Solucionario: Lema de Baire y aplicaciones.

Ejercicio 1. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$

Ejercicio 2. $f_n(0)=0\longrightarrow 0$. Además,
$\forall x\in(0,1]\ \exists n_0(x)\in\mathbb{N}: \frac{1}{n_0}<x \Rightarrow \forall n\geq n_0\ f_n(x)=0\longrightarrow 0$

Finalmente, $\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot n=\frac{1}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$

Ejercicio 3. Nos situamos en las hipótesis del Teorema 2 y, usando el Teorema 1, tenemos que obtener la conclusión del Teorema 2:
Sea (E,d) e. métrico completo y $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.
O_n es abierto y $\overline{O_n}=cl(O_n)=E,\ \forall n\in\mathbb{N}$ (cl: clausura)
Definimos $M_n=E\setminus O_n$ (Conjunto complementario, en E, de O_n). Trivialmente M_n es cerrado. Además $\mathring{M}_n=\emptyset$ (1)

En efecto, si $\exists B(z,r)\subset M_n$, $z\in E$, $r>0$, entonces
$B(z,r)\subset E\setminus O_n \Rightarrow B(z,r)\cap O_n=\emptyset \Rightarrow z\notin\overline{O_n}=E$.

Usando el Teorema 1, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}M_n\right)=\emptyset$. (2)

(2) implica que $\displaystyle cl\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n\right) = E$ (3)

puesto que si existe $\displaystyle z \in E \setminus cl\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\right)$, entonces

$\displaystyle \exists r>0: B(z;r) \cap \left[\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n\right] = \emptyset \Rightarrow B(z;r) \subset E \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n \overset{\text{ley de Morgan}}{=} \bigcup_{n=1}^{+\infty} (E \setminus O_n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n$, que contradice (2).

Ejercicio 4. Nos situamos en las hipótesis del Teorema 1. Usando el Teorema 2, tenemos que obtener la conclusión del Teorema 1. ¡vamos a ello!

Sea (E,d) un e. métrico completo y $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados t.q. $int(M_n) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $O_n = E \setminus M_n$ es trivialmente abierto. Además, O_n es denso en E. En efecto, si algún O_n no fuese denso en E, entonces $\exists y \in E \setminus \overline{O_n} \Rightarrow y \notin \overline{O_n} \Rightarrow \exists B(y;r)$ t.q. $B(y,r) \cap O_n = \emptyset \Rightarrow B(y,r) \subset E \setminus O_n = M_n \Rightarrow \mathring{M}_n = \emptyset$.

Usando la conclusión del Teorema 2, tenemos que

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n \text{ es denso en } E \qquad (4)$$

Pero esto implica que $\mathrm{int}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right)=\emptyset$

puesto que si $\exists B(z,r)\subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty}[E\setminus O_n] =$

(ley de Morgan, otra vez) $= E\setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n \Rightarrow$

$B(z,r)\subset E\setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n \Rightarrow B(z,r)\cap\left[\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n\right]=\emptyset \Rightarrow$

$z\notin \mathrm{cl}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n\right)$, que contradice (4).

Ejercicio 5. Si $\mathring{M}_n=\emptyset$, $\forall n\in\mathbb{N}$, por el Teorema 1, $\mathrm{int}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right)=\emptyset$, pero $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n = E$ y $\mathrm{int}(E)=E$

Ejercicio 6.

a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, $\exists n_0 / \forall n\geq n_0$, x_n es cte, pues de no ser así, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists p,q\geq n$: $x_p\neq x_q$ y $d(x_p,x_q)=1$.

b) $B(x_1;1/2)\subset\{x_1\}\Rightarrow \{x_1\}$ es abierto $\Rightarrow \mathring{\{x_1\}}=\{x_1\}$ (análogamente $\{x_2\}$).

Ejercicio 7. Si la dim X no es finita y $(X,\|\cdot\|)$

es un espacio de Banach, con dimensión infinita numerable, y $B = \{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ es una base de X, entonces

$$M_n = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es cerrado, de interior vacío (¿recuerdas esto?)

Luego, por el Teorema 1,

$$\operatorname{int}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) = \emptyset$$

pero $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n = X$ y $\operatorname{int}(X) = X$.