Cuestiones para pensar 9

1.- Considera un plano vectorial π de $\mathbb{R}^3$ ¿coinciden para π las nociones de orientación como espacio vectorial real de dimensión 2 y de orientación como superficie regular?

2.- Dada cualquier superficie regular S ¿es cierto que para cada $p \in S$ existe un entorno abierto V de p en S que es orientable (como superficie regular)?

3.- ¿Qué diferencia hay entre superficie regular orientable y superficie regular orientada? ¿Cuantas orientaciones tiene una superficie regular orientable?

4.- Razona por qué una superficie regular que admita una parametrización global es necesariamente orientable. Cuando una superficie regular se recubre por dos entornos coordenados con intersección convexa ¿ha de ser orientable?

5.- Imagina una superficie regular S que admite $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, diferenciable de manera que $N_p \perp T_pS$ y $N_p \neq 0$, para todo $p \in S$ ¿es S orientable?

6.- Si sobre una superficie regular S hay definida $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, contínua de manera que $N_p \perp T_pS$ y $|N_p| = 1$, para todo $p \in S$ ¿es S orientable?

7.- Considera una superficie regular orientable S y sea $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales unitarios (diferenciable). Si tenemos una parametrización local $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de manera que $\langle \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}, N \rangle < 0$ en todo punto ¿Se puede modificar $\bar{x}$ para obtener una nueva parametrización local $\tilde{x}$ de manera que $\langle \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{v}}, N \rangle > 0$ en todo punto?

8.- ¿Es cierto que sólo tienen aplicación de Gauss las superficies regulares que son orientables?

9.- Dada cualquier superficie regular ¿es cierto que para cada $p \in S$ existe un entorno abierto V de p en S dotado de aplicación de Gauss $N : V \longrightarrow S^2$?