Igualdad del Paralelogramo. Espacios prehilbertianos, espacios normados.

Noviembre 2022

Sabemos que si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio prehilbertiano, entonces se verifica la I.P. (igualdad del paralelogramo). Recordemos que $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$ y que

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right), \ \forall u, v \in H \qquad (1)$$

El objeto de esta "nota docente" es probar el "recíproco", conocido como Teorema de Jordan - John von Neumann.

TEOREMA. Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio normado, t.q. se verifica (1). Entonces la norma de H deriva de un producto escalar.

Demostración.

En primer lugar, pensamos que tenemos que "intuir" cuál puede ser el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que da lugar a $\|\cdot\|$ en H.

Para ello, razonamos de la forma siguiente: si en H tuviéramos un producto escalar, del que se obtiene $\|\cdot\|$ de H, entonces

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \qquad (2)$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \qquad (3)$$

Si calculamos (2)-(3), obtenemos:

$$4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \qquad (4)$$

Conclusión: en aquellos espacios normados $(H, \|\cdot\|)$ donde la norma derive de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se cumple (4). Por tanto:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right], \forall x,y \in H \qquad (5)$$

Ahora bien, recordemos que el Teorema de Jordan-John von Neumann que queremos probar, tiene como hipótesis:

$(H, \|\cdot\|)$ es un espacio normado que verifica I P. (1).

¡Todavía no tenemos, por tanto, un producto escalar del que deriva la norma! No obstante, (5) nos marca el camino:

"Con las hipótesis del Teorema de Jordan-Von Neumann definimos

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right] \qquad (6)$$

¡OBJETIVO: Probar que (6) define un producto escalar! En este caso, ya habríamos acabado, puesto que: $\langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{4}\left[4\|x\|^2\right]\right)^{1/2} = (\|x\|^2)^{1/2} = \|x\|.$

¡Adelante con el objetivo! Aquí no tenemos que ser tan pretenciosos, puesto que el Objetivo señalado se prueba con paciencia: "poco a poco", en diferentes etapas.

Hay 2 propiedades del producto escalar que son triviales de probar con la definición (6)

1) $\langle x, x \rangle = \frac{1}{4}\left[\|2x\|^2 + 0\right] = \|x\|^2$. Por tanto,

$\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right] =$

$= \frac{1}{4}\left[\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2\right] = \langle y, x \rangle$

$\forall x, y \in H$

3) ¿$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle y, z \rangle$? (6.1)

Esto es "harina de otro costal". Es pesado, pero también hay algún razonamiento "divertido"

Para probar 3), proponemos las etapas siguientes:

3.1) ¿$\langle x,y\rangle+\langle z,y\rangle = \frac{1}{2}\langle x+z, 2y\rangle$? (7)

En efecto:

$$\langle x,y\rangle+\langle z,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right] + \frac{1}{4}\left[\|z+y\|^2-\|z-y\|^2\right] \quad (8)$$

Además,

$$\frac{1}{2}\langle x+z, 2y\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\left[\|x+z+2y\|^2-\|x+z-2y\|^2\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\|\overbrace{x+y}^{u_1}+\overbrace{z+y}^{u_2}\|^2 - \|\overbrace{x-y}^{u_3}+\overbrace{z-y}^{u_4}\|^2\right] = (\text{I.P.}(1))$$

$$= \frac{1}{8}\left[2\|u_1\|^2+2\|u_2\|^2-\|u_1-u_2\|^2\right] - \frac{1}{8}\left[2\|u_3\|^2+2\|u_4\|^2-\|u_3-u_4\|^2\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[2\|x+y\|^2+2\|z+y\|^2-\cancel{\|x-z\|^2}\right] - \frac{1}{8}\left[2\|x-y\|^2+2\|z-y\|^2-\cancel{\|x-z\|^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right] + \frac{1}{4}\left[\|z+y\|^2-\|z-y\|^2\right], \quad (9)$$

que coincide con (8). Por tanto, tenemos (7).

(3.2) Tomando $z=0$ en (7), tenemos:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\langle x,2y\rangle \quad (10)$$

Por tanto,

$$\langle x+y,z\rangle = \frac{1}{2}\langle x+y,2z\rangle \overset{(7)}{=} \langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle \quad (11)$$

Si $x=y$, $\langle 2x,z\rangle = 2\langle x,z\rangle$ (12)

Claramente, por inducción

$$\langle nx, z\rangle = n\langle x, z\rangle, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x, z \in H \quad (13)$$

Además, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\langle -nx, z\rangle = \langle n(-x), z\rangle = n\langle -x, z\rangle = (\text{I.P.}(1))$$

$$= n\,\frac{1}{4}\left[\|-x+z\|^2 - \|-x-z\|^2\right] = (-n)\left[\frac{1}{4}\left[\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right]\right] =$$

$$= -n\langle x, z\rangle$$

Así pues

$$\langle px, y\rangle = p\langle x, y\rangle, \forall p \in \mathbb{Z}, \forall x, y \in H \quad (14)$$

(3.3) $\displaystyle ¿\langle \frac{p}{q}x, y\rangle = \frac{p}{q}\langle x, y\rangle?$ (15)

En efecto, de (14), tenemos:

$$\forall p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\ p\langle \frac{x}{p}, y\rangle = \langle p\frac{x}{p}, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Luego

$$\langle \frac{x}{p}, y\rangle = \frac{1}{p}\langle x, y\rangle \quad (16)$$

Además, si $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, se tiene

$$\langle \frac{p}{q}x, y\rangle \overset{(16)}{=} \frac{1}{q}\langle px, y\rangle \overset{(14)}{=} \frac{1}{q}p\langle x, y\rangle =$$

$$= \frac{p}{q}\langle x, y\rangle$$

Por tanto, $< s x, y > = s < x, y >, \forall s \in \mathbb{Q}$
$\forall x, y \in H$ (17)

(3.4) ¿ $< r x, y > = r < x, y >, \forall r \in \mathbb{R}, \forall x, y \in H$? (18)

Sí, puesto que dado $r \in \mathbb{R}$, $\exists (r_n)$, sucesión de números racionales t.q. $r_n \to r$

Ahora bien, $< x, y >$, dado en (6) es una función continua en las variables x, y (recordemos que la aplicación $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$, $x \to \|x\|$ es continua).

Por tanto:

$$< r x, y > = < (\lim_{n\to\infty} r_n) x, y > = \lim_{n\to\infty} < r_n x, y > =$$

$$(\lim_{n\to\infty} r_n) < x, y > = r < x, y > \quad \text{c.q.d.}$$

ES CLARO QUE (11) y (18) implican (6.1)

¿Serías capaz de elaborar un resumen de las principales ideas de la demostración? ¡Ánimo!

J. von Neumann (1.903-1.957)

C. Jordan (1838-1922)

Noviembre 2022