2ª Entrega (26 de Octubre de 2017)

Jose Antonio Ruiz Millan
Juan Carlos Ruiz García.

1. a) $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2-8} - \sqrt{x+4}}{x-4} \quad \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \frac{(\sqrt{x^2-8} - \sqrt{x+4})(\sqrt{x^2-8} + \sqrt{x+4})}{(x-4)(\sqrt{x^2-8} + \sqrt{x+4})} =$$

$$= \frac{x^2-8 + \cancel{(\sqrt{x^2-8} \cdot \sqrt{x+4})} - \cancel{(\sqrt{x^2-8} \cdot \sqrt{x+4})} - (x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2-8} + \sqrt{x+4})} =$$

$$= \frac{x^2-8-x-4}{(x-4)(\sqrt{x^2-8} + \sqrt{x+4})} = \frac{x^2-x-12 \; *}{(x-4)(\sqrt{x^2-8} + \sqrt{x+4})} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-4)}(x+3)}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x^2-8} + \sqrt{x+4})} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-8} + \sqrt{x+4}} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{7}{\sqrt{8} + \sqrt{8}} = \boxed{\frac{7}{2\sqrt{8}}}$$

Solución

$$* \quad \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 12}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{49}}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\[2ex] \dfrac{1-\sqrt{49}}{2} = -\dfrac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 8e^{-2x} + 3e^{2x}}{\log(x) + 5e^{2x} + 3e^{-x}} = \boxed{\frac{3}{5}} \qquad "\frac{\infty}{\infty}"$$

Como tienen el mismo grado, el resultado es el cociente de los coeficientes líderes.

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\log(x^3)}} = \xrightarrow[\substack{\text{usamos la} \\ \text{regla del} \\ \text{nº } e}]{"0^0"} e^{\log\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\log(x^3)}}\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{\log(x^3)} \cdot \left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{\frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\log(x^3)}} = e^{\frac{\log(x^{-1})}{\log(x^3)}} =$$

$$= e^{\frac{-\log(x)}{3\log(x)}} = \boxed{e^{-\frac{1}{3}}} \text{ Solución.}$$

d) $$\lim_{x \to +\infty} (2x^2+1)\left[\log(x^2+1) - \log(x^2+5)\right] =$$

$$= (2x^2+1)\left(\log\left(\frac{x^2-1}{x^2-5}\right)\right) = \log\left(\left(\frac{x^2+1}{x^2+5}\right)^{2x^2+1}\right) =$$

$$"1^{\infty}" \; *$$

$$= \log(e^{-8}) = \boxed{-8} \text{ Solución}$$

$$* \lim_{x \to +\infty} (2x^2+1)\left(\left(\frac{x^2+1}{x^2-5}\right) - 1\right) = (2x^2+1)\left(\frac{-4}{x^2+5}\right) =$$

$$= \frac{-8x^2-4}{x^2+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-8x^2-4}{x^2+5} = -8$$

(Aquí aplicamos la regla especial del número e para el caso de 1^{∞})

2.- $f: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (1+\cos(x))^{\tan(x)} & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ e & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

f es continua en a si $\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \to \pi/2} (1+\cos(x))^{\tan(x)} = e^1 = \boxed{e = f(\pi/2)} \text{ Solución}$$

"1^∞" *

"$\infty \cdot 0$"

$$* \lim_{x \to \pi/2} \tan(x) \cdot [(1+\cos(x)) - 1] = \tan(x) \cdot \cos(x) =$$

$$= \frac{\sin(x)}{\cancel{\cos(x)}} \cdot \cancel{\cos(x)} = \sin(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x) = \boxed{1}$$

f es continua en el intervalo $[0, \pi/2]$

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \arcsen\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

a) ¿Es continua? $\boxed{SI}$

Llamaremos $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, y estudiaremos su imagen para estudiar la continuidad de $f(x)$. Sabemos que el denominador nunca puede ser 0, por lo tanto:

- Como $g(x)$ es continua por ser cociente de continuas y es ~~creciente~~ monótona creciente por ser cociente de monótonas crecientes tenemos que: ~~$g(\mathbb{R})$~~

$$g(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x\to-\infty} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x) \right[\quad \text{(abiertos)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1 \end{array}\right\} g(\mathbb{R}) =]0,1[\quad \text{(abiertos)}$$

Como la imagen de $g(x)$ esta entre 0 y 1, y el arcoseno admite valores entre -1 y 1, tenemos que la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser compuesta de continuas.

¿Es monótona? $\boxed{Si}$, por ser composición de monótonas crecientes.

b) Como hemos visto que $f(x)$ es continua y monótona, tenemos que:

$$f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \to -\infty} f(x) \,,\, \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[\quad \text{(abiertos)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right) = \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right) = 0 \end{array}\right\} \boxed{f(\mathbb{R}) = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[}$$

Solución