Ejercicios del Teorema de Green

1.- Usando el Tª de Green, evaluar $\int_C y\,dx - x\,dy$, donde C es la frontera del cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ orientada en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj)

2.- Comprobar el Tª de Green para el círculo D de centro $(0,0)$ y radio R y las funciones:

a) $P(x,y) = xy^2 \qquad Q(x,y) = -yx^2$

b) $\qquad = x+y \qquad\qquad = y$

c) $\qquad = xy \qquad\qquad = xy$

d) $\qquad = 2y \qquad\qquad = x$

3.- Utilizando el teorema de la divergencia, demostrar que $\int_{\partial D} F\cdot n\, dl = 0$, donde $F(x,y) = y\hat{i} - x\hat{j}$ y D el círculo unidad. Comprobarlo además directamente.

4.- Bajo las condiciones del Tª de Green, demostrar

a) $$\int_{\partial D} PQ\,dx + PQ\,dy = \iint_D Q\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy$$

b) $$\int_{\partial D}\left(Q\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx + \int_{\partial D}\left(P\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy =$$
$$= 2\iint_D \left(P\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y} - Q\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right) dx\,dy$$

5.- Evaluar la integral de línea
$$\int_C (2x^3 - y^3)\,dx + (x^3+y^3)\,dy$$
Donde C es la circunf. unidad, y comprobar el Tª de Green