8-12-2024

Álgebra lineal

R3

Juan Luis Acebal Rico

GRADO DE CIENCIA DE DATOS APLICADA

Índice

Ejercicio 1

Primera parte 1)

Queremos saber si la matriz es diagonizable, esto es encontrar los valores propios y comprobar si los vectores propios asociados son suficientes para formar una base.

Para ello sacamos los valores propios, que son 2, 1 y 1

Si multiplicamos el segundo y tercer valor propio por 2 tendríamos 2.

Entonces usemos $\lambda = 1$ para que sea 2 en el espacio propio asociado. Busquemos el subespacio propio cuando es 1

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ k & 1-1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 5 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si buscamos

Si vemos la matriz, es x=0 la primera ecuación, es decir

$$1x + 0y = 0$$

la segunda, es 0=0

y la tercera, seria:

$$5x + (k-2)y = 0$$

Para que sea 0=0 tendría k=2

En ese caso, no tendríamos restricciones sobre y, y los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ tendrían la forma de (0, y, z), y el espacio propio seria de dimensión 2, al igual que su capacidad de multiplicación algebraica.

CONCLUSION

Por tanto para k=2 es diagonizable solamente en k=2

Segunda parte 2)

Para k=2 tenemos:

$$M_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores propios serian como ya he comentado

$$\lambda = 2, \qquad \lambda = 1, \qquad \lambda = 1$$

Que son los valores de la diagonal.

Elijo una base de vectores propios. Se puede ver que

$$\lambda = 2$$

Si a M_2 le restamos 2 veces la matriz de identidad, tendríamos lo siguiente

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 - 2I = \begin{pmatrix} 2-2 & 0-0 & 0-0 \\ 2-0 & 1-2 & 0-0 \\ 5-0 & 0-0 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La primera ecuación da 0=0

La segunda es $y = 2x$

La tercera es $z = 5x$

Puesto que x es cualquier numero, si buscamos un factor que se pueda escribir en base a ello para encontrar y, z en x, si elijo x=1, puedo decir que y=2 y z=5

Ahora podemos decir que el vector propio asociado a $\lambda = 2$ es (1,2,5)

Para a $\lambda = 1$ es (0,y,z) y podemos elegir cualquier vector en esa forma, como por ejemplo

$$v_2 = (0,1,0) \text{ y. } v_3 = (0,0,1)$$

(cualquiera que x valga cero)

Si dibujo la matriz de los vectores propios, P

Es decir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si queremos f_k varias veces, tenemos que

$$D^{\alpha} = \begin{pmatrix} 2^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si queremos P^{-1} busco PX=I

De la primera columna y fila seria x=1

de la segunda y=-2 ; $2 \cdot 1 + y = 0$

Y la tercera z=-5 que viene de $5 \cdot 1 + z = 0$

Para la segunda columna de I y P seria (0,1,0)

Y para la tercera columna de I y P seria (0,0,1)

Tendriamos que la inversa de P seria:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_k^{\alpha} \; cuando \; k = 2 \,, \; f_2^{\alpha} = P \, D^{\alpha} \, P^{-1}$$

Por tanto para la primera fila seria para $\alpha = 3; 2^{\alpha} = 8$ (ya que la segunda y tercera columna de la primera línea se multiplican por 0,es decir 8+0+0, y la primera columna de la primera fila se multiplica por 1, 1 y 2^{α})

Fila 1 de P · Columna 1 deD^{α}: 1 · 2^{α} + 0 · 0 + 0 ·0 = 2^{α}

Fila 1 de P · Columna 2 de D^{α}: 1 · 0 + 0 · 1 + 0 · 0 = 0

Fila 1 de P · Columna 3 de D^{α}: 1 · 0 + 0 · 0 + 0 · 1 = 0

CONCLUSIÓN

Para $\alpha = 3$ la primera fila de f_k^{α} suma 8