Problemas del Tema 2

1.- Considera el hiperboloide de una hoja $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

(a) Comprueba que es una superficie regular.

(b) Prueba que $H = \left\{ G_{L\theta} \begin{pmatrix} \cosh t \\ 0 \\ \operatorname{senh} t \end{pmatrix} \;:\; L \equiv Oz, \theta, t \in \mathbb{R}\,, G_{L\theta} \text{ giro alrededor de } L \text{ con ángulo } \theta \right\}$, es decir, que H se obtiene aplicando todos los giros de eje L a la rama de la hipérbola $x^2 - z^2 = 1$, $y = 0$, $x > 0$ (por eso se llama hiperboloide).

(c) Prueba que $\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \operatorname{sen}, \operatorname{senh} u)$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[$, es una parametrización local. Describe $\bar{\mathbf{x}}(\mathbb{R} \times]0, 2\pi[)$

2.- Sea el hiperboloide de dos hojas $\widetilde{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$.

(a) Comprueba que es una superficie regular con dos componentes conexas.

(b) Prueba que la componente conexa de $\widetilde{H}$ que contiene a $(0, 0, 1)$, $\widetilde{H}_+$, cumple $\widetilde{H}_+ = \left\{ G_{L\theta} \begin{pmatrix} \operatorname{senh} t \\ 0 \\ \cosh t \end{pmatrix} \;:\; L \equiv Oz, \theta, t \in \mathbb{R}\,, G_{L\theta} \text{ giro alrededor de } L \text{ con ángulo } \theta \right\}$, es decir, que $\widetilde{H}$ se obtiene aplicando todos los giros de eje L a rama de la hipérbola $x^2 - z^2 = -1$, $y = 0$, $z > 0$ (por eso se llama hiperboloide) ¿Qué podemos decir de la componente conexa de $\widetilde{H}$ que contiene a $(0, 0, -1)$?

(c) Prueba que $\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (\operatorname{senh} u \cos v, \operatorname{senh} u \operatorname{sen}, \cosh u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[$, es una parametrización local. Describe $\bar{\mathbf{x}}(\mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[)$

3.- Considera

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1\right\}, \quad \text{(elipsoide)},$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 = 1\}, \quad \text{(cilindro sobre } x^2 + y^2 = 1 \text{ en el plano } z = 0).$$

$$\widetilde{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y = x^3\}, \quad \text{(cilindro sobre } y = x^3 \text{ en el plano } z = 0).$$

Comprueba que E, C y $\widetilde{C}$ son superficies regulares del espacio euclídeo.

4.- Considera

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\right\}, \quad \text{(toro)},$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x - 1)^2 + y^2 - z^2 = 0,\; z > 0\}, \quad \text{(cono superior menos el vértice)}.$$

Comprueba que T y V son superficies regulares del espacio euclídeo.

5.- Prueba que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^4 = x^2 - y^2\}$ no es una superficie regular.

6.- Sea S una superficie regular y $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ una parametrización local suya. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, prueba que $f \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1} : \bar{\mathbf{x}}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. ¿Es toda función diferenciable de $\bar{\mathbf{x}}(U)$ en $\mathbb{R}$ de este tipo?

7.- Si S es una superficie regular, demuestra que para cada $p \in S$ existe un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$ y una función diferenciable $F : V \to \mathbb{R}$ de manera que $V \cap S = F^{-1}(a)$, siendo a un valor regular de F.

8.- Considera $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - \cosh^2 z = 0\}$, (catenoide). Se pide:

(a) Comprueba que es una superficie regular.

(b) Prueba que $C = \left\{ G_{L\,\theta} \begin{pmatrix} \cosh z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \ : \ L \equiv Oz, \theta, z \in \mathbb{R}\,, G_{L\,\theta} \text{ giro alrededor de L con ángulo } \theta \right\}$, es decir, que C se obtiene aplicando todos los giros de eje L a la catenaria $x = \cosh z$, $y = 0$ (por eso se llama catenoide).

(c) Encuentra un difeomorfismo no trivial de C en si mismo.

(d) Demuestra que C es difeomorfa al hiperboloide $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$

(e) Halla la ecuación implícita, respecto a la base usual de $\mathbb{R}^3$, de cualquier plano tangente T_pC, $p = (x, y, z) \in C$. Para $p_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in C$ encuentra una parametrización local $\bar{\mathbf{x}} : U \to C$ de manera que $p_0 = \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0) \in \bar{\mathbf{x}}(U)$. Calcula las coordenadas en la base $B^{\bar{\mathbf{x}}}_{(u_0,v_0)} = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$ de $w = (1, -1, 1) \in T_{p_0}C$.

9.- Considera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \operatorname{sen} z = y \cos z\}$ (helicoide). Se pide:

(a) Comprueba que es una superficie regular.

(b) Prueba que $\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, es una parametrización global de S.

(c) Considera la hélice $\alpha(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, u)$ y comprueba que el helicoide S consiste en todos los puntos de las rectas de $\mathbb{R}^3$ determinadas por los puntos $\alpha(u)$ y $(0, 0, u)$.

(d) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, consideramos $F_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G_{L\,\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{pmatrix}$. Comprueba que F_θ induce un difeomorfismo de S en si misma.

(e) Halla la ecuación implícita, respecto a la base usual de $\mathbb{R}^3$, de cualquier plano tangente T_pS, $p = (x, y, z) \in S$. Para $p_0 = (1, 1, \frac{\pi}{4}) \in S$, con respecto a la parametrización global $\bar{\mathbf{x}}$ anterior. Calcula las coordenadas en la base $B^{\bar{\mathbf{x}}}_{(\frac{\pi}{4},\sqrt{2})}$ de $w = (2, 0, -1) \in T_{p_0}S$.

10.- Considera una superficie regular S. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal. Prueba que la restricción f de φ^2 a S es diferenciable. ¿Quién es f cuando $\varphi(x) = \langle x, v \rangle$ para un $v \in \mathbb{R}^3$, $|v| = 1$, fijo?

11.- Prueba que la superficie $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2\}$, (paraboloide elíptico), es difeomorfa con la superficie $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 - y^2\}$ (paraboloide hiperbólico).

12.- Dado $v = (2,3,0) \in T_{(0,0,1)}\mathbb{S}^2$, calcula las coordenadas de v en la base de $T_{(0,0,1)}\mathbb{S}^2$ canónicamente obtenida a partir de la parametrización local $\bar{\mathbf{x}} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, donde D es el disco abierto de centro el origen y radio 1 de $\mathbb{R}^2$, dada por $\bar{\mathbf{x}}(u,v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\,)$ (nótese que identificando, como es usual, el plano $z = 0$ con $\mathbb{R}^2$, $\bar{\mathbf{x}}$ es la inversa de la restricción a $\mathbb{S}^2_{3+} = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \ : \ z > 0\}$ de la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $z = 0$).

13.- Construye un difeomorfismo entre la superficie $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2-z^2 = 0, \ z > 0\}$ y el abierto $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1, \ z > 0\}$ del cilindro.

14.- Si $\mathbb{S}^2$ es la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1, comprueba que la aplicación ea $F : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $F(x,y,z) = (x,y,-z)$ es un difeomorfismo de $\mathbb{S}^2$. Interprétalo geométricamente. Calcula $(dF)_{(0,0,1)}$ y $(dF)_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}$.

15.- Considera el cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Prueba que la aplicación $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow C$ definida por $F(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ es diferenciable, sobreyectiva y cumple que su diferencial es biyectiva en todo punto, pero F no es inyectiva.

16.- Sean S y $\tilde{S}$ superficies regulares, S compacta y $\tilde{S}$ conexa. Supongamos que $F : S \longrightarrow \tilde{S}$ es una aplicación diferenciable inyectiva con $(dF)_p$ biyectiva para todo $p \in S$. Prueba que F es un difeomorfismo.

17.- Sea $\mathbb{S}^2_1(0,0,1)$ la esfera de centro $(0,0,1)$ y radio 1. Considera la función altura $h_v : \mathbb{S}^2_1(0,0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $h_v(x) = \langle x, v \rangle$, donde $v = (0,0,1)$. Calcula $(dh_v)_x$ en todo $x \in \mathbb{S}^2_1(0,0,1)$. Prueba que $(dh_v)_x = 0$ si y sólo si o bien $x = (0,0,2)$, o bien $x = (0,0,0)$. Interprétalo geométricamente.

18.- Sea $\mathbb{S}^2$ la esfera de centro el origen y radio 1. Para $x_0 \notin \mathbb{S}^2$ considera la función "cuadrado de la distancia a x_0" $f_{x_0}(x) = |x - x_0|^2$. Calcula $(df_{x_0})_x$ en todo $x \in \mathbb{S}^2$. Prueba que $(df_{x_0})_x = 0$ si y sólo si $x - x_0$ es ortogonal a $T_x(\mathbb{S}^2)$. Interprétalo geométricamente.

19.- Sean S y $\tilde{S}$ superficies regulares, S conexa, y sea $F : S \longrightarrow \tilde{S}$ una aplicación diferenciable. Supongamos que $dF_p = 0$ para todo $p \in S$. Prueba entonces que F es constante.