A. Cañada

E. VECTORIALES DE DIMENSIÓN INFINITA

Septiem. 2022

1. ¿Qué significa que un espacio vectorial tenga dimensión n?
2. Dado un número natural $n \in \mathbb{N}$, ¿existen espacios vectoriales de dimensión n?
3. ¿Qué significa que un espacio vectorial tenga dimensión infinita?
4. ¿Existen espacios vectoriales de dimensión infinita?
5. ¿Cuál es el concepto de base de un e.v.?
6. ¿Qué relación tiene el concepto de base con la dimensión de un e.v.?
7. Dado un espacio vectorial, ¿existe siempre alguna base?
8. Dados 2 e.v. sobre un mismo cuerpo K (en adelante suponemos que $K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$), V y W, decimos que V y W son isomorfos si existe alguna aplicación $T: V \to W$, T biyectiva y lineal.

   Si la dimensión de V(K) es n, es trivial probar que V es isomorfo a K^n. Ahora bien, el tema se puede complicar si hablamos de dimensiones infinitas, ya que "no todos los infinitos son iguales" (éste es un tema muy bonito, del que hablaremos en otra ocasión).

   Por ejemplo, si $\aleph_0 = Car(\mathbb{N})$, $\aleph_1 = Car(\mathbb{R})$, entonces

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

Por cierto, ¿sabes la respuesta a la siguiente cuestión?

(Q) ¿$\exists A : \mathbb{N} \subset A \subset \mathbb{R}$, $\aleph_0 < card(A) < \aleph_1$?

¡Quizás te lleves una buena sorpresa investigando la respuesta!

Ejercicio 1. (A) Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión finita y $L: V \to V$, lineal. Entonces son equivalentes:

a) L es inyectiva.

b) L es sobreyectiva.

c) L es biyectiva.

(B) Sea $L: (C[0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow (C[0,1], \mathbb{R})$,

$$(Lf)(t) = \int_0^t f(s)\,ds, \quad \forall f \in (C[0,1], \mathbb{R}) \quad \forall t \in [0,1]$$

¡Prueba que L es inyectiva, pero no sobreyectiva!

¡Quiero que obtengas tus propias conclusiones!

9. Conectamos con la observación 7.

Se puede demostrar, con la ayuda del LEMA DE ZORN, que todo espacio vectorial admite alguna base. Evidentemente, estamos hablando de BASE ALGEBRAICA o BASE DE HAMEL. Pero la casuística puede sorprender, como podemos ver con los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1. $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, conjunto de los polinomios reales. Es claro que V es un e.v. real con las operaciones hab. y que una base de V es $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$

Así pues, V es un e.v. real, de dimensión infinita, con base numerable.

EJEMPLO 2. $V = C([0,1], \mathbb{R})$, conjunto de funciones continuas, definidas en $[0,1]$ y con valores reales. Es claro que V es un e.v. real con las operaciones habituales, pero demostraremos este curso, con ayuda del TEOREMA DE LA CATEGORÍA DE BAIRE, que cualquier base de V es no numerable (¡qué barbaridad!). Así si $B = \{v_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ es cualquier base de V, Λ es infinito no numerable, o sea que olvidaros de poder escribir $\Lambda = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$, ya que si fuese así, Λ sería numerable.

EJEMPLO 3. $V = \mathbb{R}^\infty$, conjunto de las sucesiones de nº reales, $\mathbb{R}^\infty = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\dots) : \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}$

Es claro que V es un e.v. real con las operaciones usuales. ¿Cómo podemos probar que la dimensión de $\mathbb{R}^\infty$ es infinita? Algunos dirán: encontrando alguna base infinita. ¡Intentadlo, y que haya suerte! Yo prefiero el camino siguiente: el conjunto

$e_1 = (1, 0, 0, \dots\dots)$

$e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$
$e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$
$\vdots$
$e_n = (0, \ldots, 0, \overset{(n}{1}, 0, 0, \ldots), \; n \in \mathbb{N}$

es un conjunto linealmente independiente. Esto prueba que dim V es infinita (¿Por qué?) ¿Es el conjunto anterior una base de V? Evidentemente (¿?) NO.

¡Reflexiona un poco y verás que lo realizado en este ejemplo nos indica un camino para probar que un e.v. tiene dimensión infinita, sin necesidad de encontrar una base. (¿Serías capaz de materializar esta idea?

EJEMPLO 4. $V = \mathbb{R}(\mathbb{Q})$: conjunto de los números reales, como e.v. sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$, con las operaciones usuales.

Si $H = \{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ es cualquier subconjunto de V, linealmente independiente, el conjunto de las combinaciones lineales de H es numerable (ya que $\mathbb{Q}$ es numerable).

Como $\mathbb{R}$ no es numerable (hecho probado por Cantor alrededor de 1.871), obtenemos una contra_

sión: Cualquier base de $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ es no numerable.
Por cierto, atrévete a dar ejemplos de subconjuntos como H (l. indep. e infinitos) en $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$.

10. En e.v., con un producto escalar y dimensión infinita, introduciremos un concepto de base, diferente del de base algebraica o base de Hamel: el concepto de BASE HILBERTIANA (las BASES DE FOURIER son un buen ejemplo de ello).

11. El alumno puede practicar con los conceptos anteriores con los dos grupos de ejemplos que siguen, que tratan con ESPACIOS DE SUCESIONES Y ESPACIOS DE FUNCIONES, todos ellos e.v. de dimensión infinita, que aparecerán a menudo a lo largo del curso.

11.1 $\forall p \in [1, +\infty)$ definimos

$$l_p = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \}$$

Tomamos sucesiones de elementos de K, $K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$

¿Es l_p un espacio vectorial sobre K, respecto de la suma usual de sucesiones y el producto usual de un elemento de K por una sucesión? ¡Quizás la única propiedad de espacio vectorial no evidente sea la que nos dice que la suma de 2 elementos de l_p está en l_p.
Esto no es difícil: $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos

$$|a_n+b_n|^p \le (|a_n|+|b_n|)^p \le (\max\{|a_n|,|b_n|\}+\max\{|a_n|,|b_n|\})^p$$
$$= 2^p(\max\{|a_n|,|b_n|\})^p \le 2^p(|a_n|^p+|b_n|^p)$$

Por tanto, si $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^p<+\infty$ y $\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|^p<+\infty$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n+b_n|^p<+\infty.$$

Ejercicio

NOTA: Si $1\le p<q<+\infty$, entonces $l_1 \subset l_p \subset l_q$

11.2 Se define $l_\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$

(Recordemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada $\iff \sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|\in\mathbb{R}$

(a veces se escribe $\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|<+\infty$)

Aquí $|a_n|$ significa módulo del nº complejo a_n (valor absoluto si a_n es real).

Ejercicio

Trivialmente l_∞ es un e.v. sobre $\mathbb{K}$ y $l_p\subset l_\infty$, $\forall p\ge 1$

(Cuidado con las palabras "trivialmente", "evidentemente" o similares; son muy peligrosas en matemáticas)

11.3. Otros ejemplos de e.v. son

c_{00}: sucesiones "casi nulas" ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_{00} \iff$ todos sus términos, salvo un nº finito, son nulos)

c_0: sucesiones con límite cero

c: sucesiones convergentes

Ejercicio

Trivialmente: $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$, $c_{00} \subset \ell_p \subset c_0 \subset \ell_\infty$

11.4 Si $1 \leq p < \infty$ y $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, definimos

$$L^p(a,b) = \left\{ x : [a,b] \to \mathbb{R} : x \text{ es medible}, \int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty \right\}$$

donde, desde ahora, todas las integrales que aparecen se entenderán en el sentido de Lebesgue.

Recordemos que si, $x, y \in L^p(a,b)$, entonces $x = y \iff x(t) = y(t)$, c.p.d. en $[a,b]$ (en inglés $x(t) = y(t)$, a.e. en $[a,b]$) $\iff \exists A \subset [a,b] : \mu(A) = 0$, $x(t) = y(t)$, $\forall t \in [a,b] \setminus A$ (donde $\mu(A)$ es la medida de Lebesgue de A)

11.5 $L^\infty(a,b)$ se define como

$$L^\infty(a,b) = \{ x : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \text{ medible}, \exists M > 0 : |x(t)| \leq M, \text{ a.e. en } [a,b] \}$$

Recordemos que $\ell_p \subset \ell_\infty$, $\forall p \in [1, +\infty)$

Ejercicio 2. Consulta la bibliografía recomendada (por ejemplo, el libro de Brezis) para establecer la relación entre $L^p(a,b)$, $L^q(a,b)$, $L^\infty(a,b)$, $1 \leq p < q$

11.6 Si $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$C^m[a,b] = \{ x : [a,b] \to \mathbb{R} : x, x', \dots, x^{(m)} \in C[a,b] \}$$

donde $x^{(m)}$ indica la derivada de orden m de x

¡Por cierto, escribe de manera rigurosa $C^1[a,b]$!

Ejercicio

Para terminar, una foto de D. Hilbert y una frase suya muy significativa

"The infinite. No other question has ever moved so profoundly the spirit of man" (1.921)

COMPLEMENTOS

1. Definición de espacio vectorial

V sobre un cuerpo K.

Dos operaciones

$+ : V \times V \to V, \quad (x,y) \to x+y$

$\cdot : K \times V \to V, \quad (\lambda, x) \to \lambda \cdot x$

$\forall x,y,z \in V, \ \forall \alpha, \beta \in K$, se tiene:

1. Asociativa para $+$

$$x+(y+z) = (x+y)+z$$

2. $\exists$ elemento neutro para $+$

$$\exists\, 0 \in V : \quad x+0 = x$$

3. $\exists$ elemento opuesto para $+$

$$\forall x \in V, \ \exists -x \in V : \ x+(-x) = 0$$

4. Commutativa para $+$

$$x+y = y+x$$

5. $1 \cdot x = x$ (1 elem. unidad de K)

6. Pseudoasociativa

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \beta) x$$

⑦ Distributiva de los escalares

$$(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x$$

⑧ Distributiva de los vectores

$$\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y$$

2. CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO

Dados dos conjuntos A, B, se dice que A y B poseen el mismo cardinal (o que son equivalentes en este ambiente) sii $\exists$ alguna aplicación biyectiva $f: A \to B$.

Si A y B son conjuntos finitos, entonces A y B son equivalentes sii tienen el "mismo número de elementos". Así, "por convenio" si A y B son conjuntos infinitos equivalentes, decimos que A y B tienen el "mismo número de elementos".

Se denota $\aleph_0 = \text{Cardinal}(\mathbb{N}) = \text{Car}(\mathbb{N})$, $\aleph_1 = \text{Car}(\mathbb{R})$, etc.

Decimos que $\text{Car}(A) < \text{Car}(B)$ sii existe alguna aplicación inyectiva de A en B, pero ninguna biyectiva.

Para cualquier conjunto A, se tiene

$$\mathrm{Car}(A) < \mathrm{Car}(\mathcal{P}(A))$$

donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de "todos los subconjuntos de A" (conjunto de las partes de A)

LEMA DE ZORN

Sea A un conjunto "parcialmente ordenado" (existe alguna relación de orden en A, $\leq$: reflexiva, antisimétrica, transitiva) t.q. cualquier $B \subset A$, B "totalmente ordenado" ($\forall x, y \in B$, ó $x \leq y$ ó $y \leq x$), admite alguna cota superior ($\exists x_0 \in A / x \leq x_0, \forall x \in A$). Entonces A tiene algún elemento maximal: $\exists y \in A$: $\nexists x \in A$ cumpliendo $y < x$ ($\Leftrightarrow y \leq x, y \neq x$).

Lema de Zorn $\Leftrightarrow$ Axioma de elección

3. Idea fundamental para el Ejercicio 1

$$\dim \ker L + \dim \mathrm{Im}\, L = \dim V$$

EJERCICIO 1. B)

L es "trivialmente lineal"

Si $L(f)=0 \Rightarrow \int_0^t f(s)\,ds = 0, \ \forall t \in [0,1]$

T.F.C. $\Rightarrow f(t)=0, \ \forall t\in[0,1] \Rightarrow \ker L = \{0\}$

$(Lf)(0)=0$, $\cos t \in C[0,1] \setminus \operatorname{Im} L$

Septiembre 2022