

El espacio euclídeo

1.1. El espacio vectorial \mathbb{R}^n

Definición. Conjunto de todas las n -uplas de números reales:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Nos interesan los casos $n = 2$ y $n = 3$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Recordamos que \mathbb{R}^n tiene estructura de **espacio vectorial** con las operaciones:

- *Suma:* $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- *Producto por escalares:* $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

La **base standard** de \mathbb{R}^n está formada por los vectores:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0); \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0); \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Escribiendo

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k$$

tenemos la única expresión de cada elemento de \mathbb{R}^n como combinación lineal de los vectores básicos.

Para $n = 2, 3$ se usa la notación siguiente:

- En \mathbb{R}^2 : $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$, $(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
- En \mathbb{R}^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, $(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Interpretación geométrica.

Puntos: del mismo modo que \mathbb{R} se representa geoméricamente como una recta, \mathbb{R}^2 se puede representar como un plano en el que cada par (x, y) corresponde al punto de abscisa x y ordenada y con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas. Análogamente \mathbb{R}^3 se representa como un espacio tridimensional y, en general, una n -upla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ será un punto en un espacio de n dimensiones.

Vectores: alternativamente, cada n -upla $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se interpreta como el segmento orientado (vector) que une el origen $(0, 0, \dots, 0)$ con el punto de coordenadas (y_1, y_2, \dots, y_n) . La suma de vectores responde entonces a la regla del paralelogramo. Los vectores de la base standard $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ se sitúan en las direcciones de los ejes de coordenadas y los vectores $y_1 \mathbf{e}_1, y_2 \mathbf{e}_2, \dots, y_n \mathbf{e}_n$ son las componentes del vector \mathbf{y} según dichos ejes. Es útil considerar segmentos orientados con origen arbitrario, pero identificamos dos segmentos que se obtengan uno de otro aplicando la misma traslación a su origen y extremo, con lo que al segmento con origen en un punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y extremo en $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ corresponderá el vector $\overrightarrow{PQ} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$. Recíprocamente, cada vector $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ puede representarse por un segmento con origen en cualquier punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, sin más que tomar $Q = (x_1 + z_1, x_2 + z_2, \dots, x_n + z_n)$, con lo que claramente $\mathbf{z} = \overrightarrow{PQ}$. La suma de vectores tiene ahora una clara interpretación geométrica: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$, cualesquiera que sean los puntos P, Q y R . Usamos indistintamente ambas interpretaciones geométricas: la n -upla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ será el punto \mathbf{x} o el vector \mathbf{x} , según convenga en cada momento.

1.2. Producto escalar y norma euclídea

Definición del producto escalar. Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, se define:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

- Para $n = 2$: $(x, y) \cdot (u, v) = \langle x\mathbf{i} + y\mathbf{j} | u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \rangle = xu + yv$
- Para $n = 3$: $(x, y, z) \cdot (u, v, w) = \langle x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} | u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \rangle = xu + yv + zw$

Propiedades del producto escalar. Las dos principales son:

- *Simétrico:* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- *Lineal en cada variable (bilineal):* $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle$

Definición de la norma euclídea. Para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se define:

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}$$

Es claro que $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, y que $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Desigualdad de Cauchy-Schwartz. Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Se da la igualdad si, y sólo si, $\mathbf{x} = 0$ o $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Desigualdad triangular. Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

Se da la igualdad si, y sólo si, $\mathbf{x} = 0$ o $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ con $\alpha \geq 0$.

Significado geométrico: $\|\mathbf{x}\|$ se interpreta como la longitud del vector \mathbf{x} o la distancia del origen al punto \mathbf{x} . Por tanto $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ es la distancia entre los puntos \mathbf{x} e \mathbf{y} . Esta distancia tiene las siguientes propiedades:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

1.3. Ortogonalidad

Definición. Dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales cuando $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 0$, en cuyo caso escribimos $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Se cumple el *Teorema de Pitágoras*: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Rightarrow \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

Bases ortonormales. La base standard es ortonormal, es decir, para $k, j = 1, 2, \dots, n$ con $k \neq j$ se tiene que $\mathbf{e}_k \perp \mathbf{e}_j$, mientras que $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \dots = \|\mathbf{e}_n\| = 1$. El producto escalar se conserva al cambiar de base ortonormal: si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base ortonormal, es claro que

$$\left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k \mid \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{u}_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k$$

Proyección Ortogonal. Dados dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{y} \neq 0$, la proyección ortogonal de \mathbf{x} sobre \mathbf{y} es:

$$\Pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y},$$

el único vector múltiplo de \mathbf{y} ($\alpha \mathbf{y}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$) tal que $(\mathbf{x} - \alpha \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$.

Ángulo entre dos vectores. Para vectores no nulos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, el ángulo θ entre ellos se define por:

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad \cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Está determinado en forma única, pues la desigualdad de Cauchy-Schwartz nos da

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

y la función coseno es una biyección del intervalo $[0, \pi]$ sobre $[-1, 1]$. Cabe resaltar los casos particulares siguientes:

- $\theta = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ con $\alpha > 0$
- $\theta = \pi \Leftrightarrow \mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ con $\alpha < 0$
- $\theta = \pi/2 \Leftrightarrow \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$

1.4. Producto vectorial en \mathbb{R}^3

Definición. Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, se define:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k}$$

o bien, simbólicamente,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades del producto vectorial:

- *Antisimétrico:* $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$; $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- *Bilineal:* $(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \times \mathbf{z})$
- *Productos de vectores básicos:* $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$; $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
No es asociativo: $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$
- *Norma del producto vectorial.* Es fácil comprobar la *Identidad de Lagrange*:

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 + \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3)$$

y de ella se deduce

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta$$

donde θ es el ángulo que forman \mathbf{x} e \mathbf{y} . Por tanto, $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ es el área del paralelogramo de lados adyacentes \mathbf{x} e \mathbf{y} .

- *Dirección del producto vectorial:* Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, es claro que $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ y también $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$, luego $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ es un vector normal al plano determinado por \mathbf{x} e \mathbf{y} .
- *Producto Mixto:* Para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$, se tiene

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \times \mathbf{z} \rangle = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

El valor absoluto de este producto mixto es el volumen del paralelepípedo con aristas concurrentes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.

1.5. Rectas en el plano

Ecuaciones paramétricas. La recta que pasa por el punto (x_0, y_0) con vector de dirección $(u, v) \neq (0, 0)$ tiene ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + t u \\ y = y_0 + t v \end{cases} \quad (1)$$

Por tanto, la recta que pasa por dos puntos distintos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) será:

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \quad (2)$$

Ecuación implícita. La ecuación implícita de la recta que pasa por un punto (x_0, y_0) con vector normal $(A, B) \neq (0, 0)$ es:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (3)$$

Equivalentemente: $Ax + By + C = 0$ donde $C = -(Ax_0 + By_0)$.

Equivalencia entre ambas. Las ecuaciones (1) tienen solución $t \in \mathbb{R}$ si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u \\ y - y_0 & v \end{vmatrix} = 0,$$

que es equivalente a (3) sin más que tomar $(A, B) = (v, -u)$, con lo que se verifica $(A, B) \perp (u, v)$. La forma implícita de las ecuaciones (2) es:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

Distancia de un punto a una recta. La distancia del punto (x_1, y_1) a la recta de ecuación $Ax + By + C = 0$ viene dada por

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{(A^2 + B^2)^{1/2}}$$

1.6. Planos en el espacio

Ecuaciones paramétricas. El plano que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) y contiene a las rectas que pasan por dicho punto con vectores de dirección linealmente independientes (u_1, v_1, w_1) y (u_2, v_2, w_2) tiene ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + t u_1 + s u_2 \\ y = y_0 + t v_1 + s v_2 \\ z = z_0 + t w_1 + s w_2 \end{cases} \quad (4)$$

Por tanto, el plano que pasa por tres puntos no alineados (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) será:

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) + s(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) + s(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) + s(z_2 - z_0) \end{cases} \quad (5)$$

Ecuación implícita. La ecuación implícita del plano que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) con vector normal $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ es:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (6)$$

Equivalentemente: $Ax + By + Cz + D = 0$ donde $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Equivalencia entre ambas: El sistema de ecuaciones (4) tiene solución $t, s \in \mathbb{R}$ si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & u_2 \\ y - y_0 & v_1 & v_2 \\ z - z_0 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

que es equivalente a (6) tomando $(A, B, C) = (u_1, v_1, w_1) \times (u_2, v_2, w_2)$. La forma implícita de las ecuaciones (5) es:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Distancia de un punto a un plano. La distancia del punto (x_1, y_1, z_1) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{(A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}}$$

1.7. Rectas en el espacio

Ecuaciones paramétricas. La recta que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) con vector de dirección $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ tiene ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + t u \\ y = y_0 + t v \\ z = z_0 + t w \end{cases} \quad (7)$$

Por tanto, la recta que pasa por dos puntos distintos (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) será:

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases} \quad (8)$$

Ecuaciones implícitas. Se obtienen al expresar una recta como intersección de dos planos que pasan por el punto (x_0, y_0, z_0) con vectores normales linealmente independientes (A_1, B_1, C_1) y (A_2, B_2, C_2) :

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0 \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Equivalencia entre ambas. En (9) se exige que $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ sea ortogonal a los vectores (A_1, B_1, C_1) y (A_2, B_2, C_2) lo que equivale a ser múltiplo de su producto vectorial. Por tanto (9) equivale a (7) tomando $(u, v, w) = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$.

Recíprocamente, para pasar de las ecuaciones paramétricas (7) a las ecuaciones implícitas (9) basta escribir

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}$$

entendiendo que, cuando algún denominador se anula, debe anularse también el correspondiente numerador. Con el mismo convenio, la forma implícita del sistema (8) es:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Gradiente, divergencia y rotacional

2.1. Gradiente de un campo escalar

Campos escalares. Un campo escalar en \mathbb{R}^n es una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, donde Ω es un subconjunto de \mathbb{R}^n . Usualmente Ω será un conjunto abierto. Para $n = 2$ tenemos un *campo escalar en el plano*, que tendrá la forma $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Para $n = 3$ tendremos un *campo escalar en el espacio*, dado por una expresión $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$.

En Física, un campo escalar $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ describe una magnitud con valores escalares, de forma que Ω es una región del plano o del espacio y, para cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$, $f(\mathbf{x})$ es el valor en el punto \mathbf{x} de dicha magnitud física. Piénsese, por ejemplo, en un campo de temperaturas.

Definición de gradiente. Sea f un campo escalar definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega$. Supongamos que f es diferenciable en el punto \mathbf{a} , con lo que existen las n derivadas parciales de f en \mathbf{a} :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t \mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{t} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es la base standard de \mathbb{R}^n . Entonces, el **gradiente** de f en el punto \mathbf{a} es, por definición, el vector $\nabla f(\mathbf{a}) = \nabla f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ dado por

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, a_2, \dots, a_n) \mathbf{e}_k$$

Si el campo f es diferenciable en todos los puntos de Ω tendremos una función $\nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ hace corresponder el vector gradiente en dicho punto, $\nabla f(\mathbf{x})$. Es natural entonces escribir:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \mathbf{e}_k,$$

una igualdad entre funciones, válida en todo punto de Ω .

Gradiente en el plano. Para un campo escalar plano $(x, y) \mapsto f(x, y)$, que sea diferenciable en un punto $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$, tendremos

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \mathbf{j}$$

Cuando f sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ podremos escribir

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \quad (\text{en } \Omega)$$

Gradiente en el espacio. Análogamente, si $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ es un campo escalar en el espacio, diferenciable en un punto $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$, tendremos

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{a}) &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \mathbf{k} \end{aligned}$$

y cuando f sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ podremos escribir

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{en } \Omega)$$

Derivadas direccionales. Consideremos de nuevo un campo escalar f definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in \Omega$. Fijado un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{u}\| = 1$, sabemos que la derivada direccional de f en la dirección \mathbf{u} viene dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) u_k = \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{u} \rangle$$

y mide la rapidez de variación de f al desplazarnos desde el punto \mathbf{a} en la dirección del vector \mathbf{u} . La desigualdad de Cauchy-Schwartz nos da

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{u} \rangle \leq |\langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{u} \rangle| \leq \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{a})\|$$

Si $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$, podemos conseguir que las desigualdades anteriores sean igualdades tomando $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$ y tenemos una interpretación física del gradiente de un campo escalar: $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ es la máxima rapidez de variación del campo que podemos conseguir al desplazarnos desde el punto \mathbf{a} ; esta máxima variación se produce en la dirección del vector gradiente, más concretamente, el máximo aumento se consigue en el sentido del vector gradiente y la máxima disminución en sentido opuesto.

2.2. Campos vectoriales

Campos vectoriales. Un campo vectorial en \mathbb{R}^n es una función $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde Ω es un subconjunto de \mathbb{R}^n que usualmente será abierto. Por tanto, un campo vectorial tiene n coordenadas, que son campos escalares; concretamente, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ deberá tener la forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^n F_k(\mathbf{x}) \mathbf{e}_k,$$

más explícitamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= \sum_{k=1}^n F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \mathbf{e}_k, \end{aligned}$$

o abreviadamente: $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) = \sum_{k=1}^n F_k \mathbf{e}_k$ (en Ω).

Es claro que, para $k = 1, 2, \dots, n$, la función $F_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ así definida es un campo escalar en \mathbb{R}^n . Veamos la notación que suele usarse en los dos casos particulares que nos interesan.

- Un campo vectorial en el plano vendrá dado por una función $(x, y) \mapsto \mathbf{F}(x, y)$ definida en un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y con valores en \mathbb{R}^2 . Sus componentes suelen denotarse por P y Q , con lo que, para $(x, y) \in \Omega$, tendremos:

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$$

o, abreviadamente: $\mathbf{F} = (P, Q) = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$ (en Ω).

Es costumbre representar gráficamente un campo vectorial plano $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ haciendo que, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ tenga su origen en el punto \mathbf{x} , obteniéndose una imagen que sugiere claramente un “campo” de vectores.

- Las componentes de un campo vectorial $(x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(x, y, z)$, definido en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y con valores en \mathbb{R}^3 suelen denotarse por P , Q y R , de forma que, para $(x, y, z) \in \Omega$, se tendrá:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

o, abreviadamente: $\mathbf{F} = (P, Q, R) = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$. (en Ω)

Los campos vectoriales aparecen con frecuencia en Física, para representar magnitudes vectoriales: para cada punto \mathbf{x} de una región Ω en el plano o en el espacio, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es el valor en ese punto de la magnitud vectorial descrita por el campo. Piénsese por ejemplo en el campo de velocidades de un fluido en movimiento o en campos de fuerzas, como un campo gravitatorio o electromagnético.

2.3. Divergencia de un campo vectorial

Sea \mathbf{F} un campo vectorial definido en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y consideremos sus coordenadas $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$. Supongamos que \mathbf{F} es diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in \Omega$, lo que sabemos equivale a que todos los campos escalares F_k , con $k = 1, 2, \dots, n$, sean diferenciables en el punto \mathbf{a} . De hecho cada vector gradiente $\nabla F_k(\mathbf{a})$ es la k -ésima fila de la matriz jacobiana de \mathbf{F} en \mathbf{a} . Pues bien, la traza de dicha matriz es, por definición, la **divergencia** del campo \mathbf{F} en el punto \mathbf{a} , y se denota por $\text{div} \mathbf{F}(\mathbf{a})$. Así pues, se tendrá:

$$\text{div} \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(\mathbf{a}).$$

Cuando el campo vectorial \mathbf{F} es diferenciable en todo punto de Ω tenemos una función $\text{div} \mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que en cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ toma el valor $\text{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})$ de la divergencia en dicho punto. Tenemos entonces la siguiente igualdad entre funciones, válida en todo punto de Ω :

$$\text{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$$

- Para un campo vectorial plano $(x, y) \mapsto \mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, que sea diferenciable en un punto (x_0, y_0) , tendremos

$$\text{div} \mathbf{F}(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Cuando \mathbf{F} sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ podremos escribir

$$\text{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (\text{en } \Omega)$$

- Análogamente, si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo vectorial en el espacio, diferenciable en un punto (x_0, y_0, z_0) , tendremos

$$\text{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(x_0, y_0, z_0),$$

y cuando \mathbf{F} sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ podremos escribir

$$\text{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (\text{en } \Omega)$$

Vector simbólico “nabla”. Para operar con las nociones que estamos estudiando es útil introducir el simbolismo

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k$$

y manejar ∇ como si se tratase de un vector de \mathbb{R}^n .

Por ejemplo, si f es un campo escalar definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in \Omega$, al multiplicar simbólicamente el “vector” ∇ por el escalar $f(\mathbf{a})$ se obtiene la expresión correcta del vector gradiente:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \mathbf{e}_k$$

Cuando f es diferenciable en todo punto de Ω podemos hacer el mismo cálculo simbólico con el “escalar variable” f , que multiplicado por ∇ nos da

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \mathbf{e}_k,$$

Si ahora $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ es un campo vectorial definido en el abierto Ω y diferenciable en el punto $\mathbf{a} \in \Omega$, cuando calculamos simbólicamente el producto escalar del “vector” ∇ por el vector $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = (F_1(\mathbf{a}), F_2(\mathbf{a}), \dots, F_n(\mathbf{a}))$ obtenemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{a}).$$

Esto explica que frecuentemente se denote por $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{a})$ a la divergencia del campo \mathbf{F} en el punto \mathbf{a} . Cuando \mathbf{F} es diferenciable en Ω , tenemos igualmente

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \text{div } \mathbf{F} \quad (\text{en } \Omega)$$

Con las debidas precauciones, este cálculo simbólico con el “vector” ∇ resulta útil. Destacamos como siempre los dos casos particulares que nos interesan:

- En el caso $n = 2$ tenemos $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$
- Análogamente, para $n = 3$ será $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$

2.4. Rotacional de un campo vectorial

Rotacional en el espacio. Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in \Omega$. Del mismo modo que la divergencia $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{a})$ se obtiene como el producto escalar simbólico $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{a})$, podemos pensar en el producto vectorial, también simbólico, $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{a})$. El vector que así se obtiene es, por definición, el rotacional del campo \mathbf{F} en el punto \mathbf{a} y se denota también por $\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a})$. Así pues:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{a}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(\mathbf{a}) & Q(\mathbf{a}) & R(\mathbf{a}) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\mathbf{a}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\mathbf{a}) \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\mathbf{a}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\mathbf{a}) \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{a}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{a}) \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Cuando \mathbf{F} sea diferenciable en todo el abierto Ω podremos escribir:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (\text{en } \Omega).\end{aligned}$$

Rotacional escalar en el plano. La noción de rotacional recién introducida sólo tiene sentido para campos vectoriales en el espacio. Sin embargo, a un campo vectorial en el plano puede asociarse de forma natural un campo vectorial en el espacio, como vamos a ver.

Sea $\mathbf{F} = (P, Q)$ un campo vectorial definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Consideramos el conjunto $\tilde{\Omega} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega\}$, que es claramente un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 , y para $(x, y, z) \in \tilde{\Omega}$, definimos

$$\tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0),$$

obteniendo un campo vectorial $\tilde{\mathbf{F}} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$. La relación entre las componentes de \mathbf{F} y $\tilde{\mathbf{F}}$ es bastante clara, si ponemos $\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})$, tenemos

$$\tilde{P}(x, y, z) = P(x, y); \quad \tilde{Q}(x, y, z) = Q(x, y); \quad \tilde{R}(x, y, z) = 0 \quad ((x, y, z) \in \tilde{\Omega})$$

Si \mathbf{F} es diferenciable en un punto (x_0, y_0) deducimos que $\tilde{\mathbf{F}}$ es diferenciable en cualquier punto de la forma $(x_0, y_0, z) \in \tilde{\Omega}$ y calculamos fácilmente el rotacional en cualquiera de esos puntos:

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{F}}(x_0, y_0, z) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \mathbf{k}.$$

Hemos motivado así la siguiente definición:

Sea $\mathbf{F} = (P, Q)$ un campo vectorial definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y diferenciable en un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. El **rotacional escalar** de \mathbf{F} en el punto (x_0, y_0) se define por:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Si \mathbf{F} es diferenciable en todo punto del abierto Ω podemos pues definir $\operatorname{rot} \mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la igualdad:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

2.5. Algunas observaciones adicionales

En esta lección hemos definido cuatro *operadores diferenciales* que transforman unos campos en otros. Más concretamente:

- Si f es un campo escalar diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces su gradiente $\nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial definido en Ω . Suele decirse que ∇f es un *campo de gradientes*.

- Dado un campo vectorial \mathbf{F} que sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, su divergencia $\nabla \cdot \mathbf{F}$ es un campo escalar definido en Ω .
- Cada campo vectorial \mathbf{F} que sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ da lugar a $\text{rot } \mathbf{F}$, otro campo vectorial definido en Ω .
- Finalmente, un campo vectorial \mathbf{F} que sea diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ define un campo escalar $\text{rot } \mathbf{F}$.

Veamos ahora lo que ocurre al iterar estos procesos, aunque no agotaremos todas las posibilidades. Lógicamente los campos a considerar deberán tener propiedades de diferenciable más restrictivas que las usadas hasta ahora.

Rotacional de un gradiente. Vamos a comprobar sin dificultad el siguiente resultado:

Si f es un campo escalar dos veces diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces se verifica que $\text{rot } (\nabla f) = 0$ en Ω .

En efecto, de las definiciones de gradiente y rotacional se deduce que:

$$\text{rot } (\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k},$$

que se anula idénticamente en todo el abierto Ω gracias al Lema de Schwarz, que asegura la igualdad de las derivadas parciales segundas cruzadas de una función dos veces diferenciable. De forma completamente análoga podemos obtener el mismo resultado en \mathbb{R}^2 :

Si f es un campo escalar dos veces diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces se verifica que $\text{rot } (\nabla f) = 0$ en Ω .

Divergencia de un rotacional. El siguiente resultado se comprueba también sin dificultad:

Si \mathbf{F} es un campo vectorial dos veces diferenciable en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces se verifica que $\text{div } (\text{rot } \mathbf{F}) = 0$ en Ω .

El cálculo con el vector simbólico ∇ ayuda a recordar los dos resultados anteriores:

$$\nabla \times (\nabla f) \equiv 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \equiv 0$$

En el primer caso podemos pensar que ∇f es un “múltiplo escalar del vector ∇ ” y recordar que, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene $\mathbf{x} \times (\alpha \mathbf{x}) = 0$. En el segundo caso recordamos que el producto vectorial de dos vectores de \mathbb{R}^3 es ortogonal a dichos vectores. Sin embargo, el simbolismo no se puede llevar demasiado lejos: cierto que, como se ha dicho, podemos entender que $\nabla \times \mathbf{F}$ es “ortogonal a ∇ ”, pero es fácil dar un ejemplo de un campo vectorial \mathbf{F} , diferenciable en \mathbb{R}^3 , tal que $\nabla \times \mathbf{F}$ no sea ortogonal a \mathbf{F} , o incluso que verifique $\langle \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) | \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rangle \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Curvas en el plano o en el espacio

3.1. Caminos y curvas en \mathbb{R}^n

Definiciones. Un **camino** en \mathbb{R}^n es una función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Decimos también que el conjunto $\Gamma = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ es una curva en forma paramétrica, o simplemente una **curva** en \mathbb{R}^n y que el camino γ *recorre o parametriza* la curva Γ . Los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son, respectivamente, el **origen** y el **extremo** del camino γ . Cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que γ es un camino **cerrado**.

Nos interesan solamente los casos $n = 2$ (caminos en el plano, curvas planas) y $n = 3$ (caminos en el espacio, curvas alabeadas). Observamos que la curva Γ tiene una interpretación geométrica directa, como subconjunto del plano o del espacio, mientras el camino γ es una función que nos proporciona una forma de parametrizar la curva Γ , puesto que cada punto de la curva aparece en la forma $\gamma(t)$ para algún valor del *parámetro* t .

Para tener una interpretación física, basta pensar que $[a, b]$ es un intervalo de tiempo y que, para cada $t \in [a, b]$, $\gamma(t)$ es la posición de un móvil en el instante t , con lo que el camino γ nos daría la ecuación del movimiento mientras que la curva Γ sería la trayectoria recorrida por el móvil. Es claro que caminos muy distintos pueden recorrer una misma curva; equivalentemente, sobre una misma trayectoria se pueden desarrollar movimientos muy diferentes.

Ecuaciones paramétricas. Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un camino en el espacio, podremos escribir:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (a \leq t \leq b)$$

donde x, y, z son funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} . Decimos entonces que el camino γ tiene *ecuaciones paramétricas*:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b).$$

Por ejemplo, fijados dos puntos (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) de \mathbb{R}^3 , las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

definen un camino que recorre el segmento que une dichos puntos, siendo (x_0, y_0, z_0) el origen del camino y (x_1, y_1, z_1) su extremo.

Naturalmente, un camino en el plano, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tendrá la forma

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

y diremos que sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b).$$

Por ejemplo, para $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $\rho_0 > 0$, las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho_0 \cos \theta \\ y = y_0 + \rho_0 \sin \theta \end{cases} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

definen un camino cerrado que recorre la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio ρ_0 .

Camino opuesto. Dado un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ el camino **opuesto** de γ es, por definición, el camino $\gamma_{op}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por

$$\gamma_{op}(t) = \gamma(a + b - t) \quad (a \leq t \leq b).$$

Observamos que γ_{op} recorre la misma curva que γ pero, intuitivamente, la recorre en sentido contrario; en particular $\gamma_{op}(a) = \gamma(b)$ y $\gamma_{op}(b) = \gamma(a)$.

Suma de caminos. Consideremos dos caminos $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que sean *consecutivos*, es decir, tales que el extremo de γ coincida con el origen de σ : $\gamma(b) = \sigma(c)$. Podemos entonces definir un nuevo camino, que llamaremos **suma** de γ con σ y denotaremos por $\gamma \oplus \sigma$. Intuitivamente el camino suma consiste en efectuar el movimiento indicado por γ y a continuación el indicado por σ . Concretamente definimos $\gamma \oplus \sigma: [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por:

$$(\gamma \oplus \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } a \leq t \leq b \\ \sigma(t - b + c) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c \end{cases}$$

Nótese que la condición $\gamma(b) = \sigma(c)$ es la que asegura la continuidad del camino suma en el punto b . Si los caminos γ y σ recorren sendas curvas Γ y Σ , es claro que la curva recorrida por $\gamma \oplus \sigma$ es $\Gamma \cup \Sigma$. El proceso de suma se puede iterar, para obtener la suma de un número finito de caminos, $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_N$, siempre que cada uno de ellos sea consecutivo del anterior. Se verifica una propiedad asociativa en esta operación de suma, que hace que tales sumas finitas se puedan definir sin ambigüedad. Por ejemplo, una suma finita de segmentos da como resultado un camino poligonal.

3.2. Caminos regulares, vector tangente

Regularidad. Se dice que un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **regular** cuando es una función de clase C^1 en el intervalo $[a, b]$. Por ejemplo, los dos caminos que han aparecido en el apartado anterior, que recorrían un segmento en el espacio y una circunferencia en el plano, son caminos regulares. Es fácil observar que la suma de dos caminos regulares puede no ser regular, piénsese por ejemplo lo que ocurre al sumar dos segmentos consecutivos que no estén alineados. Por ello conviene considerar un tipo de regularidad más general.

Decimos que un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **regular a trozos** cuando existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ del intervalo $[a, b]$ tal que, para cada $k = 1, 2, \dots, N$, la restricción de γ al subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es una función de clase C^1 . Si llamamos γ_k a dicha restricción, es claro que $\gamma_k: [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino regular, así como que $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_N$, luego γ se obtiene como suma finita de caminos regulares. Recíprocamente, es fácil comprobar que toda suma de caminos regulares es un camino regular a trozos. En resumen, un camino es regular a trozos si, y sólo si, se obtiene como suma de caminos regulares. Claramente, la suma de dos caminos regulares a trozos sigue siendo un camino regular a trozos. Observamos también que el camino opuesto de un camino regular, o regular a trozos, es del mismo tipo.

Vector velocidad y vector tangente. Si un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es derivable en un punto $t_0 \in [a, b]$, el vector $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de **vector velocidad** del camino en el instante t_0 y su norma, $\|\gamma'(t_0)\|$, es la **celeridad** del camino en el instante t_0 . La nomenclatura procede claramente de la interpretación física.

Cuando $\gamma'(t_0) \neq 0$ decimos también que $\gamma'(t_0)$ es el **vector tangente** al camino γ en el instante t_0 y la recta que pasa por el punto $\gamma(t_0)$ con vector de dirección $\gamma'(t_0)$ recibe el nombre de **recta tangente** al camino γ en el instante t_0 , lo cual tiene clara interpretación geométrica. De hecho, considerando la curva Γ recorrida por el camino γ , suele hablarse de la recta tangente a la curva Γ en el punto $\gamma(t_0)$ aunque con ello se comete un claro abuso de lenguaje.

Cuando un camino regular $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene recta tangente en cada punto, es decir, verifica que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$, se dice que γ es un **camino suave**. Si Γ es la curva recorrida por un camino suave γ , decimos también que Γ es una **curva suave**.

Ecuación de la recta tangente. Si el camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ viene dado por:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (a \leq t \leq b),$$

sabemos que γ es derivable en un punto $t_0 \in [a, b]$ si, y sólo si, lo son las funciones x, y, z , en cuyo caso

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Cuando sea además $\gamma'(t_0) \neq 0$, poniendo $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, las ecuaciones paramétricas de la recta tangente toman la forma

$$\begin{cases} x = x_0 + (t - t_0)x'(t_0) \\ y = y_0 + (t - t_0)y'(t_0) \\ z = z_0 + (t - t_0)z'(t_0) \end{cases}$$

y las ecuaciones implícitas serán

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

con los consabidos convenios para el caso en que se anule algún denominador.

Análogamente, para un camino en el plano tendremos:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b); \quad \gamma(t_0) = (x_0, y_0); \quad \gamma'(t_0) = ((x'(t_0), y'(t_0)))$$

y las ecuaciones de la recta tangente serán

$$\begin{cases} x = x_0 + (t - t_0)x'(t_0) \\ y = y_0 + (t - t_0)y'(t_0) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & x'(t_0) \\ y - y_0 & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

3.3. Longitud de un camino

Definición. La longitud de un camino regular $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ viene dada por:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (*)$$

La existencia de la integral está asegurada, por ser el integrando una función continua en el intervalo $[a, b]$. Suponemos bien conocido el hecho de que esta integral realmente responde a la idea de longitud de un camino.

La misma expresión puede usarse para un camino regular a trozos. En efecto, tomemos una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ del intervalo $[a, b]$ de forma que la restricción de γ al subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ sea una función de clase C^1 para $k = 1, 2, \dots, N$. Entonces γ es derivable en $[a, b]$ salvo, a lo sumo, en el conjunto $S = \{t_1, t_2, \dots, t_{N-1}\}$ y en los puntos de S tiene derivadas por la izquierda y por la derecha que pueden no coincidir, con lo que deducimos que la función $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ es continua y acotada en $[a, b] \setminus S$. Por tanto, dando valores cualesquiera a dicha función en los puntos de S , obtenemos una función integrable en el intervalo $[a, b]$ cuya integral no dependerá de dichos valores. Así pues, la integral que aparece en $(*)$ tiene perfecto sentido y podemos usarla como definición de la longitud de un camino regular a trozos. Observamos también que, llamando γ_k a la restricción de γ a cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$, tenemos:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{k=1}^N L(\gamma_k).$$

De manera más general, si γ y σ son caminos regulares a trozos consecutivos, se tiene que $L(\gamma \oplus \sigma) = L(\gamma) + L(\sigma)$. También se comprueba fácilmente que $L(\gamma \circ \rho) = L(\gamma)$.

Si un camino regular a trozos $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene ecuaciones paramétricas

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

su longitud vendrá dada por

$$L(\gamma) = \int_a^b [x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2]^{1/2} dt,$$

y para un camino regular a trozos en el plano, con análoga notación, tendremos simplemente

$$L(\gamma) = \int_a^b [x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2} dt,$$

Función longitud de arco. Recordemos la interpretación física de un camino regular a trozos γ como la ecuación de un movimiento durante un intervalo de tiempo $[a, b]$. El espacio recorrido por el móvil desde el instante inicial a hasta un instante t vendrá entonces dado por

$$l(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds.$$

La función $l : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ así definida recibe el nombre de **función longitud de arco** para el camino γ . Cuando γ es regular, el Teorema Fundamental del Cálculo nos asegura que l es una función de clase C^1 en $[a, b]$ verificando que

$$l'(t) = \|\gamma'(t)\| \quad (a \leq t \leq b). \quad (**)$$

Esta igualdad tiene nuevamente una clara interpretación: la celeridad del movimiento en cada instante es la derivada del espacio recorrido con respecto al tiempo.

Por otra parte, la igualdad $(**)$ también justifica el simbolismo

$$dl = \|\gamma'(t)\| dt$$

que más adelante será útil en el estudio de las integrales de línea.

3.4. Curvas en el plano

Vamos a repasar las tres formas en que puede describirse una curva en el plano.

(a) Forma explícita. Llamamos **curva en forma explícita** a la gráfica de una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, el conjunto

$$G = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\} \quad (\text{a.1})$$

Observemos que la función f está determinada en forma única por el conjunto G , lo cual es la principal ventaja de esta forma explícita.

Cuando f es derivable en un punto $x_0 \in [a, b]$ sabemos que $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a G en el punto $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$, luego la ecuaciones implícita y paramétricas de dicha recta serán:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = x_0 + s \\ y = y_0 + s f'(x_0) \end{cases} \quad (\text{a.2})$$

Resaltamos que, si la función f es derivable en todo el intervalo $[a, b]$, tenemos bien definida la recta tangente en cada punto de la curva G .

La noción de curva en forma explícita es demasiado restrictiva, como se pone de manifiesto al observar que el conjunto G definido en (a.1) no puede contener dos puntos con la misma abscisa. Eso explica la utilidad de la noción más general de curva en forma paramétrica.

Para ver que efectivamente el conjunto G definido por (a.1) es una curva en forma paramétrica, basta considerar el camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\gamma(t) = (t, f(t))$ para $a \leq t \leq b$. Es obvio que $G = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$, luego γ recorre la curva G .

Veamos también que al considerar la recta tangente al camino γ en un instante $x_0 \in [a, b]$, escribiendo como antes $y_0 = f(x_0)$, llegamos a las ecuaciones (a.2). En efecto, si f es derivable en x_0 , también lo es γ , con $\gamma'(x_0) = (1, f'(x_0))$. Observamos que la condición $\gamma'(x_0) \neq 0$ se cumple automáticamente, lo que explica que tengamos recta tangente con sólo que f sea derivable. Las ecuaciones paramétricas e implícita de la recta tangente al camino γ en el instante x_0 nos aparecen pues en la forma

$$\begin{cases} x = x_0 + (t - x_0) \\ y = y_0 + (t - x_0)f'(x_0) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & 1 \\ y - y_0 & f'(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

que son precisamente las ecuaciones (a.2).

Notemos finalmente que si la función f es de clase C^1 en el intervalo $[a, b]$, entonces γ es un camino suave y Γ es una curva suave.

(b) Forma paramétrica. Repasando lo ya dicho, una **curva en forma paramétrica** es la imagen de una función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, es decir, el conjunto

$$\Gamma = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\} = \{(x(t), y(t)) : a \leq t \leq b\} \quad (\text{b.1})$$

Cuando γ sea derivable en un punto $t_0 \in [a, b]$ con $\gamma'(t_0) \neq 0$, las ecuaciones paramétricas e implícita de la recta tangente a la curva Γ en el punto $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ son

$$\begin{cases} x = x_0 + (t - t_0)x'(t_0) \\ y = y_0 + (t - t_0)y'(t_0) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & x'(t_0) \\ y - y_0 & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{b.2})$$

con el abuso de lenguaje que ya habíamos comentado. Tendremos ocasión de usar también la **recta normal** a la curva Γ en un punto $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$, que es la recta que pasa por dicho punto y es ortogonal a la recta tangente. La ecuación implícita de dicha recta es fácil de obtener:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) = 0 \quad (\text{b.3})$$

(c) Forma implícita Se llama así a la descripción de una curva como lugar geométrico de los puntos del plano que verifican una ecuación o, lo que es lo mismo, como conjunto de nivel de una función de dos variables. Por tanto, dada una función $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ donde Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 , consideramos el conjunto:

$$C = \{(x, y) \in \Omega : g(x, y) = 0\}. \quad (\text{c.1})$$

En general, los conjuntos de la forma $\{(x, y) \in \Omega : g(x, y) = \alpha\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ son los conjuntos de nivel de la función g . Obviamente no se pierde generalidad tomando $\alpha = 0$.

*Supondremos que g es de clase C^1 en Ω , que g se anula en algún punto de Ω ($C \neq \emptyset$) y que el gradiente de g no se anula en C , es decir, $\nabla g(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in C$. Con estas condiciones podemos decir que el conjunto C definido en (c.1) es una **curva en forma implícita**.*

La nomenclatura se justifica porque al menos “localmente” el conjunto C se puede hacer coincidir con una curva en forma paramétrica. De hecho, el Teorema de la Función Implícita nos asegura que cada punto de C tiene un entorno cuya intersección con C es la curva recorrida por un camino regular cuya derivada no se anula en ningún punto, es decir, una curva suave. En la situación más favorable, el propio conjunto C puede ser una curva en forma paramétrica, pero en general esto no tiene por qué ocurrir: por ejemplo, C puede no estar acotado.

Calculemos ahora, para curvas en forma implícita, la recta tangente en un punto. En efecto, sea C la curva definida en forma implícita por la igualdad (c.1), sea $(x_0, y_0) \in C$ y consideremos un camino suave $\gamma: [a, b] \rightarrow C$ que recorra la curva $U \cap C$ donde U es un entorno de (x_0, y_0) . Pongamos $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ con $t_0 \in [a, b]$ y veamos qué sabemos de $\gamma'(t_0)$. Si $x = x(t)$ e $y = y(t)$, con $a \leq t \leq b$, son las ecuaciones paramétricas de γ , habrá de verificarse que $g(x(t), y(t)) = 0$ para $a \leq t \leq b$. La regla de la cadena nos dice entonces que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) x'(t_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) y'(t_0) = 0,$$

o equivalentemente $\langle \nabla g(x_0, y_0) | \gamma'(t_0) \rangle = 0$. Deducimos que el vector $\nabla g(x_0, y_0)$, que por hipótesis no se anula, es ortogonal al vector $\gamma'(t_0)$, que tampoco se anula. Por tanto, la ecuación implícita de la recta tangente al camino γ en el instante t_0 es:

$$\langle \nabla g(x_0, y_0) | (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0. \quad (\text{c.2})$$

Observamos que esta ecuación no depende del camino γ que hemos empleado, luego tiene perfecto sentido decir que la recta de ecuación (c.2) es la **recta tangente** a la curva C en el punto (x_0, y_0) . Por otra parte, la **recta normal** a C en (x_0, y_0) será la recta cuyas ecuaciones paramétricas e implícita vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + (t - t_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ y = y_0 + (t - t_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ y - y_0 & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{c.3})$$

Resaltamos finalmente la interpretación geométrica del gradiente que se ha obtenido en el razonamiento anterior. Sea g un campo escalar de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces existe un entorno abierto Ω_0 del punto (x_0, y_0) en el que ∇g no se anula y tenemos todas las condiciones para afirmar que el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \Omega_0 : g(x, y) = g(x_0, y_0)\}$$

es una curva en forma implícita, la curva de nivel del campo g que pasa por el punto (x_0, y_0) . Pues bien, según hemos visto, el vector gradiente $\nabla g(x_0, y_0)$ es el vector normal a dicha curva. Dada la arbitrariedad del punto (x_0, y_0) , tenemos que el vector gradiente, en cada punto donde no se anule, es ortogonal a la curva de nivel que pasa por dicho punto.

Integrales de línea

4.1. Integral de línea de un campo escalar

Definición. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un camino regular a trozos. La *integral de línea de f a lo largo de γ* es, por definición:

$$\int_{\gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Existencia de la integral. Está asegurada, ya que el integrando es una función acotada en $[a, b]$ y continua salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos para los que ni siquiera concretamos el valor que toma en ellos dicha función. De hecho, si hacemos una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$ de forma que, para $k = 1, 2, \dots, n$, la restricción de γ al subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ sea de clase C^1 , podemos escribir

$$\int_{\gamma} f dl = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt,$$

obteniendo una suma finita de integrales de funciones continuas. Resaltamos que al campo escalar f sólo se le exige estar definido y ser continuo sobre la curva Γ recorrida por el camino de integración. Habitualmente f tendrá propiedades de regularidad mucho mejores, siendo por ejemplo diferenciable en un abierto Ω que contenga a la curva Γ .

Casos particulares. En el caso $n = 3$, tendremos

$$\int_{\gamma} f dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) [x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2]^{1/2} dt$$

donde

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

son las ecuaciones paramétricas del camino γ . En el caso $n = 2$ tendremos solamente:

$$\int_{\gamma} f dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) [x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2} dt$$

Ejemplo. Consideremos el campo escalar f definido en \mathbb{R}^3 por

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

y el camino helicoidal γ dado por:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad (0 \leq t \leq 4\pi).$$

En este caso tenemos claramente

$$f(\gamma(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2 \quad (0 \leq t \leq 4\pi)$$

y también

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{2} \quad (0 \leq t \leq 4\pi),$$

con lo cual

$$\int_{\gamma} f \, dl = \int_0^{4\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} \, dt = 4\pi\sqrt{2} \left(1 + \frac{16\pi^2}{3} \right).$$

Interpretación. Cuando el campo escalar que se integra es constantemente igual a 1 sobre la curva recorrida, la integral de línea coincide obviamente con la longitud del camino. A partir de aquí podemos intuir, muy informalmente, otras situaciones más generales.

En el caso $n = 2$, si el campo escalar f no toma valores negativos, podemos interpretar la integral de línea como el área de un muro construido tomando como base la curva Γ recorrida por el camino γ y con altura variable, de forma que, para cada $t \in [a, b]$, la altura del muro en el punto $\gamma(t)$ es precisamente $f(\gamma(t))$. Esta idea generaliza obviamente la interpretación de la integral simple de una función positiva como el área comprendida bajo la gráfica de la función.

Para $n = 2$ o $n = 3$, también podemos interpretar que sobre la curva Γ recorrida por γ tenemos una distribución lineal de masa (pensemos por ejemplo en un cable con la forma de dicha curva), de manera que $f(\gamma(t))$ es la densidad lineal en el punto $\gamma(t)$. La integral de línea nos da entonces la masa total.

Con respecto a ambas interpretaciones hay que hacer una salvedad: sólo son correctas cuando, por decirlo de manera intuitiva, el camino γ recorre la curva Γ “una sola vez”. La formulación rigurosa de esta idea puede hacerse mediante la noción de camino *simple*, que estudiaremos más adelante.

4.2. Integral de línea de un campo vectorial

Definición. Sea ahora $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un camino regular a trozos. La *integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de γ* es, por definición:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt$$

La existencia de esta integral está asegurada por las mismas razones comentadas en el caso de un campo escalar.

Ejemplo. Consideremos el campo vectorial definido en \mathbb{R}^3 por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

y el camino helicoidal

$$x = \cos t; \quad y = \sin t; \quad z = t \quad (0 \leq t \leq 4\pi).$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle &= \langle \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} | -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k} \rangle \\ &= -\cos t \sin t + \sin t \cos t + t = t \quad (0 \leq t \leq 4\pi), \end{aligned}$$

con lo que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{4\pi} t \, dt = 8\pi^2.$$

Notación clásica. Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial en el espacio, continuo sobre la curva recorrida por un camino regular a trozos γ de ecuaciones paramétricas

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

Se tiene entonces, por definición:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] \, dt,$$

lo que explica que frecuentemente se use la siguiente notación:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz = \int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz.$$

Análogamente, para un campo vectorial en el plano $\mathbf{F} = (P, Q)$, que sea continuo sobre la curva recorrida por un camino regular a trozos γ con ecuaciones paramétricas

$$x = x(t); \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy = \int_{\gamma} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] \, dt. \end{aligned}$$

Ejemplo. Consideremos la integral de línea

$$\int_{\gamma} (x^2 \, dx + xy \, dy + dz)$$

donde el camino γ tiene ecuaciones

$$x = t; \quad y = t^2; \quad z = 1 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

El campo vectorial que integramos viene dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

y usando que, para cada $t \in [0, 1]$, se tiene $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2t$ y $z'(t) = 0$, deducimos:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} (x^2 dx + xy dy + dz) = \int_0^1 (t^2 + 2t^4) dt = \frac{11}{15}.$$

Interpretación. Supongamos que el campo vectorial \mathbf{F} es un campo de fuerzas en el plano o en el espacio, pongamos por caso un campo gravitatorio o un campo eléctrico. Ello significa que una unidad de masa o de carga eléctrica positiva situada en un punto \mathbf{x} está sometida a una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Si una partícula con esa carga o masa unidad recorre un camino (regular a trozos) γ , la integral $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ representa el trabajo realizado por el campo en ese recorrido.

Relación entre las integrales de línea. Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino suave, es decir, es regular con $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$, podemos definir

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad (a \leq t \leq b),$$

que es un vector unitario tangente a la curva Γ recorrida por el camino γ en cada punto. Si ahora \mathbf{F} es un campo vectorial continuo sobre dicha curva tendremos:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \mathbf{T}(t) \rangle \|\gamma'(t)\| dt$$

expresión que recuerda la integral de línea de un campo escalar. Para definir correctamente dicho campo escalar necesitamos hacer hipótesis adicionales sobre el camino γ que no vamos a comentar, aunque no son difíciles de adivinar. Así pues, en ciertas condiciones existirá un campo escalar continuo $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

$$f(\gamma(t)) = \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \mathbf{T}(t) \rangle \quad (a \leq t \leq b) \quad \text{y, por tanto,} \quad \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} f dl.$$

En resumen, bajo ciertas condiciones sobre el camino, toda integral de línea de un campo vectorial coincide con la integral de línea de un campo escalar, y es lógico analizar la relación entre ambos campos. Observamos que, para cada $t \in [a, b]$, el vector $f(\gamma(t)) \mathbf{T}(t)$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{F}(\gamma(t))$ sobre el vector $\mathbf{T}(t)$, es decir, la componente de $\mathbf{F}(\gamma(t))$ en la dirección tangencial a la curva Γ en el punto $\gamma(t)$. Por tanto, podemos ver el campo escalar f como la coordenada del campo vectorial \mathbf{F} en dicha dirección tangencial a la curva Γ en cada punto de la misma. En general, aunque el camino γ no cumpla las condiciones que justifiquen el razonamiento anterior, sigue siendo útil interpretar la integral de línea sobre γ de un campo vectorial \mathbf{F} como integral de línea del campo escalar que se obtiene al tomar la coordenada de \mathbf{F} en la dirección tangencial al camino γ en cada punto.

4.3. Propiedades de las integrales de línea

Linealidad. Las integrales dependen linealmente del campo que se integra. Más concretamente, se verifica que

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dl = \alpha \int_{\gamma} f dl + \beta \int_{\gamma} g dl$$

para cualquier camino regular a trozos γ en \mathbb{R}^n , cualesquiera campos escalares f y g que sean continuos sobre la curva recorrida por el camino γ y cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Análoga propiedad se tiene para campos vectoriales:

$$\int_{\gamma} (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{l} = \alpha \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \beta \int_{\gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l}$$

Continuidad. Las integrales de línea también dependen de manera continua del campo que se integra; intuitivamente, pequeñas perturbaciones del campo dan lugar a pequeñas variaciones en la integral. Ello es consecuencia de las desigualdades que vamos a presentar.

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino regular a trozos que recorre una curva Γ , sea f un campo escalar continuo sobre Γ y supongamos que f está acotado en Γ por una constante k , es decir,

$$k \geq \max\{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in \Gamma\} = \max\{|f(\gamma(t))| : a \leq t \leq b\}.$$

Entonces se tiene, claramente,

$$\left| \int_{\gamma} f dl \right| \leq kL(\gamma)$$

Análogo resultado se tiene para un campo vectorial \mathbf{F} que sea continuo sobre Γ . De hecho, podemos considerar el campo escalar $\|\mathbf{F}\|$, que también es continuo sobre Γ , y la desigualdad de Cauchy-Schwartz nos permite escribir:

$$\left| \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \right| \leq \int_{\gamma} \|\mathbf{F}\| dl.$$

Naturalmente ahora, de la estimación

$$k \geq \max\{\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| : \mathbf{x} \in \Gamma\} = \max\{\|\mathbf{F}(\gamma(t))\| : a \leq t \leq b\},$$

se deduce que

$$\left| \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \right| \leq kL(\gamma).$$

Aditividad. Las integrales de línea son aditivas con respecto al camino de integración, en el sentido de que al recorrer consecutivamente dos caminos, las integrales se suman.

Más concretamente, sean $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ caminos regulares a trozos consecutivos, esto es, verificando que $\gamma(b) = \sigma(c)$, y consideremos el camino suma $\gamma \oplus \sigma$. Si f y \mathbf{F} son, respectivamente, un campo escalar y un campo vectorial, ambos continuos sobre la unión de las curvas recorridas por γ y σ , se verifica que:

$$\int_{\gamma \oplus \sigma} f dl = \int_{\gamma} f dl + \int_{\sigma} f dl \quad \text{y} \quad \int_{\gamma \oplus \sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

Para el camino opuesto, el comportamiento de ambas integrales no es el mismo, la de un campo escalar no se altera al cambiar el sentido de recorrido, mientras que la de un campo vectorial cambia de signo. Más concretamente, si f es un campo escalar y \mathbf{F} un campo vectorial, ambos continuos sobre la curva recorrida por un camino regular a trozos γ , se tiene:

$$\int_{\gamma_{op}} f dl = \int_{\gamma} f dl \quad \text{pero} \quad \int_{\gamma_{op}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

Independencia de la parametrización. Las integrales de línea no se alteran al sustituir el camino de integración por otro equivalente en el sentido que vamos a explicar.

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino regular a trozos y sea $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ una función biyectiva, creciente y de clase C^1 . Consideremos el camino regular a trozos $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $\sigma = \gamma \circ \phi$, esto es, $\sigma(s) = \gamma(\phi(s))$ para $c \leq s \leq d$. Suele decirse que σ se ha obtenido de γ mediante un cambio de parámetro. Nótese que γ y σ recorren la misma curva, por lo que geoméricamente pueden considerarse equivalentes, aunque desde una interpretación física podrían describir movimientos diferentes.

Observemos por ejemplo, en el caso $n = 2$, que si las ecuaciones paramétricas de γ vienen dadas por

$$x = x(t); \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

las de σ serían:

$$x = x(\phi(s)); \quad y = y(\phi(s)) \quad (c \leq s \leq d),$$

lo que pone claramente de manifiesto el cambio de parámetro.

Pues bien, volviendo al caso general, si f es un campo escalar y \mathbf{F} un campo vectorial, ambos continuos sobre la curva recorrida por γ , se verifica que:

$$\int_{\sigma} f dl = \int_{\gamma} f dl \quad \text{y} \quad \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

4.4. Integral de línea de un gradiente

El siguiente resultado puede entenderse como una versión de la Regla de Barrow para integrales de línea, o como una versión “vectorial” de dicha regla.

Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ un camino regular a trozos. Entonces:

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particular, si el camino γ es cerrado, se tendrá:

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Por la importancia que tendrá más adelante este resultado vamos a detallar su demostración. Supongamos primeramente que el camino γ es regular y consideremos la función $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

definida por $h(t) = f(\gamma(t))$ para todo $t \in [a, b]$. La regla de la cadena nos permite asegurar que h es de clase C^1 en $[a, b]$ con

$$h'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle \quad (a \leq t \leq b).$$

Aplicando entonces la regla de Barrow, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{l} &= \int_a^b \langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b h'(t) dt = h(b) - h(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

En general, para un camino regular a trozos, usamos una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ del intervalo $[a, b]$ de forma que la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es un camino regular, que denotamos por γ_k , para $k = 1, 2, \dots, N$. Aplicando el resultado ya probado para caminos regulares tenemos claramente:

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_k} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^N [f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1}))] = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Caracterización de los campos conservativos

5.1. Motivación y enunciado del teorema

Recordemos el cálculo de la integral de línea de un gradiente, hecho en la lección anterior. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ es un camino regular a trozos en dicho abierto, entonces

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Observamos que la integral no depende del camino γ sino solamente de su origen $\gamma(a)$ y su extremo $\gamma(b)$. Sobre cualquier otro camino regular a trozos con el mismo origen y extremo, el valor de la integral sería el mismo. Por otra parte, si el camino es cerrado, $\gamma(b) = \gamma(a)$, la integral se anula. Tenemos así dos condiciones necesarias para que un campo vectorial continuo $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ pueda ser el campo de gradientes de un campo escalar de clase C^1 en Ω . Vamos a ver enseguida que cualquiera de estas dos condiciones caracteriza a los campos de gradientes. Empezamos concretando un poco mejor la propiedad que pretendemos caracterizar:

Sea $\mathbf{F} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un abierto $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$. Dado un abierto $\Omega \subseteq \Omega_0$, se dice que \mathbf{F} es **conservativo** en Ω cuando existe un campo escalar $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 en Ω , tal que $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.

Obviamente, que el campo \mathbf{F} sea o no conservativo en Ω sólo dependerá de los valores que \mathbf{F} toma en Ω y no de los que tome en $\Omega_0 \setminus \Omega$, luego no se pierde generalidad en la definición anterior suponiendo que $\Omega_0 = \Omega$. Hacemos la distinción entre ambos conjuntos para resaltar que el carácter conservativo de un campo depende esencialmente del conjunto abierto en el que se analiza dicho carácter. Es claro que si el campo \mathbf{F} es conservativo en Ω_0 también lo será en cualquier otro abierto $\Omega \subseteq \Omega_0$, pero veremos que el recíproco no es cierto.

Para tratar el problema que nos ocupa, caracterizar los campos conservativos, no se pierde generalidad trabajando con un tipo particular de conjuntos abiertos, que se definen como sigue: Decimos que un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **dominio** cuando cualesquiera dos puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ se pueden unir por un camino regular a trozos sin salirse de Ω , es decir, existe un camino regular a trozos $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ tal que $\gamma(a) = \mathbf{x}$, $\gamma(b) = \mathbf{y}$.

El propio \mathbb{R}^n , o una bola abierta en \mathbb{R}^n , son ejemplos de dominios. No es difícil comprobar que al suprimir de un dominio Ω un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, el conjunto resultante $\Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ sigue siendo un dominio. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ es un ejemplo de subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 que no es un dominio. Enunciamos ya el teorema que caracteriza los campos conservativos:

Teorema. Sea $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) \mathbf{F} es conservativo en Ω
- (b) La integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de cualquier camino regular a trozos cerrado en Ω es nula. Es decir, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ es un camino regular a trozos verificando que $\gamma(b) = \gamma(a)$, se tiene que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- (c) La integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de un camino regular a trozos en Ω sólo depende del origen y el extremo del camino. Es decir, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ y $\sigma : [c, d] \rightarrow \Omega$ son caminos regulares a trozos verificando que $\gamma(a) = \sigma(c)$ y $\gamma(b) = \sigma(d)$, se tiene que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

5.2. Demostración del Teorema

Se ha comentado ya que (a) \Rightarrow (b): si $\mathbf{F} = \nabla f$ en Ω y $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ es un camino regular a trozos cerrado, se tendrá:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.$$

Comprobamos ahora fácilmente que (b) \Rightarrow (c). Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ y $\sigma : [c, d] \rightarrow \Omega$ dos caminos regulares a trozos con origen y extremo comunes: $\gamma(a) = \sigma(c)$, $\gamma(b) = \sigma(d)$. El camino opuesto σ_{op} es consecutivo a γ , ya que el origen de σ_{op} es el extremo de σ que coincide con el extremo de γ . Esto nos permite considerar el camino suma $\gamma \oplus \sigma_{op}$, que es un camino regular a trozos cerrado, ya que su origen es $\gamma(a)$ y su extremo es el extremo de σ_{op} , que es $\sigma(c)$, pero sabemos que $\gamma(a) = \sigma(c)$. Usando ahora (b) y propiedades conocidas de las integrales de línea obtenemos (c):

$$0 = \int_{\gamma \oplus \sigma_{op}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

La demostración de (c) \Rightarrow (a) se dividirá en varias etapas. Suponemos desde este momento que se verifica (c).

Definición del campo escalar. Fijamos un punto $P \in \Omega$ y, por ser Ω un dominio, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ existe un camino regular a trozos $\gamma_{\mathbf{x}}$, con origen en el punto P y extremo en \mathbf{x} , cuya imagen está contenida en el dominio Ω . Definimos entonces:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

La hipótesis (c) hace que esta definición sea correcta: la integral no depende del camino de integración que usemos, siempre que tenga su origen en P y su extremo en \mathbf{x} . Tenemos pues definido un campo escalar $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y pretendemos probar que f es de clase C^1 en Ω con $\nabla f = \mathbf{F}$, para concluir que \mathbf{F} es conservativo en Ω .

Relación entre ambos campos. Fijamos un punto $\mathbf{x} \in \Omega$ y, por ser Ω un conjunto abierto, contendrá una bola abierta centrada en \mathbf{x} , es decir, existe $r > 0$ tal que: $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r \Rightarrow \mathbf{y} \in \Omega$. Fijado \mathbf{y} en dicha bola abierta, vamos a encontrar la relación que guarda $f(\mathbf{y})$ con $f(\mathbf{x})$.

Para calcular $f(\mathbf{x})$ usamos un camino regular a trozos $\gamma_{\mathbf{x}} : [a, b] \rightarrow \Omega$ con $\gamma(a) = P$ y $\gamma(b) = \mathbf{x}$. Por otra parte, podemos considerar un camino regular $\sigma_{\mathbf{y}}$ que recorre el segmento con origen \mathbf{x} y extremo \mathbf{y} , es decir,

$$\sigma_{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Observamos que $\|\sigma_{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{x}\| = t\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r$, luego $\sigma_{\mathbf{y}}(t) \in \Omega$ para $0 \leq t \leq 1$, es decir, $\sigma_{\mathbf{y}}$ tiene su imagen contenida en Ω . Puesto que $\gamma_{\mathbf{x}}(b) = \mathbf{x} = \sigma_{\mathbf{y}}(0)$, podemos considerar el camino suma $\gamma_{\mathbf{y}} = \gamma_{\mathbf{x}} \oplus \sigma_{\mathbf{y}}$:

$$\gamma_{\mathbf{y}}(t) = \begin{cases} \gamma_{\mathbf{x}}(t) & \text{si } a \leq t \leq b \\ \sigma_{\mathbf{y}}(t - b) & \text{si } b \leq t \leq b + 1 \end{cases}$$

Es claro que $\gamma_{\mathbf{y}} : [a, b + 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino regular a trozos con origen $\gamma_{\mathbf{y}}(a) = \gamma_{\mathbf{x}}(a) = P$ y extremo $\gamma_{\mathbf{y}}(b + 1) = \sigma_{\mathbf{y}}(1) = \mathbf{y}$. Además la imagen de $\gamma_{\mathbf{y}}$ está contenida en Ω por estarlo las de $\gamma_{\mathbf{x}}$ y $\sigma_{\mathbf{y}}$, luego $\gamma_{\mathbf{y}}$ es uno de los caminos que podemos usar para calcular $f(\mathbf{y})$. Aplicando propiedades conocidas de las integrales de línea obtenemos:

$$f(\mathbf{y}) = \int_{\gamma_{\mathbf{y}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\sigma_{\mathbf{y}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{x}) + \int_{\sigma_{\mathbf{y}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Usando ahora la definición de la última integral y teniendo en cuenta que $\sigma'_{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ para $0 \leq t \leq 1$, deducimos que

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \langle \mathbf{F}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) | \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle dt$$

y aplicando el teorema del valor intermedio a la última integral, cuyo integrando es una función continua en $[0, 1]$, obtenemos un $\alpha_{\mathbf{y}} \in [0, 1]$ tal que

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x} + \alpha_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) | \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle. \quad (1)$$

Esta es la relación clave entre los dos campos, que nos va a permitir concluir la demostración. Enunciamos para uso posterior lo que hemos probado hasta ahora:

[*]: Para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que, si $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ verifica que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r$, entonces $\mathbf{y} \in \Omega$ y se puede encontrar $\alpha_{\mathbf{y}} \in [0, 1]$ de forma que se verifique la igualdad (1).

Fin de la demostración. Consideremos las componentes del campo vectorial \mathbf{F} , es decir, pongamos $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + F_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + \dots + F_n(\mathbf{x})\mathbf{e}_n$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es la base standard de \mathbb{R}^n y F_1, F_2, \dots, F_n son campos escalares continuos en Ω . Fijados $\mathbf{x} \in \Omega$ y $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ bastará probar que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = F_k(\mathbf{x})$$

En efecto, de esta igualdad se deduce que existen todas las derivadas parciales de f y son funciones continuas en Ω , luego f es una función de clase C^1 en Ω , que claramente verifica $\nabla f = \mathbf{F}$ en Ω .

Para probar la igualdad buscada, aplicamos lo demostrado anteriormente: empezamos encontrando el radio $r > 0$ que aparece en $[*]$. Fijamos entonces $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < r$ y aplicamos $[*]$ con $\mathbf{y} = \mathbf{x} + t\mathbf{e}_k$, que evidentemente verifica $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r$, obteniendo $\alpha_t \in [0, 1]$ que hace que se cumpla (1). Escribiendo, para simplificar la notación, α_t en lugar de $\alpha_{\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k}$, tenemos:

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x} + t\alpha_t\mathbf{e}_k) | t\mathbf{e}_k \rangle = t F_k(\mathbf{x} + t\alpha_t\mathbf{e}_k).$$

Observamos que esta igualdad se verifica siempre que se tenga $|t| < r$, aunque no controlamos la forma en que α_t depende de t . Sin embargo, la condición $0 \leq \alpha_t \leq 1$ nos asegura que $\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{x} + t\alpha_t\mathbf{e}_k) = \mathbf{x}$ con lo que la continuidad del campo F_k nos permite concluir:

$$F_k(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} F_k(\mathbf{x} + t\alpha_t\mathbf{e}_k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x})$$

como queríamos demostrar.

5.3. Potencial de un campo conservativo

Para un campo vectorial \mathbf{F} que sea conservativo en un dominio Ω , es lógico plantearse la unicidad del campo escalar f de clase C^1 cuyo gradiente coincide con \mathbf{F} en Ω . La respuesta es casi inmediata: f está determinado salvo una constante aditiva. En efecto, sea g otro campo escalar de clase C^1 que verifique $\nabla g = \mathbf{F}$ en Ω . Como hicimos en la demostración del teorema, fijamos un punto $P \in \Omega$ y, para cualquier otro punto $\mathbf{x} \in \Omega$, consideramos un camino regular a trozos $\gamma_{\mathbf{x}}$ en Ω , con origen P y extremo \mathbf{x} . Tenemos entonces

$$f(\mathbf{x}) - f(P) = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \nabla g \cdot d\mathbf{l} = g(\mathbf{x}) - g(P)$$

La igualdad anterior prueba claramente que $f - g$ es constante en Ω , como se quería. Pues bien, se dice que el campo escalar f es un **potencial** del campo vectorial \mathbf{F} en el dominio Ω . Fijado un punto cualquiera $P \in \Omega$ existe un único potencial que se anula en P .

Sabido que un campo vectorial \mathbf{F} es conservativo en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se plantea el problema práctico de calcular explícitamente un potencial f . Ello es posible aprovechando la misma idea que hemos usado para probar la unicidad, es decir, integrando el campo \mathbf{F} a lo largo de caminos regulares a trozos que unan un punto fijo $P \in \Omega$ con cada punto variable $\mathbf{x} \in \Omega$. La geometría del dominio Ω puede facilitar mucho este procedimiento como vamos a ver con algún ejemplo.

Supongamos por ejemplo que $\Omega = \mathbb{R}^n$, o bien que Ω es una bola abierta centrada en el origen, esto es $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < r\}$. Podemos usar en este caso el origen como punto fijo P y, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ tomar un camino $\gamma_{\mathbf{x}}$ que recorra el segmento que une el origen con \mathbf{x} , puesto que dicho segmento está contenido en Ω . Así pues, tomamos

$$\gamma_{\mathbf{x}}(t) = t\mathbf{x} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

y para cualquier campo conservativo \mathbf{F} en Ω , el potencial que se anula en el origen será

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 \langle \mathbf{F}(t\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle dt \quad (\mathbf{x} \in \Omega)$$

Naturalmente, el mismo método puede usarse en situaciones más generales, la única condición que debe cumplir Ω estriba en que, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, el segmento que une el origen con el punto \mathbf{x} debe estar contenido en Ω . También es fácil modificar el método anterior para que el papel del origen pueda hacerlo otro punto fijo $P \in \Omega$ siempre que, para cualquier $\mathbf{x} \in \Omega$, el segmento de extremos P y \mathbf{x} esté contenido en Ω . Esto ocurre por ejemplo cuando Ω es una bola abierta centrada en P .

En ocasiones conviene usar un método diferente, que por simplicidad vamos a presentar en el caso particular del plano: $\Omega = \mathbb{R}^2$. Concretamente, para cada $\mathbf{a} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ podemos integrar a lo largo del camino $\sigma_{\mathbf{a}} \oplus \tau_{\mathbf{a}}$ donde $\sigma_{\mathbf{a}}$ recorre el segmento que une el origen con el punto $(x, 0)$ y $\tau_{\mathbf{a}}$ el que une $(x, 0)$ con $\mathbf{a} = (x, y)$. Más concretamente, tomamos:

$$\sigma_{\mathbf{a}}(t) = (tx, 0); \quad \tau_{\mathbf{a}}(t) = (x, ty) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Para un campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q)$ en \mathbb{R}^2 , tendremos

$$\langle \mathbf{F}(\sigma_{\mathbf{a}}(t)) | \sigma_{\mathbf{a}}'(t) \rangle = P(tx, 0)x; \quad \langle \mathbf{F}(\tau_{\mathbf{a}}(t)) | \tau_{\mathbf{a}}'(t) \rangle = Q(x, ty)y \quad (0 \leq t \leq 1)$$

con lo que si \mathbf{F} es conservativo, el potencial que se anula en el origen será

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{\sigma_{\mathbf{a}} \oplus \tau_{\mathbf{a}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 P(tx, 0)x dt + \int_0^1 Q(x, ty)y dt \\ &= \int_0^x P(u, 0) du + \int_0^y Q(x, v) dv \quad (x, y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

donde, para la última igualdad, hemos hecho los cambios de variable $u = tx$ y $v = ty$.

En el caso $n = 3$ análogo razonamiento nos permite afirmar que para un campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ que sea conservativo en \mathbb{R}^3 , el potencial que se anula en el origen es

$$f(x, y, z) = \int_0^x P(u, 0, 0) du + \int_0^y Q(x, v, 0) dv + \int_0^z R(x, y, w) dw \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Este método puede aplicarse a dominios más generales. Puesto que el camino de integración usado recorre una poligonal con segmentos paralelos a los ejes de coordenadas, bastará que dicha poligonal se mantenga siempre contenida en el dominio con el que trabajemos.

5.4. Campos irrotacionales

Al estudiar el rotacional de un campo vectorial en el espacio se comprobó que el rotacional del gradiente de un campo escalar de clase C^2 es idénticamente nulo. Igualmente, el rotacional escalar del gradiente de un campo escalar de clase C^2 en un abierto del plano también se anula. En realidad, ambas afirmaciones son casos particulares de un mismo resultado, válido en \mathbb{R}^n

para cualquier dimensión n . En efecto, sea $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y supongamos que \mathbf{F} es conservativo en Ω , es decir, que $\mathbf{F} = \nabla f$ donde f es un campo escalar de clase C^2 en Ω . Para $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, con $j \neq k$, aplicando a la función f el Lema de Schwartz tenemos

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \quad (2)$$

con lo que hemos obtenido un total de $n(n-1)/2$ igualdades no triviales, que deben verificarse en todo punto de Ω . En el caso $n = 2$, poniendo $\mathbf{F} = (P, Q)$, tenemos solamente la igualdad

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{en } \Omega$$

que equivale a afirmar que $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ en Ω . En el caso $n = 3$, poniendo $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ tenemos tres igualdades:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

que se resumen diciendo que $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ en Ω .

En vista de los comentarios anteriores es natural decir que un campo vectorial \mathbf{F} de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es **irrotacional** en Ω cuando verifica las igualdades (2) en todo punto de Ω . También ha quedado claro el siguiente resultado:

Sea \mathbf{F} un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si \mathbf{F} es conservativo en Ω , entonces \mathbf{F} es irrotacional en Ω .

El teorema de caracterización de los campos conservativos nos va a permitir ahora comprobar que el recíproco del enunciado anterior es **falso**, es decir, que *existen campos irrotacionales que no son conservativos*.

Ejemplo. Consideremos el dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ obtenido suprimiendo el origen del plano, y el campo vectorial $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} + 2y \right) \quad ((x, y) \in \Omega) \quad (3)$$

Claramente \mathbf{F} es de clase C^∞ en Ω y comprobamos enseguida que es irrotacional en Ω , ya que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega)$$

Para comprobar que \mathbf{F} no es conservativo en Ω usamos el camino γ dado por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

para el que se comprueba fácilmente que

$$\langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle = 1 + \sin 2t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

y, por tanto,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi \neq 0$$

Puesto que γ es un camino regular cerrado en Ω y la integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de γ no es nula, concluimos que \mathbf{F} no es conservativo en Ω , como habíamos anunciado.

Queda pues claro que ser irrotacional es una condición necesaria pero no suficiente para que un campo sea conservativo. Concluimos esta lección comentando un método práctico que se usa con frecuencia para calcular potenciales, comprobando de paso que ciertos campos vectoriales son conservativos, lo que nos dará más información sobre el ejemplo anterior.

Dado un campo vectorial continuo $\mathbf{F} = (P, Q)$ en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, intentemos buscar directamente un campo escalar f de clase C^1 en Ω que verifique la igualdad $\nabla f = (P, Q)$. Mediante los formalismos del cálculo de primitivas, podemos empezar calculando un campo escalar f_0 , cuya primera derivada parcial coincida con P . Formalmente escribimos

$$f_0(x, y) = \int P(x, y) dx$$

y tratamos de calcular explícitamente esta integral indefinida en la que la variable y aparece como un parámetro. Lo que suele suceder es que debemos asumir alguna restricción para que este cálculo tenga éxito. Más rigurosamente, es posible que encontremos un conjunto abierto $G \subseteq \Omega$ y un campo escalar $f_0 : G \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = P \quad (\text{en } G)$$

El siguiente paso consiste en tantear la posibilidad de que el campo f que buscamos pueda tener la forma

$$f(x, y) = f_0(x, y) + \varphi(y) \quad ((x, y) \in G)$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función a determinar. Desde luego, para cualquier función φ de clase C^1 en \mathbb{R} , el campo f así definido será de clase C^1 en G y verificará la misma condición que f_0 , ya que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial x} = P \quad (\text{en } G)$$

Por tanto, nuestro problema es determinar la función φ de manera que también se tenga

$$Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_0}{\partial y}(x, y) + \varphi'(y) \quad ((x, y) \in G)$$

Así pues, φ debe verificar la igualdad

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial f_0}{\partial y}(x, y) \quad (4)$$

en todo punto $(x, y) \in G$, condición que parece excesivamente restrictiva, puesto que el segundo miembro de la igualdad anterior puede muy bien depender de x mientras el primer miembro no puede hacerlo.

Sin embargo, supongamos que el campo vectorial \mathbf{F} de partida es de clase C^1 y es irrotacional en Ω . Cabe esperar que entonces la función f_0 obtenida en el primer paso sea de clase C^2 en G y, aplicando el Lema de Schwartz tendremos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Q - \frac{\partial f_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Intuitivamente, esto significa que el segundo miembro de la igualdad (4) no depende de x , con lo que es razonable esperar que nuevamente el cálculo de primitivas nos permita encontrar la función ϕ que buscábamos. En resumen, aunque el razonamiento anterior está lejos de ser una demostración rigurosa, en casos concretos podemos usar este tipo de método para probar que ciertos campos irrotacionales son conservativos en determinados dominios, encontrando para ellos un potencial.

Veamos por ejemplo lo que ocurre con el campo vectorial del ejemplo anterior, definido en (3), que sabemos es irrotacional pero no conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Usando el formalismo del cálculo de primitivas escribimos:

$$\int P(x,y) dx = \int \frac{-y}{x^2 + y^2} dx = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u = \arctan \frac{y}{x}$$

donde hemos usado el cambio de variable $u = y/x$. Notemos que la primitiva calculada no tiene sentido en todo el dominio Ω . Sin embargo, podemos tomar $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ y definir

$$f_0(x,y) = \arctan \frac{y}{x} \quad ((x,y) \in G)$$

con lo que tenemos una función f_0 de clase C^∞ en G que verifica

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = P(x,y) \quad ((x,y) \in G)$$

La igualdad (4) nos lleva entonces a buscar una función ϕ de clase C^1 en \mathbb{R} , que verifique

$$\phi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + 2y - \frac{x}{x^2 + y^2} = 2y$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Basta evidentemente tomar $\phi(y) = y^2$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Definimos pues

$$f(x,y) = \arctan \frac{y}{x} + y^2 \quad ((x,y) \in G)$$

y es inmediato comprobar que f es un potencial del campo \mathbf{F} en el abierto G . Hemos probado de paso que el campo \mathbf{F} es conservativo en el abierto $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, aunque no lo era en el dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Teorema de Green

En la lección anterior, previa caracterización de los campos conservativos, hemos visto que un campo irrotacional puede no ser conservativo. Tenemos por tanto una condición fácil de comprobar, que es necesaria para que un campo sea conservativo, pero no es suficiente. En particular, para un campo vectorial $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, diferenciable en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ puede ocurrir que el rotacional escalar $\text{rot } \mathbf{F}$ sea idénticamente nulo en Ω sin que \mathbf{F} sea conservativo en Ω . Sin embargo, bajo ciertas condiciones sobre el dominio Ω sí se puede asegurar que todo campo vectorial diferenciable e irrotacional en Ω es conservativo en Ω . La explicación de este tipo de resultado se encuentra en una importante fórmula integral descubierta por el científico británico G. Green (1793-1841) en su estudio de los campos electromagnéticos. La fórmula de Green, o si se prefiere, el Teorema de Green, relaciona una integral de línea con una integral doble y, aparte de su utilidad en el estudio de los campos conservativos en dominios de \mathbb{R}^2 , tiene otras aplicaciones interesantes.

6.1. Curvas de Jordan

En lo que sigue vamos a trabajar con un tipo particular de caminos, que reciben el nombre de caminos simples. Intuitivamente un camino es simple cuando no tiene auto-intersecciones, es decir, un móvil que lo recorre no pasa dos veces por un mismo punto. Esto invita a decir que un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es simple cuando γ es una función inyectiva, es decir, para $s, t \in [a, b]$ con $s < t$ no podría ocurrir que $\gamma(s) = \gamma(t)$. Sin embargo un camino cerrado nunca podría verificar esta condición. Relajamos entonces la hipótesis de inyectividad, sólo para permitir que pueda ser $\gamma(a) = \gamma(b)$. Por tanto, decimos que un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **simple** cuando cumple la siguiente condición:

$$s, t \in [a, b], s < t, \gamma(s) = \gamma(t) \Rightarrow s = a, t = b \quad (1)$$

A partir de ahora nos concentramos en el caso $n = 2$. La curva recorrida por un camino simple cerrado en \mathbb{R}^2 recibe el nombre de **curva de Jordan**.

Así pues, una curva de Jordan es un conjunto $\Gamma = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ donde $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función continua, con $\gamma(a) = \gamma(b)$, y verificando la condición (1). El siguiente teorema lleva el nombre del matemático francés C. Jordan (1838-1922), aunque la primera demostración enteramente correcta fue publicada en 1905 por el norteamericano O. Veblen (1880-1960).

Teorema de la Curva de Jordan. *Si Γ es una curva de Jordan, su complemento $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ es unión de dos dominios disjuntos, cuya frontera común es Γ ; uno de ellos está acotado y recibe el nombre de región interior a Γ y el otro, no acotado, es la región exterior a Γ .*

Consideremos como ejemplo, la elipse, definida en forma implícita por:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1\} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

Para ver que Γ es una curva de Jordan, basta usar el camino $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\gamma(t) = (\alpha \cos t, \beta \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Es fácil comprobar que γ es un camino cerrado y simple que recorre la elipse Γ . Las regiones interior y exterior, D y G , a la elipse Γ son:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1\}; \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} > 1\}$$

Observamos que en este ejemplo, como en la mayoría de los que se utilizan en la práctica, la tesis del teorema anterior se puede comprobar directamente sin dificultad. Es claro que D es un dominio acotado, G es un dominio no acotado, $D \cup G = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, $D \cap G = \emptyset$ y $\partial D = \partial G = \Gamma$.

Recordemos que caminos muy diferentes pueden recorrer una misma curva, lo cual sigue siendo cierto aunque consideremos solamente caminos simples. Intuitivamente es claro, por ejemplo, que la circunferencia centrada en un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con radio $\rho_0 > 0$ es una curva de Jordan C que puede recorrerse en sentido anti-horario, mediante el camino simple cerrado σ definido por:

$$\sigma(\theta) = (x_0 + \rho_0 \cos \theta, y_0 + \rho_0 \sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

y puede también recorrerse en sentido horario, mediante el camino opuesto σ_{op} que también es cerrado y simple. Observamos que al recorrer la circunferencia C mediante el camino σ , la región interior a C queda a la izquierda. Suele decirse que σ está orientado positivamente, mientras que σ_{op} tiene orientación negativa. Pues bien, esta noción de orientación puede extenderse a caminos cerrados simples cualesquiera. La formulación matemática rigurosa de esta noción de orientación no es sencilla así que no vamos a exponerla, conformándonos con la idea intuitiva: diremos que un camino cerrado y simple γ recorre una curva de Jordan Γ con orientación positiva cuando lo hace en sentido anti-horario, mientras que γ estará orientado negativamente cuando recorra la curva Γ en el sentido de las agujas del reloj. Equivalentemente, γ está orientado positivamente cuando recorre la curva Γ dejando a la izquierda su región interior.

6.2. Enunciado del Teorema

Podemos ya enunciar el resultado principal de esta lección:

Teorema de Green. *Sea γ un camino en \mathbb{R}^2 , regular a trozos, cerrado y simple, que recorre una curva de Jordan Γ con orientación positiva. Sea D la región interior a Γ y $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $D \cup \Gamma \subseteq \Omega$. Entonces, la integral de línea de \mathbf{F} a lo largo del camino γ coincide con la integral doble sobre D del rotacional escalar de \mathbf{F} :*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_D (\text{rot} \mathbf{F}) dx dy$$

Más explícitamente, si $\mathbf{F} = (P, Q)$ en Ω , el teorema afirma que:

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Es costumbre usar una notación que permite recordar con facilidad las hipótesis del teorema anterior. Puesto que la curva de Jordan Γ coincide con la frontera del dominio D , $\Gamma = \partial D$, resulta sugestivo denotar al camino γ por ∂D^+ para resaltar que dicho camino recorre la curva ∂D y está orientado positivamente. La fórmula de Green toma entonces la siguiente forma

$$\oint_{\partial D^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde también hemos modificado el símbolo de la integral de línea para resaltar que el camino es cerrado.

6.3. Campos irrotacionales y conservativos

Está bastante claro que el teorema de Green nos va a permitir obtener nueva información relevante sobre la relación entre campos conservativos e irrotacionales. Siempre que podamos aplicar el teorema a un campo irrotacional, la integral doble que aparece en el segundo miembro de la fórmula de Green será nula, luego también habrá de anularse la integral de línea del primer miembro y esto nos acerca a la posibilidad de que el campo sea conservativo.

Para analizar mejor la idea recién sugerida, conviene empezar aclarando que el teorema de caracterización de los campos conservativos puede retocarse para que baste considerar caminos simples. Más concretamente, si $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial continuo en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y la integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de cualquier camino regular a trozos, cerrado y simple en Ω se anula, entonces \mathbf{F} es conservativo en Ω . Comprobar esta afirmación requiere modificaciones en la prueba del teorema de caracterización, que no vamos a exponer.

Pues bien, supongamos ahora que $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 e irrotacional en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Sea γ un camino regular a trozos cerrado y simple en Ω , que recorrerá una curva de Jordan $\Gamma \subseteq \Omega$. Para poder aplicar el Teorema de Green falta un detalle

importante: la región interior a la curva Γ debe estar también contenida en Ω . Si tal cosa ocurre, la fórmula de Green nos da

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \pm \iint_D (\text{rot} \mathbf{F}) dx dy = 0,$$

donde hemos usado el signo \pm para tener en cuenta la orientación de γ . A continuación definimos el tipo de dominios en los que el razonamiento anterior siempre puede hacerse, cualquiera que sea la curva de Jordan considerada.

Se dice que un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es **simplemente conexo** cuando toda curva de Jordan contenida en Ω verifica que su región interior también está contenida en Ω .

Naturalmente, el plano \mathbb{R}^2 es un dominio simplemente conexo. Dados $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$, no es difícil comprobar que la bola abierta $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$ es un dominio simplemente conexo. Igual le ocurre al semiplano abierto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c > 0\}$, para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$.

Si de un dominio cualquiera Ω suprimimos un punto $\mathbf{a} \in \Omega$, el dominio resultante $\Omega \setminus \{\mathbf{a}\}$ nunca es simplemente conexo. Así pues, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ no es simplemente conexo. Un anillo abierto $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : r < \|\mathbf{x}\| < R\}$ es otro ejemplo de dominio que no es simplemente conexo. Intuitivamente, un dominio Ω es simplemente conexo cuando no tiene “agujeros”.

Pues bien, los razonamientos hechos anteriormente demuestran la siguiente consecuencia del Teorema de Green:

Corolario. *Si un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, todo campo vectorial de clase C^1 e irrotacional en Ω es conservativo en Ω .*

Podemos ahora resumir toda la información obtenida sobre la relación entre campos conservativos e irrotacionales. Partimos del hecho de que todo campo vectorial de clase C^1 que sea conservativo en un dominio ha de ser irrotacional en dicho dominio. Recíprocamente, consideremos un dominio $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{F} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 e irrotacional en Ω_0 . Para dominios $\Omega \subseteq \Omega_0$ podemos preguntarnos si \mathbf{F} es conservativo en Ω . Distinguimos dos casos:

- Si Ω_0 es simplemente conexo, el corolario anterior nos permite asegurar que \mathbf{F} es conservativo en Ω_0 y, por tanto, en cualquier dominio $\Omega \subseteq \Omega_0$.
- Si Ω_0 no es simplemente conexo, no tenemos ningún criterio general que nos permita decidir si \mathbf{F} es conservativo en Ω_0 , pero sí podemos aplicar el corolario anterior para asegurar que \mathbf{F} es conservativo en cualquier dominio simplemente conexo $\Omega \subseteq \Omega_0$.

La última idea siempre se puede aplicar *localmente*: Si \mathbf{F} es un campo vectorial de clase C^1 e irrotacional en un dominio arbitrario $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, para cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ consideramos una bola abierta $B_{\mathbf{x}}$ de centro \mathbf{x} contenida en Ω y, puesto que $B_{\mathbf{x}}$ es un dominio simplemente conexo, podemos asegurar que \mathbf{F} es conservativo en $B_{\mathbf{x}}$. Así pues \mathbf{F} es conservativo en un entorno de cada punto de Ω , lo que suele expresarse diciendo que \mathbf{F} es **localmente conservativo** en Ω . Nótese que el recíproco también es cierto, de modo que *un campo vectorial de clase C^1 en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es localmente conservativo en Ω si, y sólo si, es irrotacional en Ω .*

6.4. Cálculo de áreas mediante la fórmula de Green

Para un campo con rotacional escalar constantemente igual a 1, la integral doble que aparece en la fórmula de Green es el área de la región interior a una curva de Jordan, luego podemos calcular tal área mediante una integral de línea. Disponemos de varias elecciones posibles para el campo vectorial, ya que es fácil dar ejemplos de campos vectoriales de clase C^1 en todo el plano con rotacional escalar constantemente igual a 1. Concretamente, podemos usar cualquiera de los campos $\mathbf{F} = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidos, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ por:

- $P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = x$
- $P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = 0$
- $P(x, y) = -\frac{y}{2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{2}$

En cualquiera de los tres casos \mathbf{F} es un campo vectorial de clase C^∞ en \mathbb{R}^2 y se verifica que

$$\text{rot} \mathbf{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad (\text{en } \mathbb{R}^2)$$

Por tanto, aplicando el Teorema de Green obtenemos:

Corolario. *Sea γ un camino en \mathbb{R}^2 , regular a trozos, cerrado y simple, que recorre una curva de Jordan Γ con orientación positiva. Entonces el área de la región D interior a Γ viene dada por:*

$$\text{Área}(D) = \int_{\gamma} x dy = - \int_{\gamma} y dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx$$

Obsérvese que el resultado anterior permite confirmar la orientación del camino γ , puesto que cualquiera de las integrales que aparecen en el segundo miembro de la igualdad anterior debe tener un valor estrictamente positivo. Si al evaluar cualquiera de esas integrales obtuviésemos un valor negativo, detectaríamos que el camino está orientado negativamente.

En la práctica, entre las fórmulas obtenidas para el cálculo del área, se elige lógicamente la que nos lleve a una integral de línea más fácil de evaluar. La tercera posibilidad, que parece la más artificiosa, es con frecuencia la más conveniente, por la simetría que presenta. Veamos por ejemplo el cálculo del área delimitada por una elipse, más concretamente, de la región D definida por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1\}$$

con $\alpha, \beta > 0$. Usando el camino γ de ecuaciones paramétricas

$$x = \alpha \cos t; \quad y = \beta \sin t; \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

tenemos inmediatamente

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \alpha \beta dt = \pi \alpha \beta$$

Superficies

En lo que sigue vamos a hacer un tratamiento básico de las superficies en \mathbb{R}^3 , que guarda cierto paralelismo con el estudio de las curvas en el plano hecho anteriormente.

7.1. Forma explícita

La gráfica de una función de dos variables será el primer tipo de superficie que vamos a considerar, el más sencillo. De forma muy imprecisa, una superficie se describe en forma explícita como el conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 que verifican una ecuación del tipo $z = h(x, y)$. Para llegar a una definición más rigurosa hemos de precisar donde suponemos definida la función h y qué propiedades le exigimos a dicha función.

El papel que para las curvas en el plano hacían los intervalos cerrados y acotados $[a, b]$ lo harán ahora los subconjuntos del plano que se definen como sigue. Llamamos **recinto** en \mathbb{R}^2 a cualquier conjunto de la forma $W = \Gamma \cup D$ donde Γ es una curva de Jordan y D es la región interior a Γ . Un rectángulo cerrado $[a, b] \times [c, d]$ (con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $c < d$), o un círculo o bola cerrada $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$ (con $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$), son ejemplos de recintos que aparecen frecuentemente. Siempre que consideremos un recinto W , denotaremos por $\Gamma = \partial W$ a la curva de Jordan que lo delimita y $D = W \setminus \Gamma$ será su región interior.

Pues bien, llamaremos **superficie en forma explícita** a todo conjunto de la forma

$$S = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in W\} \quad (1)$$

donde W es un recinto en \mathbb{R}^2 y $h : W \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 en W . Así pues, una superficie en forma explícita no es más que la gráfica de una función de clase C^1 en un recinto del plano. Puesto que un recinto no es un conjunto abierto, debemos aclarar que por función de clase C^1 en W entendemos la restricción a W de una función de clase C^1 en un conjunto abierto que contiene a W , pero no mencionamos siquiera dicho conjunto abierto porque no jugará ningún papel en nuestro estudio.

Como ejemplo de superficie en forma explícita, dado $r > 0$ podemos considerar el recinto $W_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ y definir $h(x, y) = x^2 + y^2$ para $(x, y) \in W_r$, obteniendo la superficie

$$S_r = \{(x, y, x^2 + y^2) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq r^2\} \quad (2)$$

que es la parte del paraboloide de revolución de ecuación $z = x^2 + y^2$ situada dentro del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

La descripción explícita de una superficie, dada por la expresión (1), tiene la ventaja de ser muy intuitiva, puesto que, viendo a \mathbb{R}^2 como el plano de ecuación $z = 0$ en \mathbb{R}^3 , a cada punto $(x, y, 0)$ del recinto W corresponde un único punto $(x, y, h(x, y))$ de la superficie, situado en la vertical del primero. En particular, la función h está determinada de manera única. Sin embargo, como ocurría con las curvas en el plano, la descripción explícita resulta demasiado restrictiva. La totalidad de una superficie que contenga dos puntos distintos en una misma recta vertical, por ejemplo una esfera, no puede describirse en forma explícita. De ahí la conveniencia de considerar una noción más general de superficie, como se hace a continuación.

7.2. Forma paramétrica

Del mismo modo que una curva es la imagen de un camino y decimos que el camino parametriza a la curva, una superficie en forma paramétrica será la imagen de una función, a la que llamamos “parametrización” de la superficie. Sólo usaremos parametrizaciones que podríamos llamar “regulares” por analogía con los caminos regulares.

Más rigurosamente, como **parametrización de una superficie** entendemos, por definición, una función $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en un recinto $W \subseteq \mathbb{R}^2$. Decimos entonces que la imagen de Φ , es decir, el conjunto

$$S = \{\Phi(u, v) : (u, v) \in W\} \quad (3)$$

es una **superficie** en \mathbb{R}^3 y que la función Φ *parametriza* la superficie S . Al igual que ocurría con caminos y curvas, debemos distinguir muy claramente entre la superficie S , que es un subconjunto de \mathbb{R}^3 , y la parametrización Φ , que es una función. Obviamente, dos funciones distintas, incluso definidas en recintos distintos, pueden tener la misma imagen, así que una superficie puede admitir parametrizaciones muy diversas.

Puesto que la función Φ toma valores en \mathbb{R}^3 , tendrá tres componentes que son funciones con valores reales, también de clase C^1 en el recinto W . De forma sugestiva, escribimos

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in W)$$

y decimos que la superficie S definida en (3) tiene **ecuaciones paramétricas**

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad ((u, v) \in W) \quad (4)$$

Como ejemplo, veamos la parametrización del elipsoide con semiejes $a, b, c > 0$ y centrado en un punto $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$. Consideremos el rectángulo

$$W = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq \theta \leq \pi; -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\} \quad (5)$$

y la función $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\Phi(\theta, \varphi) = (a_0 + a \cos \theta \cos \varphi, b_0 + b \sin \theta \cos \varphi, c_0 + c \sin \varphi) \quad ((\theta, \varphi) \in W) \quad (6)$$

Claramente Φ es una parametrización de una superficie $S = \Phi(W)$, que es precisamente el elipsoide mencionado, ya que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{(x-a_0)^2}{a^2} + \frac{(y-b_0)^2}{b^2} + \frac{(z-c_0)^2}{c^2} = 1\} \quad (7)$$

como se puede fácilmente comprobar. En resumen, el elipsoide S tiene ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a_0 + a \cos \theta \cos \varphi \\ y = b_0 + b \sin \theta \cos \varphi \\ z = c_0 + c \sin \varphi \end{cases} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi; -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2)$$

Como caso particular, tomando $a = b = c = r > 0$, tenemos una esfera de radio r .

Ni que decir tiene, las superficies en forma explícita son casos particulares de superficies en forma paramétrica. Si h es una función de clase C^1 en un recinto $W \subseteq \mathbb{R}^2$, definiendo

$$\Phi(x, y) = (x, y, h(x, y)) \quad ((x, y) \in W) \quad (8)$$

obtenemos una parametrización de una superficie $S = \Phi(W)$ que obviamente no es otra cosa que la gráfica de la función h , tal y como se definió en (1).

En cierto modo, la noción de superficie en forma paramétrica que acabamos de introducir es demasiado general. Frecuentemente nos limitaremos a considerar las parametrizaciones de superficies que son análogas a los caminos simples, como vamos a explicar ahora.

En principio podríamos decir que una parametrización $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie $S = \Phi(W)$ es simple cuando la función Φ es inyectiva, de forma que cada punto $\mathbf{p} \in S$ se expresaría de manera única en la forma $\mathbf{p} = \Phi(u, v)$ con $(u, v) \in W$. Sin embargo, como ocurría con los caminos cerrados, esta noción excluiría ejemplos importantes de superficies, como el elipsoide que acabamos de considerar. Intuitivamente, una superficie “cerrada” no podría ser simple. Conviene por tanto relajar la hipótesis de inyectividad de la siguiente forma.

Una función Φ de clase C^1 en un recinto $W = D \cup \Gamma$ es una **parametrización simple** de la superficie $S = \Phi(W)$ cuando para $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in W$ se tiene que

$$\Phi(u_1, v_1) = \Phi(u_2, v_2) \implies \begin{cases} (u_1, v_1) = (u_2, v_2) & \text{o bien} \\ (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \Gamma \end{cases}$$

Equivalentemente, Φ es inyectiva en D y no toma en Γ los valores que toma en D , pero puede tomar el mismo valor en puntos distintos de Γ . Cuando una superficie S admite una parametrización simple decimos también que S es una **superficie simple**.

Por ejemplo, *toda superficie en forma explícita es una superficie simple*. En efecto, si una superficie S viene definida por la expresión (1) como la gráfica de una función de dos variables, entonces S admite la parametrización Φ dada por (8) y es evidente que la función Φ es inyectiva en todo el recinto W , en particular Φ es una parametrización simple de S .

Como segundo ejemplo, no es difícil comprobar que el elipsoide S definido en (7) es una superficie simple. De hecho la función Φ definida en (6) sobre el rectángulo W dado por (5) es una parametrización simple de S . Observemos que en este caso la función Φ está muy lejos de ser inyectiva en el recinto W . Por ejemplo, $\Phi(\theta, \pi/2) = (0, 0, 1)$ para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$.

7.3. Forma implícita

De nuevo en claro paralelismo con las curvas en forma implícita, las superficies en forma implícita serán conjuntos de nivel de campos escalares en el espacio. Concretamente, dada una función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ donde Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 , consideramos el conjunto:

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega : g(x, y, z) = 0\}. \quad (9)$$

Naturalmente, para que el conjunto S guarde alguna relación con una superficie, deberemos imponer algunas condiciones a la función g :

*Supondremos que g es de clase C^1 en Ω , que g se anula en algún punto de Ω ($S \neq \emptyset$) y que el gradiente de g no se anula en S , es decir, $\nabla g(x, y, z) \neq 0 \quad \forall (x, y, z) \in S$. Decimos entonces que el conjunto S definido en (9) es una **superficie en forma implícita**.*

La nomenclatura se justifica porque al menos “localmente” el conjunto S se puede hacer coincidir con una superficie en forma paramétrica. De hecho, el Teorema de la Función Implícita nos asegura que cada punto de S tiene un entorno cuya intersección con S es una superficie simple. Más concretamente, cada punto $\mathbf{p} \in S$ tiene un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $S \cap U = \Phi(W)$ donde $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función de clase C^1 e inyectiva en un recinto W del plano. En la situación más favorable, el propio conjunto S puede ser una superficie simple, pero en general esto no tiene por qué ocurrir, entre otras razones porque S puede no estar acotado. De hecho han aparecido ya ejemplos de las dos situaciones, como vamos a resaltar.

Por una parte, el elipsoide S definido en (7) puede verse como una superficie en forma implícita, sin más que considerar la función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y, z) = \frac{(x - a_0)^2}{a^2} + \frac{(y - b_0)^2}{b^2} + \frac{(z - c_0)^2}{c^2} - 1 \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

que obviamente cumple las condiciones requeridas, puesto que es una función de clase C^∞ en \mathbb{R}^3 , se anula por ejemplo en el punto $(a_0 + a, b_0, c_0)$ y su gradiente viene dado por

$$\nabla g(x, y, z) = 2(a^{-2}(x - a_0), b^{-2}(y - b_0), c^{-2}(z - c_0)) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (10)$$

con lo que ∇g sólo se anula en el punto (a_0, b_0, c_0) , que no pertenece al elipsoide. En este ejemplo disponemos de una parametrización global, sabíamos ya que $S = \Phi(W)$ para el recinto W y la parametrización Φ que aparecen en (5) y (6).

Consideremos ahora el paraboloide de revolución $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ que también vemos como una superficie en forma implícita, ahora mediante la función definida por $g(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$, otra función de clase C^∞ en \mathbb{R}^3 que se anula en el origen y con gradiente dado por $\nabla g(x, y, z) = (-2x, -2y, 1)$ para $x, y, z \in \mathbb{R}$, que no se anula nunca. Claramente S no es un conjunto acotado, luego no podemos esperar una parametrización global. Vemos fácilmente cómo se pueden conseguir parametrizaciones locales: dado un punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S$ tomamos $r^2 > x_0^2 + y_0^2$ y consideramos el conjunto $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ que es un entorno de \mathbf{p} . Entonces $U \cap S$ es una superficie, de hecho se tiene claramente $U \cap S = \{(x, y, x^2 + y^2) : x^2 + y^2 \leq r^2\} = S_r$, que apareció en (2) como primer ejemplo de superficie en forma explícita.

7.4. Plano tangente y vector normal

Se dice que una superficie S es **suave** en un punto $\mathbf{p} \in S$, cuando existe un plano Π que contiene a todas las rectas tangentes en el punto \mathbf{p} a curvas contenidas en la superficie S que sean suaves en dicho punto. Lógicamente, decimos también que Π es un **plano tangente** a la superficie S en el punto \mathbf{p} y que todo vector normal al plano Π es un **vector normal** a la superficie S en el punto \mathbf{p} . Salvo en casos degenerados a los que no prestaremos mucha atención, siempre existen dos curvas contenidas en la superficie cuyas rectas tangentes en el punto \mathbf{p} son diferentes, con lo que el plano Π está determinado en forma única y podemos decir que Π es “el” plano tangente a la superficie S en el punto \mathbf{p} . Decir que un vector es “el” vector normal a la superficie en un punto es incurrir en una ambigüedad, para dos vectores normales a una superficie en un mismo punto podremos afirmar habitualmente que uno es múltiplo escalar del otro. La única recta perpendicular al plano tangente en el punto \mathbf{p} es la **recta normal** a la superficie S en el punto \mathbf{p} y sí estará determinada en forma única cuando lo esté el plano tangente, lo que como hemos dicho ocurrirá en todos los casos que nos interesan.

Sea $W = \Gamma \cup D$ un recinto en el plano y $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie $S = \Phi(W)$. Dado un punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S$ podemos tener $\mathbf{p} = \Phi(u, v)$ para distintos valores de los parámetros u y v . Para evitar esta ambigüedad suponemos que Φ es una parametrización simple y que $\mathbf{p} \in \Phi(D)$, con lo que existe un único par $(u_0, v_0) \in D$ tal que $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$. En términos de las ecuaciones paramétricas de la superficie S , que serán de la forma (4), tenemos $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ y $z_0 = z(u_0, v_0)$.

Definimos ahora dos vectores que jugarán un papel clave en lo que sigue y no son otra cosa que las derivadas parciales de la función Φ en el punto (u_0, v_0) :

$$\begin{aligned}\Phi_u(u_0, v_0) &= \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \\ \Phi_v(u_0, v_0) &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)\end{aligned}\tag{11}$$

Para simplificar la notación, puesto que el punto (u_0, v_0) se mantiene fijo, lo omitiremos a partir de ahora, escribiendo simplemente

$$\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{y} \quad \Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

Es fácil ver que si los vectores Φ_u y Φ_v no se anulan, serán vectores de dirección de las rectas tangentes en el punto \mathbf{p} a dos curvas suaves en dicho punto contenidas en la superficie S . Si además Φ_u y Φ_v son linealmente independientes, dichas rectas serán diferentes y el único posible plano tangente a la superficie S en el punto \mathbf{p} será el plano Π que las contiene. De hecho se puede demostrar que en tal caso efectivamente la superficie S es suave en el punto \mathbf{p} con lo que Π es el plano tangente en dicho punto. Veamos pues como se concreta el cálculo de plano tangente y vector normal.

Puesto que Φ_u y Φ_v son vectores de dirección del plano Π , el producto vectorial $\Phi_u \times \Phi_v$ es normal a dicho plano y conviene recordar que la condición $\Phi_u \times \Phi_v \neq 0$ equivale precisamente a que los vectores Φ_u y Φ_v sean linealmente independientes. Calculamos fácilmente $\Phi_u \times \Phi_v$, a partir de (11):

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \mathbf{k}$$

donde hemos usado los determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial z/\partial u & \partial x/\partial u \\ \partial z/\partial v & \partial x/\partial v \end{vmatrix}$$

y debemos tener presente que todas las derivadas parciales se calculan en el punto (u_0, v_0) . Resumimos toda la discusión anterior en el siguiente enunciado:

Sea $W = \Gamma \cup D$ un recinto en el plano y $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización simple de la superficie $S = \Phi(W)$. Supongamos que, para un punto de la superficie que tenga la forma $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$ con $(u_0, v_0) \in D$, se verifica que $\Phi_u \times \Phi_v \neq 0$, donde Φ_u y Φ_v son los vectores definidos en (11). Entonces, la superficie S es suave en el punto \mathbf{p} , el vector $\Phi_u \times \Phi_v$ es normal a la superficie S en el punto \mathbf{p} y el plano tangente a la superficie en dicho punto es el plano de ecuación

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0) | \Phi_u \times \Phi_v \rangle = 0 \quad (12)$$

que también puede escribirse en la forma

$$(x - x_0) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (y - y_0) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (z - z_0) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 0 \quad (12)$$

o, si se prefiere,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Como caso particular, consideremos en primer lugar la superficie en forma explícita definida en (1). Podemos usar la parametrización simple Φ que aparece en (8), es decir, nuestros parámetros son ahora x e y . Además Φ es inyectiva en todo el recinto W , por lo que no es necesario restringirse a su interior. Dado $(x_0, y_0) \in W$, consideramos los vectores

$$\Phi_x = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \quad \text{y} \quad \Phi_y = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

con lo que obtenemos

$$\Phi_x \times \Phi_y = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right) \quad (13)$$

Observamos que la condición $\Phi_x \times \Phi_y \neq 0$ se cumple siempre. Por tanto:

La superficie S definida en forma explícita como la gráfica de una función h de clase C^1 en un recinto del plano es suave en todos sus puntos. Para cada $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S$, el vector $\Phi_x \times \Phi_y$ que aparece en (13) es normal a la superficie en el punto \mathbf{p} y el plano de ecuación

$$z - z_0 = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

es tangente a la superficie S en el punto p .

Veamos por ejemplo la superficie S_r definida en (2). Para un punto $\mathbf{p} \in S_r$ de coordenadas $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 = x_0^2 + y_0^2 \leq r^2$, la ecuación del plano tangente a la superficie S_r en el punto \mathbf{p} será $z - z_0 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$ y el vector $(-2x_0, -2y_0, 1)$ es normal a la superficie en dicho punto. Por ejemplo, el plano tangente a S_r en el origen tiene ecuación $z = 0$ y el vector $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ es normal a S_r en el origen.

Antes de poner más ejemplos, conviene tratar las superficies en forma implícita, para las que el cálculo de planos tangentes y vectores normales es muy sencillo y efectivo.

Sea S una superficie en forma implícita, definida por la expresión (9). Consideremos un punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S$ y una curva contenida en la superficie que sea suave en el punto \mathbf{p} y que vendrá parametrizada por un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow S$. Tendremos $t_0 \in [a, b]$ tal que $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$ y γ será derivable en el punto t_0 con $\gamma'(t_0) \neq 0$. Considerando las ecuaciones paramétricas del camino γ , es decir, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $a \leq t \leq b$, puesto que $\gamma(t) \in S$ para todo $t \in [a, b]$, tendremos $g(x(t), y(t), z(t)) = 0$ para todo $t \in [a, b]$. Derivando en el punto t_0 y aplicando la regla de la cadena deducimos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0$$

o, equivalentemente

$$\langle \nabla g(x_0, y_0, z_0) | \gamma'(t_0) \rangle = 0$$

Así pues, el vector $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ es ortogonal a la recta tangente a cualquier curva suave en el punto \mathbf{p} y contenida en la superficie S . A partir de aquí es fácil concluir lo siguiente:

Si S es la superficie en forma implícita definida por la expresión (9), entonces S es suave en todos sus puntos, para cada $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S$ el vector $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie S en el punto \mathbf{p} y el plano tangente en dicho punto tiene ecuación

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0) | \nabla g(x_0, y_0, z_0) \rangle = 0$$

o equivalentemente

$$(x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Por ejemplo, el elipsoide S definido en (7) es suave en todos sus puntos. En este caso el gradiente del campo g se calculó en (10), lo que nos da directamente un vector normal al elipsoide en un punto genérico $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Deducimos que el plano tangente al elipsoide en dicho punto vendrá dado por

$$\frac{(x_0 - a_0)}{a^2}(x - x_0) + \frac{(y_0 - b_0)}{b^2}(y - y_0) + \frac{(z_0 - c_0)}{c^2}(z - z_0) = 0$$

Comparemos este resultado con el que obtendríamos usando la parametrización simple del elipsoide dada por (6). Sólo podemos considerar puntos del elipsoide que tengan la forma

$$(x_0, y_0, z_0) = (a_0 + a \cos \theta_0 \cos \varphi_0, b_0 + b \sin \theta_0 \cos \varphi_0, c_0 + c \sin \varphi_0)$$

con (θ_0, φ_0) en el interior del recinto, es decir, con $-\pi < \theta_0 < \pi$ y $-\pi/2 < \varphi_0 < \pi/2$. Es fácil ver que estas condiciones excluyen a los puntos del elipsoide tales que $y_0 = b_0$ y $x_0 \leq a_0$, puntos que, intuitivamente, forman la mitad de la elipse que se obtiene como intersección de nuestro elipsoide con el plano de ecuación $y = y_0$. Para los restantes puntos del elipsoide calcularíamos ahora los dos vectores Φ_θ y Φ_φ a considerar en este caso. Más directamente, podemos obtener $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi$, cuyas coordenadas son los siguientes determinantes jacobianos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} &= bc \cos \theta_0 \cos^2 \varphi_0 = abc \cos \varphi_0 \frac{x_0 - a_0}{a^2} \\ \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \varphi)} &= ac \sin \theta_0 \cos^2 \varphi_0 = abc \cos \varphi_0 \frac{y_0 - b_0}{b^2} \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} &= ab \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = abc \cos \varphi_0 \frac{z_0 - c_0}{c^2} \end{aligned}$$

con lo que obtenemos

$$\Phi_\theta \times \Phi_\varphi = abc \cos \varphi_0 \left(\frac{x_0 - a_0}{a^2}, \frac{y_0 - b_0}{b^2}, \frac{z_0 - c_0}{c^2} \right)$$

Puesto que $-\pi/2 < \varphi_0 < \pi/2$, tenemos $\cos \varphi_0 > 0$, de donde deducimos que $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi \neq 0$ y volvemos a obtener la suavidad del elipsoide, sólo que la parametrización usada nos ha obligado a excluir algunos puntos. Observemos también que el vector normal $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi$ es múltiplo del vector gradiente usado al tratar el elipsoide en forma implícita.

Integrales de superficie

8.1. Área de una superficie

Sea W un recinto en el plano y $\Phi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie $S = \Phi(W)$, que escribimos en la forma

$$\Phi(u, v) = ((x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in W) \quad (1)$$

En lo que sigue usaremos frecuentemente las derivadas parciales de la función Φ , esto es, las funciones Φ_u y Φ_v , de W en \mathbb{R}^3 , definidas por

$$\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{y} \quad \Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \quad \text{en } W.$$

Puesto que Φ es de clase C^1 en W , sabemos que Φ_u y Φ_v son funciones continuas, por lo que también lo serán otras funciones construidas a partir de ellas, como la función $\Phi_u \times \Phi_v$, que viene dada por

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k} \quad (2)$$

En la lección anterior sólo hemos usado el valor de la función $\Phi_u \times \Phi_v$ en un punto concreto de W , a efectos de discutir la existencia de plano tangente y vector normal en el correspondiente punto de la superficie. La coincidencia de notación merece un comentario, pues para simplificar es costumbre denotar de la misma forma a la función $\Phi_u \times \Phi_v$ y a su valor en un punto genérico $(u, v) \in W$, valor que rigurosamente debería denotarse por $\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)$. Este pequeño abuso de notación no debe causar confusión, en cada caso es fácil discernir si nos estamos refiriendo a la función o a su valor en un punto. Puesto que $\Phi_u \times \Phi_v$ toma valores en \mathbb{R}^3 , tiene sentido considerar su norma, dada por la expresión

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \left[\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3)$$

que define una función continua en W con valores reales.

Pues bien, cuando la parametrización Φ es *simple*, la integral sobre el recinto W de esta última función nos da el área de la superficie S :

Si W es un recinto en el plano y $\Phi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización simple de la superficie $S = \Phi(W)$, el área de la superficie S viene dada por

$$\text{Área}(S) = \iint_W \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, du \, dv$$

Demostrar la afirmación anterior está fuera de nuestro alcance, entre otras razones porque necesitaríamos definir rigurosamente el área de una superficie, lo que no es fácil. Nos limitamos a poner algunos ejemplos de cálculo de áreas. Empecemos con una superficie en forma explícita,

$$S = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in W\} \quad (4)$$

donde $h: W \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 en W . En este caso tenemos una parametrización simple de S dada por

$$\Phi(x, y) = (x, y, h(x, y)) \quad ((x, y) \in W) \quad (5)$$

Para las derivadas parciales de Φ tenemos

$$\Phi_x = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x}\right); \quad \Phi_y = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y}\right); \quad \Phi_x \times \Phi_y = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right) \quad (6)$$

con lo que

$$\|\Phi_x \times \Phi_y\| = \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} \quad (7)$$

y concluimos que

$$\text{Área}(S) = \iint_W \|\Phi_x \times \Phi_y\| \, dx \, dy = \iint_W \left[(\partial h / \partial x)^2 + (\partial h / \partial y)^2 + 1 \right]^{1/2} dx \, dy$$

Por ejemplo, si la función h es idénticamente nula, obtenemos una superficie S_0 que no es más que el propio recinto W , sólo que visto como subconjunto de \mathbb{R}^3 , contenido en el plano de ecuación $z = 0$. Naturalmente el área de esta superficie no es otra que la del recinto:

$$\text{Área}(S_0) = \iint_W dx \, dy = \text{Área}(W).$$

Como ejemplo menos trivial, calculemos el área de una superficie S_1 ya manejada en la lección anterior, la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ comprendida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. En este caso tenemos $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $h(x, y) = x^2 + y^2$ para $(x, y) \in W$, luego

$$\begin{aligned} \text{Área}(S_1) &= \iint_W \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho = \frac{\pi}{6} \left[(1 + 4\rho^2)^{3/2} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

donde hemos usado un cambio de variable a coordenadas polares.

Como último ejemplo calculamos el área de una esfera S_r de radio $r > 0$, para la que usamos la parametrización

$$\Phi(\theta, \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad ((\theta, \varphi) \in W) \quad (8)$$

definida en el rectángulo $W = [-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Usando los cálculos de la lección anterior para un elipsoide, o repitiendo dichos cálculos en el caso particular de una esfera, tenemos

$$\Phi_\theta \times \Phi_\varphi = r^2 \cos \varphi (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi) \quad (9)$$

de donde

$$\|\Phi_\theta \times \Phi_\varphi\| = r^2 \cos \varphi \quad (10)$$

y deducimos un resultado bien conocido:

$$\text{Área}(S_r) = \iint_W r^2 \cos \varphi \, d\varphi d\theta = r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi d\theta = 4\pi r^2.$$

8.2. Integrales con respecto a una parametrización

Sea de nuevo W un recinto en el plano y $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie $S = \Phi(W)$. Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, se define la **integral de superficie del campo escalar f con respecto a la parametrización Φ** mediante la igualdad

$$\iint_\Phi f \, ds = \iint_\Phi f(x, y, z) \, ds = \iint_W f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, du \, dv$$

La existencia de la última integral está asegurada, puesto que el integrando es una función continua en el recinto W . De las dos notaciones para la integral de superficie que aparecen en la igualdad anterior, la primera es obviamente la más sencilla, la segunda tiene la ventaja de indicar directamente la definición del campo escalar que estamos considerando. Nótese que para la existencia de la integral sólo precisamos que el campo f esté definido y sea continuo sobre la superficie S , aunque habitualmente f tendrá propiedades de regularidad mucho mejores, siendo por ejemplo diferenciable en un abierto de \mathbb{R}^3 que contiene a la superficie S .

Para el cálculo práctico de la integral usamos las ecuaciones paramétricas de la superficie, más concretamente, escribimos la parametrización Φ como en (1). Usando entonces la expresión de la función $\|\Phi_u \times \Phi_v\|$ calculada en (3), la integral de superficie toma la forma:

$$\iint_W f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left[\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2 \right]^{1/2} du \, dv$$

En particular, para una superficie en forma explícita, dada por la expresión (4) como la gráfica de una función h , la parametrización Φ viene dada por (5), y usando (7) tendremos

$$\iint_\Phi f(x, y, z) \, ds = \iint_W f(x, y, h(x, y)) \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} dx \, dy$$

Consideremos por ejemplo el campo escalar f definido en \mathbb{R}^3 por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 1)^{1/2} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

y vamos a calcular su integral de superficie con respecto a la parametrización de una superficie helicoidal definida por

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$$

en el recinto $W = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$. En este caso tenemos

$$\Phi_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \text{y} \quad \Phi_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1)$$

de donde

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = (\sin \theta, -\cos \theta, r) \quad \text{y} \quad \|\Phi_r \times \Phi_\theta\| = (1 + r^2)^{1/2}$$

con lo que obtenemos:

$$\iint_{\Phi} f \, ds = \iint_W f(\Phi(r, \theta)) \|\Phi_r \times \Phi_\theta\| \, dr \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (1 + r^2) \, dr \, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

Pasemos ahora a las integrales de superficie de campos vectoriales. Sea otra vez W un recinto en el plano y $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie $S = \Phi(W)$. Si ahora $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función continua, definimos la **integral de superficie del campo vectorial \mathbf{F} con respecto a la parametrización Φ** mediante la igualdad:

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \iint_W \langle \mathbf{F}(\Phi(u, v)) | \Phi_u \times \Phi_v \rangle \, du \, dv$$

De nuevo la existencia de la última integral está asegurada por ser el integrando una función continua en W . Si escribimos como siempre la parametrización Φ en la forma (1), con lo que $\Phi_u \times \Phi_v$ toma la forma que aparece en (2), y consideramos las tres componentes del campo vectorial, es decir, $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, la integral de superficie toma la forma

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} &= \iint_W \left[P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right] \, du \, dv \\ &\quad + \iint_W \left[Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right] \, du \, dv \\ &\quad + \iint_W \left[R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] \, du \, dv \end{aligned}$$

lo que justifica la notación clásica

$$\iint_{\Phi} P(x, y, z) \, dy \, dz + Q(x, y, z) \, dz \, dx + R(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{\Phi} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

que se usa a menudo para representar la integral de superficie de un campo vectorial.

Para una superficie en forma explícita, usando (5) y (6) tenemos

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \iint_W \left[-P(x, y, h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial x} - Q(x, y, h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial y} + R(x, y, h(x, y)) \right] \, dx \, dy$$

Consideremos por ejemplo el campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$. Calculamos la integral de superficie

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Phi} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

donde Φ es la parametrización de la esfera de radio 1 centrada en el origen, definida por (8), con $r = 1$, sobre el recinto $W = [-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Usando (9) tenemos fácilmente

$$\langle \mathbf{F}(\Phi(\theta, \varphi)) \mid \Phi_{\theta} \times \Phi_{\varphi} \rangle = \cos^2 \theta \cos^3 \varphi + \sin^2 \theta \cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi \cos \varphi = \cos \varphi$$

con lo que obtenemos

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi d\theta = 4\pi$$

8.3. Independencia de la parametrización

Como ya se ha comentado, una misma superficie puede admitir diversas parametrizaciones y las integrales de superficie dependen esencialmente de la parametrización que se utiliza. Sin embargo, dada una parametrización concreta de una superficie, ciertos cambios de variable en el recinto, una simple traslación por ejemplo, deberían producir parametrizaciones equivalentes a la de partida, que deberían conducir al mismo valor de la integral de superficie para cualquier campo. Surge por tanto la pregunta de qué relación deben guardar dos parametrizaciones de una misma superficie para que podamos asegurar que las correspondientes integrales de superficie coinciden.

En primer lugar, es bastante obvio que debemos limitarnos a considerar parametrizaciones *simples*. Intuitivamente, si no imponemos esta restricción, podríamos usar parametrizaciones que “recorren varias veces” una superficie, conduciendo obviamente a distintos valores de las integrales de superficie. Si para dos parametrizaciones simples de una misma superficie intentamos probar que las integrales de superficie coinciden, aparece enseguida la otra condición a imponer, que no es tan intuitiva: las parametrizaciones deben ser *suaves*, en el sentido que vamos a explicar.

Si $W = D \cup \Gamma$ es un recinto en el plano, se dice que una parametrización $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la superficie $S = \Phi(W)$ es una **parametrización suave** cuando la función $\Phi_u \times \Phi_v$ no se anula en D . Naturalmente, la nomenclatura se justifica porque en tal caso sabemos que la superficie S es suave en cada punto $\mathbf{p} \in S$ que sea de la forma $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0)$ con $(u_0, v_0) \in D$ y el valor en (u_0, v_0) de la función $\Phi_u \times \Phi_v$ es un vector normal a la superficie en el punto \mathbf{p} . Sin embargo, en general no podemos asegurar que la superficie sea suave en todos sus puntos, pues no tenemos información sobre los puntos de la forma $\Phi(u, v)$ con $(u, v) \in \Gamma$.

Por ejemplo, para la superficie en forma explícita dada por (4), la parametrización Φ que aparece en (5) es simple y suave. De hecho en este caso la función $\Phi_x \times \Phi_y$ no se anula en todo el recinto W y la superficie es suave en todos sus puntos. La parametrización local de una superficie en forma implícita siempre puede hacerse de forma que se obtengan parametrizaciones simples y suaves.

Como ejemplo más concreto, consideremos la parametrización de una esfera definida por la igualdad (8) en el rectángulo $W = \{(\theta, \varphi) : |\theta| \leq \pi, |\varphi| \leq \pi/2\}$. En vista de (10), la igualdad $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi = 0$ implica $\cos \varphi = 0$, es decir, $|\varphi| = \pi/2$, con lo que el par (θ, φ) pertenece a la frontera del recinto W y no a su región interior D . Por tanto $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi$ no se anula en D y Φ es una parametrización suave de la esfera, que también sabemos es una parametrización simple. De forma análoga se puede probar que cualquier elipsoide admite una parametrización simple y suave.

Pues bien, si sólo admitimos parametrizaciones simples y suaves, la integral de superficie de un campo escalar es independiente de la parametrización:

Sean $\Phi_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : W_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones simples y suaves de una misma superficie $S = \Phi_1(W_1) = \Phi_2(W_2)$. Entonces, para cualquier campo escalar continuo $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ se verifica que

$$\iint_{\Phi_1} f ds = \iint_{\Phi_2} f ds$$

8.4. Integral de superficie de un campo escalar

Para la mayoría de las superficies, las que admiten parametrizaciones simples y suaves, el resultado recién comentado nos permite definir una integral de superficie de campos escalares que no depende de la parametrización concreta que usemos para calcularla:

Si una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ admite una parametrización simple y suave, para cada función continua $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, la **integral de superficie del campo escalar f sobre la superficie S** se define mediante la igualdad

$$\iint_S f ds = \iint_{\Phi} f ds = \iint_W f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv$$

donde $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ es cualquier parametrización simple y suave de la superficie S .

Así pues, tiene sentido por ejemplo hablar de la integral de un campo escalar continuo sobre cualquier superficie en forma explícita, o sobre una esfera o elipsoide, no se produce ambigüedad alguna por el hecho de que no concretemos la parametrización que estamos considerando. Esta noción de integral de superficie, independiente de la parametrización, es la que tiene un significado intuitivo más claro y también la que admite una interpretación física, que pasamos a explicar.

Observemos que si el campo escalar f es constantemente igual a 1, la integral de superficie nos da precisamente el área de la superficie S o si se quiere, la masa de una lámina que tuviese la forma de la superficie y densidad superficial constantemente igual a 1. De manera más general, cuando el campo f no toma valores negativos podemos imaginar una distribución de masa sobre la superficie S pero con densidad variable, de forma que $f(x, y, z)$ sería la densidad superficial (masa por unidad de área) en cada punto $(x, y, z) \in S$. La integral de superficie nos daría entonces la masa total. En el caso general, admitiendo que f pueda tomar valores negativos, podemos pensar en una distribución sobre la superficie de una magnitud física que admita valores negativos, carga eléctrica por ejemplo.

8.5. Orientación de superficies

Para campos vectoriales, el problema de la independencia de la parametrización no admite un tratamiento tan sencillo y satisfactorio como el que se ha hecho para campos escalares. La razón estriba en que la integral de superficie de un campo vectorial con respecto a una parametrización Φ involucra la función $\Phi_u \times \Phi_v$ y no sólo su norma como ocurre con los campos escalares. Para comprender rápidamente la diferencia, basta pensar lo que sucede si intercambiamos simplemente los papeles de los parámetros u y v , con lo que sustituimos la función $\Phi_u \times \Phi_v$ por su opuesta $\Phi_v \times \Phi_u$. Qué duda cabe de que hemos cambiado la parametrización de nuestra superficie por otra completamente equivalente, pero la integral ha cambiado de signo. Para una amplia gama de superficies, veremos que al cambiar una parametrización simple y suave por otra, la integral de superficie de un campo vectorial se mantiene o cambia de signo, lo que nos sugiere claramente un problema de orientación. Vamos a definir con precisión qué se entiende por orientar una superficie para después aplicar esta idea a las integrales de campos vectoriales.

Una **orientación** de una superficie S es, por definición, una función continua $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, para cada $\mathbf{p} \in S$, $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ es un vector unitario normal a la superficie S en el punto \mathbf{p} . Cuando existe una tal orientación, decimos lógicamente que la superficie S es **orientable**. Abundan, como vamos a ver, los ejemplos de superficies orientables.

Toda superficie en forma explícita es orientable. En efecto, si una superficie S viene dada por la expresión (4), como gráfica de una función h de clase C^1 en un recinto W , sabemos que, para cada $(x, y) \in W$, el vector no nulo que aparece en (6) es normal a la superficie en el punto $(x, y, h(x, y))$ y su norma viene dada por (7). Basta entonces definir

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \left(-\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial h}{\partial y}(x, y), 1 \right) \quad (11)$$

para todo punto $(x, y, z) = (x, y, h(x, y)) \in S$, para obtener una orientación de la superficie S .

Toda superficie en forma implícita es orientable. En efecto, consideremos la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega : g(x, y, z) = 0\} \quad (12)$$

donde Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 y g es una función de clase C^1 en Ω que se anula en algún punto de Ω y cuyo gradiente no se anula en ningún punto de S . Sabemos entonces que, para cada punto $(x, y, z) \in S$, el vector $\nabla g(x, y, z)$ es normal a la superficie S en dicho punto, luego para obtener una orientación de la superficie basta definir

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} \quad \forall (x, y, z) \in S. \quad (13)$$

Por ejemplo, para obtener una orientación de la esfera

$$S_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 + (z - c_0)^2 = r^2\} \quad (14)$$

basta definir

$$\mathbf{N}(x, y, z) = r^{-1}(x - a_0, y - b_0, z - c_0) \quad \forall (x, y, z) \in S_r \quad (15)$$

Pasando finalmente el caso general de una superficie en forma paramétrica, supongamos que $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la superficie $S = \Phi(W)$, tal que la función Φ es inyectiva en todo el recinto W y verifica que $\Phi_u \times \Phi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in W$. En particular Φ es una parametrización simple y suave, pero ahora estamos exigiendo mucho más. Cada punto $(x, y, z) \in S$ tiene la forma $\Phi(u, v)$ para un único par $(u, v) \in W$ y se puede demostrar que (u, v) depende de manera continua de (x, y, z) , dicho de otra forma, Φ^{-1} es una función continua de S en W . Obtenemos entonces una orientación de la superficie S sin más que definir,

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} [\Phi^{-1}(x, y, z)] \quad \forall (x, y, z) \in S$$

donde en el segundo miembro aparece entre corchetes el punto donde debe evaluarse la función indicada.

Como ocurre en los ejemplos anteriores, una superficie orientable ha de ser suave en todos sus puntos, para que dispongamos de vectores normales en todos ellos. El ejemplo más conocido de una superficie simple, que es suave en todos sus puntos pero no es orientable, es la llamada **cinta de Möbius**, que no vamos a estudiar aquí. Baste saber que tal ejemplo existe.

Es lógico preguntarse cuantas orientaciones admite una superficie orientable. De entrada al menos dos, puesto que si \mathbf{N} es una orientación, $-\mathbf{N}$ es otra. A efectos de las integrales de superficie, lo importante es que las superficies que nos interesan, las que admiten una parametrización simple y suave, no pueden tener más de dos orientaciones. Esto es una fácil consecuencia del siguiente enunciado, que es el que realmente vamos a usar:

Sea \mathbf{N} una orientación de la superficie $S = \Phi(W)$, donde Φ es una parametrización simple y suave, definida en un recinto W del plano. Se verifica entonces que

$$\Phi_u \times \Phi_v = \sigma \mathbf{N}(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| \quad (16)$$

para todo $(u, v) \in W$ donde σ es constante, pudiendo valer 1 o -1 . Cuando $\sigma = 1$ decimos que la parametrización Φ determina la orientación \mathbf{N} mientras que cuando $\sigma = -1$ decimos que Φ determina la orientación $-\mathbf{N}$.

La demostración del enunciado anterior puede resultar instructiva. Observamos en primer lugar que basta probar la igualdad (16) para $(u, v) \in D$ donde D es el interior del recinto W . Ello se debe a que los dos miembros de dicha igualdad son funciones continuas en el recinto W que, caso de coincidir en el dominio D habrán de coincidir en su cierre, que es W .

Para $(u, v) \in D$, por ser suave la parametrización Φ , sabemos que la función $\Phi_u \times \Phi_v$ toma un valor no nulo en el punto (u, v) que es un vector normal a la superficie S en el punto $\Phi(u, v)$. Por definición de orientación, lo mismo le ocurre al vector $\mathbf{N}(\Phi(u, v))$, pero sabemos que el plano tangente a la superficie en el punto $\Phi(u, v)$ es único, luego esos vectores normales deberán ser cada uno múltiplo escalar del otro. Así pues, se deberá tener

$$\frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} = \pm \mathbf{N}(\Phi(u, v))$$

Considerando entonces la función $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(u, v) = \left\| \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} - \mathbf{N}(\Phi(u, v)) \right\| \quad ((u, v) \in D)$$

tenemos que λ sólo toma los valores 0 y 2. Pero λ es una función continua en el dominio D , con lo que vemos fácilmente que no puede tomar ambos valores sin tomar todos los intermedios. Por tanto, o bien λ es idénticamente nula en D , y se cumple (16) con $\sigma = 1$, o bien λ es constantemente igual a 2 en D , y se cumple (16) con $\sigma = -1$.

Veamos ahora por qué una superficie orientable que admita una parametrización simple y suave admite exactamente dos orientaciones. Con la notación usada en la demostración anterior, supongamos que \mathbf{N}_1 es otra orientación de la superficie y comprobaremos enseguida que se debe tener $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}$ o $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{N}$. En efecto, la orientación \mathbf{N}_1 también verificará (16), es decir

$$\Phi_u \times \Phi_v = \sigma_1 \mathbf{N}_1(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\|$$

para todo $(u, v) \in W$, con $\sigma_1 = \pm 1$. Por tanto

$$\sigma_1 \mathbf{N}_1(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sigma \mathbf{N}(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| \quad \forall (u, v) \in W$$

Usando que $\Phi_u \times \Phi_v$ no se anula en D deducimos que

$$\mathbf{N}_1(\Phi(u, v)) = \tau \mathbf{N}(\Phi(u, v)) \quad \forall (u, v) \in D$$

donde también $\tau = \pm 1$. Finalmente, aprovechando como antes que W es el cierre de su región interior, concluimos que la igualdad anterior se verifica en todo el recinto W , lo que equivale a decir que $\mathbf{N}_1 = \tau \mathbf{N}$, como queríamos.

Intuitivamente, las dos orientaciones de una superficie se corresponden con sus dos “caras”, de forma que una orientación \mathbf{N} correspondería a la cara de la superficie en la que debemos situarnos (se entiende con los pies en la superficie) de forma que, en cada punto \mathbf{p} , el vector normal unitario $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ apunte hacia arriba. En términos igualmente intuitivos, una superficie es orientable cuando tiene dos caras. En la práctica suele ser fácil distinguir las dos orientaciones de una superficie, como vamos a ver con ejemplos.

Para una superficie en forma explícita, la orientación dada por (11) se caracteriza porque la tercera coordenada del vector normal $\mathbf{N}(x, y, z)$ es siempre positiva, podríamos decir que el vector normal apunta siempre hacia arriba. Intuitivamente esta orientación corresponde a la “cara superior” de la superficie.

Para una superficie en forma implícita, dada por la expresión (12), es frecuente que la función g esté definida en todo \mathbb{R}^3 y que la superficie sea la frontera de un dominio acotado G . Es decir, el conjunto $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) < 0\}$ es un dominio acotado en \mathbb{R}^3 con $S = \partial G$. En este caso, si usamos la orientación definida en (13) decimos que la superficie S está orientada mediante la normal exterior. Como ejemplo concreto, en (15) tenemos la orientación mediante la normal exterior de la esfera dada por (14). La explicación de esta nomenclatura es fácil de adivinar, pero vamos a explicarla en una situación mucho más general.

Supongamos que la superficie S está contenida en la frontera de un dominio $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Se dice que S está orientada mediante la **normal exterior** a G si su orientación \mathbf{N} verifica la siguiente condición: para cada punto $\mathbf{p} \in S$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{p} + \alpha \mathbf{N}(\mathbf{p}) \notin G$ para $0 < \alpha < \varepsilon$. La explicación es la siguiente: intuitivamente el dominio G está “a un lado” de la superficie S , de forma que, vista desde dentro de G , la superficie tiene una cara interior (la que vemos) y otra exterior. La orientación \mathbf{N} que estamos considerando corresponde a la cara exterior, porque al realizar un pequeño desplazamiento desde cualquier punto \mathbf{p} de la superficie en el sentido del vector normal $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ llegamos a un punto $\mathbf{p} + \alpha \mathbf{N}(\mathbf{p})$ que está fuera del dominio G .

8.6. Integral de superficie de un campo vectorial

Podemos ya analizar la independencia de la parametrización para integrales de superficie de campos vectoriales. El resultado irá en la misma línea que para campos escalares, sólo que debemos tener en cuenta la orientación y, en particular, la superficie deberá ser orientable.

Sea pues \mathbf{N} una orientación de una superficie $S = \Phi(W)$ donde Φ es una parametrización simple y suave de la superficie, que suponemos determina la orientación \mathbf{N} , es decir, se tiene que

$$\Phi_u \times \Phi_v = \mathbf{N}(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| \quad ((u, v) \in W)$$

Entonces, dado un campo vectorial continuo $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tendremos

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_W \langle \mathbf{F}(\Phi(u, v)) | \mathbf{N}(\Phi(u, v)) \rangle \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv$$

y hemos llegado a la integral de superficie de un campo escalar. Más concretamente, si para $(x, y, z) \in S$ definimos

$$f(x, y, z) = \langle \mathbf{F}(x, y, z) | \mathbf{N}(x, y, z) \rangle \quad (17)$$

tenemos un campo escalar continuo $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ que evidentemente verifica

$$\iint_{\Phi} f ds = \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (18)$$

El razonamiento anterior tiene consecuencias importantes que ahora vamos a explicar. En primer lugar, si Ψ es otra parametrización simple y suave de la superficie S que también determine la orientación \mathbf{N} , podemos aplicar a Ψ el mismo razonamiento que a Φ y aprovechar la independencia de la parametrización que ya conocemos para campos escalares, obteniendo

$$\iint_{\Psi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Psi} f ds = \iint_{\Phi} f ds = \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Si, por el contrario Ψ determinase la orientación $-\mathbf{N}$, está claro que las integrales con respecto a las dos parametrizaciones serían opuestas. Hemos probado:

Sean $\Phi_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : W_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones simples y suaves de una misma superficie orientable $S = \Phi_1(W_1) = \Phi_2(W_2)$. Entonces, para todo campo vectorial continuo $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ se verifica que

$$\iint_{\Phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \tau \iint_{\Phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

donde $\tau = 1$ si Φ_1 y Φ_2 determinan la misma orientación de la superficie S y $\tau = -1$ si determinan orientaciones opuestas.

A partir del resultado anterior podremos ya definir la integral de superficie de un campo vectorial sobre una superficie orientada. Conviene resaltar que esta integral va a coincidir siempre con la integral de superficie de un campo escalar, como ha quedado claramente de manifiesto en la igualdad (18). La definición formal es la siguiente:

Sea S una superficie orientable que admita una parametrización simple y suave, sea \mathbf{N} una orientación de S y $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función continua. La **integral de superficie del campo vectorial \mathbf{F} sobre la superficie S orientada mediante \mathbf{N}** se define de la siguiente forma:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_W \langle \mathbf{F}(\Phi(u, v)) | \Phi_u \times \Phi_v \rangle du dv$$

donde $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ es cualquier parametrización simple y suave de la superficie S que determine la orientación \mathbf{N} .

Equivalentemente, según hemos visto, se tiene

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S f ds$$

donde $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es el campo escalar definido por (17). Esta última igualdad puede muy bien resumirse escribiendo $f = \langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle$, con lo que aparece otra notación que se usa frecuentemente para la integral recién definida

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle ds$$

Esta última notación tiene la ventaja de recordarnos que debemos fijar una orientación para que la integral quede unívocamente determinada.

Así pues tiene sentido, por ejemplo, hablar de la integral de un campo vectorial continuo sobre una superficie en forma explícita o sobre una esfera o elipsoide, siempre que fijemos una orientación. Por ejemplo podemos orientar una esfera mediante la normal exterior o trabajar con la cara superior de una superficie en forma explícita. Como ocurría con los campos escalares, no se produce ambigüedad alguna por el hecho de que no concretemos la parametrización que estamos considerando, salvo que dicha parametrización debe ser simple, suave y determinar la orientación elegida.

Una interpretación física interesante de la integral de superficie se obtiene pensando en el campo vectorial \mathbf{F} como el campo de velocidades de un fluido en movimiento en una cierta región del espacio que contenga a la superficie S . La clave para ello consiste en interpretar correctamente el campo escalar $\langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle$, como vamos a ver.

De entrada, la función $\langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle$ mide en cada punto la componente de la velocidad del fluido en la dirección normal a la superficie y en el sentido determinado por la orientación \mathbf{N} . Si esta función fuese constante, al multiplicarla por el área de S nos daría el volumen total de fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo en el sentido indicado. Concluimos que la función $\langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle$ también mide, en cada punto, la cantidad de fluido que atraviesa la superficie en el sentido indicado, por unidad de área y por unidad de tiempo. Lógicamente esta cantidad es variable, precisamente porque la velocidad del fluido varía de un punto a otro de la superficie.

Usando ahora la interpretación que ya conocemos para campos escalares, concluimos que la integral de superficie de nuestro campo de velocidades nos da la cantidad total de fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo en el sentido de la orientación fijada.

Inspirándose en el ejemplo concreto que acabamos de sugerir, la integral de superficie de un campo vectorial suele denominarse **flujo** del campo a través de la superficie en el sentido determinado por la orientación. Por ejemplo hablamos de un flujo saliente a través de una esfera orientada mediante la normal exterior.

8.7. Propiedades de las integrales de superficie

Comentamos brevemente sólo dos propiedades, que son análogas a las que tenían las integrales de línea.

Linealidad. Sea Φ una parametrización de una superficie S , f, g dos campos escalares y \mathbf{F}, \mathbf{G} dos campos vectoriales, todos ellos continuos en S , y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\begin{aligned}\iint_{\Phi} (\alpha f + \beta g) ds &= \alpha \iint_{\Phi} f ds + \beta \iint_{\Phi} g ds \\ \iint_{\Phi} (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{s} &= \alpha \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \beta \iint_{\Phi} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}\end{aligned}$$

En particular, si la superficie S admite una parametrización simple y suave se tendrá

$$\iint_S (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \iint_S f ds + \beta \iint_S g ds$$

y si además S es orientable, será también

$$\iint_S (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{s} = \alpha \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \beta \iint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}$$

siempre que para las tres integrales usemos la misma orientación.

Continuidad. Supongamos ahora que $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización simple de la superficie $S = \Phi(W)$, sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo y tomemos una constante $M > 0$ de forma que $|f(x, y, z)| \leq M$ para todo punto $(x, y, z) \in S$. Es fácil ver que

$$\left| \iint_{\Phi} f ds \right| \leq M \iint_W \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv = M \text{Área}(S)$$

En particular, si S admite una parametrización simple y suave, se tendrá

$$\left| \iint_S f ds \right| \leq M \text{Área}(S)$$

Si ahora \mathbf{F} es un campo vectorial continuo en S y $\|\mathbf{F}(x, y, z)\| \leq K$ para todo $(x, y, z) \in S$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se comprueba sin dificultad que

$$\left| \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| \leq K \text{Área}(S)$$

y en particular, cuando S sea orientable y admita una parametrización simple y suave, podremos escribir

$$\left| \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| \leq K \text{Área}(S)$$

cualquiera que sea la orientación que se considere.

En resumen, las desigualdades anteriores expresan la idea de que las integrales de superficie dependen de manera continua del campo, escalar o vectorial, que se integra.

Teoremas de Stokes y Gauss

Presentamos a continuación los dos resultados principales del Cálculo Vectorial. Por una parte, el *Teorema de Stokes* generaliza la fórmula de Green, estableciendo la igualdad entre una integral de línea y una de superficie. Por otra, el *Teorema de Gauss*, también conocido como *Teorema de la Divergencia* o *Fórmula de Gauss-Ostrogradsky*, permite calcular una integral de superficie mediante una integral triple.

9.1. Enunciado del Teorema de Stokes

A continuación enunciamos la versión tridimensional de la fórmula de Green, conocida como Teorema de Stokes, que nos permite calcular una integral de línea de un campo vectorial en el espacio mediante una integral de superficie del rotacional del campo.

Teorema. Sea γ un camino en \mathbb{R}^2 , regular a trozos, cerrado y simple, que recorre una curva de Jordan Γ con orientación positiva. Consideremos el recinto W cuya frontera es Γ y sea $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de clase C^2 de la superficie $S = \Phi(W)$. Sea finalmente $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en un subconjunto abierto Ω de \mathbb{R}^3 que contenga a la superficie S . Entonces, la integral de línea del campo \mathbf{F} a lo largo del camino $\Phi \circ \gamma$ coincide con la integral de superficie del rotacional de \mathbf{F} con respecto a la parametrización Φ :

$$\int_{\Phi \circ \gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Phi} \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Como ocurría con la Fórmula de Green, la igualdad anterior, al menos en los casos que más interesan en la práctica, puede escribirse con una notación que ayuda a entender su significado al tiempo que nos permite recordar con más facilidad las hipótesis del teorema. Para explicarlo con detalle, trabajaremos por separado con los dos miembros de la igualdad.

El camino $\Phi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow S$ está definido en el mismo intervalo que γ , digamos $[a, b]$, y viene dado por $[\Phi \circ \gamma](t) = \Phi(\gamma(t))$ para $a \leq t \leq b$. Como la curva de Jordan Γ es la frontera del recinto W , el camino $\Phi \circ \gamma$ recorre la curva $\Phi(\Gamma) = \Phi(\partial W)$ que podemos entender como un especie de “borde” de la superficie S y denotar por ∂S . Conviene aclarar que ∂S depende de la parametrización Φ y no es en absoluto la frontera de S vista como subconjunto de \mathbb{R}^3 , simplemente escribimos $\partial S = \Phi(\partial W)$ por similitud con $S = \Phi(W)$.

Pues bien, resulta ahora natural denotar el camino $\Phi \circ \gamma$ por ∂S^+ puesto que recorre la curva ∂S y, aunque no hablamos de la orientación de un camino en \mathbb{R}^3 , esta notación nos recuerda la orientación positiva de γ , que de alguna manera hace que el camino $\Phi \circ \gamma$ recorra la curva ∂S en un cierto sentido. Por supuesto, el camino $\Phi \circ \gamma_{op}$ la recorrería en sentido contrario.

Con respecto a la integral de superficie que aparece en el teorema, en lugar de la integral con respecto a la parametrización Φ , es natural considerar la integral sobre la superficie S , siempre que ello tenga sentido, es decir, siempre que S sea orientable y admita una parametrización simple y suave. En tal caso la Fórmula de Stokes puede por tanto escribirse en la forma

$$\oint_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Aparentemente hemos introducido aquí una ambigüedad, al no concretar la orientación de la superficie, pero en realidad esta ambigüedad en el segundo miembro de la fórmula es coherente con la que también hemos introducido en el primero. Para calcular la integral de superficie debemos usar una parametrización simple y suave Φ , y esa misma parametrización es la que debemos usar para definir el camino $\partial S^+ = \Phi \circ \gamma$. Intuitivamente, lo que ocurriría si usáramos una parametrización Ψ que definiese una orientación opuesta a la de Φ es que el camino $\Psi \circ \gamma$ tendría también sentido contrario al de $\Phi \circ \gamma$, luego tanto la integral de línea como la de superficie cambian de signo al sustituir Φ por Ψ , pero la igualdad entre ellas se mantiene.

Finalmente, si consideramos las tres componentes del campo vectorial, escribiendo como siempre $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, y usamos las notaciones clásicas para las integrales, la Fórmula de Stokes resulta más explícita:

$$\oint_{\partial S^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

9.2. Ejemplo

Enseguida veremos aplicaciones más relevantes del Teorema de Stokes, pero vamos a analizar con detalle un primer ejemplo sencillo. Calculemos la integral de línea

$$I = \int_{\sigma} -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

donde el camino σ recorre la curva Σ que se obtiene como intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano de ecuación $x + y + z = 1$. Más concretamente,

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t) \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

El cálculo directo usando la definición de la integral de línea es laborioso, aunque no difícil. Su cálculo mediante el Teorema de Stokes es casi inmediato, pero lo explicamos con todo detalle.

Necesitamos ver la curva Σ como “borde” de una superficie, pero es fácil adivinar la forma de conseguirlo. Consideramos el recinto W y la parametrización Φ de clase C^∞ dados por

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \Phi(x, y) = (x, y, 1 - x - y) \quad ((x, y) \in W)$$

Observamos que la superficie $S = \Phi(W)$ coincide con la parte del plano $x + y + z = 1$ contenida en la región interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$:

$$S = \{(x, y, 1 - x - y) : (x, y) \in W\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, x + y + z = 1\}$$

Anotemos el vector normal (constante) a la superficie (plana) S :

$$\Phi_x \times \Phi_y = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad ((x, y) \in W)$$

Intuitivamente, el “borde” de la superficie S es efectivamente la curva Σ , cosa que podemos comprobar formalmente:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\} \\ &= \{(x, y, 1 - x - y) : x^2 + y^2 = 1\} = \Phi(\partial W) = \partial S \end{aligned}$$

En realidad, tomando directamente $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ para $t \in [-\pi, \pi]$, tenemos que γ es un camino en \mathbb{R}^2 , regular, cerrado y simple, que recorre la circunferencia ∂W con orientación positiva, y observamos que

$$\Phi(\gamma(t)) = \Phi(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t) = \sigma(t) \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

es decir, $\sigma = \Phi \circ \gamma$. Estamos pues claramente en situación de aplicar el Teorema de Stokes.

Notemos finalmente que el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y^3 \mathbf{i} + x^3 \mathbf{j} - z^3 \mathbf{k} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

es de clase C^∞ en \mathbb{R}^3 con $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = 3(x^2 + y^2) \mathbf{k}$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$. Aplicamos por tanto el Teorema de Stokes y completamos el cálculo de la integral buscada:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Phi \circ \gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Phi} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_W \langle \text{rot } \mathbf{F}(\Phi(x, y)) | \Phi_x \times \Phi_y \rangle dx dy \\ &= 3 \iint_W (x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \rho^3 d\rho d\theta = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

9.3. La fórmula de Green como caso particular

El Teorema de Stokes no sólo nos da la versión tridimensional de la Fórmula de Green sino que de hecho generaliza el Teorema de Green. Para ponerlo de manifiesto basta en realidad pensar que un recinto en el plano es un tipo muy particular de superficie. Veámoslo con detalle, pues se trata de la aplicación más sencilla del Teorema de Stokes.

Partimos pues de las hipótesis del Teorema de Green. Por una parte, consideramos un camino γ en \mathbb{R}^2 , regular a trozos, cerrado y simple, que recorre una curva de Jordan Γ con orientación positiva. Por otra parte, suponemos que $\mathbf{F} = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, que contiene al recinto W cuya frontera es Γ . Queremos probar que la integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de γ coincide con la integral doble sobre W del rotacional escalar de \mathbf{F} .

Para ponernos en condiciones de usar el Teorema de Stokes, consideremos la parametrización $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(x, y) = (x, y, 0) \quad ((x, y) \in W)$$

que consiste simplemente en ver el recinto W como una superficie en \mathbb{R}^3 , ya que la superficie $S = \Phi(W)$ viene dada por $S = \{(x, y, 0) : (x, y) \in W\}$. Notemos que Φ es una función de clase C^∞ y nos da una parametrización simple y suave de la superficie S , con vector normal constante:

$$\Phi_x = \mathbf{i}; \quad \Phi_y = \mathbf{j}; \quad \Phi_x \times \Phi_y = \mathbf{k} \quad (\text{en } W).$$

Por otra parte, a partir del campo $\mathbf{F} = (P, Q)$, definimos un campo vectorial en el espacio como ya hicimos para motivar la definición del rotacional escalar. Simplemente tomamos

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega\}, \\ \tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) &= (P(x, y), Q(x, y), 0) \quad ((x, y, z) \in \tilde{\Omega}) \end{aligned} \quad (1)$$

Es evidente que $\tilde{\Omega}$ es un abierto de \mathbb{R}^3 que contiene a la superficie S mientras que $\tilde{\mathbf{F}}$ es un campo vectorial de clase C^1 en $\tilde{\Omega}$ cuyo rotacional viene dado por

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) = \text{rot } \mathbf{F}(x, y) \mathbf{k} \quad ((x, y, z) \in \tilde{\Omega})$$

Estamos ya preparados para aplicar el Teorema de Stokes, pero trabajemos previamente con las dos integrales que dicho teorema hará coincidir. Por una parte, para la integral de superficie tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} \text{rot } \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_W \langle \text{rot } \tilde{\mathbf{F}}(x, y, 0) \mid \Phi_x \times \Phi_y \rangle dx dy \\ &= \iint_W \langle \text{rot } \mathbf{F}(x, y) \mathbf{k} \mid \mathbf{k} \rangle dx dy = \iint_W (\text{rot } \mathbf{F}) dx dy \end{aligned} \quad (2)$$

Con respecto a la integral de línea, observemos los caminos γ y $\Phi \circ \gamma$:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{y} \quad [\Phi \circ \gamma](t) = (x(t), y(t), 0) \quad (a \leq t \leq b)$$

Comprobamos entonces sin dificultad que donde γ sea derivable se tendrá

$$\langle \tilde{\mathbf{F}}(\Phi \circ \gamma(t)) \mid (\Phi \circ \gamma)'(t) \rangle = \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \rangle$$

de donde deducimos que

$$\int_{\Phi \circ \gamma} \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (3)$$

Usando las igualdades (2) y (3), al aplicar el Teorema de Stokes obtenemos directamente la Fórmula de Green:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Phi \circ \gamma} \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Phi} \text{rot } \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{s} = \iint_W (\text{rot } \mathbf{F}) dx dy$$

9.4. Fórmula de Green en un anillo

Aplicando el Teorema de Stokes a otra superficie plana, deduciremos una nueva versión de la fórmula de Green, que también podría obtenerse por otros procedimientos, pero nos interesa ilustrar el uso del Teorema de Stokes.

Para $0 < r < R$, consideremos el rectángulo $W = [r, R] \times [0, 2\pi]$ y la función $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0) \quad (r \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

Claramente Φ es una función de clase C^∞ en W y se comprueba fácilmente que es una parametrización simple de la superficie $S = \Phi(W)$, que es la región del plano $z = 0$ comprendida entre las circunferencias centradas en el origen con radios r y R . Más concretamente, escribiendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r \leq \|(x, y)\| \leq R\}$ tenemos un anillo en el plano y claramente $S = \{(x, y, 0) : (x, y) \in A\}$ no es más que ese anillo, sólo que visto como subconjunto de \mathbb{R}^3 . Para $(\rho, \theta) \in W$ tenemos

$$\Phi_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \Phi_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \quad \text{y} \quad \Phi_\rho \times \Phi_\theta = \rho \mathbf{k},$$

en particular Φ es una parametrización suave de la superficie S .

Supongamos ahora que \mathbf{F} es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ que contenga al anillo A y, para poder aplicar el Teorema de Stokes, definimos un abierto $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3$ que contiene a la superficie S , y un campo vectorial $\tilde{\mathbf{F}}$ de clase C^1 en $\tilde{\Omega}$, exactamente igual que lo hicimos en el apartado anterior, mediante las expresiones (1). Calculemos ahora la integral de superficie que aparecerá al aplicar el Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_W \langle \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{F}}(\Phi(\rho, \theta)) | \Phi_\rho \times \Phi_\theta \rangle d\rho d\theta \\ &= \iint_W \mathbf{rot} \mathbf{F}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \iint_A \mathbf{rot} \mathbf{F}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

donde, en la última igualdad, hemos usado un cambio de variable a coordenadas polares. Nótese que la última integral doble es la que aparece en la Fórmula de Green, sólo que en lugar del recinto delimitado por una curva de Jordan tenemos el anillo A , cuya frontera es unión de dos circunferencias.

Por otra parte, veamos cual es la integral de línea que aparecerá al aplicar el Teorema de Stokes. Naturalmente, debemos usar un camino γ , regular a trozos, cerrado y simple, que recorra la frontera del rectángulo W con orientación positiva. Es fácil ver que todo ello se consigue usando la suma de cuatro segmentos, $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$, definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 0), \quad \gamma_3(t) = (r + R - t, 2\pi) \quad (r \leq t \leq R) \\ \gamma_2(t) &= (R, t), \quad \gamma_4(t) = (r, 2\pi - t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \end{aligned}$$

Pensemos ahora que $\Phi \circ \gamma$ es a su vez la suma de los caminos $\Phi \circ \gamma_k$ para $k = 1, 2, 3, 4$, caminos que vienen dados por

$$\begin{aligned} [\Phi \circ \gamma_1](t) &= (t, 0, 0), \quad [\Phi \circ \gamma_3](t) = (r + R - t, 0, 0) \quad (r \leq t \leq R) \\ [\Phi \circ \gamma_2](t) &= (R \cos t, R \sin t, 0) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \\ [\Phi \circ \gamma_4](t) &= (r \cos t, -r \sin t, 0) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \end{aligned}$$

Por una parte es claro que $\Phi \circ \gamma_3$ es el camino opuesto de $\Phi \circ \gamma_1$, con lo que las integrales a lo largo de ambos caminos son opuestas y van a cancelarse. Los otros dos caminos recorren circunferencias en el plano $z = 0$ centradas en el origen con radios R y r , la primera con orientación positiva y la segunda negativa. Para tener una notación más sugestiva podemos considerar los caminos en \mathbb{R}^2 dados por

$$C_R(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad C_r(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (5)$$

y, a partir de los comentarios anteriores, comprobamos fácilmente que

$$\int_{\Phi \circ \gamma} \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Phi \circ \gamma_2} \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Phi \circ \gamma_4} \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \int_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (6)$$

En vista de las igualdades (4) y (6), el Teorema de Stokes nos da lo siguiente:

Consideremos un anillo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r \leq \|(x, y)\| \leq R\}$ con $0 < r < R$ y supongamos que $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ que contenga al anillo A . Entonces se verifica que

$$\int_{C_R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \int_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_A (\text{rot } \mathbf{F}) \, dx \, dy$$

donde los caminos C_R y C_r vienen dados por (5).

Este resultado puede entenderse como una versión del Teorema de Green para el anillo A . Obsérvese que la frontera de A es la unión de las dos circunferencias recorridas por los caminos C_R y C_r , así que el primer miembro de la igualdad podría entenderse como la integral de línea a lo largo de la frontera del anillo A . La orientación positiva en este caso, como ocurría para la región interior a una curva de Jordan, consiste en que el camino de integración deje siempre a la izquierda el anillo A . Para ello, la circunferencia de radio R debe orientarse positivamente, pero la de radio r debe orientarse negativamente, de ahí que tengamos la diferencia de integrales y no la suma.

9.5. Caso de una superficie cerrada

Frecuentemente la integral de línea que aparece en el Teorema de Stokes se anula, cualquiera que sea el campo vectorial que estemos considerando, simplemente porque el camino de integración es una suma de caminos triviales (constantes) y caminos que se recorren en ambos sentidos, cancelándose las integrales. Por tanto, al aplicar el teorema concluimos que la integral de superficie del rotacional de una amplia gama de campos se anula. En lugar de enunciar un resultado general de este tipo, vamos a analizar un ejemplo concreto.

Consideremos la esfera unidad $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ para la que usamos la parametrización Φ definida en el rectángulo $W = [-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ por

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi) \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2)$$

De nuevo usamos un camino regular a trozos cerrado y simple que recorre la frontera de W con orientación positiva, tomando $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$, donde

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t, -\pi/2), & \gamma_3(t) &= (-t, \pi/2) & (-\pi \leq t \leq \pi) \\ \gamma_2(t) &= (\pi, t), & \gamma_4(t) &= (-\pi, -t) & (-\pi/2 \leq t \leq \pi/2)\end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}[\Phi \circ \gamma_1](t) &= (0, 0, -1), & [\Phi \circ \gamma_3](t) &= (0, 0, 1) & (-\pi \leq t \leq \pi) \\ [\Phi \circ \gamma_2](t) &= (-\cos t, 0, \sin t) & & & (-\pi/2 \leq t \leq \pi/2) \\ [\Phi \circ \gamma_4](t) &= (-\cos t, 0, -\sin t) & & & (-\pi/2 \leq t \leq \pi/2)\end{aligned}$$

Tenemos pues dos caminos constantes y $\Phi \circ \gamma_4$ es el camino opuesto de $\Phi \circ \gamma_2$. Deducimos que la integral de línea a lo largo del camino $\Phi \circ \gamma$ de cualquier campo vectorial continuo se anula. Aplicando el Teorema de Stokes, obtenemos que

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

para cualquier campo vectorial \mathbf{F} que sea de clase C^1 en un abierto que contenga a la esfera S . El mismo resultado habríamos obtenido para una esfera de radio arbitrario centrada en cualquier punto de \mathbb{R}^3 o, con el mismo razonamiento, para un elipsoide arbitrario.

9.6. Dominios simplemente conexos en \mathbb{R}^3

Igual que el Teorema de Green nos da información sobre campos conservativos en dominios de \mathbb{R}^2 , el Teorema de Stokes permite obtener conclusiones análogas en \mathbb{R}^3 . La situación es muy similar a la que teníamos en el plano, salvo que para una curva en \mathbb{R}^3 , aunque se pueda recorrer mediante un camino cerrado y simple, no tiene sentido hablar de su región interior, así que debemos pensar en otra forma de definir los dominios simplemente conexos en \mathbb{R}^3 .

Supongamos para empezar que \mathbf{F} es un campo vectorial de clase C^1 en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Sabemos hace tiempo que si \mathbf{F} es conservativo en Ω , entonces \mathbf{F} es irrotacional en Ω . Al igual que ocurría en el plano, el recíproco no es cierto, puede ocurrir que \mathbf{F} sea irrotacional pero no conservativo en Ω .

Para comprobar lo recién comentado podemos usar esencialmente el mismo ejemplo que teníamos en el plano, sólo que llevado a \mathbb{R}^3 como hemos hecho ya varias veces. Concretamente tomamos

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \quad (7)$$

es decir, Ω es el dominio que resulta al suprimir de \mathbb{R}^3 el eje vertical. Definiendo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \quad ((x, y, z) \in \Omega).$$

obtenemos un campo vectorial de clase C^∞ en Ω y es fácil comprobar que \mathbf{F} es irrotacional en Ω . Sin embargo, consideremos la circunferencia Γ , y el camino γ que la recorre, dados por

$$\Gamma = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad (-\pi \leq t \leq \pi) \quad (8)$$

Claramente γ es un camino regular cerrado en Ω y comprobamos sin dificultad que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi \neq 0$$

luego \mathbf{F} no es conservativo en Ω .

Pero vamos ahora con la parte más interesante de la discusión: si \mathbf{F} es un campo vectorial de clase \mathbf{C}^1 e irrotacional en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, es obvio que la integral de superficie que aparece en el Teorema de Stokes siempre va a anularse, cualquiera que sea la superficie contenida en Ω con la que trabajemos, luego también va a anularse la integral de línea del teorema y eso nos dice que las integrales de línea de \mathbf{F} sobre muchos caminos cerrados en Ω se anulan, lo que apunta en la dirección de que \mathbf{F} pueda ser conservativo en Ω . Intuitivamente, sabemos que son nulas las integrales de línea sobre los caminos que recorren el “borde” de una superficie contenida en Ω , luego debemos considerar dominios Ω que tengan la propiedad de que cualquier camino cerrado en Ω recorra el borde de una superficie contenida en Ω .

Volvamos al dominio Ω que aparece en (7), para observar que no tiene la propiedad de la que estamos hablando: como la circunferencia Γ definida en (8) rodea al eje vertical, es intuitivamente claro que cualquier superficie que tenga como borde dicha circunferencia deberá contener puntos del eje vertical, luego tal superficie no podrá estar contenida en Ω .

Demos ya la definición rigurosa de la propiedad que estamos buscando. Se dice que un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es **simplemente conexo** cuando dados dos puntos cualesquiera $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Omega$ y dos caminos $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ con origen \mathbf{p} y extremo \mathbf{q} , es decir, con $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \mathbf{p}$ y $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = \mathbf{q}$, existe una función continua $\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ que verifica las siguientes condiciones:

- (i) $\Phi(t, 0) = \gamma_0(t)$ y $\Phi(t, 1) = \gamma_1(t)$ para $a \leq t \leq b$
- (ii) $\Phi(a, s) = \mathbf{p}$ y $\Phi(b, s) = \mathbf{q}$ para $0 < s < 1$

Tenemos aquí una definición bastante técnica que requiere una explicación más intuitiva. Para entender el significado de la función Φ , imaginemos que la variable s mide el tiempo y, fijado un instante $s \in [0, 1]$ consideremos el camino $\gamma_s : [a, b] \rightarrow \Omega$ definido por

$$\gamma_s(t) = \Phi(t, s) \quad (a \leq t \leq b)$$

La condición (i) hace que nuestra notación sea coherente, pues nos dice que para $s = 0$ y $s = 1$ obtenemos efectivamente los caminos γ_0 y γ_1 dados previamente. Podemos entonces pensar que el camino inicial γ_0 se modifica en el tiempo, y probablemente la curva que recorre se irá deformando, de tal manera que en cada instante s tenemos el camino intermedio γ_s y en el instante final $s = 1$ obtenemos el camino γ_1 . Durante el proceso de deformación, nunca abandonamos el dominio Ω , es decir, todos los caminos intermedios recorren curvas contenidas en Ω , ya que $\Phi(t, s) \in \Omega$ para cualesquiera $t \in [a, b]$ y $s \in [0, 1]$. Además, la condición (ii) nos dice que todos los caminos intermedios γ_s tienen su origen en el punto \mathbf{p} y su extremo en \mathbf{q} , como por hipótesis les ocurría a los caminos inicial y final. La continuidad de la función Φ en sus dos variables nos asegura, por una parte, la continuidad de cada función γ_s , que ya habíamos asumido al decir que γ_s es un camino. Por otra parte, dicho de nuevo intuitivamente, el camino γ_s depende de manera continua de s , es decir, la deformación de la que estamos hablando se hace de manera continua.

En resumen, la existencia de la función Φ con todas las condiciones requeridas significa que el camino γ_0 puede modificarse de manera continua hasta convertirlo en γ_1 , sin salirnos del abierto Ω y teniendo todos los caminos intermedios su origen en el punto \mathbf{p} y su extremo en el punto \mathbf{q} . Cuando este proceso puede llevarse a cabo para cualesquiera dos caminos en Ω con origen y extremo comunes, decimos que el dominio Ω es simplemente conexo.

Nos interesa el caso particular en que el camino γ_0 es cerrado, es decir, $\mathbf{p} = \mathbf{q}$. Como γ_1 podemos tomar entonces un camino constante: $\gamma_1(t) = \mathbf{p}$ para todo $t \in [a, b]$. Entonces la curva recorrida por γ_1 se reduce al punto \mathbf{p} y la función Φ se interpreta como una deformación continua de la curva recorrida por γ_0 hasta dejarla reducida al punto \mathbf{p} , con la condición de que todas las curvas intermedias estén contenidas en Ω y sean recorridas por caminos cerrados con origen y extremo en el punto \mathbf{p} .

Conviene precisar que la definición de los dominios simplemente conexos en \mathbb{R}^2 puede hacerse literalmente como la hemos hecho en \mathbb{R}^3 , obteniendo una definición equivalente a la que dimos en su momento. De hecho, la definición dada para \mathbb{R}^3 puede usarse en \mathbb{R}^n para cualquier dimensión n . Ocurre simplemente que, en el caso $n = 2$, disponíamos de una caracterización en términos de curvas de Jordan que es muy sencilla e intuitiva.

Para ver algunos ejemplos en tres dimensiones, \mathbb{R}^3 es un dominio simplemente conexo y lo mismo le ocurre a cualquier bola abierta o, de manera más general, a cualquier dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ que sea convexo, es decir, tenga la propiedad de que el segmento que une cualesquiera dos puntos de Ω está contenido en Ω . En tal caso, si $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ son caminos con origen y extremo comunes, la función Φ que realiza la deformación de uno en otro puede definirse de la siguiente forma

$$\Phi(t, s) = (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t) \quad (a \leq t \leq b, 0 \leq s \leq 1)$$

y es fácil comprobar que Φ cumple todas las condiciones requeridas.

Por analogía con lo que ocurre en el plano, se podría pensar que un dominio simplemente conexo en \mathbb{R}^3 no puede tener “huecos”, pero esta idea es errónea. Se puede probar, por ejemplo, que el dominio $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 1 < \|\mathbf{x}\| < 2\}$, comprendido entre dos esferas, es simplemente conexo.

Para obtener ejemplos de dominios en \mathbb{R}^3 que no son simplemente conexos, podemos seguir la pista del dominio que apareció en (7). Más concretamente si un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ no es simplemente conexo y tomamos

$$\tilde{\Omega} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega\}$$

se puede comprobar que el dominio $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^3$ tampoco es simplemente conexo. Por ejemplo, si Ω es el anillo comprendido entre dos circunferencias concéntricas, $\tilde{\Omega}$ es la región del espacio comprendida entre dos cilindros coaxiales. Un dominio en forma de *donut* es otro ejemplo de dominio en \mathbb{R}^3 que no es simplemente conexo.

Pues bien, podemos ya enunciar la siguiente consecuencia del Teorema de Stokes, que es un resultado análogo al que se obtuvo en el plano usando el Teorema de Green:

Corolario. Si un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, todo campo vectorial de clase C^1 e irrotacional en Ω es conservativo en Ω .

Puede ser instructivo comentar la demostración de este corolario, aunque admitiremos dos hechos que no vamos a comprobar.

Sea pues $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio simplemente conexo y \mathbf{F} un campo vectorial de clase C^1 e irrotacional en Ω . Tomemos un camino cerrado $\sigma : [a, b] \rightarrow \Omega$, para demostrar que la integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de σ es cero. Como primer hecho que vamos a admitir sin demostración, podemos suponer que σ es de clase C^2 , es decir, en el teorema de caracterización de los campos conservativos, basta considerar caminos cerrados de clase C^2 .

Puesto que Ω es simplemente conexo, tenemos una función continua Φ que deforma la curva recorrida por σ hasta dejarla reducida al punto $\mathbf{p} = \sigma(a) = \sigma(b)$. La función Φ está definida en el rectángulo $W = [a, b] \times [0, 1]$ y admitimos también sin demostración que podemos conseguir que Φ sea de clase C^2 , para poder aplicar el Teorema de Stokes usando Φ como parametrización de la superficie $\Phi(W)$. Anotemos el resto de condiciones que cumple Φ :

- (i) $\Phi(t, 0) = \sigma(t)$ y $\Phi(t, 1) = \mathbf{p}$ para $a \leq t \leq b$
- (ii) $\Phi(a, s) = \Phi(b, s) = \mathbf{p}$ para $0 < s < 1$

Como en casos anteriores, necesitamos un camino regular a trozos, cerrado y simple, que recorra la frontera de W con orientación positiva, así que tomamos $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$, donde

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 0), & \gamma_3(t) &= (a+b-t, 1) & (a \leq t \leq b) \\ \gamma_2(t) &= (b, t), & \gamma_4(t) &= (a, 1-t) & (0 \leq t \leq 1) \end{aligned}$$

Las condiciones (i) y (ii) que cumple la función Φ nos dicen que $\Phi \circ \gamma_1 = \sigma$ mientras que, para $k = 2, 3, 4$, el camino $\Phi \circ \gamma_k$ es constante y, por tanto, la integral sobre él se anula. Así pues, al aplicar el Teorema de Stokes concluimos

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Phi \circ \gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Phi \circ \gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Phi} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

9.7. Teorema de Gauss

Para poder enunciar este teorema en una forma suficientemente general, conviene concretar previamente alguna idea. Vamos a trabajar con un dominio acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e intentamos dar sentido a la integral de superficie de un campo vectorial sobre la frontera de Ω . Pedirle a la frontera $\partial\Omega$ que sea una superficie, como ocurre por ejemplo cuando Ω es una bola abierta, resulta demasiado restrictivo, podemos encontrarnos con “aristas” que impidan parametrizar $\partial\Omega$ de manera suficientemente regular. Piénsese por ejemplo lo que ocurre cuando Ω es un cubo, la mitad de una bola abierta o la parte del interior de un cilindro comprendida entre dos planos.

Debemos pues admitir que $\partial\Omega$ pueda ser una unión finita de superficies. Como integral de superficie de un campo vectorial sobre $\partial\Omega$, parece natural considerar la suma de las integrales sobre las superficies que se unen, convenientemente orientadas. Para ello, aparte de decidir la orientación que vamos a usar, debemos cuidar la forma en que descomponemos $\partial\Omega$ como unión de superficies.

Por poner un ejemplo muy trivial, al enumerar las superficies cuya unión es $\partial\Omega$ no debemos repetir ninguna, pues entonces la integral sobre una misma superficie se sumaría varias veces, produciendo un resultado absurdo. Esta situación es fácilmente evitable, pero también debemos evitar algo no tan fácil de detectar, como que dos de las superficies que unimos tengan una amplia parte común, de forma que la integral sobre dicha parte también se sume más de una vez, de nuevo indebidamente.

Exigir que las superficies sean disjuntas es demasiado restrictivo, en los ejemplos comentados anteriormente las superficies no son disjuntas, tienen precisamente “aristas” en común. Lo que debemos evitar es que las superficies se superpongan excesivamente. Esta idea puede formularse como sigue.

Sean $W_1 = D_1 \cup \Gamma_1$ y $W_2 = D_2 \cup \Gamma_2$ dos recintos en el plano y Φ_1, Φ_2 parametrizaciones de sendas superficies $S_1 = \Phi_1(W_1)$ y $S_2 = \Phi_2(W_2)$. Diremos que Φ_1 y Φ_2 no se solapan, o de manera más intuitiva, que las superficies S_1 y S_2 **no se solapan**, cuando $\Phi_1(D_1) \cap \Phi_2(D_2) = \emptyset$. Observemos que en tal caso S_1 y S_2 pueden no ser disjuntas, pero su intersección $S_1 \cap S_2$ está contenida en el conjunto $\Phi_1(\Gamma_1) \cup \Phi_2(\Gamma_2)$, un conjunto que podemos despreciar a efectos de cálculo de integrales de superficie. Para $n > 2$ diremos naturalmente que las superficies S_1, S_2, \dots, S_n no se solapan cuando no lo hagan dos a dos, es decir, cuando S_j y S_k no se solapan para cualesquiera $j, k = 1, 2, \dots, n$ con $j \neq k$. Podemos ya enunciar con comodidad el Teorema de Gauss:

Teorema. Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^3 cuya frontera pueda expresarse como una unión

$$\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^n S_k$$

donde S_1, S_2, \dots, S_n son superficies que no se solapan, admiten parametrizaciones simples y suaves, y son orientables, por lo que las consideramos todas ellas orientadas mediante la normal exterior a Ω . Entonces, si \mathbf{F} es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto de \mathbb{R}^3 que contenga a $\Omega \cup \partial\Omega$ se verifica que

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz = \sum_{k=1}^n \iint_{S_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

Si se quiere, la suma de integrales que aparece en el segundo miembro puede entenderse, siempre que se cumplan todas las hipótesis del teorema, como la integral de superficie del campo \mathbf{F} sobre $\partial\Omega$. La Fórmula de Gauss-Ostrogradsky queda entonces como sigue

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

9.8. Ejemplo

Como aplicación del Teorema de Gauss, calculemos el flujo saliente del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + 2yz)\mathbf{i} + (y^3 - 2xz)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

a través de la mitad superior ($z \geq 0$) del elipsoide de ecuación $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$.

Consideremos el dominio acotado

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 4y^2 + z^2 < 4, z > 0\}$$

cuya frontera se expresa en la forma $\partial\Omega = S \cup T$ donde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\} \quad y \quad T = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Claro está que S es la superficie a través de la cual queremos calcular el flujo del campo. Por tratarse del flujo saliente, orientamos S mediante la normal exterior a Ω lo que concuerda con lo que exige el Teorema de Gauss. Por otra parte, T es una superficie en forma explícita que podemos ver como $T = \Phi(W)$ donde

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad \Phi(x, y) = (x, y, 0) \quad ((x, y) \in W)$$

El vector normal $\Phi_x \times \Phi_y$ es constantemente igual a \mathbf{k} , luego Φ define la orientación opuesta a la que exige el Teorema de Gauss. El resto de las hipótesis se comprueban sin dificultad. Por ejemplo, el hecho de que S y T no se solapan se debe a que el interior del recinto W viene dado por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, y es evidente que $\Phi(D) \cap S = \emptyset$, luego ninguna parametrización de S puede solaparse con Φ .

Así pues, el Teorema de Gauss, teniendo en cuenta la orientación de la superficie T , nos permite escribir

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} - \iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

Puesto que $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 3(x^2 + y^2)$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$, usando coordenadas cilíndricas tenemos

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz = 6\pi \int_0^1 \rho^3 \int_0^{2\sqrt{1-\rho^2}} dz d\rho = 12\pi \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho$$

Para la última integral puede usarse el cambio $u = 1 - \rho^2$, obteniendo

$$\int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2} \left[\frac{2(1-\rho^2)^{3/2}}{3} - \frac{2(1-\rho^2)^{5/2}}{5} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{2}{15}$$

con lo cual

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz = \frac{8\pi}{5}$$

Por otra parte, para la integral sobre la superficie T tenemos

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \iint_W \langle \mathbf{F}(x, y, 0) | \mathbf{k} \rangle dx dy = \iint_W (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \rho^3 d\rho d\theta = \frac{\pi}{2}$$

y obtenemos finalmente el flujo buscado

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \frac{8\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = \frac{21\pi}{10}$$