Análisis Matemático II

Tema 7: Integración de funciones reales

4 de mayo

Versión definitiva de la integral

Funciones integrables y su integral

Seguimos trabajando en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$ cuando: $\displaystyle\int_E |f| < \infty$

Se tiene entonces que $\displaystyle\int_E f^+ < \infty$ y $\displaystyle\int_E f^- < \infty$

y se define la integral de f sobre E como el número real dado por

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

- Cuando $f \geqslant 0$, esta integral coincide con la que conocíamos
- f es integrable en E si y sólo si lo es $f\big|_E$, y las integrales coinciden

Observaciones inmediatas sobre de integral

Localización

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$

si, y sólo si, $\chi_E\, f$ es integrable en Ω, en cuyo caso se tiene:

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E\, f$$

El conjunto de las funciones integrables

Denotamos por $\mathcal{L}_1(\Omega)$ al conjunto de las funciones integrables en Ω, es decir,

$$\mathcal{L}_1(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) \ : \ \int_\Omega |f| < \infty \right\}$$

Los elementos de $\mathcal{L}_1(\Omega)$ son las funciones integrables

Propiedades clave de la integral

Linealidad

$\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$

y definiendo: $I(f) = \int_\Omega f \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$,

se obtiene una aplicación lineal $I : \mathcal{L}_1(\Omega) \to \mathbb{R}$

Positividad

$$h \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad h \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega h \geqslant 0$$

- $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g$
- $\left| \int_\Omega f \right| \leqslant \int_\Omega |f| \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$

Se dice que la integral es un funcional lineal positivo en $\mathcal{L}_1(\Omega)$

Relación de la integral con la convergencia puntual

La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Para $n \in \mathbb{N}$ sea f_n la función característica de $[-n, n]^N$. Entonces:
$f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{f_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^N$
a la función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$
pero f no es integrable en $\mathbb{R}^N$

En general, no podemos permutar límite e integral

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \left]0, \frac{1}{n}\right[^N$ y $f_n = n^N \chi_{A_n} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$.

Ahora $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero en $\mathbb{R}^N$

pero $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n = 1$

El segundo teorema de convergencia

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales medibles,

que converge puntualmente en Ω a una función $f:\Omega\to\mathbb{R}$.

Supongamos que existe una función integrable $g:\Omega\to\mathbb{R}_0^+$ tal que:

$$\big|\,f_n(x)\big| \leqslant g(x) \quad \forall x\in\Omega\,, \ \ \forall n\in\mathbb{N}$$

Entonces f es integrable y se verifica que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\,f_n-f\,| = 0\,, \quad \text{de donde:} \quad \int_\Omega f = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n$$