Teorema de refinamiento de Schreier.

Pilar Carrasco

En estas notas daremos una demostración del teorema de refinamiento de Schreier, que permite dar una demostración fácil del teorema de Jordan-Holder.

Para ello, demostraremos primero el cuarto teorema de isomorfismo también llamado *Lema de la mariposa o Lema de Zassenhaus*. Es un resultado técnico a partir del cual la demostración del teorema de refinamiento se concluye fácilmente.

1. Lema de la mariposa

Demostraremos dos lemas previos:

Lema 1.1. Ley Modular o regla de Dedekind
Sea G un grupo y A, B, C subgrupos de G con $A \leq C$. Entonces

$$A(B \cap C) = (AB) \cap C.$$

Demostración. Lo vemos por doble inclusión. Si $z \in A(B \cap C)$ entonces $z = ax$ con $a \in A$ y $x \in B \cap C$. Tenemos entonces

$$\begin{cases} a \in A, x \in B \Rightarrow ax \in AB \\ a \in A \leq C, x \in C \Rightarrow ax \in C \end{cases} \Rightarrow z = ax \in (AB) \cap C.$$

Recíprocamente, Sea $z \in (AB) \cap C$, entonces $z = ab$ con $a \in A$ y $b \in B$ y $z \in C$. De nuevo, como $A \leq C$ entonces $a \in C$ con lo que $b = a^{-1}(ab) \in C$. En definitiva tenemos que

$$z = ab \text{ con } a \in A, b \in B \cap C \Rightarrow z \in A(B \cap C).$$

□

Lema 1.2. *Sea G un grupo y A, B, C subgrupos the G con $B \trianglelefteq A$. Entonces*

(i) $B \cap C \trianglelefteq A \cap C$ y

$$\frac{A \cap C}{B \cap C} \cong \frac{B(A \cap C)}{B}.$$

(ii) Si también $C \trianglelefteq G$ entonces $BC \trianglelefteq AC$ y

$$\frac{AC}{BC} \cong \frac{A}{B(A \cap C)}.$$

Demostración. (i) es consecuencia directa del tercer teorema de isomorfismo aplicado al grupo A y tomando como $N = B$ y $K = A \cap C$.

(ii) Puesto que $C \trianglelefteq G$ entonces BC y AC son subgrupos de G y claramente $BC \leq AC$. Veamos la normalidad: Sea $x = ac \in AC$ e $y = bc' \in BC$ entonces

$$xyx^{-1} = acbc'c^{-1}a^{-1} = (aca^{-1})(aba^{-1})(ac'c^{-1}a^{-1}) \in CBC$$

pues al ser $C \trianglelefteq G$ los elementos aca^{-1} y $ac'c^{-1}a^{-1}$ pertenecen a C, y como $B \trianglelefteq A$ el elemento $aba^{-1} \in B$. Ahora, como $C \trianglelefteq G$ entonces $CB = BC$ con lo que

$$xyx^{-1} \in CBC = BCC = BC,$$

y por tanto $xBCx^{-1} \leq BC$, lo que demuestra la normalidad.

El isomorfismo es ahora consecuencia del tercer teorema de isomorfismo aplicado al grupo AC y los subgrupos suyos $N = BC$ y $K = A$, teniendo en cuenta que

$$N \cap K = (BC) \cap A = \text{ por la regla de Dedekind } = B(A \cap C)$$

y

$$KN = A(BC) = AC, \text{ pues } B \leq A.$$

□

Teorema 1.3. Cuarto Teorema de Isomorfismo. *Sea G un grupo y C_1, A_1, C_2, A_2 subgrupos de G tales que $C_1 \trianglelefteq A_1$ y $C_2 \trianglelefteq A_2$. Entonces*

(a) $(A_1 \cap C_2)C_1 \trianglelefteq (A_1 \cap A_2)C_1$.

(b) $(A_2 \cap C_1)C_2 \trianglelefteq (A_1 \cap A_2)C_2$.

(c) Existen isomorfismos

$$\frac{(A_1 \cap A_2)C_1}{(A_1 \cap C_2)C_1} \cong \frac{A_1 \cap A_2}{(A_1 \cap C_2)(A_2 \cap C_1)} \cong \frac{(A_1 \cap A_2)C_2}{(A_2 \cap C_1)C_2}.$$

Demostración. Aplicamos el tercer teorema de isomorfismo al grupo A_2 y tomando como $N = C_2 \trianglelefteq A_2$ y como $K = A_1 \cap A_2 \leq A_2$. Entonces $N \cap K = C_2 \cap (A_1 \cap A_2) = A_1 \cap C_2$ es un subgrupo normal de $K = A_1 \cap A_2$. De igual forma se demuestra que $A_2 \cap C_1$ es un subgrupo normal de $A_1 \cap A_2$ y entonces el producto de los dos, que denotaremos por B, es también normal, esto es

$$B := (A_1 \cap C_2)(A_2 \cap C_1) \trianglelefteq A_1 \cap A_2.$$

Aplicamos ahora el apartado (ii) del lema anterior al grupo A_1 y a sus subgrupos B, $A = A_1 \cap A_2$ y $C = C_1 \trianglelefteq A_1$, entonces

$$BC = BC_1 = (A_1 \cap C_2)(A_2 \cap C_1)C_1 = (A_1 \cap C_2)C_1 \trianglelefteq AC = (A_1 \cap A_2)C_1$$

y

$$\frac{AC}{BC} = \frac{(A_1 \cap A_2)C_1}{(A_1 \cap C_2)C_1} \cong \frac{A}{B(A \cap C)} = \frac{A_1 \cap A_2}{B(A_1 \cap A_2 \cap C_1)} = \frac{A_1 \cap A_2}{(A_1 \cap C_2)(A_2 \cap C_1)}.$$

Por simetría se tiene el apartado (b) y el segundo isomorfismo. □

2. Teorema de refinamiento de Schreier.

El enunciado de este teorema es sencillo:

Teorema 2.1. *(Teorema de refinamiento de Schreier). Dos series normales arbitrarias de un grupo G admiten refinamientos equivalentes.*

Demostración. Sea G un grupo y consideremos dos series normales de G

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G,$$

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_m = G,$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$ y $j = 0, 1, \ldots, m$ sea

$$G_{i,j} := (G_i \cap H_j)G_{i-1}.$$

Puesto que
$G_{i,0} = (G_i \cap \{1\})G_{i-1} = \{1\}G_{i-1} = G_{i-1}$,
$G_{i,m} = (G_i \cap G)G_{i-1} = G_iG_{i-1} = G_i$ (pues $G_{i-1} \leq G_i$) y
$G_{i,j} = (G_i \cap H_j)G_{i-1} \leq G_{i,j+1} = (G_i \cap H_{j+1})G_{i-1}$ (pues $H_j \leq H_{j+1}$),
obtenemos una cadena de subgrupos

$$G_{i-1} = G_{i,0} \leq G_{i,1} \leq \cdots \leq G_{i,m-1} \leq G_{i,m} = G_i \text{ para cada } i = 1, \ldots, n.$$

Por otro lado, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$ sea

$$H_{i,j} := (H_j \cap G_i)H_{j-1}.$$

Como anteriormente, puesto que
$H_{0,j} = (H_j \cap \{1\})H_{j-1} = \{1\}H_{j-1} = H_{j-1}$,
$H_{n,j} = (H_j \cap G)H_{j-1} = H_jH_{j-1} = H_j$ (pues $H_{j-1} \leq H_j$) y
$H_{i,j} = (H_j \cap G_i)H_{j-1} \leq H_{i+1,j} = (H_j \cap G_{i+1})H_{j-1}$ (pues $G_i \leq G_{i+1}$),
obtenemos una cadena de subgrupos

$$H_{j-1} = H_{0,j} \leq H_{1,j} \leq \cdots \leq H_{n-1,j} \leq H_{n,j} = H_j \text{ para cada } j = 1, \ldots, m.$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$, aplicamos el cuarto teorema de isomorfía a los subgrupos de G

$$C_1 = G_{i-1} \trianglelefteq A_1 = G_i \text{ y } C_2 = H_{j-1} \trianglelefteq A_2 = H_j,$$

entonces por (a) y (b) del teorema serán

$(A_1 \cap C_2)C_1 \trianglelefteq (A_1 \cap A_2)C_1$, esto es $G_{i,j-1} \trianglelefteq G_{i,j}$

y

$(A_2 \cap C_1)C_2 \trianglelefteq (A_1 \cap A_2)C_2$, esto es $H_{i-1,j} \trianglelefteq H_{ij}$

con lo que las inclusiones anteriores son normales. Además por el apartado (c) será

$$G_{i,j}/G_{i,j-1} \cong H_{i,j}/H_{i-1,j} \text{ para cada } i = 1, \ldots, n \ j = 1, \ldots, m. \tag{2.1}$$

Insertando en cada serie las correspondientes cadenas obtenemos dos series normales

$$1 = G_{1,0} \trianglelefteq G_{11} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{1,m} = G_1 \trianglelefteq G_{2,1} \ldots$$
$$G_{n-1} = G_{n,0} \trianglelefteq G_{n,1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{n,m-1} \trianglelefteq G_{n,m} = G_n$$

y

$$1 = H_{0,1} \trianglelefteq H_{1,1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1,1} = H_1 \trianglelefteq H_{1,2} \trianglelefteq \ldots$$
$$H_{m-1} \trianglelefteq H_{1,m} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1,m} \trianglelefteq H_{n,m} = H_m$$

que son refinamientos de cada una de las series originales respectivamente. Estos dos refinamientos son series equivalentes pues tienen la misma longitud (nm) y por (2.1), sus factores son isomorfos, lo que acaba la demostración.

$\square$