Algebra III (Doble grado Informática-Matemáticas)

Relación 1 (Extensiones finitas y algebraicas).

Ejercicio 1. *Razonar cuales de los siguientes números complejos son algebraicos o trascendentes sobre $\mathbb{Q}$ (es asumida la trascendencia de π y de e):*

$$\sqrt[5]{4},\ (1+\sqrt[5]{4})(1-\sqrt[5]{16})^{-1},\ \pi^2,\ e^2-i,\ i\sqrt{i}+\sqrt{2},\ \sqrt{1-\sqrt[3]{2}},\ \sqrt{e},\ \sqrt{\pi}-i,\ \sqrt{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[5]{2})^{-1}.$$

Ejercicio 2. *Sea $z\in\mathbb{C}$ un número complejo y $n\geq 1$ un natural. Argumentar que z es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ si y solo si $\sqrt[n]{z}$ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$.*

Ejercicio 3. *E/K es una extensión de cuerpos, $\alpha\in E$ y $\beta=1+\alpha^2+\alpha^5$. Argumentar que α es algebraico sobre K si y solo si β es algebraico sobre $\mathbb{Q}$.*

Ejercicio 4. *Calcular $Irr(\alpha,\mathbb{Q})$ en los siguientes casos:*

$$\alpha=3+\sqrt{2},\qquad \alpha=\sqrt{3}-\sqrt[4]{3},\qquad \alpha=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$$

Ejercicio 5. *Calcular $[E:\mathbb{Q}]$ en los siguientes casos:*

$$(1)\ E=\mathbb{Q}(\sqrt{6},i),\quad (2)\ E=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5},\sqrt{-2}),\quad (3)\ E=\mathbb{Q}(\sqrt{18},\sqrt[4]{2}),$$

En cada uno de los casos dar una base de $E/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 6. *Calcular $[F:\mathbb{Q}]$ en los siguientes casos:*

$$(1)\ F=\mathbb{Q}(\sqrt{8},3+\sqrt{50}),\quad (2)\ F=\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{-5},\sqrt{7}).$$

En cada uno de los casos dar una base de $F/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 7. *Sea α una raíz del polinomio x^3+3x+1 en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los complejos.*
(i) Determinar el grado $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ y describir una base de la extensión $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$.
(ii) Expresar en términos de esa base los números $(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)$ y $(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)^{-1}$.

Ejercicio 8. *Describir una base de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ y expresar como combinación lineal de estos los números*

$$(1)\ \left(\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}\right)^{-1},\qquad (2)\ \left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^{-1}.$$

Ejercicio 9. *Argumentar que cualquier elemento de $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ puede expresarse de forma única como*

$$a+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}+d\sqrt{15}$$

donde $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$. Expresar de tal forma el inverso de $1+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.