Ejercicios diferenciabilidad

(Confecciona el esquema correspondiente con la teoría que necesites).

1.- Superficies de nivel para

a) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2$

b) $f(x,y,z) = x^2$

c) $f(x,y,z) = xyz$

2.- Sean $F(u,v)$ y $u = h(x,y,z)$, $v = k(x,y,z)$ funciones diferenciables con valores reales. Sea $f(x,y,z) = F(h(x,y,z), k(x,y,z))$

Calcular $\nabla f(x,y,z)$ en función de las derivadas parciales de F, h, k.

3. Ec. del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ para

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ $\qquad (x_0,y_0) = (2,-1)$

b) $\qquad = xy$ $\qquad = (-1,-1)$

c) $\qquad = L(x+y)$

4.- Ec. del plano tangente a las superficies en los puntos correspondientes.

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$ $\qquad (1, 1, \cdot)$

$(\cos x)(\cos y)\, e^z = 0$ $\qquad (\pi/2, 1, 0)$

Gradientes de

$f(x,y,z) = xe^z + y\cos x$

$= (x+y+z)^{10}$

$= \dfrac{(x^2+y)}{z}$

6. Hallar el plano tangente a $z = x^2+y^2$ en el punto $(1,-2,5)$. Explicar el significado geométrico.

7. Derivada direccional de $f(x,y,z) = e^x\cos(yz)$ en $p=(0,0,0)$ según $\vec{v}=(2,1,-2)$

8. Plano tangente y recta normal al hiperboloide $x^2+y^2-z^2=18$ en el punto $(3,5,-4)$

9.- Sea $(x(t),y(t))$ una trayectoria en el plano, $0\le t\le 1$, $f(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$
Suponemos que $\frac{dx}{dt}f_x + \frac{dy}{dt}f_y \le 0 \Rightarrow f(x(1),y(1)) \le f(x(0),y(0))$

10. Hallar la dirección en la cual la función $w = x^2+xy$ crece más rápidamente en el punto $(-1,1)$. ¿Cuál es la magnitud de ∇w en ese punto? Int. geométrica.

11. Tª Euler. $f: S \to \mathbb{R}$ ($S\subset\mathbb{R}^n$) p-homogénea $\Leftrightarrow$ $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ $\forall x \in S$ / $\lambda x\in S$

f diferenciable $\Rightarrow$ $x\cdot\nabla f(x) = p\, f(x)$

(Ind. x fijo definir $g(\lambda) = f(\lambda x)$ calcular $g'(1)$)

Dada $z = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ con $f \in C^1$

probar $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

13.– $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$, $= 0$ si $(x,y) = (0,0)$

$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ – – – – – – – – –

· Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$

· Decir si son diferenciables o no

14.. Calcular el $\nabla f(x,y)$ en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$

$f(x,y) = x^2y^2 L(x^2-y^2)$ $f(0,0) = 0$

$f(x,y) = xy \operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}$ $f(0,0) = 0$

15.. a) $z = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$ con $u = e^{-x-y}$, $v = e^{xy}$. Calcular z_x, z_y

b) si $z = uv$, $u = x+y$, $v = x-y$