24-10-2024

# Álgebra lineal

R1

Juan Luis Acebal Rico
GRADO DE CIENCIA DE DATOS APLICADA

# Índice

# Resolución

## Primera parte

En este, caso, tengo que resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-Esto es una ecuación que involucra matrices, donde tengo dos matrices

-La primera matriz que es 2x2 y la X que representa una matriz que queremos encontrar y que sabemos que es de 2 filas x 3 columnas

-Y por ultimo la matriz de la derecha que es 2x3

Lo primero que vamos a hacer es descomponer la multiplicación de las matrices en ecuaciones mas simples, si suponemos que:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la primera matriz por X:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto da lugar a varias ecuaciones:

Primera fila:

$$1 \cdot x_{11} + \alpha \cdot x_{21} = 0$$

$$1 \cdot x_{12} + \alpha \cdot x_{22} = 1$$

$$1 \cdot x_{13} + \alpha \cdot x_{23} = 0$$

Segunda fila:

$$1 \cdot x_{11} + \beta \cdot x_{21} = 0$$

$$1 \cdot x_{12} + \beta \cdot x_{22} = 0$$

$$1 \cdot x_{13} + \beta \cdot x_{23} = 1$$

Ahora tenemos 6 ecuaciones y 6 incognitas $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$

Para que tenga solucion, las ecuaciones deben ser compatibles entre si

Por ejemplo, estas ecuaciones se parecen

$$1 \cdot x_{11} + \alpha \cdot x_{21} = 0$$

$$1 \cdot x_{11} + \beta \cdot x_{21} = 0$$

Si las restamos:

$$(1 \cdot x_{11} + \alpha \cdot x_{21}) - (1 \cdot x_{11} + \beta \cdot x_{21}) = 0 - 0$$

$$(\alpha - \beta) \cdot x_{21} = 0$$

Opcion a) Si $\alpha \neq \beta$ entonces $x_{21} = 0$

En este caso podemos resolver las ecuaciones sin problemas

Opcion b) Si $\alpha = \beta$ entonces $\alpha - \beta = 0$ debemos probar el resto de ecuaciones, como por ejemplo:

$$x_{12} + \alpha \cdot x_{22} = 1$$

$$x_{12} + \beta \cdot x_{22} = 0$$

Lo que vemos aqui es que se contradice la x en las ecuaciones en opcion B) ya que x=1 y x=0 al mismo tiempo.

Por lo tanto, si $\alpha = \beta$ el sistema no tiene solucion.

### CONCLUSION

Solamente hay solucion si $\alpha \neq \beta$

# Segunda parte

Ahora lo que tenemos que hacer es calcular x donde sea posible, y eso lo podemos hacer restando sistemas:

Resto la cuarta ecuación a la primera para sacar $x_{11}$ y $x_{21}$:

$$(x_{11} + \beta \cdot x_{21}) - (x_{11} + \alpha \cdot x_{21}) = 0$$

$$(\beta - \alpha) \cdot x_{21} = 0$$

Aqui como $\beta$ y $\alpha$ tienen que ser diferentes:

$\boldsymbol{x_{21} = 0}$

Sustituyo en la primera ecuacion $x_{21}$ para sacar $x_{11}$

$$x_{11} + \alpha \cdot 0 = 0$$

$\boldsymbol{x_{11} = 0}$

Ahora la quinta a la segunda:

$$x_{12} + \alpha \cdot x_{22} - (x_{12} + \beta \cdot x_{22}) = 1 - 0$$

$$(\ \alpha - \beta) \cdot x_{22} = 1$$

Despejo

$\boldsymbol{x_{22}} = \frac{\mathbf{1}}{(\ \boldsymbol{\alpha - \beta})}$

Sustituyo $x_{22}$ en la segunda ecuacion para encontrar $x_{12}$

$$x_{12} + \alpha \cdot \frac{1}{(\ \alpha - \beta)} = 1$$

$$x_{12} = 1 - \frac{\alpha}{(\ \alpha - \beta)}$$

Simplifico

$\boldsymbol{x_{12}} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{(\ \boldsymbol{\beta - \alpha})}$

Ahora $x_{13}$ y $x_{23}$

$$(\ x_{13} + \beta \cdot x_{23}) - (x_{13} + \alpha \cdot x_{23}) = 1$$

$$(\ \beta - \alpha) \cdot x_{23} = 1$$

$\boldsymbol{x_{23}} = \frac{\mathbf{-1}}{(\ \boldsymbol{\alpha - \beta})}$

Sustituyo en la tercera ecuación para encontrar $x_{13}$

$$x_{13} + \alpha \cdot \frac{-1}{(\ \alpha - \beta)} = 0$$

$\boldsymbol{x_{13}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{(\ \boldsymbol{\alpha - \beta})}$

Construyo la matriz

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Sustituyo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})} & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})} \\ \mathbf{0} & \dfrac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})} & \dfrac{-\mathbf{1}}{(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})} \end{pmatrix}$$

Verifico el sistema por ejemplo $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{3}$

$\boldsymbol{x_{11}} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{x_{21}} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{x_{12}} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})} = \mathbf{3}$

$\boldsymbol{x_{22}} = \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})} = \mathbf{-1}$

$\boldsymbol{x_{13}} = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})} = -\mathbf{2}$

$\boldsymbol{x_{23}} = \frac{-\mathbf{1}}{(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})} = \boldsymbol{1}$

Entonces:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quedaría multiplicar la primera matriz por X para ver si tenemos la segunda matriz, y nos tendría que dar la matriz de la derecha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1\cdot 0 + 2\cdot 0) & (1\cdot 3 + 2\cdot -1) & (1\cdot -2 + 2\cdot 1) \\ (1\cdot 0 + 3\cdot 0) & (1\cdot 3 + 3\cdot -1) & (1\cdot -2 + 3\cdot 1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (3-2) & (-2+2) \\ 0 & (3-3) & (-2+3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## CONCLUSIÓN

Hay solución única para $\boldsymbol{\alpha = 2\ y\ \beta = 3}$