Problemas Integral de línea (2)

1.- Evaluar cada una de las siguientes integrales de línea

a) $\int_C x\,dy - y\,dx$, $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$

b) $\int_C x\,dx + y\,dy$ $c(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t)$, $t \in [0, 2]$

c) $\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, c está formada por los segmentos rectos que unen $(1,0,0)$ con $(0,1,0)$, y éste con $(0,0,1)$

d) $\int_C x^2\,dx - xy\,dy + dz$, c es la parábola $z = x^2, y = 0$ de $(-1,0,1)$ a $(1,0,1)$

2.- Consideremos el campo de fuerza $F(x,y,z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2, z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$

3.- Sea c una trayectoria o camino suave.

a) Supongamos F es perpendicular a $c'(t)$ en el punto $c(t)$, $\forall t$.

Entonces $\int_C F \cdot ds = 0$

b) Si F es paralelo a $c'(t)$ en $c(t)$, entonces

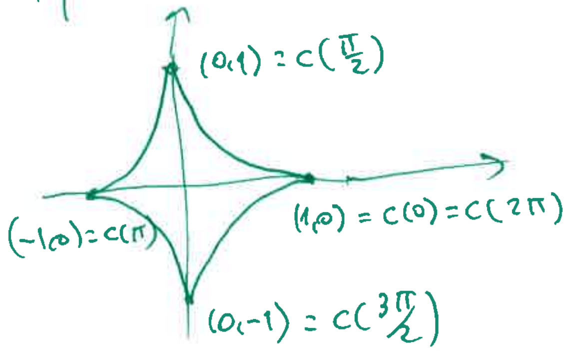
$$\int_C F \cdot ds = \int_C \|F\|\,ds$$

(F es paralelo si $F(c(t)) = \lambda(t)\, c'(t)$, con $\lambda(t) > 0$, $\forall t \in [a,b]$)

4.- Supongamos que la parametrización c tiene longitud ℓ y que $\|F\| \leq M$. Entonces, probar que $\left| \int_C F \cdot ds \right| \leq M\ell$

5.- Sea $c(t)$ una trayectoria y T el vector tangente unitario. ¿Qué es $\int_c T\cdot ds$?

6.- Sea $c:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $c(t)=(\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $\forall t\in[0,2\pi]$. Evaluar la integral del campo $F(x,y)=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}$ a lo largo de esa curva.



7.- Supongamos que F es un campo gradiente, $F=\nabla f$, para algún campo escalar f. Demostrar que si c es una parametrización de una curva cerrada y regular ($c:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, $c([a,b])\subset D(F)$, $c(a)=c(b)$) entonces $\int_c F\cdot ds=0$.

8.- Supongamos que $\nabla f(x,y,z)=2xyze^{x^2}\hat{\imath}+ze^{x^2}\hat{\jmath}+ye^{x^2}\hat{k}$. Si $f(0,0,0)=5$, calcular $f(1,1,2)$.

9.- Consideremos el campo de fuerzas gravitatorio (con $G=M=m=1$) definido para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ como

$$F(x,y,z)=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}).$$

Demostrar que el trabajo realizado por dicha fuerza cuando la partícula se mueve de (x_2,y_2,z_2) a (x_1,y_1,z_1) a lo largo de cualquier trayectoria depende sólo de los radios $R_1=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)^{1/2}$ y $R_2=(x_2^2+y_2^2+z_2^2)^{1/2}$.