Cálculo
1º Grado en Ingeniería Informática
Examen Parcial
Curso 2010/2011

1. **(2.5 puntos)** Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}(x)^3}$

Solución: Tenemos un cociente de funciones derivables, ambas con límite cero en el origen así que podemos aplicar la primera regla de L'Hôpital. Antes de hacerlo multiplicamos y dividimos por x^3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt}{\sin^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt}{\sin^3(x)} \cdot \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\sin^3(x)}$$

y como $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$, sólo tenemos que calcular el límite del primer factor. Ahora sí, aplicando la regla de L'Hôpital y el teorema fundamental del Cálculo ($\frac{d}{dx}\int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt = e^{-(x^3)^2}\,3x^2$) nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 e^{-x^6}}{3x^2} = e^0 = 1.$$

2. **(2.5 puntos)** Resuelve uno de los dos ejercicios siguientes:

   (a) Calcula el número de soluciones de la ecuación $3\log(x) - x = 0$.

   (b) Demuestra la desigualdad: $\dfrac{x}{x+1} \leq \log(x+1),\ \forall x \geq 0$.

Solución:

(a) Analizamos la función $f(x) = 3\log(x) - x$, $\forall x > 0$ y vamos a determinar su número de ceros. Se trata de una función derivable, asi que calculamos el número de ceros de la derivada:

$$f'(x) = \frac{3}{x} - 1 = \frac{3-x}{x} = 0 \iff x = 3$$

Sabemos entonces, como consecuencia del teorema de Rolle, que como la derivada de f sólo se anula en un punto, la función f ha de tener, a lo sumo, dos ceros. Vamos a determinar cuántos tiene exactamente. Como además $f''(x) = \frac{-3}{x^2}$ y $f''(3) < 0$ se deduce que el punto $x = 3$ es un punto de máximo relativo. Y por ser el único punto crítico de la función, será el punto de máximo absoluto. Dicho valor de máximo absoluto es $f(3) = 3\log(3) - 3 = \log(27) - 3 > 0$ y, al verificar el comportamiento de la función en los extremos de su dominio:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(3\log(x) - x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(3\frac{\log(x)}{x} - 1\right) = -\infty$$

concluimos, ahora haciendo uso del teorema de Bolzano, que f tiene un cero en el intervalo $]0,3[$ y otro cero más en $]3,+\infty[$. Por tanto, la función f tiene exactamente dos ceros; o, lo que es lo mismo, la ecuación planteada tiene dos soluciones reales.

(b) Para comprobar la desigualdad planteada vamos a analizar el signo de la función

$$f(x) = \log(x+1) - \frac{x}{x+1} \quad , \forall x \geq 0$$

De hecho , tedremos que probar que $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$. Para ello, analizamos la derivada de f:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{(x+1-x)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Observamos claramente que la derivada es siempre positiva en $\mathbb{R}^+$. Por tanto, la función es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$, y en $\mathbb{R}_0^+$ alcanza el mínimo absoluto en $x = 0$; es decir:

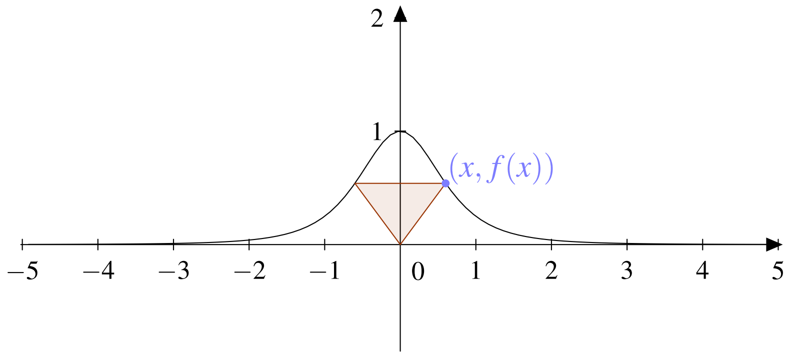
$$f(x) \geq f(0) = 0 \ , \ \forall x \geq 0$$

Entonces, $\frac{x}{x+1} \leq \log(x+1)$ $\forall x \geq 0$; y la igualdad se da sólamente en $x = 0$.

3. **(2.5 puntos)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

Se construye un triángulo isósceles con un vértice en $(0,0)$ y con los otros dos vértices apoyados sobre la gráfica de f, siendo estos dos últimos simétricos uno del otro respecto al eje OY. Determina los vértices de dicho triángulo para que su área sea máxima.



Solución: Utilizando la simetría de la función f (es par) y observando la figura, el triángulo cuya área debemos maximizar tiene base igual a $2x$, con $x > 0$ y altura $f(x)$; por lo que la función a maximizar es :

$$g(x) = \frac{2x\,f(x)}{2} = \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad ,\forall x \in \mathbb{R}^+$$

Se trata de una función racional con denominador no nulo, por tanto, es derivable. Calculamos los candidatos a puntos de extremo calculando los puntos críticos de la función g:

$$g'(x) = \frac{(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)\,2x^2}{(1+x^2)^4} = \frac{(1+x^2)(1+x^2-4x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$g'(x) = 0 \iff 1-3x^2 = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Factorizamos la función derivada para analizar el cambio de sigo de la misma:

$$g'(x) = \frac{3(\frac{1}{\sqrt{3}} - x)(\frac{1}{\sqrt{3}} + x)}{(1+x^2)^3}$$

Entonces, si $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ el factor que determina el signo es $(\frac{1}{\sqrt{3}} - x)$ es positivo; luego en ese intervalo, la función g es creciente. En cambio, si $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ la derivada de g es negativa y por tanto la función decrece. En conclusión, en el punto $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ la función alcanza un máximo relativo. Pero al ser el único punto crítico de la función, es su máximo absoluto.

Respondiendo, entonces, al enunciado del ejercicio, los vértices del triángulo de área máxima son: $(0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ y, por simetría $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$, siendo $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{36}$.

4. **(2.5 puntos)** Calcula la integral $\int x \arctan(x)\,dx$.

Solución: Aplicamos el método de integración por partes para calcular esta integral, donde vamos a considerar:

$$u = \arctan(x) \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{1+x^2}$$
$$dv = x \;\Rightarrow\; v = \frac{x^2}{2}$$

Por tanto, la integral se resuelve así:

$$\int x \arctan(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \left(\int \frac{x^2}{2(1+x^2)}\,dx\right) = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2\arctan(x) - x + \arctan(x)\right)$$

Granada, 28 de enero de 2011