Elementos de Física: Taller 3
Colisiones entre esferas duras

1. Teoría

Simularemos la evolución temporal de un sistema bidimensional compuesto por esferas duras de masa m que chocan elásticamente entre ellas. Llamaremos σ al diámetro de las esferas, de manera que habrá una colisión cada vez que dos esferas se encuentren a una distancia σ.

1.1. Tiempos de colisión

Lo primero será averiguar en que momento se producirá la siguiente colisión, para lo cual hay que averiguar los tiempos en los que sucederán todas las posibles colisiones entre pares de esferas y escoger la colisión que suceda en el menor tiempo.

La condición para que las esferas i y j choquen en el tiempo t_{ij} es

$$|\boldsymbol{r}_{ij}(t + t_{ij})| = |\boldsymbol{r}_{ij} + \boldsymbol{v}_{ij} t_{ij}| = \sigma, \tag{1}$$

en donde $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ y $\boldsymbol{v}_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$. A partir de la ec. (1), en donde $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a^2}$, encuentre la relación entre los vectores $\boldsymbol{r}_{ij}$, $\boldsymbol{v}_{ij}$ y el escalar σ^2.

Teniendo en cuenta que si la cantidad $b_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_{ij} > 0$ las partículas se están alejando y no habrá colisión, despeje el tiempo de la relación que encontró previamente y diga bajo qué condiciones hay una solución.

Una vez se tengan los tiempos para las colisiones entre cada par de partículas, se escoge el menor de estos, que indica el momento en el que sucederá el siguiente evento de colisión.

1.2. Resolución de la colisión

Las velocidades después de la colisión $\mathbf{v_i'}$ y $\mathbf{v_j'}$ pueden ser escritas como

$$\boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{v}_i + \Delta \boldsymbol{v}_i, \text{ y} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}_j' = \boldsymbol{v}_j + \Delta \boldsymbol{v}_j. \tag{3}$$

Usando la ley de conservación de momentum lineal compruebe que

$$\Delta \boldsymbol{v}_j = -\Delta \boldsymbol{v}_i = -\Delta \boldsymbol{v}. \tag{4}$$

En el momento de la colisión tomamos ahora las coordenadas de manera que el eje x sea paralelo a $\boldsymbol{r}_{ij}$. El momentum de las partículas en este eje cambiará, mientras que el momentum en el eje perpendicular seguirá igual. En el momento de la colisión $|r_{ij}| = \sigma$ y la componente de la velocidad relativa paralela al vector de separación entre las partículas es

$$\boldsymbol{v}_{ij}^{||} = \left(\boldsymbol{v}_{ij} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{\sigma}\right) \frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{\sigma} \tag{5}$$

en donde

$$\boldsymbol{v}_{ij}^2 = v_{ij}^{||2} + v_{ij}^{\perp 2}. \tag{6}$$

y el cambio en velocidad se da en la dirección perpendicular al vector $\boldsymbol{r}_{ij}$, que al momento de la colisión.

Ahora, usando la ley de conservación de la energía y las ecuaciones (2) y (3) pruebe que

$$(\boldsymbol{v}_{ij} + \Delta \boldsymbol{v}) \cdot \Delta \boldsymbol{v} = 0, \tag{7}$$

que implica

$$(v_{ij}^{||} + \Delta v^{||})\Delta v^{||} = 0, \text{ y} \tag{8}$$

$$(v_{ij}^{\perp} + \Delta v^{\perp})\Delta v^{\perp} = 0. \tag{9}$$

Teniendo en cuenta que el momentum en la dirección perpendicular a la separación entre los centros de las esferas no cambia, justifique el resultado

$$\Delta \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}_{ij}^{||}. \tag{10}$$

2. Simulación

Escriba un programa en python con las siguientes características:

1. Una clase `Particle` que tenga como atributos la posición y velocidad de la partícula y un método `move` que, dado un tiempo, avanza la posición de la partícula

2. Las dimensiones L_x y L_y de la caja que contiene las partículas

3. Una función *times* que recibe una lista de partículas y las dimensiones de la caja y retorna una estructura de datos con los tiempos en los que ocurrirán la siguiente colisión entre cada uno de los elementos del sistema (partícula-partícula y partícula-caja) identificando que elementos colisionan en cada caso

4. Una función `changeMomentum` que recibe un par de elementos (partículas o partícula y muro) y cambia las velocidades de estos dada una colisión entre ellos

5. Un ciclo que se repite N veces en el cual se calculan los tiempos de la siguiente colisión, se escoge el tiempo menor t_{min}, se avanza el sistema hasta $t + t_{min}$ (en donde t es el tiempo actual), finalmente se cambian las velocidades de los elementos involucrados en la colisión en t_{min} y, finalmente se escriben las posiciones de las partículas en un archivo para guardar las trayectorias