Parcial 2 - MSCN

Juan Camilo Ruiz

Ejercicio 1 Modelo ecológico de depredadores y presas

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\beta x y}{x + \alpha} \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{y}{\gamma x}\right) \qquad (2)$$

Interpretación

De la ecuación (1):

- la población x crece a una tasa r
- hay competencia entre los individuos de la población x lo que causa una disminución de la población a una tasa $\frac{r}{k}$
- la población y depreda a la población x lo que disminuye x a una tasa β
- la población x se defiende de la población y en cada encuentro.

De la ecuación (2):

- la población y crece a una tasa s
- hay competencia entre los individuos de la población y lo que hace que disminuya y a una tasa $\frac{s}{\gamma}$
- el aumento de x disminuye la competencia en y.

<u>Hallemos los equilibrios</u>:

$$\frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{y}{\gamma x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow sy = 0 \quad ó \quad \left(1 - \frac{y}{\gamma x}\right) = 0$$

Si $sy = 0$:

$\underline{y = 0}|$

Reemplazando en (1):

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow rx = 0 \quad ó \quad 1 - \frac{x}{k} = 0$$

. Si $rx = 0$:

$\underline{x = 0}|$

$(x^*, y^*)_1 = \underline{(0,0)}|$

. Si $1 - \frac{x}{k} = 0$:

$\underline{x = k}| \Rightarrow (x^*, y^*)_2 = \underline{(k, 0)}|$

• Si $1 - \frac{y}{\gamma x} = 0$:

. $y = \gamma x$

Reemplazando en (1):

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\beta x^2 \gamma}{x+\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow rx - \frac{r}{k}x^2 = \frac{\beta x^2 \gamma}{x+\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \left(rx - \frac{r}{k}x^2\right)(x+\alpha) - \beta x^2 \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow rx^2 + \alpha r x - \frac{r}{k}x^3 - \frac{\alpha r}{k}x^2 - \beta x^2 \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{r}{k}x^3 + x^2\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right) + \alpha r x = 0$$

$$x\left(-\frac{r}{k}x^2 + x\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right) + \alpha r\right) = 0$$

. Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$ (ya estudiado)

(*) . Si $-\frac{r}{k}x^2 + x\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right) + \alpha r = 0$

$$\Delta = \left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right)^2 + 4\frac{r}{k} \times \alpha r$$

$$= \left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right)^2 + 4\frac{\alpha}{k} r^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right)^2 \geq 0 \\ \cdot\ 4\frac{\alpha}{k} r^2 > 0 \end{array}\right\} \Delta > 0$$

$$x_1 = \frac{-\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right) + \sqrt{\Delta}}{-2\frac{r}{k}} \qquad (r \neq 0)$$

$$= 2\frac{k}{r}\left[\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right) - \sqrt{\Delta}\right]$$

$$= \frac{2k}{r}\left[\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right) - \sqrt{\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right)^2 + 4\frac{\alpha}{k}r^2}\right]$$

$$x_2 = \frac{2k}{r}\left[\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right) + \sqrt{\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right)^2 + \frac{4\alpha}{k}r^2}\right]$$

Para que x_1 y x_2 tengan sentido se necesita:

① $x_1 \geq 0$

② $x_2 \geq 0$

Para la condición ①

$$x_1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right) \geq \sqrt{\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right)^2 + 4\frac{\alpha}{k}r^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right)^2} \geq \cancel{\left(r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma\right)^2} + 4\frac{\alpha}{k}r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \geq 4\frac{\alpha}{k}r^2 \longrightarrow \text{Contradicción ya que } \alpha, k, r^2 > 0.$$

Así: $(x^*, y^*)_3 = \left(\frac{2k}{r} \left[A + \sqrt{A^2 + \frac{4\alpha}{k} r^2} \right], \; 2\frac{\gamma k}{r} \left[A + \sqrt{A^2 + \frac{4\alpha}{k} r^2} \right] \right)$

Con $A = r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma$ y $r \neq 0$, $k \neq 0$.

· Si $\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\beta x y}{x+\alpha} = 0$:

$\Leftrightarrow rx\left(1 - \frac{x}{k}\right)(x+\alpha) = \beta x y$

$\Leftrightarrow \left(rx - \frac{r}{k}x^2\right)(x+\alpha) - \beta x y = 0$

$\Leftrightarrow rx^2 + \alpha r x - \frac{r}{k}x^3 - \frac{r\alpha}{k}x^2 - \beta x y = 0$

$\Leftrightarrow x\left(-\frac{r}{k}x^2 + \left(r - \frac{r\alpha}{k}\right)x + \alpha r - \beta y\right) = 0$

Si $x = 0$ $\longrightarrow$ caso ya estudiado. ($\Rightarrow y = 0$).

Si $x \neq 0$ entonces:

$-\frac{r}{k}x^2 + \left(r - \frac{r\alpha}{k}\right)x + \alpha r - \beta y = 0$

$\Leftrightarrow y = -\frac{r}{k\beta}x^2 + \frac{\left(r - \frac{r\alpha}{k}\right)}{\beta}x + \frac{\alpha r}{\beta}$

$= P(x)$

Reemplazando en (2):

· $\frac{dy}{dt} = s P(x)\left(1 - \frac{P(x)}{\gamma x}\right) = 0$

$sP(x) = 0$ ó $\left(1 - \frac{P(x)}{\gamma x}\right) = 0$

. Si $sP(x) = 0$ entonces $y = 0$. Además:

$P(x) = 0$ $(s \neq 0)$.

Con la solución del punto $(x^*, y^*)_3$ se encontraron las raíces de $\beta P(x)$ (que son las mismas que $P(x)$).

Llegamos a : x^*_4 tal que :

Escaneado con CamScanner

$$x_4^* = \frac{2k}{r}\left[A + \sqrt{A^2 + \frac{4\alpha}{k}r^2}\right]$$

con $r, k \neq 0$ y $A = r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma$. (*)

Así $(x^*, y^*)_4 = \left(\frac{2k}{r}\left[A + \sqrt{A^2 + \frac{4\alpha}{k}r^2}\right], 0\right)$

- Si $1 - \frac{P(x)}{\gamma x} = 0$ ~~y P(x) ≠ 0~~

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{rx}{k\beta\gamma} - \frac{\left(r - \frac{r\alpha}{k}\right)}{\beta\gamma} - \frac{\alpha r}{\beta\gamma x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{\beta\gamma}\left(\frac{x}{k} - \frac{\alpha}{x}\right) = \frac{r - \frac{r\alpha}{k}}{\beta\gamma} - 1$$

$$\Leftrightarrow r\left(\frac{x}{k} - \frac{\alpha}{x}\right) = r - \frac{r\alpha}{k} - \beta\gamma = A$$

(El mismo A que en (*))

$$\Leftrightarrow r\frac{x}{k} - \frac{\alpha r}{x} - A = 0 \qquad (k, x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{k}x^2 - \alpha r - Ax = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{r}{k}x^2 + Ax + \alpha r = 0$$

Es la misma ecuación que en (*), lo que nos lleva de nuevo a $(x^*, y^*)_4$.

En conclusión:

$$(x^*, y^*)_1 = (0,0)$$

$$(x^*, y^*)_2 = (k,0)$$

$$(x^*, y^*)_3 = \left(\frac{2k}{r}\left[A + \sqrt{A^2 + \frac{4\alpha}{k} r^2}\right], \frac{2\gamma k}{r}\left[A + \sqrt{A^2 + \frac{4\alpha}{k} r^2}\right] \right)$$

$$(x^*, y^*)_4 = \left(\frac{2k}{r}\left[A + \sqrt{A^2 + \frac{4\alpha}{k} r^2}\right], 0 \right)$$

Con $A = r - \frac{\alpha r}{k} - \beta\gamma$, $k \neq 0$.

Calculemos el Jacobiano.

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = r\left[\left(1 - \frac{x}{k}\right) + x\left(-\frac{1}{k}\right)\right] - \left(\frac{\beta y(x+\alpha) - \beta x y}{(x+\alpha)^2}\right)$$

$$= r\left[1 - \frac{2(x)}{k}\right] - \beta y\left(\frac{x+\alpha-x}{(x+\alpha)^2}\right)$$

$$= \boxed{r\left(1 - \frac{2(x)}{k}\right) - \frac{\beta y \alpha}{(x+\alpha)^2}}$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = \boxed{-\frac{\beta x}{x+\alpha}}$$

Escaneado con CamScanner

$$\cdot\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = -\frac{s}{\gamma} y^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{s}{\gamma}\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$\cdot\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = s\left(1-\frac{y}{\gamma x}\right) + s y \left(-\frac{1}{\gamma x}\right)$$

$$= s - s\frac{y}{\gamma x} - \frac{s y}{\gamma x} = s - 2\frac{s y}{\gamma x}$$

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} r\left(1-\frac{2(x)}{k}\right) - \frac{\beta y \alpha}{(x+\alpha)^2} & -\frac{\beta x}{x+\alpha} \\ \frac{s}{\gamma}\left(\frac{y}{x}\right)^2 & s - 2\frac{s y}{\gamma x} \end{bmatrix}$$

Error: $(x^*, y^*)_1 = (0,0)$ no es punto de equilibrio porque hay indeterminaciones en las ecuaciones iniciales (1) y (2).

Con $(x^*, y^*)_2 = (k, 0)$

$$J(k,0) = \begin{bmatrix} r\left(1-\frac{2k}{k}\right) & -\frac{\beta k}{k+\alpha} \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -r & -\frac{\beta k}{k+\alpha} \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Es una matriz triangular superior:

Valores propios: $\lambda_1 = -r < 0$, $\lambda_2 = s > 0$

~~Encontramos~~ Por lo tanto $(k, 0)$ es un punto de silla.

. Encontremos los vectores propios :

$$\begin{bmatrix} -r & -\frac{\beta k}{k+\alpha} \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} = -r \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix}$$

$$\cancel{sV_{12}} = -r\cancel{V_{11}} - \frac{\beta k}{k+\alpha} V_{12} = -r\cancel{V_{11}}$$

$$\Rightarrow V_{12} = \underline{0}$$

$s V_{12} = -r V_{12}$ → ~~[illegible]~~ No hay info

$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

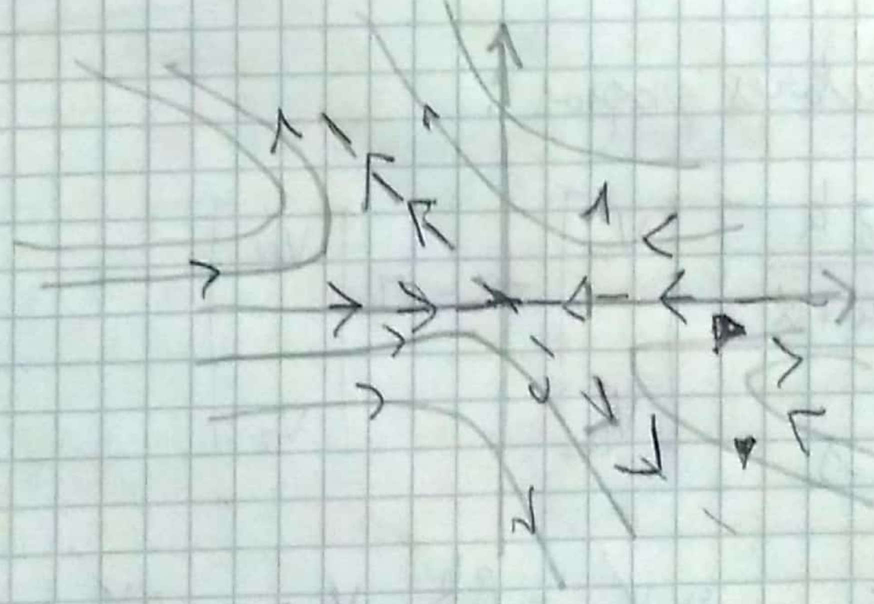
· Con $\lambda_2 = s$

$$\begin{bmatrix} -r & -\frac{\beta k}{k+\alpha} \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix}$$

$$-r V_{21} - \frac{\beta k}{k+\alpha} V_{22} = s V_{21}$$

$$-\frac{\beta k}{k+\alpha} V_{22} = (s+r) V_{21}$$

$$V_{21} = -\frac{\beta k}{(k+\alpha)(s+r)} V_{22} \Rightarrow V_2 \begin{bmatrix} -\frac{\beta k}{(k+\alpha)(s+r)} \\ 1 \end{bmatrix}$$



"Tú debes ser el cambio que deseas ver en el mundo"

Ejercicio 2 : péndulo oscilante

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -5\sin\theta - \frac{9}{13}\frac{d\theta}{dt}$$

Interpretación :

- El ángulo θ tiene un comportamiento oscilatorio.
- Como la velocidad es negativa entonces la aceleración decrece exponencialmente hasta converger a 0.

Puntos de equilibrio:

$$\ddot{\theta} + \frac{9}{13}\dot{\theta} = -5\sin\theta$$

$\theta_1 = \theta$
$\theta_2 = \dot{\theta}$ $\longrightarrow$ $\dot{\theta}_1 = \theta_2$ (1)
$\dot{\theta}_2 = -5\sin(\theta_1) - \frac{9}{13}\theta_2$ (2)

$\cancel{\theta_3 = \ddot{\theta}}$

· Si $\dot{\theta}_1 = 0$:

$$\boxed{\dot{\theta}_1 = \theta_2 = 0}$$

Reemplazando en (2) :

$$\dot{\theta}_2 = -5\sin(\theta_1) = 0$$

$$\sin(\theta_1) = 0$$

$$\theta_1 = k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow (x^*, y^*)_1 = \boxed{(k\pi, 0).}$$

Encontremos la estabilidad de los puntos de equilibrio:

$$J(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5\cos\theta_1 & -\frac{9}{13} \end{bmatrix}$$

Si k es par:

$$J(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 \cancel{\cos} & -\frac{9}{13} \end{bmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & -\frac{9}{13} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + \frac{9}{13}\lambda + 5 = 0$$

ahí $\Delta = \left(\frac{9}{13}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = \frac{81}{169} - 20 \quad < 0$

$$= \cancel{i\frac{3299}{169}} = -\frac{3299}{169}$$

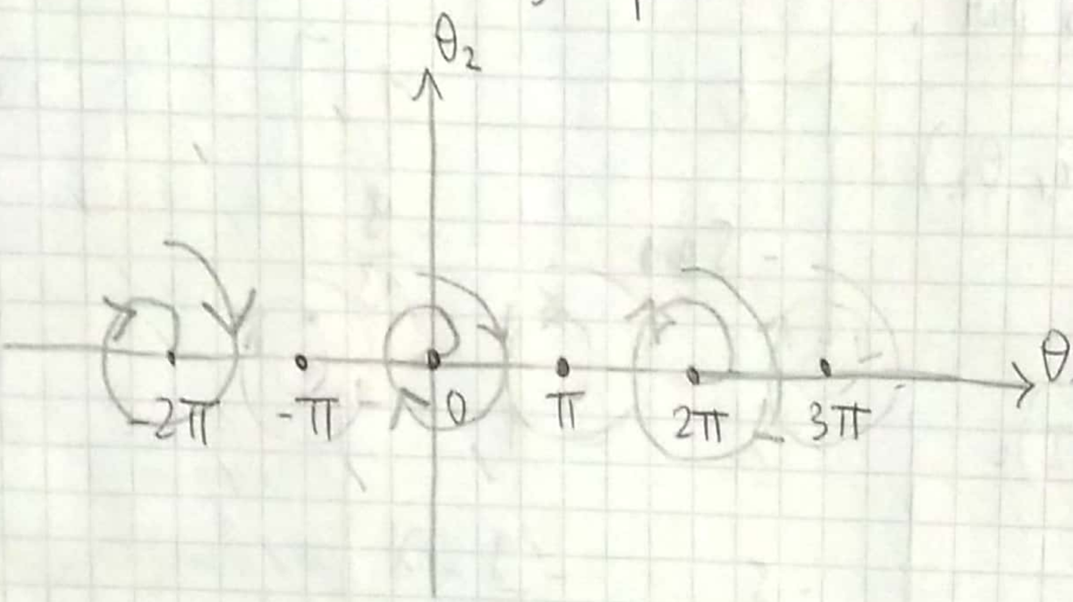
$$\lambda_1 = \frac{-\frac{9}{13} + i\sqrt{\frac{3299}{169}}}{2} = -\frac{9}{26} + \frac{i\sqrt{3299}}{26}$$

$$\boxed{= \frac{-9 + i\sqrt{3299}}{26}}$$

$$\lambda_2 = \frac{-9 - i\sqrt{3299}}{26}$$

Note que $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = -\frac{9}{26} < 0$.

Luego hay un comportamiento oscilatorio que converge a $(k\pi, 0)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ par.



Encontremos los vectores propios: Para λ_1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -\frac{9}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix}$$

$$V_{12} = \lambda_1 V_{11}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-9 + i\sqrt{3299}}{26} \end{bmatrix}$$

Para λ_2: $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-9 - i\sqrt{3299}}{26} \end{bmatrix}$

Si k es impar:

$$J(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -\frac{9}{13} \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 + \frac{9}{13}\lambda - 5 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{9}{13}\right)^2 - 4 \cdot 1 \times (-5) = \frac{81 + 169 \times 20}{169} = \frac{3461}{169} > 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{9}{13} + \frac{\sqrt{3461}}{13}}{2} = \boxed{\frac{-9 + \sqrt{3461}}{26}} > 0$$

$$\lambda_2 = \boxed{\frac{-9 - \sqrt{3461}}{26}} < 0$$

Luego $(k\pi, 0)$ es un punto de silla.

Hallemos los vectores propios:

Con λ_1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -\frac{9}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix}$$

- $\boxed{V_{12} = \lambda_1 V_{11}}$

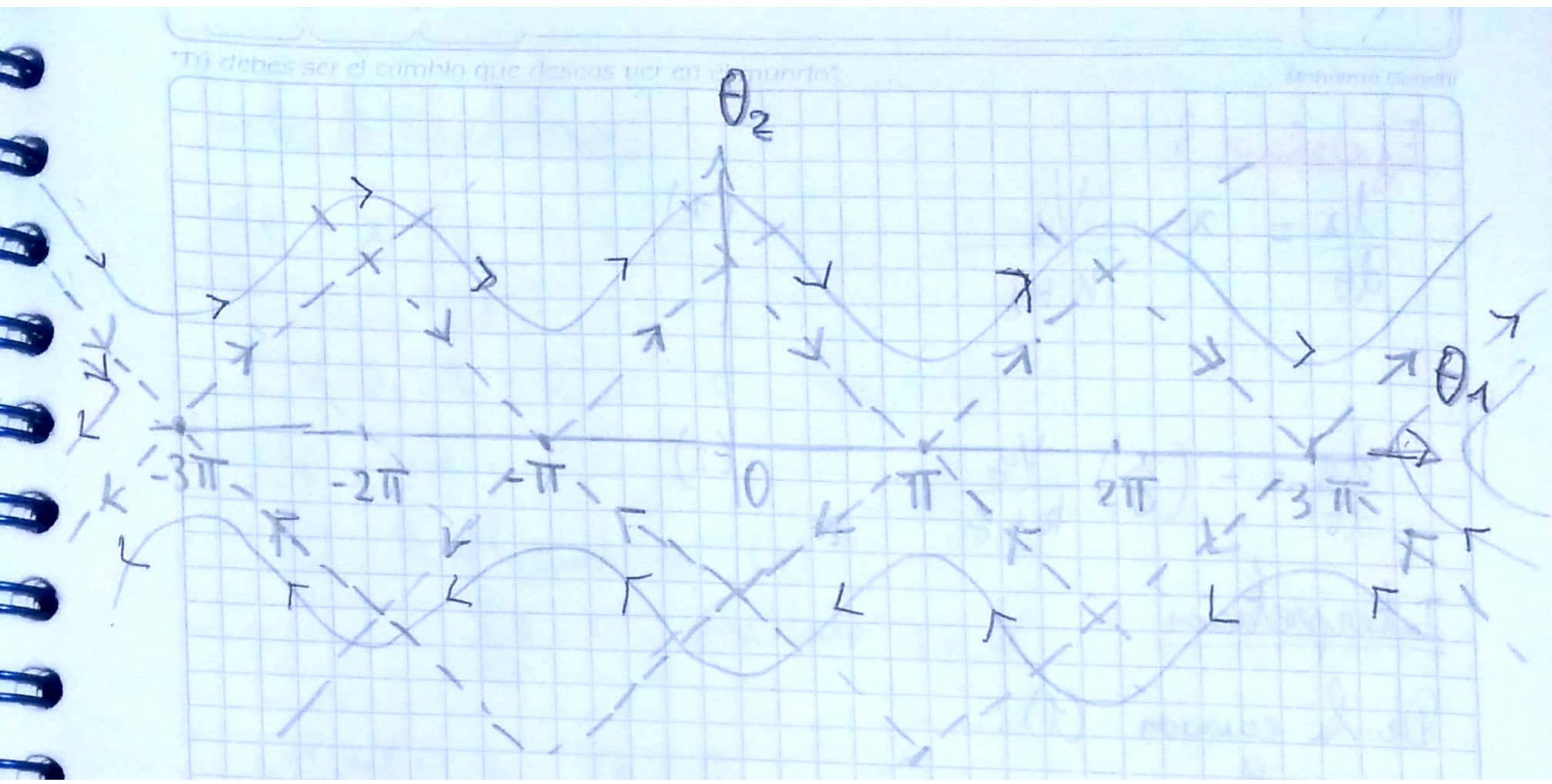
- $5 V_{21} - \frac{9}{13} V_{22} = \lambda_1 V_{22}$

$$\Leftrightarrow \quad V_{21} = \frac{1}{5}\left(\lambda_1 + \frac{9}{13}\right) V_{22}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-9+\sqrt{3461}}{26} \end{bmatrix}$$

Análogamente para V_2:

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-9-\sqrt{3461}}{26} \end{bmatrix}$$


"Tú debes ser el cambio que deseas ver en el mundo"
Mahatma Gandhi
θ_2
θ_1
-3π
-2π
$-\pi$
0
π
2π
3π

Ejercicio 3

$$\frac{dx}{dt} = x \frac{Vy}{K+y} \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{x}{c}\right)\frac{Vy}{k+y} \qquad (2)$$

Interpretación

De la ecuación (1):

- La población x consume el recurso y a una tasa V.
- Si ~~y~~ no hay recurso ($y = 0$) la población x permanece constante
- Si y es muy grande entonces x crece exponencialmente a una tasa $\frac{V}{K}$

De la ecuación (2):

- y es consumido por x lo que hace que decresca ~~es~~ a una tasa $\frac{1}{c}$.

Puntos de equilibrio:

$$\frac{dx}{dt} = x\frac{Vy}{K+y} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ó $\quad Vy = 0.$

. Si $x = 0$:

Remplazando en (2):

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{para todo } y \geq 0$$

Si $x \neq 0$ y $Vy = 0$:

$$y = 0$$

Reemplazando en (1):

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{para todo } x \geq 0$$

$$(x^*, y^*)_1 = (a, 0)$$
$$(x^*, y^*)_2 = (0, b) \quad , a, b \geq 0.$$

Evaluemos la estabilidad:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{Vy}{K+y} & \dfrac{xV(k+y) - xVy}{(k+y)^2} \\[2ex] -\dfrac{Vy}{c(k+y)} & \dfrac{xVy - xV(k+y)}{c(K+y)^2} \end{bmatrix}$$

Escaneado con CamScanner

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{Vy}{k+y} & \dfrac{xVk}{(k+y)^2} \\ -\dfrac{Vy}{c(k+y)} & -\dfrac{xVk}{c(k+y)^2} \end{bmatrix}$$

<u>Para $(a,0)$:</u>

$$J(a,0) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{aV}{k} \\ 0 & -\dfrac{aV\cancel{k}}{ck^{\cancel{2}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{aV}{k} \\ 0 & -\dfrac{aV}{ck} \end{bmatrix}$$

Valores propios:

$$\lambda^2 + \frac{aV}{ck}\lambda = 0$$

$$\lambda\left(\lambda + \frac{aV}{ck}\right) = 0$$

$\lambda_1 = 0$ ó $\lambda_2 = -\frac{aV}{ck}$

Al $\lambda_1 = 0$, por lo tanto no podemos determinar la estabilidad.
Habría que ver términos de mayor orden en la aproximación

Para $(0, b)$

$$J(0,b) = \begin{bmatrix} \frac{Vb}{k+b} & 0 \\ -\frac{Vb}{c(k+b)} & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz es triangular inferior luego sus valores propios son:

$$\lambda_1 = \frac{Vb}{k+b} \quad , \quad \lambda_2 = 0.$$

Como $\lambda_2 = 0$ entonces tampoco podemos determinar estabilidad.

Ejercicio 4

a)

- $\frac{dZ}{dt} = 0{,}1\, Z\left(1 - \frac{Z}{10000}\right)$

- $\frac{dL}{dt} = 0{,}25 L\left(1 - \frac{L}{6000}\right)$

b) Encontremos las soluciones de $Z(t)$ y $L(t)$
Suponiendo $L(0) = L_0$ y $Z(0) = Z_0$:

$$Z(t) = \frac{10\,000}{\left(\frac{10\,000}{Z_0} - 1\right)e^{-0{,}1t} + 1}, \quad Z_0 \neq 0.$$

$$L(t) = \frac{6000}{\left(\frac{6000}{L_0} - 1\right) e^{-0,25t} + 1}, \quad L_0 \neq 0$$

c) Ahora los modelos son:

$$\frac{dz}{dt} = 0,1\, z \left(1 - \frac{z}{10\,000}\right) - \alpha z L \qquad (1)$$

$$\frac{dL}{dt} = 0,25 L \left(1 - \frac{L}{6000}\right) - \beta z L \qquad (2)$$

d) Encontremos los puntos de equilibrio:

$$\frac{dz}{dt} = 0,1\,z - \frac{0,1}{10\,000} z^2 - \alpha z L = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(0,1 - \frac{0,1}{10000} z - \alpha L\right) = 0$$

$$z = 0 \quad \text{ó} \quad 0,1 - \frac{0,1}{10\,000} z - \alpha L = 0$$

- Si $z = 0$:

Reemplazando en (2):

$$\frac{dL}{dt} = 0,25L\left(1 - \frac{L}{6000}\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad L = 0 \quad \text{ó} \quad 1 - \frac{L}{6000} = 0$$

Si $L = 0 \Rightarrow (z^*, L^*)_1 = (0, 0)$

Escaneado con CamScanner

Si $L \neq 0$ y $1 - \dfrac{L}{6000} = 0$:

$\boxed{L = 6000}$

$(z^*, L^*)_2 = \boxed{(0, 6000)}$

Si $z \neq 0$ y $0{,}1 - \dfrac{0{,}1}{10\,000} z - \alpha L = 0$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}1 - \alpha L = \dfrac{z \cdot 10^{-1}}{10^4} = \dfrac{z}{10^5}$

$\Leftrightarrow \quad z = (0{,}1 - \alpha L)\, 10^5$ (*)

Remplazando en (2):

$$\frac{dL}{dt} = 0{,}25 L \left(1 - \frac{L}{6000}\right) - \beta (0{,}1 - \alpha L) . 10^5 L = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}25 L - \frac{L^2}{24 \cdot 10^3} - \beta\, 0{,}1 L . 10^5 + \beta \alpha 10^5 L^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad L^2 \left(\beta \alpha \cdot 10^5 - \frac{1}{24 \cdot 10^3}\right) + L\left(0{,}25 - 10^4 \beta\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad L \left(L\left[\beta \alpha \cdot 10^5 - \frac{1}{24 \cdot 10^3}\right] + 0{,}25 - 10^4 \beta \right) = 0$$

$L = 0$ ~~(...)~~ ó

$$L\left[\beta \alpha \cdot 10^5 - \frac{1}{24 \cdot 10^3}\right] + 0{,}25 - 10^4 \beta = 0$$

· Si $L = 0$:

Remplazando en $(*)$:

$$z = 0{,}1 \cdot 10^5 = \boxed{10\,000}$$

$$\boxed{(z^*, L^*)_3 = (10\,000, 0)}$$

· Si $L \neq 0$ y $L\left[\beta\alpha \cdot 10^5 - \frac{1}{24 \cdot 10^3}\right] + 0{,}25 - 10^4\beta = 0$

$$\Leftrightarrow L = \frac{10^4\beta - 0{,}25}{\beta\alpha \cdot 10^5 - \frac{1}{24 \cdot 10^3}}$$

$$= \frac{10^4\beta - 0{,}25}{\frac{24\beta\alpha \cdot 10^8 - 1}{24 \cdot 10^3}} = \frac{24 \cdot 10^3 (10^4\beta - 0{,}25)}{24\beta\alpha \cdot 10^8 - 1}$$

$$= \boxed{\frac{24\beta \cdot 10^7 - 6 \cdot 10^3}{24\beta\alpha \cdot 10^8 - 1}}$$

Ahora $L \geq 0 \Leftrightarrow 24\beta \cdot 10^7 - 6 \cdot 10^3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 24\beta \cdot 10^7 \geq 6 \cdot 10^3$$

$$\Leftrightarrow \beta \geq \frac{6 \cdot 10^3}{24 \cdot 10^7} = \frac{1}{4 \times 10^4}$$

$$= \boxed{0{,}0004}$$

$$\&: 24\,\beta\alpha \cdot 10^8 - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 24\,\beta\alpha \cdot 10^8 > 1$$

$$\alpha > \frac{1}{24\beta \cdot 10^8}$$

Reemplazando el valor L en (*):

$$Z = \left(0{,}1 - \alpha \cdot \left[\frac{24\,\beta \cdot 10^7 - 6 \cdot 10^3}{24\,\beta\,\alpha \cdot 10^8 - 1}\right]\right) \cdot 10^5$$

$$(Z^*, L^*)_4 = \left(\left(0{,}1 - \alpha \cdot \left[\frac{24\,\beta \cdot 10^7 - 6 \cdot 10^3}{24\,\beta\,\alpha \cdot 10^8 - 1}\right]\right) \cdot 10^5 ,\ \frac{24\,\beta \cdot 10^7 - 6 \cdot 10^3}{24\,\beta\,\alpha \cdot 10^8 - 1}\right)$$

Por lo tanto:

$(Z^*, L^*)_1 = (0,0)$

$(Z^*, L^*)_2 = (0, 6000)$

$(Z^*, L^*)_3 = (10\,000, 0)$

$$(Z^*, L^*)_4 = \left(\left(0{,}1 - \alpha\left[\frac{24\beta \cdot 10^7 - 6 \cdot 10^3}{24\beta\alpha \cdot 10^8 - 1}\right]\right) \cdot 10^5 ,\ \frac{24\beta 10^7 - 6000}{24\beta\alpha \cdot 10^8 - 1} \right)$$

con $\beta \geq 0{,}0004$ y $\alpha > \dfrac{1}{24\beta \cdot 10^8}$

Analicemos la estabilidad de los puntos de equilibrio:

$$\cdot\ \frac{d\dot{z}}{dz} = d\left(0{,}1z - \frac{0{,}1}{10\,000}z^2 - \alpha zL\right) / dz$$

$$= 0{,}1 - \frac{0{,}2}{10\,000}z - \alpha L$$

$$= \boxed{0{,}1 - 2 \cdot 10^{-5} z - \alpha L}$$

$$\cdot\ \frac{d\dot{z}}{dL} = \boxed{-\alpha z}$$

$\cancel{\dfrac{d\dot{L}}{dz} = -\beta}$

$$\frac{d\dot{L}}{dz} = -\beta L$$

$$\cdot\ \frac{d\dot{L}}{dL} = \frac{d}{dL}\left(0,25L - \frac{0,25}{6000}L^2 - \beta z L\right)$$

$$= 0,25 - \frac{0,5L}{6000} - \beta z$$

$$= 0,25 - \frac{L}{12 \cdot 10^3} - \beta z$$

$$J(z,L) = \begin{bmatrix} 0,1 - 2 \cdot 10^{-5} z - \alpha L & -\alpha z \\ -\beta L & 0,25 - \dfrac{L}{12 \cdot 10^3} - \beta z \end{bmatrix}$$

Para $(0,0)$

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

La matriz es triangular: $\lambda_1 = 0,1$, $\lambda_2 = 0,25$.

Como $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ $(0,0)$ es inestable.

Para $(0,6000)$

$$J(0,6000) = \begin{bmatrix} 0,1 - 6000\alpha & 0 \\ -6000\beta & 0,25 - 0,5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,1 - 6000\alpha & 0 \\ -6000\beta & -0,25 \end{bmatrix}$$

Es triangular inferior:

$\lambda_1 = 0,1 - 6000\alpha$ $\qquad \lambda_2 = -0,25 < 0$

$$\lambda_1 < 0 \iff 0,1 - 6000\alpha < 0$$
$$\iff \frac{0,1}{6000} < \alpha$$

Si lo anterior se cumple entonces $(0, 6000)$ es estable.

- Para $(10\,000, 0)$:

$$J(10000, 0) = \begin{bmatrix} 0,1 - 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{4} & -10\,000\alpha \\ 0 & -10000\beta \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior:

$$\rightarrow \lambda_1 = 0,1 - 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{4}$$
$$= 0,1 - 2 \cdot 10^{-1} = 0,1 - 0,2 = -0,1 < 0$$

$\lambda_2 = -10\,000\beta \leq 0$ ya que $\beta \geq 0$.

Así $(10\,000, 0)$ es estable.

Escaneado con CamScanner

Para $(z^*, L^*)_4$:

$$J = \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{6\cdot 10^4 \alpha - 1}{10(24\cdot 10^8 \beta\alpha - 1)}\right) & -\dfrac{10^4 \alpha (6\cdot 10^4 \alpha - 1)}{24\cdot 10^8 \beta\alpha - 1} \\ -\dfrac{\beta(24\cdot 10^7 \beta - 6\cdot 10^3)}{24\cdot 10^8 \beta\alpha - 1} & -\dfrac{(4\cdot 10^4 \beta - 1)}{4(24\cdot 10^8 \beta\alpha - 1)} \end{bmatrix}$$

Valores propios:

$$\lambda_1 = -\left(\frac{2\cdot 10^5 \beta + 12\cdot 10^4 \alpha - \sigma - 7}{40(24\cdot 10^8 \beta\alpha - 1)}\right)$$

$$\lambda_2 = -\left(\frac{2\cdot 10^5 \beta + 12\cdot 10^4 \alpha + \sigma - 7}{40(24\cdot 10^8 \beta\alpha - 1)}\right)$$

con $\sigma = \sqrt{2304\cdot 10^{17} \beta^2 \alpha^2 - 384\cdot 10^{13} \beta^2 \alpha + 4\cdot 10^{10} \beta^2 - 576\cdot 10^{13} \beta \alpha^2 + 48\cdot 10^9 \beta\alpha - 12\cdot 10^5 \beta + 144\cdot 10^8 \alpha^2 + 72\cdot 10^4 \alpha + 9}$

- $\lambda_1 < 0 \iff 2\cdot 10^5 + 12\cdot 10^4 \alpha - \sigma - 7 > 0$

$\iff 12\cdot 10^4 \alpha > \sigma + 7 - 2\cdot 10^5$

$\iff \alpha > \boxed{\dfrac{\sigma + 7 - 2\cdot 10^5}{12\cdot 10^4}}$

& $40(24\cdot 10^8 \beta\alpha - 1) > 0$

$24\cdot 10^8 \beta\alpha > 1$

$\beta\alpha > \boxed{\dfrac{1}{24\cdot 10^8}}$

- $\lambda_2 < 0 \iff \beta\alpha > \boxed{\dfrac{1}{24\cdot 10^8}}$

& $\alpha > \boxed{\dfrac{-\sigma + 7 - 2\cdot 10^5}{12\cdot 10^4}}$

"Tú debes ser el cambio que deseas ver en el mundo" Mahatma Gandhi

Considerando ahora la caza de lobos y zorros el modelo es

- $\frac{dz}{dt} = 0,1z\left(1 - \frac{z}{10000}\right) - \alpha zL - K_2 \qquad (1) \qquad , K_2 > 0$

- $\frac{dL}{dt} = 0,25L\left(1 - \frac{L}{6000}\right) - \beta zL - K_1 \qquad (2) \qquad K_1 > 0$