CÁLCULO (2º parcial)
GRADO EN INFORMÁTICA

1. Determina el número de soluciones de la ecuación $x\log(x)-1=0$.

   Solución. Estudiamos la monotonía de la función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ usando el signo de la derivada. Para ello calculamos sus puntos críticos:

$$f'(x)=\log(x)+1=0 \iff \log(x)=-1 \iff x=e^{-1}.$$

   Por tanto, la función es estrictamente monótona en los intervalos $]0,1/e]$ y $[1/e,+\infty[$. De hecho, si $x<1/e$, la función es estrictamente decreciente; mientras que si $1/e<x$, cambia a estrictamente creciente. Por tanto, en el punto $x=1/e$ se alcanza un mínimo relativo que, además, por ser el único punto crítico de f, es el mínimo absoluto. Además, como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} x\log(x)-1=\lim_{x\to 0}\log(x^x)-1=\log(1)-1=-1\\
f(1/e) &= -1/e-1<-1<0,\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x\log(x)-1=+\infty
\end{aligned}$$

   hay una única solución entre $1/e$ y $+\infty$.

2. Calcula los siguientes límites

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{t^2}{t^6+1}\,dt}{x^6}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\operatorname{sen}(x)}{2-\operatorname{sen}(x)}\right)^{1/x^2}$

   Solución.

   a) Para resolver la indeterminación "0/0", aplicamos la regla de L'Hôpital. El límite del cociente de las derivadas es

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{x^4}}{x^{12}+1}2\cancel{x}}{6\cancel{x^5}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(x^{12}+1)}=\frac{1}{3},$$

   con lo que el límite pedido vale $1/3$.

   b) Estamos ante una indeterminación del tipo "1^∞". Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}=\left(\frac{2+\operatorname{sen}(x)}{2-\operatorname{sen}(x)}\right)^{1/x^2}=e^L \iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2+\operatorname{sen}(x)}{2-\operatorname{sen}(x)}-1\right)=L.$$

   Para resolver el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2+\operatorname{sen}(x)}{2-\operatorname{sen}(x)}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x)}{x^2(2-\operatorname{sen}(x))}$$

aplicamos la regla de L'Hôpital. Nos queda

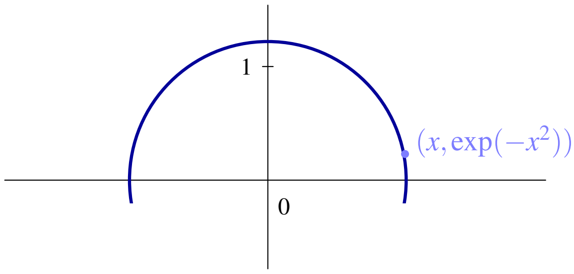
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)}{2x(2-\operatorname{sen}(x)) - x^2\cos(x)} = +\infty,$$

ya que $\cos(0) = 1$ y el denominador tiende a cero y es positivo. Observa que no se puede resolver este límite aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital. Resumiendo, el límite pedido es $+\infty$.

3. De todos los semicírculos centrados en el origen y con diámetro en el eje OX, encuentra el de mínima área que corta a la gráfica de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución.

Un punto del semicírculo que esté en la gráfica de la función $f(x) = \exp(-x^2)$ (recuérdese que la gráfica de dicha función es la campana de Gauss) es de la forma $(x, \exp(-x^2))$ y, por tanto, el radio de dicho círculo es $x^2 + f(x)^2$. El área del semicírculo será $\frac{\pi}{2}\left(x^2 + \exp(-x^2)^2\right)$. Por simetría respecto al eje OX, vamos a considerar la función g definida en $\mathbb{R}_0^+$.



La función que vamos a optimizar es dicha área, salvo la constante $\pi/2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + \exp(-x^2)^2 = x^2 + \exp(-2x^2)$. Calculamos sus puntos críticos:

$$g'(x) = 2x + (-4x)\exp(-2x^2) = 2x\left(1 - 2\exp(-2x^2)\right).$$

Como para calcular los puntos críticos de g consideramos $x > 0$, entonces, $g'(x) = 0$ si, y sólo si:

$$0 = 1 - 2\exp(-2x^2) \iff \exp(-2x^2) = 1/2 \iff -2x^2 = \log(\frac{1}{2})$$
$$\iff x^2 = \frac{1}{2}\log(2) \iff x = \sqrt{\frac{\log(2)}{2}}$$

Se comprueba que $f''\left(\sqrt{\frac{\log(2)}{2}}\right) > 0$ y, por tanto, el mínimo se alcanza cuando $x = \sqrt{\frac{\log(2)}{2}}$.

4. Calcula $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen}(x)\,dx$.

Solución. Integramos por partes (dos veces):

$$\begin{aligned}
\int e^{2x}\operatorname{sen}(x)\,dx &= \begin{bmatrix} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} \\ dv = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow v = -\cos(x) \end{bmatrix} \\
&= -\cos(x)e^{2x} + 2\int \cos(x)e^{2x}\,dx \\
&= \begin{bmatrix} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} \\ dv = \cos(x) \Rightarrow v = \operatorname{sen}(x) \end{bmatrix} \\
&= -\cos(x)e^{2x} + 2\operatorname{sen}(x)e^{2x} - 4\int \operatorname{sen}(x)e^{2x}\,dx.
\end{aligned}$$

Despejando $\int e^{2x}\operatorname{sen}(x)\,dx = \dfrac{e^{2x}}{5}\left(2\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\right).$

Granada, 27 de enero de 2012