Integrales de campos sobre superficies

1- Evaluar $\iint_S (x+y+z)\,dS$ donde S es la frontera de la Bola unidad

2.- Calcular el área del trozo del cono $x^2+y^2=z^2$ con $z \geq 0$ que está dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=2Rz$, con $R>0$.

3. Hallar la masa de una superficie esférica de radio R tal que en cada punto $(x,y,z)\in S$ la densidad de masa es igual a la distancia de (x,y,z) a un punto $(x_0,y_0,z_0)\in S$.

4. Hallar la coordenada z del centro de gravedad de la superficie de una semiesfera $(z\geq 0)$. Razonar porqué $\bar{x}=\bar{y}=0$.

5.- Sea S una esfera de radio r, p un punto no perteneciente a S.
Demostrar que

$$\int_S \frac{1}{\|x-p\|}\,dS = \begin{cases} 4\pi r & \text{si } p \text{ está dentro de } S \\ \dfrac{4\pi r^2}{d} & \text{si } p \text{ está fuera de } S \end{cases}$$

con d = distancia de p al centro de S.

6.- La temperatura de un punto de $\mathbb{R}^3$ viene dada por $T(x,y,z)=3x^2+3z^2$.
Calcular el flujo de calor a través de la superficie

$x^2+z^2=2$, con $y\in[0,2]$

(El calor fluye con el campo $F=-k\nabla T$, tomar $k=1$)

(El flujo de calor a través de S es $\int_S F\cdot dS$)

7.- Evaluar $\int_S \mathrm{rot}(F)\,dS$ donde S es la superficie $x^2+y^2+3z^2=1$ con $z\leq 0$

$F=y\hat{i}-x\hat{j}+zx^3y^2\hat{k}$.

8.- El campo de velocidades de un fluido es descrito por $F=\hat{i}+x\hat{j}+z\hat{k}$ en m/s.
Calcular cuantos metros cúbicos de fluido estan cruzando la superficie $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$ en cada segundo.