# Cuestiones para pensar 10

1. Si sabemos que para una orientación $N$ de una superficie regular orientable $S$ podemos considerar $N: S \to S^2$ ¿Por qué se dice que $dN_p$ es un endomorfismo de $T_pS$?

2. ¿Puede ser constante la aplicación de Gauss de una superficie regular orientada?

3. ¿De donde se obtiene que $\langle dN_p(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, dN_p(w_2)\rangle$ para cualesquiera $w_1, w_2 \in T_pS$, $p \in S$?

4. ¿Hay alguna razón del signo "$-$" en la definición de la segunda forma cuadrática fundamental $II_p(w) = -\langle dN_p(w), w\rangle$?

5. Dada una superficie regular orientable $S$, si $II_p$ denota la segunda forma cuadrática fundamental en $p \in S$ relativa a $N$ y $\widetilde{II}_p$ la segunda forma cuadrática fundamental en $p \in S$ relativa a $-N$ ¿que relación hay entre $II_p$ y $\widetilde{II}_p$?

6. ¿Puede ser en algún caso $II_p = \lambda I_p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\forall p \in S$; i.e., la segunda forma fundamental proporcional a la primera con factor de proporcionalidad independiente del punto?

7. Sea $S$ una superficie regular y orientable $S$ y $N: S \to S^2$ una aplicación de Gauss de $S$ ¿equivale conocer $dN_p$ a conocer $II_p$, la segunda forma fundamental de $S$ en $p$ relativa a $N$?

8. ¿Cómo se sabe que el endomorfismo de Weingarten $A_p$ es diagonalizable? ¿Qué interpretación geométrica tiene $\langle A_p(w), w\rangle$ con $w \in T_pS$, $|w| = 1$? ¿Qué tienen que ver los valores propios de $A_p$ con los valores máximo y mínimo de $II_p : \{w \in T_pS : |w| = 1\} \to \mathbb{R}$?

9. Para una superficie regular orientable $S$, ¿depende $K(p)$ de la orientación elegida? ¿depende $H(p)$ de la orientación elegida?

10. ¿De donde hemos obtenido $K(p) = -\frac{1}{2}\text{traza}(A_p^2) + 2H(p)^2$? ¿Se puede también obtener esta fórmula a partir de las curvaturas principales en p según N?

11. ¿Cómo se obtiene la fórmula universal $H(p)^2 \geq K(p)$? ¿Qué información nos da la igualdad?

12. Da un ejemplo en el que $K(p) = H(p)$, para todo $p \in S$ y $K(p) \neq 0$ para todo $p \in S$.

13. Da un ejemplo en el que $K(p) \neq H(p)$, para todo $p \in S$ y $K(p) \neq 0$ para todo $p \in S$.

14. Si una superficie regular orientable cumple $K = 0$ ¿podemos decir que es un abierto de un plano?

15. Dado un elipsoide $E_{r_1 r_2 r_3}$ ¿podemos encontrar algún punto $p \in E_{r_1 r_2 r_3}$ de manera que $K(p) = 0$?

16. Considera el cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4\}$
¿Hay algún punto $p \in C$ con $K(p) \neq 0$? ¿Hay algún punto $p \in C$ con $H(p) \neq 0$?

17. Muestra un ejemplo de superficie regular orientable con $K < 0$