LEMA DE BAIRE. APLICACIONES: T. de Banach-Steinhaus, T. Gráfica cerrada, T. Aplicación abierta

Diciembre 2022

MOTIVACIÓN: El Teorema siguiente es bien conocido:

TEOREMA (Convergencia uniforme e integración)
Sea $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas tales que $(f_n) \longrightarrow f$, uniformemente en $[a,b]$. Entonces
f es continua en $[a,b]$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ (1)

Existe la versión similar para series de funciones: Si $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas t.q. la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[a,b]$, entonces:
la función $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ es continua en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \qquad (2)$$

Motivado por este resultado, W. Osgood escribió en 1.897, un artículo titulado:

"Nonuniform convergence and the integration of series term by term", donde intentaba poner una hipótesis más débil que la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ en $[a,b]$, aunque manteniendo la conclusión de "integración término a término".

En el desarrollo de dicho artículo, Osgood probó el siguiente resultado:

"Si (O_n) es una sucesión de abiertos, densos en $\mathbb{R}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n$ es un subconjunto denso en $\mathbb{R}$"

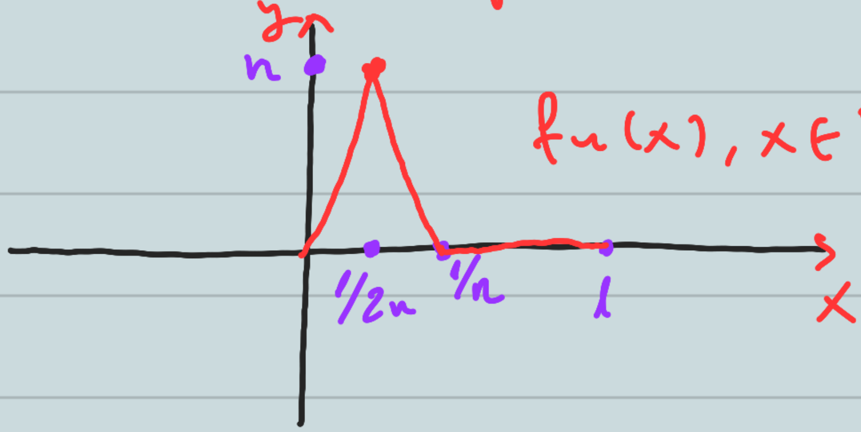
En 1.899, R. Baire probó un resultado idéntico en $\mathbb{R}^m$.

Finalmente, en 1.927, S. Banach y H. Steinhaus, probaron la versión definitiva en cualquier espacio métrico completo.

Este es el tema de esta "nota docente", donde se incluyen, además, diversas aplicaciones.

Ejercicio 1. Muestra que la intersección de un número infinito de abiertos de $\mathbb{R}$, no es necesariamente abierto.

Ejercicio 2. Considera la sucesión de funciones cuyas gráficas están dadas por



Demuestra que $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) \longrightarrow 0$, pero que, sin embargo

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \not\longrightarrow \int_0^1 0\,dx = 0$$

Demostraremos en esta nota docente los dos Teoremas que siguen y, además, que son equivalentes.

TEOREMA 1 (Lema de Baire)

Sea (E,d) un espacio métrico completo y $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados t.q. $\mathrm{int}(M_n) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($\mathrm{int}(M_n) = \mathring{M}_n$, interior topológico de M_n).

Entonces $\operatorname{int}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) = \emptyset$.

TEOREMA 2. Sea (E,d) un espacio métrico completo y $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos, densos en E. Entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n \quad \text{es denso en } E.$$

Ejercicio 3. Demuestra que

Teorema 1 $\Rightarrow$ Teorema 2

Ejercicio 4. Demuestra que

Teorema 2 $\Rightarrow$ Teorema 1

Ejercicio 5. Sea (E,d) un espacio métrico completo y $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados tales que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n = E$.

Entonces $\exists n\in\mathbb{N}: \overset{\circ}{M_n} \neq \emptyset$.

Ejercicio 6. Encuentra el error del siguiente razonamiento:

Sea $X = \{x_1, x_2\}$, $x_1 \neq x_2$ y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la distancia "discreta", es decir:

$d(x_1, x_1) = d(x_2, x_2) = 0$, $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) = 1$.

entonces:

a) (X, d) es completo.

b) $M_1 = \{x_1\}$, $M_2 = \{x_2\}$ son cerrados con interior vacío.

c) $X = M_1 \cup M_2$ no tiene interior vacío.

Ejercicio 7. Prueba que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, entonces la dimensión de X es o finita o infinita NO NUMERABLE.

¿Es necesaria la hipótesis $(X, \|\cdot\|)$ Banach?