Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias.

Universidad de Granada

Análisis Matemático II

CURSO 2014-2015

Departamento de Análisis Matemático

Índice general

Sucesiones de funciones

0.1. Sucesiones de funciones.

Sumario

En las aplicaciones del Análisis Matemático es frecuente que la solución a un cierto problema sea una función desconocida o no expresable en términos de funciones elementales que conocemos. Sí, en cambio, es frecuente que se conozcan funciones que se .ªproximan.ª la función solución; a menudo se puede disponer de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ obtenidas en sucesivas aproximaciones al problema y que se .ªproxime.ᵉⁿ cierto sentido a la solución. En esta lección queremos dar sentido al concepto de .ªproximación". El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

0.1.1. Motivación

Hay diversas formas de aproximarse a una función. Para motivar este concepto vamos a considerar varios ejemplos:

Ejemplo 1:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considérese la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n$ $(x \in [0,1])$.

Nótese que las funciones f_n son continuas en $[0,1]$ y que para cada $x \in [0,1]$ la sucesión $f_n(x)$ es convergente.

Definamos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante $f(x) = lim f_n(x)$. Es claro que $f(x) = 0, \forall x \in [0,1[$ y que $f(1) = 1$.

Ejemplo 2:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considérese la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \sqrt{x^2 + (1/n^2)}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Nótese que las funciones f_n son derivables en $\mathbb{R}$ y que para cada $x \in \mathbb{R}$ la sucesión $f_n(x)$ es convergente.

Definamos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $f(x) = lim f_n(x)$. Es claro que $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

Obsérvese que en este caso, puesto que $\sqrt{x^2 + (1/n)^2} \leq |x| + 1/n$, deducimos que la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ depende de la convergencia de la sucesión de números reales$\{1/n\}$ pero es independiente del valor x considerado.

Ejemplo 3:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considérese la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = n^2 x(1 - nx)$ para todo $x \in [0, 1/n]$ y cero en el resto de los puntos.

Nótese que las funciones f_n son continuas en $[0,1]$ y que para cada $x \in [0,1]$ la sucesión $f_n(x)$ es convergente.

Definamos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante $f(x) = lim f_n(x)$. Es claro que $f = 0$.

0.1.2. Tipos de convergencia. Condición de Cauchy.

En esta sección precisaremos el concepto de aproximación. Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales definidas en A.

1. <u>Convergencia puntual.</u>

   Se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge puntualmente en** $B \subseteq A$, si para cada $x \in B$, la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ es convergente.

   Al conjunto $C := \{x \in A;\ \{f_n(x)\}$ es convergente$\}$ se le denomina **campo de convergencia** y a la función $f : C \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = lim\{f_n(x)\}$, se le denomina **función límite**.

   Obsérvese que la sucesión de funciones del primer ejemplo converge puntualmente en $[0,1]$ a la función f allí definida y que la sucesión del segundo ejemplo converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función valor absoluto. Otro tanto se puede decir del ejemplo tercero.

2. Convergencia uniforme.

   Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ que converge puntualmente en C a una función f, se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge uniformemente en** $B \subseteq C$, si

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \text{ tal que } n \geq n_0 \text{ implica que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in B.$$

   Obsérvese que la sucesión dada en el primer ejemplo converge uniformemente en intervalos de la forma $[0, r]$ con $r < 1$. No existe el concepto de campo de convergencia uniforme tal como se desprende del ejemplo considerado.

Damos ahora dos importantes caracterizaciones de gran utilidad de la convergencia uniforme.

Proposición 0.1.1.
Sea A un subconjunto no vacío de números reales, $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Equivalen

1. *$\{f_n\}$ converge uniformemente en A a la función f.*
2. *Dada cualquier sucesión $\{a_n\}$ de elementos de A se verifica que la sucesión $\{f_n(a_n) - f(a_n)\}$ es nula.*
3. *Existe una sucesión de puntos $\{b_n\}$ convergente a cero y un número natural p tal que*
   $$|f_n(x) - f(x)| \leq b_n, \forall n \geq p, \forall x \in A.$$

Demostración. Para hacer en clase

∎

Como consecuencia, deducimos que la convergencia de la sucesión de funciones del segundo ejemplo es uniforme en $\mathbb{R}$.

El segundo criterio para la determinación de la convergencia uniforme tiene la ventaja de no tener que conocer la función límite.

Teorema 0.1.2. *(Criterio de Cauchy)*
Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$. Equivalen

1. *Existe* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función tal que* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* A *a* f.

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ *tal que* $p, q \geq n_0$ *implica que* $|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$.

Demostración. Para hacer en clase

■

0.1.3. Convergencia, continuidad e integrabilidad.

En esta sección enunciaremos los resultados que relacionan la convergencia uniforme con los conceptos clave del análisis: continuidad, derivación e integración. Haremos sólo algunas demostraciones, dejando las más laboriosas para un posterior estudio.

Tal como vimos en el primer ejemplo la convergencia puntual no garantiza la continuidad de la función límite aún siendo continuas las funciones de la sucesión.

Teorema 0.1.3. *(Continuidad y convergencia uniforme)*
Sea A *un subconjunto no vacío de números reales y sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones de* A *en* $\mathbb{R}$. *Si la sucesión* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $B \subseteq A$ *y existe* $a \in B$ *tal que las funciones* f_n *son continuas en* a *entonces la función límite* $f : B \to \mathbb{R}$ *es continua en* a.

Demostración. Para hacer en clase

■

El teorema sobre la continuidad se utiliza con frecuencia para probar que no hay convergencia uniforme comprobando que la función límite no es continua (véase primer ejemplo).

Conviene notar, por otra parte, que la continuidad de la función límite puntual de una sucesión de funciones continuas no exige que la convergencia sea uniforme tal como muestra el tercer ejemplo.

Como consecuencia de nuestro resultado, vemos una condición suficiente para que el signo integral permute con el límite.

Corolario 0.1.4. *(Continuidad, convergencia uniforme e integración)*

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas (resp. integrables) que converge uniformemente en un intervalo $[a,b]$ de A a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces f es continua (resp. integrable) en $[a,b]$ y

$$lim \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Demostración. Para hacer en clase

∎

La demostración con la hipótesis de integrabilidad, obliga previamente a probar la integrabilidad de la función límite. La demostración puede verse en [1, Teorema 8.13].

Veamos finalmente la relación de la convergencia con la derivación. Viendo los precedentes, cabría esperar que la función límite fuese derivable siempre que lo fuesen las correspondientes funciones. Este hecho no es esperable tal como muestra el ejemplo segundo. No obstante, obtenemos a continuación un importante resultado relacionando ambos conceptos. Obsérvese que en este caso exigimos la convergencia de la sucesión de derivadas.

Corolario 0.1.5. *(Derivación y convergencia uniforme)*

Sea I un intervalo acotado y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de clase uno (resp. derivables) en I. Supongamos que existe $a \in I$, tal que la sucesión $\{f_n(a)\}$ es convergente. Si la sucesión de las funciones derivadas $\{f'_n\}$ converge uniformemente a una función g en I entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f : I \to \mathbb{R}$. Además f es de clase uno (resp. derivable) en I con $f'(x) = g(x)$, para todo $x \in I$.

Demostración. Para hacer en clase el caso "de clase uno"

∎

La demostración con la sola hipótesis de derivabilidad es algo más laboriosa y puede verse en [1, Teorema 8.15]

Finalizamos esta sección enunciando un profundo resultado sobre la aproximación de una función continua por polinomios.

Teorema 0.1.6. *(Teorema de Weierstrass)*
Sea f una función continua definida sobre un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$. Entonces existe una sucesión de polinomios que converge uniformemente a f en $[a,b]$.

De las muchas demostraciones que hay de dicho resultado, merece la pena comentar la que está basada en los polinomios de Bernstein.

Dados $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua, se define el **polinomio e Bernstein de orden n de la función f** mediante la expresión

$$B_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k (1-x)^{n-k} :$$

Se puede probar que la sucesión $\{B_{n,f}\}$ converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$ la función f.

Si el intervalo es $[a,b]$ entonces se considera la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(a + t(b-a))$, y el polinomio buscado es $p_n(x) = B_{n,g}(\frac{x-a}{b-a})$.

La demostración puede verse en [2, Sección 10.5]

0.1.4. Series de funciones

El paso de la noción de sucesión de funciones al concepto de serie funcional sigue los mismos derroteros que el ya conocido para pasar de sucesiones de números reales a series de números reales.

Se llama **serie de funciones** a todo par ordenado de sucesiones de funciones reales $(\{f_n\}, \{F_n\})$, donde $(\{f_n\}$ es una sucesión arbitraria de funciones y, para cada natural n, la segunda sucesión es tal que: $F_n := \sum_{i=1}^{n} f_n$. La sucesión $\{F_n\}$ recibe el nombre de **sucesión de sumas parciales de la serie.** Dicha serie suele representarse por $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$.

Las nociones de convergencia puntual y de convergencia uniforme se trasladan de manera natural a las series de funciones, basta para ello referirlas a la correspondiente convergencia para las sumas parciales:

Se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ **converge puntualmente** (resp. **uniformemente**) si la sucesión $\{F_n\}$ de sus sumas parciales converge puntualmente (resp. **uniformemente**). Se llama **campo de convergencia de la serie** al campo de convergencia de la sucesión de sumas parciales. Si C es el campo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$, podremos construir una función $F : C \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, y que es denominada como **suma de la serie**.

En este contexto también podemos hablar de **convergencia absoluta** en un conjunto A de la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ si la serie $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ converge puntualmente en A. Como regla práctica para estudiar la convergencia puntual de una serie se recomienda empezar por el estudio de la convergencia absoluta de dicha serie. Para la convergencia uniforme hemos de tener en cuenta

Lema 0.1.7. *Sea $\sum_{n\geq 1} f_n$ una serie de funciones definida en un conjunto A. Si dicha serie converge uniformemente un subconjunto $B \subseteq A$ entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge a cero uniformemente en B*

Demostración. Para hacer en clase

■

Como consecuencia de los teoremas ya establecidos obtenemos el siguiente resultado

Corolario 0.1.8. *Sea A un conjunto no vacío de números reales y sea $\sum_{n\geq 1} f_n$ una serie de funciones que converge puntualmente en A. Entonces*

1. *Si las funciones f_n son continuas en un punto $a \in A$ y la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en I entonces la función suma F es continua en a.*

2. *Si las funciones f_n son continuas en $[a, b] \subseteq A$ y la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en $[a, b]$ entonces la serie $\sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n$ es convergente y su suma es $\int_a^b F$.*

3. *Si las funciones f_n son de clase uno en $J \subseteq A$ intervalo acotado, la serie $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformemente en J, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en J a una función derivable F que verifica: $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ para todo $x \in J$.*

Demostración. Para hacer por el alumno.

■

El criterio de Cauchy ya comentado proporciona una poderosa herramienta para el estudio de la convergencia uniforme de una sere de funciones, a saber

Teorema 0.1.9. *(Test de Weierstrass)*
Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $\sum_{n\geq 1} f_n$ una serie de funciones definidas en A y sea B un subconjunto de A. Supongamos que existe una sucesión $\{a_n\}$ de números reales tal que $|f_n(x)| \leq a_n, \forall x \in B$. Si la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en B.

Demostración. Para hacer en clase.

■

El problema que se plantea cuando el criterio de Weierstrass no es aplicable es similar al que tenemos cuando una serie de números reales no es absolutamente y deseamos saber si al menos es convergente. De entre los varios criterios que existen para las series de términos cualesquiera, nosotros nos habíamos quedado con el criterio de Leibnitz.

Nosotros establecemos un criterio de Leibnitz para series de funciones. Antes necesitamos probar el siguiente resultado técnico:

Lema 0.1.10. *Sean $a_1, a_2, \cdots, a_p, a_{p+1}$ y $b_1, b_2, \cdots, b_p$ números reales. Si represantamos por $B_k := \sum_{i=1}^{k} b_j$ entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} B_k(a_k - a_{k+1}) + B_p a_{p+1}.$$

Demostración. Sea $B_0 = 0$. Es claro, puesto que $b_k = B_k - B_{k-1}$, que

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p} a_k(B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{p} B_k a_k - \sum_{k=2}^{p} B_{k-1} a_{k+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{p} B_k a_k - \sum_{k=1}^{p-1} B_k a_{k+1} \pm B_p a_{k+1} = \sum_{k=1}^{p} B_k(a_k - a_{k+1}) + B_p a_{p+1}.$$

■

Proposición 0.1.11. *(Criterio de Leibnitz) Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea* $\sum_{n\geq 1}(-1)^n g_n$ *una serie de funciones definidas en A y sea B un subconjunto de A. Supongamos que la sucesión* $\{g_n(x)\}$ *es monótona para cada* $x \in B$ *y que la sucesión* $\{g_n\}$ *converge uniformemente a cero en B. Entonces la serie* $\sum_{n\geq 1}(-1)^n g_n$ *converge uniformemente en B.*

Demostración. Para hacer en clase

■

0.1.5. Relación de ejercicios

1. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0, a]$ y $[a, +\infty[$, donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \geq 0$ por:

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}.$$

2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida para todo $x \in [0, 1]$ por:

$$f_n(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n.$$

¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0, 1]$? ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho, 1]$, donde $\rho \in]0, 1[$?

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = n(cosx)^n senx.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en los intervalos $[0, a]$ y $[a, \pi/2]$, ì donde $0 < a < \pi/2$.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{sen^2(nx)}{nsenx} \qquad (0 < x < \pi).$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo $]0, a]$, $[a, \pi[$ y $[a, b]$, donde $0 < a < b < \pi$.

5. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

6. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $]-\infty, -a], [-a, a]$ y $[a, +\infty[$, donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por

$$f_n(x) = nsen(x/n) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

7. Estudia la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_0^+$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$ por:

$$f_n(x) = arctg(\frac{n + x}{1 + nx}).$$

Series de funciones

8. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)} \qquad (x \geq 0).$$

Prueba que la serie $\sum f_n$ converge

a) puntualmente en $\mathbb{R}_0^+$ si $\alpha > 0$

b) uniformemente en semirrectas cerradas que no contienen al cero.

c) uniformemente en $\mathbb{R}_0^+$ si $\alpha > 1/2$.

9. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$, donde $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2} \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

10. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$, donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n e^{-nx} \qquad (x \geq 0).$$

11. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Se pide estudiar, en cada caso, la convergencia puntual en A de la serie de funciones $\sum f_n$, y la continuidad de la función suma $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

a) $A = \mathbb{R}$ y $f_n(x) = e^{-nx}$.

b) $A = \mathbb{R}$ y $f_n(x) = (-1)^n \frac{sen(n^2x)}{n(log(n+1))^2}$.

c) $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}^*$ y $f_n(x) = \frac{1}{n^2-x^2}$.

d) $A = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$ y $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}}$.

12. Estudia la derivabilidad de la función de Riemann $\xi :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida para todo $x > 1$ por: $\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Justifica también que $lim_{x \to 1} \xi(x) = +\infty$.

0.2. Series de potencias.

Sumario

Esta lección está dedicada al estudio de un tipo muy particular y muy interesante de series funcionales: las series de potencias. Éstas nos proporcionan un método expeditivo para construir nuevas funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ no racionales. En particular reaparecerán la mayoría de las funciones elementales, lo que nos permitirá un mejor conocimiento de éstas. La técnica usada consiste en dar sentido al concepto de polinomio de Taylor de grado infinito. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

0.2.1. Series de potencias

.

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. La serie funcional $(f_n(x) = a_n(x-a)^n)$

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$$

recibe el nombre de **serie de potencias centrada en** a. A los términos de la sucesión $\{a_n\}$, se les denomina **coeficientes** de la serie de la serie de potencias.

Dado $J \subseteq \mathbb{R}$, se dice que la serie de potencias converge

1. **puntualmente en** J, si la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ converge en J.

   Se suele notar, para cada $x \in J$, por

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

   a la **suma** de dicha serie.

2. **absolutamente en** J si la serie $\sum_{n\geq 0} |a_n(x-a)^n|$ converge en J.

3. **uniformemente en** J si converge puntualmente en J y si

   para cada $\epsilon > 0$, existe un natural n_0, de forma que si $n \geq n_0$, entonces, para todo $x \in J$,

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k| < \epsilon.$$

Como primer resultado, establecemos el siguiente importante resultado

Corolario 0.2.1. (Criterio de Weierstrass)
Sea J un subconjunto no vacío de números reales, $a \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Supongamos que existe una sucesión de números reales $\{\alpha_n\}$ tal que

$$|a_n(x-a)^n| \leq \alpha_n, \quad \forall x \in J, \forall n$$

y tal que la correspondiente serie $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ es convergente. Entonces la serie de potencias centrada en a converge absolutamente y uniformemente en J

Demostración. La convergencia absoluta es consecuencia de las propiedades conocidas para series de números reales. En cuanto a la convergencia uniforme, nótese que si $p < q \in \mathbb{N}$, es claro que

$$|\sum_{k=0}^{p} a_k(x-a)^k - \sum_{k=0}^{q} a_k(x-a)^k| = |\sum_{k=p+1}^{q} a_k(x-a)^k| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |a_k(x-a)^k| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k,$$

y por tanto la condición de Cauchy para la serie de números reales, nos asegura la condición de Cauchy para la serie funcional $\sum_{k\geq 0} a_k(x-a)^k$.

∎

Este resultado nos proporciona un método general para estudiar la convergencia puntual y uniforme de cualquier serie de potencias.

Lema 0.2.2. *(***Lema de Abel***)*
Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Supongamos que existe $r > 0$ tal que la sucesión $\{a_n r^n\}$ está acotada. Entonces la serie funcional $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ converge absoluta y uniformemente en el intervalo $[a-\rho, a+\rho]$, siempre que $o < \rho < r$.

Demostración. Por hipótesis, existe $M > 0$ tal que $|a_n r^n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $0 < \rho < r$. Aplicando el criterio de Weierstrass, se tiene que para todo $x \in [a-\rho, a+\rho]$ tenemos que:

$$|a_n(x-a)^n| \leq |a_n| r^n \frac{|x-a|^n}{r^n} \leq M\frac{|x-a|^n}{r^n} \leq M\frac{\rho^n}{r^n} = M(\frac{\rho}{r})^n.$$

∎

La búsqueda del número positivo r "más grande posible"que cumpla la hipótesis del Lema de Abel motiva el concepto de radio de convergencia. Concretamente:

Sean $A := \{r \in \mathbb{R}^+; \ \ \{a_n r^n\} \text{ está acotada}\}$ y $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ la serie de potencias asociada.

1. Si $A = \emptyset$, diremos que el **radio de convergencia** de la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ es igual a cero, $R = 0$.
2. Si $A \neq \emptyset$ y A no está mayorado, diremos que el **radio de convergencia** de dicha serie es **infinito** , $R = \infty$.
3. Si $A \neq \emptyset$ y A está mayorado diremos que el correspondiente **radio de convergencia** es el **supremo** del conjunto A, esto es $R = Sup(A)$.

En lo que sigue, cuando hagamos referencia al conjunto A no será otro que el introducido aquí.

Observemos que el radio de convergencia es independiente del centro a de la serie. Además, como veremos en el siguiente resultado, el conocimiento del radio de convergencia proporciona çasi"toda la información sobre la convergencia de la serie.

Teorema 0.2.3. *Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es R.*

1. *Si R es cero, entonces la serie sólo converge en a.*
2. *Si R es infinito, entonces la serie converge absoluta y uniformemente en cada intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.*
3. *Si $R \in \mathbb{R}^+$, entonces la serie converge absoluta y uniformemente en cada intervalo cerrado y acotado contenido en $]a-R, a+R[$ y no converge en ningún punto de $\mathbb{R}\backslash[a-R, a+R]$.*

Demostración. (i) Nótese en primer lugar que si $R = 0$, entonces $A = \emptyset$. Supongamos que la serie converge en un punto $b \neq a$. Es claro que la sucesión $\{a_n(b-a)^n\}$ converge a cero. En particular, $b - a \in A$, con lo que llegamos a la contradicción.

(ii) Supongamos que $R = +\infty$, esto es, A no está mayorado. Sea $[c, d]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Puesto que A no está mayorado, existe $r \in A$ tal que $r > Max\{|c-a|, |d-a|\}$ y por tanto existe $\rho < r$ tal que $[c, d] \subseteq [a-\rho, a+\rho]$. Basta ahora aplicar el Lema de Abel.

(iii) Supongamos finalmente que $R \in \mathbb{R}^+$ y sea $[c, d]$ un intervalo cerrado y acotado contenido en $]a-R, a+R[$. Es claro que existe $r \in A$ tal que

$$R > r > Max\{|c-a|, |d-a|\},$$

con lo que basta seguir la argumentación anterior, para concluir que la serie converge absoluta y uniformemente en cada intervalo cerrado y acotado contenido en $]a-R, a+R[$. Por otra parte, si la serie convergiese en un punto b tal que $|b-a| > R$, entonces tendríamos que $|b-a| \in A$, en contradicción con la definición de R.

■

Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias, cuyo radio de convergencia R es no nulo (serie de potencias no trivial). Si $R \in \mathbb{R}^+$, llamemos I al intervalo $]a-R, a+R[$ e $I = \mathbb{R}$ si R es infinito. En adelante, nos referiremos al intervalo I como el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$.

Nota

Antes de proseguir, conviene resaltar, si el radio es un número real positivo R, nada se puede afirmar sobre la convergencia en los extremos del intervalo. De hecho, existen series de potencias con idéntico radio de convergencia pero con distinto carácter de convergencia en dichos puntos, piénsese por ejemplo en la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}(x-a)^n$$

y en la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-a)^n.$$

Este hecho motiva el siguiente resultado.

Teorema 0.2.4. Teorema de Abel

Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias, cuyo radio de convergencia R es no nulo. Si la serie converge en el punto $a+R$ (resp. $a-R$) entonces lo hace uniformemente en el intervalo $[a, a+R]$ (resp. $[a-R, a]$).

Demostración. Requiere del criterio de Abel para una serie funcional ■

Busquemos ahora un procedimiento expeditivo para determinar el radio de convergencia.

Proposición 0.2.5. *Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias cuyos coeficientes son no nulos y sea R su radio de convergencia.*

1. *Si la sucesión $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}$ converge a un número real positivo L, entonces $R = \frac{1}{L}$.*
2. *Si la sucesión $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}$ converge a cero, $R = \infty$.*
3. *Si la sucesión $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}$ diverge positivamente, entonces $R = 0$.*

Demostración. Apliquemos el criterio del cociente para estudiar la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$. Pongamos $c_n = |a_n(x-a)^n|$. Tenemos que:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = |\frac{a_{n+1}}{a_n}||x-a| \to L|x-a|.$$

Si $L \in \mathbb{R}^*$, el criterio del cociente nos dice que la serie converge absolutamente si $L|x-a| < 1$, es decir, si $|x-a| < 1/L$, y que si $L|x-a| > 1$ entonces la serie no converge. Deducimos así que el radio de convergencia es $R = 1/L$.

Si $L = 0$ la condición $L|x-a| < 1$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$ y el radio de convergencia es $R = +\infty$.

Si $L = +\infty$ entonces para todo $x \neq a$ se tiene que:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}|x-a| \to +\infty,$$

luego, por el criterio del cociente, la serie no converge, ya que su término general no converge a 0. Luego en este caso es $R = 0$.

∎

De forma totalmente análoga, haciendo uso del criterio de la raíz, se prueba el siguiente resultado.

Proposición 0.2.6. *Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias y supongamos que la sucesión $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ converge a $L \in [0, +\infty[$. Entonces si $L = 0$ el radio de convergencia de la serie es $R = +\infty$, si $L = +\infty$ el radio de convergencia de la serie es $R = 0$ y si $L \in \mathbb{R}^+$ el radio de convergencia de la serie es $R = 1/L$.*

0.2.2. Funciones definidas por series de potencias

Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias no trivial cuyo radio de convergencia es R, y sea I su intervalo de convergencia. Podemos definir la función suma:

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

mediante la fórmula

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

Veamos que dichas funciones son también derivables en I. Antes necesitamos el siguiente

Lema 0.2.7. *Las series $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ y $\sum_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}$ tienen igual radio de convergencia.*

Demostración. Notemos por $B := \{r \in \mathbb{R}^+;\ \ \{na_n r^n\}$ está acotada$\}$ y por R' al radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}$. Es evidente que $B \subseteq A$ y por tanto, $R' \leq R$. En particular si $R = 0$, entonces, $R' = R = 0$. Consideremos entonces que $R \in \mathbb{R}^+$ y que $R' < R$. Sea $R' < r_0 < R$. Por definición existe $r \in A$ y $M > 0$ tales que $r_0 < r$ y $|a_n r^n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que:

$$n|an|r_0^n = n|a_n|r^n \frac{r_0^n}{r^n} \leq Mn(\frac{r_0}{r})^n.$$

Dado que $0 < r_0 < r$, la sucesión $\{n(\frac{r_0}{r})^n\}$ converge a cero, y por tanto está acotada y, en consecuencia, la sucesión $\{na_n r_0^n\}$ también está acotada. Hemos probado así que $r_0 \in B$, lo cual es una contradicción con la elección de r_0 y, por tanto, se sigue que necesariamente debe ser $R \leq R'$, luego $R = R'$. En el caso en que $R = +\infty$, puede repetirse el razonamiento anterior con cualquier número $r_0 > 0$ para concluir que también es $R' = +\infty$.

■

Teorema 0.2.8. *Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias no trivial, I su intervalo de convergecia y sea f la función suma, entonces f es de clase $\mathcal{C}^\infty(I)$ y para cada $x \in I$ y $k \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$f^{k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-a)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}(x-a)^n.$$

En particular,

$$f^{k)}(a) = k!a_k.$$

Si además la serie es convergente en $a+R$ entonces f se puede extender al intervalo $]a-R, a+R]$, con $f(a+R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ resultando una función continua en $]a-R, a+R]$.

Demostración. Pongamos, para cada $x \in I$, $f_n(x) = a_n(x-a)^n$. Teniendo en cuenta el lema anterior, las series de potencias $\sum_{n\geq 0} f_n$ y $\sum_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}(= \sum_{n\geq 0} f_n')$ tienen igual radio de convergencia. Podemos aplicar ahora el corolario 0.1.5 de derivación y continuidad uniforme para obtener que la función suma f es derivable y su derivada viene dada para todo $x \in I$ por:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}.$$

Podemos volver a aplicar este resultado a la serie de las derivadas $\sum_{n\geq 1} na_n(x-a)^{n-1}$, pues dicha serie sigue siendo una serie de potencias con el mismo radio de convergencia, y deducimos que la función suma de dicha serie, que es f' según acabamos de probar, es derivable y su derivada viene dada para todo $x \in I$ por:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}.$$

Este razonamiento puede repetirse tantas veces como queramos. Una simple y evidente inducción prueba la fórmula de derivación para todo $k \in \mathbb{N}$. La segunda igualdad es un simple cambio de índice. ∎

Veamos ahora algunas consecuencias de los últimos resultados.

1. La suma de una serie de potencias puede derivarse como si se tratase de una suma finita.

   Nótese que la fórmula del teorema anterior de las derivadas sucesivas de la función definida por una serie de potencias, significa simplemente que dichas derivadas pueden obtenerse derivando cada uno de los términos de la serie de partida.

2. La serie de potencias está totalmente determinada.

   La misma fórmula del teorema anterior nos dice que en caso de que una función f pueda escribirse como suma de una serie de potencias, dicha serie está completamente determinada, de hecho, en cada punto $a \in I$,

   $$a_n = f^{n)}(a)/n!,$$

   de ahí que la correspondiente serie reciba el nombre de **serie de Taylor**.

El siguiente resultado es otra consecuencia inmediata del teorema de derivación y nos dice que siempre podemos calcular una primitiva de una serie de potencias expresándola por medio de otra serie de potencias.

Corolario 0.2.9. *(Primitiva de una serie de potencias)*
Las series de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ y $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ tiene igual radio de convergencia. Supuesto que dicho radio de convergencia es no nulo y llamando I al intervalo de convergencia, se verifica que la función suma

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \qquad (x \in I)$$

es una primitiva de la función suma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad (x \in I).$$

En otros términos, este resultado afirma que para cada $x \in I$ se verifica la igualdad:

$$\int_a^x \Big(\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n(t-a)^n\Big)dt = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \int_a^x a_n(t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

Ejemplo 0.2.10. Sabemos que para cada $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n,$$

por lo que integrando término a término se obtiene que la función:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

función que es derivable en $]-1,1[$ con derivada $h'(x) = \frac{1}{1+x}$. Por tanto, las funciones h y $f(x) = log(1+x)$ tienen la misma derivada en $]-1,1[$ y, como $h(0) = f(0)$, concluimos que $h(x) = log(1+x)$, esto es, para cada $x \in]-1,1[$ se tiene que:

$$log(1+x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Aplicación a otras series funcionales

Obsérvese que la serie funcional $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$ no es una serie de potencias, pero que, sin embargo, podemos asociarle una serie de potencias, concretamente la serie $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $b_{2n} = a_n$ y $b_{2n-1} = 0$. Si notamos por $\{F_n\}$ a la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$ y por $\{G_n\}$ a la de $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, es claro que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $G_{2n+1} = F_n$ y $G_{2n} = F_n$, y por tanto la serie converge $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$ converge en un punto x, si, y sólo si, lo hace la serie $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, y lo mismo puede decirse de la convergencia uniforme. Esto nos permite aplicar a este tipo de series funcionales las propiedades (acerca de la continuidad, derivación e integración) vistas para las series de potencias. La dificultad se presenta a la hora de calcular el radio de convergencia de la serie de potencias asociada, ya que algunos de los coeficientes son cero. Así, en la práctica, para estudiar su convergencia, previamente calculamos el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Si $R \in \mathbb{R}^+$, y deducimos que la serie $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$ converge en x si $x^2 < R$, es decir, si $|x| < \sqrt{R}$. Recapitulando, la serie funcional $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$ converge absoluta y uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en $]-\sqrt{R}, \sqrt{R}[$ y no converge en ningún punto x tal que $|x| > R$. Si R es infinito, la serie converge absoluta y uniformemente en cada intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

0.2.3. Desarrollo en serie de Taylor

Hemos visto pues que toda serie definida por una serie de potencias es de clase C^∞ en el intervalo de convergencia I. ¿Es cierto recíproco? Es decir, si f es de clase C^∞ en un cierto intervalo I, ¿se puede asegurar que la función es la suma de una serie de potencias? En general la respuesta es no.

Existen funciones de clase C^∞ para las cuales la serie de Taylor tiene radio de convergencia cero

" E. Borel afirma que dada cualquier sucesión $\{b_n\}$ de números reales y cualquier número real a, existe $\delta > 0$ y una función f de clase $C^\infty(]a-\delta, a+\delta[)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{n)}(a) = b_n$. Por tanto, si tomamos $b_n = (n!)^2$, y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!(x-a)^n$ obtenemos una función de clase $C^\infty(]a-\delta, a+\delta[)$ (para conveniente $\delta > 0$) cuya serie de Taylor tiene radio de convergencia cero".

Existen funciones para las cuales la suma de su serie de Taylor no coincide con la función más que en el punto que la generó, por ejemplo,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \neq 0, \; f(0) = 0 \qquad \text{(en este caso } f^{n)}(0) = 0).$$

El siguiente resultado nos da una condición suficiente para que una función sea suma de una serie de potencias

Proposición 0.2.11. *Sea I un intervalo y f un función de clase C^∞ en I. Supongamos que existe $M > 0$ tal que, para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:*

$$|f^{n)}(x)| \leq M,$$

entonces, para cualesquiera $a, x \in I$, se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Demostración. Sea $a \in I$ y sea P_n el polinomio de Taylor de orden n de f en el punto a. La fórmula del Resto nos asegura que

$$|f(x) - P_n(x)| = |\frac{f^{n+1)}(y_n)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}| \leq |\frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}|,$$

donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, y_n es un punto intermedio entre a y x. Aplicando que la sucesión $\{\frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\}$, fijado $x \in I$, converge a cero, obtenemos la convergencia puntual de la sucesión $\{P_n\}$ a la función f.

■

Y como consecuencia obtenemos los siguientes desarrollos en serie de potencias de algunas funciones elementales.

Corolario 0.2.12.
Para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

b) $cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

c) sen$(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Pero también podemos obtener desarrollos de otras funciones elementales.

Proposición 0.2.13. *Para cada* $x \in]-1, 1[$*, se tiene:*

$$arctg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}.$$

Demostración. Sea $x \in]-1, 1[$. Sabemos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Admitiendo que la serie funcional $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ tiene un comportamiento similar a una serie de potencias, podemos deducir que dicha serie funcional converge en los mismos puntos que la serie funcional $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}$, obtenida derivando término a término. Así pues, la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

es derivable y para cada $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y, puesto que $f(0) = arctg(0)$, deducimos que $f(x) = arctg(x)$.

■

Nótese que el desarrollo en serie de la función arcotangente, recién obtenido, es válido sólo en $]-1, 1[$ y no en todo $\mathbb{R}$ como cabría esperar a primera vista, dado que la función arcotangentes es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.

0.2.4. Aplicaciones: Suma de series de números reales

Para finalizar, vamos a dar dos ejemplos de cómo sumar dos series de números reales usando las series de potencias.

Sabemos que, para cada $x \in]0, 2[$,

$$log(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}.$$

Por otra parte, aplicando el teorema de Abel, el segundo miembro define la función $g :]0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1},$$

la cual es continua en 2, obtenemos así que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = g(2) = lim_{x \to 2} g(x) = lim_{x \to 2} log(x) = log2.$$

Tal como advertimos en el comienzo del capítulo el conocimiento de las series de potencias nos proporcionan un método de aproximación de los valores $log2$.

0.2.5. Relación de ejercicios

1. Calcula el radio de convergencia de cada una de las series de potencias$\sum_n x^n$ y estudia el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo de convergencia, en los siguientes casos:

$$a_n = \frac{n - \sqrt{n}}{n^2 + n + 1}, \qquad a_n = (n+1)^{log(n+1)}, \qquad a_n = e - (1 + 1/n)^n.$$

$$a_n = \frac{1{,}3{,}5...(2n+1)}{2{,}4{,}6...(2n+2)}, \qquad a_n = a^{\sqrt{n}} \quad (a > 0), \qquad a_n = \frac{n!}{(n+1)^n}.$$

$$a_n = 1 + 1/2 + ... + 1/n, \qquad a_n = \frac{1}{log(n+2)}, \qquad a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}.$$

2. Calcúlese el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n \geq 1} n\, x^n \;\; ; \; \sum_{n \geq 1} n^2\, x^n \;\; ; \; \sum_{n \geq 1} \frac{(n-1)^3}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

3. Calcula la función suma de la serie de potencias $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

4. Calcula la función suma de las series de potencias $\sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{x^{3n}}{2^n}$. y $\sum_{n \geq 1} \frac{n(x+3)^{3n}}{2^n}$.

5. Expresa la función suma de las series de potencias $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$. y $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} x^n$. por medio de funciones elementales y calcula el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$.

6. Calcula el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n + 3}{n+1} x^n \qquad \sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + 2 + ... + n} x^n.$$

7. Calcula la función suma de la serie de potencias $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(2n+1)} x^n$ y deduce el valor de las sumas de las series: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(2n+1)}$ y $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$

8. Prueba que las funciones definidas por:

$$g(x) = \frac{sen(x)}{x}, \quad g(0) = 1 \qquad f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \; f(0) = 1.$$

son de clase C^∞ en su intervalo natural de definición.

9. Calcula el desarrollo en serie de potencias centrada en un punto a de la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 7}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}.$$

10. Demuéstrese, usando el desarrollo en serie de Taylor de la función arcotangente, que

$$\pi/4 = arctg(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$

CAPÍTULO 1

Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

¿Por qué una nueva integral?

Hacia finales del siglo XIX resultó claro para muchos matemáticos que la integral de Riemann tiene importantes limitaciones, es sabido por ejemplo su mal comportamiento con ciertos procesos de convergencia. Ésta y otras limitaciones tales como

1. El conjunto de funciones integrables es relativamente pequeño:

   Hay funciones sencillas que no son integrables. Recuérdese por ejemplo que la función de Dirichlet, esto es, la función, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \textit{ es racional} \\ 1 & \textit{si } x \textit{ es irracional} \end{cases}$$

   no es integrable en el sentido de Riemann.

2. La extensión del concepto de integral sobre conjuntos de números reales que no sean intervalos o su extensión a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tiene serias dificultades.

Estas dificultades obligaron a realizar nuevos intentos de construcción de otras integrales. Entre estos intentos destacan los debidos a Jordan, Borel, Young y finalmente el de Lebesgue, que resultó ser el más exitoso.

Estos problemas están íntimamente relacionados con el hecho de ampliar el concepto de medida a otros conjuntos de números reales no necesariamente intervalos y por extensión a otros subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Las cuestiones pues a resolver son varias: ¿sobre qué tipo de conjuntos se puede integrar? y ¿qué funciones se pueden integrar? y ¿cómo hallar su integral?

1.1. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Sumario

El objetivo de esta lección es contestar a la primera pregunta: ¿sobre qué tipo de conjuntos se puede integrar?. Veremos que la respuesta está relacionada con la respuesta a otras tantas preguntas: ¿qué conjuntos se pueden medir?, ¿cómo medirlos? El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.1.1. Conjuntos medibles

¿Qué conjuntos que se pueden medir?.

Veamos primero algunos conjuntos que deben estar forzosamente entre la familia de los conjuntos "medibles".

Dado I un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ diremos que es un **intervalo** (respectivamante **intervalo acotado**), si existen $I_1, I_2, ..., I_n$ intervalos (respectivamante intervalos acotados) de números reales tales que

$$I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n.$$

Veamos cómo añadir a partir de aquí nuevos conjuntos. Para ello necesitamos introducir algunos conceptos.

Sea Ω un subconjunto no vacío. Se dice que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω es una **σ-álgebra** si

i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

ii) Si $\{A_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, y

iii) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

Al par $(\Omega, \mathcal{A})$ se le denomina **espacio medible**. El conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ de todos los subconjuntos es un ejemplo de σ-álgebra. Es claro además que la intersección de σ-álgebras es una nueva σ-álgebra. Como consecuencia, si $\mathcal{S}$ es una familia de subconjuntos de Ω, entonces existe una menor σ-álgebra conteniendo a $\mathcal{S}$ y contenida en $\mathcal{P}(\Omega)$, que denominaremos la **σ-álgebra engendrada** por $\mathcal{S}$.

Veamos algunas propiedades de los espacios medibles.

Proposición 1.1.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Entonces*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.*
3. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.*
4. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \backslash B \in \mathcal{A}$.*
5. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Para hacer en clase

■

Ejemplo:

Dado Ω un espacio topológico podemos considera la σ-álgebra engendrada por la familia de los conjuntos abiertos de Ω, familia que llamaremos **σ-álgebra de Borel**, **B**, mientras que a sus elementos los llamaremos **borelianos**.

Obsérvese que los conjuntos que resultan de la intersección numerable de abiertos (conjuntos tipo G_δ), conjuntos no necesariamente abiertos, y los conjuntos que resultan de la unión numerable de cerrados (conjuntos tipo F_δ) conjuntos no necesariamente cerrados, son también conjuntos borelianos.

Veamos ahora cómo medir dichos conjuntos.

Una vez elegida la familia de conjuntos medibles el problema es asignarle una medida.

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Se dice que una aplicación

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\},$$

es una **medida sobre $\mathcal{A}$** si verifica las siguientes propiedades:

1. Existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) \in \mathbb{R}^+$.

2. Si $\{A_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$, disjuntos dos a dos, entonces $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. (propiedad de σ-aditividad)

A la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se le denomina **espacio de medida**.

Ejemplo:

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea μ la función definida en cada $A \in \mathcal{A}$ por $\mu(A)$ =número de elementos de A si A es finito y $\mu(A) = \infty$ en otro caso. Pues bien , la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un ejemplo de espacio de medida.

Veamos algunas propiedades de los espacios de medida.

Proposición 1.1.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ son disjuntos entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (propiedad de aditividad).*

3. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$ (propiedad de monotonía). Si además $\mu(A) \in \mathbb{R}^+$ entonces $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

4. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ creciente ($A_n \subseteq A_{n+1}$), entonces*

$$\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = lim_n \mu(A_n).$$

   (propiedad de continuidad creciente).

5. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ decreciente ($A_{n+1} \subseteq A_n$) con $\mu(A_1) \in \mathbb{R}^+$ entonces*

$$\mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) lim_n = \mu(A_n).$$

   (propiedad de continuidad decreciente).

6. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq B$ entonces $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (propiedad de subaditividad).*

7. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$, entonces*

$$\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

   (propiedad de σ-subaditividad)

Demostración. Para hacer en clase

■

Nótese que la condición exigida en 5) sobre la finitud de la medida de A_1 es esencial Tal com muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Sea $\mathcal{A}$ la σ-álgebra generada por la familia $\{[n, \infty[: n \in \mathbb{N}\}$ y la medida μ definida por $\mu(A) = longitud(A)$ para cada intervalo contenido en $\mathcal{A}$. Tómese $A_n = [n, \infty[$

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Un conjunto $A \in \mathcal{A}$ se dice que de **medida nula** si $\mu(A) = 0$. Como consecuencia de la propiedad de σ-aditividad se deduce que la unión numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula.

Una propiedad P relativa a elementos del conjunto Ω se dice ser cierta **casi por doquier (c.p.d.)** si es cierta salvo en un conjunto de medida nula.

Así dos funciones $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ son iguales c.p.d. si el conjunto $\{x \in \Omega;\ f(x) \neq g(x)\}$ es un conjunto de medida nula.

1.1.2. Construcción de la medida de Lebesgue. Medida exterior.

En esta sección vamos a construir una medida sobre una cierta σ-álgebra contenida en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ y que contiene a la familia de los intervalos acotados. Es claro que si I es un intervalo acotado, entonces su medida debe coincidir con su volumen, esto es, $medida(I) = V(I)$, y claro está

$$V(I) = l(I_1)l(I_2)...l(I_N),$$

donde $l(I_k) = b_k - a_k$, siempre que $I_k = [a_k, b_k]$. Sea $\mathcal{I}^N$ la familia de intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$.

Veamos si es posible una medida sobre $\mathbb{R}^N$, que extienda el volumen. Convenimos que $0.\infty = 0$.

Dado un conjunto A. La idea intuitiva es "cuadricular" el plano e imponer que la medida del conjunto sea menor que la suma del volumen de todas las cuadrículas que recubren (por exceso) al conjunto A. Es notorio que si las dimensiones de las cuadrículas son de menor tamaño, la suma de dicho volumen se ajusta mejor a la "medida"del conjunto A. Así pues, en una primera idea sería tomar

$$m(A) := Inf\{\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n); A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n : \ n \in \mathbb{N}, I_n \in \mathcal{I}^n, \}.$$

El problema a considerar es si dicha aplicación m es verdaderamente una medida en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Veremos enseguida que m **no es una medida** en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Veamos qué propiedades tiene $\lambda^* = m$.

Proposición 1.1.3.

1. *$\lambda^*(\emptyset) = 0$.*
2. *Si $A \subseteq B$ son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ entonces $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.*
3. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, entonces*

$$\lambda^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

(propiedad de σ-subaditividad)

Demostración. Para hacer en clase

■

Dado un conjunto Ω, se dice que una aplicación

$$\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\},$$

es una **medida exterior sobre** $\mathcal{P}(\Omega)$ si verifica las siguientes propiedades:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \subseteq B$ son dos subconjuntos de Ω entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3. Si $\{A_n\}$ es una sucesión de subconjuntos de Ω, entonces

$$\mu^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

(propiedad de σ-subaditividad)

Así pues, hemos probado que λ^* es una medida exterior sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, a la que denominaremos **medida exterior de Lebesgue**. En segundo lugar veamos que nos podemos quedar con los intervalos acotados abiertos

Proposición 1.1.4. *Dado $A \subseteq \mathbb{R}^N$*

$$\lambda^*(A) = Inf\{\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n); A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n : \; n \in \mathbb{N}, I_n \in \mathcal{I}^N, \; abierto\}.$$

Demostración. Para hacer en clase

■

Se puede probar que existe una mayor σ-álgebra contenida en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ tal que λ^* sobre dicha σ-álgebra es una medida. Este hecho es más general:

Dado Ω un conjunto y μ^* una medida exterior sobre $\mathcal{P}(\Omega)$, definimos

$$\mathcal{C}_{\Omega,\mu^*} := \{E \subseteq \Omega; \; \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C), \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\}.$$

Proposición 1.1.5. *(Teorema de Carathéodory)*

Si Ω es un conjunto y μ^* es una una medida exterior sobre $\mathcal{P}(\Omega)$. Entonces la familia $\mathcal{C}_{\Omega,\mu^*}$ es una σ-álgebra y $\mu^*/\mathcal{C}_{\Omega,\mu^*}$ es una medida.

Demostración. Para hacer en clase

■

Sea $a = (a_1, a_2, \cdots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ y sea $\delta > 0$. Un **N-cubo de vértice** a **y lado** δ, $Q(a, \delta)$, es un intervalo construido de la siguiente forma

$$Q(a, \delta) = [a_1, a_1 + \delta[\times[a_2, a_2 + \delta[\times \cdots \times [a_N, a_N + \delta[.$$

Un N-cubo de vértice a y lado δ se dice que es **cubo diádico de lado** $1/2^n$ si $2^n a \in \mathbb{Z}^N$.

Lema 1.1.6. *Dos cubos diádicos o son disjuntos o uno ésta contenido en el otro.*

Demostración. Sean $Q_1 = Q(a, 1/2^n)$ y $Q_2 = Q(b, 1/2^m)$ dos cubos diádicos y supongamos que $n \leq m$. Supongamos que existe $z \in Q_1 \cap Q_2$. En particular,

$$Max\{a_j, b_j\} \leq z_j \leq min\{a_j + 1/2^n, b_j + 1/2^m\}.$$

Luego $2^m a_j \leq 2^m z_j < 2^m b_j + 1$, y por ser dos números enteros, deducimos que $2^m a_j \leq 2^m b_j$ y por tanto

$$a_j \leq b_j \leq z_j \leq a_j + 1/2^n.$$

Si $n = m$, razonando de igual forma, deducimos que $b_j \leq a_j$ luego $a = b$ y por tanto $Q_1 = Q_2$.

Si $n > m$, puesto $0 \leq b_j - a_j < 1/2^n$, entonces $0 \leq 2^m(b_j - a_j) < 2^m/2^n$, y por ser tratarse de una desigualdad de números enteros, tenemos que $2^m(b_j - a_j \leq 2^m/2^n - 1$. Luego

$$0 \leq b_j - a_j \leq 1/2^n - 1/2^m \tag{1.1.1}$$

Si tomo $x \in Q_2$ entonces $0 \leq x_j - b_j < 1/2^m$. Si ahora sumamos esta desigualdad con la anterior 1.1.1, deducimos que $0 \leq x_j - a_j < 1/2^n$, esto es, $x \in Q_1$.

■

Lema 1.1.7. *Dado un número natural* n *entonces*

1. *El conjunto* $A_n^N := \{x \in \mathbb{R}^N;\ 2^n x \in \mathbb{Z}^N\}$ *es un conjunto numerable.*
2. *El conjunto de cubos diádicos* $\{Q(a, 1/2^n) :\ a \in A_n^N\}$ *es una partición de* $\mathbb{R}^N$*.*

Demostración. 1) Es claro que $A_n^N \subseteq \mathbb{Q}^N$, luego es numerable.

2) Sea $y \in \mathbb{R}^N$. Basta coger a tal que $a_j = E[2^n y_j]/2^n$. Es claro que $a \in A_n^N$ y que $y \in Q(a, 1/2^n)$. En consecuencia, $\mathbb{R}^N = \cup_{a \in A_n^N} Q(a, 1/2^n)$ y, por el lema anterior, dichos conjuntos son disjuntos. ■

Proposición 1.1.8. *Si* G *es un conjunto abierto de* $\mathbb{R}^N$ *entonces existe una sucesión de cubos diádicos* $\{Q_n\}$ *cuyo cierre está contenido en* G*, disjuntos entre sí, tales que* $G = \cup_{n=1}^{\infty} Q_n$*.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $P_n := \{Q(a, 1/2^n) :\ a \in A_n^N\}$. Definimos $S_0 := \{Q \in P_0 :\ \overline{Q} \subset G\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n := \{Q \in P_n :\ \overline{Q} \subseteq G, \text{y } Q \text{ no está contenido en ningún elemento de } S_{n-1}\}.$$

Puesto que $\cup_n S_n$ es un conjunto numerable, escribimos $\cup_n S_n = \{Q_n; n \in \mathbb{N}\}$. Por hipótesis, los cubos diádicos son disjuntos y $\overline{Q_n} \subseteq G$. Sea ahora $y \in G$. Tómese $r > 0$ tal que

$$[y_1 - r, y_1 + r] \times [y_2 - r, y_2 + r] \times \cdots \times [y_N - r, y_N + r] \subseteq G,$$

$n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < r$ y $Q = Q(a, 1/2^n)$ tal que $y \in Q$. Obsérvese que, si $x \in \overline{Q}$ entonces, para $1 \leq j \leq N$,

$$y_j - r \leq y_j - 1/2^n \leq a_j \leq x_j \leq a_j + 1/2^n \leq y_j + 1/2^n \leq y_j + r,$$

luego $\overline{Q} \subseteq G$. Por tanto $Q \in \cup_n S_n$, luego $G = \cup_{n=1}^{\infty} Q_n$

■

Como consecuencia más importante, obtenemos que

Corolario 1.1.9. *La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}^N$ de $\mathbb{R}^N$ (con la topología usual) coincide con la σ-álgebra generada por la familia de los intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$.*

Demostración. Para hacer en clase

■

Todavía podemos concretar algo: el siguiente resultado es conocido como la **regularidad de la medida exterior de Lebesgue**.

Proposición 1.1.10. *Dado $A \subseteq \mathbb{R}^N$ existe $B \in \mathcal{B}^N$ contenido en A cuya medida exterior de Lebesgue coincide con la de A.*

Demostración. Para hacer en clase

■

1.1.3. Teoremas de existencia y unicidad de la medida de Lebesgue.

Sabemos que existen conjuntos A borelianos de medida cero, $\lambda(A) = 0$, que contienen subconjuntos no medibles. Parece pues conveniente añadir a la σ-álgebra de Borel estos subconjuntos.

Ya podemos enunciar los resultados principales de esta lección.

Teorema 1.1.11. *(Teorema de la existencia de la medida de Lebesgue)*

1. *La familia $\mathcal{M} := \{B \cup Z;\ B \in \mathcal{B}^n, \lambda^*(Z) = 0\}$ es una σ-álgebra.*

2. *$\lambda := \lambda^*/\mathcal{M}$ es una medida sobre $\mathcal{M}$ tal que $\lambda(I) = v(I)$ para todo I intervalo acotado.*

Demostración. Para hacer en clase

$\blacksquare$

A la σ-álgebra $\mathcal{M}$ se le denomina σ-álgebra de Lebesgue. La medida λ recibe el nombre de **medida de Lebesgue**. A los elementos de la σ-álgebra $\mathcal{M}$ se les denomina **conjuntos medibles-Lebesgue** o simplemente **medibles**.

Tal como hemos visto, los conjuntos medibles se pueden representar por $A = B \cup Z$, donde B es un boreliano y Z es un subconjunto de un boreliano de medida nula. Nótese que en tal caso $\lambda(A) = \lambda(B)$.

De hecho veamos que es la **única** medida sobre $\mathcal{M}$ verificando la segunda propiedad. Antes necesitamos el siguiente resultado importante en sí mismo

Proposición 1.1.12. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Equivalen*

1. $E \in \mathcal{M}$.
2. $E \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^N,\lambda^*}$.
3. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe G abierto de $\mathbb{R}^N$ tal que $E \subseteq G$ y $\lambda^*(G \cap E^C) < \varepsilon$.*
4. *Existe un conjunto de tipo G_δ A, tal que $E \subseteq A$ y $\lambda^*(A \cap E^C) = 0$.*
5. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe F cerrado de $\mathbb{R}^N$ tal que $F \subseteq E$ y $\lambda^*(E \cap F^C) < \varepsilon$.*
6. *Existe un conjunto de tipo F_σ, B, tal que $B \subseteq E$ y $\lambda^*(E \cap F^C) = 0$.*

En tal caso,

$$\lambda(E) := Inf\{\lambda(G);\ G \text{ abierto } E \subseteq G\} = Sup\{\lambda(K);\ K \text{ compacto } K \subseteq E\}.$$

Demostración. Para hacer en clase

■

Teorema 1.1.13. *(Teorema de unicidad de la medida de Lebesgue)*
La medida de Lebesgue es la única medida sobre la σ-álgebra de Lebesgue que extiende al volumen sobre la familia de los intervalos acotados.

Demostración. Para hacer en clase

∎

Más tarde veremos en un ejercicio que $\mathcal{M}$ es la mayor σ- álgebra sobre la que λ^* es aditiva.

Veamos ahora que la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones.

Teorema 1.1.14. *(Caracterización de la medida mediante traslaciones)*

1. *Si μ es una medida invariante por traslaciones y tal que $\mu([0,1]^N) = \alpha$ entonces $\mu = \alpha\lambda$.*

2. *La medida de Lebesgue es la única medida sobre $\mathcal{M}$ invariante por traslaciones tal que $\mu([0,1]^N) = 1$*

Demostración. Para hacer en clase

∎

1.1.4. Relaciones de la medida con las aplicaciones y con el producto cartesiano.

El resto de la lección está dedicada a estudiar la relación de la medida de Lebesgue con otros elementos. Comenzamos por estudiar su relación con el el producto cartesiano.

Proposición 1.1.15. *Si E y F son dos subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$ entonces $E \times F$ es un conjunto medible de $\mathbb{R}^{2n}$ y*

$$\lambda(E \times F) = \lambda(E)\lambda(F).$$

Demostración. Para hacer en clase

■

Toca el turno a las aplicaciones lineales.

Proposición 1.1.16. *Si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una aplicación lineal y $E \in \mathcal{M}$ entonces $T(E) \in \mathcal{M}$ y*

$$\lambda(T(E)) = |detT|\lambda(E).$$

Demostración. Para hacer en clase

■

¿Qué ocurre con las aplicaciones continuas? Sin embargo, existen ejemplos de aplicaciones continuas de $\mathbb{R}^N$ que no conservan la medibilidad de algunos conjuntos medibles. Así pues debemos fortalecer la propiedad de continuidad.

Proposición 1.1.17. *Sea G un abierto de $\mathbb{R}^N$ y sea $f :\in C^1(G)$.*

1. *Si $Z \subseteq G$, $\lambda(Z) = 0$ entonces $\lambda(f(Z)) = 0$.*
2. *Si $E \subseteq G$, $E \in \mathcal{M}$ entonces $f(E) \in \mathcal{M}$.*

La demostración de esta último resultado requiere ver previamente cómo se relaciona la medida con las aplicaciones lipschitzianas y alguna otra propiedad de los conjuntos abiertos. Dicha demostración puede verse en [3, Proposición 10.22].

1.1.5. Relación de ejercicios

1. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $E \in \mathcal{A}$ y considérese el conjunto
$$\mathcal{A}_E = \{A \cap E;\ A \in \mathcal{A}\}.$$
Probar que la terna $(E, \mathcal{A}_E, \mu/\mathcal{A}_E)$ es un nuevo espacio de medida.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una aplicación. Probar que la familia $\{B \in \mathcal{B}^N :\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra.

3. Sea μ^* una medida exterior en un conjunto no vacío Ω. Probar que la restricción de μ^* a la σ-álgebra $\mathcal{C}_{\Omega,\mu^*}$ es una medida completa (esto es, todo subconjunto B de un conjunto $Z \in \mathcal{C}_{\Omega,\mu^*}$ tal que $\mu^*(Z) = 0$ es también un conjunto de la propia σ-álgebra).

4. Probar que $\mathcal{M}$ es la mayor σ-álgebra que contiene los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva.

5. **Existencia de conjuntos no medibles**

   a) Probar que la familia $\{x + Q :\ x \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$.
   (Indicación: La relación $x \sim y$ si $y - x \in \mathbb{Q}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$).

   b) Pongamos $\{x + Q :\ x \in \mathbb{R}\} = \{A_i;\ i \in I\}$ $(A_i \neq A_j$, para $i \neq j)$ y, para cada $i \in I$, sea $x_i \in A_i \cap [0, 1]$. Probar que el conjunto $E = \{x_i :\ i \in I\}$ no es medible.
   (Indicación: Si $\{q_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ es una numeración de $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, entonces
   $$[0; 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n + E) \subseteq [-1, 2],$$
   y los conjuntos $q_n + E$ son disjuntos entre sí).

c) Probar que cualquier subconjunto medible de E tiene medida cero.
(Indicación: Si $A \subseteq E$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty}(q_n + E) \subseteq [-1, 2]$, y los conjuntos $q_n + A$ son disjuntos entre sí).

d) Sea $M \subseteq \mathbb{R}$ con $\lambda^*(M) > 0$. Probar que M contiene un subconjunto no medible.
(Indicación: $M = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} M \cap (q + E)$).

6. Probar que la existencia de conjuntos no medibles equivale a la no aditividad de λ^*.

7. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una aplicación continua. Probar que si B es un boreliano de $\mathbb{R}^N$ entonces $f^{-1}(B)$ es también un boreliano de $\mathbb{R}^N$. Como consecuencia, probar que los homeomorfismos preservan los borelianos.

8. Sean A un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ con $N < M$. Probar que $f(A)$ es de medida cero.

9. Sea $a, u, v \in \mathbb{R}^2$ y sea P el paralelogramo

$$P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x, y) = a + tu + sv,\ t, s \in [0; 1]\}.$$

Probar que si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $T(t, s) = tu + sv$ entonces
$$\lambda(P) = |detT| = \text{base} \times \text{altura}.$$

Deducir de lo anterior el área del triángulo, del círculo y de la elipse.

10. Sea $a, u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y sea P el paralelepípedo

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y, z) = a + tu + sv + rw,\ t, s, r \in [0; 1]\}.$$

Probar que si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está definida por $T(t, s, r) = tu + sv + rw$ entonces
$$\lambda(P) = |detT| = \text{área de la base} \times \text{altura}.$$

Deducir de lo anterior el área de la esfera y del elipsoide.

1.2. Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Sumario

El objetivo de esta lección es contestar a las preguntas: ¿qué tipo de funciones se puede integrar? y ¿cómo integrar? o si se quiere en orden contrario. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.2.1. Funciones medibles. Estabilidad. Teorema de aproximación de Lebesgue.

En esta sección queremos ver ¿qué tipo de funciones se pueden integrar? Recordemos que existen funciones tan importantes como la función de Dirichlet, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x\ es\ racional \\ 1 & si\ x\ es\ irracional \end{cases}$$

que no es integrable en el sentido de Riemann.

Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(\Omega', \mathcal{A}')$ dos espacios medibles. Una función $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ se dice que es **medible** si $f^{-1}(B) \in A$ para todo $B \in \mathcal{A}'$.

En todo lo que sigue vamos a considerar $\Omega' = \mathbb{R}$ y como σ-álgebra $\mathcal{A}'$ la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.

Ejemplos de funciones medibles:

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.

- Las funciones características de cualquier conjunto medible. De hecho si $A \subseteq \Omega$ entonces

  $$A \in \mathcal{A} \text{ si, y sólo si, } \chi_A \text{ es medible.}$$

  Recuérdese que si A es un subconjunto de Ω, se llama función **característica de** A, χ_A, a la función $\chi_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

  $$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

- las funciones iguales c.p.d. a una función medible.
- las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ para todo A abierto (resp. intervalo acotado) de $\mathbb{R}$.

  Este hecho es consecuencia de que si $f : \Omega \to Y$ es una función con valores en un conjunto Y, entonces la familia $\mathcal{C} = \{B \subseteq X : \; f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ es una σ-álgebra en Y. De aquí se deduce que f es medible si, y sólo si, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ para todo B de una familia de subconjuntos de Y que genere a la σ-álgebra $\mathcal{C}$.
- las funciones continuas c.p.d. de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (por ejemplo, la función parte entera).
- las funciones iguales c.p.d. a una función continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (por ejemplo, la función de Dirichlet).
- La composición de una función medible con una función continua es una función medible.

Veamos ahora algunas propiedades que avalan la estabilidad algebraica de las funciones medibles

Proposición 1.2.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones medibles. Entonces*

1. *$f + g$ y $f.g$ son dos funciones medibles.*
2. *αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $|f|$ y $1/f$ (si f no se anula) son funciones medibles .*
3. *Las funciones $f \vee g$ definida por $(f \vee g)(x) = Max\{f(x), g(x)\}$ y $f \wedge g$ definida por $(f \wedge g)(x) = Min\{f(x), g(x)\}$ son dos funciones medibles.*
4. *Las funciones $f^+ = f \vee 0$ y $f^- = -f \vee 0$ son dos funciones medibles.*

Demostración. Para hacer en clase

■

Veamos ahora algunas propiedades que avalan la estabilidad analítica.

Proposición 1.2.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en Ω y con valores en $\mathbb{R}$. Entonces*

1. *El conjunto*

$$E = \{x \in \Omega : \ \{f_n(x)\} \text{ está mayorada (resp. minorada)}\}$$

es medible, y si dicho conjunto no es vacío, la función $f : E \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = sup\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\} \ (\text{resp. } f(x) = inf\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\})$$

para todo $x \in E$, es medible.

2. *El conjunto*

$$E = \{x \in \Omega : \ limsup f_n(x) \in \mathbb{R}\} \ (\text{resp. } liminf f_n(x) \in \mathbb{R})$$

es medible, y si dicho conjunto no es vacío, la función $f : E \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = limsup f_n(x) \ (\text{resp. } f(x) = liminf f_n(x))$$

para todo $x \in E$, es medible.

3. *El conjunto*

$$E = \{x \in \Omega : \{f_n(x)\} \text{ convergente}\}$$

es medible, y si dicho conjunto no es vacío, la función $f : E \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = lim f_n(x)$$

para todo $x \in E$, es medible.

Demostración. Para hacer en clase

■

Una función medible $s : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **simple** si sólo toma un número finito de valores. Toda función simple s puede representarse por

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

donde $s(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $A_i := \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_i\}$ y χ_{A_i} es la función característica de A_i.

Mención aparte requiere el siguiente resultado nos asegura que toda función f medible no negativa ($f \geq 0$) es límite de una sucesión creciente $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq f$ de funciones simples que converge puntualmente a f.

Teorema 1.2.3. *(de aproximación de Lebesgue)*
Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ una función medible. Entonces existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples no negativas que converge puntualmente a f. Si además f está acotada, dicha convergencia es uniforme en todo Ω.

Demostración.

■

Corolario 1.2.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples que convergen puntualmente a f. Si además f está acotada, dicha convergencia es uniforme en todo Ω.*

Demostración.

■

1.2.2. Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

En esta sección abordamos el problema de cómo hallar la integral de una función medible. Comenzamos con las funciones no negativas.

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ y sea $f : E \to \mathbb{R}_0^+$. Representamos por $G(f)$ a la gráfica de dicha función, esto es,

$$G(f) = \{(x, f(x));\ x \in E\}$$

y por $R(f)$ al recinto determinado por su gráfica y la recta $y = 0$, esto es,

$$R(f) = \{(x, y);\ x \in E, 0 < y < f(x).$$

.

Proposición 1.2.5. *Sea sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}^N$ y sea $f : E \to \mathbb{R}_0^+$. Entonces $G(f)$ y $R(f)$ son dos conjuntos medibles en $\mathbb{R}^{N+1}$ y $\lambda(G(f)) = 0$.*

Demostración. Para hacer en clase

∎

Definición 1.2.6. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ y sea $f : E \to \mathbb{R}_0^+$. Se define **la integral de f en E como la medida del recinto** $R(f)$, esto es,

$$\int_E f d\lambda = \lambda(R(f)).$$

Teorema 1.2.7. *(de la convergencia creciente para funciones medibles no negativas)*

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un espacio medible y sea $\{f_n\}$, una sucesión creciente de funciones medibles no negativas que converge puntualmente en E a $f : E \to \mathbb{R}_0^+$. Entonces f es medible y

$$\int_E f d\lambda = lim\{\int_E f_n d\lambda\}.$$

Demostración.

∎

Comencemos ahora con las funciones más sencillas y veamos cómo asignarle una integral. Veamos cómo calcular la integral de una función simple no negativa:

Proposición 1.2.8. *Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ y sea $s : E \to \mathbb{R}_0^+$ una función simple. Si $s(E) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $A_i := \{x \in E : s(x) = \alpha_i\}$ entonces*

$$\int_E s d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(A_i).$$

Nótese que si E es un conjunto medible entonces

$$\int_E 1 \, d\lambda = \lambda(E).$$

Como consecuencia del Teorema de aproximación de Lebesgue y del Teorema de la convergencia creciente para funciones medibles no negativas obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.2.9. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$ medible y sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa. Entonces existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}$ que converge puntualmente a f y se tiene que*

$$\int_E f \, d\lambda = lim\{\int_E s_n \, d\lambda\}.$$

Demostración.

∎

Nótese que la integral de f es independiente de la sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples considerada. A partir de aquí podríamos calcular la integral de cualquier función no negativa f, teniendo en cuenta que dicha integral no depende de la sucesión $\{s_n\}$ elegida. Sin embargo este método no resulta práctico y necesitamos hacer algunas observaciones

Proposición 1.2.10. *(propiedades de la integral)*

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y sean $f, g : E \to \mathbb{R}_0^+$ dos función medibles. Entonces

1. $\int_E (f+g) \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda + \int_E g \, d\lambda$.
2. $\int_E \alpha f \, d\lambda = \alpha \int_E f \, d\lambda$ $(\alpha \geq 0)$.
3. *Si* $f \leq g$ *entonces* $\int_E f \, d\lambda \leq \int_E g \, d\lambda$.
4. $\int_E f \, d\lambda = 0$ *si, y sólo si,* $f = 0$ *c.p.d.*
5. *Si* $f = g$ *c.p.d. entonces* $\int_E f \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda$.
6. *Si* $E = E_1 \cup E_2$ *y* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ *entonces* $\int_E f \, d\lambda = \int_{E_1} f \, d\lambda + \int_{E_2} f \, d\lambda$.
7. *Si E y E_n para todo n son conjuntos medibles tales que $E_n \cap E_m = \emptyset$, siempre que $n \neq m$, y $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ es una función medible entonces*

$$\int_{\cup_n E_n} f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\lambda.$$

Demostración.

∎

1.2.3. Funciones integrables

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Dada una función medible $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es **integrable en** E si

$$\int_E |f| \, d\lambda < \infty.$$

En tal caso se define la **integral de** f por

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E f^+ \, d\lambda - \int_E f^- \, d\lambda.$$

Nótese que si $f = g - h$, donde $g, h : E \to \mathbb{R}_0^+$ son dos funciones integrables entonces

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda - \int_E h \, d\lambda.$$

Dado $E \in \mathcal{M}$, representaremos por $L(E)$ al espacio formado por las funciones medibles que son integrables en E, esto es

$$L(E) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ medible}; \int_E |f| \, d\lambda < \infty\}.$$

Podemos ahora ver las propiedades de las funciones integrables.

Proposición 1.2.11. *Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ y sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ dos funciones medibles*

1) $L(E)$ es un espacio vectorial y

$$\int_E (\alpha f + g) \, d\lambda = \alpha \int_E f \, d\lambda + \int_E g \, d\lambda, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, f, g \in L(E)).$$

2)

$$|\int_E f \, d\lambda| \leq \int_E |f| \, d\lambda, \quad (f \in L(E))$$

3) Si f y g son medibles e iguales c.p.d., entonces f es integrable en E si, y sólo si, lo es g, y en tal caso

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda.$$

4) Sean E, A y B tres conjuntos medibles tales que $E = A \cup B$ y $\lambda(A \cap B) = 0$. Entonces f es integrable en E si, y sólo si, f es integrable en A y B. Además, en caso afirmativo

$$\int_E f \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_B f \, d\lambda.$$

5) Si $\{E_n\}$ es una sucesión de subconjuntos, disjuntos dos a dos, entonces f es integrable en $\cup_n E_n$ si, y sólo si, f es integrable en cada E_n y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} dd\lambda$. En tal caso

$$\int_{\cup_n E_n} f \; d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \; d\lambda\}.$$

Por fin, podemos afirmar que la función de Dirichlet es integrable en el sentido de Lebesgue; de hecho, dado que $\mathbb{Q}$ es de medida nula, se tiene que

$$\int_{[0,1]} f \; d\lambda = 1.$$

De hecho, la integral de una función no depende de su comportamiento en los conjuntos de medida cero.

1.2.4. Relación de ejercicios

1. Sean $(\Omega, \mathcal{A}$ un espacio medible y sea $E \in \mathcal{A}$.

   a) Sea $\mathcal{A}_E = \{A \cap E; \; A \in \mathcal{A}\}$. Probar que el par $(E, \mathcal{A}_E)$ es un espacio medible.

   b) Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función medible entonces f/E es una función medible cuando se considera el espacio medible $(E, \mathcal{A}_E)$.

   c) Siea $f : E \to \mathbb{R}$ una función. Probar que f es medible si, y sólo si, la función $f\chi_E : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

   $$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & si \; x \in E \\ 0 & si \; x \notin E \end{cases}$$

   es medible, y en tal caso

   $$\int_E f \; d\lambda := \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_E \; d\lambda.$$

   d) Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible. Probar que f es integrable en E si, y sólo si, $f\chi_E$ es integrable en $\mathbb{R}^n$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Probar que

   $$f = 0 \; c.p.d. \Longleftrightarrow \int_E f = 0, \; \forall E \in \mathcal{M}.$$

3. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Probar que si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles en Ω, entonces se verifican las siguientes propiedades:

   a) El conjunto $E = \{\omega \in \Omega : \; \sum_{n \geq 1} f_n(\omega)\} < \infty\}$ es medible y, si dicho conjunto no es vacío, la función $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $\omega \in \Omega$ por $f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$, es medible.

b) El conjunto $E = \{\omega \in \Omega : \ \sum_{n\geq 1} |f_n(\omega)| < \infty\}$ también es medible.

4. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Dadas $f, g, h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, probar que

   a) Si f es integrable y g es medible y acotada entonces fg es integrable.

   b) Pruébese que la condición de acotación es esencial en la afirmación anterior.

   c) Si f es medible y g, h son integrables con $g \leq f \leq h$, entonces f es integrable.

   d) Si f es medible y g, h son integrables, entonces $h \vee (f \wedge g)$ y $h \wedge (f \vee g)$ son integrables, donde para cada par de funciones φ, ϕ, $\varphi \vee \phi$ y $\varphi \wedge \phi$ se definen, para cada $\omega \in \Omega$, respectivamente por

   $$\varphi \vee \phi(\omega) = max\{\varphi(\omega), \phi(\omega)\} \quad \text{y} \quad \varphi \wedge \phi(\omega) = min\{\varphi(\omega), \phi(\omega)\}.$$

   Nota: El producto de dos funciones integrables no tiene por qué ser integrable.

5. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ medible con $0 \leq f < 1$. Probar que existe una sucesión $\{A_n\}$ de conjuntos medibles tales que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\chi_{A_n}$ converge uniformemente en Ω. Probar también que

   $$\int_\Omega f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mu(A_n).$$

6. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ medible. Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}$ tal que, para cada natural n,

   $$\mu(\{\omega \in \Omega : \ f(\omega) \neq f_n(\omega)\}) < \frac{1}{2^n}.$$

   Probar que $\{f_n\}$ converge a f c.p.d.

   [Indicación: Para cada natural n, considérese

   $$A_n = \{f(\omega) \neq f_n(\omega)\} \quad \text{y} \quad B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

   Probar que si $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ entonces $\mu(B) = 0$ y que $\{f_n\}$ converge a f en B^C.]

1.3. Teoremas de convergencia

Sumario

Tal como veremos enseguida la integral de no tiene un buen comportamiento en los procesos de convergencia. El objetivo de esta lección es ver que tales desavenencias entre el proceso de integración y de convergencia desaparecen cuando imponemos ciertas condiciones bien de monotonía bien de dominación.El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.3.1. Teorema de la convergencia monótona.

Comenzamos esta sección haciendo patente que la integral no tiene un buen comportamiento en los procesos de convergencia.

Ejemplo:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considérese la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{1+nx^2}$ para todo $x \in]0,1]$ y cero en $x = 0$.

Nótese que la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función nula.

Sin embargo, la sucesión de las integrales de las funciones $\{f_n\}$ no converge a la integral de la función límite. En efecto, por la Proposición 1.3.2, las funciones f_n son Riemann integrables con

$$\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = \int_0^1 f_n dx = arctg(x\sqrt{n})]_0^1 = arctg(\sqrt{n}),$$

y por tanto la sucesión $\{\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda\}$ converge a $\pi/2$ distinto del valor de la integral de la función nula.

Sí hemos visto precedentes de buena avenencia cuando hemos considerado cierta condición de monotonía de la sucesión de funciones, baste recordar el Teorema de la convergencia creciente para funciones medibles no negativas (Teorema 1.2.7). Nuestro primer objetivo es seguir ahondando en esta circunstancia.

Teorema 1.3.1. *(Beppo-Levi 1906) (Teorema de la convergencia monótona)(T.C.M.)*

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión **monótona** *de funciones* **integrables** *en E. Si la sucesión $\{\int_E f_n \, d\lambda\}$ de las integrales está* **acotada**, *entonces existe una función f integrable en E que es límite puntual c.p.d. de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y se tiene que*

$$\int_E f \, d\lambda = lim\{\int_E f_n \, d\lambda\}.$$

Demostración. Para hacer en clase

∎

Nótese que si g es límite puntual c.p.d. de la sucesión $\{f_n\}$, entonces $\int_E g \, d\lambda = lim\{\int_E f_n \, d\lambda\}$. Como consecuencia veamos que las funciones integrables de siempre son también integrables en el sentido de Lebesgue.

Proposición 1.3.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces*

f es integrable en el sentido de Riemann si, y sólo si, f es continua c.p.d.

Demostración. /

∎

Corolario 1.3.3. *Toda función integrable en el intervalo* $[a, b]$ *en el sentido de Riemann es integrable y*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \; d\lambda.$$

Este resultado justifica que a partir de ahora Si $I = [a, b]$ y f es una función integrable en $[a, b]$ escribiremos $\int_a^b f(x)dx$ en lugar de $\int_I f \; d\lambda$.

El siguiente ejemplo nos muestra otra forma de usar el T.C.M.

Ejemplo:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considérese la función $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = (1+\frac{x^2}{n})^n$ para todo $x \in]0, 1]$ y cero en $x = 0$.

Nótese que la sucesión $\{f_n\}$ es creciente y converge puntualmente en $]0, 1[$ a la función $f(x) = e^{x^2}$. Por tanto, la sucesión de integrales está mayorada por el número e.

Aplicando el T.C.M. obtenemos que la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente en el intervalo $]0, 1[$, que su límite es integrable y que

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = lim(\{\int_0^1 (1 + \frac{x^2}{n})^n.$$

1.3.2. Teoremas de la convergencia dominada y de la convergencia absoluta.

En esta sección nos interesamos por condiciones de dominación. Comenzamos con el siguiente resultado importante:

Proposición 1.3.4. *(Lema de Fatou)*

Sea E *un subconjunto medible de* $\mathbb{R}^N$ *y sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones* **medibles no negativas** *en* E. *Si la sucesión* $\{\int_E f_n \; d\lambda\}$ *de las integrales* **tiene límite inferior finito**, *entonces el límite inferior de la sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *es finito y*

$$\int_E lim \; inf\{f_n\} \; d\lambda \leq lim \; inf\{\int_E fn \; d\lambda\}.$$

Demostración. Para hacer en clase

■

Teorema 1.3.5. *(Teorema de la convergencia dominada)(T.C.D.)*

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones **integrables** *en E. Si la sucesión $\{f_n\}$* **converge puntualmente a una función f en E y existe una función g integrable en E tal que** *$|f_n| \leq g$, entonces la función f es integrable y*

$$lim\{\int_E |f_n - f| \ d\lambda\} = 0.$$

En consecuencia

$$\int_E f \ d\lambda = lim\{\int_E f_n \ d\lambda\}.$$

Demostración. Para hacer en clase

■

También las funciones absolutamente integrables quedan bajo control

En el caso en $I =]\alpha, \beta[$ admitiendo que α puede ser $-\infty$ y β a su vez $+\infty$, y que f sea una función continua en I, $|f|$ es ïmpropiamenteïntegrable en el sentido de Riemann en I si, y sólo si, $f \in L(I)$, y en tal caso

$$\int_I |f| \ d\lambda = \int_\alpha^\beta |f(x)| \ dx.$$

El siguiente ejemplo nos muestra cómo usar también dicho teorema.

Ejemplo:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considérese la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{sen(nx)}{1 + n^2x^2} \quad (x \in [0,1]).$$

Nótese que las funciones f_n son continuas en $[0,1]$ y que la sucesión f_n converge puntualmente a la función nula.

Nótese que $|f_n(x)| \leq 1$ y por tanto por el T.C.D.

$$\lim \{\int_0^1 f_n(x)dx\} = \int_0^1 (\lim f_n(x)dx = 0.$$

Teorema 1.3.6. *(Teorema de la convergencia absoluta)(T.C.A.)*

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones **integrables** *en E. Si* **la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, d\lambda$ **converge** *entonces la* **la serie** $\sum_{n\geq 1} f_n$ **converge absolutamente c.p.d. en** *E y*

$$lim\{\int_E |\sum_{k=n}^{\infty} f_k| \, d\lambda|\} = 0.$$

En consecuencia

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} (\int_E f_n \, d\lambda).$$

Demostración. Para hacer en clase

■

Los siguientes ejemplos nos muestran la potencia del T.C.A.

Ejemplos:

1. Podemos probar que la función $\frac{sen(x)}{x}$ es integrable en el intervalo $[0,1]$ y que

$$\int_0^1 \frac{sen(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

2. Podemos probar que la función e^{x^2} es integrable en el intervalo $[0,1]$ y que

$$\int_0^1 e^{x^2dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}.$$

1.3.3. Aplicaciones: Teorema de Riesz e Integrales dependientes de un parámetro.

Teorema de Riesz

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$. Comencemos dotando de una seminorma al espacio $L(E)$ de las funciones integrables en E.

La aplicación $||.|| : L(E) \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $||f|| = \int_E f \, d\lambda$, para cada $f \in L(E)$ es tal que

1. $||\alpha f|| = |\alpha| ||f|| \; (f \in L(E]), \alpha \in \mathbb{R})$.
2. $||f+g|| \leq ||f|| + ||g|| \; (f, g \in L(E))$.

Pero, $||f|| = 0$ si, y sólo si, $f = 0$ c.p.d. Luego la aplicación $||.||$ no pasa de ser una seminorma.

Con el fin de construir una norma, consideramos el conjunto

$$N := \{f : E \to \mathbb{R} : \; f \text{ medible y} f = 0 \text{ c.p.d.}\}$$

. Es obvio que N es un subespacio vectorial de $L(E])$.

Veamos que la aplicación $||.||_1 : L_1(E) \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $||f + N|| = ||f||$ para cada $f \in L(E)$ es una norma en $L_1(E)$. De hecho, $||f|| = \text{Inf}\{||f+h||, h \in N\}$.

La convergencia en $L_1(E)$ asociada a dicha norma recibe el nombre de **convergencia en media**.

Probemos que el espacio $L_1(E)$ es un espacio de Banach.

Teorema 1.3.7. *(Teorema de Riesz)*

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en E. Si la sucesión $\{f_n + N\}$ es una sucesión de Cauchy en $L_1([a,b])$ entonces existe $f \in L(E)$ tal que

$$lim\{\int_E |f - f_n| \; d\lambda|\} = 0.$$

Además existe una sucesión parcial $\{f_{\sigma(n)}\}$ que converge c.p.d a f.

Demostración. Para hacer en clase

∎

Integrales dependiendo de un parámetro

Sea X un espacio métrico, $A \subseteq X$ y E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$. Considérese una función $f : A \times E \to \mathbb{R}$ tal que, para cada t, la correspondiente función $f_t(x) = f(t,x)$ es integrable en E, y asociada a ésta una nueva función $\varphi : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \int_E f_t \, d\lambda.$$

El objetivo de esta sección es el de encontrar condiciones sobre la función f que nos aseguren distintas propiedades analíticas de la función φ.

Proposición 1.3.8. *Sean X, E, f y φ como arriba. Si*

1. *Para cada $x \in E$, la función f^x definida por $f^x(t) = f(t,x)$ tiene límite (resp. es continua) en un punto de $a \in A$,*

2. *Existe $g \in L(E)$ tal que $|f(t,x)| \leq g(x)$ para todo $t \in A$ y $x \in E$,*

entonces φ tiene límite (resp. es continua) en a y

$$lim_{t\to a}\varphi(t) = \int_E (lim_{t\to a} f(t,x)) \, d\lambda \quad (resp. \;\; \varphi(a) = \int_E f_a \, d\lambda.$$

Demostración. Para hacer en clase

∎

Proposición 1.3.9. *Sea $X = I$ un intervalo de números reales y sean E, f, φ como arriba. Si*

1. *Para cada $x \in E$, la función f^x es derivable en I,*

2. *Existe $g \in L(E)$ tal que $|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}(t,x)| = |(f^x)'(t)| \leq g(x)$ para todo $t \in I, x \in E$.*

Entonces φ es derivable en I y para cada $a \in I$,

$$\varphi'(a) = \int_E \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}(a,x)\ d\lambda.$$

Demostración. Para hacer en clase

■

1.3.4. Relación de ejercicios

1. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio de medida, $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles y f, g dos funciones medibles. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) Si $\{f_n\}$ converge c.p.d a f y a g c.p.d. entonces $f = g$ c.p.d.

   b) Si $\{f_n\}$ converge c.p.d a f y a $f = g$ c.p.d. entonces $\{f_n\}$ converge c.p.d a g

2. Considerar las siguientes sucesiones $\{f_n\}$ de funciones reales de variable real:

   a) $f_n = \frac{1}{n}\ \chi_{[-n;n]}$;

   b) $f_n = n^2\ \chi_{[1/(n+1),1/n]}$

   Estudiar en cada caso la convergencia puntual y comparar $\int lim fn$ con $lim \int f_n$.

3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible de medida finita y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en E que converge puntualmente a una función f. Supongamos que existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f_n| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$. Probar que f es integrable y que

   $$lim \int_E |f - f_n| = 0.$$

   Dar un ejemplo mostrando que la hipótesis de medida finita no puede ser suprimida.

4. Calcular $lim \int f_n$ para cada una de las siguientes sucesiones $\{f_n\}$ de funciones de $]0,1[$ en $\mathbb{R}$:

a) $f_n = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

b) $f_n = 1/n\ log(x+n)e^{-x}cos(x)$.

c) $f_n = \frac{1+nx}{(1+x)^n}$.

5. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible de medida finita y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en E que converge uniformemente a una función f. Probar que f es integrable y que
$$lim \int_E |f - f_n| = 0.$$
Dar un ejemplo mostrando que la hipótesis de medida finita no puede ser suprimida.

6. Para cada natural n, y para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $f_n(x) = a_n sen(nx) + b_n cos(nx)$, donde $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones de números reales. Pruébese que si la sucesión $\{f_n\}$ converge c.p.d. a uno en $[0, 2\pi]$ entonces la sucesión $\{|a_n| + |b_n|\}$ no está acotada.

7. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y f una función integrable en E. Probar que
$$n\lambda(\{x \in E :\ f(x) \geq n\}) \longrightarrow 0.$$
Si f no es integrable, ¿es cierto la anterior afirmación para funciones medibles positivas? En caso negativo, dése un contraejemplo.

8. Sean I, J dos intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua verificando:

   a) Para cada $t \in I$, la función $x \longmapsto f(t,x)$ es integrable en J.

   b) Para cada $x \in J$, la función $t \longmapsto f(t,x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en I.

   c) La función $x \longmapsto |\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}|$ está dominada por una función integrable en J.

   d) Sea $g : I \longrightarrow J$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en I.

   Probar que para $a \in J$, la función
$$F(t) := \int_a^{g(t)} f(t,x)dx$$
   es derivable en I y que, para cada $t \in I$,
$$F'(t) := \int_a^{g(x)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} dx + f(t, g(t))g'(t).$$

1.4. Técnicas de integración en una variable

Sumario

El objetivo de esta lección es desarrollar técnicas que nos permitan el cálculo de la integral de una función definida en un intervalo de $\mathbb{R}$. Presentamos la herramienta más definitiva en este sentido: La Regla de Barrow. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.4.1. Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Barrow.

Estudiaremos ahora la importante conexión entre los tres conceptos básicos del análisis: continuidad, derivación e integración.

En todo lo que sigue tomaremos α y β tales que $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.
Se dice que una función $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ es **localmente integrable** si f es integrable en todo intervalo cerrado y acotado contenido en $]\alpha, \beta[$. Convenimos que si $a \in]\alpha, \beta[$ entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$ y si $[a, b] \subseteq]\alpha, \beta[$ entonces $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
Obviamente,toda función continua en $]\alpha, \beta[$ es localmente integrable en $]\alpha, \beta[$.
Recordemos también que si I es un intervalo de números reales y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, f es integrable en I si, y solo si f es integrable en su interior I^{int} y que $\int_I f \; d\lambda = \int_{I^{int}} f \; d\lambda$.
Si $c \in]\alpha, \beta[$ llamaremos **integral indefinida de f con origen en c** a la función $F :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida, para cada $x \in]\alpha, \beta[$, por

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Teorema 1.4.1. *(fundamental del Cálculo)*
Sea f una función localmente integrable en $]\alpha, \beta[$ y $a \in]\alpha, \beta[$. Definimos $F :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$, para cada $x \in]\alpha, \beta[$, por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Entonces

1. F es continua en $]\alpha, \beta[$.

2. F es derivable y $F' = f$ c.p.d. en $]\alpha, \beta[$.

Demostración. Para hacer en clase. 2) bajo la hipótesis de continuidad de f.

∎

Como era de esperar, la definición de integral no es útil para el cálculo de dicha integral. El siguiente resultado es importantísimo ya que nos permitirá evaluar la integral de una función conocida su primitiva. Para enunciarlo, necesitamos recordar que dada una función f definida en un intervalo I se dice que f **admite primitiva** si existe una función $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que, para cada $x \in I$, $G'(x) = f(x)$. Como consecuencia del teorema del Valor Medio G está determinada de manera única, salvo una constante aditiva.

Teorema 1.4.2. *(Regla de Barrow)*
Sea $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable y supongamos que f admite una primitiva G. Entonces

1. f es medible

2. Si f es no negativa entonces

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = lim_{x \to b} G(x) - lim_{x \to a} G(x).$$

En particular, f es integrable en $]\alpha, \beta[$ si, y sólo si, existe el límite de G en α y β.

3. Si f es integrable entonces existe el límite de G en α y β y

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = lim_{x \to b} G(x) - lim_{x \to a} G(x).$$

Demostración. Para hacer en clase bajo la hipótesis de que f está localmente acotada.

■

Es claro que si f es continua, entonces, como consecuencia del teorema fundamental del cálculo, cualquier integral indefinida F de f es una primitiva de f. La función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{sen(x)}{x}$ admite primitiva (por tratarse de una función continua), la cual tiene límite en cero y en $+\infty$, pero No es integrable en $\mathbb{R}^+$. Se pone así de manifiesto que la condición de ser no nula es esencial en 2).

Veamos que tales límites existen:

Ocurre a menudo que si intentamos evaluar algunas primitivas no obtenemos ninguna información no trivial. Por tanto el problema de evaluar la integral de una función continua f, para aplicar la Regla de Barrow, consiste en conseguir una primitiva de f susceptible de ser evaluada(o tener límite) en los puntos α y β. Por tanto, algunas veces, conviene transformar la función f en otra función cuya primitiva sea más accesible; los siguientes resultados ofrecen algunas transformaciones interesantes.

Corolario 1.4.3. *(teorema del cambio de variable) Sean Sean $-\infty\leq a<b\leq+\infty$ y $g:]a,b[\longrightarrow]\alpha,\beta[$ una función derivable en $]a,b[$ con $g'(x)\neq 0$ para todo x. Si $f:]\alpha,\beta[\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función medible, entonces f es integrable en $]\alpha,\beta[$ si, y sólo si, la función $f\circ g.g'$ es una integrable en $]a,b[$. En tal caso,*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(t)).g'(t)dt.$$

La regla formal seguida en el resultado anterior consiste en sustituir $g(t)$ por x y $g'(t)dt$ por dx y los valores extremos $t=a,t=b$ por los correspondientes $x=g(a),x=g(b)$.

Nota

Obsérvese que después de esta propiedad, podemos probar que la función $F:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por

$$F(x)=\int_1^x 1/t\ dt.$$

es derivable de hecho, es una biyección estrictamente creciente verificando que:

- $F(1)=0$
- $F(xy)=F(x)+F(y)$
- $F(e)=1.$

Esto es, la función F no es otra cosa que la función logaritmo neperiano cuya existencia afirmábamos al principio de curso.

La siguiente técnica es especialmente útil cuando se trata de calcular la integral de un producto de funciones o de una función fácilmente derivable (basta ver ésta como el producto de ella por la función constante uno).

Corolario 1.4.4. *(teorema de integración por partes)*
Sean $F, G :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables y tales que $F'G$ y FG' son integrables en $]\alpha, \beta[$. Entonces

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x).G'(x)dx = lim_{x\to b}F(x).G(x) - lim_{x\to a}F(x)G(x) - \int_{\alpha}^{\beta} F'(x).G(x)dx.$$

1.4.2. Métodos de integración

En esta sección nos ocuparemos del problema práctico de evaluar la integral de toda función racional y de algunas funciones no racionales.

Integración de funciones racionales

Daremos un método general para la evaluación de la integral de una función racional cuya "única"dificultad consiste en encontrar la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función racional y sean $P, Q, : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las correspondientes funciones polinómicas tales que, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x) \neq 0$, para cada $x \in [a, b]$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad (en caso contrario se manipula algebraicamente) que:

1) P y Q son dos polinomios primos entre sí.

2) El polinomio $Q(x)$ es de mayor grado que $P(x)$.

3) El coeficiente líder del polinomio $Q(x)$ es uno.

En la situación anterior, el problema de evaluar la integral de f se resuelve usando sendos resultados algebraicos: la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales y la descomposición en fracciones simples de una función racional con coeficientes reales.

Proposición 1.4.5.

1) *Descomposición en factores irreducibles*

Todo polinomio $Q(x)$ con coeficientes reales y con coeficiente líder igual a uno puede escribirse en la forma:

$(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}...(x-a_p)^{n_p}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}...(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}$,

donde p y q son números enteros no negativos,$a_1, a_2, ..., a_p, b_1, b_2, ..., b_q, c_1, c_2, ..., c_q$ son números reales, donde $a_1 < a_2 < ... < a_p$ son las raíces reales del polinomio Q y para cada $k \in \{1, 2, ..., p\}$, n_p es el orden de multiplicidad de la raíz a_k; y finalmente $m_1, m_2, ..., m_q$ son números naturales.

La descomposición anterior en factores es única y

$$n_1 + n_2 + ... + n_p + 2(m_1 + m_2 + ... + m_q)$$

es el grado del polinomio.

2) *Descomposición en fracciones simples*

Si el polinomio $Q(x)$ se descompone en la forma dada en (1.) y $P(x)$ es un polinomio primo con $Q(x)$ de grado menor que el de $Q(x)$, la función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ puede escribirse de forma única como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A^{11}}{x-a_1} + \frac{A^{12}}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A^{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \\ & + \frac{A^{21}}{x-a_2} + \frac{A^{22}}{(x-a_2)^2} + ... + \frac{A^{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} + ... + \\ & \frac{A^{p1}}{x-a_p} + \frac{A^{p2}}{(x-a_p)^2} + ... + \frac{A^{pn_1}}{(x-a_p)^{n_p}} + ... + \\ & \frac{B^{11}x + C^{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B^{12}x + C^{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \frac{B^{1m_1}x + C^{1m_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}} + \\ & \frac{B^{21}x + C^{21}}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{B^{22}x + C^{22}}{(x^2+b_2x+c_2)^2} + \frac{B^{2m_2}x + C^{2m_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}} + ... + \\ & \frac{B^{q1}x + C^{q1}}{x^2+b_qx+c_q} + \frac{B^{q2}x + C^{q2}}{[(x^2+b_qx+c_q)^2} + \frac{B^{qm_q}x + C^{qm_q}}{[(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}}, \end{aligned}$$

donde A_{ij} $(1 \le i \le p, (1 \le j \le n_p)$ y $(B^{ij}$, C_{ij} $(1 \le i \le q$ y $1 \le j \le m_q$ y

$a_1, a_2, ..., a_p, B_1, B_2, ..., B_q, c_1, c_2, ..., c_q$ C^{ij} son números reales. Se tiene además que $A^{kn_k} \ne 0$ para $k \in \{1, 2, ..., p\}$ y $(B^{jm_j})^2 + (C^{jm_j})^2 > 0$ para $j \in \{1, 2, ..., q\}$.

La principal dificultad a la hora de aplicar la proposición anterior consiste, como ya se ha dicho, en encontrar la descomposición en factores del polinomio $Q(x)$. Salvado este problema, la descomposición en fracciones simples dada por la segunda parte de la proposición puede ya obtenerse sin dificultad, aunque sí puede ser laboriosa.

La descomposición en fracciones simples dada anteriormente, junto con la linealidad de la integral nos permite limitarnos a considerar las integrales de cada uno de los tipos de fracciones simples que aparecen en la descomposición, a saber

Tipo 1

$$f(x) = \frac{A}{x-c},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $A, c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = A.log(\frac{b-c}{a-c}).$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2-x^2}{x^3-3x^2+2x}dx.$$

Tipo 2

$$f(x) = \frac{A}{(x-c)^n},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $A, c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{A}{n-1}[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{x^2-2x+1}dx.$$

Tipo 3

$$f(x) = \frac{Bx+C}{x^2+cx+d},$$

para todo $x \in [a,b]$, donde $B, C, c, d \in \mathbb{R}$. En este caso se procede de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{B}{2}\int_a^b \frac{2x+c}{x^2+cx+d}dx + (C - cB/2)\int_a^b \frac{dx}{x^2+cx+d}.$$

La primera integral se puede resolver haciendo el cambio de variable $u = x^2 + cx + d$, con lo que nos queda

$$\int_{a^2+ac+d}^{b^2+bc+d} \frac{du}{u} = log\frac{b^2+bc+d}{a^2+ac+d}.$$

La segunda integral se puede resolver escribiendo $x^2 + cx + d = (x - r)^2 + b^2$ para hacer el cambio de variable $u = \frac{x-r}{s}$, con lo que nos queda

$$\frac{1}{s}\int_{\frac{a-r}{s}}^{\frac{b-r}{s}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{s}[arc\ tg(\frac{b-r}{s}) - arc\ tg(\frac{a-r}{s})].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2x-1}{x^4+x^3-x-1}dx.$$

Tipo 4 Esto es,

$$f(x) = \frac{r(x)}{(x^2+cx+d)^n},$$

para todo $x \in [a, b]$, donde $c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ y $r(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que $2n - 1$.

En este caso usaremos el **método de Hermite** que consiste en escribir

$$f(x) = \frac{ex+f}{x^2+cx+d} + [\frac{F(x)}{(x^2+cx+d)^{n-1}}]',$$

donde $F(x)$ es un polinomio de grado 2n-3 a determinar. Por tanto, la técnica exige derivar el cociente, multiplicar la igualdad por $(x^2 + cx + d)^n$, y a partir de aquí, calcular los coeficientes de dicho polinomio.

Así pues

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{ex+f}{x^2+cx+d}dx + \frac{F(b)}{(b^2+cb+d)^{n-1}} - \frac{F(a)}{(a^2+ca+d)^{n-1}}.$$

La integral que queda es una de tipo 3).

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1-x^2}{x^4+4x^2+4}dx.$$

Integración de funciones no racionales

El problema de evaluar funciones no racionales se llevará a cabo utilizando diversos cambios de variable hasta conseguir que la nueva función a integrar sea racional. No hay un método general para ello, sino un recetario más o menos amplio, de hecho, la simple inspección del integrando sugiere el cambio de variable adecuado.

Empezaremos fijando una notación que nos permitirá exponer de manera rápida y sin ambigüedad los distintos métodos de integración que vamos a tratar. En lo que sigue I será un intervalo del tipo $[a, b]$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ será una función continua. Para calcular la integral de f usaremos sistemáticamente el cambio de variable $x = g(t)$, donde g es una función biyectiva de un cierto intervalo J sobre I y de clase $\mathcal{C}^1$ en J. Si notamos por $h(t) = f \circ g(t).g'(t)$, para todo $t \in J$, transformaremos la integral de la función inicial en la integral de la función h en el intervalo J. Si h es racional, aplicaremos los conocimientos dados en la primera parte de la lección. En las demás ocasiones será preciso un nuevo cambio de variable. Encontraremos así un nuevo intervalo K y una nueva función φ tal que $t = \varphi(u)$, donde φ es una función biyectiva de K sobre J y de clase $\mathcal{C}^1$ en K. Si notamos por $k(u) = h \circ \varphi(u).\varphi'(u)$, para todo $u \in k$, transformaremos la integral de la función h en la integral de la función k en el intervalo K, y vuelta a empezar.

1. Funciones trigonométricas

   Sea f una función que es cociente de sumas y productos de las funciones seno y coseno. Dado que f es una función periódica de periodo 2π podremos limitarnos a considerar $I \subseteq [-\pi, \pi]$. Hacemos en este caso el cambio de variable

   $$x = g(t) = 2arctg(t).$$

   La función g que aparece es una función racional. De hecho,

   $$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{y} \quad sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

   Ejercicio: Calcúlese $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{sen(x)}$

   Podemos destacar algunos casos particulares en

   $$\int_a^b \frac{sen^n(x)}{cos^m(x)} dx \qquad a, b \in I$$

   a) Si n es impar, se hace el cambio $x = arccos(t)$, siempre que $I \subseteq [0, \pi]$.
   b) Si m es impar, se hace el cambio $x = arcsen(t)$, siempre que $I \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$.

c) Si n y m son pares se usan las fórmulas

$$cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}, \quad sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}.$$

2. Funciones trascendentes

Sea f una función f que es cociente de sumas y productos de la función e^x con ella misma. Hacemos en este caso el cambio de variable $x = g(t) = log(t)$. La función h que aparece es de nuevo una función racional.

Ejercicio: Calcular $\int_1^2 \frac{dx}{shx}$

3. Irracionales en x

Sea f una función que es cociente de sumas y productos de potencias racionales de x. Si $f(x) = F(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., x^{\frac{p_n}{q_n}})$, entonces hacemos el cambio de variable $x = t^m$, donde $m = m.c.m.\{q_1, q_2, ..., q_n\}$. Así pues, la función a integrar que resulta después del cambio es una función de tipo racional, que ya sabemos resolver.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx.$$

4. Irracionales cuadráticas

Vamos a distinguir tres tipos fundamentalmente:

1) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{x^2 - 1}$

En este caso, siempre que $I \subseteq [1, +\infty[$ ó $I \subseteq]-\infty, 1]$, hacemos el cambio de variable ó bien $x = g(t) = \frac{1}{cost}$ y por tanto la función h que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien $x = g(t) = ch(t)$ y la función h que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

2) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{1-x^2}$

En este caso, siempre que $I \subseteq [-1,1]$ hacemos el cambio de variable $x = g(t) = sen(t)$ y por tanto la función h que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

3) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{1+x^2}$

En este caso hacemos el cambio de variable ó bien $x = g(t) = tg(t)$ y por tanto la función h que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien $x = g(t) = sh(t)$ y la función h que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^{4} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Nota

Las funciones $f(x)$ que son cociente de sumas y productos de x y de $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se pueden reducir a uno de los tres casos anteriores ya que

$$ax^2+bx+c = a(x+b/2a)^2 - b^2/4a + c,$$

y por tanto, si hacemos un primer cambio $u = x + b/2a$ y posteriormente

a) si $a > 0$ y $b^2 - 4ac > 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{a}u}{\sqrt{b^2-4ac}}$, resulta una integral del tipo $\sqrt{t^2-1}$

b) Si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{a}u}{\sqrt{c-b^2/4a}}$, resulta una integral del tipo $\sqrt{t^2+1}$.

c) Si $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{-a}u}{\sqrt{c-b^2/4a}}$ resulta una integral del tipo $\sqrt{1-t^2}$

1.4.3. Criterios de integrabilidad

De igual manera que sólo sabemos calcular la suma de algunas series y por tanto limitábamos nuestro esfuerzo al conocimiento de si una determinada serie es o no convergente, ocurre con la integral de funciones. En esta sección daremos algunos criterios de integrabilidad para una cierta función.

Entre los distintos criterios distinguiremos el método de comparación. Antes hagamos notar que:

1. Por el T.C.D., si $f, g :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ son dos funciones medibles tales que g es integrable y $|f| \leq g$ entonces f es también integrable.

2. Si $c \in]\alpha, \beta[$ entonces f es integrable en $]\alpha, \beta[$ si, y sólo si, f es integrable en $]\alpha, c]$ y f es integrable en $[c, \beta[$. En tal caso
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx.$$
Este segunda observación nos permite dividir el problema en dos. Nosotros nos centramos en intervalos de la forma $[a, \beta[$ con $a \in \mathbb{R}$.

3. Si f es locamente integrable en $[a, b[$ con $b \in \mathbb{R}$ y existe $c \in [a, b[$ tal que f está acotada en $[c, b[$ (en particular si f tiene límite en b) entonces f es integrable en $[a, b[$.

Proposición 1.4.6. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y sean $f, g : [a, \beta[\to \mathbb{R}$ dos funciones localmente integrables tales que*

1. *$g(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, \beta[$ y*

2. *$lim_{x \to \beta} |\frac{f(x)}{g(x)}| = L$.*

Entonces

1. *Si $L \in \mathbb{R}^+$, entonces f es integrable si, y sólo si, g es integrable.*

2. *Si $L = 0$ y g es integrable entonces f es integrable.*

3. *Si $L = +\infty$ y f es integrable entonces g es integrable.*

Demostración. Para hacer en clase. ∎

Es aconsejable que la función g que usamos en la comparación sea lo más sencilla posible (sería conveniente una función que sepamos integrar). En todo caso, necesitamos del conocimiento de la integrabilidad del máximo posible de funciones. Con esta idea, estudiamos primeramente la función potencial:

Consideremos la función $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^a$, donde a es un número real.

En este caso, obtenemos que

Si	$0 < \alpha < \beta < +\infty$	entonces	x^a	es integrable	para	todo valor de a
Si	$0 = \alpha < \beta < +\infty$	entonces	x^a	es integrable	$\Leftrightarrow$	$a > -1$
Si	$0 < \alpha < \beta = +\infty$	entonces	x^a	es integrable	$\Leftrightarrow$	$a < -1$
Si	$0 = \alpha, \beta = +\infty$	entonces	x^a	no es integrable	para	ningún valor de a

Y en segundo lugar la función exponencial.

Consideremos la función $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{ax}$, donde a es un número real.

En este caso, obtenemos que

Si	$-\infty < \alpha < \beta < +\infty$	entonces	e^{ax}	es integrable	para	todo valor de a
Si	$-\infty = \alpha < \beta < +\infty$	entonces	e^{ax}	es integrable	$\Leftrightarrow$	$a > 0$
Si	$-\infty < \alpha < \beta = +\infty$	entonces	e^{ax}	es integrable	$\Leftrightarrow$	$a < 0$
Si	$0 = \alpha, \beta = +\infty$	entonces	e^{ax}	no es integrable	para	ningún valor de a

1.4.4. Relación de ejercicios

1. Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_0^1 arctg(x)\ dx, \qquad \int_0^1 x^2 e^x\ dx,$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(log(x))^2} \qquad \int_0^{\pi/4} sen^2 x\ cos^3 x\ dx,$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} cosx \, \log(senx) \, dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{senx}{cos^2 x} \, dx.$$

$$\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2+cosx}., \qquad \int_0^1 \frac{dx}{coshx}.$$

$$\int_2^3 \frac{1+2x-x^2}{x^4-4x^3+7x^2-6x+2} dx., \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{senx - tgx}.$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}., \qquad \int_1^{3/2} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}. \qquad \int_1^2 \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}.$$

2. Hállense las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

   a) $F(x) = \displaystyle\int_a^x sen^3(t) \, dt.$ b) $F(x) = \displaystyle\int_3^{x^2} \frac{1}{1+\sin^6 t + t^2} \, dt$

   c) $F(x) = \displaystyle\int_3^{\int_1^x \frac{sen(s)}{s} ds} 1/(sen^2(t^2)+1) \, dt$

   d) $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{1+t^2+sen^2(t)} \, dt.$

   e) $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{t}{1+t^2+sen(t)} \, dt$ f) $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{tx}{1+t^2+sen(t)} \, dt$

3. Probar que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

   a) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = arcsen(2/3) - arcsen(7/12), \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + ln(\frac{2}{1+e}).$

   b) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \pi/2, \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} = \pi/6.$

   c) $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx = (3\pi + ln2)/10, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4} dx = (\sqrt{3}\pi/12).$

   d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \pi/2, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} cos^2(x)dx = \int_{-\pi}^{+\pi} sen^2(x)dx = \pi.$

   e) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} cos(\beta x)dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} sen(\beta x)dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \quad (\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}).$

   f) $\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} dx = 3\pi, \quad \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} |sen(x)|^3 dx = 4/3.$

   g) $\int_0^{\pi/2} sen^2(x)cos^2(x)dx = \pi/16, \quad \int_0^1 (1-x^{2/3})xdx = 8/35.$

   h) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}, \quad \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = ln(1+\sqrt{2}).$

   i) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}} \ (y > 0), \quad \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = \pi, \quad \int_0^1 ln(x)dx = -1.$

   j) $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)(1+yx^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2}(\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+yx^2})dy = \frac{2ln(x)}{x^2-1} \ (x \neq \pm 1).$

4. Estudiar la integrabilidad de las siguientes funciones:

   a) $x^a e^{-bx} (a \in \mathbb{R}, b > 0)$ en $\mathbb{R}^+$.

   b) $x/(e^x - 1)$ en $\mathbb{R}^+$.

c) $x^a ln(x)(a \in \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^+$.

d) $1/\sqrt{x}\ sen(1/x)$ en $]0,1[$.

e) $x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a,b \in \mathbb{R})$ en $]0,1[$.

f) $ln(x)ln(1+x)$ en $]0,1[$.

g) $x^a sen(x)(a \in \mathbb{R})$ en $]1,+\infty[$.

5. Justificar, haciendo uso en cada caso de un conveniente teorema de convergencia, las siguientes igualdades:

a) $lim \int_0^1 \frac{nxln(x)}{1+n^2x^2}dx = 0$.

b) $lim \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}dx = 0$.

c) $lim \int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}dx = 0$.

d) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

e) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+e^{-bx}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}, (a,b>0)$ y deducir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = ln(2).$$

f) $\int_0^1 \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}, (a,b>0)$.

6. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x}dx\ \forall t \in \mathbb{R}^+$.

b) $F(t) = \int_0^{\pi} ln(1+tcosx)dx \quad \forall t \in]-1,1[$.

c) $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{sen(tx)}{1+x^2}dx\ \forall t \in \mathbb{R}^+$.

7. Probar que a función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} cos(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

es derivable. Utilizar el método de integración por partes en la expresión de F' para obtener $F'(t) = -tF(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$. Deducir de ello que la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por $t \longmapsto F(t)e^{-t^2/2}$ tiene derivada nula. Por último concluir, usando el Teorema del valor medio, que

$$F(t) = Ce^{-t^2/2},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$

1.5. Técnicas de integración en varias variables

Sumario

En esta lección vamos a introducir la integración en varias variables. Consideraremos métodos que proporcionan la integrabilidad de una función aunque no el valor de la integral, métodos que proporciona ambas cuestiones y métodos que, asegurada la integrabilidad, nos proporcionen el valor de la integral. Con respecto al problema del cálculo, nos encontramos con el hecho de que no se dispone de ningún procedimiento elemental comparable a la Regla de Barrow. Esta contrariedad se resolverá relacionando la integral en $\mathbb{R}^n$ con integraciones sucesivas en espacios de menor dimensión. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.5.1 Teorema de Fubini.

1.5.2 Teorema de Tonelli.

1.5.3 Teorema del cambio de variable: Cambio de coordenadas.

1.5.4 Relación de ejercicios.

1.5.1. Teorema de Fubini

Recuérdese que el problema del cálculo de la integral de una determinada función, en el caso de intervalos de números reales, se resolvió usando la regla de Barrow. Sin embargo, no disponemos de una tal regla en $\mathbb{R}^N$ con $N > 2$. Nuestro siguiente resultado trata de resolver esta dificultad, sabido que la función es integrable, relacionando la integral múltiple con sucesivas integrales en $\mathbb{R}$.

Dada una función $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, consideramos la función $f_x : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ que viene definida por $f_x(y) = f(x, y)$. Análogamente, consideramos la función $f^y : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ que viene definida por $f^y(x) = f(x, y)$.

Teorema 1.5.1. *(de Fubini) Sean p, q dos nu´meros naturales y sea $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces*

1. *Para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, la función f^y es integrable en $\mathbb{R}^p$ y la función g definida c.p.d. en $\mathbb{R}^q$ por $g(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f^y \, d\lambda$ es integrable en $\mathbb{R}^q$.*

2. *Para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, la función f_x es integrable en $\mathbb{R}^q$ y la función h definida c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ por $h(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x \, d\lambda$ es integrable en $\mathbb{R}^p$.*

3. *$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^p} g \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^q} h \, d\lambda$.*

Demostración. Para hacer en clase

∎

Apliquemos nuestro teorema para calcular la integral en un subconjunto medible de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Para ello, consideremos las siguientes notaciones:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$, notaremos, para cada $x \in \mathbb{R}^p$, por

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^q : \ (x, y) \in E\}.$$

Análogamente, notaremos, para cada $y \in \mathbb{R}^q$, por

$$E(y) = \{x \in \mathbb{R}^p : \ (x, y) \in E\}.$$

Corolario 1.5.2. *Si E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, $E(x)$ es subconjunto medible de $\mathbb{R}^q$, y, para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, $E(y)$ es subconjunto medible de $\mathbb{R}^p$*

Demostración. Para hacer en clase

∎

Teorema 1.5.3. *(Teorema de Fubini.Caso $p = 1, q = 1$)*
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces

$$\int_E f(x, y)d(x, y) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} [\int_{E(x)} f(x, y)dy]dx = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} [\int_{E(y)} f(x, y)dx]dy,$$

siendo $\alpha_1 = Inf\ E_1,\ \beta_1 = Sup\ E_1,\ \alpha_2 = Inf\ E_2,\ \beta_2 = Sup\ E_2$, donde

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E(x) \neq \emptyset\}$$

y

$$E_2 = \{y \in \mathbb{R};\ E(y) \neq \emptyset\}$$

En particular, cuando $E = I \times J$, siendo I, J intervalos de $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_E f(x,y) = \int_I [\int_J f(x,y)dy]dx = \int_J [\int_I f(x,y)dx]dy.$$

Ejemplo: Calcular el área de la elipse de semiejes a y b.

Teorema 1.5.4. *(Teorema de Fubini. Caso $p = 2, q = 1$)*
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ medible y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{\alpha_3}^{\beta_3} [\int_{E(z)} f(x,y)d(x,y)]dz,$$

siendo $\alpha_3 = Inf\ E_3$, $\beta_3 = Sup\ E_3$, donde

$$E_3 = \{z \in \mathbb{R};\ E[z] \neq \emptyset\}$$

y a su vez

$$E[z] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y,z) \in E\}.$$

Análogamente se podría hacer, para $(p = 1,\ q = 2)$ sin más que considerar los conjuntos $E[x]$ y $E[y]$.

Ejercicio: Calcúlese el volumen del elipsoide de semiejes a, b y c.

Principio de Cavalieri

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E(x) \neq \emptyset\} = [a,b].$$

Según hemos visto en la lección anterior su volumen, $\lambda(E)$, viene dado por

$$\lambda(E) = \int_E 1\ d(x,y,z),$$

por lo que aplicando el teorema de Fubini y la definición de área de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\lambda(E) = \int_a^b (\int_{E(x)} 1\ d(y,z))dx) = \int_a^b \lambda(E(x))dx.$$

Dicha igualdad es conocida como el **principio de Cavalieri**.

Obsérvese que si E es el sólido de revolución generado por la gráfica de una cierta $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, aplicando el principio de Cavalieri, obtenemos que

$$V(E) = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

como ya habíamos comentado anteriormente.

Ejemplo:

Un leñador corta una pieza C con forma de cuña de un árbol cilíndrico de radio 50 cm mediante dos cortes de sierra hacia el centro del árbol: uno horizontal y otro con un ángulo $\pi/4$. Calcúlese el volumen de dicha cuña.

La integral en dos variables vista como un cierto volumen

Sea ahora $A \subseteq \mathbb{R}^2$ medible y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo integrable en A tal que, para cada $(x, y) \in A$, se tiene que $f(x, y) \geq 0$. Obsérvese que como consecuencia del teorema de Fubini, si

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R};\ A(x) \neq \emptyset\} = [a, b],$$

entonces

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_a^b (\int_{A(x)} f(x,y)dy)dx = \int_a^b S(x)dx,$$

donde, para cada $x \in [a, b]$, $S(x)$ es el área de la región del plano comprendida entre el eje x y la gráfica de la función $g : A(x) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $y \in A(x)$ por $g(y) = f(x, y)$. Aplicando finalmente el principio de Cavalieri, la integral

$$\int_A f(x,y)d(x,y)$$

puede interpretarse como el **volumen del sólido comprendido entre el plano** $z = 0$ **y la gráfica del campo escalar** f.

Ejemplo:

Calcúlese el volumen de madera eliminado al taladrar, hasta el centro, una esfera de madera de radio 9 con una broca de radio 1.

1.5.2. Teorema de Tonelli

En esta sección abordamos los métodos que nos permitan dilucidar la integrabilidad de la función.

Teorema 1.5.5. *(de Tonelli) Sean p, q dos números naturales y sea $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ una función medible. Consideremos las siguiente integrales iteradas:*

1. *$\int_{\mathbb{R}^p} |g|\ d\lambda$ donde la función $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ viene definida por $g(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f^y\ d\lambda$ para todo $y \in \mathbb{R}^q$,*

2. *$\int_{\mathbb{R}^q} |h|\ d\lambda$ donde la función $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ viene definida por $h(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x\ d\lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$.*

Si alguna de las integrales iteradas es finita entonces f es integrable en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Demostración. Para hacer en clase

∎

Nótese que si f es no negativa entonces podemos aplicar simultáneamente los Teoremas de Fubini y Tonelli. De hecho,

Corolario 1.5.6. *Sean p, q dos números naturales y sea $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces f es integrable en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ si, y sólo si, alguna de las las siguiente integrales iteradas:*

1. *$\int_{\mathbb{R}^p} g \; d\lambda$ donde la función $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ viene definida por $g(y) = \int_{\mathbb{R}^p} |f^y| \; d\lambda$ para todo $y \in \mathbb{R}^q$,*

2. *$\int_{\mathbb{R}^q} h \; d\lambda$ donde la función $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ viene definida por $h(x) = \int_{\mathbb{R}^q} |f_x| \; d\lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$.*

es finita.

1.5.3. Teorema del cambio de variable: Cambio de coordenadas

Es posible que convenga cambiar la función inicial por otra función. Este cambio será arbitrado por el teorema del cambio de variable:

Teorema 1.5.7. *Sean U y V doss abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea φ un difeomorfismo de clase C^1 de U sobre V. Si $E \subseteq V$ y $f : E \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces f es integrable en E si, y sólo si, $f \circ \varphi |det(J_\varphi)|$ es integrable en $\varphi^{-1}(E)$. En tal caso*

$$\int_E f \; d\lambda = \int_{\varphi^{-1}(E)} f \circ \varphi |det(J_\varphi)| \; d\lambda.$$

Demostración. Para hacer en clase cuando φ es lineal. (Su demostración puede verse [3, Teorema 14.10].

∎

Este teorema suele usarse en alguna de las siguientes formas concretas:

Coordenadas polares, $n = 2$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta).$$

En este caso

$$det J_\phi(\rho, \theta) = \rho > 0,\ \forall (\rho, \theta) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y) d(x, y) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta, \rho sen\theta) \rho d(\rho, \theta).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Calcúlese $\int_E 1 d(x, y)$.

Coordenadas cilíndricas, $n = 3$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times] - \pi, \pi[\times \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, 0, z);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho, \theta, z) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta, z).$$

En este caso

$$det J_\phi(\rho, \theta, z) = \rho > 0,\ \forall (\rho, \theta, z) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta, \rho sen\theta, z) \rho d(\rho, \theta, z).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq r^2;\ 0 \leq z \leq h\}$, con $r, h > 0$. Calcúlese $\int_E 1 d(x, y, z)$.

Coordenadas esféricas, $n = 3$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times] - \pi, \pi[\times] - \pi/2, \pi/2[$, $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, 0, z);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho cos\theta cos\varphi, \rho sen\theta cos\varphi, \rho sen\varphi).$$

En este caso

$$det J_\phi(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 cos\varphi > 0,\ \forall (\rho, \theta, \varphi) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta cos\varphi, \rho sen\theta cos\varphi, sen\varphi) \rho^2 cos\varphi d(\rho, \theta, \varphi).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$, con $r > 0$. Calcúlese su volumen.

1.5.4. Relación de ejercicios

1. Calcúlense las siguientes integrales:

    a) $\displaystyle\int_I \operatorname{sen}^2 x \ \operatorname{sen}^2 y \ d(x,y),\ I=[0,\pi]\times[0,\pi].$

    b) $\displaystyle\int_I \frac{x^2}{1+y^2}\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

    c) $\displaystyle\int_I y \ logx \ d(x,y),\ I=[1,e]\times[1,e].$

    d) $\displaystyle\int_I x^3 \ y^3 \ d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

    e) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2}\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

    f) $\displaystyle\int_I x \ log(xy) \ d(x,y),\ I=[2,3]\times[1,2].$

    g) $\displaystyle\int_I y \ \cos(xy) \ d(x,y),\ I=[0,1]\times[1,2].$

2. Sea $f : A \to \mathbb{R}$, calcúlese su integral en los siguientes casos:

    a) $f(x,y)=1$ siendo A la región limitada por $y^2=x^3,\quad y=x.$

    b) $f(x,y)=x^2$ siendo A la región limitada por $xy=16, y=x, y=0, x=8.$

    c) $f(x,y)=x$ siendo A el triángulo de vértices $(0,0),(1,1),(0,1).$

    d) $f(x,y)=x$ siendo A la región limitada por la recta que pasa por $(0,2)$ y $(2,0)$ y la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1.

    e) $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ siendo A la región limitada por $y^2=x, x=0, y=1.$

    f) $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ siendo A la región limitada por $y=\frac{x^2}{2}, y=x.$

    g) $f(x,y)=xy^2$ siendo A la región limitada por $y^2=2x, x=1.$

    h) $f(x,y)=xy$ siendo A la región limitada por la semicircunferencia superior $(x-2)^2+y^2=1$ y el eje OX.

    i) $f(x,y)=4-y^2$ siendo A la región limitada por $y^2=2x$ y $y^2=8-2x$

    j) $f(x,y)=e^{x^2}$ siendo el conjunto A el triángulo formado por las rectas $2y=x$, $x=2$ y el eje x

3. Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

    a) $f(x,y)=1-x-y,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x+y\leq 1\}$

    b) $f(x,y)=x^2+y^2,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x^2+y^2\leq 1\}$

c) $f(x,y) = x + y,\ A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1];\ x^2 \leq y \leq 2x^2\}$

d) $f(x,y) = x^2\ y^2,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$

e) $f(x,y) = y^2,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$

f) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x\}$

g) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$

h) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq \pi/2\}$

i) $f(x,y) = \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

j) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$

k) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

l) $f(x,y) = x\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

m) $f(x,y) = x^2\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$

n) $f(x,y) = x,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$

4. Utilícese el cambio a coordenadas polares para el cálculo de las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:

a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad A = \bar{B}((0,0),1)$

b) $f(x,y) = y,\quad A = \{(x,y) \in B((\frac{1}{2},0),\frac{1}{2}) :\quad y \geq 0\}$

c) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \bar{B}((1,0),1)$

d) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

5. Calcúlense las siguientes integrales dobles:

a) $f(x,y) = x,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2x\}$

b) $f(x,y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x,y \geq 0\}$

c) $f(x,y) = \exp(\frac{x}{y}),\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^3 \leq x \leq y^2,\quad x \geq 0, y \geq 0\}$

d) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}},\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq y,\ x + y \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

e) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2),\ x \geq 0\}$

f) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2y,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

6. **Área de la cardioide.** La curva en $\mathbb{R}^2$, cuya ecuación en coordenadas polares viene dada por $\rho = 2a(1 + cos\theta)$ ($a \in \mathbb{R}^+$; $-\pi \leq \theta \leq \pi$ se llama una cardioide. Sea $E = \{(\rho cos(\theta), sen(\theta)) : -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 < \rho 2a(1 + cos\theta)\}$. Calcúlese $\lambda(E)$.

7. Probar que $lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{sen(x)}{x}dx = \pi/2$.

   Indicaciones:

   a) Probar, usando los Teoremas de Fubini y Tonelli, que la función $F(x;y) = e^{-}xysenx$ es integrable en $]0,n[\times]0,+\infty[$ y que

   $$\int_0^{\pi} \frac{sen(x)}{x}dx = \int_0^{+\infty}[\int_0^{\pi} e^{xy}sen(x)dx]dy.$$

   b) Para cada natural n, sea $f_n :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

   $$f_n(y) = \int_0^{\pi} e^{xy}sen(x)dx.$$

   Pruébese, integrando por partes, que $\{f_n(y)\}$ converge a $\frac{1}{1+y^2}$. Pruébese además que $|f_n(y)| \leq \frac{2}{1+y^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   c) Deducir finalmente, utilizando el teorema de la convergencia dominada que $lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{sen(x)}{x}dx = \pi/2$.

8. Calcúlese el volumen de la región A definida por:

   a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq r^2,\ \ x^2+y^2-ry \leq 0\}$.

   b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \geq 1,\ \ x^2+y^2 \leq 2,\ \ z(x^2+y^2) \leq 1,\ \ z \geq 0\}$.

   c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \leq x^2+y^2 \leq z\}$.

   d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\}$.

   (e) **Bóveda de Viviani** $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x-1/2)^2+y^2 \leq 1/4\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 \leq z\}\}$.

   (f) **cucuruchu de helado invertido**

   $$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq (1-z)^2,\ x^2+y^2 \leq z/2,\ z \leq 1\}.$$

   (g) **Volumen del toro** de radios r y R (flotador).

9. **Sólidos de revolución generados por un giro alrededor del eje** OY. Sea $E \subseteq \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ un conjunto medible. Consideremos el conjunto

   $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in E\}$$

   o (sólido de revolución obtenido al girar el conjunto E contenido en el plano XY en torno al eje OY). Probar que S es medible y que

   $$\lambda(S) = 2\pi \int_E xd(x,y).$$

10. Calcúlense las siguientes integrales triples:

a) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\, d(x,y,z),\ I=[0,1]\times[0,1]\times[0,1].$

b) $\displaystyle\int_A z\, e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y,z)$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 2(x^2+y^2)\le z^2,\ z\ge 0,\ z\le 1\}.$

c) $\displaystyle\int_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z)$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 4\}.$

d) $\displaystyle\int_A (x+y-2z)\, d(x,y,z)$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; z^2\ge x^2+y^2,\ z\ge 0,\ z\le 3\}.$

e) $\displaystyle\int_A \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\right)^n d(x,y,z)$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2\le a^2\}$ $(n\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{R}^+)$.

f) $f(x,y,z)=(x+y+z)^2,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 1, x^2+y^2+z^2\le 2z\}$

g) $f(x,y,z)=z,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le z^2, 0\le z\le 1\}$

h) $f(x,y,z)=x^2,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\ge 0,\ x^2+y^2+(z-1)^2\le 1,\ 4z^2\ge 3(x^2+y^2)\}$

i) $f(x,y,z)=zy\sqrt{x^2+y^2}\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le z\le x^2+y^2,\ 0\le y\le \sqrt{2x-x^2}\}$

j) $f(x,y,z)=z,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 2,\ x^2+y^2\le z\}$

k) $f(x,y,z)=z^2,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le \mathrm{R}^2,\ x^2+y^2+z^2\le 2\mathrm{R}z\}$

l) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3\}$

11. Demuéstrese que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2}dx=\sqrt{2\pi/a}$, donde $a>0$.

12. Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$

b) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4}+y^2\le 1,\ x^2\le y\}$

c) $f(x,y,z)=z,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\le 1, z\ge 0\}$

d) $f(x,y)=\exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right),\ \ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x,y\ge 0,\ x+y\le 2\}$

13. Estúdiese la integrabilidad de las siguientes funciones:

a) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $(\alpha>0)$.

b) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\frac{sen(x)sen(y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $(1<\alpha<2)$.

Bibliografía

[1] C. Aparicio del Prado y R. Paya Albert, Análsisis Matemático. *Textos universitarios.Ciencias. Universidad de Granada* (1985).

[2] C. J. Pérez González, Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. Ver dirección electrónica en bibliografía.

[3] M.D. Acosta, C. Aparicio, A. Moreno y A. R. Villena, Apuntes de Análisis Matemático I. Ver dirección electrónica en bibliografía.