TOPOLOGÍA DE ESPACIOS NORMADOS

Octubre 2021

Si $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces en $\mathbb{X}$ se puede definir una métrica

$$d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longrightarrow d(x,y) = \|x-y\|.$$

Por tanto cualquier espacio normado es espacio métrico y consecuentemente, espacio topológico.

Eso nos permite hablar de: bolas abiertas, bolas cerradas, subconjuntos abiertos, cerrados, interior, clausura, densidad, sucesiones y series convergentes, sucesiones de Cauchy, espacios completos, etc.

Repetir aquí todos estos conceptos nos "haría perder el tiempo" y el alumno interesado puede consultar la bibliografía recomendada.

En esta nota vamos a concentrarnos en aquellos conceptos y propiedades "propios de la dimensión infinita" y las diferencias fundamentales con los espacios de dimensión finita ($\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$), con los que el alumno debe estar familiarizado.

Atención a las notas que siguen (en realidad son ejercicios)

1. $(\mathbb{X}, \|\cdot\|) \Rightarrow (\mathbb{X}, d)$ métrico $\quad (d(x,y) = \|x-y\|)$

$(\mathbb{X}, d)$ métrico $\not\Rightarrow$ la métrica derive de una norma

Ejemplo $d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, dada por

$d(x,y) = \begin{cases} \ldots \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$

② Si $(X, \|\cdot\|)$ es normado, las aplicaciones:

a) $X \times X \longrightarrow X$, $(x,y) \rightarrow x+y$

b) $K \times X \longrightarrow X$, $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$

c) $X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \|x\|$

son continuas, cuando en $X \times X$ y $K \times X$ se considera la topología producto.

Nota: En $X \times X$ podemos definir, por ejemplo, la norma: $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$

Entonces la bola abierta de centro $(a,b) \in X \times X$ y radio $r > 0$, en $X \times X$, satisface:

$$B_{X \times X}((a,b), r) = B_X(a,r) \times B_X(b,r)$$

Luego la topología de la norma $\|(\cdot,\cdot)\|$ en $X \times X$ es la topología producto en $X \times X$. Análogamente para $K \times X$.

Probemos ya la continuidad de las aplicaciones anteriores:

a) Si $(x_n, y_n) \rightarrow (x,y)$, entonces $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. Como $\|x_n + y_n - (x+y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$ tenemos que $(x_n + y_n) \longrightarrow x + y$

[illegible] $x+y$

b) "Es igual de sencillo". En efecto, si $(\lambda_n, x_n) \to (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X$, entonces $(\lambda_n) \to \lambda$, $(x_n) \to x$. Como $(x_n) \to x$, la sucesión (x_n) está acotada: $\exists M > 0 \,/\, \|x_n\| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$ (¿Habías olvidado esto?)

Luego

$$|\lambda_n x_n - \lambda x| = |\lambda_n x_n - \lambda x_n + \lambda x_n - \lambda x| \leq |\lambda_n - \lambda| \, \|x_n\| +$$

$$+ |\lambda| \, \|x_n - x\| \leq |\lambda_n - \lambda| M + |\lambda| \, \|x_n - x\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

c) La demostración de c) es trivial si usamos la desigualdad

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in X \quad (*)$$

ya que si $x_n \to x$, entonces, por $(*)$, $\|x_n\| \to \|x\|$

¡Atrévete a probar $*$! Es fácil.

③ "Diferencia importante entre la dimensión finita e infinita"

Para que queden claras las "ideas fundamentales" vamos a "comparar" la convergencia de $\mathbb{R}^2$ con la de l_∞ (pero lo mismo ocurriría con $\mathbb{R}^p$ y l_q, $1 \leq q \leq +\infty$)

Sea (x^n) una sucesión de $\mathbb{R}^2$, $x^n = (x_1^n, x_2^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Entonces, si en $\mathbb{R}^2$ consideramos la norma $\|y\|_{\mathbb{R}^2} = \|(y_1, y_2)\|_{\mathbb{R}^2} = \max\{|y_1|, |y_2|\}$

Se tiene:

$$x^n \xrightarrow{\mathbb{R}^2} x \iff \begin{cases} x_1^n \xrightarrow{n\to\infty} x_1 \\ x_2^n \xrightarrow{n\to\infty} x_2 \end{cases}$$

Estos es fácil de probar, pues:

$$(x^n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} x \iff \|(x^n - x)\|_{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\max\{|x_1^n - x_1|, |x_2^n - x_2|\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1^n \xrightarrow{n\to\infty} x, \quad x_2^n \xrightarrow{n\to\infty} x_2$$

Atención: - En $\mathbb{R}^2$ podemos considerar cualquier otra norma (¡si no recuerdas la causa, debes empezar a repasar algunos apuntes!)

- Podemos tratar con $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$ y el resultado es el mismo (¿Porqué?)

Si (f^n) es una sucesión en $\mathbb{R}^p$:

$$f^1 = (f_1^1, f_2^1, \dots, f_p^1)$$

$$f^2 = (f_1^2, f_2^2, \dots, f_p^2)$$

- - - - - - - - - - - - -

$$f^n = (f_1^n, f_2^n, \dots, f_p^n)$$

Entonces

$(f^n) \;\; \mathbb{R}^p$

$$(f^n) \xrightarrow{\mathbb{R}} f = (f_1, \dots, f_p)$$

$$\Updownarrow$$

$$(f_i^n) \xrightarrow{n\to\infty} f_i, \quad 1 \leq i \leq p$$

En resumen: "la convergencia en $\mathbb{R}^p$ es equivalente a la convergencia por columnas".

Ahora observa el ejemplo siguiente en l_∞:

$$f^1 = (0, 1, 1, 1, \dots)$$
$$f^2 = (0, 0, 1, 1, 1, \dots)$$
$$f^3 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$$
$$\dots\dots\dots$$
$$f^n = (0, \dots \overset{(n}{,} 0, 1, 1, 1, \dots)$$
$$\dots\dots\dots$$

¿Evidentemente?, la sucesión (f^n) es una sucesión de elementos de l_∞ que, por columnas converge al elemento

$$f = (0, 0, 0, \dots) \in l_\infty$$

pero $(f^n) \overset{l^\infty}{\not\longrightarrow} f$, pues $\|f^n\|_\infty = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Puede probarse ¿fácilmente? que la convergencia en l_p implica la convergencia por columnas, pero que el recíproco no es cierto.

"Es posible que la causa de ello sea la dimensión infinita" ¿Estás de acuerdo? (Si no es así, repasa lo anterior hasta que te convenzas).

4 Espacios de Banach. Ejemplos importantes.

Un grupo especial de espacios normados lo constituyen los "espacios normados completos" (aquellos donde cualquier sucesión de Cauchy es convergente a un elemento del espacio normado considerado). El ejemplo más elemental es $\mathbb{R}^n$ (con cualquier norma), $\mathbb{C}^n$, etc. (en general, cualquier espacio normado de dimensión finita). En dimensión infinita, quizás el tema sea más divertido, ya que nos encontraremos con espacios normados completos (llamados, en adelante, ESPACIOS DE BANACH) y otros que no lo son, como muestran los ejemplos que siguen.

4.1 l_p, $1 \leq p \leq +\infty$, con la norma habitual, es un espacio de Banach.

Merece la pena hacer la demostración, puesto que se repasan conceptos importantes sobre series convergentes. ¡Vamos a ello!

Por simplicidad, vamos a demostrar que $(l_2, \|\cdot\|_2)$ es completo (ideas casi idénticas pueden usarse en los otros casos). Recordemos

$$l_2 = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \},$$

$$\|(x_n)\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall (x_n) \in l_2.$$

Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en l_2

Objetivo: Demostrar que $\exists\, x \in l_2 \,/\, x^k \xrightarrow{k\to+\infty} x$ en l_2

En efecto, pensemos que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una "sucesión de sucesiones":

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, \ldots)$$

$$x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2, \ldots) \qquad (0)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k, \ldots)$$

Como (x^k) es de Cauchy en l_2:

Como (x^k) es de Cauchy en ℓ_2:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \begin{array}{l}\forall k\geq k_0(\varepsilon)\\ \forall p\in\mathbb{N}\end{array}, \|x^{k+p}-x^k\|_2\leq\varepsilon \qquad (1)$$

Como $\|x^{k+p}-x^k\|_2=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n^{k+p}-x_n^k|^2\right)^{1/2}\leq\varepsilon$

esto implica:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \left.\begin{array}{l}\forall k\geq k_0(\varepsilon)\\ \forall p\in\mathbb{N}\\ \forall n\in\mathbb{N}\end{array}\right\},\ |x_n^{k+p}-x_n^k|\leq\varepsilon \qquad (2)$$

(pensemos que $\forall n\in\mathbb{N}$, fijo, $|x_n^{k+p}-x_n^k|\leq\|x^{k+p}-x^k\|$)

Importante: Observemos que la desigualdad en (2) es "uniforme" respecto de $p\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}$. ¡Esta es la clave! En efecto:

a) Fijado $n\in\mathbb{N}$, o lo que es lo mismo, fijada una columna, (2) implica que la sucesión $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de números reales (o complejos). Es decir, cada columna de la expresión (0) es una sucesión de Cauchy (supongamos real, aunque es similar si es compleja). La conclusión es que $\forall n\in\mathbb{N}$, fijo, $x_n^k\xrightarrow{k\to\infty}x_n$

Sea $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Creo que, a estas alturas, "todo el mundo se imagina lo que va a suceder":

$x\in\ell_2$, $\quad x^k\xrightarrow{k\to\infty}x$, en ℓ_2. (3)

Ahora, la clave está en volver a (1) (¡caprichos del destino!):

$\forall \varepsilon>0 \ \exists k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall k\geq k_0(\varepsilon), \forall p\in\mathbb{N}$, tenemos

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n^{k+p}-x_n^k|^2\leq\varepsilon^2, \quad \forall N\in\mathbb{N}$$

$$\Big\Downarrow \ p\longrightarrow+\infty,\ k\geq k_0(\varepsilon) \text{ fijo } (\varepsilon \text{ fijo, por supuesto})$$

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n-x_n^k|^2\leq\varepsilon^2, \quad \forall N\in\mathbb{N}, \ \forall k\geq k_0(\varepsilon)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n-x_n^k|^2\leq\varepsilon^2 \quad \forall k\geq k_0(\varepsilon) \qquad (4)$$

Pero (4) $\Rightarrow x-x^k\in\ell_2, \ \forall k\geq k_0(\varepsilon)$

Además $x=x^k+(x-x^k)\Rightarrow x\in\ell_2$

y "si leemos de nuevo (4)":

$\forall\varepsilon>0, \exists k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall k\geq k_0(\varepsilon)\Rightarrow \|x-x^k\|_2\leq\varepsilon$

"Aquí acaba la demostración de que $(\ell_2,\|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach". Como veis, consiste en usar "hábilmente" la expresión (1) y los "pasos al límite" (Esto es la esencia del ANÁLISIS MATEMÁTICO).

Veamos ahora un ejemplo negativo:

4.2. Sea $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ el espacio normado de funciones polinomiales (con coeficientes reales), restringidas a $[0,1]$, con la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad \forall f \in \mathcal{P}_{[0,1]}$$

Demostremos que NO ES UN ESPACIO DE BANACH

La idea básica es un resultado de cursos anteriores que debemos recordar:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad (5)$$

de manera uniforme en $[0,1]$.

Ya está: de (5) se deduce que la sucesión de polinomios $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

converge, en $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ a la función exponencial. Luego $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ que no converge en $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$.

¿Necesitas alguna aclaración adicional?
Lee y medita, todas las veces que haga falta, lo que hemos afirmado en este apartado (4.2), pues el contenido es "análisis puro".

5. Otra diferencia importante entre los espacios normados de dimensión finita e infinita.

Si $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, cualquier subespacio vectorial F, de $\mathfrak{X}$, de dimensión finita es cerrado. Esto "es sencillo" y, básicamente es un "juego de palabras llevado a cabo convenientemente. En efecto, sea $B = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ una base de F. Entonces $\forall f \in \overline{F}$ (clausura o cierre de F), tenemos que $\exists\ (f^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F \ / \ f^k \xrightarrow[\|\cdot\|]{k\to\infty} f$

Si escribimos

$$\left.\begin{array}{l} f^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \dots + a^1_m x^m \\ f^2 = a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \dots + a^2_m x^m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^k = a^k_1 x^1 + a^k_2 x^2 + \dots + a^k_m x^m \end{array}\right. \quad (6)$$

entonces $\exists\ a \in \mathbb{R}^m$ t.q. $\Big|\ (a^k_1) \xrightarrow{k\to\infty} a^1$

$$\begin{cases} (a_2^k) \xrightarrow{k\to\infty} a^2 \\ \cdots \\ a_m^k \xrightarrow{k\to\infty} a^m \end{cases}$$

(como sucesiones de números reales). Si no te enteras bien de esto, necesitas recordar algunas cosas: En F tenemos definida la norma $\|\cdot\|$, inducida por $\mathbb{X}$. Pero como F tiene dimensión finita, todas las normas definidas en F son equivalentes y si usamos, por ejemplo, $\|\cdot\|_\infty$ en F, es decir

$$\|g\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |\lambda_i| \,, \quad \forall g = \lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_m x^m \in F,$$

sabemos que la convergencia de la sucesión (6) equivale a la convergencia por columnas.
Conclusión: $f^k \xrightarrow{\|\cdot\|} a^1x^1 + \cdots + a^m x^m \in F$

Así $\overline{F} = F$ y F es cerrado.

En dimensión infinita, la situación puede cambiar drásticamente. Para ello, "una imagen, o un ejemplo, vale más que mil palabras"

c_{00} es denso en l_2 (es decir $\overline{c_{00}} = l_2$, en el espacio $(l_2, \|\cdot\|_2)$ (7)

Observemos que c_{00} (conjunto de sucesiones "casi nulas") es un subespacio vectorial de l_2 (no cerrado, según (7)).

¡Probemos (7)! Claramente, $\overline{c_{00}} \subset l_2$.

Veamos el recíproco: sea $x \in l_2$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2$ es convergente, la serie de restos tiende a cero (¿habías olvidado este hecho fundamental?). Es decir, la sucesión

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2, \ \sum_{n=2}^{+\infty} |x_n|^2, \ \dots, \ \sum_{n=k}^{+\infty} |x_n|^2, \ \dots$$

tiende a cero cuando $k \to +\infty$ (¿alguien se atreve a decir ahora que la teoría no es importante en Matemáticas?)

Por tanto:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0$, se tiene $\sum_{n=k}^{+\infty} |x_n|^2 \leq \varepsilon$

Consideremos el elemento de c_{00} dado por

$$y^{k_0} = (x_1, x_2, \dots, x_{k_0-1}, 0, 0, \dots)$$

Entonces $\quad \|x - y^{k_0}\|_2 = \left(\sum_{n=k_0}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon^{1/2}.$

"A estas alturas, espero que nadie tenga un problema porque aparezca $\varepsilon^{1/2}$ en lugar de ε"

El razonamiento anterior prueba que $\overline{c_{00}} = l_2$

6. Noción de separabilidad (aquí es cuestión de gustos: existen analogías y diferencias con la dimensión finita).

Un espacio normado $(\underline{X}, \|\cdot\|)$ se dice separable si existe algún subconjunto $D \subset \underline{X}$, D denso y numerable.

Por ejemplo $\mathbb{R}^n$ es separable, pues podríamos tomar $D = \mathbb{Q}^n$ ($\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales).

Una idea parecida puede usarse para ver que l_p, $1 \leq p < +\infty$ es separable, pero l_∞ no lo es. En efecto, demostremos que l_1 es separable (las mismas ideas se usan para l_p, $1 < p < +\infty$). Sea $D \subset l_1$, D: conjunto de sucesiones racionales casi nulas (D es unión numerable de conjuntos numerables y por tanto D es numerable). Por otra parte, $\forall x \in l_1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_0(\varepsilon)$: $K \geq K_0(\varepsilon)$, se tiene $\sum^{+\infty} |x_n| < \varepsilon$

(también, $\mathbb{Q}^{k_0}$ es denso en $\mathbb{R}^{k_0}$)

Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, $\exists\, q_1, \dots, q_{k_0} \in \mathbb{Q}$: $\sum_{n=1}^{k_0} |x_n - q_n| < \varepsilon$. Por tanto si $y = (q_1, \dots, q_{k_0}, 0, 0, \dots)$ tenemos $\|x-y\|_1 < 2\varepsilon$. Esto prueba que $\overline{D} = l_1$

En cambio, l_∞ no es separable.

(Te has preguntado por qué no se puede hacer una demostración similar a la anterior)

Para ver que l_∞ no es separable, podemos proceder como sigue (reducción al absurdo): sea $C = \{x^p, p \in \mathbb{N}\} \subset l_\infty$, denso. Sea $B \subset l_\infty$,

$$B = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} : y_n \in \{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos que si $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son elementos distintos de B, entonces $\|y-z\|_\infty = 1$. Además, como C es denso en l_∞, $\forall y \in B$ $\exists\, x^{p(y)} \in C : \|y - x^{p(y)}\|_\infty < \frac{1}{4}$

Claramente $B_{l_\infty}(y, \frac{1}{3}) \cap B_{l_\infty}(z, \frac{1}{3}) = \emptyset$, $\forall y, z \in B$, $y \neq z$ (pues $\|y-z\|_\infty = 1$)

Tenemos que la aplicación $B \to \mathbb{N}$
$y \to p(y)$

es inyectiva. Luego B es numerable. Pero sabemos que B no es numerable (¿se te ha olvidado el desarrollo decimal, en base 2, de los no reales?).

Merece la pena que reflexiones sobre el siguiente resultado abstracto y general (muchas veces los resultados generales son más claros de enunciado que los particulares):

Si $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ es un espacio normado t.q. $\exists B \subset \mathfrak{X}$, B no numerable y satisfaciendo la propiedad siguiente:

$$\exists \alpha > 0 : \quad \|x-y\| \geq \alpha \quad , \forall x, y \in B, \ x \neq y$$

entonces $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ no es separable.

7. COMPACIDAD. Esto es "harina de otro costal" en los espacios normados de dimensión infinita, como iremos viendo a lo largo del curso. Pero, para abrir boca, veamos algo.

7.1. Sea $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $B \subset \mathfrak{X}$. Como $\mathfrak{X}$ es también un espacio métrico (la métrica derivada de la norma) y por tanto, un espacio topológico, tiene sentido hablar de compacidad: B es compacto cuando para cualquier recubrimiento de K, por abiertos, es posible extraer un subrecubrimiento finito. Esta definición de compacidad es poco útil en la práctica. Es posible que recordéis los hechos siguientes:

A) Si dim X es finita, B es compacto si y sólo si B es cerrado y acotado.

B) En espacios métricos (y por tanto en espacios normados) la compacidad es equivalente a la "compacidad secuencial" (o "compacidad por sucesiones"):

$$B \text{ es compacto} \Longleftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B, \ \exists (x_{n_k}) \longrightarrow x \in B \qquad (8)$$

Por tanto, como el ambiente en el que nos vamos a mover este curso, es el "ambiente de espacios normados", adoptaremos la propiedad anterior (8) como "definición de conjunto compacto". Comenzamos con algo sencillo.

7.2. Ejercicio. Si $(X, \|\cdot\|)$ es normado y $B \subset X$ es compacto, demuestra que B es cerrado y acotado.

En efecto, $\forall x \in \bar{B}$ (clausura o cierre de B), $\exists (x_n) \subset B$: $(x_n) \longrightarrow x$. Como B es compacto, $\exists (x_{n_k}) \to y \in B$. Ahora bien (x_{n_k}) es una subsucesión de

(x_n), que es convergente a x. Luego $y=x$, lo que implica $x \in B$. Por tanto $\overline{B} = B$, y B es cerrado.

Por otra parte, si B no fuese acotado $\exists (x_n) \subset B$: $\|x_n\| > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (¿Por qué?). Esto implica que (x_n) no puede tener ninguna subsucesión convergente, pues cualquier sucesión convergente es acotada y (x_{n_k}) no lo es (¿Os suena esto a "juego de palabras").

El ejercicio que sigue muestra otra "diferencia significativa" entre la dimensión finita e infinita.

7.3. Demuestra que la bola cerrada unidad de ℓ^2 no es compacta.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de "vectores canónicos de ℓ^2". Entonces $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$, $\forall n \neq m$. Esto implica que cualquier sucesión parcial de (x_n) no es de Cauchy. Así (x_n) no puede tener ninguna sucesión parcial convergente.

7.4 Otro ejercicio sobre "dimensión finita versus dimensión infinita".

Demuestra que la bola cerrada unidad de $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ no es compacta.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n(t) = t^n$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si (x_{n_k}) es alguna subsucesión convergente a $x \in C[0,1]$, donde $x_{n_k}(t) = t^{n_k}$. Como $n_k \to +\infty$, (x_{n_k})

entonces $x_{n_k}(t) = \ldots$ Como $n_k \to +\infty$, (x_{n_k})

converge puntualmente a la función

$$y : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \to \begin{cases} 0, & t \in [0,1) \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

Como y debe ser igual a x (por unicidad del límite), esto no es posible, pues $y \notin C[0,1]$.

(¿Habías olvidado que convergencia uniforme implica convergencia puntual?).

COMPLEMENTOS

C.1. $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es separable.

R. M. Frechet (1.878-1.973)

F. Hausdorff (1.868-1.942)

Septiembre 2022