Problemas del Tema 1
Segunda parte

1.- (Ventana de Viviani) Considera la intersección de la semiesfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ y el cilindro circular recto dado por $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (nota que el radio de la esfera es 2 y el radio de la circunferencia que genera al cilindro 1, su mitad, y que el cilindro pasa por $(0,0,0)$, el centro de la esfera). Prueba que la traza la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (2\cos^2 t, 2(\cos t)(\operatorname{sen} t), 2\operatorname{sen} t)$ es dicha intersección ¿Es α regular? ¿es α cerrada?

2.- Encuentra una parametrización de cada una de las siguientes dos intersecciones de cuádricas:

(a) El cilindro circular recto dado por $x^2 + y^2 = 4$ y el cilindro parabólico dado por $z = x^2$.

(b) El cilindro parabólico dado por $x = y^2 + 1$ y el cilindro parabólico dado por $x = z^2$

3.- Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular de manera que $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ sea linealmente independiente para todo $t \in I$. Prueba que sus funciones curvatura y torsión (según nuestro convenio de signo) pueden ser calculadas como sigue:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \qquad \tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

4.- Considera $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, un punto p y un vector v del espacio euclídeo de manera que $|p| = |v| = r$, $\langle p, v\rangle = 0$ y sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = \left(\cos\frac{t}{r}\right) p + \left(\operatorname{sen}\frac{t}{r}\right) v$

(a) Comprueba que está parametrizada por la longitud de arco y que $\gamma''(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Prueba que su torsión es cero y encuentra el plano de contiene su traza.

(c) Prueba que su curvatura es $\frac{1}{r}$.

(d) Encuentra un movimiento rígido F de $\mathbb{R}^3$ de manera que $F \circ \gamma = \beta$, donde $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está dada por $\beta(t) = \left(r\cos\left(\frac{t}{r}\right), r\operatorname{sen}\left(\frac{t}{r}\right), 0\right)$.

5.- (Hélice circular) Sea la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

(a) Comprueba que es regular.

(b) Interpreta geométricamente el significado de las constantes a y b.

(c) Calcula la función longitud de arco desde $t_0 = 0$.

(d) Construye el triedro de Frenet.

(e) Calcula sus funciones curvatura y torsión, k y τ. Estudia los comportamientos de k cuando se tiene b fijo pero $a \to \infty$ y de τ cuando a es fijo pero $b \to \infty$. Interprétalos geométricamente.

6.- Sea la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.

(a) Comprueba que es regular.

(b) Calcula la función longitud de α desde $t_0 = 0$ hasta $t = 1$.

(c) Construye el triedro de Frenet.

(d) Calcula los planos osculador, normal y rectificante a α en $t = 0$

(e) Calcula sus funciones curvatura y torsión.

7.- Para cada función diferenciable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se considera la curva $\alpha_f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha_f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, f(t))$.

(a) Comprueba que α_f es regular.

(b) Prueba que para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$ se cumple $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} |\alpha'(t)|\, dt \geq t_2 - t_1$.

(c) Construye el triedro de Frenet.

(d) Calcula sus funciones curvatura y torsión.

(e) Determina las funciones f para las cuales α_f es una curva plana.

8.- Prueba que los enunciados de los problemas números 10 y 11 de la primera parte pueden extenderse para el caso de curvas en el espacio euclídeo ¿Y el del problema 12? es decir, ¿es un segmento de recta o un arco de circunferencia la traza de una curva si y sólo si todas las rectas tangentes equidistan de un punto fijo del espacio?

9.- Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco y tal que $\alpha''(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Supongamos además que $\tau(t) \neq 0$, $k'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Prueba que $\mathrm{Im}(\alpha)$ está contenida en una esfera si y sólo si $R^2 + (R')^2 T^2$ es constante, siendo $R(t) = \dfrac{1}{k(t)}$, R' la función derivada de R y $T(t) = \dfrac{1}{\tau(t)}$.

10.- Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular de manera que $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ sea linealmente independiente para todo $t \in I$. Considera la nueva curva $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\beta(t) = r\, \alpha(t)$, con $r > 0$ real fijo. Relaciona los triedros de Frenet, curvatura y torsión de ambas curvas. Pon algún ejemplo como aplicación de lo obtenido.

11.- Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco y tal que $\alpha''(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, y con $k > 0$, $\tau > 0$. Se considera la curva $\beta(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} e_3(s)\, ds$, donde $e_3(t)$ es el vector binormal a α en t.

(a) Comprueba que β está parametrizada por la longitud de arco.

(b) Construye el triedro de Frenet de β.

(e) Calcula las funciones curvatura y torsión, k_β y τ_β.