Algebra III (Doble grado Informática-Matemáticas)

Relación 2 (TEORÍA DE GALOIS).

Ejercicio 1. *Sea E/K una extensión de cuerpos de números. Probar que si $[E : K] = 2$ entonces $E = K(\sqrt{a})$ para un cierto $a \in K$ tal que $\sqrt{a} \notin K$. Concluir que toda extensión de cuerpos de números de grado dos es normal.*

Ejercicio 2. *Estudiar la normalidad de las siguientes extensiones:*
(1) $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{27}, \sqrt[8]{16})/\mathbb{Q}$,
(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_r})/\mathbb{Q}$, *donde cada* $a_i \in \mathbb{Q}$ *con* $\sqrt{a_i} \notin \mathbb{Q}$,
(3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$,
(4) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,
(5) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,
(6) $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}, \sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$,
(7) $\mathbb{Q}(i\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$,
(8) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$,
(9) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-1})/\mathbb{Q}$ (*Nota: asumimos como conocido que el polinomio* $x^4 + 1$ *es irreducible en* $\mathbb{Q}[x]$).

Ejercicio 3. *Estudiar si el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{5})$ es una extensión normal de $\mathbb{Q}$. Para ello:*
(1) *Probar que* $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 6$.
(2) *Probar que* $i\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$, *y entonces también que* $\omega \notin \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$.
(3) *Probar que* $[\mathbb{Q}(\omega, i\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 4$.
(4) *Probar que* $\mathbb{Q}(\omega, i\sqrt{5}) \nsubseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{5})$, *y entonces que* $\omega \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{5})$.
(5) *Probar que el polinomio* $Irr(\sqrt[3]{5}, \mathbb{Q})$ *no descompone totalmente en* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i\sqrt{5})$.

Ejercicio 4. (1) *Probar que* $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{1 + 2\sqrt{3}})$.
(2) *Probar que* $\sqrt{1 + 2\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
(3) *Determinar el polinomio* $Irr(\sqrt{1 + 2\sqrt{3}}, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$.
(4) *Determinar las* $\mathbb{Q}$*-inmersiones complejas de* $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[r, dotted] & \mathbb{C}. \\ \mathbb{Q} \arrow[u, hook, "in"] \arrow[ur, hook, "in"'] & \end{tikzcd}$$

(5) *Para cada* $\mathbb{Q}$*-inmersión compleja* σ *de* $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, *determinar las* σ*-inmersiones complejas de* $\mathbb{Q}(\sqrt{1 + 2\sqrt{3}})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}(\sqrt{1+2\sqrt{3}}) \arrow[r, dotted] & \mathbb{C}. \\ \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[u, hook, "in"] \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

(6) *Argumentar que ya conocemos todas las* $\mathbb{Q}$*-inmersiones complejas de* $\mathbb{Q}(\sqrt{1 + 2\sqrt{3}})$. *Usando ese hecho, determinar:*
(a) *el grado* $[\mathbb{Q}(\sqrt{1 + 2\sqrt{3}}) : \mathbb{Q}]$,
(b) *todas las raíces del polinomio* $Irr(\sqrt{1 + 2\sqrt{3}}, \mathbb{Q})$.

Ejercicio 5. *Sea* $f = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$.

(1) *Probar que* $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
(2) *Determinar* $[\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}]$ *y describir los elementos del grupo de Galois* $G = G(f/\mathbb{Q})$.
(3) *Determinar el orden de cada elemento del grupo* G.
(4) *Argumentar que el grupo* G *isomorfo al grupo de Klein*

$$C_2 \times C_2 = \langle u, v \mid u^2 = 1 = v^2,\ uv = vu \rangle.$$

(5) *Describir el retículo de subgrupos de* G.
(6) *Describir el retículo de subcuerpos de* $\mathbb{Q}(f)$, *indicando qué subgrupos de* G *corresponden, por la Conexión de Galois, a cada subcuerpo de* $\mathbb{Q}(f)$.
(7) *Determina el grupo de Galois* $G\big(\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\big)$ *y argumenta entonces que* $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$.

Ejercicio 6. *Sea* E/K *una extensión finita y normal de cuerpos de números con* $[E : K] = 3^n$. *Argumentar que, para todo* i *con* $1 \leq i \leq n$, *existe un cuerpo* F, *con* $K \leq F \leq E$, *tal que* $[F : K] = 3^i$.

Ejercicio 7. *Sea* E/K *una extensión finita de cuerpos de números. Probar que el orden de su grupo de Galois divide al grado de la extensión.*

Ejercicio 8. *Considerar el cuerpo de números* $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$

(1) *Determinar el grado* $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i) : \mathbb{Q}]$.
(2) *Determinar el grado* $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i) : \mathbb{Q}(i)]$.
(3) *Determinar el polinomio* $Irr(\sqrt[4]{5}, \mathbb{Q}(i))$,
(4) *Argumentar que la extensión* $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)/\mathbb{Q}(i)$ *es normal.*
(5) *Describir los elementos del grupo de Galois de la extensión* $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}(i)$.
(6) *Probar que el grupo de Galois* $G\big(\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}(i)\big)$ *es cíclico.*
(7) *Describir el el retículo de subgrupos del grupo* $G\big(\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}(i)\big)$.
(8) *Describir el retículo de subcuerpos intermedios entre* $\mathbb{Q}(i)$ *y* $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})$.

Ejercicio 9. *Considerar el cuerpo* $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, i)$.

(1) *Determinar el grado* $[\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, i) : \mathbb{Q}]$.
(2) *Determinar el grado* $[\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$.
(3) *Determinar el grado* $[\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$.
(4) *Determinar los polinomios* $Irr(\sqrt[8]{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ *y* $Irr(i, \mathbb{Q}(\sqrt{2}))$.
(5) *Argumentar que la extensión* $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, i)/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *es normal.*
(6) *Describir los elementos del grupo de Galois* $G = G\big(\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, i)/\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)$.
(7) *Determinar los ordenes de todos los elementos del grupo* G.
(8) *Probar que el grupo* G *es isomorfo al Diédrico* $D_4 = \langle r, s \mid r^4 = 1 = s^2, sr = r^3 s\rangle$.

Ejercicio 10. *Considerar la extensión* $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}$.

(1) *Argumentar que es normal y describir los elementos de su grupo de Galois.*
(2) *¿Son iguales los subcuerpos* $\mathbb{Q}\big((1+i)\sqrt[4]{5}\big)$ *y* $\mathbb{Q}\big((1-i)\sqrt[4]{5}\big)$*?*
(3) *Determinar todos los subcuerpos* $F \leq \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})$ *tales que* $[F : \mathbb{Q}] = 2$ *y el grupo de Galois* $G(\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{5})/F)$ *es cíclico.*