Problemas sobre Campos conservativos

1. Sea $F(x,y,z)=(2xyz+\operatorname{sen}x)\hat{i}+x^2z\hat{j}+x^2y\hat{k}$. Hallar f tal que $F=\nabla f$

2. Evaluar $\int_C F\cdot dl$ donde $c(t)=(\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4)$, $0\leq t\leq \pi$ y F es el campo del ejercicio anterior.

3. a) Demostrar que $F=-\dfrac{r}{\|r\|^3}$ es el gradiente de $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\|r\|}$

   donde $r=(x,y,z)$

   b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza $F=\dfrac{-r}{\|r\|^3}$ al mover una partícula desde un punto $r_0\in\mathbb{R}^3$ hasta "∞".

4. Sea $F(x,y,z)=xy\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$. ¿Puede existir una función f tal que $F=\nabla f$?

5. Probar que el campo vectorial F definido en todo el plano $\mathbb{R}^2$ por $F(x,y)=(2x\operatorname{sen}y-y\cos x,\ x^2\cos y-\operatorname{sen}x)$ es conservativo y calcular su potencial que se anule en el origen

6. Probar que el campo $F(x,y,z)=yz\hat{i}+(xz+4yz^2)\hat{j}+(xy+4y^2z+3)\hat{k}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$, calcular el potencial que se anule en el origen.

   Calcular $\displaystyle\int_\gamma F\cdot dl$ donde $\gamma(t)=(t, t^2, \cos\pi t)$, $t\in[0,1]$.

7. Sea el campo $F(x,y)=\left(\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2}, \dfrac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}\right)$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$

   Calcular la integral de línea a lo largo de un camino γ que recorra una circunferencia centrada en $(1,0)$. Deducir que F no es conservativo en $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$. Probar que sí lo es en $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+|y|>1\}$.

8. Probar que $F(x,y) = \left(\log \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} , \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)$ $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$,

es conservativo en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R} / x > 0\}$.

9. Calcular la integral de línea

$$\int_\gamma (y + e^{x^3})\,dx + (2x + \cos y^2)\,dy$$

siendo $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.