ALGEBRA III (DOBLE GRADO INFORMÁTICA-MATEMÁTICAS)

RELACIÓN 2 (TEORÍA DE GALOIS).

Ejercicio 1. Sea E/K una extensión de cuerpos de números. Probar que si [E:K]=2 entonces $E=K(\sqrt{a})$ para un cierto $a\in K$ tal que $\sqrt{a}\notin K$. Concluir que toda extensión de cuerpos de números de grado dos es normal.

Ejercicio 2. Estudiar la normalidad de las siguientes extensiones:

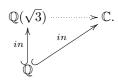
- (1) $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{27}, \sqrt[8]{16})/\mathbb{Q}$,
- (2) $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_r})/\mathbb{Q}$, donde cada $a_i \in \mathbb{Q}$ con $\sqrt{a_i} \notin \mathbb{Q}$,
- $(3) \ \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q},$
- $(4) \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}),$
- (5) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),$
- (6) $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}, \sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$,
- $(7) \ \mathbb{Q}(i\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q},$
- (8) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$,
- (9) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-1})/\mathbb{Q}$ (Nota: asumimos como conocido que el polinomio $x^4 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$).

Ejercicio 3. Estudiar si el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{5})$ es una extensión normal de \mathbb{Q} . Para ello:

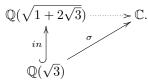
- (1) Probar que $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 6$.
- (2) Probar que $i\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$, y entonces también que $\omega \notin \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$.
- (3) Probar que $[\mathbb{Q}(\omega, i\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 4$.
- (4) Probar que $\mathbb{Q}(\omega, i\sqrt{5}) \nsubseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{5})$, y entonces que $\omega \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{5})$.
- (5) Probar que el polinomio $Irr(\sqrt[3]{5}, \mathbb{Q})$ no descompone totalmente en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{5})$.

Ejercicio 4. (1) Probar que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{1+2\sqrt{3}})$.

- (2) Probar que $\sqrt{1+2\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
- (3) Determinar el polinomio $Irr(\sqrt{1+2\sqrt{3}}, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$.
- (4) Determinar las \mathbb{Q} -inmersiones complejas de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$



(5) Para cada \mathbb{Q} -inmersión compleja σ de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, determinar las σ -inmersiones complejas de $\mathbb{Q}(\sqrt{1+2\sqrt{3}})$



- (6) Argumentar que ya conocemos todas las \mathbb{Q} -inmersiones complejas de $\mathbb{Q}(\sqrt{1+2\sqrt{3}})$. Usando ese hecho, determinar:
 - (a) el grado $[\mathbb{Q}(\sqrt{1+2\sqrt{3}}):\mathbb{Q}],$
 - (b) todas las raíces del polinomio $Irr(\sqrt{1+2\sqrt{3}},\mathbb{Q})$.

Ejercicio 5. Sea $f = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$.

- (1) Probar que $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
- (2) Determinar $[\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}]$ y describir los elementos del grupo de Galois $G=G(f/\mathbb{Q})$.
- (3) Determinar el orden de cada elemento del grupo G.
- (4) Argumentar que el grupo G isomorfo al grupo de Klein

$$C_2 \times C_2 = \langle u, v \mid u^2 = 1 = v^2, uv = vu \rangle.$$

- (5) Describir el retículo de subgrupos de G.
- (6) Describir el retículo de subcuerpos de $\mathbb{Q}(f)$, indicando qué subgrupos de G corresponden, por la Conexión de Galois, a cada subcuerpo de $\mathbb{Q}(f)$.
- (7) Determina el grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}))$ y argumenta entonces que $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$.

Ejercicio 6. Sea E/K una extensión finita y normal de cuerpos de números con $[E:K]=3^n$. Argumentar que, para todo i con $1 \le i \le n$, existe un cuerpo F, con $K \le F \le E$, tal que $[F:K]=3^i$.

Ejercicio 7. Sea E/K una extensión finita de cuerpos de números. Probar que el orden de su grupo de Galois divide al grado de la extensión.

Ejercicio 8. Considerar el cuerpo de números $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5},i)$

- (1) Determinar el grado $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5},i):\mathbb{Q}].$
- (2) Determinar el grado $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i) : \mathbb{Q}(i)]$.
- (3) Determinar el polinomio $Irr(\sqrt[4]{5}, \mathbb{Q}(i)),$
- (4) Argumentar que la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5},i)/\mathbb{Q}(i)$ es normal.
- (5) Describir los elementos del grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}(i)$.
- (6) Probar que el grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}(i))$ es cíclico.
- (7) Describir el el retículo de subgrupos del grupo $G(\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}(i))$.
- (8) Describir el retículo de subcuerpos intermedios entre $\mathbb{Q}(i)$ y $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})$.

Ejercicio 9. Considerar el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2},i)$.

- (1) Determinar el grado $[\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2},i):\mathbb{Q}].$
- (2) Determinar el grado $[\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2},i):\mathbb{Q}(\sqrt{2})].$
- (3) Determinar el grado $[\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})].$
- (4) Determinar los polinomios $Irr(\sqrt[8]{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ y $Irr(i, \mathbb{Q}(\sqrt{2}))$.
- (5) Argumentar que la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2},i)/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es normal.
- (6) Describir los elementos del grupo de Galois $G = G(\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, i)/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$.
- (7) Determinar los ordenes de todos los elementos del grupo G.
- (8) Probar que el grupo G es isomorfo al Diédrico $D_4 = \langle r, s \mid r^4 = 1 = s^2, sr = r^3 s \rangle$.

Ejercicio 10. Considerar la extensión $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}$.

- (1) Argumentar que es normal y describir los elementos de su grupo de Galois.
- (2) ¿Son iguales los subcuerpos $\mathbb{Q}((1+i)\sqrt[4]{5})$ y $\mathbb{Q}((1-i)\sqrt[4]{5})$?
- (3) Determinar todos los subcuerpos $F \leq \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})$ tales que $[F : \mathbb{Q}] = 2$ y el grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})/F)$ es cíclico.