Tema 6

Integración de funciones positivas

Una vez preparado el terreno mediante el estudio de las funciones medibles, abordamos ya la construcción de la integral de Lebesgue, por ahora para funciones con valores positivos. Empezamos definiendo la integral de una función simple positiva, que enseguida se generaliza para definir la integral de una función medible positiva. Como propiedad más importante de la integral así obtenida, probamos otro resultado fundamental en la teoría de la integración, que se conoce como *teorema de la convergencia monótona*. Nos da una primera condición suficiente para permutar la integral con el límite puntual de una sucesión de funciones.

6.1. Integral de una función simple positiva

Para un conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^N$, es natural pensar que la integral sobre todo $\mathbb{R}^N$ de la función χ_A debe ser $\lambda(A)$, mientras que la integral de χ_A sobre otro conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^N$ debería ser $\lambda(E \cap A)$. Ahora es fácil adivinar cómo debe definirse la integral de una función simple positiva, e incluso la de una función medible positiva. Seguiremos un procedimiento que evita problemas de definición y permite obtener todas las propiedades de la integral, por el camino más corto.

Sea pues s una función simple positiva, y consideremos su descomposición canónica:

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \chi_{A_k} \qquad \text{donde} \quad p \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}_0^+,\ A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{M} \tag{1}$$

Usaremos a menudo que se tiene aquí una partición de Ω, es decir: $\Omega = \biguplus_{k=1}^{p} A_k$.

Para cada conjunto medible $E \subset \Omega$, se define la **integral** de s sobre E mediante la igualdad

$$\int_E s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\, \lambda(E \cap A_k)$$

Nótese que, aunque $s(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}_0^+$, la suma anterior puede perfectamente ser ∞. Por otra parte, puede ocurrir que $\alpha_1 = 0$ y $\mu(E \cap A_1) = \infty$, y observamos que la definición $0\,\infty = 0$ resulta muy coherente: la integral de una función idénticamente nula en un conjunto, debe ser cero.

Para extender esta primera definición de integral, sólo necesitamos tres propiedades, que se comprueban sin ninguna dificultad.

- **Homogeneidad.** *Si s es una función simple positiva, se tiene:*

$$\int_E \rho s = \rho \int_E s \qquad \forall \rho \in \mathbb{R}_0^+, \ \forall E \in \mathcal{M}$$

Si $\rho = 0$ no hay nada que demostrar. En otro caso, si la descomposición canónica de s es la que aparece en (1), la de ρs viene dada por $\rho s = \sum_{k=1}^{p} (\rho\, \alpha_k) \chi_{A_k}$. Por tanto, basta usar la distributividad del producto en $[0, \infty]$: para todo $E \in \mathcal{M}$, se tiene

$$\int_E \rho s = \sum_{k=1}^{p} \rho \alpha_k \lambda(E \cap A_k) = \rho \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda(E \cap A_k) = \rho \int_E s \qquad \blacksquare$$

- **Aditividad.** *Si s es una función simple positiva, la función $\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ definida por*

$$\varphi(E) = \int_E s \qquad \forall E \in \mathcal{M}$$

es σ-aditiva y verifica que $\varphi(\emptyset) = 0$, luego es una medida.

Es obvio que $\varphi(\emptyset) = 0$, pero lo importante es la σ-aditividad. Si $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$, donde $E_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y la descomposición canónica de s viene dada por (1), para cada $k \in \Delta_p$ tenemos que $E \cap A_k = \biguplus_{n=1}^{\infty} (E_n \cap A_k)$. Usando entonces que λ es σ-aditiva, obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(E) &= \int_E s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n \cap A_k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda(E_n \cap A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} s = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n) \end{aligned}$$

Esto prueba que φ también es σ-aditiva, como queríamos. $\blacksquare$

- **Crecimiento.** *Si s, t son funciones simples positivas y $E \in \mathcal{M}$, entonces:*

$$s(x) \leqslant t(x) \quad \forall x \in E \quad \Longrightarrow \quad \int_E s \leqslant \int_E t$$

Supongamos que la descomposición canónica de s es la que aparece en (1) y que la de t viene dada por

$$t = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \chi_{B_j} \qquad \text{donde} \quad q \in \mathbb{N}, \ \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}_0^+, \ B_1, \ldots, B_q \in \mathcal{M} \tag{2}$$

Como $E = \biguplus_{j=1}^{q} (E \cap B_j)$, usando la aditividad de la integral, obtenemos:

$$\int_E s = \sum_{j=1}^{q} \int_{E \cap B_j} s = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \, \lambda(E \cap B_j \cap A_k)$$

El mismo razonamiento usado con s puede hacerse con t, para obtener que

$$\int_E t = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, \lambda(E \cap A_k \cap B_j) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} \beta_j \, \lambda(E \cap B_j \cap A_k)$$

Basta por tanto comprobar que

$$\alpha_k \, \lambda(E \cap B_j \cap A_k) \leqslant \beta_j \, \lambda(E \cap B_j \cap A_k) \qquad \forall k \in \Delta_p, \ \forall j \in \Delta_q$$

Esta desigualdad es obvia cuando $E \cap B_j \cap A_k = \emptyset$ y, en otro caso, tomando $x \in E \cap B_j \cap A_k$, basta observar que $\alpha_k = s(x) \leqslant t(x) = \beta_j$. ■

El resultado anterior tiene interés incluso cuando $s(x) = t(x)$ para todo $x \in E$, y entonces las integrales sobre E de s y t coinciden. Dicho de otra forma, *la integral sobre un conjunto medible $E \subset \Omega$ de una función simple positiva s, sólo depende de los valores de s en E.*

Por otra parte, el crecimiento de la integral de una función simple positiva será la clave para extender su definición, como enseguida veremos.

6.2. Integral de una función medible positiva

Conviene denotar por $\mathcal{S}^+$ al conjunto de las funciones simples positivas, cuya integral ya conocemos. Volvemos ahora a trabajar en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, para estudiar la integral de una función $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$, esto es, de una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$.

El crecimiento de la integral nos dice que, para $t \in \mathcal{S}^+$ y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

$$\int_E t = \text{máx} \left\{ \int_E s \ : \ s \in \mathcal{S}^+, \ s(x) \leqslant t(x) \ \ \forall x \in E \right\}$$

Esta igualdad es la clave que usaremos para extender la integral. Si en vez de t tenemos una función medible positiva, el segundo miembro sigue teniendo perfecto sentido, con sólo sustituir el máximo que en él aparece por un supremo.

Se define la **integral de una función medible positiva** $f : \Omega \to [0, \infty]$, sobre un conjunto medible $E \subset \Omega$, mediante la igualdad:

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \ : \ s \in \mathcal{S}^+, \ s(x) \leqslant f(x) \ \ \forall x \in E \right\} \tag{3}$$

Los comentarios anteriores dejan claro que, en el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, esta definición generaliza la hecha previamente para funciones simples positivas. Esto explica que podamos usar la misma nomenclatura y notación.

Además, es evidente que la integral definida en (3) sólo depende de los valores de f en el conjunto E. De hecho, es claro que la restricción $f\big|_E : E \to [0,\infty]$ es una función medible, para la que podemos usar la definición anterior, con E haciendo el papel de Ω, y vemos claramente que la integral sobre E de $f\big|_E$ coincide con la de f.

La dos primeras propiedades básicas de la integral son inmediatas:

- **Crecimiento.** *Si f y g son funciones medibles positivas y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:*

$$f(x) \leqslant g(x) \;\; \forall x \in E \quad \Longrightarrow \quad \int_E f \leqslant \int_E g$$

Si $s \in \mathcal{S}^+$ verifica que $s(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in E$, con más razón se tiene que $s(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in E$, luego basta usar que el supremo de un conjunto es mayor o igual que el de cualquier subconjunto no vacío. ■

- **Homogeneidad.** *Si f es una función medible positiva, tiene:*

$$\int_E \rho f = \rho \int_E f \qquad \forall \rho \in \mathbb{R}_0^+, \;\; \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

Si $\rho = 0$ ambos miembros de la igualdad se anulan, y en otro caso, las funciones $t \in \mathcal{S}^+$, tales que $t(x) \leqslant \rho f(x)$ para todo $x \in E$, son las de la forma ρs con $s \in \mathcal{S}^+$ y $s(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in E$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \int_E \rho f &= \sup \left\{ \int_E \rho s \, : \, s \in \mathcal{S}^+, \;\; s(x) \leqslant f(x) \;\; \forall x \in E \right\} \\ &= \sup \left\{ \rho \int_E s \, : \, s \in \mathcal{S}^+, \;\; s(x) \leqslant f(x) \;\; \forall x \in E \right\} = \rho \int_E f \end{aligned}$$

donde hemos usado la homogeneidad de la integral para funciones simples positivas. ■

Probamos ahora otra propiedad relevante de la integral, que permite reducir su estudio al caso $E = \Omega$.

- **Localización.** *Si f es una función medible positiva, se tiene:*

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E f \qquad \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

Dada $s \in \mathcal{S}^+$ con $s(x) \leqslant \chi_E(x) f(x)$ para todo $x \in \Omega$, se tiene $s(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in E$, mientras que $s(x) = 0$ para todo $x \in \Omega \setminus E$. La aditividad de la integral de s, nos dice que

$$\int_\Omega s = \int_E s + \int_{\Omega \setminus E} s = \int_E s \leqslant \int_E f$$

y en vista de la arbitrariedad de s, tenemos una desigualdad:

$$\int_\Omega \chi_E f \leqslant \int_E f$$

Dada ahora $s \in \mathcal{S}^+$ con $s(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in E$, vemos que la función $\chi_E\, s \in \mathcal{S}^+$ verifica que $\chi_E(x)\, s(x) \leqslant \chi_E(x)\, f(x)$, para todo $x \in \Omega$. Usando que s y $\chi_E\, s$ coinciden en E y la aditividad de la integral de $\chi_E\, s$ obtenemos que

$$\int_E s = \int_E \chi_E\, s = \int_\Omega \chi_E\, s \leqslant \int_\Omega \chi_E\, f$$

y de nuevo la arbitrariedad de s nos la otra desigualdad:

$$\int_E f \leqslant \int_\Omega \chi_E\, f \qquad \blacksquare$$

A partir de ahora trabajamos sobre todo con integrales sobre Ω, sin olvidar que siempre podemos usar la localización para extender cualquier resultado al caso general.

6.3. Primer teorema de convergencia

Probamos ya la principal propiedad de la integral que estamos estudiando:

Teorema de la convergencia monótona. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas, y sea $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$. Se tiene entonces:*

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$

Demostración. Como $\{f_n\}$ es creciente, la correspondiente sucesión de integrales también lo es, luego converge. Existe por tanto el límite que aparece en el segundo miembro de la igualdad buscada, al que denotaremos por $L \in [0, \infty]$. Además se tiene $f_n \leqslant f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego el crecimiento de la integral también nos dice que

$$\int_\Omega f_n \leqslant \int_\Omega f \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \text{de donde} \quad L \leqslant \int_\Omega f$$

Para la otra desigualdad basta probar que, si $s \in \mathcal{S}^+$ verifica que $s(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in \Omega$, la integral de s sobre Ω es menor o igual que L. Fijado $\rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$E_n = \big\{ x \in \Omega \, : \, f_n(x) \geqslant \rho\, s(x) \big\}$$

y comprobamos que $E_n \in \mathcal{M}$. Para ello, escribimos la descomposición canónica de s igual que en (1). Como f_n es medible, se tiene que

$$A_k \cap E_n = A_k \cap \{ x \in \Omega : f_n(x) \geqslant \rho\, \alpha_k \} \in \mathcal{M} \ \ \forall k \in \Delta_p, \quad \text{luego} \ \ E_n = \biguplus_{k=1}^{p} (A_k \cap E_n) \in \mathcal{M}$$

Como $\{f_n\}$ es creciente, tenemos también que $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y de hecho vamos a ver que $\{E_n\} \nearrow \Omega$. Si $s(x) = 0$ se tiene obviamente $x \in E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En otro caso, como $\{f_n(x)\} \nearrow f(x) \geqslant s(x) > \rho\, s(x)$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $x \in E_n$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, como $\rho\, s(x) \leqslant f_n(x)$ para todo $x \in E_n$, usando la homogeneidad de la integral de s, dos veces el crecimiento de la integral, y la definición de L, obtenemos

$$\rho \int_{E_n} s \,=\, \int_{E_n} \rho\, s \,\leqslant\, \int_{E_n} f_n \,=\, \int_\Omega \chi_{E_n} f_n \,\leqslant\, \int_\Omega f_n \,\leqslant L$$

Usamos ahora que la integral de s, como función del conjunto sobre el que se integra, es una medida, luego es crecientemente continua, para obtener:

$$\rho \int_\Omega s \,=\, \rho \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s \,\leqslant L$$

Pero esta desigualdad es válida para todo $\rho \in]\,0\,,\,1\,[$, luego la integral de s sobre Ω es menor o igual que L, como queríamos demostrar. ■

Del teorema anterior deducimos que, si f es una función medible positiva y $\{s_n\}$ una sucesión de funciones simples positivas, tal que $\{s_n\} \nearrow f$, se tiene

$$\int_E f \,=\, \lim_{n\to\infty} \int_E s_n \qquad \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

A partir del teorema de aproximación de Lebesgue, que garantiza la existencia de $\{s_n\}$, era muy natural intentar definir la integral de f usando el límite anterior, pero entonces habríamos tenido que comprobar que dicho límite no depende de la sucesión $\{s_n\}$ elegida. La definición de la integral como un supremo no es menos intuitiva y evita esa comprobación.

El teorema anterior será la clave para obtener las propiedades más relevantes de la integral. Empezamos por su aditividad respecto al integrando, que aún no hemos comprobado siquiera para funciones simples positivas. Ha llegado el momento de hacerlo, pero obteniendo ya un resultado mucho más fuerte: se puede permutar la integral con la suma de una serie arbitraria. Conviene aclarar que, si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones de Ω en $[\,0\,,\,\infty\,]$, siempre tiene sentido considerar la función $f : \Omega \to [\,0\,,\,\infty\,]$ definida por $f(x) \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$. Es natural decir que f es la *suma de la serie* $\sum_{n\geqslant 1}^{\infty} f_n$, y escribir $f \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Por así decirlo, se puede entender que toda serie de funciones de Ω en $[\,0\,,\,\infty\,]$ converge puntualmente, y que su suma es una función del mismo tipo.

- **Integral de la suma de una serie.** *Para cualquier sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles positivas, se tiene:*

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n$$

Empezamos considerando dos funciones simples positivas s y t, con descomposiciones canónicas dadas por (1) y (2) respectivamente. Como $\Omega \,=\, \biguplus_{k=1}^{p} \left(\biguplus_{j=1}^{q} (A_k \cap B_j) \right)$, usando la aditividad de la integral de $s+t$, obtenemos

$$\int_\Omega (s+t) \,=\, \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \int_{A_k \cap B_j} (s+t) \,=\, \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (\alpha_k + \beta_j)\, \lambda(A_k \cap B_j) \tag{4}$$

Para la última igualdad hemos usado que, dados $k \in \Delta_p$ y $j \in \Delta_q$, la función $s+t$ es constante en $A_k \cap B_j$, lo que permite calcular fácilmente la correspondiente integral.

Usando ahora la aditividad de la integral de s, tenemos

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \alpha_k \, \lambda(A_k \cap B_j) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \, \lambda(B_j \cap A_k) = \sum_{j=1}^{q} \int_{B_j} s = \int_{\Omega} s$$

y análogamente, la aditividad de la integral de t nos dice que

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, \lambda(A_k \cap B_j) = \sum_{k=1}^{p} \int_{A_k} t = \int_{\Omega} t$$

Al sustituir en (4) las dos igualdades recién obtenidas, concluimos que

$$\int_{\Omega} (s+t) = \int_{\Omega} s + \int_{\Omega} t$$

Si ahora f y g son funciones medibles positivas, podemos escribir $\{s_n\} \nearrow f$ y $\{t_n\} \nearrow g$ donde $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son sucesiones de funciones simples positivas. Como $\{s_n + t_n\} \nearrow f+g$, usando lo recién demostrado, el teorema de la convergencia monótona nos dice que

$$\int_{\Omega} (f+g) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} (s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\Omega} s_n + \int_{\Omega} t_n \right) = \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} g$$

Mediante una obvia inducción, tenemos la igualdad análoga para sumas finitas de funciones medibles positivas.

Sea ya $\{f_n\}$ una sucesión arbitraria de funciones medibles positivas. Usando lo demostrado, el teorema de la convergencia monótona nos da

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} f_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} f_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n$$

que es exactamente la igualdad deseada. ■

Podemos ya probar la aditividad de la integral de una función medible positiva, que hasta ahora sólo conocíamos para funciones simples positivas:

- **Aditividad.** *Si f es una función medible positiva, definiendo*

$$\varphi(E) = \int_E f \qquad \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

se obtiene una función $\varphi : \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$, que es σ-aditiva y verifica que $\varphi(\emptyset) = 0$, luego es una medida.

Si $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$ con $E_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene claramente

$$\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}, \qquad \text{luego} \qquad \chi_E \, f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} \, f$$

Si suponemos además que $E_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $\{\chi_{E_n} f\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas, a la que podemos aplicar el resultado anterior, para obtener

$$\varphi(E) = \int_\Omega \chi_E \, f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega \chi_{E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n) \qquad \blacksquare$$

6.4. Otras propiedades de la integral

Concluimos el estudio de la integral de una función medible positiva, analizando sus dos posibles valores extremos: 0 e ∞.

- **Integrales nulas.** *Si f es una función medible positiva y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, entonces:*

$$\int_A f = 0 \iff \lambda\big(\{x \in A : f(x) > 0\}\big) = 0 \tag{5}$$

En particular, si $\lambda(A) = 0$, se tiene $\int_A f = 0$.

El conjunto $E = \{x \in A : f(x) > 0\}$ es medible y $f(x) = 0$ para todo $x \in A \setminus E$, luego

$$\int_A f = \int_E f + \int_{A \setminus E} f = \int_E f$$

Una implicación está ya muy clara:

$$\lambda(E) = 0 \implies \int_E s = 0 \ \forall s \in \mathcal{S}^+ \implies \int_E f = 0 \implies \int_A f = 0$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto $E_n = \{x \in A : f(x) \geqslant 1/n\} \in \mathcal{M}$, con lo que tenemos claramente $\{E_n\} \nearrow E$. Pero también es claro que $\int_{E_n} f \geqslant \lambda(E_n)/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego se tiene

$$\int_A f = 0 \implies \int_{E_n} f = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \lambda(E_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \lambda(E) = 0$$

donde hemos usado la continuidad creciente de la medida λ. $\blacksquare$

Pasemos ahora a considerar la posibilidad de que una integral sea ∞, o para verlo desde el lado más optimista, la posibilidad de que una función medible positiva tenga integral finita.

- **Integrales finitas.** *Si f es una función medible positiva y $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, entonces:*

$$\int_A f < \infty \implies \lambda\big(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}\big) = 0 \tag{6}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto $E_n = \{x \in A : f(x) \geqslant n\} \in \mathcal{M}$, y observamos claramente que $\{E_n\} \searrow E = \{x \in A : f(x) = \infty\}$. Pero también es claro que

$$n\lambda(E) \leqslant n\,\lambda(E_n) \leqslant \int_{E_n} f \leqslant \int_A f \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si la última integral es finita, deducimos que $\lambda(E) = 0$, como se quería. ■

A diferencia de lo que ocurría con las integrales nulas, el recíproco de la implicación recién demostrada es obviamente falso. Para convencerse basta tomar $f(x) = 1$ para todo $x \in \Omega$. Entonces f es una función medible positiva que no toma el valor ∞, pero su integral sobre Ω es $\lambda(\Omega)$, que sí puede ser ∞.

6.5. Afirmaciones que se verifican casi por doquier

Como es la primera vez que aparecen, conviene explicar la nomenclatura que suele usarse en situaciones como las de los dos últimos resultados.

Si $P(x)$ es cualquier condición que un punto $x \in \Omega$ puede cumplir o no, decimos que se verifica $P(x)$ **para casi todo** $x \in \Omega$, o abreviadamente **p.c.t.** $x \in \Omega$, cuando los puntos $x \in \Omega$ que no verifican $P(x)$, forman un conjunto de medida nula.

En ocasiones, no es necesario aludir a un punto genérico de Ω, y se dice simplemente que la condición P se verifica **casi por doquier**, o abreviado **c.p.d.** Por ejemplo, el caso $A = \Omega$ de la equivalencia (5) puede resumirse escribiendo

$$\int_\Omega f = 0 \iff f(x) = 0 \text{ p.c.t. } x \in \Omega \iff f = 0 \text{ c.p.d.}$$

Análogamente, el caso $A = \Omega$ de la implicación (6) se resume escribiendo

$$\int_\Omega f < \infty \implies f(x) < \infty \text{ p.c.t. } x \in \Omega \iff f < \infty \text{ c.p.d.}$$

A veces, la propiedad $P(x)$ sólo se considera para puntos de un conjunto medible $A \subset \Omega$. Entonces, si los puntos $x \in A$ que no cumplen la condición $P(x)$ forman un conjunto de medida nula, decimos que se verifica $P(x)$ p.c.t. $x \in A$, o que P se verifica c.p.d. en A.

Por ejemplo, (5) se resume en general diciendo que

$$\int_A f = 0 \iff f(x) = 0 \text{ p.c.t. } x \in A \iff f = 0 \text{ c.p.d. en } A$$

mientras que (6) se resume escribiendo

$$\int_A f < \infty \implies f(x) = 0 \text{ p.c.t. } x \in A \iff f < \infty \text{ c.p.d. en } A$$

Conviene habituarse a la nomenclatura que acabamos de introducir, que resulta cómoda y se usa con bastante frecuencia. A partir de ahora, irán apareciendo diversas propiedades que se verifican casi por doquier.

6.6. Lema de Fatou

Damos por concluida la lista de propiedades básicas de la integral de una función medible positiva, pero conviene dar información adicional sobre la más importante: el teorema de la convergencia monótona.

En primer lugar, su denominación no es del todo adecuada, pues el análogo para sucesiones decrecientes es falso, como muestra el siguiente ejemplo.

En el caso $\Omega = \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, llamemos χ_n a la función característica de $[n, +\infty[$. Entonces $\{\chi_n\}$ es una sucesión decreciente de funciones simples positivas que converge a cero puntualmente en $\mathbb{R}$, pero la correspondiente sucesión de integrales es constantemente igual a ∞, luego no converge a cero. Se refleja aquí la misma asimetría que teníamos entre la continuidad creciente y la decreciente de la medida de Lebesgue.

Finalmente, el teorema de la convergencia monótona puede aprovecharse para conseguir información útil sobre sucesiones de funciones medibles positivas, que ya no tienen que ser crecienes, pero cuando se usa de esa forma, se le conoce con el nombre que sigue.

Lema de Fatou. *Si* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones medibles positivas, se tiene:*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$

Demostración. Definiendo $g_n = \inf\{f_k : k \geqslant n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $\{g_n\}$ es una sucesión creciente de funciones medibles positivas, que converge puntualmente a $\liminf_{n\to\infty} f_n$, luego el teorema de la convergencia monótona nos dice que

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$

donde la última desigualdad, se debe al crecimiento de la integral, ya que $g_n(x) \leqslant f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Cuando $\{f_n\} \nearrow f$, el lema anterior nos dice que $\int_\Omega f \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$, pero recordemos que ésta es la desigualdad no evidente del teorema de la convergencia monótona, la otra es consecuencia inmediata del crecimiento de la integral. Vemos por tanto que el teorema de la convergencia monótona y el lema de Fatou son resultados equivalentes, usamos uno u otro según tengamos o no una sucesión creciente de funciones.