TEOREMA DE HAHN-BANACH

Noviem. 2021

Motivación. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si $\dim E$ es finita, sabemos que cualquier aplicación lineal $L: E \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. Por ejemplo, si $\dim(E) = n$, ¿podrías escribir la expresión general de cualquier $L: E \to \mathbb{R}$, lineal?

Si $\dim(E)$ es infinita, sabemos que existen aplicaciones lineales no continuas (¿te acuerdas?) y aplicaciones lineales continuas (por ejemplo, la que es idénticamente cero). Pero, ¿podrías dar algún ejemplo de aplicación lineal CONTINUA no trivial? En espacios concretos, $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_0)$, l_p $(1 \leq p \leq +\infty)$, $L^p(a,b)$, etc. parece fácil, pero si sólo sabemos que $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión infinita, sin conocer la naturaleza de sus elementos (no sabemos si los elementos son sucesiones, funciones...) ¿cómo podemos dar ejemplos de aplicaciones lineales CONTINUAS que no sean idénticamente cero?

...idamente cero.

El Teorema que enunciamos y demostramos a continuación ¡viene en nuestra ayuda!

TEOREMA (H. HAHN, 1.927; S. BANACH, 1.929)

Sea $E(\mathbb{R})$ un espacio vectorial y $p: E \to \mathbb{R}$ verificando

$$(1)\begin{cases} i) \ p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \forall \lambda > 0, \forall x \in E \\ ii) \ p(x+y) \le p(x) + p(y), \ \forall x, y \in E \end{cases}$$

Sea G un subespacio vectorial de E y $g: G \to \mathbb{R}$ lineal, t.q.

$$g(x) \le p(x), \ \forall x \in G \qquad (2)$$

ENTONCES: $\exists f: E \to \mathbb{R}$ lineal t.q.

$$\left.\begin{array}{l} a) \ f|_G = g \ \ (f(x) = g(x), \ \forall x \in G) \\ b) \ f(x) \le p(x), \ \forall x \in E. \end{array}\right\} (3)$$

Demostración. La idea clave es aplicar el LEMA DE ZORN a un conjunto P, ordenado e inductivo, conveniente. En nuestro caso:

$P = \{ h: D(h) \to \mathbb{R}$ t.q. $D(h)$ es un sub. vect. de E t.q. $D(h) \supset G$, h lineal, $h|_G = g$ y, además, $h(x) \le p(x)$, $\forall x \in D(h) \}$ (4)

$h(x) = p(x),\ \forall x \in D(h) \}$

(Los elementos de P son aplic. lineales con ciertas condiciones)

Observemos que $P \neq \emptyset$ pues $g \in P$.

P se puede ordenar de la forma siguiente: si $h_1, h_2 \in P$, diremos que

$$h_1 \leq h_2 \iff \begin{cases} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2\big|_{D(h_1)} = h_1 \end{cases}$$

Es "trivial" comprobar que la relación así definida, $\leq$, verifica las propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

$(P, \leq)$ es, además, INDUCTIVO: Si $Q \subset P$ está totalmente ordenado ($\forall x, y \in Q$, o bien $x \leq y$, o bien $y \leq x$), entonces Q tiene COTA SUPERIOR ($\exists\, q_0 \in P : q \leq q_0,\ \forall q \in Q$).

Veamos que $(P, \leq)$ es inductivo. Para ello, si

$$Q = \{h_i,\ i \in I\} \subset P$$

es totalmente ordenado, entonces: el elemento de P, g_0, definido como

$g_0 : D(g_0) = \bigcup D(h_i) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g_0(x) =$

$i \in I$

$= h_i(x)$, donde $i \in I$ verifica $x \in D(h_i)$, es UNA COTA SUPERIOR DE $\mathcal{Q}$.

Pensemos que la única dificultad? para probar esto es que $x \in D(h_i) \cap D(h_j)$ para algún $i \neq j$, $i, j \in I$! Pero esto no es problema si tenemos en cuenta que $\mathcal{Q}$ está totalmente ordenado y por tanto, o bien $h_i \leq h_j$, o bien $h_j \leq h_i$. Si, por ejemplo, $h_i \leq h_j$ entonces $D(h_i) \subset D(h_j)$ y $h_j|_{D(h_i)} = h_i$.

En consecuencia $h_i(x) = h_j(x)$. Si $h_j \leq h_i$, el razonamiento es similar.

RESUMEN DE LA DEMOSTRACIÓN HASTA AHORA: El conjunto P definido en (4) es un CONJUNTO ORDENADO INDUCTIVO. El famoso LEMA DE ZORN afirma que P tiene algún ELEMENTO MAXIMAL, al que llamamos f. Este f cumple todas las condiciones (3) del Teorema. En efecto, que f sea maximal significa:

$$\nexists\, h \in P : f < h \quad (f \leq h \text{ y } f \neq h) \qquad (5)$$

¡Terminemos la demostración! Para ello, pendemos que si $D(f) = E$, es decir $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces f cumple las propiedades (3).

Ahora bien NO ES POSIBLE QUE

$$D(f) \subsetneq E \qquad (6)$$

En efecto, si (6) se cumpliese, entonces es posible "construir" un elemento $h \in P$ t.q.

$$f < h$$

lo que contradice (5). ¡Definamos h! Para ello, si (6) se cumple, entonces

$$\exists x_0 \in E \setminus D(f)$$

Sea $D(h) = D(f) + \langle x_0 \rangle = \{x + t x_0, x \in D(f), t \in \mathbb{R}\}$,

$h: D(h) \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x + t x_0) = f(x) + t\alpha$

donde α debe elegirse para que

$$f(x) + t\alpha = h(x + t x_0) \leq p(x + t x_0), \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R} \qquad (7)$$

En este caso, $f < h$ (que contradice el hecho de que f es maximal).

Ahora bien, $f(x) + t\alpha \leq p(x + t x_0)$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \leq \frac{p(x + t x_0) - f(x)}{t}, \forall t > 0, \forall x \in D(f) \\ &\alpha \geq p(x + t x_0) - f(x) \end{aligned}\right\} (8)$$

$$\alpha \geq \frac{p(x+tx_0) - f(x)}{t}, \forall t<0, \forall x \in D(f)$$

(8) se cumple si y sólo si:

$$\frac{p(x+tx_0)-f(x)}{t} \leq \frac{p(y+t'x_0)-f(y)}{t'}, \quad \forall x,y \in D(f), \ \forall t<0, \forall t'>0 \qquad (9)$$

$$\Updownarrow$$

$$f\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) \leq \frac{p(y+t'x_0)}{t'} - \frac{p(x+tx_0)}{t} \qquad (10)$$

Ahora bien, como $x, y \in D(f)$, $\frac{y}{t'} - \frac{x}{t} \in D(f)$.

Por tanto

$$f\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) \leq p\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) = p\left(\frac{y}{t'} + x_0 - x_0 - \frac{x}{t}\right) =$$

$$= p\left[\frac{1}{t'}(y+t'x_0) + \frac{1}{-t}(x+tx_0)\right] \leq \qquad (11)$$

$$\leq p\left[\frac{1}{t'}(y+t'x_0)\right] + p\left[\frac{-1}{t}(x+tx_0)\right] =$$

$$= \frac{p(y+t'x_0)}{t'} + \frac{p(x+tx_0)}{-t}.$$

Mirando el primero y el último término de la anterior cadena (11) de desigualdades, obtenemos (10).

Creo que, como en alguna ocasión anterior, deberíamos acabar con ¡Uf!. ¡Misión cumplida! Lo que sí nos merecemos es un RESUMEN DE LA DEMOSTRACIÓN, que, por cierto, es muy breve:

1. Definición del conjunto P.
2. P es un conjunto novacío, ordenado e inductivo.
3. Por el Lema de Zorn, P tiene algún elemento maximal.
4. Dicho elemento maximal es el funcional buscado.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE (Y, ADEMÁS, CURIOSA): El Teorema de Hahn-Banach se enuncia y prueba en ambiente de ESPACIOS VECTORIALES (Si repasas el enunciado y demostración no verás la noción de espacio normado por ningún lado). Sin embargo, sus principales [illegible]). Sin embargo, sus potenciales aplicaciones se tienen en espacios normados. Buena prueba de ello es el corolario siguiente, que en algunos textos se conoce con el nombre de "Teorema de Hahn-Banach".

COROLARIO 1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ normado, $G \subset E$ un subespacio vectorial de E y $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces existe $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal y continua t.q. $f|_G = g$ y $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

La demostración es "trivial", aplicando el Teorema de H-B para $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \|g\|_{G'} \|x\|$, donde

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x \in \overline{B}_G(0;1)} |g(x)|.$$

(No obstante, no te fíes de las trivialidades y haz una demostración completa del corolario).

OTRA OBSERVACIÓN IMPORTANTE: ya tenemos una forma de demostrar la existencia de "infinitas aplicaciones lineales y continuas, NO TRIVIALES DE E en $\mathbb{R}$, donde $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión infinita".

En efecto, si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión infinita, fijamos cualquier subespacio vectorial G, de dimensión finita, de E. Definimos $g: G \longrightarrow \mathbb{R}$ cualquier aplicación lineal no trivial, que por ser dim G finita, es continua (¿habías olvidado esto?). El corolario anterior nos "proporciona" una aplicación lineal $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, no trivial, que extiende a g.

Parece que "problema resuelto". No obstante, quiero que reflexiones sobre lo que expongo a continuación.

Ejercicio 1. Sea $E = (C^1([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_0)$ y G el sub. vectorial de E generado por la función $\operatorname{sen}(x)$.

a) Demostrar que $g: G \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longrightarrow u'(0)$ es lineal y continua.

b) Demostrar que $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longrightarrow u'(0)$ es lineal y no continua.

c) ¿Cómo se explican los apartados a) y b) teniendo en cuenta el Corolario 1 anterior consecuencia del Teorema de H-B.

Ejercicio 2. Recordemos que si $(E(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión infinita, entonces los hiperplanos son o cerrados o densos. Sabemos que hay hiperplanos densos (¿Por qué?) Prueba que también existen hiperplanos cerrados.

Sugerencia: un hiperplano en E viene dado por $x \in E : f(x) = \alpha \}$ donde $f: E \to \mathbb{R}$ es lineal, idénticamente cero y $\alpha \in \mathbb{R}$. Debes recordar algunos resultados del tema anterior (operadores lineales).

Ejercicio 3. Aplicando el T. Hahn-Banach prueba que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces dados dos elementos distintos $a, b \in X$, existe $L: X \to \mathbb{R}$ lineal y continua t.q. $L(a) \neq L(b)$.

Ejercicio 4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Usando el T. Hahn-Banach, prueba que

$$\forall x_0 \in \mathbb{X},\ \exists f_0 \in \mathbb{X}' : \|f_0\|_{\mathbb{X}'} = \|x_0\|_E,\ f_0(x_0) = \|x_0\|_F^2$$

Ejercicio 5. Usando el ejercicio anterior, prueba que:

$$\forall x \in \mathbb{X},\quad \|x\| = \max_{\substack{f \in \mathbb{X}' \\ \|f\|_{\mathbb{X}'} \leq 1}} |f(x)|$$

H. Hahn (1.879-1.934)

S. Banach (1.892-1.945)

Octubre 2022