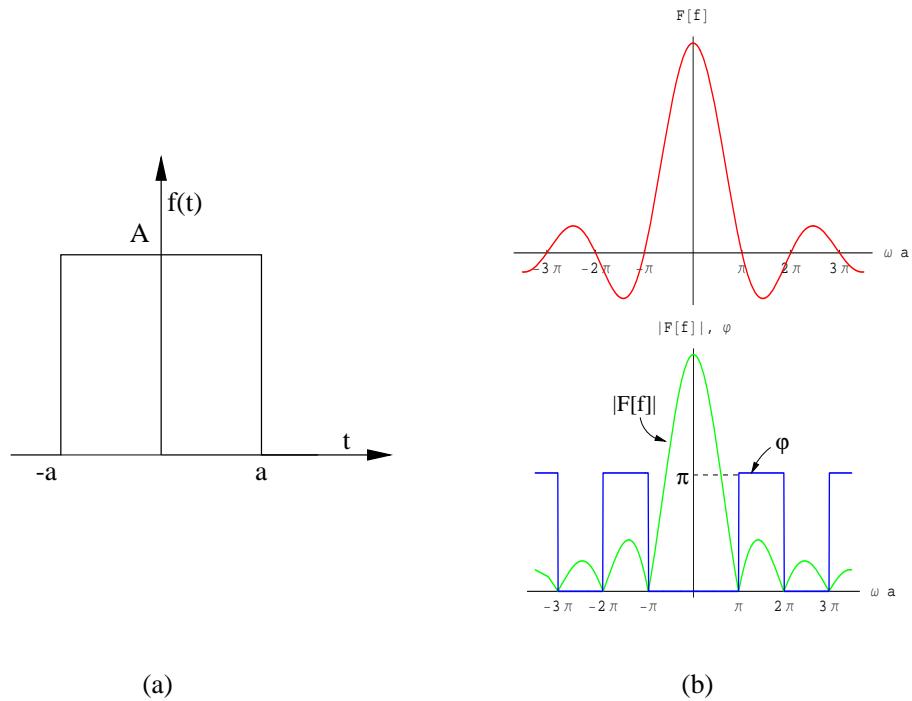


Figura L.3:

L.3.2. Transformada

Para la función de la figura L.3a

$$F(\omega) = 2 A a \frac{\sin \omega a}{\omega a}$$

En la figura L.3b se representan el módulo y la fase de la función.

L.4. Problemas

l-1. Halle el desarrollo en serie de Fourier de las siguientes funciones:

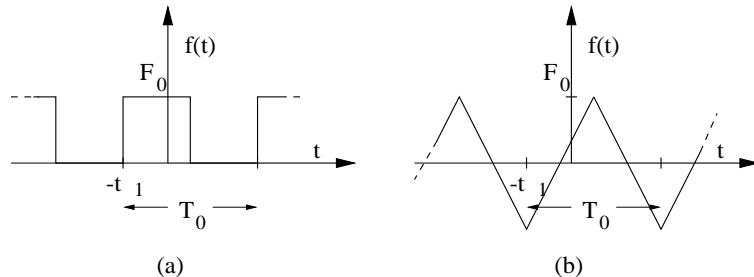


Figura L.4:

l-2. Calcule y represente la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

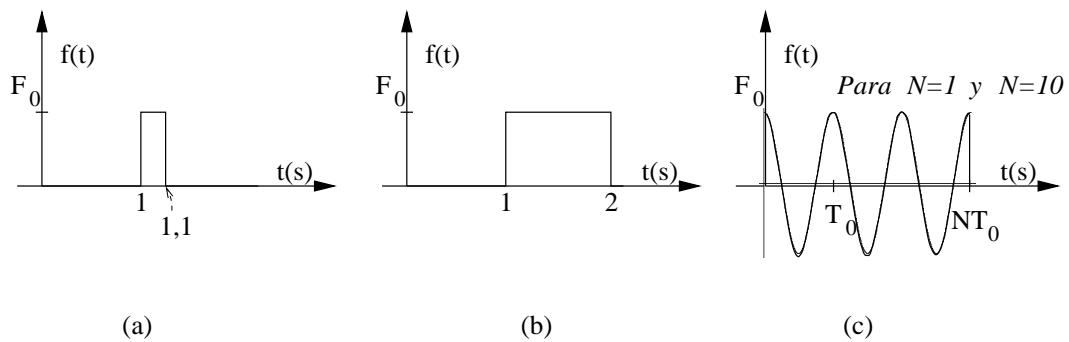


Figura L.5:

Apéndice M

Tablas

M.1. Constantes físicas

Símbolo	Nombre	Valor
c	velocidad de la luz	$2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
μ_0	permeabilidad magnética	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \simeq 1,256\,64 \cdot 10^{-6} \text{ H.m}^{-1}$
ϵ_0	permitividad eléctrica	$8,854\,187\,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
e	carga del protón	$1,602\,189\,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
m_e	masa en reposo del electrón	$9,109\,534 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
m_p	masa en reposo del protón	$1,672\,648 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
k	constante de Boltzmann	$1,380\,662 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
h	constante de Plank	$6,626\,176 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

M.2. Unidades del SI

Magnitud	Unidad	Símbolo unidad
Admitancia	siemens	S
Capacidad	faradio	F
Carga	culombio	C
Densidad de flujo magnético	tesla	T
Flujo magnético	weber	Wb
Impedancia	ohmio	Ω
inducción	henrio	H
Intensidad*	amperio	A
Potencial	voltio	V

(*) El amperio es la unidad fundamental.

M.3. Conversión $eV \rightleftarrows J$ y $gauss \rightleftarrows T$

$1 eV = 1,602\,189\,2 \cdot 10^{-19} \text{ Julios}$
$1 gauss = 10^{-4} \text{ Tesla}$

M.4. Propiedades dieléctricas

Substancia	Constante dieléctrica relativa ε_r
Agua de mar	70
Agua destilada	81
Aire	1.0006
Caucho	3
Cuarzo	6
Parafina	2.2
Poliestireno	2.2
Titanato de bario	1200
Vacio	1
Vidrio Flint	10

M.5. Propiedades magnéticas

1

Materiales débilmente magnéticos ('no magnéticos'):

Substancia	Susceptibilidad magnética χ_m ($\times 10^{-5}$)
<i>diamagnéticos</i>	
Agua	-0.88
Bismuto	-16.5
Cobre	-3.2
Mercurio	-0.98
Oro	-3.6
Plata	-2.4
<i>paramagnéticos</i>	
Aire	0.036
Aluminio	2.1
Gadolino	$0.48 \cdot 10^5$
Magnesio	1.2
Oxígeno	0.2
Paladio	82
Wolframio	7.8

¹Los valores mostrados en las siguientes tablas corresponden a condiciones normales de presión y temperatura y a baja frecuencia.

Materiales ferromagnéticos:

Substancia	Pemeabilidad relativa μ_r ^a
Cobalto	250
Hierro ^b	5000
Hierro ^c	$2 \cdot 10^5$
Niquel	600
Permalloy ^d	$1 \cdot 10^5$
Supermalloy ^e	$1 \cdot 10^6$

(^a) Estos materiales son altamente no limeales. Los valores mostrados son indicativos de los máximos y dependen en gran medida de la pureza de los materiales y del procedimiento de fabricación de los mismos.

(^b) Pureza del 80 %.

(^c) Puerza del 95 %.

(^d) Composición 77 % Ni y 15 % Fe.

(^e) Composición 79 % Ni y 5 % Mo.

Órdenes de magnitud de los campos magnéticos:

Objeto	Orden de magnitud (gauss)
Espacio interestelar	$10^{-5} - 10^{-6}$
Espacio intergaláctico	$10^{-7} - 10^{-9}$
Estrella magnéticas	$10^2 - 10^8$
Sol (medio)	1
Púlsares	$10^{11} - 10^{13}$
Sol (manchas)	$10^2 - 10^3$
Tierra	1

M.6. Conductividades

Substancia	Conductividad $S \cdot m^{-1}$
<i>Metales</i>	
Aluminio	$3.7 \cdot 10^7$
Cobre	$6 \cdot 10^7$
Hierro	$1 \cdot 10^7$
Mercurio	$0.1 \cdot 10^7$
Oro	$4.5 \cdot 10^7$
Plata	$6.3 \cdot 10^7$
<i>Semiconductores</i>	
Rango	$10^{-4} - 10^4$
Germanio intrínseco	2.2
Silicio intrínseco	$4.4 \cdot 10^{-4}$
<i>Otros (valores aproximados)</i>	
Aceite de transformador	10^{-11}
Agua de mar	4
Agua destilada	10^{-4}
Aqua dulce	10^{-3}
Caucho	10^{-15}
Cuarzo fundido	10^{-17}
Tierra húmeda	10^{-3}
Tierra seca	10^{-5}
Vidrio	10^{-12}

Apéndice N

Formulario matemático

N.1. Relaciones vectoriales y diádicas

N.1.1. Productos

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (N.1)$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (N.2)$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (N.3)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} , \quad (\vec{a} \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) , \quad (\vec{a} \vec{b})_{\alpha\beta} \equiv a_\alpha a_\beta \quad (N.4)$$

$$\vec{a} \cdot \overset{\leftrightarrow}{I} = \vec{a} , \quad (\overset{\leftrightarrow}{I})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (N.5)$$

N.1.2. Gradiente

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (N.6)$$

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f \quad (N.7)$$

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) \quad (N.8)$$

$$\nabla f(r) = \hat{r} \frac{df}{dr} , \quad \nabla r = \hat{r} , \quad \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \hat{r} \quad (N.9)$$

N.1.3. Divergencia

$$\nabla \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \cdot \vec{b} \quad (N.10)$$

$$\nabla \cdot (f \vec{a}) = f \nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla f \quad (N.11)$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \wedge \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \wedge \vec{b} \quad (N.12)$$

$$\nabla \cdot \nabla \wedge \vec{a} = 0 \quad (N.13)$$

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f \quad (N.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3 \quad (N.15)$$

N.1.4. Rotacional

$$\nabla \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \wedge \vec{a} + \nabla \wedge \vec{b} \quad (\text{N.16})$$

$$\nabla \wedge (f \vec{a}) = f \nabla \wedge \vec{a} + \nabla f \wedge \vec{a} \quad (\text{N.17})$$

$$\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \nabla \cdot \vec{b} - \vec{b} \nabla \cdot \vec{a} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (\text{N.18})$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} \quad (\text{N.19})$$

$$\nabla \wedge (\nabla f) = 0 , \quad \nabla \wedge \vec{r} = 0 \quad (\text{N.20})$$

$$\nabla \wedge \vec{a}(u) = \nabla u \wedge \frac{d \vec{a}}{d u} \quad (\text{N.21})$$

N.1.5. Laplaciana

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}) \quad (\text{N.22})$$

$$\nabla^2 \vec{a} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) \quad (\text{N.23})$$

$$\nabla^2 \vec{a} = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} , \quad (\text{Solo en cartesianas})$$

N.1.6. Teoremas integrales

$$\int_V \nabla \cdot \vec{a} dv = \oint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{N.24})$$

$$\int_V \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T} dv = \oint_S \vec{n} \cdot \overset{\leftrightarrow}{T} ds \quad (\text{N.25})$$

$$\int_S (\nabla \wedge \vec{a}) \cdot \vec{n} ds = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} \quad (\text{N.26})$$

$$\int_V \nabla f dv = \oint_S f \vec{n} ds \quad (\text{N.27})$$

$$\int_V \nabla \wedge \vec{a} dv = \oint_S \vec{n} \wedge \vec{a} ds \quad (\text{N.28})$$

$$\int_S \vec{n} \wedge \nabla f ds = \oint_L f d\vec{l} \quad (\text{N.29})$$

N.2. Coordenadas curvilineas

N.2.1. Cuadro resumen

Sistema	q_1	q_2	q_3	\hat{x}	\hat{y}	\hat{z}	h_1	h_2	h_3
Cartesianas	x	y	z	\hat{x}	\hat{y}	\hat{z}	1	1	1
Cilíndricas	ρ	φ	z	$\hat{\rho}$	$\hat{\varphi}$	\hat{z}	1	ρ	1
Esféricas	r	θ	φ	\hat{r}	$\hat{\theta}$	$\hat{\varphi}$	1	r	$r \sin \theta$

N.2.2. Vector de posición

- Cartesianas: $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ (N.30)

- Cilíndricas: $\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} = \rho \cos \varphi \hat{x} + \rho \sin \varphi \hat{y} + z \hat{z}$ (N.31)

- Esféricas: $\vec{r} = r \hat{r} = r (\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})$ (N.32)

N.2.3. Vector diferencial de línea

- Cartesianas: $d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$ (N.33)

- Cilíndricas: $d\vec{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}$ (N.34)

- Esféricas: $d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\varphi}$ (N.35)

N.2.4. Elemento de volumen

- Cartesianas: $dv = dx dy dz$ (N.36)

- Cilíndricas: $dv = \rho d\rho d\varphi dz$ (N.37)

- Esféricas: $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ (N.38)

N.2.5. Gradiente

- Cartesianas: $\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$ (N.39)

- Cilíndricas: $\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$ (N.40)

- Esféricas: $\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ (N.41)

Solo en cartesianas puede utilizarse ∇ como un operador vectorial.

N.2.6. Divergencia

- Cartesianas: $\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ (N.42)

- Cilíndricas: $\nabla \cdot \vec{a} = \frac{a_\rho}{\rho} + \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ (N.43)

- Esféricas: $\nabla \cdot \vec{a} = \frac{2 a_r}{r} + \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$ (N.44)

N.2.7. Rotacional

$$- \text{ Cartesianas: } \nabla \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (\text{N.45})$$

$$- \text{ Cilíndricas: } \nabla \wedge \vec{a} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix} \quad (\text{N.46})$$

$$- \text{ Esféricas: } \nabla \wedge \vec{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\theta & r \sin \theta a_\varphi \end{vmatrix} \quad (\text{N.47})$$

N.2.8. Laplaciana

$$- \text{ Cartesianas: } \nabla^2 \lambda = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} \quad (\text{N.48})$$

$$- \text{ Cilíndricas: } \nabla^2 \lambda = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} \quad (\text{N.49})$$

$$- \text{ Esféricas: } \nabla^2 \lambda = \frac{2}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2} \quad (\text{N.50})$$

Solo en cartesianas

$$\nabla^2 \vec{a} = \nabla^2 a_x + \nabla^2 a_y + \nabla^2 a_z \quad (\text{N.51})$$

En general

$$\nabla^2 \vec{a} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) \quad (\text{N.52})$$

N.3. Ángulo sólido

$$\frac{\vec{ds} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{ds_r}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi \equiv d\Omega \quad (\text{N.53})$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\Omega = 4\pi \quad (\text{N.54})$$

N.4. La Delta de Dirac

N.4.1. definiciones

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq x_0 \\ \rightarrow \infty & \text{para } x \rightarrow x_0 \end{cases} \quad (\text{N.55})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \quad (\text{N.56})$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ \rightarrow \infty & \text{para } \vec{r} \rightarrow \vec{r}_0 \end{cases}, \quad \int_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dv = 1 \quad (\text{N.57})$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \delta(q_1 - q_{10}) \delta(q_2 - q_{20}) \delta(q_3 - q_{30}) \quad (\text{N.58})$$

$$\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} u(x - x_0) \equiv u'(x - x_0), \quad u(x - x_0) = \int_{-\infty}^x \delta(x - x_0) \quad (\text{N.59})$$

N.4.2. Expresiones integrales y diferenciales de la delta de Dirac

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k^3} e^{j\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)} d^3 k \quad (\text{N.60})$$

$$\delta(\vec{R}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \nabla'^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) \quad (\text{N.61})$$

N.4.3. Propiedades básicas

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (\text{N.62})$$

$$x \delta(x) = 0 \quad (\text{N.63})$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x), \quad a > 0 \quad (\text{N.64})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) \delta(x - b) dx = \delta a - b \quad (\text{N.65})$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (\text{N.66})$$

$$f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a) \quad (\text{N.67})$$

$$x \delta'(x) = -\delta(x) \quad (\text{N.68})$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x) \quad (\text{N.69})$$

$$f(\vec{r}_0) = \int_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dv \quad (\text{N.70})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0) \quad (\text{N.71})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0) \quad (\text{N.72})$$

$$\delta[h(x)] = \sum_{x_i} \frac{\delta(x - x_i)}{|dh(x_i)/dx|} , \quad x_i \text{ son los ceros de } h(x) \quad (\text{N.73})$$

N.5. Series y transformadas de Fourier

N.5.1. Series

$$f(t) = f_d(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t) \quad (\text{N.74})$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_t^{t+T_0} f(t) \cos n \omega_0 t dt , \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (\text{N.75})$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_t^{t+T_0} f(t) \sin n \omega_0 t dt , \quad n = 1, 2 \dots \quad (\text{N.76})$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j n \omega_0 t} \quad (\text{N.77})$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} f(t) e^{-j n \omega_0 t} dt \quad (\text{N.78})$$

N.5.2. Transformadas

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j \omega t} d\omega \quad (\text{N.79})$$

$$F(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(t)] = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j \omega t} dt \quad (\text{N.80})$$

$$\mathcal{F}[A f(t) + B g(t)] = A F(\omega) + B G(\omega) \quad (\text{N.81})$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = j\omega F(\omega) \quad (\text{N.82})$$

$$\mathcal{F}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (\text{N.83})$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \quad (\text{N.84})$$

n-8

Bibliografía

- [Abramowitz y Stegun] M. ABRAMOWITZ Y I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.
- [Akhiezer] A. AKHIEZER E I. AKHIEZER, *Eletromagnétisme et Ondes Electromagnétiques*, Mir, Moscou, 1988.
- [Arfken y Weber] G. B. ARFKEN Y H. J. WEBER, *Mathematical Methods for Physicists*, International Edition, Academic Press, San Diego, Cal. , 1996.
- [Artsimovich y Loukianov] L. A. ARTSIMOVICH Y S. LOUKIANOV, *Movimiento de partículas en campos eléctricos y magnéticos*, Mir, Moscú, 1975.
- [Atwater] H. A. ATWATER, *Introduction to Microwave Theory*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- [Balabanian y Bickart] N. BALABAIAV Y T. A. BICKART, *Electrical Network Theory*, Wiley, 1969.
- [Beam] W. R. BEAM, *Electronics of Solids*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [Bergmann] P. G. BERGMANN, *Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice-Hall, 1960.
- [Berkson] W. I. BERKSON, *La Teoría de los Campos de Fuerza. Desde Faraday hasta Einstein*, Alianza Universidad, Madrid, 1981.
- [Bleaney] B. I. BLEANEY Y B. BLEANEY, *Electricity and Magnetism* Tercera edición, Oxford University Press, Londres, 1976.
- [Born y Wolf] M. BORN Y E. WOLF, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 1999.
- [Burden] R. L. BURDEN Y J. D. FAIRES, *Análisis Numérico*, International Thomson Editores, Madrid, 1998.
- [Brédov et al.] M. BRÉDOV, V. RUMIÁNTSEV E I. TOPTIGUIN, *Electrodinámica Clásica*, Mir, Moscú, 1986.

- [Bridgman] P. W. BRIDGMAN, *Dimensional Analysis*, Yale University Press, New Haven, 1963.
- [Cairo y Kahan] L. CAIRO Y T. KAHAN , *Variational Techniques in Electromagnetism*, Gordon y Breach, New York, 1965.
- [Chen] F. F. CHEN, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Volume 1:Plasma Physics*, McGraw-Hill, New York, 1985.
- [Collin] R. E. COLLIN, *Field Theory of guided waves*, Second Edition, IEEE Press, New York, 1991.
- [Condon] E. U. CONDON, *Electromagnetic Waves*, en: E. U. CONDON Y H. ODISHAW EDS., *Handbook of Physics*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [Demidowitsch] B. P. DEMIDOWITSCH ET AL., *Métodos Numéricos de Análisis*, Paraninfo, Madrid, 1980.
- [D'Inverno] R. D'INVERNO, *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [Friedman] FRIEDMAN, B., *Principles and Techniques of Applied Mathematics*, Wiley, New York, 1962.
- [García Olmedo] B. GARCÍA OLMEDO, *Electrodinámica*, Departamento de Electromagnetismo y Física de la Materia, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 2000.
- [Gasca] M. GASCA GONZÁLEZ, *Cálculo Numérico I: Unidad didáctica 1*, Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), 2002.
- [Gilbert] W. GILBERT, *De Magnete*, Dover, New York, 1958.
- [Godunov] S. K. GODUNOV, *Ecuaciones de la Física Matemática*, Mir, Moscú, 1978.
- [Golant et al.] V. E. GOLANT, A. P. ZHILINSKY Y I. E. ZAKHAROV, *Fundamentos of Plasma Physics*, John Wiley, 1980.
- [Goldstein] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.
- [Gómez-a] R. GÓMEZ MARTÍN, *Apuntes de clase*, Universidad de Granada, Granada.
- [Gómez] R. GÓMEZ MARTÍN, *Campo Electromagnético. Propagación y Radiación*, Secretariado de Publicaciones, Universidad de Granada, Granada, 1984.

- [González] A. GONZÁLEZ FERNÁNDEZ, *Problemas de Campos Electromagnéticos*, Mc Graw Hill (Shaum), Madrid, 2005.
- [Harrington] R. F. HARRINGTON, *The Method of Moments in Electromagnetism*, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol. 1 No. 3 181-200, 1987.
- [Jackson] J. D. JACKSON, *Electrodinámica Clásica*, Alhambra, Madrid, 1980.
- [Jackson-n] J. D. JACKSON, *Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1998.
- [Jin] J. JIN, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley, New York, 1993.
- [Kong] J. A. KONG, *Electromagnetic Wave Theory*, J. Wiley, New York, 1986.
- [Konopinski] E. J. KONOPINSKI, *Electromagnetic Fields and Relativistic Particles*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- [Lanczos] C. LANCZOS, *Tensor Calculus*, en: E. U. CONDON Y H. ODISHAW EDs., *Handbook of Physics*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [Landau y Lifchitz CA] L. LANDAU Y E. LIFCHITZ, *Curso Abreviado de Física Teórica; libro 1: Mecánica y Electrodinámica*, Mir, Moscú, 1979.
- [Landau y Lifchitz FT] L. LANDAU Y E. LIFCHITZ, *Theorie des Champs. Physique Théorique, Tome 2*, Mir, Moscou, 1989.
- [Landau y Lifchitz MC] L. LANDAU Y E. LIFCHITZ, *Electrodynamique des Milieux Continus. Physique Théorique, Tome 8*, Mir, Moscou, 1990.
- [Leech] J. W. LEECH, *Eléments de Mécanique Analytique*, Dunod, Paris, 1961.
- [Le Page y Seely] W. R. LE PAGE Y S. SEELY, *General Network Analysis*, McGraw, 1952.
- [Levich-I] B. G. LEVICH, *Física Teórica, vol I*, Reverté, 1974.
- [Liboff] R. L. LIBOFF, *Kinetic Theory. Classical, Quantum and Relativistic Descriptions*, Prentice Hall, Englewood cliffs, New Jersey, 1990.
- [Lichnerowicz] A. LICHNEROWICZ, *Éléments de Calcul Tensoriel*, Armand Colin, Paris, 1960.
- [Lorrain y Corson] P. LORRAIN Y D. R. CORSON, *Campos y Ondas Electromagnéticos*, Selecciones Científicas, Madrid, 1972.

- [Lorrain y Corson] P. LORRAIN Y D. R. CORSON, *Electromagnetic Fields and Waves*, W. H. Freeman, 1988.
- [Lorrain y Corson] P. LORRAIN Y D. R. CORSON, *Electromagnetism*, W. H. Freeman, 1990.
- [Matveyev] A. N. MATVEYEV, *Principles of Electrodynamics*, Reinhold, New York, 1966.
- [Maxwell] J. C. MAXWELL, *A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. 1 and 2*.
- [Morse y Feshbach] P. M. MORSE Y H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics, Part II*, McGraw, New York, 1953.
- [Morton] K. W. MORTON Y D. F. MAYERS, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [Nicholson] D. R. NICHOLSON, *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [Novozhilov] Y. V. NOVOZHILOV, *Electrodynamics*, Mir, Moscú, 1981.
- [Ohanian] H. C. OHANIAN, *Classical Electrodynamics*, Allyn and Bacon, Boston, 1988.
- [Panofsky y Phillips] W. K. H. PANOFSKY Y M. PHILLIPS, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
- [Popovic] B. D. POPOVIC, *Introductory Engineering Electromagnetics*, Addison-Wesley, 1971.
- [Portis] A. M. PORTIS, *Electromagnetic Fields*, Wiley 1978.
- [Quemada] D. QUEMADA, *Ondes dans les Plasmas*, Hermann, Paris, 1968.
- [Ramo et al.] S. RAMO, J. R. WHINNERY Y T. VAN DUZER, *Fields and Waves in Communication Electronics*, Third Edition, John Wiley, New York, 1994.
- [Reitz et al.] J. R. REITZ, F. J. MILFORD Y R. W. CHRISTY, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1996.
- [Robinson] F. N. H. ROBINSON, *Macroscopic Electromagnetism*, Pergamon Press, 1972.
- [Sena] L. A. SENA, *Unidades de las Magnitudes Físicas y sus Dimensiones*, Mir, Moscú, 1979.

- [Shadowitz] A. SHADOWITZ, *The Electromagnetic Field*, Dover, 1988.
- [Smith] G. D. SMITH, *Numerical Solution of Partial Differential Equations. Finite Difference Methods*, 3rd Edition, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [Sommerfeld] A. SOMMERFELD, *Electrodynamics*, Academic Press, New York, 1964.
- [Spiegel et al.] M. R. SPIEGEL Y L. ABELLANAS, *Fórmulas y tablas de Matemática Aplicada*, McGraw-Hill, Madrid, 1988.
- [Stratton] J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, Nueva York, 1941.
- [Taflove] A. TAFLOVE Y S. C. HAGNESS, *Computational Electrodynamics. The finite-difference time-domain method.*, 2^a edición, Artech House, London, 2000.
- [Tijonov] A. TIJONOV, *Ecuaciones de la Física Matemática*, Mir, Moscú, 1972.
- [Umashankar] K. UMASHANKAR, *Introduction to Engineering Electromagnetic Fields*, World Scientific, 1989.
- [Vanderlinde] J. VANDERLINDE, *Classical Electromagnetic Theory*, Wiley, New York, 1993.
- [Velayos] S. VELAYOS, *Temas de la Física III: Electromagnetismo*, Copiograf, Madrid, 1976.
- [Volkov] E. A. VOLKOV, *Métodos Numéricos*, Mir, Moscú, 1990.
- [Weisstein] E. W. WEISSTEIN , *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall/CRC, London , 1999.
- [Whittaker] E. WHITTAKER , *A History of the Theories of Aether and Electricity*, Tomash Publishers, American Institute of Physics, 1987.
- [Wolfram] S. WOLFRAM , *The Mathematica Book*, 4th ed., Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.
- [Wylie] C. R. WYLIE, JR, *Matemáticas superiores para ingeniería*, McGraw, Panamá, 1969.
- [Zienkiewicz] O. C. ZIENKIEWICZ, *El Método de los Elementos Finitos*, Reverté, Barcelona, 1980.

bib-6

Índice alfabético

- Ampère**, h-3
 - ley de, 49
- amperio**, 14
- Arago**, h-3
- Aritóteles**, h-1
- asociación**
 - de elementos, e-16
 - de resistencias, 293

- Bessel**
 - ecuación de, a-16
 - función de, a-16
- Bode**
 - diagramas de, g-5
- botella magnética**, 217, 227
 - cono de fugas, 219
 - espejo magnético, 220

- campo**, j-1
 - escalar, j-1
 - irrotacional (conservativo), 9, j-11
 - líneas de campo, j-3
 - rotacional, j-12
 - solenoidal, 9
 - superficies equiescalares, j-3
 - tubos de campo, j-3
 - vectorial, j-1
- campo electromagnético**
 - densidad de flujo magnético \vec{B} , 20
 - desplazamiento eléctrico \vec{D} , 265
 - electrostático, 37
 - intensidad eléctrica \vec{E} , 20
 - intensidad magnética \vec{H} , 265
 - magnético estacionario, 45
- campo magnético de objetos celestes**, c-8
- campo magnético terrestre**, c-1
 - anomalías, c-4
 - autodinamo, c-6
 - cinturones de Van Allen, c-5
 - declinación, c-4
 - dipolo geomagnético, c-4
 - inclinación, c-4
 - ionosfera, c-2
 - magnetopausa, c-5
 - magnetosfera, c-1
 - magnetovaina, c-5
 - variación secular, c-6
 - variaciones temporales, c-6
 - viento solar, c-1
- Cantón**, h-2
- cargas**
 - de conducción (libres), 251
 - de polarización (ligadas), 251
 - de polarización eléctrica, 258
 - testigo, 3
- carretres de Helmholtz**, 91
 - estudio numérico del campo, 91
- Cavendish**, h-3
- ciclo de histéresis**, 267
 - campo coercitivo, 268
 - campo remanente, 268
 - curva de histéresis principal, 268
 - curva de primera imanación, 268
 - energía disipada, 323
 - estado desmagnetizado, 268
 - punto de saturación, 268
- cinturones de Van Allen**, 220
- circuitos magnéticos**, d-21
 - entrehierro, d-22
 - fuerza magnetomotriz, d-21
 - imán, d-24
 - lineales, d-21
 - no lineales, d-23
 - reluctancia, d-21
- circuitos**, e-1, 294
 - admitancia, e-14

- análisis, e-17
- mallas, e-20
- nudos, e-22
- anchura de banda, e-51
- asociación de elementos, e-16
- caída de potencial, e-1
- circuito, e-10
 - activo, e-11
 - pasivo, e-10
- conexión con la teoría de campos, e-1
- constante de tiempo, e-31
- corrientes cuasiestacionarias, e-1
- de primer orden
 - respuesta armónica, e-39
 - transitorio, e-30
- de segundo orden
 - respuesta armónica, e-50
 - transitorio, e-43
- divisor de tensión, 307
- ecuación característica, e-35
- elemento
 - pasivo, e-5
 - autoinducción, e-6
 - condensador, e-7
 - de cuatro terminales, f-1
 - de dos terminales, e-2, e-10
 - diodo, e-8
 - disipativo, e-5
 - fuentes de intensidad, e-8
 - fuentes de tensión, e-8
 - fuentes independientes, e-8
 - fuentes reales, e-9
 - independiente del tiempo, e-10
 - lineal, e-10
 - real, e-9
 - resistencia, e-5
 - transformador ideal, f-1
- fasor
 - temporal, e-13
 - independiente del tiempo, e-13
- frecuencia de corte, e-40
 - a $3\text{ }Db$, e-51
- fuente de fuerza electromotriz
 - real, 292
- fuentes
 - dependientes, f-6
 - equivalencia, e-20
- función de transferencia, e-14
- impedancia, e-14
- intensidad, e-2
- ley del coseno de φ , e-27
- leyes de Kirchhoff, e-10
- malla, e-11, 294
- nudo, e-11, 294
- parámetros localizados, e-1
- pasivo, 291
- planos, 294
- potencia, e-26
- rama, e-11, 294
- respuesta a un impulso, e-32
- respuesta armónica, e-12
 - fasores, e-14
- serie RL y paralelo RC , e-30
- serie y paralelo RLC , e-43
 - factor Q , e-44
 - frecuencia de resonancia, e-44
 - razón de amortiguamiento, e-44
- sistema críticamente amortiguado, e-47
- sistema debilmente amortiguado, e-48
- sistema sobreamortiguado, e-47
- sobredisparo, e-48
- sonda atenuadora, e-56
- tensión, e-1
- teorema
 - de máxima transferencia de potencia, e-29
 - de Norton, e-24
 - de superposición, e-23
 - de Thevenin, e-24, 309
- tierra, e-18
- clasificación de los campos, 8**
 - irrotacional y no solenoidal, 10
 - rotacional y no solenoidal, 11
 - rotacional y solenoidal, 10
 - solenoidal, 9
- coeficiente**
 - de autoinducción, 100

- de inducción mutua, 100
- condensador**
 - capacidad, 80
 - ideal, 80
- condiciones de continuidad**, 313
- condiciones de contorno**, 318
 - de Dirichlet, 319
 - de Neumann, 319
 - esenciales, b-24
 - mezcladas, 320
- condiciones de contraste**, 111
- conductores**, 283
 - conductividad, 284
 - dinámicos ideales, 144
 - estáticos, 78, 285
 - campo superficial, 286
 - fuerza superficial, 288
 - potencial, 286
 - medios óhmicos, 283, 284
 - tiempo de relajación, 285
 - movilidad, 284
 - portadores de carga, 283
- conservación**
 - de la cantidad de movimiento, 125
 - de la energía, 322
- constante dieléctrica**, 266
 - compleja, 328
- contraste**
 - de Coulomb, 111
 - de Lorenz, 111
- coordenadas curvilíneas**, j-13
 - catesianas, j-15
 - cilíndricas, j-17
 - esféricas, j-16
 - expresión de los operadores, j-15
- corriente estacionaria**
 - fuente ideal de fuerza
 - electromotriz, 291
 - fuerza electromotriz, 289
 - resistencia, 290
 - resistencia ideal, 291
- corriente**
 - estacionaria, 289
 - de desplazamiento en el vacío, 109
 - de polarización dieléctrica, 260
- estacionaria, 19
- intensidad, 19
- Coulomb**, h-3
 - contraste de, 111
 - ley de, 37, 270
- Crookes**, h-8
- culombio**, 14

- D'Alembert**
 - ecuación de, 127
- Davy**, h-4
- delta de Dirac**, k-1
 - aproximación, k-4
 - ecuación de continuidad, k-7
 - otras expresiones, k-5
 - propiedad de desplazamiento, k-3
- densidad de flujo magnético** \vec{B} , 20
- densidad**
 - de carga, 11
 - de carga de polarización, 259
 - de cantidad de movimiento, 125
 - de corriente, 14
 - de magnetización, 262
 - de polarización electrica, 261
 - de energía electromagnética, 122
 - de polos magnéticos, 264
 - macroscópica de partículas, 17
- Desaguilier**, h-2
- desarrollo multipolar**, 169
 - electrostático, 169
 - energía, 172
 - momento dipolar, 170
 - momentos cuadripolares, 171
 - momentos multipolares, 171
 - multipolos puntuales, 173
 - potencial dipolar, 170
 - magnetostático, 179
 - la espira como dipolo, 181
 - momento dipolar, 180
 - potencial dipolar, 180
- descripción de las magnitudes**, 5
 - macroscópica, 15
 - microscópica, 11
- desplazamiento eléctrico** \vec{D} , 265

- diagramas de Bode**, g-5
- dipolo**
 - eléctrico, 58, 175
 - campo, 175
 - energía, 176
 - fuerza, 176
 - par, 176
 - potencial, 175
- magnético, 86, 182
 - campo, 183
 - energía, 190
 - fuerza, 189
 - par, 188
 - precesión, 220
- polarizabilidad, 195
- Dirac**, h-8
 - delta de , k-1
- Dirichlet**
 - condiciones de contorno de , 319
- Du Fay**, h-2

- ecuación de continuidad**
 - de la carga de conducción, 311
 - de la carga neta, 19, 112
 - de la energía, 322
- ecuación**
 - de Bessel, a-16
 - de D'Alembert, 127
 - de Legendre, a-19
 - generalizada, a-19
- ecuaciones constitutivas**, 266
- ecuaciones de Maxwell**
 - en el vacío, 112
 - en el dominio de la frecuencia, 312
 - en medios materiales, 311
 - de clase A, 312
- ecuaciones de Poisson y Laplace**,
 - 44
 - ejemplos, a-1
 - expresión integral, a-3
 - método de Green, a-5
 - método de las imágenes, a-7
 - sobre cilindros, a-12
 - sobre un plano, a-9
- sobre una esfera, a-10
- método de las transformaciones
 - complejas, a-21
- método de separación de variables, a-13
 - en coordenadas esféricas, a-18
 - en coordenadas cartesianas, a-13
 - en coordenadas cilíndricas, a-15
- métodos experimentales, a-24
- métodos gráficos, a-25
- métodos numéricos, b-1
 - de ajuste puntual, b-3
 - de diferencias finitas, b-9
 - de Galerkin, b-2
 - de los momentos, b-4
 - de mínimos cuadrados, b-3
 - de residuos pesados, b-2
- métodos variacionales, b-22
 - de elementos finitos (Ritz), b-31
 - de Ritz, b-26
 - primera variación, b-24
- principio de superposición, a-2
- ecuaciones de onda**
 - en medios materiales, 324
 - en el vacío, 127
 - para los campos, 127
 - para los potenciales, 128
- efecto Hall**, 84
- efecto Joule**, 296
- Einstein**, h-8
- electrete**, 276
- Empédocles**, h-1
- energía potencial**, 41
 - de un sistema de cargas, 42
 - autoenergía, 42, 43
 - en campo externo, 41
- energía**
 - de un sistema de cargas y corrientes estacionarias, 324
 - electromagnética, 121
 - en medios materiales, 321
- enfoque electromagnético**, 224
- espira**
 - como dipolo, 181
 - definición, 46

- fuerza sobre una, 47
- estructura de la Tierra**, c-1
 - biosfera, c-2
 - corteza, c-2
 - exterior, c-1
 - interior, c-1
 - ionosfera, c-2
 - magnetosfera, c-1
 - manto, c-2
 - núcleo, c-2
 - externo, c-3
 - interno, c-3
 - superficie, c-1
- estructuras simples de campo**
 - eléctrico, 44
 - magnético, 50
- éther**, h-6

- factor de calidad (Q)**, 328
- factor de Landé**, 186
- Faraday**, h-2, h-5
 - ley de inducción de, 103
 - rotación de, 350
- faradio**, d-2, 38
- fasor**, 326
- fórmula de Larmor**, 140
- formulario matemático**, n-1
 - coordenadas curvilíneas, n-2
 - ángulo sólido, n-4
 - diferencial de línea, n-3
 - divergencia, n-3
 - elemento de volumen, n-3
 - gradiente, n-3
 - laplaciana, n-4
 - resumen, n-2
 - rotacional, n-4
 - vector de posición, n-3
- delta de Dirac, n-5
 - definiciones, n-5
 - expresiones integrales y diferenciales, n-5
 - propiedades básicas, n-5
- divergencia, n-1
- gradiente, n-1

- laplaciana, n-2
- productos vectoriales, n-1
- rotacional, n-2
- series de Fourier, n-6
- teoremas integrales, n-2
- transformadas de Fourier, n-6
- Fourier**, l-1
 - desarrollo en serie, l-1
 - ejemplos, l-4
 - transformada, l-3
 - ejemplos, l-6
- Franklin**, h-2
- fuentes de campo**, 3
 - electrostático, 39
 - dinámico, 103
 - escalares, 6
 - primarias, 112
 - vectoriales, 6
- fuentes**
 - de intensidad, e-8
 - de tensión, e-8
- fuerza electromotriz**, 104, 289
 - de movimiento, 107
 - estática, 107
- fuerza**
 - de Lorentz, 20
 - eléctrica, 20
 - magnética, 20
 - sobre corrientes estacionarias, 47
 - sobre sistema de conductores, d-9
 - sobre sistema de espiras, d-16
- función**
 - base, b-26
 - de Bessel, a-16
 - de Hankel, a-18
 - de Neumann, a-17
 - de prueba global, b-29
 - de prueba local, b-30
 - estacionaria, b-23
 - gamma, a-17
- funciones de Green**, a-5
 - para condiciones de Dirichlet, a-6

- Galileo**

- relatividad de, 22
- gauge**, 111
- Gell Man y Swinger**, h-9
- generador**, 106
- Gilbert**, h-2
- Gray**, h-2
- Green**
 - funciones de, a-5
 - identidades de, a-3
 - método de, a-5
- Hall**
 - efecto, 84
- Hankel**
 - función de, a-18
- Heaviside**, h-9
- Helmholtz**, h-6, h-8
 - carretres de, 91
 - teorema de , 6
- henrio**, d-12
- Hertz**, h-7
- identidades de Green**, a-3
- intensidad eléctrica** \vec{E} , 20
- intensidad magnética** \vec{H} , 265
- intensidad**, 14
- Joule**, h-6
 - efecto, 296
 - ley de, 296
- Kirchhoff**
 - leyes de, e-10
- Landé**
 - factor de, 186
- Larmor**
 - fórmula de, 140
 - velocidad angular de, 220
- Legendre**
- ecuación de, a-19
- polinomios de, a-19
- lente electrostática**, 211, 288
- leyes**
 - de campo, 3
 - de fuerza, 3
 - de Kirchhoff, 294
- ley**
 - de Ampère, 49
 - de Biot y Savart, 45
 - de Coulomb, 37, 270
 - de Gauss, 40
 - de inducción de Faraday, 103
 - para caminos en movimiento, 106
 - de Joule, 296
 - de Lorentz, 20
 - de Ohm, 284
- Lorentz**, h-7
 - ley de, 20
- Lorenz**
 - contraste de, 111
- Maricout**, h-2
- Maxwell**, h-6
 - corriente de desplazamiento, 109
 - ecuaciones de, 112, 311
- medios materiales**, 251
 - aislantes, 253
 - conductores, 252
 - de clase A, 267
 - diamagnéticos, 207, 252
 - dieléctricos, 252
 - ferromagnéticos, 252
 - magnéticos, 268
 - no magnéticos, 268
 - paramagnéticos, 252
 - plasmas, 253
- método FDTD**
 - medios
 - avance temporal, b-47
 - campo dispersado, b-44
 - campo incidente, b-44
 - medio final, b-45
 - medio inicial, b-45

- medios dispersores, b-45
- punto de iluminación, b-45
- zona de campo dispersado, b-45
- zona de campo total, b-45
- vacío**
 - avance temporal, 155
 - celdas, 154
 - condición de Courant, 156
 - diferencias finitas centradas, 155
 - dominio numérico, 154
 - iteraciones, 154
- método de diferencias finitas**, b-9
 - relajación, b-13
 - residuo, b-12
 - sobrerelajación, b-13
- método de los elementos finitos**,
 - b-31
 - índice global, b-33
 - índice local, b-33
 - ensamblaje, b-35
 - función de prueba global, b-33
 - función de prueba local, b-33
 - postproceso, b-32
 - preproceso, b-32
 - proceso, b-32
- método de residuos pesados**
 - funciones base, b-2
 - funciones peso, b-2
 - residuo, b-2
 - residuo pesado, b-2
- Michelson y Morley**, h-7
- Millikan**, h-8
- momento**
 - dipolar eléctrico, 58
 - dipolar magnético, 86
- monopolos magnéticos**, h-8
- motor**, 106
- movimiento de partículas**, 203
 - botellas magnéticas, 217
 - compresión magnética de órbitas, 222
 - deriva ambipolar, 209
 - en campo eléctrico constante, 204
 - en campo eléctrico lentamente variable, 204
 - en campo eléctrico y magnético , 209
 - en campo magnético lentamente variable, 208
 - enfoque magnético, 210
 - movimiento ciclotrónico, 205
 - óptica electrónica, 211
 - scattering, 213
- Neumann**
 - condiciones de contorno de , 319
 - fórmula de, d-13
 - función de , a-17
- Oersted**, h-3
- Ohm**, h-4
 - ley de, 284
- ohmio**, 290
- ondas electromagnéticas**
 - en el vacío
 - frecuencia angular, 133
 - número de onda, 133
 - planas, 129
 - relación de estructura, 131
 - velocidad de fase, 130
 - en medios materiales
 - factor de calidad (Q), 328
 - constante compleja de propagación, 329
 - constante de atenuación, 329
 - constante de fase, 329
 - densidad de energía compleja, 337
 - dispersión, 331
 - fase de la onda, 330
 - frecuencia de corte, 348
 - grupos de onda, 332
 - impedancia, 334
 - monocromáticas, 326
 - polarización, 335
 - profundidad de penetración, 329
 - relación de dispersión, 329, 333
 - relación de estructura, 333, 334

- rotación de Faraday, 350
- solución general, 329
- tangente de pérdidas, 328
- vector de Poynting complejo, 338
- velocidad de fase, 330
- velocidad de grupo, 332
- modos, 130
- monocromáticas, 133
- operador**
 - dalambertiano, 129
 - divergencia, j-10
 - gradiente, j-9
 - laplaciana, j-12
 - rotacional, j-12
- óptica electrónica**, 211
- órbitas de dos cargas**, 243
- Peregrinus**, h-2
- permeabilidad magnética**, 266
 - del vacío, 46
- plasma**
 - deriva ambipolar, 34, 209
 - movimiento ciclotrónico, 28, 205
 - frecuencia, 205
 - invariantes adiabáticos, 209
 - momento magnético, 207
 - radio, 207
 - velocidad de centro de guía, 206
- Poincaré**, h-7
- polarización de ondas**, 335
 - circular, 146
 - elíptica, 146
 - lineal, 146
- polarización**
 - dieléctrica, 255, 257
 - eléctrica, 177
 - lineal, 132
 - magnética (imanación), 257
 - polarizabilidad, 256
- polinomios de Legendre**, a-19
 - asociados, a-19
- polos magnéticos**, 263
- potenciales electromagnéticos**, 110
 - condiciones de contraste, 111
- transformaciones de contraste (gauge), 111
- potencial**
 - adelantado, 135
 - eléctrico escalar, 110
 - electrostático, 40
 - escalar, 6
 - magnético escalar
 - para medios polarizables, 263
 - para una distribución de dipolos, 183
 - para una espira, 184
 - magnético vector, 48, 110
 - retardado, 135
 - vector, 6
- potencia**
 - de radiación, 139
- Poynting**, h-6
 - teorema de, 122
 - vector complejo de, 338
 - vector de, 122
- Priestley**, h-3
- principio de neutralidad del Universo**, 18
- quarks**, h-9
- radiación**, 136
 - campo, 138
 - diagrama de, 141
 - intensidad, 140
 - isótropa, 148
 - potencial, 137
 - vector de Poynting, 139
- razón giromagnética**, 186
- refracción de líneas de campo y corriente**, 316
- relatividad de Galileo**, 22
 - composición de velocidades, 23
 - invariante vectorial, 23
 - transformación de coordenadas, 22
 - transformación de los campos, 24
- rigidez dieléctrica**, 303

- rotación de Faraday**, 350
- scattering**, 213
 - ángulo de difusión, 215
 - parámetro de impacto, 215
- siemens**, 290
- sistemas de conductores**, d-1
 - apantallamiento, d-7
 - coeficientes de capacidad, d-2
 - coeficientes de potencial, d-2
 - condensador, d-7
 - efecto de bordes, d-8
 - fuerza y par sobre, d-9
- sistemas de espiras**, d-11
 - asociación de inductores, d-15
 - coeficientes de autoinducción, d-12
 - coeficientes de inducción mutua, d-12
 - fórmula de Neumann, d-13
 - fuerza y par sobre, d-16
 - transformador, d-14
 - ideal, d-19
 - primario, d-20
 - relación de espiras, d-20
 - secundario, d-20
- sistemas de referencia**, j-6
 - coordenadas, j-6
 - origen, j-6
 - vector de posición, j-6
- sistemas de unidades**, i-1
- sistemas lineales**, g-1
 - diagramas de Bode, g-5
 - ecuaciones, g-1
 - respuesta, g-2
- solenoide**, 97
- susceptibilidad**
 - eléctrica, 266
 - magnética, 266
- tabla**
 - $eV \rightleftharpoons J$ y $gauss \rightleftharpoons T$, m-1
 - de conductividades, m-4
 - de constantes dieléctricas, m-2
- de constantes físicas, m-1
- de propiedades magnéticas, m-2
- de unidades del SI, m-1
- equivalencia de fórmulas en SI y cgs , i-6
- Tales de Mileto**, h-1
- teorema**
 - de Gauss (divergencia), j-12
 - de Helmholtz, 6
 - de Poynting, 122
 - de reciprocidad de Green, d-3
 - de Stokes (rotacional), j-13
 - de Thevenin, e-24
 - de unicidad
 - de campos solenoidales, 320
 - caso general, 320
 - de campos irrotacionales, 319
- tesla**, 46
- Thevenin**
 - teorema de, e-24
- Thomson**, h-8
- trabajo sobre una carga en movimiento**, 21
- transformaciones de contraste (gauge)**, 111
 - contraste de Coulomb, 111
 - contraste de Lorenz, 111
- transformada de Fourier**
 - fenómeno de Gibbs, a-44
- transistores**, f-3
 - bipolares, f-3
 - de efecto campo, f-5
- unidades electromagnéticas**
 - amperio, 14
 - culombio, 14
 - faradio, d-2, 38
 - henrio, d-12
 - ohmio, 290
 - siemens, 290
 - tesla, 46
 - weber, 49, 104

vacío, 4

valor aleatorio, 16

Van Allen

cinturones de, c-5

vector

base, j-5

a derechas, j-5

circulación de un, j-11

complejo de Poynting, 338

componentes, j-5

de Poynting, 122

de propagación, 129

flujo, j-10

normal, j-10

producto escalar, j-2

producto vectorial, j-8

proyección ortogonal, j-2

proyecciones oblícuas, j-2

pseudovector, j-6

unitario, j-2

velocidad

angular de Larmor, 220

de arrastre, 16

de fase, 130

de grupo, 332

Volta, h-3

Von Guericke, h-2

weber, 49, 104