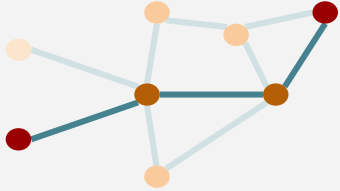


Grafos (2/3): Propiedades globales

A dark blue, curved, triangular shape that starts from the bottom left corner and extends diagonally upwards towards the right, filling the bottom half of the slide.

Características topológicas de redes



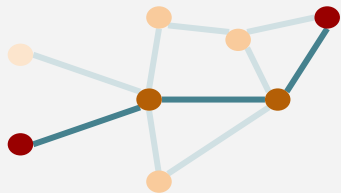
La **distancia** entre dos nodos es la longitud del camino más corto entre ellos, en caso de grafos ponderados es la suma de los pesos.

Diámetro

El **diámetro** d_m de un grafo es la máxima distancia entre cualquier par de nodos:

$$d_m = \max_{uv} (d_{uv})$$

Características topológicas de redes



La **distancia** entre dos nodos es la longitud del camino más corto entre ellos, en caso de grafos ponderados es la suma de los pesos.

Distancia media y eficiencia

La **distancia media** o **longitud característica** de un grafo es la distancia promedio entre todos los pares de nodos:

$$d = \langle d_{uv} \rangle$$

Cuando hay distancias infinitas, se calcula la **eficiencia**, utilizando las inversas de las distancias:

$$1/d_{uv} \rightarrow 0 \text{ para } d_{uv} \rightarrow \infty \Rightarrow d_{eff} = \langle 1/d_{uv} \rangle$$

Características topológicas de redes



El grado (k) de un nodo u es el número de aristas que tienen a u como nodo terminal.

Distribución de grado

Los gráficos y análisis de las curvas de distribución de grado son una herramienta habitual para analizar la topología de redes.

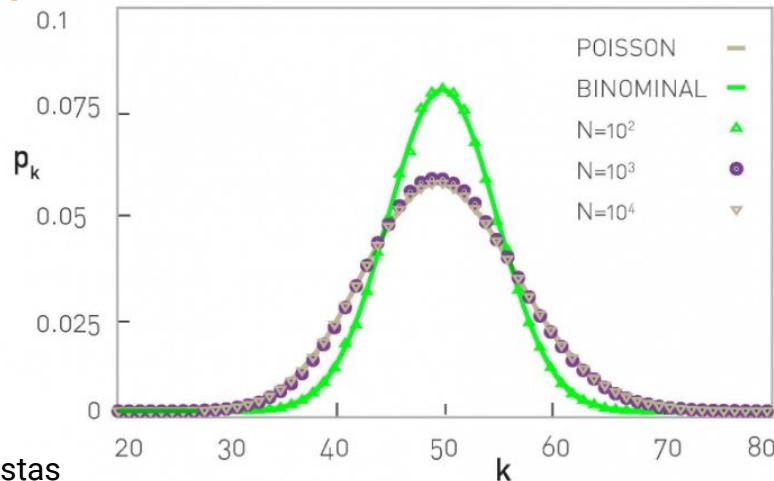
Se puede graficar el **histograma de frecuencias** o la **distribución de probabilidades** de que un nodo tenga grado k ($p(k)$).

Características topológicas de redes

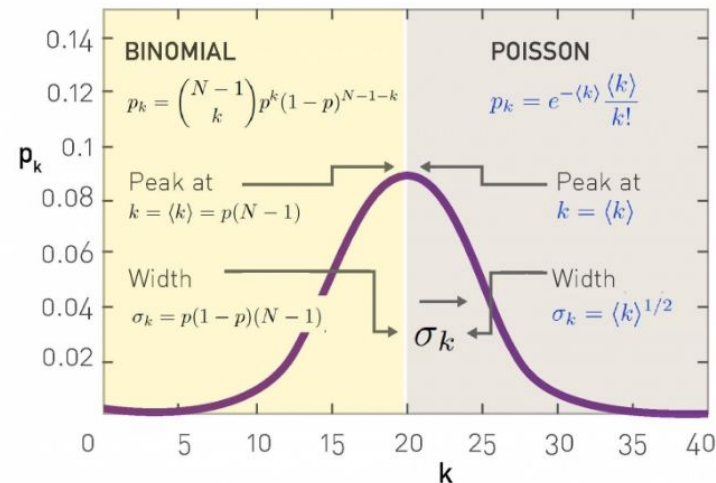


El grado (**k**) de un nodo **u** es el número de aristas que tienen a **u** como nodo terminal.

Distribución de grado



N = Número total de aristas



Características topológicas de redes



El grado (k) de un nodo u es el número de aristas que tienen a u como nodo terminal.

Distribución de grado

Una **red inhomogénea** es cuando los nodos tienden a agruparse de acuerdo a su grado.

En redes muy **inhomogéneas** el cálculo de la distribución de $p(k)$ vía histogramas es imprecisa y se dificulta la interpretación.

En estos casos funciona mejor la distribución acumulada del grado, es decir, la probabilidad de que un nodo tenga un grado mayor que k .

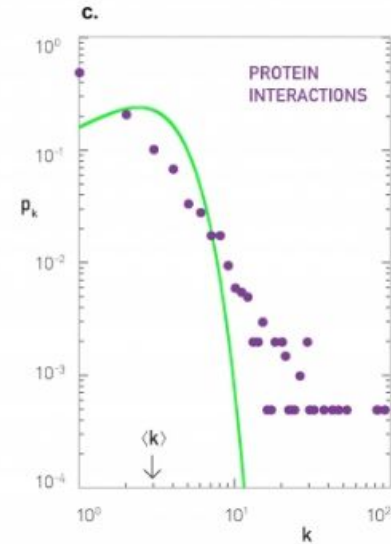
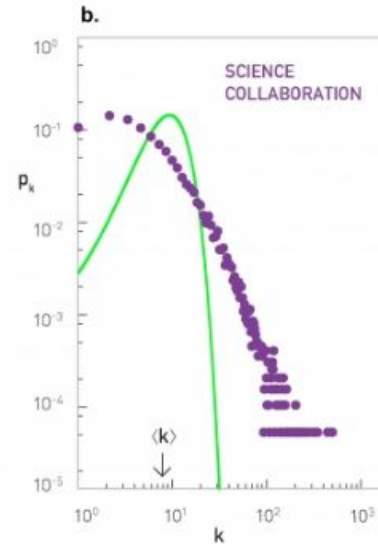
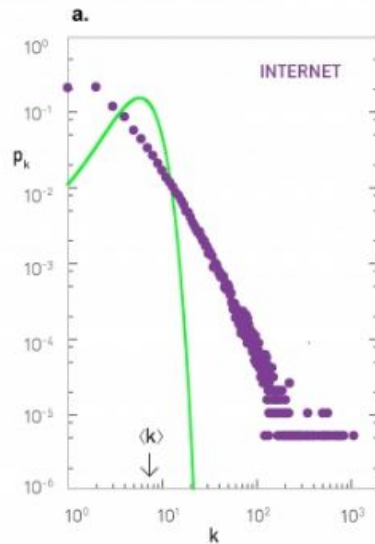
Características topológicas de redes



El grado (k) de un nodo u es el número de aristas que tienen a u como nodo terminal.

Distribución de grado

— Binomial
— Datos



Mezclado selectivo (*Assortive mixing*)

Red no selectiva (disassortive)

Los vértices con **alto grado** se conectan preferencialmente con nodos de **bajo grado**.

Red selectiva (assortive)

Los nodos de **alto grado** se asocian con otros nodos de alto grado, y los de **bajo grado** se asocian entre sí.

Las **redes sociales** tienden a ser selectivas y las **redes biológicas y físicas** no selectivas.

Mezclado selectivo (Assortive mixing)

Correlación de grados

La correlación de grados se puede obtener a partir de la distribución conjunta $p(k_i, k_j)$ de que los nodos i, j tengan grados k_i y k_j .

Para grados no correlacionados la probabilidad conjunta está dada por el producto de las distribuciones marginales $p(k_i, k_j) = p(k_i) \cdot p(k_j)$

La estimación directa de $p(k_i, k_j)$ es computacionalmente demandante.

Es más directo y suele usarse el coeficiente de correlación de Pearson (r) entre el grado de nodos adyacentes.

Mezclado selectivo (*Assortive mixing*)

Correlación de grados

El coeficiente de correlación o “selectividad” (r) varía entre -1 y +1:

$r < 0 \rightarrow$ Red no selectiva⁽¹⁾

$r > 0 \rightarrow$ Red selectiva⁽²⁾

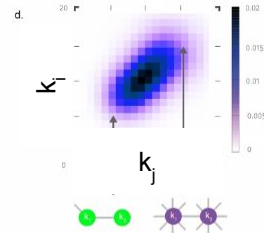
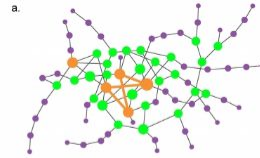
Este coeficiente falla para redes muy inhomogéneas, por ejemplo, en redes selectivas para nodos de grado bajo, o en redes no selectivas para nodos de grado alto.

(1) Los vértices con **alto grado** se conectan preferencialmente con nodos de **bajo grado**.

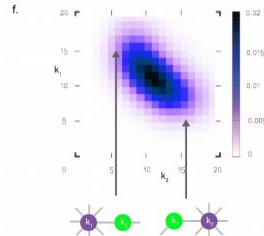
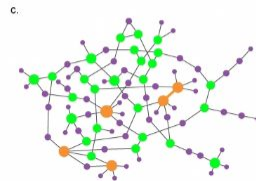
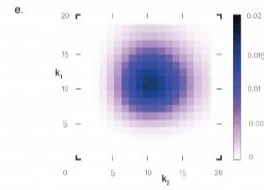
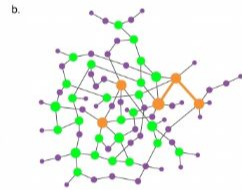
(2) Los nodos de **alto grado** se asocian con otros nodos de alto grado, y los de **bajo grado** se asocian entre sí.

Mezclado selectivo (Assortive mixing)

Correlación de grados



$r > 0 \rightarrow$ Red selectiva

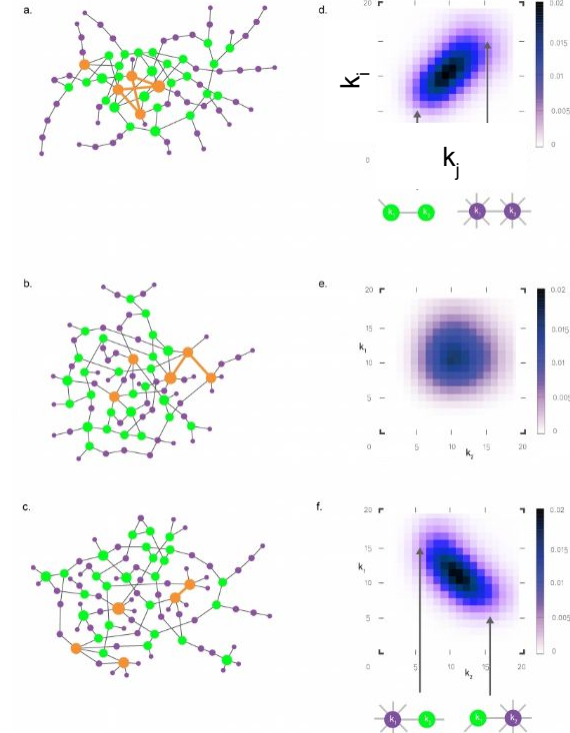


$r < 0 \rightarrow$ Red no selectiva

Mezclado selectivo (*Assortive mixing*)

Asociación entre grados de vecinos

Otra medida para evaluar la correlación de grados es el grado medio de los vecinos (***gmv***).



Mezclado selectivo (Assortive mixing)

Asociación entre grados de vecinos

Grado medio de los vecinos ($gm\mathbf{v}(i)$ o $k_{nn}(i)$).

Para cada nodo i :

$$gm\mathbf{v} = \frac{1}{|N(i)|} \sum_{j \in N(i)} k_j$$

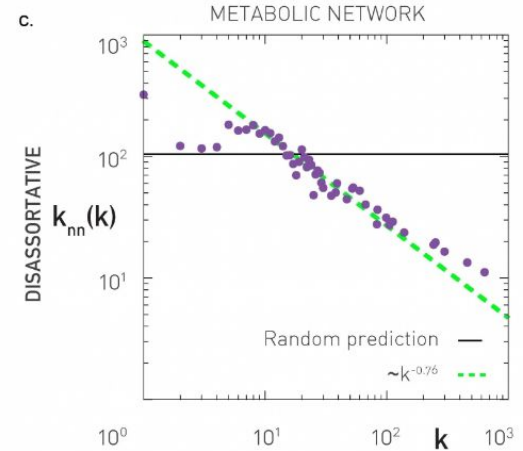
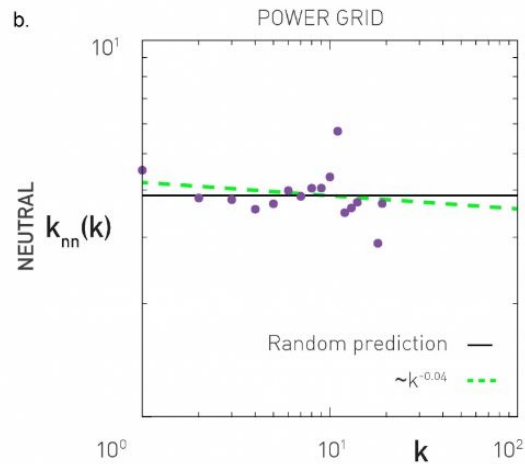
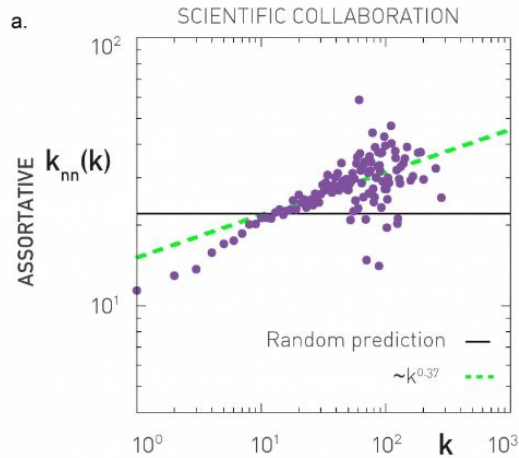
donde $N(i)$ son los vecinos de i , y k_j es el grado de j .

Después se puede graficar, por ejemplo, $gm\mathbf{v}$ vs k , o $\langle gm\mathbf{v} \rangle$ vs k .

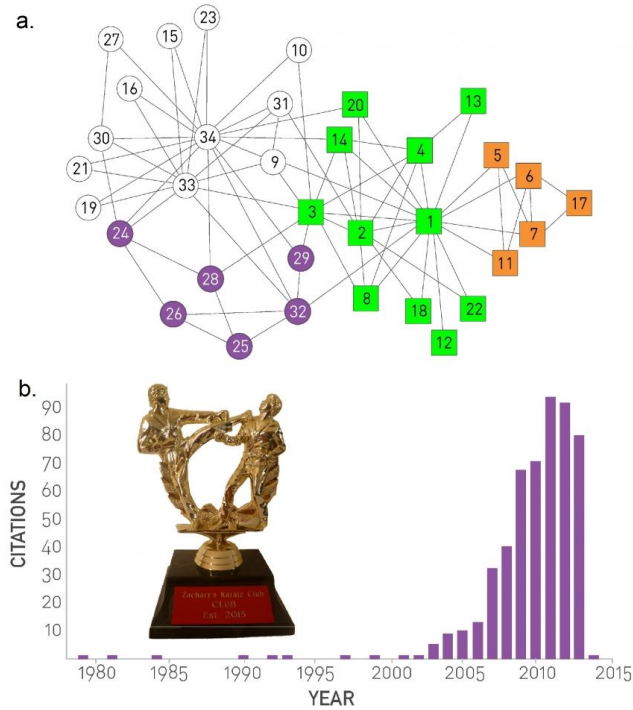
Para grafos dirigidos se calcula también la correlación entre k_i^{in} y k_j^{out} de los vecinos; o la correlación k_i^{in} con los k_j^{in} de los vecinos.

Mezclado selectivo (Assortive mixing)

Asociación entre grados de vecinos



Comunidades



Comunidades

Índice de coincidencia (M_{ij})

$$M_{ij} = \frac{\sum \text{vecinos comunes}}{\sum \text{total de vecinos}} = \frac{\sum_{k,l}^N A_{i,k} \cdot A_{j,l}}{n_i + n_j - \sum_{k,l}^N A_{i,k} \cdot A_{j,l}}$$

donde i,j son los nodos, $N(i), N(j)$ son los vecinos de i,j y A es la matriz de adyacencia.

Comunidades

Coeficiente de Clustering (C)

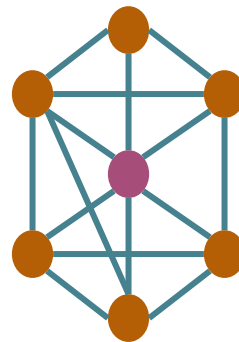
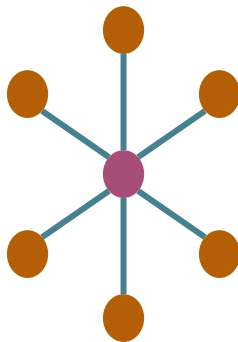
Estima la cohesividad local, midiendo la probabilidad de que dos nodos que tienen un vecino común, también estén conectados entre ellos.

Se calcula como el cociente entre el número de aristas entre vecinos observadas para i (E_i) y el máximo número posible de aristas (E_{max}):

$$C_i = E_i / E_{max}$$

$$E_{max} = k_i (k_i - 1) / 2$$

$$C_i = 2 E_i / k_i (k_i - 1)$$



Comunidades

Coeficiente de Clustering (C)

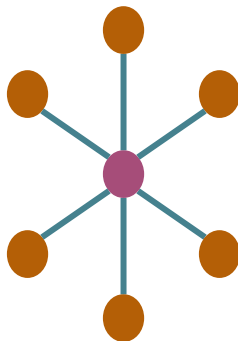
Estima la cohesividad local, midiendo la probabilidad de que dos nodos que tienen un vecino común, también estén conectados entre ellos.

Se calcula como el cociente entre el número de aristas entre vecinos observadas para i (E_i) y el máximo número posible de aristas (E_{max}):

$$C_i = E_i / E_{max}$$

$$E_{max} = k_i (k_i - 1) / 2$$

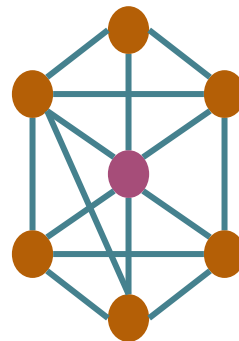
$$C_i = 2 E_i / k_i (k_i - 1)$$



$$C_i = 0 / E_{max}$$

$$E_{max} = 6 (6 - 1) / 2 = 15$$

$$C_i = 0 / 15 = 0.0$$



$$C_i = 9 / E_{max}$$

$$E_{max} = 15$$

$$C_i = 0.6$$

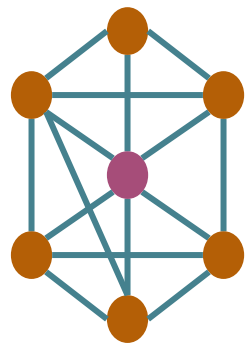
Comunidades

Coeficiente de Clustering (C)

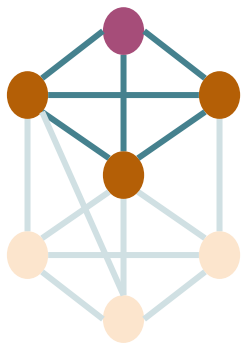
$$C = \langle C_i \rangle$$

Muchas redes muestran un C alto, indicando cohesividad local y una tendencia de los nodos a formar grupos.

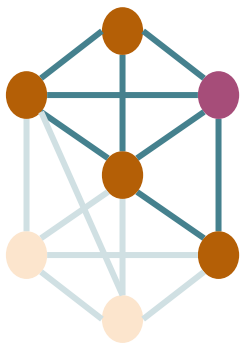
$$C_i = 0.6$$



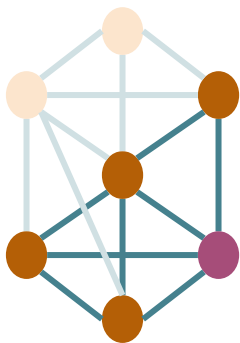
$$C_i = 1.0$$



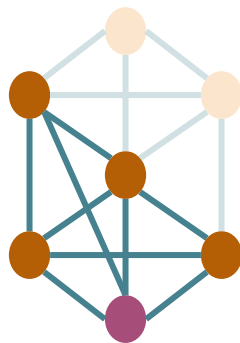
$$C_i = 0.7$$



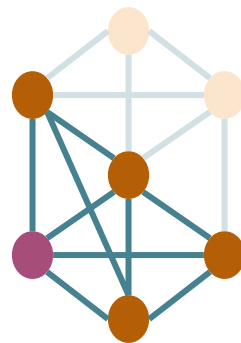
$$C_i = 0.7$$



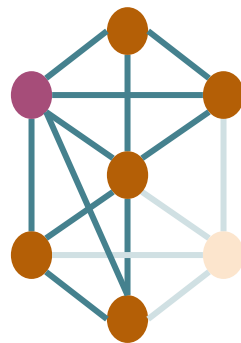
$$C_i = 0.8$$



$$C_i = 0.8$$



$$C_i = 0.6$$



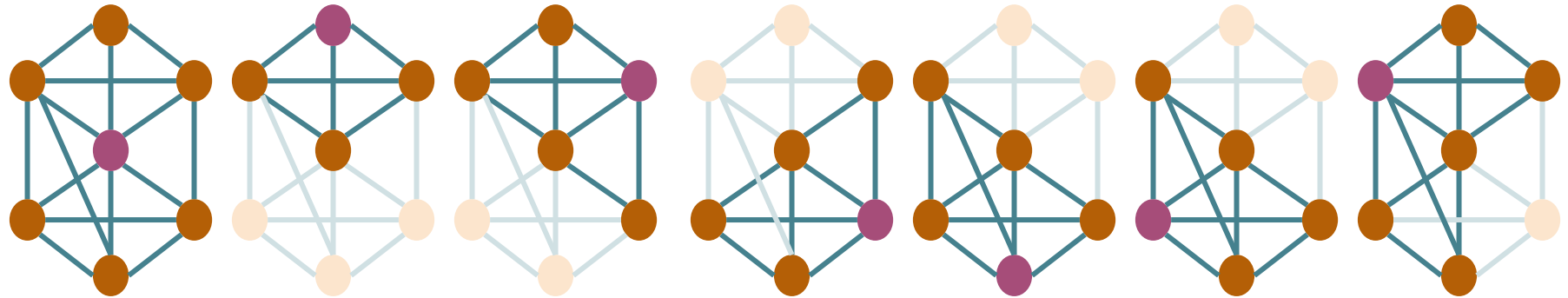
Comunidades

Coeficiente de Clustering (C)

$$C = \langle C_i \rangle$$

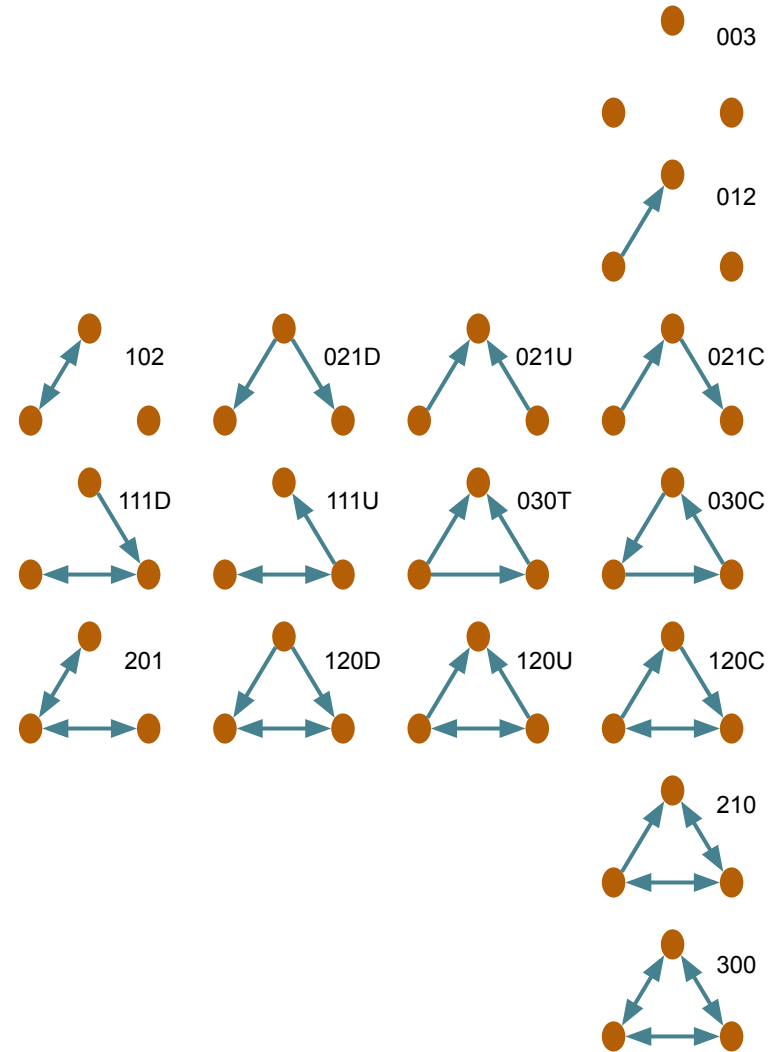
Muchas redes muestran un C alto, indicando cohesividad local y una tendencia de los nodos a formar grupos.

$$\langle C \rangle = 0.75$$



Comunidades

Clustering en triadas (Transitividad)



Comunidades

Clustering en triadas (Transitividad)

0	0	3		A, B, C
0	1	2		$A \rightarrow B, C$
1	0	2		$A \leftrightarrow B, C$
0	2	1	D	$A \leftarrow B \rightarrow C$
0	2	1	U	$A \rightarrow B \leftarrow C$
0	2	1	C	$A \rightarrow B \rightarrow C$
1	1	1	D	$A \leftrightarrow B \leftarrow C$
1	1	1	U	$A \leftrightarrow B \rightarrow C$
0	3	0	T	$A \rightarrow B \leftarrow C, A \rightarrow C$
0	3	0	C	$A \leftarrow B \rightarrow C, A \rightarrow C$
2	0	1		$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$
1	2	0	D	$A \leftarrow B \rightarrow C, A \leftrightarrow C$
1	2	0	U	$A \rightarrow B \leftarrow C, A \leftrightarrow C$
1	2	0	C	$A \rightarrow B \rightarrow C, A \leftrightarrow C$
2	1	0		$A \rightarrow B \leftrightarrow C, A \leftrightarrow C$
3	0	0		$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C, A \leftrightarrow C$

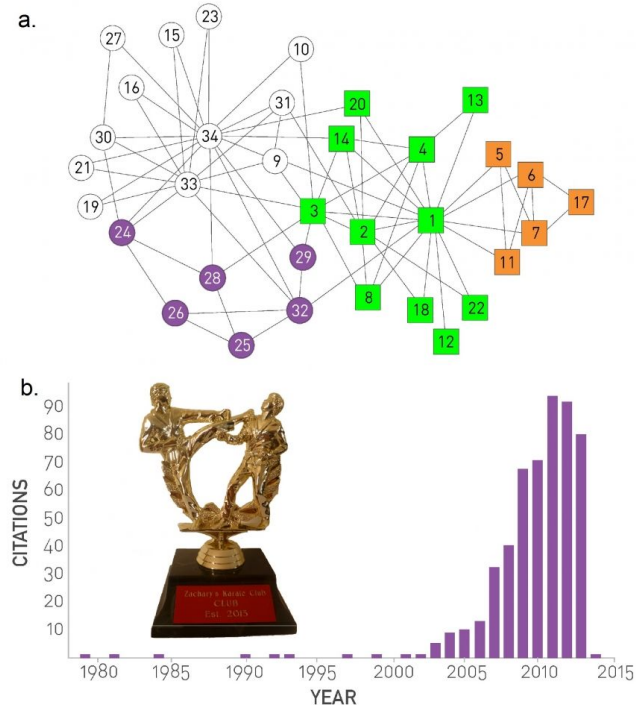
Comunidades

Modularidad

Los módulos son subconjuntos de nodos conectados densamente entre sí, pero de manera rara con otros subconjuntos.

A partir de estructuras más simples es posible construir una red más compleja.

La detección de estas sub-estructuras puede realizarse con métodos de clustering apropiados



Comunidades

Modularidad

$$M = \frac{1}{2L} \sum_{i,j \in V} (A_{i,j} - \frac{k_i k_j}{2L}) \delta(c_i, c_j)$$

L : número de nodos

A_{ij} : matriz de adyacencia

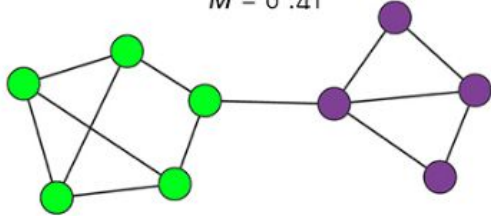
k : grado

$\delta(c_i, c_j)$: 1 si i, j pertenecen al mismo módulo, 0 si no.

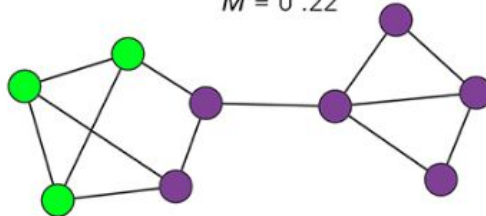
Comunidades

Modularidad

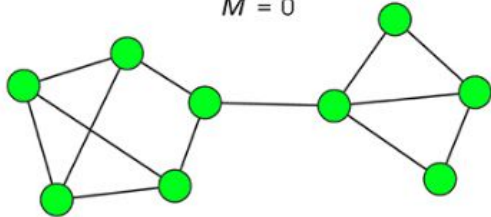
a. OPTIMAL PARTITION
 $M = 0.41$



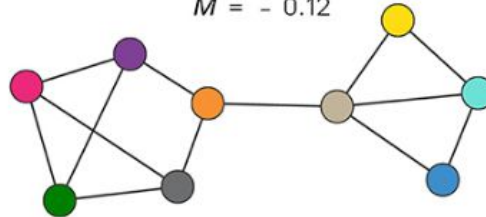
b. SUBOPTIMAL PARTITION
 $M = 0.22$



c. SINGLE COMMUNITY
 $M = 0$



d. NEGATIVE MODULARITY
 $M = -0.12$



$$M = \frac{1}{2L} \sum_{i,j \in V} (A_{i,j} - \frac{k_i k_j}{2L}) \delta(c_i, c_j)$$

L : número de nodos

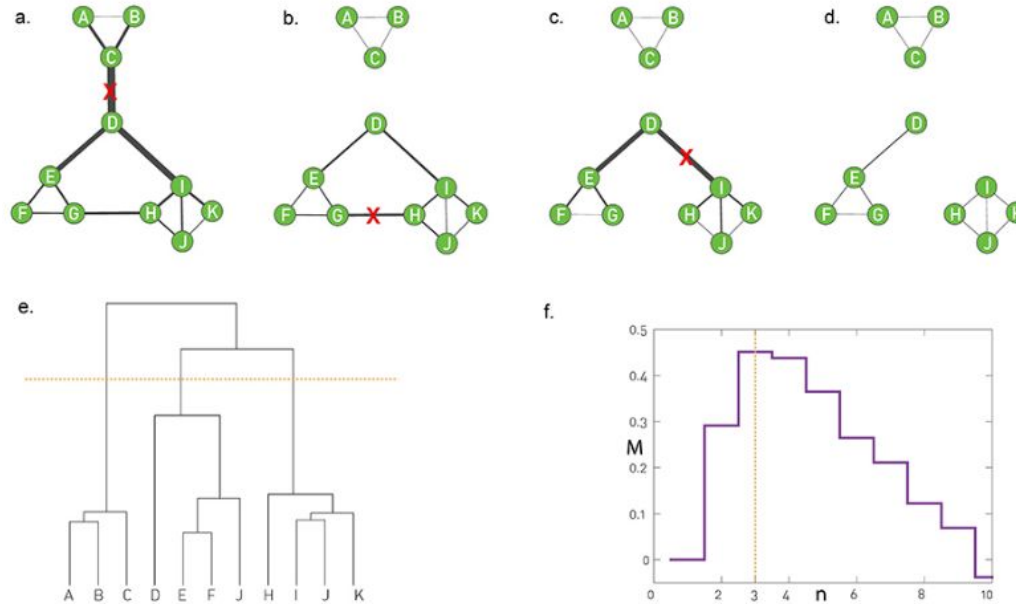
A_{ij} : matriz de adyacencia

k : grado

$\delta(c_i, c_j)$: 1 si i, j pertenecen al mismo módulo, 0 si no.

Comunidades

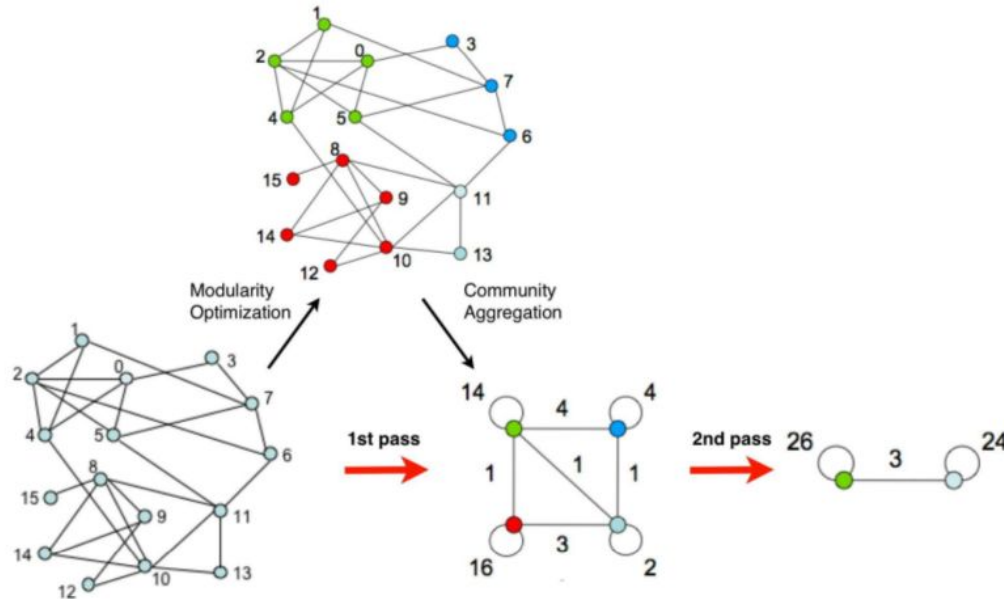
Comunidades - Métodos jerárquicos: Girvan–Newman



Centralidad de intermediación (betweenness)

Comunidades

Comunidades: Optimización de la Modularidad: Louvain

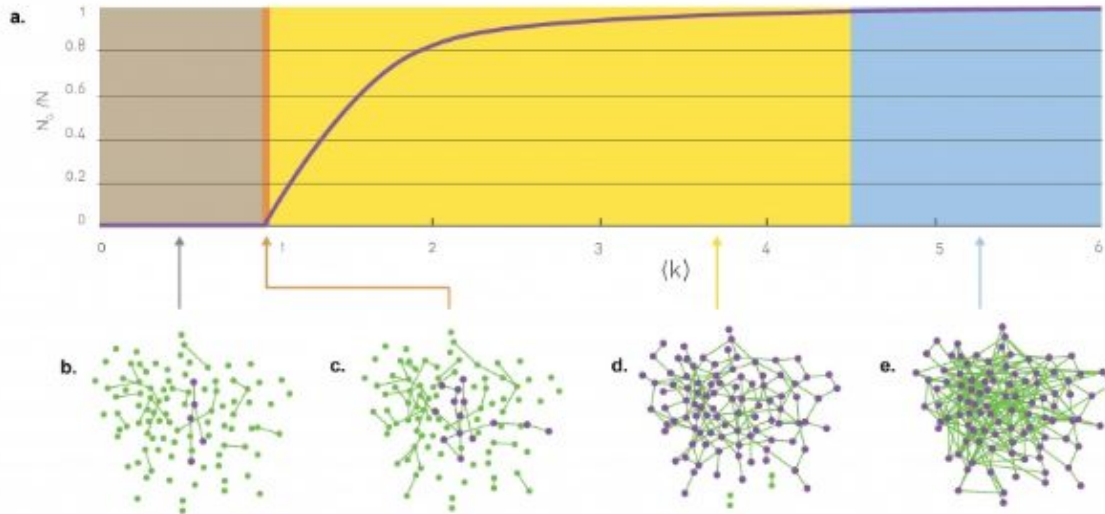


Blondel, V. D., Guillaume, J. L., Lambiotte, R., & Lefebvre, E. (2008). Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of statistical mechanics: theory and experiment*, 2008(10), P10008.

Comunidades

Robustez

Persistencia de propiedades topológicas, como la distancia media, ante la remoción de nodos o aristas.



Transiciones de fase

Prototipos de modelos de redes

Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network

Watts-Strogatz (1998) - Small-world networks

Barabási-Albert (1999) - Scale-free networks

Havlin model (2010) - Network of Networks (NoN)

Prototipos de modelos de redes

Comparación contra modelos nulos

A partir de un modelo nulo se genera un conjunto de redes sustitutas.

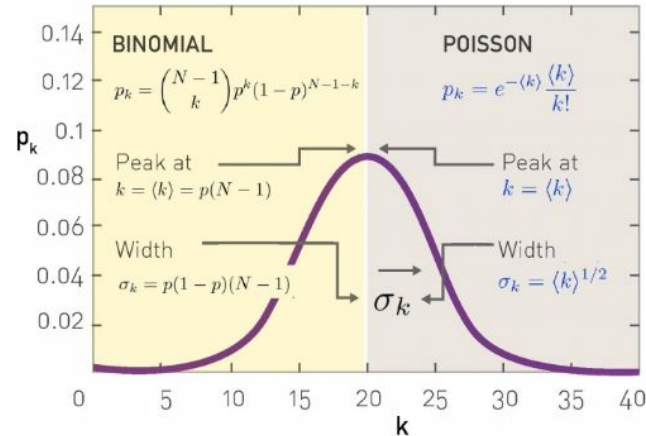
$$S = \frac{X_{medido} - \langle X_{sustitutas} \rangle}{\sigma_{sustitutas}}$$

Prototipos de modelos de redes

Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network

$G(N,L)$ donde se tienen N nodos dados y se colocan L aristas al azar.

$G(N,p)$ donde se tienen N nodos dados y cada uno está conectado con otro con probabilidad p .



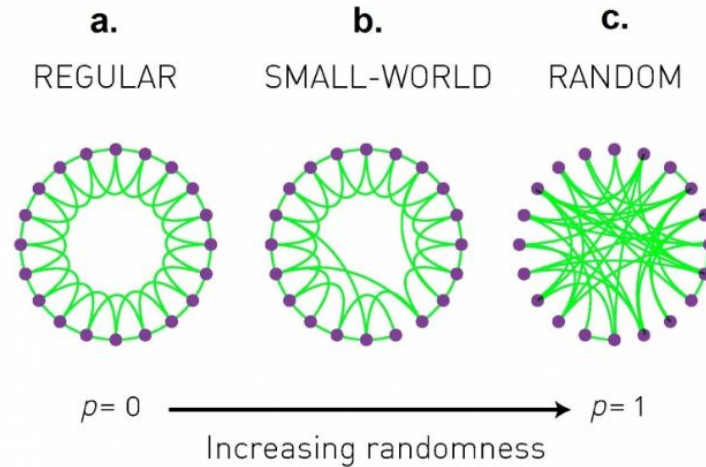
Prototipos de modelos de redes

Watts-Strogatz (1998) - Small-world networks

Tienen menor camino medio y mayor coeficiente de clustering que las redes ER.



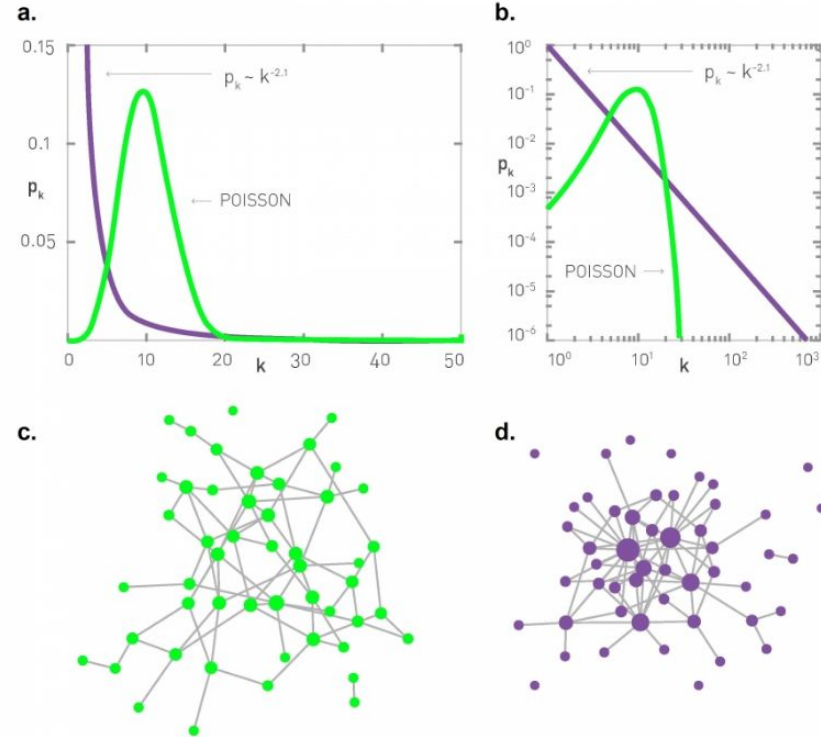
Stanley Milgram



Prototipos de modelos de redes

Barabási-Albert (1999) - Scale-free networks

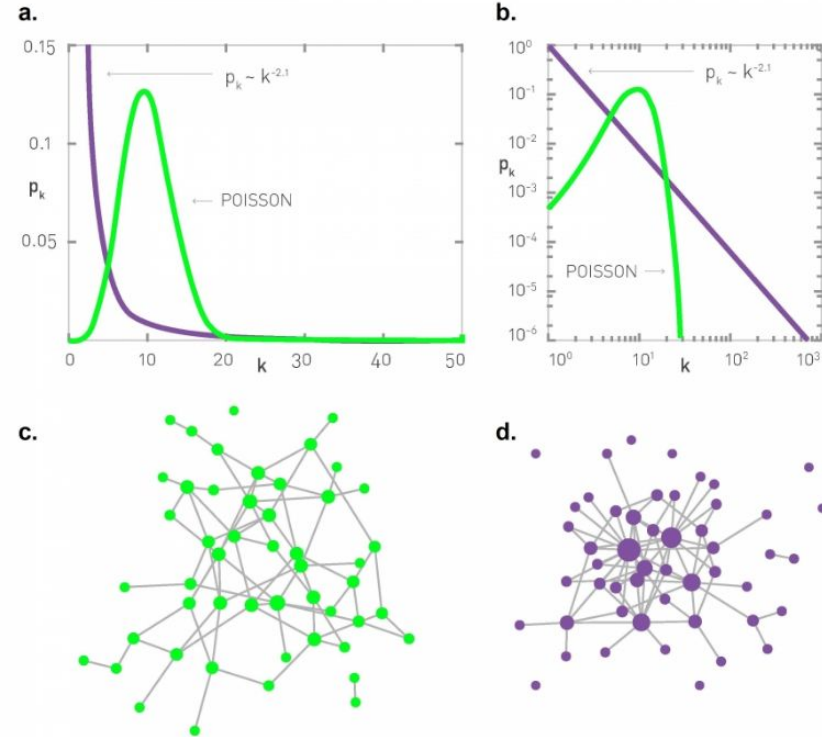
La construcción de estas redes es dinámica. Se van agregando nodos de a uno y se los conecta con mayor probabilidad con de mayor grado entre los existentes.



Prototipos de modelos de redes

Barabási-Albert (1999) - Scale-free networks

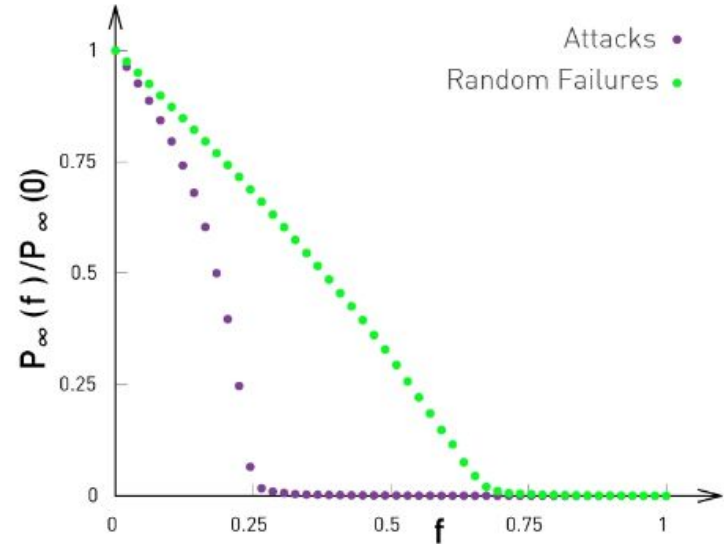
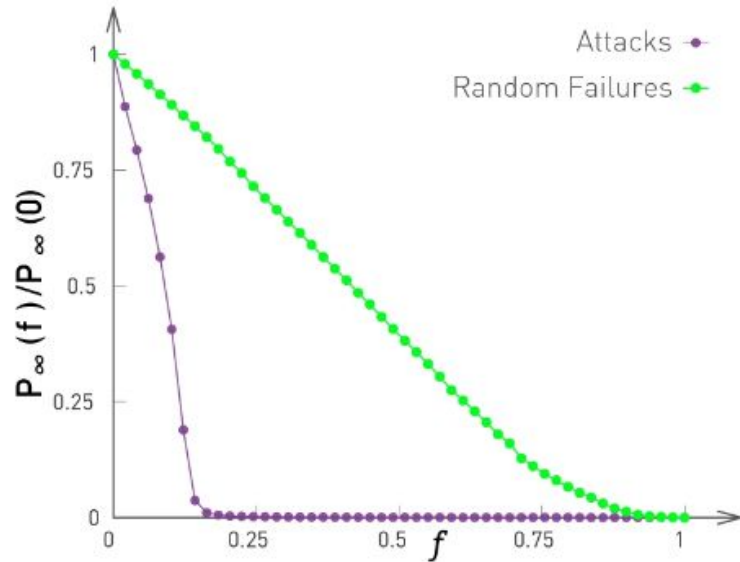
La distribución de grados sigue una ley de potencias.



Prototipos de modelos de redes

Robustez: Ataques y Fallas

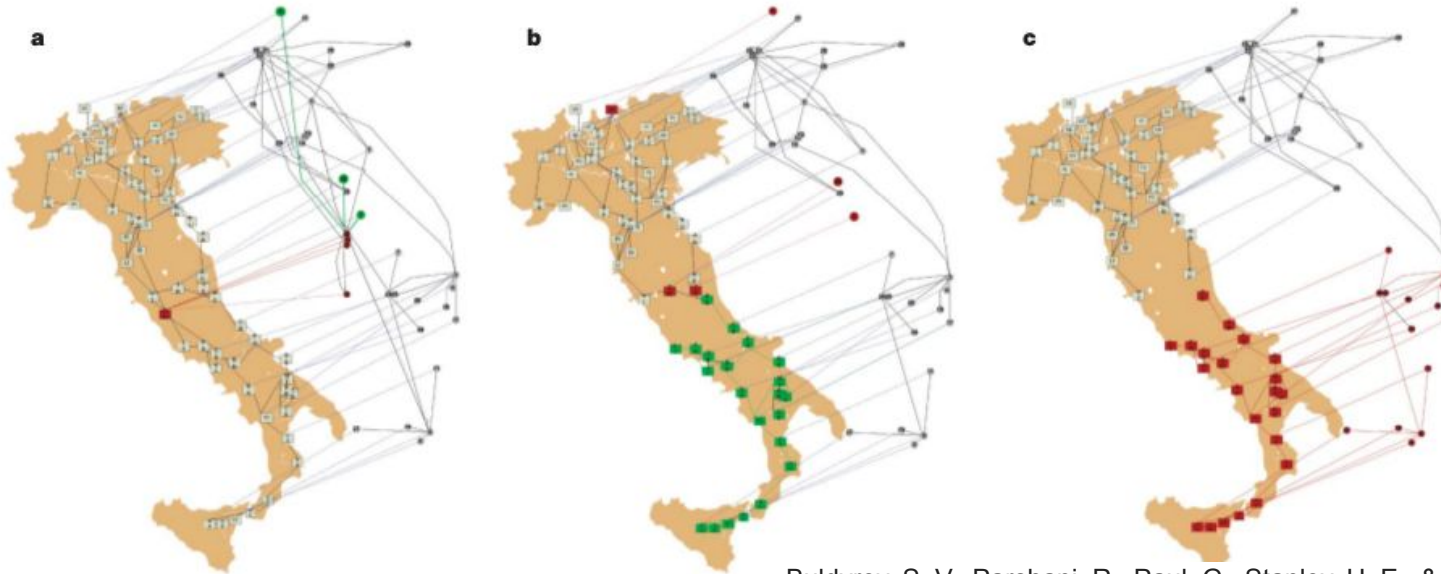
Barabási-Albert (1999) - Scale-free networks



Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network

Prototipos de modelos de redes

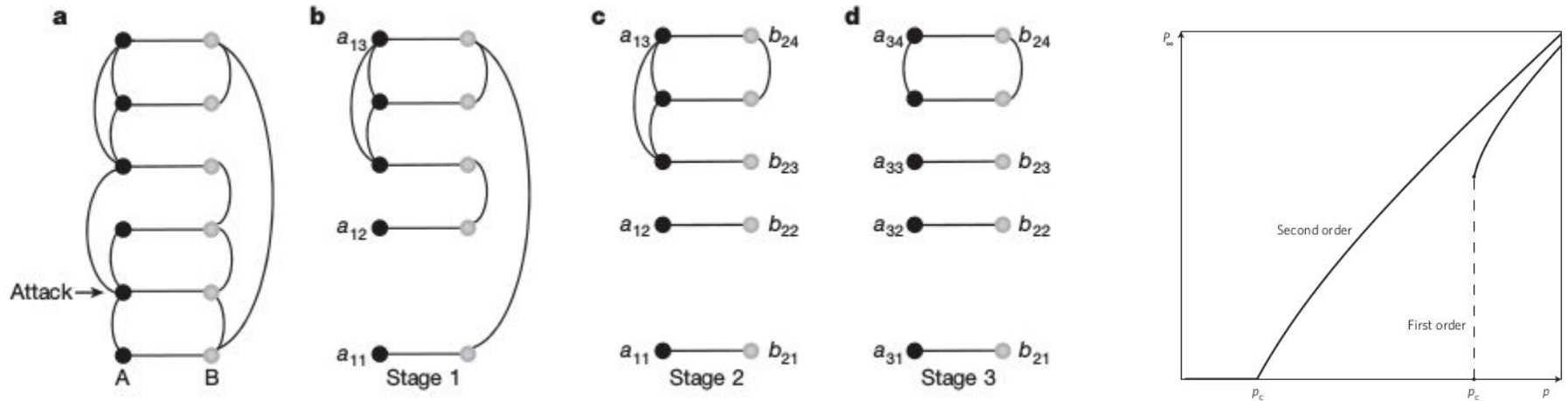
Havlin model (2010) - Network of Networks (NoN)



Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2010). Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 464(7291), 1025.

Prototipos de modelos de redes

Havlin model (2010) - Network of Networks (NoN)



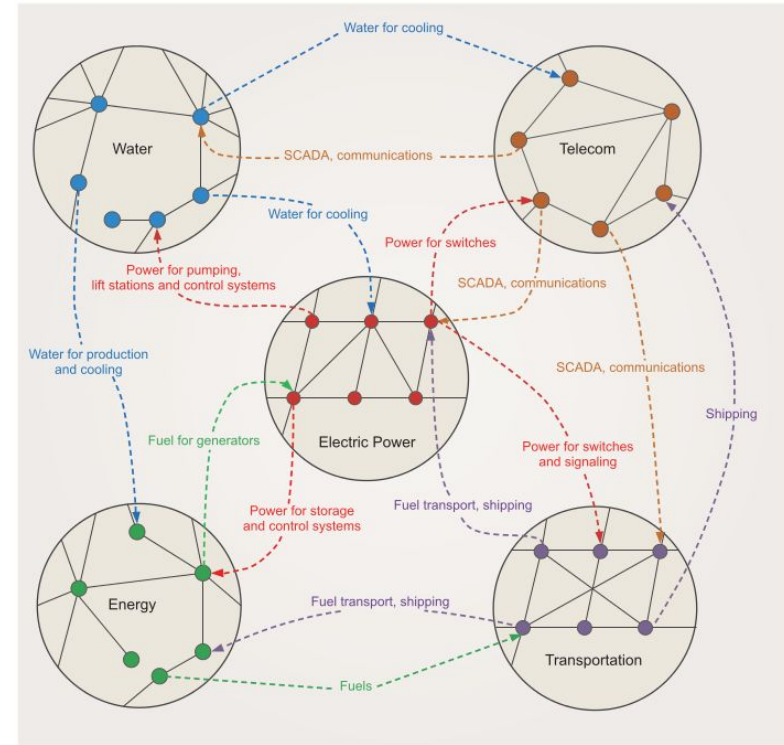
Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2010). Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 464(7291), 1025.

Gao, J., Buldyrev, S. V., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2012). Networks formed from interdependent networks. *Nature physics*, 8(1), 40.

Prototipos de modelos de redes

Havlin model (2010) - Network of Networks (NoN)

- Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2010). Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 464(7291), 1025.
- Gao, J., Buldyrev, S. V., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2012). Networks formed from interdependent networks. *Nature physics*, 8(1), 40.
- Gao, J., Li, D., & Havlin, S. (2014). From a single network to a network of networks. *National Science Review*, 1(3), 346-356.



Bibliografía

- Barabási, A. L. (2016). *Network science*. Cambridge university press. <http://networksciencebook.com/>
- Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2010). Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 464(7291), 1025.
- Gao, J., Buldyrev, S. V., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2012). Networks formed from interdependent networks. *Nature physics*, 8(1), 40.
- Gao, J., Li, D., & Havlin, S. (2014). From a single network to a network of networks. *National Science Review*, 1(3), 346-356.
- Blondel, V. D., Guillaume, J. L., Lambiotte, R., & Lefebvre, E. (2008). Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of statistical mechanics: theory and experiment*, 2008(10), P10008.