Algebra II

Relación 6

Curso 2021-2022

Clasificación de grupos abelianos finitos. Presentaciones de grupos.

Ejercicio 1. Calcular los órdenes de todos los elementos de los distintos grupos abelianos de orden 8,12, 16 y 24.

Ejercicio 2. Para los siguientes grupos calcular sus descomposiciones cíclicas.

1. $G_1 = \{1, 8, 12, 14, 18, 21, 27, 31, 34, 38, 44, 47, 51, 53, 57, 64\}$ con operación dada por multiplicación módulo 65.

2. $G_2 = \{1, 8, 17, 19, 26, 28, 37, 44, 46, 53, 62, 64, 71, 73, 82, 89, 91, 98, 107, 109, 116, 118, 127, 134\}$ con operación dada por multiplicación módulo 135.

3. $G_3 = \{1, 7, 17, 23, 49, 55, 65, 71\}$ con operación dada por multiplicación módulo 96.

4. $G_4 = \{1, 4, 11, 14, 16, 19, 26, 29, 31, 34, 41, 44\}$ con operación dada por multiplicación módulo 45.

Ejercicio 3. Calcular la descomposición cíclica y cíclica primaria de los grupo abelianos $C_{24} \times C_{40} \times C_{35}$ y $C_{50} \times C_{56} \times C_{12}$. ¿Son isomorfos?

Ejercicio 4. Sea G un grupo abeliano de orden n y $l(G)$ su longitud. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(G) = e_1 + \cdots + e_r,$$

y que

$$fact(G) = (C_{p_1}, \overset{(e_1)}{\ldots}, C_{p_1}, \ldots, C_{p_r}, \overset{(e_r)}{\ldots}, C_{p_r}).$$

En particular, todos los grupos abelianos del mismo orden tienen la misma longitud y la misma lista de factores de composición.

Ejercicio 5. Sea D_n el grupo diédrico de orden $2n$. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(D_n) = e_1 + \cdots + e_r + 1,$$

y que

$$fact(G) = (C_{p_1}, \overset{(e_1)}{\ldots}, C_{p_1}, \ldots, C_{p_r}, \overset{(e_r)}{\ldots}, C_{p_r}, C_2).$$

Ejercicio 6. Listar todos los grupos abelianos no isomorfos de orden 10, 16, 20, 30 , 40 , 108 y 360, dando sus factores invariantes, divisores elementales y descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias.

Ejercicio 7. Calcular las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de todos los grupos abelianos no isomorfos de orden 13916. Identifica la componente 3-primaria de cualquiera de esos grupos.

Ejercicio 8. Demostrar que $\langle a, b / a^2 = 1, b^3 = 1, aba^{-1}b^{-1} = 1\rangle \cong C_6$.

Ejercicio 9. Demostrar que

$$A_4 \cong \langle a, b / a^2 = 1, b^3 = 1, (ab)^3 = 1\rangle,$$

procediendo como sigue:

1. Sea G el grupo definido por la presentación. Demostrar que existe un epimorfismo $G \to A_4$.

2. Demostrar que los elementos $a, bab^2 \in G$ son de orden 2 y conmutan entre sí, generando entonces un grupo tipo Klein $N = \langle a, bab^2\rangle \leq G$. Demostrar que N es un subgrupo normal de G.

3. Demostrar que $|G/N| \leq 3$.

Ejercicio 10. Demostrar que

$$S_4 \cong \langle a, b / a^2 = 1, b^3 = 1, (ab)^4 = 1\rangle,$$

procediendo como sigue:

1. Sea G el grupo definido por la presentación. Demostrar que existe un epimorfismo $G \to S_4$.

2. Demostrar que los elementos $(ab)^2, (ba)^2 \in G$ son de orden 2 y conmutan entre sí, generando entonces un grupo tipo Klein $N = \langle (ba)^2, (ab)^2\rangle \leq G$. Demostrar que N es un subgrupo normal de G.

3. Demostrar que existe un epimorfismo $D_3 \to G/N$. Concluir que $|G/N| \leq 6$.

4. Demostrar finalmente que el epimorfismo obtenido en el primer apartado es necesariamente un isomorfismo.

Ejercicio 11. Demostrar que la presentación

$$\langle a, b, c / a^2 = 1, b^2 = 1, c^3 = 1, aba^{-1}b^{-1} = 1, ca = bc\rangle$$

define un grupo conocido de orden 12.

Ejercicio 12. Demostrar que $C_m \times C_n \cong \langle a, b / a^m = 1, b^n = 1, ab = ba\rangle$.