Ejercicios Integral de línea (1)

1.- Evaluar las siguientes integrales a lo largo de caminos $\int_c f(x,y,z)\,ds$ donde

a) $f(x,y,z) = x+y+z$ $\quad c:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ c(t)=(\operatorname{sen} t, \cos t, t)$

b) $\quad = \cos z$ $\quad$ c igual que ap a)

c) $\quad = \exp(\sqrt{z})$ $\quad c:[0,1]\to\mathbb{R}^3\quad c(t)=(1,2,t^2)$

d) $\quad = yz$ $\quad c:[1,3]\to\mathbb{R}^3\quad c(t)=(t,3t,2t)$

e) $f:\mathbb{R}^3\setminus\{y=0\}\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=1/y^3;\ c:[1,e]\to\mathbb{R}^3,\ c(t)=\operatorname{Log}(t)\hat{i}+t\hat{j}+2\hat{k}$

2.- Demostrar que la integral de $f(x,y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r=r(\theta)$ con $\theta_1\le\theta\le\theta_2$, es:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Calcular la longitud de la trayectoria $r=1+\cos\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$

3.- Tomemos la semicircunferencia parametrizada por $c:[0,\pi]\to\mathbb{R}^3$,
$c(\theta)=(0, a\operatorname{sen}\theta, a\cos\theta)$, con $a>0$.

a) ¿Cuál es la masa total si dicha semicircunferencia estuviera hecha de alambre de densidad 2gr. por unidad de longitud.

b) ¿Dónde está el centro de masa de este alambre?

(Ind.: si $\rho(x,y,z)$ es la función de densidad de un cuerpo (alambre) su centro de masa $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ verifica

$$\bar{x}=\frac{\int_c x\rho(x,y,z)\,ds}{m}\qquad \bar{y}=\frac{\int_c y\rho(x,y,z)\,ds}{m}\qquad \bar{z}=\frac{\int_c z\rho(x,y,z)\,ds}{m}$$

donde m es la masa del alambre

$$m=\int_c \rho(x,y,z)\,ds\ )$$