Algebra III (Doble grado Informática-Matemáticas)

Relación 3.

Ejercicio 1. *Para* $n = 3,\ 8,\ 10,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 30,\ 50$*, calcular, usando la función* φ *de Euler, el grado* $[\mathbb{Q}(z_n) : \mathbb{Q}]$.

Ejercicio 2. *Calcular* Φ_n*, para* $n = 3,\ 8,\ 10,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 30,\ 50$.

Ejercicio 3. *Sea* $n \geq 3$ *un natural impar.*
(1) *Probar que* $z_n = z_{2n}^2$.
(2) *Argumentar que* $\mathbb{Q}(z_n) = \mathbb{Q}(z_{2n})$.

Ejercicio 4. (1) *Determinar todos los* $n \geq 2$ *tales que* $\varphi(n) = 2$.
(2) *Determinar los cuerpos ciclotómicos que son extensiones de grado dos de* $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 5. *Describir el grupo de Galois* $G(\mathbb{Q}(z_6)/\mathbb{Q})$ *y el retículo de subcuerpos de* $\mathbb{Q}(z_6)$

Ejercicio 6. *Sea* $z = z_5$.
(1) *Determina el polinomio* Φ_5 *y muestra una base de la extensión* $\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}$.
(2) *Expresa en función la base* $(z + z^4) + (z^2 + z^3)$ *y* $(z + z^4)(z^2 + z^3)$.
(3) *Argumenta que* $z + z^4$ *y* $z^2 + z^3$ *son las raíces del polinomio* $x^2 + x - 1$.
(4) *Argumenta las siguientes igualdades :* $z + z^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5}$, $z^2 + z^3 = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.
(5) *Argumenta las siguientes igualdades:* $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
(6) *Describe el grupo* $G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$ *y prueba que es cíclico.*
(7) *Describe el retículo de subgrupos de* $G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$.
(8) *Describe el retículo de subcuerpos de* $\mathbb{Q}(z)$.

Ejercicio 7. *Sea* $n > 2$ *y* $z = z_n$ *la raíz n-ésima primitiva de la unidad.*
(1) *Observando que* $(z + \bar{z}) = 2\cos\frac{2\pi}{n}$*, probar que* z *y* $\bar{z}$ *son las raíces del polinomio* $x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x + 1 \in \mathbb{R}[x]$.
(2) *Argumentar que* $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) \leq \mathbb{Q}(z)$*, pero* $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) \neq \mathbb{Q}(z)$.
(3) *Probar que* $Irr(z, \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n})) = x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\,x + 1$ *y que* $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n})] = 2$.
(4) *Probar que* $[\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)/2$ *y que el polinomio* $Irr(\cos\frac{2\pi}{n}, \mathbb{Q})$ *es de grado* $\varphi(n)/2$.

Ejercicio 8. *Sea* $z = z_7$.
(1) *Determinar* Φ_7.
(2) *Describir el grupo* $G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$*, probar que es cíclico, y describir su retículo de subgrupos.*
(3) *Sea* $\alpha = z + z^2 + z^4$. *Calcular* α^2*, expresando el resultado en función de la base de* $\mathbb{Q}(z)$*, y probar que* α *es raíz del polinomio* $x^2 + x + 2$.
(4) *Determinar el subcuerpo fijo bajo el subgrupo cíclico de orden* 3 *de* $G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$.
(5) *Probar que subgrupo cíclico de orden* 2 *de* $G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$ *está generado por el automorfismo de conjugación compleja :* $a + bi \mapsto a - bi$.
(6) *Observando que* $z + \bar{z}$ *pertenece al subcuerpo fijo bajo el subgrupo de orden* 2 *de* $G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$*, argumentar que ese subcuerpo fijo es* $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{7})$.
(7) *Describir el retículo de subcuerpos de* $\mathbb{Q}(z)$.