5-11-2024

Álgebra lineal

R2

Juan Luis Acebal Rico
GRADO DE CIENCIA DE DATOS APLICADA

Índice

Resolución

Primera parte

Hay que determinar si S cumple las tres condiciones necesarias para ser un subespacio vectorial de $CR(x)$

Estas tres condiciones son, contener al vector cero, que si tomas cualquier vector en S y se suman, el resultado también está en S, y si se multiplica por un escalar, este resultado también está en S

- Primero verifico si contiene al vector cero

  El vector cero es la función que siempre devuelve cero, es decir, $f(x) = 0$ para todo x

  Además de que esté en S

  Para eso, debe existir a, b, c tales que:

$$0 = ac + b\sin x + c\ para\ todo\ x \in \mathbb{R}$$

  Viendo la ecuación, es evidente que solamente es posible si:

$$a = 0\,, \qquad b = 0, \qquad c = 0$$

  Puedo decir que la función $f(x) = 0$ está en S

- Ahora hago la suma de funciones de S, y si el resultado

Si tomamos dos funciones en S y las sumamos, el resultado también debe estar en S .

Las funciones son:

$$f_1(x) = a_1x + b_1\sin(x) + c_1$$

$$f_2(x) = a_2x + b_2\sin(x) + c_2$$

Sumo las funciones

$$f_1(x) + f_2(x) = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)\sin(x) + c_1 + c_2$$

¿Y Está esta suma en S?

Sí, porque tiene la misma forma que las funciones en S $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$ y $c = c_1 + c_2$

Verificar la clausura bajo la multiplicación por un escalar

Es decir, si tomamos una función en S y la multiplicamos por un número real (escalar), el resultado también debe estar en S

Tomemos una función en S y un escalar k:

$$f(x) = ax + b\sin(x) + c$$

$$kf(x) = kax + kb\sin(x) + kc$$

Y está esta multiplicación en S?

Sí, porque mantiene la misma forma, con $a' = ka$, $b' = kb$ y $c' = kc$,

.

Conclusion

Dado que S cumple con las tres condiciones necesarias (contiene al vector cero, es cerrado bajo la suma y cerrado bajo la multiplicación por un escalar), S **es un subespacio vectorial de** $CR(x)$.

Segunda parte

Parte A)

. Encontrar α para que $dim(S_\alpha) = 2$

Necesitamos saber que es Generador, que es un vector o polinomio que genera un subespacio, con dependencia lineal, es decir, si se pueden expresar como combinación de los otros (sino serian independientes) y la dimensión, que es el número de vectores linealmente independientes. Es decir,

si los tres polinomios

$$p_1, p_2 \text{ y } p_3$$

son *linealmente independientes*, entonces la dimensión de

$$s_\alpha \text{ sería 3.}$$

Si hay *dependencia lineal* entre ellos, la dimensión disminuiría. En este caso, queremos que

$$\dim(S_\alpha) = 2$$

lo que implica que exactamente uno de los polinomios puede escribirse como combinación de los otros dos.

Formulo la Dependencia Lineal,

queremos encontrar valores de

$$k_1 \ y \ k_2$$

tales que:

$$p_3(x) = k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x)$$

Es decir:

$$2 + \alpha x - x^2 = k_1(1 + 2x + 2x^2) + k_2(-1 + x + x^2)$$

Distribuimos los términos:

$$2 + \alpha x - x^2 = k_1 \cdot 1 + k_1 \cdot\ 2x + k_1 \cdot 2x^2 + k_2 \cdot (-1) + k_2 \cdot x + k_2 \cdot x^2$$

Agrupamos:

$$2 + \alpha x - x^2 = (k_1 - k_2) + (2k_1 + k_2)x + (2k_1 + k_2) \cdot x^2$$

Para que las dos expresiones sean iguales para *todos* los valores de x, los coeficientes de los términos similares deben ser iguales. Por lo tanto:

Término constante (sin x):

$$2 = k_1 - k_2$$

Coeficiente de x

$$\alpha = 2k_1 + k_2$$

Coeficiente de x^2

$$-1 = 2k_1 + k_2$$

Resuelvo el Sistema de Ecuaciones

Observamos que las ecuaciones para el coeficiente de x y de x^2 son similares:

$$\alpha = 2k_1 + k_2$$

$$-1 = 2k_1 + k_2$$

Esto nos indica que:

$$\alpha = -1$$

Conclusión

Para que

$$p_3(x)$$

pueda expresarse como una combinación lineal de

$$p_1(x) \text{ y } p_2(x)$$

se requiere que

$$\boldsymbol{\alpha = -1}$$

Esto hace que los tres polinomios sean linealmente dependientes, reduciendo la dimensión del subespacio a 2.

PARTE B)

Encontrar a, b, c $\boldsymbol{p(x) = a + bx + cx^2}$ **pertenezca a** S_α **con** $S_\alpha = -1$

Hay que encontrar los valores de a, b, c tales que el polinomio $\boldsymbol{p(x) = a + bx + cx^2}$ pueda pertenezca al subespacio S_α generado por:

$$p_1(x)$$

$$p_2(x)$$

$$p_3(x)$$

Cuando

$$\alpha = -1$$

Siendo en ese momento linealmente dependientes y la dimensión de S_α es 2

Ahora escribo los polinomios con

$$\alpha = -1$$

Entonces sustituyendo en $\boldsymbol{p_3}$

$$\boldsymbol{p_1(x) = 1 + 2x + 2x^2}$$

$$\boldsymbol{p_2(x) = -1 + x + x^2}$$

$$\boldsymbol{p_3(x) = 2 - x - x^2}$$

Elijo $\boldsymbol{p_1}$ **y** $\boldsymbol{p_2}$ como base de S_α

Pongo $\boldsymbol{p(x)}$ como combinación lineal de $\boldsymbol{p_1}$ **y** $\boldsymbol{p_2}$

Es decir, dos escalares que multiplicado por p_1 mas p_2 de p(x)

$$\boldsymbol{a + bx + cx^2 = s(1 + 2x + 2x^2) + t(-1 + x + x^2)}$$

Consigo los términos constantes para igualar a a

$$\boldsymbol{s(1) + t(-1) = s - t}$$

Coeficientes x para igualar a b

$$\boldsymbol{s(2x) + t(x) = (2s + t)x}$$

Coeficientes x^2 para igualar a c

$$\boldsymbol{s(2x^2) + t(x^2) = (2s + t)x^2}$$

Por tanto la igualdad queda

$$\boldsymbol{a = s - t}$$

$$\boldsymbol{b = 2s + t}$$

$$\boldsymbol{c = 2s + t}$$

Veo que b=c

Conclusión

El polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ pertenecerá al subespacio S_α **si y sólo si** se cumple que

$$\boldsymbol{b = c}$$