Cálculo
1ºF Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial
Curso 2017/2018

1. Calcula los límites siguientes:

   a) **(1.5 puntos)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x)\left[\log(2x^2)-\log(2x^2+1)\right]$

   b) **(1.5 puntos)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2-2\cos(x)}{x^2}\right)^{1/x^2}$.

Solución:

a) En primer lugar, vamos a escribir el límite de otra forma usando las propiedades de la función logaritmo y para evitar la indeterminación del tipo "$\infty-\infty$" que aparece por la diferencia de los dos logarimos.

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x)\left[\log(2x^2)-\log(2x^2+1)\right] = \lim_{x\to+\infty} \log(x)\log\left(\frac{2x^2}{2x^2+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \log\left[\left(\frac{2x^2}{2x^2+1}\right)^{\log(x)}\right]$$

Observamos que dentro del logaritmo tenemos una indeterminación del tipo "1^∞". Vamos a resolverla por la regla del número e:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2}{2x^2+1}\right)^{\log(x)} = e^L \iff \lim_{x\to 0}\log(x)\left(\frac{2x^2}{2x^2+1}-1\right)=L.$$

Nos ocupamos entonces del límite de la derecha:

$$\lim_{x\to 0}\log(x)\left(\frac{2x^2}{2x^2+1}-1\right)=\lim_{x\to 0}\log(x)\left(\frac{2x^2-2x^2-1}{2x^2+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\log(x)\left(\frac{-1}{2x^2+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\log(x)}{2x^2+1}\right)=0$$

donde hemos aplicado la regla de L'Hôpital o la escala de infinitos.
Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x)\left[\log(2x^2)-\log(2x^2+1)\right] = e^0 = 1$$

b) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo "0/0". Parta resolver dicha indeterminacación aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{sen}(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1,$$

con lo que el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞". (Hemos aplicado la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas).

Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos(x)}{x^2}\right)^{1/x^2}=e^L \iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2-2\cos(x)}{x^2}-1\right)=L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2-2\cos(x)}{x^2}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(x)-x^2}{x^4}$$

aplicamos la regla de L'Hôpital, ya que presenta una indeterminación del tipo "0/0". Nos queda entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{sen}(x)-2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)-x}{2x^3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\,\mathrm{sen}(x)}{12x}=-\frac{1}{12}$$

Obsérvese que hemos aplicado la regla de L'Hôpital tres veces consecutivas.

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos(x)}{x^2}\right)^{1/x^2}=e^{-1/12}\ .$$

2. **(2 puntos)**

a) Determina el número de ceros de la función $f(x)=3x^5-5x^3-1$.

b) Calcula $f([0,2])$.

Solución:

a) La función dada es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ (es una función polinómica). Al ser un polinomio de grado impar, ya podemos asegurar, gracias al teorema de Bolzano, que al menos admite un cero (Obsérvese que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ y que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$). Para determinar el número exacto de ceros de f vamos a estudiar su derivada.

$$f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x^2-1)=15x^2(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \iff x=0\ ,x=1\ ,x=-1$$

Como consecuencia del teorema de Rolle, f tendrá, a lo sumo, cuatro ceros. Vamos a seguir analizando los puntos críticos para determinar el número de ceros de la función. Para ello, calculamos los intervalos de monotonía para decidir si los puntos críticos obtenidos son puntos de extremo relativo o no:

$$\begin{aligned}
\text{Si } x<-1 &\Rightarrow (x+1)(x-1)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}\\
\text{Si } -1<x<0 &\Rightarrow (x+1)(x-1)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente}\\
\text{Si } 0<x<1 &\Rightarrow (x+1)(x-1)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente}\\
\text{Si } x>1 &\Rightarrow (x+1)(x-1)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}
\end{aligned}$$

Se deduce entonces que en el punto $x=-1$ se alcanza un máximo relativo y en $x=1$ se alcanza un mínimo relativo. Además $f(-1)=1$ y $f(1)=-3$. Por tanto:

- En el intervalo $]-\infty,-1[$, la función tiene un cero, ya que pasa de negativa a positiva.
- En el intervalo $]-1,1[$, la función tiene otro cero, ya que pasa de positiva a negativa.
- Por último, en el intervalo $]1,+\infty[$, la función tiene un último cero, al pasar de negativa a positiva.

Concluimos, entonces, que f tiene exactamente tres ceros.

b) Calculamos la imagen de f en $[0,2]$. Se trata de una función continua en un intervalo compacto. Por la propiedad de Compacidad sabemos que f alcanza su mínimo y su máximo absolutos. El único candidato a extremo en el interior es $x=1$, por lo que para concluir, comparamos los valores que toma f en 0, en 1 y en 2:

$$f(0)=-1\ ;\ f(1)=-3\ ;\ f(2)=55$$

Por tanto: $f([0,2])=[-3,55]$.

3. **(1.5 puntos)** Demuestra que $x-1\leq x\log(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}^+$.

Solución: Consideremos la función $f(x)=x\log(x)-x+1\ \ \forall x\in\mathbb{R}^+$. Para demostrar la desigualdad planteada tendremos que ver que $f(x)\geq 0$, para todo $x\in\mathbb{R}^+$.

Se trata de una función derivable en todo el dominio. Calculamos la derivada:

$$f'(x)=\log(x)+x\frac{1}{x}-1=\log(x)=0 \iff x=1$$

Obtenemos un único punto crítico que, sin más que volver a derivar, y utilizar el test de la derivada segunda, se deduce que es un punto de mínimo relativo ($f''(x)=1/x\ \Rightarrow\ f''(1)=1>0$). Y al ser único punto crítico y único punto de mínimo relativo, se convierte en el mínimo absoluto de f. Además, $f(1)=0$, de lo que se deduce

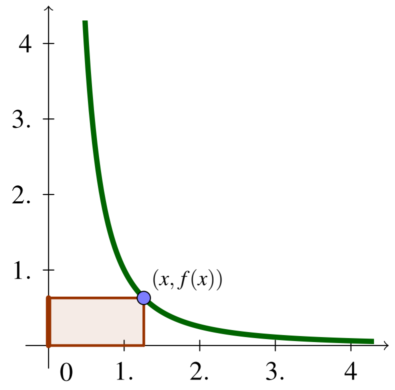
$$f(x)\geq f(1)=0\ \forall x\in\mathbb{R}^+ \iff x-1\leq x\log(x)\ \forall x\in\mathbb{R}^+$$

4. **(1.5 puntos)** Se considera la función $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Calcula las dimensiones del rectángulo de menor perímetro que tiene un vértice en el origen de coordenadas y cuyo vértice opuesto se encuentra sobre la gráfica de f.

Solución: Llamemos $(x,y)=(x,f(x))=(x,\frac{1}{x^2})$ al vértice del rectángulo, opuesto a $(0,0)$ y que se encuentra sobre la gráfica de f. La función que hay que minimizar es el perímetro de dicho rectángulo, es decir: $2x+2y=2x+\frac{2}{x^2}$. Pero para optimizar una función, optamos por optimizar su mitad, y así la función protagonista es:

$$g(x)=x+\frac{1}{x^2}$$

Esta función está definida en $]0,+\infty[$.



Buscamos posibles puntos de extremos relativos. Para ello, calculamos puntos críticos:

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3-2}{x^3} \iff x^3 = 2 \iff x = \sqrt[3]{2}$$

Si utilizamos el test de la derivada segunda:

$$g''(x) = \frac{6}{x^4} \Rightarrow g''\left(\sqrt[3]{2}\right) = \frac{6}{2^{4/3}} > 0$$

por lo que se obtiene un punto de mínimo relativo. Y al ser el único punto crítico y extremo relativo que tiene la función, es el punto donde se alcanza el mínimo absoluto de g.

Por tanto, las dimensiones que hacen que el perímetro sea mínimo es base igual a $\sqrt[3]{2}$ y altura igual a $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{2^{2/3}}$.

5. **(2 puntos)** El polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de una función dada f es:

$$1 - x + \frac{x^2}{2}$$

Calcula el polinomio de Taylor del mismo orden y centro de la función $g(x) = \arctan(f(x))$.

Solución: El polinomio dado es el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de la función f; es decir:

$$1 - x + \frac{x^2}{2} = P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

Igualando coeficiente a coeficiente obtenemos:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= -1 \\ \frac{f''(0)}{2!} &= \frac{1}{2} \Rightarrow f''(0) = 1 \end{aligned}$$

Para calcular el polinomio de Taylor de la función g en $a = 0$ de orden 2 tenemos que calcular las derivadas sucesivas en el cero hasta la de orden 2. Es decir,

$$g(x) = \arctan(f(x)) \Rightarrow g(0) = \arctan(f(0)) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} \Rightarrow g'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$g''(x) = \frac{f''(x)(1+f(x)^2) - 2f(x)f'(x)f'(x)}{(1+f(x)^2)^2} \Rightarrow g''(0) = \frac{2-2}{4} = 0$$

Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x$$

Granada, 16 de noviembre de 2017