

# ANÁLISIS VECTORIAL

12/09/2023

## REPASO

Ejercicios  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

\*1) Demostrar que  $2|x|^2 + 2|y|^2 = |x+y|^2 + |x-y|^2$ . Interpretar.

$$\underbrace{|x+y|^2 + |x-y|^2}_{= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle} = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\cancel{\langle x, y \rangle} + \cancel{\langle x, x \rangle} + \cancel{\langle y, y \rangle} - 2\cancel{\langle x, y \rangle} =$$

$$= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = \underbrace{2|x|^2 + 2|y|^2}_{\text{Identidad del Paralelogramo}}$$

\*2) " " " $(|x-y||x+y|)^2 \leq (|x|^2 + |y|^2)^2$

$$\langle x-y, x-y \rangle \langle x+y, x+y \rangle = (\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle)(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle) =$$

= ...

\*3) " " " $4\langle x, y \rangle = |x+y|^2 - |x-y|^2$

$$\underbrace{|x+y|^2 - |x-y|^2}_{= \langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle} = \langle \cancel{x}, \cancel{x} \rangle + \langle \cancel{y}, \cancel{y} \rangle + 2\langle x, y \rangle - \cancel{\langle x, x \rangle} - \cancel{\langle y, y \rangle} + 2\langle x, y \rangle =$$

$$= \underbrace{4\langle x, y \rangle}_{}$$

\*4) " " " $|x_1 + \dots + x_k| \leq |x_1| + \dots + |x_k|$

Desigualdad Triangular + Inducción

\*5) " " " $\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 - \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad \text{Identidad de Laplace}$

\*6) " " , en  $\mathbb{R}^3$ ,  $|x|^2 / |y|^2 = \langle x, y \rangle^2 + |\cancel{x} \cdot \cancel{y}|^2$   $\uparrow$  Producto Vectorial (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 y_j^2 - \sum_{i < j} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2 x_i y_j x_j y_i) = \sum_{i,j=1}^n x_i^2 y_j^2 - \sum_{i < j} x_i^2 y_j^2 - \sum_{i < j} x_j^2 y_i^2 + 2 \sum_{i < j} x_i y_i x_j y_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 - \sum_{i < j} x_i^2 y_j^2 - \sum_{i > j} x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i < j} x_i y_i x_j y_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2 + 2 \sum_{i < j} (x_i y_i)(x_j y_j)$$

\* $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ . Demostrar que: ④  $(a \times b) \times c = (ac)b - (bc)a$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \\ b = b_1 i + b_2 j + b_3 k \\ c = c_1 i + c_2 j + c_3 k \end{array}}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

$$(a \times b) \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 & a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_3 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_3 - a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_2) i +$$

$$+ (a_3 b_2 c_3 - a_2 b_3 c_3 - a_2 b_1 c_1 + a_1 b_2 c_1) j +$$

$$+ (a_2 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_2 - a_3 b_1 c_1 + a_1 b_3 c_1) k$$

$$(ac)b - (bc)a = (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b - (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) a =$$

$$= (a_3 b_1 c_1 + a_2 b_1 c_2 + a_3 b_1 c_3) i + (a_1 b_2 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_2 c_3) j + (a_1 b_3 c_1 + a_2 b_3 c_2 + a_3 b_3 c_3) k -$$

$$- (a_2 b_1 c_1 + a_3 b_1 c_2 + a_1 b_1 c_3) i - (a_2 b_1 c_1 + a_3 b_2 c_2 + a_1 b_3 c_3) j - (a_3 b_1 c_1 + a_3 b_2 c_2 + a_2 b_3 c_3) k =$$

$$= (a_3 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_3 - a_2 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_2) i +$$

$$+ (a_3 b_2 c_3 - a_2 b_3 c_3 - a_2 b_1 c_1 + a_1 b_2 c_1) j +$$

$$+ (a_2 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_2 - a_3 b_1 c_1 + a_1 b_3 c_1) k$$

⑤  $a \times (b \times c) = (ac)b - (ab)c$

$$a \times (b \times c) = -(b \times c) \times a = -(ba)c + (ca)b = (ac)b - (ab)c$$

⑥  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \Leftrightarrow (a \times c) \times b = 0$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \Leftrightarrow (ac)b - (bc)a = (ay)b - (ab)c \Leftrightarrow (ab)c - (bc)a = 0 \Leftrightarrow \frac{(a \times c) \times b = 0}{\text{Commutatividad del producto escalar}}$$

⑦  $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$       Identidad de Sacobi

$$(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ (ay)b - (bc)a + (bx)c - (ca)b + (cy)a - (ab)c = \\ \textcircled{2} \\ \text{Commutatividad} \\ \text{del producto escalar} \end{array}$$

Notación:  $a = (a_1, a_2, a_3) = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

Propiedades

\* $a \times b \perp a$ ;  $a \times b \perp b$

\* $|a \times b| = |a| |b| |\sin(\hat{ab})|$

Definición:  $(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$       Producto Mixto

13/09/2023

Definición.  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable Campo Escalar

Definición.  $\nabla f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$  Operador Gradiente  
 $\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ ,  $\forall x \in \mathbb{A}$

14/09/2023

Definición.  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $|u|=1$   
 $D_u f(x) = Df(x)u = \langle \nabla f(x), u \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) u_i$ ,  $\forall x \in \mathbb{A}$  Derivada Direccional  
 $u = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$  da el valor máximo de la derivada direccional

Definición.  $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable Campo Vectorial  
 $F = (F_1, \dots, F_n)$

## OOPERADORES

Definición.  $\operatorname{div}(F): \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  Operador Divergencia  
 $\operatorname{div}(F)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) = \nabla \cdot F(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{A}$   
 Rendido Escalar

Definición.  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  2 veces diferenciable  
 $\Delta f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  Operador Laplaciano  
 $\Delta f(x) = \operatorname{div}(\nabla f(x)) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \operatorname{traza}(\operatorname{hess}(f(x))) = \nabla^2 f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{A}$

Definición.  $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\operatorname{rot}(F): \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$  Operador Rotacional  
 $\operatorname{rot}(F) = \operatorname{curl}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \hat{k}$   
 En inglés

Propiedades.  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f, g: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F, G: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\textcircled{1} \quad \nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

Trivial

$$\textcircled{2} \quad \nabla(cf) = c\nabla f$$

Trivial

$$\textcircled{3} \quad \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla(fg) = \left( \frac{\partial(fg)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(fg)}{\partial x_n} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}g + f \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}g + f \frac{\partial g}{\partial x_n} \right) = g \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + f \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right) = \underbrace{g \nabla f + f \nabla g}_{\nabla(fg)}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Si } g \neq 0, \quad \nabla(f/g) = \left( g \nabla f - f \nabla g \right) \frac{1}{g^2}$$

Trivial

$$\textcircled{5} \quad \operatorname{div}(F+G) = \operatorname{div}(F) + \operatorname{div}(G)$$

Trivial

$$\textcircled{6} \quad \operatorname{rot}(F+G) = \operatorname{rot}(F) + \operatorname{rot}(G)$$

Trivial

$$\textcircled{7} \quad \operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div}(F) + \nabla f \cdot F$$

$$\operatorname{div}(fF) = \frac{\partial(fF_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(fF_2)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial(fF_n)}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_1} F_1 + f \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} F_2 + f \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} F_n + f \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = f \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} F_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} F_n \right) = f \operatorname{div}(F) + \nabla f \cdot F$$

$$\textcircled{8} \quad \operatorname{div}(F \times G) = \operatorname{Grad}(F) \cdot \operatorname{Rot}(G)$$

$$\operatorname{div}(F \times G) = \operatorname{div} \left( \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} \right) = \operatorname{div} \left( (F_1 G_3 - F_3 G_1) i + (F_2 G_3 - F_3 G_2) j + (F_1 G_2 - F_2 G_1) k \right) = \frac{\partial(F_1 G_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial(F_3 G_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(F_2 G_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(F_3 G_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(F_1 G_2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(F_2 G_1)}{\partial x_3} =$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} G_3 + F_1 \frac{\partial G_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} G_1 - F_3 \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} G_3 + F_2 \frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} G_2 - F_3 \frac{\partial G_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} G_2 + F_1 \frac{\partial G_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} G_1 - F_2 \frac{\partial G_1}{\partial x_3} =$$

$$= \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) G_3 + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right) G_1 - \left( \frac{\partial G_3}{\partial x_1} + \frac{\partial G_1}{\partial x_3} \right) F_1 - \left( \frac{\partial G_1}{\partial x_2} - \frac{\partial G_3}{\partial x_2} \right) F_2 - \left( \frac{\partial G_2}{\partial x_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_1} \right) F_3 =$$

$$= \underline{G \operatorname{rot}(F) - F \operatorname{rot}(G)}$$

$$\textcircled{9} \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = \operatorname{div} \left( \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right) i + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right) j + \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \right) k \right) = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\textcircled{10} \quad \operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot}(F) + \nabla f \times F$$

$$\operatorname{rot}(fF) = \left( \frac{\partial(fF_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial(fF_2)}{\partial x_3} \right) i + \left( \frac{\partial(fF_2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(fF_1)}{\partial x_1} \right) j + \left( \frac{\partial(fF_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial(fF_2)}{\partial x_2} \right) k = \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} F_1 + f \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_3} F_2 + f \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) i + \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} F_1 + f \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_1} F_3 + f \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) j + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} F_2 + f \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} F_3 + f \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right) k =$$

$$= f \left[ \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) i + \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_3} - \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right) j + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) k \right] + \left[ \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial x_1} \right) i + \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_2} \right) j + \left( \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_1} \right) k \right] =$$

$$= f \underline{\operatorname{rot}(F) + \nabla f \times F}$$

$$\textcircled{11} \quad \operatorname{rot}(\nabla f) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right) i + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \right) j + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \right) k \stackrel{!}{=} 0$$

$$\textcircled{12} \quad \Delta(F_g) = f \Delta g + g \Delta f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$$

$$\Delta(F_g) = \operatorname{div}(\nabla(F_g)) = \operatorname{div}(f \nabla g + g \nabla f) = \operatorname{div}(f \nabla g) + \operatorname{div}(g \nabla f) = f \operatorname{div}(\nabla g) + \nabla f \cdot \nabla g + g \operatorname{div}(\nabla f) + \nabla g \cdot \nabla f = f \Delta g + g \Delta f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$$

$$\textcircled{13} \quad \operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$$

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \overset{\circ}{\operatorname{div}}(\nabla f \times \nabla g) - \nabla f \operatorname{rot}(\nabla g) \stackrel{\circ}{=} 0$$

$$\textcircled{14} \quad \operatorname{div}(f \nabla g - g \nabla f) = f \Delta g - g \Delta f$$

$$\operatorname{div}(f \nabla g - g \nabla f) = \operatorname{div}(f \nabla g) - \operatorname{div}(g \nabla f) = f \operatorname{div}(\nabla g) + \nabla f \cdot \nabla g - g \operatorname{div}(\nabla f) - \nabla g \cdot \nabla f = f \Delta g - g \Delta f$$

# CURVAS

$$a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Definición  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua

Camino / Curva Parametrizada en  $\mathbb{R}^n$

$$x, y, z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}$$

Definición  $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$  Curva / Trayectoria

Curva / Trayectoria

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Notación en  $\mathbb{R}^3$

## Ejemplos.

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{2} \quad \sigma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{array}$$

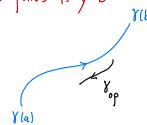
$$\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \quad \Gamma = \{x^2 + y^2 = 1\}$$

Definición:  $A, B \in \mathbb{R}^n$  puntos.  $t \in [0, 1]$

$$\gamma(t) = Bt + A(1-t) \quad \text{Segmento que une los puntos } A \text{ y } B$$

Definición:  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma(a) \\ \gamma(b) \end{array} \right\} \text{Extremos de la curva}$$



$\gamma$  es cerrada si  $\gamma(a) = \gamma(b)$

Definición:  $\gamma_{op}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto \gamma_{op}(t) = \gamma(a+b-t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{op}(a) = \gamma(b) \\ \gamma_{op}(b) = \gamma(a) \end{array} \right\}$$

Curva en el sentido opuesto

## Definición:

$$\begin{array}{c} \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma(b) = \sigma(c) \\ \sigma(d) = \gamma(a) \end{array} \right\}$$

$$\gamma(b) = \sigma(c)$$

$$f = \gamma \oplus \sigma: [a, b+d-c] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } a \leq t \leq b \\ \sigma(t-b+c) & \text{si } b \leq t \leq (b+d-c) \end{cases}$$

Suma de Caminos

Definición:  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  Curva Parametrizada Regular

$$\gamma \in C^1([a, b])$$

Definición:  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

$$\gamma|_{I_k} = \gamma_k \text{ es regular}$$

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad k=1, \dots, n$$

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n \quad \text{Curva Regular a Trozos}$$

Definición:  $t_0 \in [a, b]$

$$\gamma'(t_0) \quad \text{Vector Velocidad}$$

$$\|\gamma'(t_0)\| \quad \text{Rapidez o Velocidad (Escalar)}$$

Definición:  $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

Curva Parametrizada Simple

$$n=3$$

$$(x_0, y_0, z_0) = \gamma(t_0), \quad t_0 \in [a, b]$$

$$\begin{cases} x = x_0 + (t-t_0)x'(t) \\ y = y_0 + (t-t_0)y'(t) \\ z = z_0 + (t-t_0)z'(t) \end{cases}$$

Ecuaciones Paramétricas de la Recta Tangente a la curva en  $(x_0, y_0, z_0)$

Definición  $\ell(Y) = \int_a^b \|Y'(t)\| dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|Y'_k(t)\| dt = \sum_{k=1}^n \ell(Y_k)$  Longitud de una Curva Regular

$$Y = Y_1 \circ \dots \circ Y_n$$

Propiedad:  $\ell(Y_q) = \ell(Y)$

Definición:  $\ell(t) = \int_a^t \|Y'(s)\| ds$  Función Longitud de Arco

$\ell'(t) = \|Y'(t)\| > 0$  reversible  
 $\ell: [a, b] \rightarrow [0, \ell(b)]$

$\|Y'(s)\| = 1$  Perímetro Arco  
 (Cambia la velocidad con la que se recorre la curva)

## INTEGRAL DE LÍNEA

Definición: Integral de Línea para Campos Escalares  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $Y: [a, b] \rightarrow A$  suave

- En  $\mathbb{R}^2$ :  $\int_Y f dl = \int_a^b f(Y(t)) \|Y'(t)\| dt$
- En  $\mathbb{R}^3$ :  $\int_Y f dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$

Ejemplo: Si  $f$  es la densidad del alambre que recorre  $Y$ ,  $\int_Y f dl$  = Masa total del alambre

Ejemplo:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x + y + z & C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto C(t) = (\sin(t), \cos(t), t) & C'(t) = (\cos(t), -\sin(t), 1) & \|C'(t)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int_Y f dl}_{\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|C'(t)\| dt} = \int_0^{2\pi} (\sin(t) + \cos(t) + t) \sqrt{1 + \sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \sqrt{2} \left[ -\cos(t) + \sin(t) + \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \cdot \frac{4\pi^2}{2} = 2\sqrt{2}\pi^2$$

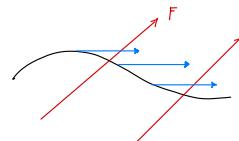
[20/09/2023]

Definición: Integral de Línea para Campos Vectoriales  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua,  $Y: [a, b] \rightarrow A$  regular

$$\int_Y F dl = \int_a^b \langle F(Y(t)), Y'(t) \rangle dt$$

Interpretación Física: Trabajo del campo  $F$  realizado a lo largo de  $Y$

Si, además,  $Y$  es suave ( $Y'(t) \neq 0 \forall t$ ):  $\int_Y F dl = \int_a^b \underbrace{\langle F(Y(t)), \frac{Y'(t)}{\|Y'(t)\|} \rangle}_{f(Y(t)) \text{ Campo Escalar}} \|Y'(t)\| dt$



Notación para  $\mathbb{R}^3$ :  $F(x, y, z) = (P, Q, R)$ ;  $Y(t) = (x(t), y(t), z(t))$   $t \in [a, b]$

$$\boxed{\int_Y F dl = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt = \int_Y P dx + Q dy + R dz}$$

### Propiedades:

$$\textcircled{1} \text{ Linealidad: } \int_Y (\alpha f + \beta g) dt = \alpha \int_Y f dt + \beta \int_Y g dt \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\int_Y (\alpha F + \beta G) dt = \alpha \int_Y F dt + \beta \int_Y G dt \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \quad |f(Y(t))| \leq k \quad \forall t \in [a, b] \Rightarrow \left| \int_Y f dt \right| \leq k l(Y) \quad (\text{Igual para campos vectoriales})$$

$$\textcircled{3} \quad \int_Y f dt = \int_{Y_{op}} f dt$$

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  regular a trozos  
 $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$   $\psi \in C^1([c, d])$   $\psi'(s) \neq 0 \quad \forall s \in [c, d] \Rightarrow \begin{cases} \psi'(s) > 0 & \forall s \in [c, d] \\ \psi'(s) < 0 & \forall s \in [c, d] \end{cases}$

$$\int_Y F dt = - \int_{Y_{op}} F dt$$

$$\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \sigma(s) = Y(\psi(s)) \quad \int_{\sigma} F dt = \int_Y f dt$$

$$\int_{\sigma} F dt = \int_Y F dt$$

(4) Actividad:  $\gamma$ , o curvas que pueden sumarse y son regulares a trozos

$$\int_{Y_{op}} f dt = \int_Y f dt + \int_{\sigma} f dt$$

$$\int_{Y_{op}} F dt = \int_Y F dt + \int_{\sigma} F dt$$

24/09/2023

Proposición:  $f: A \xrightarrow{\mathbb{C}^1} \mathbb{R}$   $f \in C^1(A)$   $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  regular a trozos  $\Rightarrow \int_Y \nabla f dt = f(Y(b)) - f(Y(a))$  Integral de Línea del Gradiente

Demonstración.

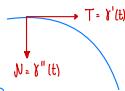
$$\int_Y \nabla f dt = \int_a^b \nabla f(Y(t)) \cdot Y'(t) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} Y'_j(t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} (f(Y(t))) dt = f(Y(b)) - f(Y(a)) \blacksquare$$

25/09/2023

$\mathbb{R}^2$   $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular plana

$$\|\gamma'(t)\| = 1 \quad t = \text{Parámetro Arco}$$

$$k(t) = \|\gamma''(t)\| \quad \text{Curvatura} \quad k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$



Curvatura Total:  $\int_Y k(t) dt$

Se sabe que  $\int_Y k(t) dt \geq 2\pi$   
 $\int_Y k(t) dt = 2\pi \Leftrightarrow \gamma \text{ recorre una circunferencia}$

$\mathbb{R}^3$   $\gamma$  curva cerrada

$$\int_Y k(t) dt \leq 4\pi \Rightarrow \gamma \text{ "no tiene nudos"}$$

Teorema de Fary-Milnor

$$\gamma \text{ "tiene nudos" } \Rightarrow \int_Y k(t) dt > 4\pi$$

# CAMPOS CONSERVATIVOS

Definición.  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  campo vectorial continuo.  $F$  es un campo conservativo  $\Leftrightarrow \exists \varphi \in C^1(\Omega)$  tal que  $F = \nabla \varphi$

Definición.  $\Omega$  dominio = { Abierto, Convexo, (Arcocanexo) }

Técnicas de Caracterización de los Campos Conservativos.  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio.  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Son equivalentes:

①  $F$  es conservativo

②  $\forall Y: [a, b] \rightarrow \Omega$  regular a trozos, cerrado, se cumple que  $\int_Y F dl = 0$ .

③  $\forall Y: [a, b] \rightarrow \Omega$  regulares a trozos tales que  $Y(a) = \sigma(c)$ ,  $Y(b) = \sigma(d)$ , se cumple que  $\int_Y F dl = \int_{\sigma} F dl$ .

Demonstración

$$1 \Rightarrow 2 | \quad \int_Y F dl = \int_Y (Y(b)) - \int_Y (Y(a)) = 0$$

$\uparrow$   
 $F$  conservativo       $\uparrow$   
 $Y$  cerrado

$$2 \Rightarrow 3 | \quad \begin{array}{c} Y \\ \nearrow \sigma \\ Y(a) = \sigma(c) \end{array} \quad Y \circ \sigma_p \quad \begin{array}{c} \sigma = \int_Y F dl + \int_{\sigma_p} F dl = \int_Y F dl - \int_{\sigma_p} F dl \Rightarrow \int_Y F dl = \int_{\sigma} F dl \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Hipótesis} \end{array}$$

$$3 \Rightarrow 1 | \quad p \in \Omega \text{ fijo. } x \in \Omega. \quad \exists Y_x: [a, b] \rightarrow \Omega \text{ tal que } Y_x(a) = p, Y_x(b) = x. \quad \int_Y F dl = \int_Y F dl \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{esta bien definida})$$

por hipótesis

$\hat{\text{?}} \int_Y F dl = F \text{ en } \Omega?$

Como  $x \in \Omega$  (abierto),  $\exists r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset \Omega$ . Sea  $y \in B(x, r) \Leftrightarrow \|x-y\| < r$ .

$$\begin{array}{c} \gamma: [0, t] \rightarrow \Omega, \quad \sigma_y(t) = x + t(y-x) \quad \frac{\sigma_y(0)}{\sigma_y(t)} = \frac{x}{y} \\ \gamma \circ \sigma_y \quad \int_{\gamma \circ \sigma_y} F dl = \int_Y F dl + \int_{\sigma_y} F dl = \int_Y F dl + \underbrace{\int_{\sigma_y} F dl}_{\int_0^t \langle F(x + t(y-x)), y-x \rangle dt} \Rightarrow \int_Y F dl = \int_{\sigma_y} \langle F(x + t(y-x)), y-x \rangle dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \omega_t \in [0, t] \text{ tal que } \int_Y F dl = \langle F(x + \omega_t(y-x)), y-x \rangle \end{array}$$

Técnica de la Media

Sean  $\{e_1, \dots, e_n\}$  los vectores usuales.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + te_k) - F(x)}{t} = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)$ .

Tomemos  $\gamma_t = x + te_k \quad |t| < r$

$$F(x + te_k) - F(x) = \langle F(x + te_k), e_k \rangle \Rightarrow \frac{F(x + te_k) - F(x)}{t} = F_k(x + t \omega_t e_k)$$

$$\downarrow t \rightarrow 0 \qquad \downarrow t \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) \qquad F_k(x) \Rightarrow \boxed{\nabla F = F}$$

■

¿Cómo obtener el potencial  $\phi$  si sabemos que  $F$  es conservativo?

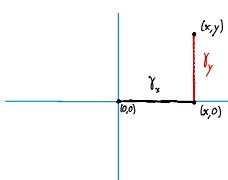
$$\mathbb{R}^n \quad P = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \sigma_x(t) = tx \quad t \in [0, 1] \\ \text{B}(0, R), \quad R > 0 \quad F \text{ es conservativo}$$

Dominio estrellado  
(desde el cero)

$$\phi(\omega) = \int_{\sigma} F d\ell = \int_0^t \langle F(tx), x \rangle dt$$

 $\mathbb{R}^2$ 

$F$  es conservativo  $F = (P, Q)$



$$\gamma_x(t) = (tx, 0) \quad t \in [0, 1] \\ \gamma_y(t) = (x, ty) \quad t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_x \oplus \gamma_y} F d\ell &= \int_{\gamma_x} F d\ell + \int_{\gamma_y} F d\ell = \int_0^1 \langle F(\gamma_x(t)), \gamma'_x(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle F(\gamma_y(t)), \gamma'_y(t) \rangle dt = \\ &= \int_0^1 P(tx, 0) x dt + \int_0^1 Q(x, ty) y dt = \left[ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ u = tx \quad | \quad v = ty \\ du = x dt \quad dv = y dt \end{array} \right] = \\ &= \int_0^x P(u, 0) du + \int_0^y Q(x, v) dv = \phi(x, y) \quad ; \quad \phi(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

 $\mathbb{R}^3$ 

$F$  es conservativo  $F = (P, Q, R)$   
(Idea análoga a  $\mathbb{R}^2$ )

$$\phi(x, y, z) = \int_0^x P(u, 0, 0) du + \int_0^y Q(x, v, 0) dv + \int_0^z R(x, y, w) dw \quad ; \quad \phi(0, 0, 0) = 0$$

Ejercicio: Comprobar que dicho  $\phi$  es potencial viendo que  $\nabla \phi = (P, Q, R) = F$

Supongamos que  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es conservativo.  $F = (P, Q, R)$ ,  $\exists \phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = P \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = R \end{cases}$ . Recordemos que  $\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$

Proposición: Si  $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$  es conservativo  $\Rightarrow F$  es irrotacional ( $\text{rot}(F) = 0$ ).

¿Cómo definir el concepto de irrotacional en  $\mathbb{R}^n$ ?  $F = (F_1, \dots, F_n)$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad i, j = 1, \dots, n \Rightarrow \text{Irrotacional (en } \mathbb{R}^n\text{)}$$

¿Todo campo irrotacional es conservativo? En general, NO

27/09/2023

Ejemplo: Campo irrotacional no conservativo

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} + 2y \right) = (P, Q) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\Leftrightarrow F \text{ es irrotacional})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow F \text{ es irrotacional}$

No es conservativo  $\Leftrightarrow \nexists f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = F$

28/09/2023

Sea  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$        $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$

$$\oint_{\gamma} F \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_1 + 2\sin(t)\cos(t) dt = \int_0^{2\pi} t + \sin^2(t) dt = 2\pi \neq 0 \Rightarrow \boxed{F \text{ no es conservativo}}$$

Teorema de  
Conervación  
de Campos Conservativos

$$\begin{aligned} f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^1(A) \quad \nabla f = (P, Q) \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow f(x, y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \psi(y) = \int \frac{\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} dx + \psi(y) = \underline{\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(y)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} + \psi'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \psi'(y) = Q = \frac{x}{x^2+y^2} + 2y \quad \Leftrightarrow \underline{\psi'(y) = 2y} \\ \underline{\psi(y) = y^2} \end{aligned}$$

$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + y^2$  está definida en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Justificación del adjetivo "conservativo".

$r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad m = \text{masa móvil}$   
 $r(t)$

Fuerza  $\downarrow$   
 $F = m r''(t)$   
 Ley de Newton

Trabajo  $\downarrow$   
 $W = \int_r^b F \cdot d\ell = \int_a^b m \langle r''(t), r'(t) \rangle dt = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \langle r'(t), r'(t) \rangle dt = \frac{m}{2} \underbrace{\|r'(b)\|^2}_{\text{Rápido}} - \frac{m}{2} \|r'(a)\|^2 = \frac{m}{2} v(b) - \frac{m}{2} v(a)$

Ley Cintética en el punto b

Trabajo en un Campo Conservativo  
 $W_c = \int_r^b F \cdot d\ell = \int_a^b -\nabla P dt = P(r(a)) - P(r(b))$

$F = \nabla P, \quad P = -f$   
 Energía Potencial

(Suponemos que no actúan fuerzas externas)

$$W = \underbrace{\frac{m}{2} v^2(a) - \frac{m}{2} v^2(b)}_{\substack{\text{Fuerza Externa} \\ \uparrow}} + \int_r^b F_c \cdot d\ell + \int_r^b F_c \cdot d\ell + P(r(a)) - P(r(b)) \Rightarrow \boxed{\frac{m}{2} v^2(b) + P(r(b)) = \frac{m}{2} v^2(a) + P(r(a))}$$

Energía Cintética	Energía Potencial
-------------------	-------------------

# TEOREMA DE GREEN

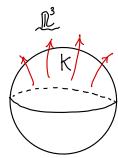
Teorema Fundamental del Cálculo:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $\Rightarrow \exists G$  tal que  $G'(t) = f(t)$

Regla de Barrow:  $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$

Definición: Un dominio es regular cuando  $\partial\Omega$  es regular (en cada punto de  $\partial\Omega$  existe un vector normal).

## Aplicación

(Ecuación de difusión)  
 $\Delta T = \int \frac{\langle F, n_e \rangle}{\partial k} dt$



Flujo a través  
de la frontera

Teorema de la Divergencia:  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\partial\Omega$  regular  $\Rightarrow \int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dt = \int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle dt$

(Lo que expansiona, tenta que  
salir por la frontera)

(Recordemos que la divergencia  
mide la expansión o contracción  
del campo)

(Fijaciones en la similitud conceptual  
de este teorema con el TFC,  
sabiendo que, en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\operatorname{div} = \operatorname{Primer Derivada}$ )

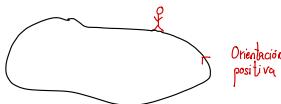
[2/10/2023]

Teorema de la Divergencia para  $n=1$ :  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$  (Regla de Barrow)

Definición:  $Y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  camino cerrado  $Y(a) = Y(b)$ , es simple si  $\forall t < s, t, s \in [a, b]$  tal que  $Y(t) = Y(s) \Rightarrow t = a, s = b$ . (El camino solo puede tener  
el mismo valor en los extremos.)

$I^*$  sería la curva de Jordan (el camino NO es simple: Si  $Y$  recorre  $I^*$ ,  $Y_p$  también)

Teorema de la Curva de Jordan: Toda curva de Jordan cumple que  $\mathbb{R}^2 \setminus I^*$  está formado por dos dominios disjuntos con frontera común  $I^*$ . Uno es acotado (dominio interior) y el otro no (dominio exterior).



Teorema/Fórmula de Green: Sea  $Y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  un camino, regular a trozos, cerrado y simple que recorre una curva de Jordan,  $I^*$ , en sentido positivo. Sea  $D$  su región interior.

Sea  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vectorial,  $C^1(\Omega)$ , con  $I^* \cap D \subset \Omega$ . Entonces,  $\int_Y F dt = \iint_D \operatorname{rot}(F) dx dy$

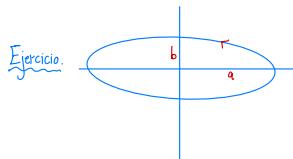
Integral de  
línea      Integral de  
área

$F = (P, Q)$  otra notación  
 $\int_Y P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

Corolario: Si tenemos un dominio  $\Omega$  que cumple que,  $\forall Y$  Jordan,  $D \subset \Omega$ , se tiene que  $\int_Y F dt = 0 = \iint_D \operatorname{rot}(F) dx dy$ .

Corolario: Supongamos  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F \in C^1(\Omega)$ ,  $\Omega$  simplemente conexo. Entonces,  $F$  es conservativo  $\Leftrightarrow F$  es irrotacional. **IMPRESIONANTE**

Ejercicio: Demostrar que, en  $\mathbb{R}^2$ , Teorema de la Divergencia  $\Leftrightarrow$  Teorema de Green.



$a > b$ .  $Y: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Calcular su área

$t \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$   
 (Parametrización de la elipse)

Comple que  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$F(x, y) = (-y, x)$$

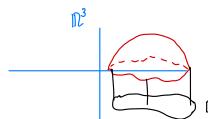
$$\operatorname{rot}(F) = \frac{\partial}{\partial x}(-y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) = 1 + 1 = 2$$

Teorema de Green:  $2\pi ab = \int_D \operatorname{rot}(F) dx dy = \int_Y P dx + Q dy =$   
 $= \int_0^{2\pi} \left[ b \cos(t)(-a \sin(t)) + (a \cos(t))(b \sin(t)) \right] dt =$   
 $= \int_0^{2\pi} ab dt = 2\pi ab \Rightarrow \boxed{\operatorname{Área}(\text{Elipse}) = \pi ab}$

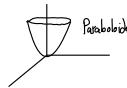
# SUPERFICIES

Definición Superficie explícita  $h: D \xrightarrow{v} \mathbb{R}^3$ ,  $h \in C^1(D)$

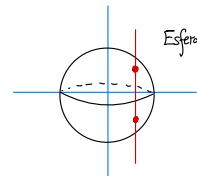
$$S = \{(x, y, h(x, y)) / (x, y) \in D\}$$



Ejemplo:  $D = B(0, 1)$ ,  $h(x, y) = x^2 + y^2$



Hay superficies que no pueden describirse de forma explícita, puesto que toman dos valores en la misma vertical.



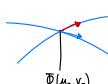
Definición Superficie parametrizada  $\tilde{\Phi}: D \xrightarrow{v} \mathbb{R}^3$ ,  $\tilde{\Phi} \in C^1(D)$

$$S = \{\tilde{\Phi}(u, v) / (u, v) \in D\}$$

Definición.  $(u_0, v_0) \in D$ ,  $\tilde{\Phi}(u_0, v_0)$

$$t \mapsto \tilde{\Phi}(t, v_0)$$

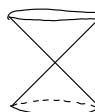
$$t \mapsto \tilde{\Phi}(u_0, t)$$



$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0) = T_u$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0) = T_v$$

Superficie regular (suave) en  $\tilde{\Phi}(u_0, v_0)$  si  $T_u \times T_v \neq 0$



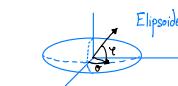
Ejemplo.  $\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(u, v) \longmapsto \begin{pmatrix} u \cos(v), & u \sin(v), & u \\ x & y & z \end{pmatrix}$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vemos que NO es regular en  $(0, 0)$ :  
 $T_u = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u}(u, v) = (\cos(v), \sin(v), 1) \xrightarrow{(u, v)=(0, 0)} (1, 0, 1)$   
 $T_v = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v}(u, v) = (-u \sin(v), u \cos(v), 0) \xrightarrow{(u, v)=(0, 0)} (0, 0, 0)$

$$T_u \times T_v = 0$$

Ejemplo. Elipsode centrado en el  $(0, 0, 0)$



$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \theta) \longmapsto \begin{pmatrix} a \cos(\theta) \cos(\varphi), & b \sin(\theta) \cos(\varphi), & c \sin(\varphi) \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

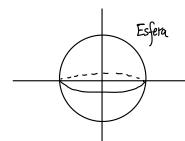
Superficie cerrada y simple  $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}(s) \Leftrightarrow \begin{cases} t = s \\ t \in \text{el dominio} \end{cases} \\ \tilde{\Phi} \text{ es una curva de Jordan} \end{array} \right.$

$$W = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \equiv \text{Recinto}$$

$\tilde{\Phi}(t)$  es una curva de Jordan

Definición. Superficie implícita  $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in C^1(\Omega)$ ,  $\nabla g(x, y, z) \neq 0 \quad \forall (x, y, z) \in S$

$$S = g^{-1}(0) \neq \emptyset$$



Ejemplo.  $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y, z) \longmapsto g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$$S = g^{-1}(0)$$

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \notin S$$

Definición. Espacio Tangente de una Superficie Implicita

$$(x_0, y_0, z_0) \in S = g^{-1}(0)$$

$$v \in T_p S \Leftrightarrow \exists \omega: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \text{ tal que } \omega(0) = p, \omega'(0) = v \quad \left[ \omega(t) \in S \Leftrightarrow g(\omega(t)) = 0 \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \right]$$

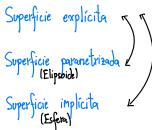
$$(g \circ \omega)(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \nabla g(p), v \rangle = 0$$

$$T_p S = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \nabla g(p), v \rangle = 0 \right\}$$

$$(x_0, y_0, z_0) \in T_p S \Leftrightarrow \langle \nabla g(p), (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle = 0$$

Ecuación del Plano Tangente

10/10/2023



Definición. Espacio Tangente de una Superficie Explícita

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ \Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, y, h(x, y)) \end{array}$$

$$T_x = (1, 0, h_x(x, y))$$

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & h_x \\ 0 & 1 & h_y \end{vmatrix} = (-h_x, -h_y, 1)$$

$$T_y = (0, 1, h_y(x, y))$$

$$(x_0, y_0, \underbrace{h(x_0, y_0)}_{z_0}) \in S$$

$$\langle (-h_x, -h_y, 1), (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle = 0$$

$$-(x-x_0)h_x - (y-y_0)h_y + z - z_0 = 0$$

Notar la analogía con  
 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$z - h(x_0, y_0) = \langle \nabla h, (x-x_0, y-y_0) \rangle$$

$$\underline{\text{Sup. Explícita}} \Rightarrow \underline{\text{Sup. Implicita}}. \quad z = h(x, y) \quad , \quad g(x, y, z) = z - h(x, y)$$

Ejercicio. Sup. Implicita  $\Rightarrow$  Sup. Parametrizada

Sup. Parametrizada  $\Rightarrow$  Sup. Explícita

Definición. Área de una Sup. Parametrizada (simple)

$$S = \Phi(D)$$

$$\text{Área}(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\| du dv$$

Sustitución de la fórmula:  $D = [a, b] \times [c, d]$

$$Q_{ij} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}] \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$u_{i+1} - u_i = \frac{b-a}{n} = \Delta u_i$$

$$v_{j+1} - v_j = \frac{d-c}{m} = \Delta v_j$$

$$\Phi(u_i, v_j) \rightarrow \Phi(u_{i+1}, v_{j+1})$$

$$S_1 = \Phi(u_{i+1}, v_j) - \Phi(u_i, v_j)$$

$$S_2 = \Phi(u_i, v_{j+1}) - \Phi(u_i, v_j)$$

$$S_1 + S_2 = \Phi(u_{i+1}, v_{j+1}) - \Phi(u_i, v_j)$$

$$S = \Phi(u_{i+1}, v_{j+1}) - \Phi(u_i, v_j)$$

$$\|T_u \times T_v\| = \|\Phi_u \Delta u \times \Phi_v \Delta v\| = \|\Phi_u \times \Phi_v\| \Delta u \Delta v$$

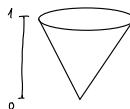
$$\text{Área}(S) = \sum_{i,j=1}^n \|\Phi(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \iint_D \|T_u \times T_v\| du dv$$

Ejemplo.

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ \Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, r) \mapsto \Phi(\theta, r) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), r) \end{array}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq 1$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Área (Cone)} = \iint_D \|\bar{\Phi}_\theta \times \bar{\Phi}_r\| d\theta dr = \\ \bar{\Phi}_\theta = (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 0) \\ \bar{\Phi}_r = (\cos(\theta), \sin(\theta), 1) \\ \bar{\Phi}_\theta \times \bar{\Phi}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), -r) \\ \|\bar{\Phi}_\theta \times \bar{\Phi}_r\| = \sqrt{r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2} \\ = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2} d\theta dr = 2\pi r\sqrt{2} \int_0^1 r dr = 2\pi r\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi r\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

Definición. Área de una Sup. parametrizada descrita de forma más abstracta

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ \Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \bar{\Phi}_u = (x_u, y_u, z_u) \\ \bar{\Phi}_v = (x_v, y_v, z_v) \\ \bar{\Phi}_u \times \bar{\Phi}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = (y_u z_v - y_v z_u, z_u x_v - z_v x_u, x_u y_v - x_v y_u) \\ = \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \\ \text{Notación: } \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \end{array}$$

$$\text{Área}(S) = \iint_D \|\bar{\Phi}_u \times \bar{\Phi}_v\| du dv = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv$$

11/10/2023

## INTEGRAL DE SUPERFICIE

Definición.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continua

$S = \Phi(D) \subset \mathcal{D}$  superficie parametrizada, regular y simple

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u, v)) \|\bar{\Phi}_u \times \bar{\Phi}_v\| du dv$$

Integral del campo escalar  $f$  sobre la superficie  $S$

13/10/2023

Ejemplo.

$S$  superficie parametrizada, regular y simple

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = \text{Densidad}$

$$\begin{array}{l} \text{Masa} = \iint_S f dS \\ \text{Centro de masas } (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}): \\ \bar{x} = \frac{\iint_S x f dS}{\text{Masa}} \\ \bar{y} = \frac{\iint_S y f dS}{\text{Masa}} \\ \bar{z} = \frac{\iint_S z f dS}{\text{Masa}} \end{array}$$

Definición.  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua

$S = \Phi(D) \subset \mathcal{D}$  superficie parametrizada, regular y simple

$$\iint_S F dS = \iint_D \langle F(\Phi(u, v)), \bar{\Phi}_u \times \bar{\Phi}_v \rangle du dv$$

Integral del campo vectorial  $F$  sobre la superficie  $S$

Si, además,  $S$  es simple ( $(\bar{\Phi}_u \times \bar{\Phi}_v)(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v)$ ):  $\iint_S F dS = \iint_D \langle F(\Phi(u, v)), \frac{\bar{\Phi}_u \times \bar{\Phi}_v}{\|\bar{\Phi}_u \times \bar{\Phi}_v\|} \rangle \|\bar{\Phi}_u \times \bar{\Phi}_v\| du dv = \iint_S \langle F, n_S \rangle dS$

Normal exterior

Notación para  $\mathbb{R}^3$ .  $F(x, y, z) = (P, Q, R)$  ;  $(\bar{\mathbf{E}}_u \times \bar{\mathbf{E}}_v)(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \end{pmatrix}$

$$\iint_S f \, dS = \iint_D P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, du \, dv = \iint_D P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

[24/10/2023]

Definición  $S \subset \mathbb{R}^3$  superficie parametrizada

$S$  orientable  $\Leftrightarrow \exists \psi: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua  
 $p \mapsto \psi(p)$   
 (Normal en  $p$ )

Proposición  $g: D \xrightarrow{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}$  diferenciable ;  $\forall x \in S, \nabla g(x) \neq 0$

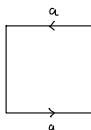
$S = g^{-1}(0) \Leftrightarrow S$  es orientable  
 (Imagen inversa de un valor regular)  $\begin{pmatrix} \psi: S \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ continua} \\ x \mapsto \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|} \end{pmatrix}$

Si  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 / g(x) < 0\}$  acotado, entonces  $\frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|}$  nos da el normal exterior (Ejemplo: Esfera)

Definición.  $h: D \xrightarrow{\mathbb{R}^2} \mathbb{R}$ ,  $h \in C^1(D)$  Normal de una superficie dada de forma explícita

$S = \{(x, y, h(x, y)) / (x, y) \in D\}$

$\bar{\mathbf{E}}_x = (1, 0, h_x)$   $\bar{\mathbf{E}}_y = (0, 1, h_y)$   $\bar{\mathbf{E}}_x \times \bar{\mathbf{E}}_y = (-h_x, -h_y, 1)$  nos da el normal (orientación positiva)  
 (Dividir por  $\|\bar{\mathbf{E}}_x \times \bar{\mathbf{E}}_y\|$ ) para que sea unitario



Ejemplo de una superficie NO orientable.

Cinta de Möbius

(No se podría definir una aplicación  $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  que sea continua)

Ejercicio Probar que  $\iint_S f \, dS = \iint_{S+ \bar{\mathbf{E}}(B)} f \, dS$  (la integral no depende de la parametrización de la superficie). Campos Escalares

Probar que  $\iint_S F \, dS = \iint_{S+ \bar{\mathbf{E}}(B)} F \, dS$  o bien  $\iint_S F \, dS = - \iint_{S+ \bar{\mathbf{E}}(B)} F \, dS$ . Campos Vectoriales  
 (Cambia el signo porque cambia la orientación)

$S = \{\bar{\mathbf{E}}(u, v) / (u, v) \in B\}$

$S = \{Y(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))\}$  ;  $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\psi} & S \\ (u, v) & \uparrow & \swarrow \bar{\mathbf{E}} \end{array}$  ;  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua

$\iint_S f \, dS = \iint_A f(Y(s, t)) \|Y_s \times Y_t\| \, ds \, dt$

$\iint_S f \, dS = \iint_B f(\bar{\mathbf{E}}(u, v)) \|\bar{\mathbf{E}}_u \times \bar{\mathbf{E}}_v\| \, du \, dv$

Teorema del Cambio de Variable

$$= \iint_B f\left(\overbrace{\gamma(s(u,v), t(u,v))}^{\Phi(u,v)}\right) \|Y_s(s(u,v), t(u,v)) \times Y_t(s(u,v), t(u,v))\| \left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}\right| du dv$$

Tenemos que ver que esto es igual a  $\|\Phi_u \times \Phi_v\|$

$$\begin{aligned}\Phi_u &= (x_u, y_u, z_u) \rightarrow \Phi_u = (x_s s_u + x_t t_u, y_s s_u + y_t t_u, z_s s_u + z_t t_u) \\ \Phi_v &= (x_v, y_v, z_v) \quad \Phi_v = (x_s s_v + x_t t_v, y_s s_v + y_t t_v, z_s s_v + z_t t_v)\end{aligned}$$

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} |y_s s_u + y_t t_u & z_s s_u + z_t t_u| & 1 & 0 & 0 \\ |y_s s_v + y_t t_v & z_s s_v + z_t t_v| & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{los otros solo en la primera coordenada}$$

(el resto se hacen de forma análoga)

$$\begin{aligned}&\left| \begin{array}{cc} y_s s_u & z_s s_u \\ y_s s_v & z_s s_v \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} y_s s_u & z_t t_u \\ y_s s_v & z_t t_v \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} y_t t_u & z_s s_u \\ y_t t_v & z_s s_v \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} y_t t_u & z_t t_u \\ y_t t_v & z_t t_v \end{array} \right| = y_s^2 t \begin{vmatrix} s_u & t_u \\ s_v & t_v \end{vmatrix} - y_t^2 s \begin{vmatrix} s_u & t_u \\ s_v & t_v \end{vmatrix} = \\ &\begin{vmatrix} s_u & s_u \\ s_v & s_v \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} t_u & t_u \\ t_v & t_v \end{vmatrix} \\ &0 \quad 0\end{aligned}$$

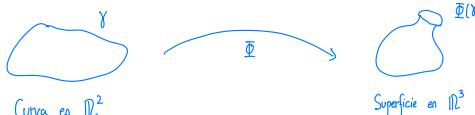
$$= \begin{vmatrix} s_u & t_u \\ s_v & t_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_s & y_t \\ z_s & z_t \end{vmatrix} = \frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)} \cdot \begin{vmatrix} y_s & y_t \\ z_s & z_t \end{vmatrix}$$

$\uparrow \quad \chi_s \times \chi_t = \left( \begin{vmatrix} y_s & y_t \\ z_s & z_t \end{vmatrix}, \dots, \dots \right)$

Así:  $\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} |y_s s_u + y_t t_u & z_s s_u + z_t t_u| & 1 & 0 & 0 \\ |y_s s_v + y_t t_v & z_s s_v + z_t t_v| & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)} (\chi_s \times \chi_t) \Rightarrow \iint_{S=\gamma(A)} f dS = \iint_{S=\Phi(B)} f dS$

## TEOREMA DE STOKES

### Introducción



$$\oint_{\gamma} F dl = \iint_D \text{rot}(F) dx dy \quad (\text{Teorema de Green})$$

Se extiende a  $\mathbb{R}^3$

$$F: \Omega \xrightarrow{\text{C}^1} \mathbb{R}^3$$

$$\iint_S \text{rot}(F) dS$$

$S \subset \Omega$  superficie

Teorema de Stokes

Teorema de Stokes. Sea  $S$  una superficie paramétrica regular, simple,  $S = \Phi(D)$ , donde  $\Phi \in C^1(D)$  y  $D \subset \mathbb{R}^2$  es un recinto "en las hipótesis del Teorema de Green".

Sea  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega = D$ ,  $S \subset \Omega$ ,  $F \in C^1(D)$ . Entonces,  $\iint_{S=\Phi(D)} \text{rot}(F) dS = \oint_{\partial S} F dl$ .

AD curva de Stokes...  $\sim \partial S = \Phi(\partial D)$  orientada

(#)  
Integral de superficie

(#)  
Integral de línea

Demostración Caso Particular:  $S$  es una gráfica

$$S = \left\{ (x, y, f(x, y)) \mid f: D \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^2(D) \right\} \quad \text{Normal en cada punto: } (-f_x, -f_y, 1) = (-z_x, -z_y, 1)$$

$$\partial D = c([x(t), y(t)]), \text{ donde } Y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

$$\partial S = \bar{\partial}(\partial D) \quad \sigma = \bar{\partial}Y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto [x(t), y(t), f(x(t), y(t))]$$

$$F = (F_1, F_2, F_3) \quad \text{rot}(F) = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$(1) \iint_S \text{rot}(F) dS = \iint_D \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) (-z_x) + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) (-z_y) + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

$$(2) \iint_S F d\ell = \iint_{\sigma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \iint_{\sigma} F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 (z_x \gamma_x + z_y \gamma_y) = \iint_{\sigma} \underbrace{(F_1 + F_3 z_x)}_P \frac{dx}{dt} + \underbrace{(F_2 + F_3 z_y)}_Q \frac{dy}{dt} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy =$$

Teorema de Green

$$= \iint_D \frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z} z_x + \frac{\partial F_2}{\partial z} z_y + \cancel{F_1 z_x^2} + \cancel{F_2 z_y^2} - \cancel{\frac{\partial F_1}{\partial y} z_x^2} - \cancel{\frac{\partial F_2}{\partial x} z_y^2} - \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z} z_x^2} - \cancel{F_3 z_x z_y} dx dy =$$

$$= \iint_D \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) (-z_x) + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) (-z_y) + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Se observa que  $(1) = (2)$ . ■

Corolario.  $\iint_S \text{rot}(F) dS = 0$  si  $S$  es una superficie cerrada (cono, por ejemplo, el toro, la esfera, el elipsode,...)

[2/11/2023]

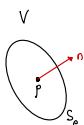
Otra forma de definir el rotacional.

$$\iint_S \text{rot}(F) dS = \iint_S \langle \text{rot}(F), n \rangle dS = \iint_S \langle F_T, n \rangle dS = \iint_S F_T d\ell = \iint_S F_T d\ell$$

↑ Normal  
↑ Teorema de Stokes

$V$ : "Campo de velocidades de un fluido"

Punto  $p$ ,  $n$  vector normal unitario,  $r > 0$ ,  $S_p \perp n$



$$\iint_{S_p} \langle \text{rot}(F), n \rangle dS \stackrel{\substack{\text{II} \\ \text{Teorema de} \\ \text{Stokes}}}{=} \iint_{S_p} F_T d\ell \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \iint_{S_p} \text{rot}(F)(q) n dS = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area}(S_p)} \iint_{S_p} F_T d\ell \Rightarrow \boxed{\text{rot}(F)(p)n = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area}(S_p)} \iint_{S_p} F_T d\ell}$$

$\exists q \text{ punto: } \text{Área}(S_p) \text{ rot}(F)(q) n$

Ley de Faraday.  $E$  campo eléctrico

$H$  campo magnético

Ecuaciones de Maxwell:  $\text{rot}(E) = -\frac{\partial H}{\partial t}$   
(Solo necesitamos una de ellas)

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \oint_{\partial S} E dl = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S H dS$$

Demonstración.

$$\oint_{\partial S} E dl = \iint_S \text{rot}(E) dS = - \iint_S \frac{\partial H}{\partial t} dS$$

Teorema de Stokes      Ecuaciones de Maxwell      Regularidad

[6/11/2023]

## TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Recordatorio.  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio (abierto y conexo)

$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, F = (F_1, \dots, F_n), F \in C^1(\Omega)$

$$\text{div}(F)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$$

Definición. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio. Decimos que  $\Omega$  es regular en  $x_0 \in \partial\Omega$  (fronteira de  $\Omega$ ) si  $\exists U$  entorno abierto en  $\mathbb{R}^n$  de  $x_0$  y  $\exists \psi: U \rightarrow \mathbb{R}, \psi \in C^1(U)$ , tal que:

1)  $\nabla \psi(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$ .

2)  $\partial\Omega \cap U = \{x \in U / \psi(x) = 0\}$

$\Omega$  regular  $\Leftrightarrow$  Lo es en todo punto de  $\partial\Omega$

3)  $\Omega \cap U = \{x \in U / \psi(x) < 0\}$

Definimos  $n(x_0) = \frac{\nabla \psi(x_0)}{\|\nabla \psi(x_0)\|}$  como el normal exterior.

Lema. Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio regular en  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \partial\Omega$ , entonces  $\exists$  una variable, pongamos  $x_n$ ,  $\exists W$  entorno en  $\mathbb{R}^{n-1}$  de  $(z_1, \dots, z_{n-1})$ ,  $\exists V$  entorno en  $\mathbb{R}^n$  de  $z$ .

y  $\exists h: W \rightarrow \mathbb{R}, h \in C^1(W)$ , cumpliendo que:

• Si  $(x_1, \dots, x_n) \in V \Rightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}) \in W$

• Si  $(x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega \cap V \Rightarrow h(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n$

Demonstración.

Tomamos  $U$  y  $\psi$  de la definición anterior,  $\nabla \psi(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(z) \neq 0 \Rightarrow \exists z \in U$  tal que  $\psi(z) = 0$

Suponemos que  
es la n-ésima  
variable

Teorema de  
la función  
implícita

■

Recordatorio.

•  $(X, \tau)$  es paracompacto  $\Leftrightarrow$  Todo recubrimiento por abiertos admite un refinamiento localmente finito.

• Un recubrimiento se dice localmente finito si todo punto del espacio tiene un entorno que interseca solo a un número finito de abiertos del recubrimiento.

•  $X$  compacto  $\Rightarrow X$  paracompacto.

- $X$  espacio métrico  $\Rightarrow X$  paracompacto.
- $X$  es Hausdorff ( $T_2$ ) si  $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U_x, U_y$  tal que  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .
- $T_2 + \text{Paracompacto} \Rightarrow$  Admite particiones continuas de la unidad subordinadas a cualquier recubrimiento por abiertos.
- Una partición continua de la unidad subordinada a un recubrimiento por abiertos es  $\{\Phi_i : X \rightarrow [0, 1]$  continuas $\}$  subordinadas a  $\{U_i\}$  tal que:

$$1) \forall i, \text{soporte}(\Phi_i) \subset U_i.$$

2)  $\forall x \in X, \exists I$  entorno tal que  $\sum_i \Phi_i(x) = 1$  salvo para un número finito de índices. Por tanto,  $y \in V, \sum_{i \in I} \Phi_i(y) = 1$ , con  $I$  los índices donde  $\Phi_i|_V \neq 0$ .

- Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto, entonces cualquier recubrimiento por abiertos de  $K, \{U_i : i \in I\}$ , tiene un subrecubrimiento de abiertos finito,  $\{U_1, \dots, U_n\}$ , con una partición de la unidad,  $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}, \Phi_i \in C^\infty(K)$ , tal que
- 1)  $\Phi_i(x) > 0, 1 \leq i \leq n$
  - 2) soporte( $\Phi_i$ )  $\subset U_i$  (Recordemos que soporte( $\Phi_i$ ) =  $\{x \in K / \Phi_i(x) > 0\}$ )
  - 3)  $\forall x \in K, \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) = 1$

Teorema de la Divergencia. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio acotado y regular (basta con que  $\partial\Omega$  regular). Sea  $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n, F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Entonces,  $\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx = \iint_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle dS$

(Notemos que, si  $n=1$ , tenemos el Teorema Fundamental del Cálculo)

$$\begin{array}{c} \int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx = \iint_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle dS \\ \text{Integral en } \mathbb{R}^n \quad \text{Integral de superficie} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Normal} \end{array}$$

Demostración.

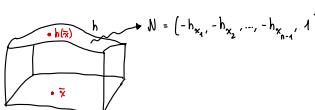
Caso 1]  $\Omega = \text{Bloque} = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k), a_k < b_k$   $\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^n (B_k \cup A_k)$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \stackrel{\substack{\text{Fubini} \\ \text{Barrido}}}{=} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, b_n) - F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) dx_1 \cdots dx_{n-1} = \iint_{B_n \cup A_n} \langle F, n_e \rangle dS$$

Tomo  $a_n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, b_n) \in \bar{\Omega}\} \rightarrow n_e = (0, \dots, 0, 1)$   
 Toma  $a_n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) \in \bar{\Omega}\} \rightarrow n_e = (0, \dots, 0, -1)$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial F_k}{\partial x_k} dx = \iint_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle dS$$

Caso 2]  $h : \bar{D} \longrightarrow (0, \infty), h \in C^1(D)$   $\bar{x} \longmapsto h(\bar{x})$   $\Omega = \{(x, x_n) / x \in D, x_n \in (0, h(\bar{x}))\}$



Normal exterior de la superficie de arriba  $h(D)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\bar{x}, x_n) d\bar{x} dx_n = \int_D \int_0^{h(\bar{x})} \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\bar{x}, x_n) dx_n d\bar{x} = \int_D F_n(\bar{x}, h(\bar{x})) d\bar{x} - \int_D F_n(\bar{x}, 0) d\bar{x} = \int_D F_n(\bar{x}, h(\bar{x})) d\bar{x} + \iint_{C_0} \langle F, n_e \rangle dS$$

Barrido

$$\int_D \int_0^{h(\bar{x})} \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\bar{x}, x_n) dx_n d\bar{x} = \left[ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x_n = sh(\bar{x}) \\ \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} = h(\bar{x}) \end{array} \right] = \int_D \int_0^1 \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\bar{x}, sh(\bar{x})) h(\bar{x}) d\bar{x} ds + \int_D \int_0^1 \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\bar{x}, sh(\bar{x})) s h_{x_n}(\bar{x}) h(\bar{x}) d\bar{x} ds - \int_D \int_0^1 \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\bar{x}, sh(\bar{x})) s h_{x_n}(\bar{x}) h(\bar{x}) d\bar{x} ds =$$

$$= \int_D \int_0^1 \frac{1}{h(\bar{x})} \left[ \frac{\partial}{\partial x_n} (F_n(\bar{x}, sh(\bar{x}))) \right] h(\bar{x}) d\bar{x} ds - \int_D \int_0^1 \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\bar{x}, sh(\bar{x})) s h_{x_n}(\bar{x}) h(\bar{x}) d\bar{x} ds =$$

Integración por partes  $\bar{x} = (x_1, \bar{x}_2)$   $D = (a_1, b_1) \times \bar{D}$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_D F_t(b_i, \tilde{x}, sh(b_i, \tilde{x})) h(b_i, \tilde{x}) d\tilde{x} ds - \int_0^1 \int_D F_t(a_i, \tilde{x}, sh(a_i, \tilde{x})) h(a_i, \tilde{x}) d\tilde{x} ds - \underbrace{\int_0^1 \int_D F_t(\tilde{x}, sh(\tilde{x})) h_{x_i}(\tilde{x}) d\tilde{x} ds + \int_0^1 \int_D \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(\tilde{x}, sh(\tilde{x})) s h_{x_i}(\tilde{x}) d\tilde{x} ds}_{\int_0^1 \int_{B_i \cup B_1} F_t(\tilde{x}, sh(\tilde{x})) s h_{x_i}(\tilde{x}) d\tilde{x} ds} \\
&= \iint_{B_i \cup B_1} \langle F, n_e \rangle dS - \int_0^1 F_t(\tilde{x}, h(\tilde{x})) h_{x_i}(\tilde{x}) d\tilde{x}
\end{aligned}$$

En general,  $\int_D \int_0^1 \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(\tilde{x}, x_n) d\tilde{x} dx_n = \iint_{B_k \cup B_1} \langle F, n_e \rangle dS - \int_0^1 F_k(\tilde{x}, h(\tilde{x})) h_{x_k}(\tilde{x}) d\tilde{x}$

Así:  $\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_D F_n(\tilde{x}, h(\tilde{x})) d\tilde{x} + \iint_{\partial_1 \Omega} \langle F, n_e \rangle dS - \sum_{k=1}^{n-1} \int_D F_k(\tilde{x}, h(\tilde{x})) h_{x_k}(\tilde{x}) d\tilde{x} = \iint_{\partial_1 \Omega} \langle F, n \rangle dS + \int_{C_n} \langle F, n_e \rangle dS}$

$$\partial_1 \Omega = C_0 \cup A_1 \cup B_1 \cup \dots \cup B_n \cup B_n$$

**Caso 3**

**Caso General**

$$\forall x \in \bar{\Omega} \quad \begin{cases} x \in \Omega \rightarrow U_x = "Bloque abierto" \\ x \in \partial \Omega \rightarrow U_x = "Grafica sobre bloque" \end{cases} \text{ abierto de la topología inducida por } \bar{\Omega} \quad (\text{Caso 1})$$

$$\forall x \in \bar{\Omega} \quad \begin{cases} x \in \Omega \rightarrow U_x = "Bloque abierto" \\ x \in \partial \Omega \rightarrow U_x = "Grafica sobre bloque" \end{cases} \text{ abierto de la topología inducida por } \bar{\Omega} \quad (\text{Caso 2})$$

$\{U_x : x \in \bar{\Omega}\}$  es un recubrimiento por abiertos de  $\bar{\Omega}$ , que es compacto, luego cogemos  $\{U_1, \dots, U_n\}$  subrecubrimiento por abiertos finito.

$$\begin{cases} \{U_1, \dots, U_n\} \text{ particiones } C^\infty \text{ de la unidad} \\ \{U_k \in C^\infty(\bar{\Omega}), k=1, \dots, n\} \end{cases} \quad \begin{cases} \exists \epsilon > 0 \\ \text{soporte}(U_k) \subset U_k \\ \sum \text{soporte}(U_k) < \epsilon \end{cases} \quad k=1, \dots, n$$

$$F_k = F \cdot \bar{E}_k \quad \text{soporte}(F_k) \subset U_x \quad \begin{cases} \text{Caso 1} \\ \text{Caso 2} \end{cases}$$

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div}(F_k) dx = \int_{U_k} \operatorname{div}(F_k) dx = \iint_{\partial U_k} \langle F_k, n_e \rangle dS = \iint_{\partial \Omega} \langle F_k, n_e \rangle dS} \quad \xrightarrow{\text{Sumando en } k} \quad \boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx = \iint_{\partial \Omega} \langle F, n_e \rangle dS}$$

8/14/2023

Ejemplo

$$F(x, y, z) = (x^2 + 2yz, y^2 - 2xz, x^2 + y^2)$$

Calcular el flujo a través de la frontera de la mitad superior del elipsóide  $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ .

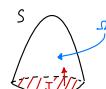
$$\begin{aligned} \text{Dominio abierto} \\ \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} < 1, z > 0\} ; \quad \bar{\Omega} = \{x^2 + y^2 \leq 1 ; 0 \leq z \leq 2\sqrt{1-x^2-y^2}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \Omega = S \cup T \\ \hookrightarrow S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4, z=0\} \quad (\text{mitad superior del elipsóide } 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4) \\ \hookrightarrow T = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1\} = D(0, 1) \quad \text{Podemos ver } T \text{ como } T = \bar{\Omega}(W), \text{ donde } W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \bar{\Omega}(x, y) = (x, y, 0) \quad \forall (x, y) \in W \end{aligned}$$

( $\bar{\Omega}(x, y, 0) \Rightarrow \bar{\Omega}$  define la orientación opuesta al normal exterior)

$$\text{Por el Teorema de la Divergencia: } \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx dy dz = \iint_S F dS - \iint_T F dS$$

$$\operatorname{div}(F) = 3x^2 + 3y^2 \quad \text{"... porque invierte la orientación contra al normal exterior en } T \text{".}$$



$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx dy dz &= \iint_{D(0,1)} \int_0^{2\sqrt{1-x^2-y^2}} 3(x^2 + y^2) dx dy dz = \left[ \begin{array}{l} x^2 = \cos^2(\theta), \quad \rho^2 \sin^2(\theta) \\ y^2 = \sin^2(\theta), \quad \rho^2 \cos^2(\theta) \end{array} \right] = 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-\rho^2}} 2\rho^2 \sin^2(\theta) \rho^2 \cos^2(\theta) d\rho d\theta = 6\pi \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho = 12\pi \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho = \boxed{\int_0^1 \frac{1-\rho^2}{\rho^2} d\rho = \int_0^1 \frac{1-u}{u^2} du = \boxed{\frac{8\pi}{5}}} \end{aligned}$$

$$= 6\pi \int_0^1 (1-\rho) \sqrt{\rho} d\rho = 6\pi \left( \left[ \frac{2\rho^{3/2}}{3} \right]_0^1 - \left[ \frac{2\rho^{5/2}}{5} \right]_0^1 \right) = 6\pi \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = 12\pi \left( \frac{5-3}{15} \right) = \frac{8\pi}{5}$$

$$\underbrace{\iint_T \mathbf{F} dS}_{\text{Cambiando Polares}} = \iint_{D(0,1)} \langle (x^2, y^3, x^2+y^2), (0,0,1) \rangle dxdy = \iint_{D(0,1)} x^2 + y^2 dxdy = \begin{bmatrix} x = \rho \cos(\theta) & \rho \in [0,1] \\ y = \rho \sin(\theta) & \theta \in [0,2\pi] \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \cdot \rho^2 d\rho d\theta = 2\pi \cdot \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\underbrace{\iint_S \mathbf{F} dS}_{\text{S}} = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz + \iint_T \mathbf{F} dS = \frac{8\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = \frac{21\pi}{10}$$

## APLICACIONES A LA FÍSICA y A ECUACIONES DIFERENCIALES (PARTE 1)

Aplicación del Teorema de la Divergencia → Fórmulas/Identidades de Green

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  acotado y regular

$$\textcircled{1} \quad u \in C^2(\bar{\Omega}), v \in C^1(\bar{\Omega}) \quad u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \text{con } \frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u, n \rangle, \text{ siendo } n \text{ el normal exterior unitario.}$$

$$\textcircled{2} \quad u, v \in C^2(\bar{\Omega}) \quad u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v - u \Delta v = \iint_{\partial\Omega} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS, \quad \text{con } \frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u, n \rangle \text{ y } \frac{\partial v}{\partial n} = \langle \nabla v, n \rangle, \text{ siendo } n \text{ el normal exterior unitario.}$$

Demonstración.

$$\textcircled{1} \quad \begin{aligned} F: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n & \quad F \in C^1(\bar{\Omega}) \\ x \mapsto v(x), \nabla v(x) & \\ F = \left( v \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, v \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) & \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) dx = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) dx = \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + v \cdot \Delta u dx = \iint_{\partial\Omega} \langle v \cdot \nabla u, n \rangle dS + \iint_{\Omega} v \cdot \langle \nabla u, n \rangle dS \Rightarrow \\ \Rightarrow \iint_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Teorema de la Divergencia} \\ \text{Fórmula de Green} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \boxed{\int_{\Omega} \Delta u \cdot v - u \Delta v dx} = \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx - \int_{\Omega} u \Delta v dx \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{Fórmula de Green} \end{array} \quad \boxed{\iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \iint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \iint_{\partial\Omega} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS}$$

18/11/2023

Teorema de Gauss.  $M \subset \mathbb{R}^3$  región  $M = \Omega \cup \Sigma$  ( $\Omega$  abierto regular) (podemos aplicar el Teorema de la Divergencia)  $0 \notin \partial\Omega$ . Entonces,  $\iint_M \frac{\langle r, n_r \rangle}{\|r\|^3} dS = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \notin \bar{\Omega} + \Sigma \\ 4\pi & \text{si } 0 \in \bar{\Omega} \end{cases}$

$$r = (x, y, z)$$

Demonstración.

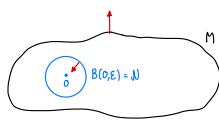
$$\begin{aligned} \text{Si } 0 = (0,0,0) \notin M = \bar{\Omega} \Rightarrow \frac{r}{\|r\|^3} \in C^\infty(M) & \Rightarrow \underbrace{\iint_M \frac{\langle r, n_r \rangle}{\|r\|^3} dS}_{\substack{\text{Teorema de la Divergencia}}} = \iint_M \operatorname{div}\left(\frac{r}{\|r\|^3}\right) dx dy dz = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\|r\|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\|r\|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\|r\|^3}\right) &= \frac{1}{\|r\|^3} + x \left(-\frac{3}{r^3}\right) I \times (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\|r\|^3} \left(1 - \frac{3x^2}{\|r\|^2}\right) \\ \text{Análogo para } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\|r\|^3}\right) \text{ y para } \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\|r\|^3}\right) & \\ \operatorname{div}\left(\frac{r}{\|r\|^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\|r\|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\|r\|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\|r\|^3}\right) &= \frac{1}{\|r\|^3} \left(1 - \frac{3x^2}{\|r\|^2} + 1 - \frac{3y^2}{\|r\|^2} + 1 - \frac{3z^2}{\|r\|^2}\right) = \frac{1}{\|r\|^3} \left(3 - 3 \underbrace{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\|r\|^2}}_{1}\right) = \frac{4}{\|r\|^3} (3 - 3) = 0 \end{aligned}$$

Si  $O = (0,0,0) \in \Omega \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$  tal que  $\overbrace{B(O,\varepsilon)}^N \subset \overline{B(O,\varepsilon)} \subset \Omega$ .

Consideremos  $W = M \setminus N$ .  $\partial W = \partial M \cup \partial N$ .

$$\text{Así, } \iint_{\partial W} \frac{\langle r, n_r \rangle}{\|r\|^3} dS = \iint_W \operatorname{div} \left( \frac{r}{\|r\|^3} \right) dx dy dz = 0 \Rightarrow 0 = \iint_{\partial M} \frac{\langle r, n_r \rangle}{\|r\|^3} dS + \iint_{\partial N} \frac{\langle r, n_r \rangle}{\|r\|^3} dS \Rightarrow \underbrace{\iint_{\partial M} \frac{\langle r, n_r \rangle}{\|r\|^3} dS}_{\substack{\text{Teorema de} \\ \text{la Divergencia}}} = - \iint_{\partial N} \frac{\langle r, n_r \rangle}{\|r\|^3} dS = \iint_{\partial B(O,\varepsilon)} \frac{\langle r, n_r \rangle}{\|r\|^3} dS = \iint_{\partial B(O,\varepsilon)} \frac{r^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{1}{\|r\|^3} dS = \frac{4}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi \varepsilon^2 = \frac{4\pi}{\varepsilon^2}$$

$\|r\| = \varepsilon$   
 $\Omega = \frac{r}{\|r\|}$



### Potencial Eléctrico

$$\Phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \|r\|} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$E = -\nabla \Phi = \frac{Qr}{4\pi \varepsilon_0 \|r\|^3} \quad (\text{Ley de Coulomb}) \Rightarrow \iint_{\partial M} E dS = \begin{cases} Q & \text{si } O \in M \\ 0 & \text{si } O \notin M \end{cases}$$

Obra de las Ecaciones de Maxwell: Sea  $p$  la distribución continua de carga en una región  $W$ . El cargo eléctrico  $E$  está relacionado con  $p$  de la siguiente forma:  $\operatorname{div}(E) = p$  (Ecación de Maxwell). Aplicando el Teorema de la Divergencia:  $\iint_{\partial W} E dS = \iint_W p dx dy dz$  (El flujo hacia el exterior de la superficie es igual a la carga total en el interior).

Ejercicio: Sea  $p$  continua en  $\mathbb{R}^3$  de forma que  $p(x) = 0$  si  $x \notin \bar{W}$  (región regular de  $\mathbb{R}^3$  ( $W$  es un dominio)). Definimos el potencial de  $p$  como  $\Phi(x) = \iint_W \frac{p(y)}{4\pi \varepsilon_0 \|x-y\|} dx dy dz$ . Probar que  $\iint_{\partial W} \langle \nabla \Phi, n_e \rangle dS = - \iint_W p(y) dx dy dz$ . (Nota: En caso de que se den las condiciones para que  $\Phi$  sea  $C^2$ , se tendría:  $\iint_W \Delta \Phi dx dy dz = \iint_{\partial W} \langle \nabla \Phi, n_e \rangle dS = - \iint_W p(y) dx dy dz \Rightarrow -\Delta \Phi = p$ ).

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x) = - \iint_W \frac{p(y)}{4\pi \varepsilon_0 \|x-y\|} \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^3} dx dy dz \quad (i=1,2,3)$$

$$\langle \nabla \Phi, n_e \rangle = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x) \cdot n_{e_i} = - \iint_W \frac{p(y)}{4\pi \varepsilon_0 \|x-y\|} \frac{\langle x-y, n_e \rangle}{\|x-y\|^3} dx dy dz$$

$$\text{Sea } V \text{ regular con } V \subseteq W. \text{ Se tiene que: } \underbrace{\iint_{\partial W} \langle \nabla \Phi, n_e \rangle dS}_{\substack{\text{Teorema de} \\ \text{Fubini}}} = - \iint_W \left( \iint_W \frac{p(y)}{4\pi \varepsilon_0 \|x-y\|} \frac{\langle x-y, n_e \rangle}{\|x-y\|^3} dx dy dz \right) dS = - \iint_W \frac{p(y)}{4\pi \varepsilon_0} \underbrace{\left( \iint_W \frac{\langle x-y, n_e \rangle}{\|x-y\|^3} dS \right) dx dy dz}_{\substack{\text{Teorema de} \\ \text{Gauss}}} = - \iint_W p(y) dx dy dz = \iint_V p(y) dx dy dz$$

Tomando  $V = W$  ya obtendremos lo que buscábamos.

Problemas Dirichlet: Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  acotado y regular. Sea  $f \in C(\bar{\Omega})$  y  $g \in C(\partial\Omega)$ . Un problema Dirichlet consiste en encontrar  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tal que  $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$ . (#)

Si dicha  $u$  existe, es única.

### Demonstración

Vemos la unicidad de la solución del problema Dirichlet. Sean  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tal que verifican (#). Tomemos  $w = u - v$  de forma que se cumple que

$$\int_{\Omega} \underbrace{-\Delta w \cdot w dx}_{\substack{(1) \text{ Primera Fórmula} \\ 0}} = \int_{\Omega} \underbrace{\| \nabla w \|^2 dx}_{\substack{(2) \text{ II} \\ 0}} - \iint_{\partial\Omega} w \cdot (-) dS \Rightarrow \nabla w = 0 \text{ en } \Omega \Rightarrow w = 0 \text{ en } \Omega \Rightarrow u - v = 0 \text{ en } \Omega \Rightarrow u = v \text{ en } \Omega.$$

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

14/11/2023

Teorema: Sea  $A = \{u \in C^2(\Omega) / u = g \text{ en } \partial\Omega\} \in I(v) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \| \nabla u \|^2 - f \cdot v dx$ , con  $v \in C^2(\Omega)$ . Entonces,  $u$  es solución del problema Dirichlet si, y solo si,  $u$  es el mínimo de  $I$  en  $A$ . ( $I(u) \leq I(v) \forall v \in A$ )

### Demonstración

$$\Rightarrow \text{Supongamos que } u \text{ es solución del problema Dirichlet} \Rightarrow \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}. \text{ ¿} \forall v \in A, I(v) \leq I(u) ? \text{ Consideraremos } u - w \in C^2(\Omega) \text{ de forma que } u - w = 0 \text{ en } \partial\Omega. \text{ Se tiene que } -\Delta u = f \text{ en } \Omega \Rightarrow \Rightarrow \int_{\Omega} \Delta u \cdot (u-w) dx = \int_{\Omega} f \cdot (u-w) dx \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u-w) dx = \iint_{\partial\Omega} (u-w) \cdot T^0 dS = \int_{\Omega} f \cdot (u-w) dx \Rightarrow \underbrace{\int_{\Omega} \| \nabla u \|^2 dx}_{\substack{\text{Primera Fórmula} \\ 0}} - \int_{\Omega} f \cdot w dx = \int_{\Omega} f \cdot u dx \leq \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \| \nabla u \|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \| \nabla w \|^2 - f \cdot w dx \right] \leq \frac{1}{2} \left[ \| \nabla u \|^2 + \| f \|^2 \right]$$

Supongamos que  $u \in \Omega$  es el mínimo de  $I$ . Tomemos  $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ . Sea  $t \in \mathbb{R}$ . Definimos  $i(t) = I(u+tv)$ . Por hipótesis, sabemos que  $i$  tiene un mínimo en  $t=0$ . ¿Cuándo se da  $i'(0)=0$ ? siendo  $i'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{i(t)-i(0)}{t}$ .

$$I(u+tv) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \|\nabla(u+tv)\|^2 - f \cdot (u+tv) \right] dx = \int_{\Omega} \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + t \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{2} t^2 \|\nabla v\|^2 - f \cdot u - t f \cdot v \right]}_{\stackrel{u}{\sim}} dx \Rightarrow i'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ I(u+tv) - I(u) \right] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - f \cdot v dx. \text{ Por tanto:}$$

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - f \cdot v dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} (-\Delta u - f) v dx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ v=0 & \text{en } \partial\Omega \\ u=g & \text{en } \partial\Omega \quad (\text{ya que } u \in \Omega) \end{cases} \Leftrightarrow u \text{ es solución del problema Dirichlet.}$$

Hemos visto que, en  $\mathbb{R}^3$ ,  $F$  es conservativo en  $\Omega \Leftrightarrow \exists P \in C^1(\Omega)$  tal que  $F = \nabla P \Rightarrow \operatorname{rot}(F) = 0$ .  
 $\Leftrightarrow \Omega$  si  $\Omega$  es simplemente conexo.

Definición. Se dice que  $F$  es solenoide en  $\Omega$  si, y sólo si,  $\exists G \in C^1(\Omega)$  tal que  $F = \operatorname{rot}(G) \Rightarrow \operatorname{div}(F) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(G)) = 0$ .  
 $\Leftrightarrow$  se da si  $\Omega$  es estrellado.

Teatrino. Sea  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  estrellado),  $F \in C^1(\Omega)$  y  $\operatorname{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$ . Entonces,  $\exists V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $V \in C^1(\Omega)$ , tal que  $F = \operatorname{rot}(V)$ .

Demarcación.

$$\text{Definimos: } V_t = \int_0^t F_s \left( a+t(x-a), b+t(y-b), c+t(z-c) \right) t(y-b) + F_2 \left( a+t(x-a), b+t(y-b), c+t(z-c) \right) t(z-c) dt$$

$$V_2 = \int_0^t -F_1 \left( a+t(x-a), b+t(y-b), c+t(z-c) \right) t(z-c) + F_3 \left( a+t(x-a), b+t(y-b), c+t(z-c) \right) t(x-a) dt$$

$$V_3 = \int_0^t -F_2 \left( a+t(x-a), b+t(y-b), c+t(z-c) \right) t(x-a) + F_1 \left( a+t(x-a), b+t(y-b), c+t(z-c) \right) t(y-b) dt$$

$$\dot{F}_1 = \frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{\partial V_3}{\partial z}?$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{\partial V_3}{\partial z} = \underbrace{\int_0^t -\frac{\partial F_1}{\partial y}(-) \cdot t^2(y-a) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(-) \cdot t^2(y-b) + F_4(-) \cdot t dt}_{\stackrel{\uparrow}{\operatorname{div}(F)=0}} + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial F_2}{\partial z}(-) \cdot t^2(x-a) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(-) \cdot t^2(y-b) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(-) \cdot t^2(z-c) dt}_{\stackrel{\downarrow}{\operatorname{div}(F)=0}} + \frac{\partial F_1}{\partial x}(-) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(-) - \frac{\partial F_3}{\partial z}(-)$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F_1 \left( a+t(x-a), b+t(y-b), c+t(z-c) \right) \cdot t^2 + 2t F_4(-) dt = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left( t^2 F_4(-) \right) dt = \left[ t^2 F_4(-) \right]_0^t = F_4(x, y, z)$$

Análogo para ver que  $F_2 = \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}$  y  $F_3 = \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V_2}{\partial y}$ .

15/11/2023

## INTRODUCCIÓN A LAS FORMAS DIFERENCIALES EN $\mathbb{R}^3$

Idea / Motivación.

$\mathbb{R} \longrightarrow$  Teorema Fundamental del Cálculo  $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow$  Teorema de Green

$$\iint_D F \cdot d\ell = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \text{ con } F = (P, Q), D \subset \mathbb{R}^2.$$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow$  Teorema de Stokes

$$\iint_S F \cdot d\ell = \iint_S \operatorname{rot}(F) \cdot dS, \text{ con } S \subset \mathbb{R}^3.$$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow$  Teorema de la Divergencia

$$\iint_{\Omega} \langle F, n_e \rangle dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx dy dz, \text{ con } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ regular.}$$

Teorema de Stokes Generalizado

Si  $w = P dx + Q dy$  es una 1-forma, con  $P(x, y, 0), Q(x, y, 0)$ , y  $dw$  es una 2-forma, entonces  $\int_{\Omega} w = \int_{\Omega} dw$

(Los cuatro teoremas van a tener la misma expresión)

Definición. Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  abierto. Una 0-forma es  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Si  $f$  y  $g$  son 0-formas,  $f+g$  y  $f \cdot g$  también son 0-formas.

Existen tres 1-forma básicas:  $dx, dy, dz$ . Si  $w$  es 1-forma  $\Rightarrow w = P dx + Q dy + R dz$ , con  $P, Q, R: K \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables. Por ejemplo,  $H dx = H dx + 0 dy + 0 dz$ .

(No importa el orden de los sumandos)

Existen tres 2-forma básicas:  $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ . Si  $w$  es una 2-forma  $\Rightarrow w = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ , con  $P, Q, R: K \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables.

(No importa el orden de los sumandos)

Existe una 3-forma básica:  $dx \wedge dy \wedge dz$ . Si  $w$  es una 3-forma  $\Rightarrow w = P dx \wedge dy \wedge dz$ , con  $P: K \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable.

En general, una forma es una generalización de la función  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \text{Número real}$ .

### Operaciones con formas.

- Suma de 1-formas:  $w_1 + w_2 = (P_1 + P_2) dx + (Q_1 + Q_2) dy + (R_1 + R_2) dz$
- Producto de 1-forma con 0-forma:  $f \cdot w = (f \cdot P) dx + (f \cdot Q) dy + (f \cdot R) dz$
- Suma de 2-formas:  $w_1 + w_2 = (P_1 + P_2) dy \wedge dz + (Q_1 + Q_2) dz \wedge dx + (R_1 + R_2) dx \wedge dy$
- Producto de 2-forma con 0-forma:  $f \cdot w = (f \cdot P) dy \wedge dz + (f \cdot Q) dz \wedge dx + (f \cdot R) dx \wedge dy$
- Suma de 3-formas:  $w_1 + w_2 = (P_1 + P_2) dx \wedge dy \wedge dz$
- Producto de 3-forma con 0-forma:  $f \cdot w = (f \cdot P) dx \wedge dy \wedge dz$

Producto de formas. Se denotará por el símbolo " $\wedge$ ". Sea  $w$  una  $k$ -forma y  $\eta$  una  $\ell$ -forma con  $k+\ell \leq 3$ .

- 1) Elemento Neutro: Para todo  $k$ , existe una  $k$ -forma,  $0$ , cumpliendo  $0+w=w$ ,  $0 \wedge \eta=0$ .
- 2) Distributividad: Si  $f$  es una 0-forma, entonces  $(f w_1 + w_2) \wedge \eta = f w_1 \wedge \eta + w_2 \wedge \eta = f(w_1 \wedge \eta) + w_2 \wedge \eta$ .
- 3) Anticomutatividad:  $w \wedge \eta = (-1)^{k\ell} (\eta \wedge w)$ .
- 4) Asociatividad: Sea  $w_1$  una  $k_1$ -forma,  $w_2$  una  $k_2$ -forma y  $w_3$  una  $k_3$ -forma, con  $k_1+k_2+k_3 \leq 3$ . Entonces,  $w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3) = (w_1 \wedge w_2) \wedge w_3$ .
- 5) Homogeneidad para 0-formas:  $f(w \wedge \eta) = fw \wedge \eta = w \wedge f\eta$ .
- 6)  $dx \wedge dy = dy \wedge dx$        $dx \wedge dz = dz \wedge dx$        $dy \wedge dz = dz \wedge dy$        $dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$
- 7)  $dy \wedge dx = (-1)(dx \wedge dy) = -dx \wedge dy$        $dz \wedge dx = (-1)(dx \wedge dz) = -dx \wedge dz$        $dz \wedge dy = (-1)(dy \wedge dz) = -dy \wedge dz$
- 7) Si  $f$  es una 0-forma,  $f \wedge w = fw$ .

Diferenciableidad de formas.  $\{ \text{Formas Diferenciables} \} = \text{Forma Diferenciable}$ .

- Si  $w$  es una  $k$ -forma, con  $k < 3$ , entonces  $d w$  es una  $(k+1)$ -forma. Por ejemplo, si  $f$  es una 0-forma, entonces  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$  es una 1-forma.
- Si  $w$  es una 3-forma, entonces  $d w$  es una 0-forma.
- $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$ .
- Si  $w$  es una  $k$ -forma y  $\eta$  es una  $\ell$ -forma, con  $k+\ell < 3$ , entonces  $d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^k w \wedge d\eta$ .
- $d^2 = 0$ , es decir,  $d(dw) = 0$ .

21/11/2023

Ejercicio. Sean  $w = xdx + ydy$  y  $\eta = xydx + xzdy + xyzdz$ . Calcular  $w \wedge \eta$ .

$$\begin{aligned} w \wedge \eta &= (\underbrace{xdx + ydy}_{(xdx) \wedge (ydy)}) \wedge (xydx + xzdy + xyzdz) = (xdx) \wedge (xydx + xzdy + xyzdz) + (ydy) \wedge (xydx + xzdy + xyzdz) = x^2y \underbrace{(dx \wedge dx)}_0 + x^2z \underbrace{(dx \wedge dy)}_{\frac{\partial}{\partial dy}} + x^2y \underbrace{(dx \wedge dz)}_{-\frac{\partial}{\partial z} dx} + \\ &= x^2z \underbrace{(dx \wedge dy)}_{\frac{\partial}{\partial dy}} + x^2y \underbrace{(dx \wedge dz)}_{\frac{\partial}{\partial z} dx} - xy^2 \underbrace{(dx \wedge dy)}_{\frac{\partial}{\partial y} dx} + xy^2 \underbrace{(dy \wedge dz)}_{\frac{\partial}{\partial x} dy} = (x^2z - xy^2) \underbrace{dxdy}_{0} + xy^2 \underbrace{dydz}_{0} - x^2y \underbrace{dxdz}_{0} \end{aligned}$$

Ejercicio. Sean  $w = xdx - ydy$  y  $\eta = xydz + zxdy$ . Calcular  $w \wedge \eta$ .

$$\begin{aligned} w \wedge \eta &= (xdx - ydy) \wedge (xydz + zxdy) = (xdx) \wedge (xydz + zxdy) + (-ydy) \wedge (xydz + zxdy) = x^2 \underbrace{(dx \wedge dydz)}_{\frac{\partial}{\partial dy} dx} + xz \underbrace{(dx \wedge zdxdy)}_{\frac{\partial}{\partial y} dx} - xy \underbrace{(dy \wedge dydz)}_{\frac{\partial}{\partial x} dy} - yz \underbrace{(dy \wedge zdxdy)}_{(-1) \frac{\partial}{\partial x} dy} = x^2 \underbrace{dxdydz}_0 \end{aligned}$$

Ejercicio. Sea  $K = \mathbb{R}$  abierto en  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $w = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy$ . Calcular  $dw$ .

$$\begin{aligned} dw &= d(Pdx + Qdy) = d(Pdx) + d(Qdy) = d(P \wedge dx) + d(Q \wedge dy) = dP \wedge dx + \underbrace{(-1)^0 P \wedge d(dx)}_0 + dQ \wedge dy + \underbrace{(-1)^0 Q \wedge d(dy)}_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz\right) \wedge dy = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} \underbrace{dx \wedge dx}_{0} + \frac{\partial P}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dx}_{-\frac{\partial}{\partial x} dy} + \frac{\partial P}{\partial z} \underbrace{dz \wedge dx}_{\frac{\partial}{\partial x} dz} + \frac{\partial Q}{\partial x} \underbrace{dx \wedge dy}_{\frac{\partial}{\partial y} dx} + \frac{\partial Q}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dy}_{0} + \frac{\partial Q}{\partial z} \underbrace{dz \wedge dy}_{-\frac{\partial}{\partial y} dz} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dydx + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} dzdx - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} dydx - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} dzdx = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right) dydx - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} dydz + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} dzdx \end{aligned}$$

Ejercicio. Sea  $K = \mathbb{R}$  abierto en  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $w = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ . Calcular  $dw$ .

$$\begin{aligned} dw &= d(Pdx + Qdy + Rdz) = d(Pdx) + d(Qdy) + d(Rdz) = \underbrace{dP \wedge dx}_{\frac{\partial}{\partial x} 0} + \underbrace{dQ \wedge dy}_{-\frac{\partial}{\partial y} dx} + \underbrace{dR \wedge dz}_{\frac{\partial}{\partial z} dx} = \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dydx + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dydz \end{aligned}$$

22/11/2023

Comprobado

Teorema de Stokes Generalizado. Sea  $S \subset K$  una 2-variedad con borde. Entonces,  $\int_S w = \int_{\partial S} dw$

↑ 2-variedad  
↓ 1-variedad

Pasémoslo a lenguaje de campos vectoriales:  $F = (P, Q, R)$  ;  $\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

$$D \subset \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \bar{\Omega}: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad ; \quad S = \bar{\Omega}(D) = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) / (u,v) \in D\} \quad ; \quad \bar{\Omega}_u \times \bar{\Omega}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}\right)$$

$$w = Pdx + Qdy + Rdz$$

$$\int_S w = \int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\partial S} F \cdot d\ell$$

$$\int_S dw = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)} + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)} dudv = \iint_D \langle \text{rot}(F), \bar{\Omega}_u \times \bar{\Omega}_v \rangle dudv = \iint_S \text{rot}(F) \cdot dS$$

Ejercicio anterior

$$\Rightarrow \boxed{\iint_S F \cdot d\ell = \iint_S \text{rot}(F) \cdot dS} \quad \text{Teorema de Stokes en } \mathbb{R}^3$$

Ejercicio. Deducir, a partir del Teorema de Stokes Generalizado, el Teorema de Green en  $\mathbb{R}^2$ .

Teatro de la Divergencia Generalizado: Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  una 3-variedad con borde. Entonces,  $\int_{\Omega} w = \int_{\partial\Omega} dw$ . (Notemos que la expresión es la misma que la del Teorema de Stokes Generalizado). Lo que cambia es que ahora tenemos una 3-variedad en vez de una 2-variedad.

Pasemos a lenguaje de campos vectoriales:  $F = (P, Q, R)$ ;  $\operatorname{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

$$D \subset \mathbb{R}^2; \quad \bar{\Omega}: D \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \Omega = \bar{\Omega}(D) = \left\{ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \mid (u, v) \in D \right\}; \quad \bar{\Omega}_u \times \bar{\Omega}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

$$w = P dx dy + Q dy dz + R dz dx$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = dP \wedge dx dy + dQ \wedge dy dz + dR \wedge dz dx = \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx dy + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy dz + \left( \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz dx =$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \eta_1 du + \eta_2 dv + \eta_3 dw$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx \wedge dy dy + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} dx \wedge dy dz + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} dx \wedge dz dx = \underbrace{\left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right) dx dy dz}$$

$$\int_{\partial\Omega} \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{\Omega}) dx dy dz = \int_{\partial\Omega + \bar{\Omega}(D)} P dx dy + Q dy dz + R dz dx = \int_{\Omega} \langle (\bar{\Omega}, L, P), \bar{\Omega}_u \times \bar{\Omega}_v \rangle du dv = \iint_{\Omega} F ds \Rightarrow \boxed{\iint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx dy dz = \iint_{\Omega} F ds} \quad \text{Teorema de la Divergencia en } \mathbb{R}^3$$

23/11/2023

## APLICACIONES A LA FÍSICA y a ECUACIONES DIFERENCIALES (PARTE 2)

Solución Fundamental de la Ecación de Laplace: Tenemos la ecación  $\Delta u = 0$ . Suponemos que  $u \in C^2$  y que,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(x) = u(\|x\|) = v(r)$ . Buscamos  $v$  para que  $\Delta u = 0$ :

$$\begin{aligned} r &= \|x\| \\ v: [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= v'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r} \\ \sqrt{r^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} &= \sqrt{r^2 + r^2} = r \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left( \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Sumar}} \frac{\partial u}{\partial r} = v''(r) + v'(r) \left( \frac{n-1}{r} - \frac{1}{r} \right) \Rightarrow 0 = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) \Rightarrow 0 = (v'(r) \cdot r^{n-1})' \Rightarrow v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}} \quad (a \neq 0) \Rightarrow v(r) = \begin{cases} \frac{a \log(r) + b}{r^{n-2}} & n=2 \\ \frac{a}{r^{n-2}} + b & n \geq 3 \end{cases} \quad (a, b \text{ constantes}) \quad \text{Medida } (n-1) \text{ de la esfera de dimensión } n \text{ de centro } O \text{ y radio } r$$

Así, la solución fundamental de la ecación de Laplace,  $\Delta u = 0$ , viene dada por:  $u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(n-2)} \log(\|x\|) & n=2 \\ \frac{-1}{(n-2) u_0} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$

27/11/2023

### Funciones Armónicas

Definición:  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio.  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C^2(\Omega)$ , es armónica  $\Leftrightarrow \Delta u(x) = 0 \forall x \in \Omega$ . Ejemplo: Parte real y parte imaginaria de una función holomorfa.

Definición:  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C^2(\Omega)$ , es subarmónica  $\Leftrightarrow -\Delta u(x) \leq 0 \forall x \in \Omega$  ( $\Delta u(x) \geq 0 \forall x \in \Omega$ ).

Definición:  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C^2(\Omega)$ , es superarmónica  $\Leftrightarrow -\Delta u(x) \geq 0 \forall x \in \Omega$  ( $\Delta u(x) \leq 0 \forall x \in \Omega$ ).

Lema: Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio acotado y regular.  $\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$ . Si  $g \in C(\partial\Omega)$ , entonces existe una única solución  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  del problema planteado.

Tenemos (Caracterización de Funciones Subarmónicas).  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C(\Omega)$ . Se cumple  $i \Rightarrow ii \Rightarrow \dots \Rightarrow v$ :

$C^2$  i)  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $u$  es subarmónica.

Comprobado

C ii)  $u \in C(\Omega)$ ,  $\forall \Omega_0 \subset \Omega$  subdominio (es decir,  $\Omega_0 \subset \Omega$  c.  $\Omega$ ),  $\Omega_0$  regular,  $\int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial n} > 0$ .

Derivada respecto del normal exterior

C iii)  $\forall j \in \Omega$ ,  $\exists \Omega_j \subset \Omega^0$  [si  $\Omega = \Omega^0$ , definimos  $\Omega_j = +\infty$ ], tal que  $B(j, \Omega_j) \subset \Omega$  y  $\forall \ell \in (0, \Omega_j)$ ,  $u(j) \leq \frac{1}{w_n \Omega^{n-1}} \int_{B(j, \ell)} u(x) dS_x \rightsquigarrow$  Media en esferas.

C iv)  $\forall j \in \Omega$ ,  $\exists \Omega_j \subset \Omega^0$  [si  $\Omega = \Omega^0$ , definimos  $\Omega_j = +\infty$ ], tal que  $B(j, \Omega_j) \subset \Omega$  y  $\forall \ell \in (0, \Omega_j)$ ,  $u(j) \leq \frac{1}{w_n \Omega^{n-1}} \int_{B(j, \ell)} u(x) dx \rightsquigarrow$  Media en bolas.

Vamos perdiendo regularidad  
v)  $\forall \Omega \subset \Omega$  subdominio acotado,  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  armónica,  $h \in C(\bar{\Omega}_0)$ , tal que  $u(x) \leq h(x)$  en  $\partial\Omega_0 \Rightarrow u(x) \leq h(x)$   $\forall x \in \Omega_0$ . Si  $x_0 \in \Omega_0$  tal que  $u(x_0) = h(x_0)$ , entonces  $u(x) = h(x)$   $\forall x \in \Omega_0$ .

[Nota: Si se tuviera  $u \in C^1(\Omega)$  en la hipótesis inicial, se debería  $v \Rightarrow i$ . Es decir, si hubiese regularidad, los " $\Rightarrow$ " serían " $\Leftrightarrow$ ".]

### Demonstración.

i)  $\Rightarrow$  ii)  $\Omega_0 \subset \Omega$ ,  $u, v \in C^1$ . La Primera Fórmula de Green nos dice que:  $\int_{\Omega_0} \Delta u = \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial n} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ . Si  $v = 1 \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = 0 \Rightarrow 0 \leq \int_{\Omega_0} \Delta u = \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial n}$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii)  $\Phi: [0, \Omega_j] \rightarrow \Omega$   $\Omega_j = \text{distancia } (j, \partial\Omega)$ .

$$\begin{cases} \Phi(\Omega) = \frac{1}{w_n \Omega^{n-1}} \int_{\partial B(j, \Omega)} u & \text{si } \Omega > 0 \\ u(j) & \text{si } \Omega = 0 \end{cases}$$

$\Phi$  continua en  $\Omega = 0$

$$\underline{\Omega} > 0 \rightarrow \Phi(\Omega) = \frac{1}{w_n \Omega^{n-1}} \int_{\partial B(j, \Omega)} u(x) dx = \left[ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x = j + \Omega \sigma, \sigma \in \partial B(0, 1) \end{array} \right] = \frac{1}{w_n \Omega^{n-1}} \int_{\partial B(0, 1)} u(j + \Omega \sigma) \Omega^{n-1} d\sigma = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B(0, 1)} u(j + \Omega \sigma) d\sigma \cdot \Phi'(\Omega) = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B(0, 1)} \langle \nabla u(j + \Omega \sigma), \sigma \rangle d\sigma =$$

$\Rightarrow \Phi$  en  $(0, \Omega_j)$  es creciente.

$$\frac{1}{w_n \Omega^{n-1}} \int_{\partial B(j, \Omega)} \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \Rightarrow$$

Desarrollando el cambio  
Por hipótesis

En conclusión,  $\Phi$  en  $[0, \Omega_j]$  es creciente  $\Rightarrow \Phi(0) \leq \Phi(\Omega)$ .

iii)  $\Rightarrow$  iv)  $\underbrace{\frac{n}{w_n \Omega^n} \int_{B(j, \Omega)} u(x) dx}_{\text{v)}}$   $= \frac{n}{w_n \Omega^n} \int_0^\Omega \left( \underbrace{\int_{\partial B(j, r)} u(x) dS_x}_{\text{Hipótesis}} \right) dr \stackrel{\text{v)}}{\geq} \frac{n}{w_n \Omega^n} \int_0^\Omega r^{n-1} u(j) r^n dr = \frac{n}{w_n} u(j) \left[ \frac{r^n}{n} \right]_0^\Omega = \frac{n}{w_n} u(j) \frac{\Omega^n}{n} = \underline{u(j)}$

iv)  $\Rightarrow$  v)  $\Omega_0 \subset \Omega$ ,  $h: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$  armónica,  $h \in C(\bar{\Omega}_0)$ . Sabemos que  $u(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \partial\Omega_0$ .

Fijémos que  $u-h$  es subarmónica. Sea  $M = \max_{\Omega_0} \{u-h\}$ . Sea  $A = \{x \in \Omega_0 \text{ tal que } u(x) - h(x) = M\}$ .  $A$  es cerrado en  $\Omega_0$ . Veámos también que  $A$  es abierto.

Sea  $x_0 \in A$  ( $u(x_0) - h(x_0) = M$ ).  $M = u(x_0) - h(x_0) \leq \frac{n}{w_n \Omega^n} \int_{B(x_0, \Omega)} u-h \leq M \Rightarrow \frac{n}{w_n \Omega^n} \int_{B(x_0, \Omega)} u-h = M \Rightarrow B(x_0, \Omega) \subset A$ .  
Por hipótesis

Tenemos que  $A$  es abierto y cerrado  $\Rightarrow A = \emptyset$  o  $A = \Omega_0$ .

Si  $M > 0$ , tenemos una contradicción con la hipótesis de que  $u(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \partial\Omega_0$ . Luego  $M \leq 0$ .

Si  $M \leq 0$ ,  $u(x) - h(x) \leq M \leq 0 \quad \forall x \in \Omega_0 \Rightarrow \underline{u(x)} \leq h(x)$

Si  $\exists x_0 \in \Omega_0$  tal que  $u(x_0) = h(x_0) \Rightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow A = \Omega_0 \Rightarrow \underline{u(x)} = h(x) \quad \forall x \in \Omega_0$

$u(x) < h(x) \quad \forall x \in \Omega_0$  ó  $u(x) = h(x) \quad \forall x \in \Omega_0$

$v_i \Rightarrow i)$  si  $u \in C^2(\Omega)$

Sea  $h$  la solución del problema  $\Omega_0 = B(\bar{z}, R)$ ,  $\bar{z} \in \Omega$ ,  $R > 0$ .

$$\begin{aligned}\Delta h(x) &= 0 \quad \text{en } \Omega_0 \\ h(x) &= g(x) \quad \text{en } \partial\Omega_0\end{aligned}$$

Si  $u$  no es subarmónica,  $\exists x_0 \in \Omega_0$  tal que  $\Delta u(x_0) < 0$  y,  $\uparrow$ ,  $\exists R > 0$  tal que,  $\forall x \in B(x_0, R)$ ,  $\Delta u(x) < 0 \Rightarrow u(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \Omega_0 \Rightarrow u - h \leq 0 \quad \text{en } \bar{\Omega}_0 \Rightarrow \exists \bar{z} \in \Omega_0$  d.t.d.  $\xrightarrow{x-h \text{ alcanza d. mímico}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2(u-h)}{\partial x_k}(z) \geq 0 \Rightarrow \Delta(u-h)(z) \geq 0 \Rightarrow \Delta u(z) \geq 0 \quad !! \text{ Contradicción con } (i). \quad \text{Luego, } u \text{ es subarmónica.}$$

[28/11/2023]

Teorema (Caracterización de Funciones Superarmónicas). Análogo al Teorema de Funciones Subarmónicas. Lo que cambiaría sería que en i) se pondría "superarmónica" en vez de "subarmónica" y los signos " $\leq$ " se cambiarían por " $\geq$ ".

Teorema (Caracterización de Funciones Armónicas). Análogo al Teorema de Funciones Subarmónicas. Lo que cambiaría sería que " $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow \dots \Rightarrow v)$ " se sustituiría por "son equivalentes", en i) se pondría "armónica" en vez de "subarmónica" y los signos " $\leq$ " se cambiarían por " $=$ ".

Demonstración.

$v) \Rightarrow i)$  Sea  $\bar{z} \in \Omega$ . Sea  $B(\bar{z}, R) \subset \Omega$ . Planteamos el problema:  $\begin{cases} \Delta h = 0 \quad \text{en } \Omega \\ h = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$ . Por el teorema, sabemos que existe una única solución  $h$  de dicho problema, de forma que,  $u = h$  en  $\partial B(\bar{z}, R) \Rightarrow u = h$  en  $B(\bar{z}, R) \Rightarrow u$  es armónica en  $\bar{z}$   $\xrightarrow{\bar{z} \text{ es arbitrario}}$   $u$  es armónica en  $\Omega$ .

Principio del Máximo para Funciones Subarmónicas. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio acotado. Sea  $u \in C(\bar{\Omega})$ ,  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que  $u$  verifica i) del Teorema de Caracterización de Funciones Subarmónicas (desigualdad de medias en bolas euclídeas). Entonces,  $\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u$ . Además, si  $\exists x_0 \in \Omega$  tal que  $u(x_0)$  alcanza el máximo, entonces  $u = \text{cste. en } \Omega$ .

Demonstración

Sea  $M = \max_{\Omega} u$ .  $u \leq M$  en  $\partial\Omega \Rightarrow u \leq M$  en  $\Omega$  ... por el Teorema de Caracterización de Funciones Subarmónicas.

Principio del Máximo-Mínimo para Funciones Armónicas. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio acotado. Sea  $u \in C(\bar{\Omega})$  armónica en  $\Omega$ . Entonces  $\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u$ ,  $\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u$ . Además, si  $\exists x_0 \in \Omega$  tal que  $u(x_0)$  alcanza el máximo (o mínimo), entonces  $u = \text{cste. en } \Omega$ .

[29/11/2023]

Principio de Comparación. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio acotado. Sea  $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Si  $\begin{cases} -\Delta u_1(x) \leq -\Delta u_2(x) \quad \forall x \in \Omega \\ u_1(x) \leq u_2(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$ , entonces  $u_1(x) \leq u_2(x) \quad \forall x \in \Omega$ .

Demonstración.

Sea  $u = u_1 - u_2$ , de forma que  $\begin{cases} -\Delta u \leq 0 \quad \text{en } \Omega \\ u \leq 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow u \leq 0 \quad \text{en } \Omega$ .

Proposición. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio acotado. Sean  $f \in C(\Omega)$ ,  $g \in C(\partial\Omega)$ . Consideramos el problema  $\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$  (1).

Entonces, el problema (1) tiene a lo sumo una solución.

Demonstración.

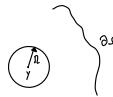
Supongamos  $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  soluciones de (1). Sea  $u = u_1 - u_2$  de forma que  $\Delta u(x) = 0$  en  $\Omega$  (armónica). Por el Principio del Máximo-Mínimo para Funciones Armónicas,

$$\min_{\Omega} u = 0 \Rightarrow \min_{\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u = 0. \quad \text{Así, } 0 = u = u_1 - u_2 \Rightarrow u_1 = u_2 \quad \text{en } \Omega.$$

Teorema de Harnack. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio acotado y  $K \subset \Omega$  compacto. Entonces,  $\exists c > 0$  tal que,  $\forall u$  armónica no negativa en  $\Omega$ , se tiene que  $\frac{\max(u)}{K} \leq c \min(u)$ .

Demostración.

$K = \bar{B}(y, R)$ , con  $y \in \Omega$ ,  $R > 0$ , de forma que  $4R < \text{dist}(y, \partial\Omega)$ .



$$\text{Sea } x_1, x_2 \in B(y, R). \text{ Se tiene que: } u(x_1) = \frac{n}{w_n R^n} \int_{B(x_1, R)} u \leq \frac{n}{w_n R^n} \int_{B(y, 2R)} u .$$

$\left. \begin{array}{c} \uparrow \\ B(x_1, R) \subset B(y, 2R) \end{array} \right\} \Rightarrow u(x_1) \leq 3^n u(x_2) \Rightarrow \frac{\max(u)}{K} \leq 3^n \frac{\min(u)}{B}$

$$u(x_2) = \frac{n}{w_n (3R)^n} \int_{B(x_2, 3R)} u \geq \frac{n}{w_n (3R)^n} \int_{B(y, 2R)} u .$$

$\left. \begin{array}{c} \uparrow \\ B(y, 2R) \subset B(x_2, 3R) \end{array} \right\}$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $K$  es acotado (si no lo fuera, siempre podemos elegir  $K' \supset K$  acotado). Recubrimos  $K$  con bolas de radio  $R > 0$  de forma que  $4R < \text{dist}(K, \partial\Omega)$ .

Tendríamos un número finito de bolas,  $M$ , que recubren  $K$ . Por tanto, si  $x_1, x_2 \in K$ , entonces  $u(x_1) \leq 3^M u(x_2)$ .

Teorema de Liouville. Sea  $u$  armónica en  $\mathbb{R}^n$  acotada superior o inferiormente. Entonces,  $u$  es constante.

Demostración.

Supongamos  $u > 0$  con  $\inf(u) = 0$  (si  $u$  está acotada inferiormente,  $\bar{u} = u - \inf(u)$ ). Veamos que  $u = 0$  en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Por definición de infimo,  $\exists \{x_n\}$  sucesión de puntos tal que  $u(x_n) \rightarrow 0$ .

$$\text{Llamemos } R_n = \|x_0 - x_n\|. \text{ Se tiene que } 0 \leq u(x_0) = \frac{n}{w_n R_n^n} \int_{B(x_0, R_n)} u \leq \frac{n}{w_n R_n^n} \int_{B(x_0, 2R_n)} u = 2^n u(x_n) \rightarrow 0.$$

$\left. \begin{array}{c} \uparrow \\ B(x_0, R_n) \subset B(x_0, 2R_n) \end{array} \right\}$

Teorema de la Convergencia Dominada para Funciones Armónicas. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio acotado. Sea  $\{u_n\}$  sucesión de funciones armónicas  $u_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , uniformemente acotadas  $|u_n(x)| \leq K$ ,  $K > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in \Omega$ .

Supongamos que  $u_n$  converge puntualmente a  $u$  en  $\Omega$ . Entonces,  $u$  es armónica en  $\Omega$ .

4/12/2023

Proposición. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio,  $j \in \Omega$ ,  $u: \Omega \setminus \{j\} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica. Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow j} \frac{u(x)}{w(x-j)} = 0$ , donde  $w$  es la solución fundamental  $\left( w(x-j) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x-j| & x \neq j \\ -1 & n=2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n |x-j|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases} \right)$

Entonces,  $u$  se aproxima por continuidad a una función armónica en  $\Omega$ .

Demostración.

$j \in \Omega$ . Sea  $R > 0$ ,  $B(j, R) \subset \Omega$ . Sea  $h$  la función armónica en  $B(j, R)$  que verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta h(x) = 0 \quad x \in B(j, R) \\ h(x) = u(x) \quad x \in \partial B(j, R) \end{array} \right\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow j} \frac{v(x)}{w(x-j)} = 0. \quad (\#)$$

$\left. \begin{array}{c} B(j, R) \\ j \\ x \end{array} \right\} \Omega$

Sea  $x_0 \in B(j, R) \setminus \{j\}$ . Como ocurre (<#>), entonces  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \rho > 0$ ,  $\rho < |j - x_0|$ , tal que  $-\epsilon w(x-j) \leq v(x) \leq \epsilon w(x-j) \quad \forall x \in \bar{B}(j, \rho)$ . Sea  $\Delta_\rho = B(j, R) \setminus \bar{B}(j, \rho)$ .

Se tiene que  $\partial\Delta_\rho = \partial B(j, R) \cup \partial B(j, \rho)$ , donde se cumple (<#\#>). Por tanto,  $-\epsilon w(x-j) \leq v(x) \leq \epsilon w(x-j)$  en  $\Delta_\rho$ .  $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow v(x_0) = 0 \Rightarrow u(x_0) = h(x_0) \quad \forall x_0 \in B(j, R) \setminus \{j\}$ .

$x_0$  es arbitraria

armónica

Ejercicio. Si existe solución del problema  $\begin{cases} \Delta u(x) = u^2(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$ , entonces  $u = 0$  en  $\bar{\Omega}$ .

Usando la Fórmula de Green:  $\tilde{u} = u$ ,  $\tilde{v} = u$

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} u - \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \stackrel{\Delta u = u}{=} \int_{\Omega} u^4 = - \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} u^4 = 0 \\ u \text{ es continua} \end{cases} \Rightarrow u = 0 \text{ en } \bar{\Omega}$$

$\tilde{u}$   
 $\tilde{v}$   
 $0$

Ejercicio.  $u$  armónica en  $\Omega \Rightarrow u$  no tiene ceros aislados.

Supongamos que  $\exists j \in \Omega$  cero aislado de  $u$ . Entonces,  $\exists R > 0$  tal que  $\bar{B}(j, R) \subset \Omega$  y, además,  $u$  no se anula en  $\bar{B}(j, R) \setminus \{j\}$  (en particular, en  $\partial B(j, R)$ ). Por la propiedad de la media:

$$u(j) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int_{\partial B(j, R)} u = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \text{ en } \partial B(j, R) & !! \text{ Contradicción} \\ u > 0 \text{ y } u < 0 \text{ en } \underbrace{\partial B(j, R)}_{\text{Conexo}} & \Rightarrow \exists x_0 \in \partial B(j, R) \text{ tal que } u(x_0) = 0 !! \text{ Contradicción} \end{cases}$$

$\frac{1}{w_n R^{n-1}}$   
Por tanto,  $u$  no tiene ceros aislados.