

# Curvas y Superficies

## Curso 2022-23

### Tema 3. Curvaturas de una superficie

#### 1. Superficies orientables.

Sean  $V(\mathbb{R})$  un espacio vectorial real con  $\dim V = n (\geq 1)$  y  $\mathcal{B}_V$  el conjunto cuyos elementos son las bases ordenadas de  $V$ . En  $\mathcal{B}_V$  definimos la siguiente relación binaria:

Dadas  $B, B' \in \mathcal{B}_V$  decimos que  $B$  define en  $V$  **la misma orientación** que  $B'$ , y ponemos  $B \sim B'$ , cuando la matriz de cambio de base obtenida al poner los vectores de  $B'$  en combinación lineal de los de  $B$ ,  $M(1_V, B', B)$ ,<sup>1</sup> cumple

$$\det M(1_V, B', B) > 0.$$

Como sabemos que  $\det M(1_V, B', B) \neq 0$  y el cuerpo es  $\mathbb{R}$ , tiene sentido la definición anterior. Nótese que el hecho de que  $V$  sea un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  es imprescindible por la estructura de cuerpo ordenado de  $\mathbb{R}$ .

La **relación binaria**  $\sim$  es **reflexiva** ya que

$$\det M(1_V, B, B) = \det I_n = 1.$$

Por otro lado, como  $M(1_V, B, B') = M(1_V, B', B)^{-1}$  se tiene que

$$\det M(1_V, B, B') = \det M(1_V, B', B)^{-1} = (\det M(1_V, B', B))^{-1},$$

lo que nos dice que si  $B \sim B'$  entonces  $B' \sim B$ ; es decir, la relación binaria  $\sim$  es **simétrica**. Finalmente, como  $M(1_V, B'', B) = M(1_V, B', B) M(1_V, B'', B')$  ocurre que

$$\det M(1_V, B'', B) = \det M(1_V, B', B) \det M(1_V, B'', B'),$$

lo que nos dice que si  $B \sim B'$  y  $B' \sim B''$  entonces  $B \sim B''$ ; es decir, la relación binaria  $\sim$  también es **transitiva**. En definitiva,  $\sim$  es una **relación de equivalencia** en  $\mathcal{B}_V$ .

Esta relación de equivalencia tiene sólo dos clases de equivalencia independientemente de la dimensión de  $V(\mathbb{R})$ . A cada clase de equivalencia se le llama una **orientación** de  $V$ . Así,  $V$  tiene dos orientaciones posibles  $c(B)$  y  $c(B_1)$  de manera que

$$\det M(1_V, B_1, B) < 0,$$

---

<sup>1</sup>Seguimos usando la notación por columnas, i.e.,  $M(1_V, B', B)$  tiene como columna  $j$ -ésima las coordenadas del vector  $j$ -ésimo de  $B'$  en la base  $B$ .

las cuales originan dos **espacios vectoriales orientados** distintos  $(V, c(B))$  y  $(V, c(B_1))$ .

Si el espacio vectorial  $V$  está dotado de una forma bilineal simétrica y definida positiva, i.e., de una **métrica euclídea**, entonces siempre es posible representar cada orientación de  $V$  mediante una base ortonormal con respecto a esa métrica euclídea.

Dada una superficie regular  $S$ , una orientación en  $T_p S$  vendrá dada por la elección de una clase de bases equivalentes  $c(B)$  en  $T_p S$  o por la elección de un vector normal unitario a  $T_p S$ . En efecto, consideremos la métrica euclídea en  $T_p S$  definida por la **restricción** a  $T_p S$  del producto escalar usual de  $\mathbb{R}^3$ . Por motivos históricos, a esta métrica euclídea en  $T_p S$  se llama la **primera forma cuadrática fundamental**<sup>2</sup> de  $S$  en  $p$ .

En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  consideramos la orientación definida por la base usual y el producto vectorial usual<sup>3</sup>

Sea  $B = (w_1, w_2)$  es una base ortonormal de  $T_p S$  entonces  $w_1 \times w_2$  es un vector normal unitario a  $T_p S$ . Si  $B' = (w'_1, w'_2)$  es otra base ortonormal que define en  $T_p S$  la misma orientación que  $B$ , es decir, con  $B' \sim B$ , entonces

$$w'_1 \times w'_2 = \underbrace{\det M(1_{T_p S}, B', B)}_{=1} w_1 \times w_2 = w_1 \times w_2.^4$$

Recíprocamente, fijemos un vector normal unitario  $N^0$  a  $T_p S$  y sean  $B = (w_1, w_2)$  y  $B' = (w'_1, w'_2)$  dos bases ortonormales de  $T_p S$ . Supongamos que

$$w'_1 \times w'_2 = N^0 = w_1 \times w_2,$$

entonces  $B' \sim B$  ya que  $\det M(1_{T_p S}, B', B) = 1$ .

Si fijamos una orientación en  $T_p S$ , ésta se puede ver como un **sentido de giro** en el plano tangente geométrico  $p + T_p S$  que se traspa a un entorno abierto  $V_p$  del punto  $p$  en  $S$ . Intuitivamente,  $S$  se dirá orientable cuando tengamos la compatibilidad de estos sentidos de giro en la intersección  $V_p \cap V_q$ , para  $p, q \in S$  próximos. De manera que la orientabilidad de  $S$  no va a ser fijar una orientación de manera arbitraria en cada plano tangente  $T_p S$ ,  $p \in S$ . La orientación en cada  $T_p S$  tiene que depender de manera (al menos) continua de  $p$  en un sentido que vamos a precisar a continuación.

---

<sup>2</sup>Tener una forma bilineal simétrica  $g$  en un espacio vectorial  $V$  equivale con tener una forma cuadrática  $F$ . A saber, dada  $g$  la aplicación  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F_g(v) := g(v, v)$$

es una forma cuadrática. Recíprocamente, dada una forma cuadrática  $F$ ,  $g_F$  definida por

$$g_F(v, w) := \frac{1}{2} \{F(v+w) - F(v) - F(w)\}$$

es una forma bilineal simétrica cuya forma cuadrática asociada es la propia  $F$ .

<sup>3</sup>En realidad hay dos productos vectoriales, uno para cada orientación, siendo uno el opuesto del otro.

<sup>4</sup>En general, para dos bases cualesquiera  $B = (w_1, w_2)$ ,  $B' = (w'_1, w'_2)$  se cumple

$$w'_1 \times w'_2 = \det M(1_{T_p S}, B', B) w_1 \times w_2$$

Fijemos un punto  $p \in S$  y sea una parametrización local  $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow S$  de manera que  $p = \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0) \in \bar{\mathbf{x}}(U)$ . En  $T_p S$  tenemos la base ordenada

$$B_{(u_0, v_0)}^{\bar{\mathbf{x}}} = \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

Dotamos a  $T_p S$  de la orientación  $c(B_{(u_0, v_0)}^{\bar{\mathbf{x}}})$ . Supongamos ahora otra parametrización  $\tilde{\mathbf{x}} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  también con  $\tilde{\mathbf{x}}(\xi_0, \eta_0) = p$ . Tendríamos ahora otra base en  $T_p S$

$$B_{(\xi_0, \eta_0)}^{\tilde{\mathbf{x}}} = \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0), \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \eta}(\xi_0, \eta_0) \right)$$

y la correspondiente orientación  $c(B_{(\xi_0, \eta_0)}^{\tilde{\mathbf{x}}})$  en  $T_p S$ . Ocurrirá que

$$c(B_{(u_0, v_0)}^{\bar{\mathbf{x}}}) = c(B_{(\xi_0, \eta_0)}^{\tilde{\mathbf{x}}}) \iff \det M(1_{T_p S}, B_{(\xi_0, \eta_0)}^{\tilde{\mathbf{x}}}, B_{(u_0, v_0)}^{\bar{\mathbf{x}}}) > 0,$$

donde

$$M(1_{T_p S}, B_{(\xi_0, \eta_0)}^{\tilde{\mathbf{x}}}, B_{(u_0, v_0)}^{\bar{\mathbf{x}}}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0), & a_{12} &= \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi_0, \eta_0) \\ a_{21} &= \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi_0, \eta_0), & a_{22} &= \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi_0, \eta_0) \end{aligned}$$

es decir, la matriz jacobiana del cambio de parámetros

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta).$$

**Definición 1.** Una superficie regular  $S$  se dice **orientable** si es posible encontrar una familia de parametrizaciones locales

$$\{ \bar{\mathbf{x}}_i : U_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \}_{i \in \Lambda}$$

de manera que

$$\cup_{i \in \Lambda} \bar{\mathbf{x}}_i(U_i) = S$$

y que siempre que

$$\bar{\mathbf{x}}_i(U_i) \cap \bar{\mathbf{x}}_j(U_j) \neq \emptyset$$

el cambio de parámetros

$$u_i = u_i(u_j, v_j), \quad v_i = v_i(u_j, v_j).$$

cumpla

$$\frac{\partial(u_i, v_i)}{\partial(u_j, v_j)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} & \frac{\partial u_i}{\partial v_j} \\ \frac{\partial v_i}{\partial u_j} & \frac{\partial v_i}{\partial v_j} \end{pmatrix} > 0,$$

en cada punto de  $\bar{\mathbf{x}}_j^{-1}(\bar{\mathbf{x}}_i(U_i) \cap \bar{\mathbf{x}}_j(U_j))$ .

Si no es posible encontrar tal familia de parametrizaciones locales, se dice que  $S$  no es orientable.

Nótese que la orientabilidad de una superficie regular es una propiedad global; es decir, involucra a la superficie en su totalidad.

**Proposición 2.** Sean  $S$  y  $S_1$  dos superficies regulares difeomorfas. Si  $S$  es orientable, entonces  $S_1$  es orientable.

*Demostración.* Sea una familia de parametrizaciones locales

$$\{ \bar{x}_i : U_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \}_{i \in \Lambda}$$

de manera que  $\cup_{i \in \Lambda} \bar{x}_i(U_i) = S$  y que siempre que  $\bar{x}_i(U_i) \cap \bar{x}_j(U_j) \neq \emptyset$  se cumpla  $\frac{\partial(u_i, v_i)}{\partial(u_j, v_j)} > 0$ .

Si  $F : S \rightarrow S_1$  es un difeomorfismo y definimos

$$\{ \bar{x}_{1i} := F \circ \bar{x}_i : U_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1 \}_{i \in \Lambda}$$

tenemos una familia de parametrizaciones locales cuyos entornos coordenados recubren  $S_1$  y tal que cuando dos se cortan,  $\bar{x}_{1i}(U_i) \cap \bar{x}_{1j}(U_j) \neq \emptyset$  se cumple

$$h_{ij}^1 := \bar{x}_{1i}^{-1} \circ \bar{x}_{1j} = (F \circ \bar{x}_i)^{-1} \circ (F \circ \bar{x}_j) = \bar{x}_i^{-1} \circ \bar{x}_j^{-1} = h_{ij},$$

el cambio de parámetros es el mismo y, por tanto, las correspondientes matrices jacobianas también.  $\square$

**Ejemplo 3.** 1. Una superficie regular que admita una **parametrización global** es orientable. Así, cualquier grafo de una función diferenciable es orientable.

Dada cualquier superficie regular  $S$ , para cualquier parametrización local suya

$$\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S,$$

el subconjunto abierto  $\bar{x}(U)$  de  $S$  es orientable como superficie regular, lo cual se puede describir diciendo que cada punto de  $S$  tiene un entorno abierto que es orientable (lo cual no quiere decir que la superficie regular entera  $S$  tenga que ser orientable).

2. Supongamos que  $S$  sea una superficie regular para la cual existen dos parametrizaciones locales

$$\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S, \quad \tilde{x} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

de manera que

$$\bar{x}(U) \cup \tilde{x}(\tilde{U}) = S \quad \text{y} \quad W := \bar{x}(U) \cap \tilde{x}(\tilde{U}) \text{ es conexo.}$$

Entonces  $S$  es orientable. En efecto, como

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} : \underbrace{\tilde{x}^{-1}(W)}_{\text{conexo}} \rightarrow \mathbb{R}$$

es una aplicación continua y distinta de cero en todo punto, entonces o bien  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} > 0$  en todo punto o bien  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} < 0$ . Si se diera el segundo caso

Cambiamos  $U$  por  $\widehat{U} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y, x) \in U\}$   
y cambiamos  $\tilde{\mathbf{x}}$  por  $\widehat{\mathbf{x}}$ ,

siendo

$$\widehat{\mathbf{x}}(\widehat{u}, \widehat{v}) := \bar{\mathbf{x}}(\widehat{v}, \widehat{u}).$$

En este caso tenemos  $\widehat{\mathbf{x}}(\widehat{U}) = \bar{\mathbf{x}}(U)$  y

$$\frac{\partial(\widehat{u}, \widehat{v})}{\partial(\widehat{u}, \widehat{v})} = -\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} > 0.$$

Como una aplicación práctica tenemos, por ejemplo, que cualquier esfera es orientable y que un cilindro circular recto sobre una circunferencia es orientable.

**Definición 4.** Un *campo de vectores normales* en un abierto  $V$  de una superficie regular  $S$  es una aplicación diferenciable

$$N : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{tal que } N(p) \perp T_p S \text{ para todo } p \in V.$$

Un *campo de vectores normales unitarios* sobre  $V$  es un campo de vectores normal  $N$  que cumple  $|N(p)| = 1$  para todo  $p \in V$ .

**Ejemplo 5.** 1. Sea  $\pi$  el plano afín de  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  con dirección  $\vec{\pi} = L(\{w_1, w_2\})$ ,  $\{w_1, w_2\}$  linealmente independiente. Podemos escribir

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), N^0 \rangle = 0\}.$$

donde  $N^0 := \frac{w_1 \times w_2}{|w_1 \times w_2|}$  es un campo de vectores normales unitarios constante sobre  $\pi$ .

2. Sea ahora la esfera de centro  $p_0$  y radio  $r(> 0)$

$$\mathbb{S}_r^2(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = r^2\}.$$

La aplicación

$$N : \mathbb{S}_r^2(p_0) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad N(p) := \frac{1}{r} (p - p_0) = \frac{1}{r} \overrightarrow{p_0 p}$$

es un campo de vectores normales unitarios sobre  $\mathbb{S}_r^2(p_0)$ .

3. Consideramos el elipsoide

$$E_{abc} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

que reescribimos como

$$E_{abc} = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, A(p) \rangle = 1\},$$

donde  $p = (x, y, z)$  y  $A(p) = (\frac{1}{a^2}x, \frac{1}{b^2}y, \frac{1}{c^2}z)$ . Recordemos que el automorfismo  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  es auto-adjunto respecto al producto escalar de  $\mathbb{R}^3$ . La aplicación

$$N : E_{abc} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad N(p) := \frac{1}{|A(p)|} A(p),$$

o equivalentemente,

$$N : E_{abc} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \left( \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right)$$

es un campo de vectores normales unitarios sobre  $E_{abc}$ .

4. Más generalmente que los ejemplos previos, sea una superficie regular  $S$  definida como la imagen inversa de un valor regular  $c$  de una función diferenciable  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V$  abierto de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$S = \{(x, y, z) \in V : F(x, y, z) = c\}.$$

La aplicación

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad N(p) := \frac{1}{|(\nabla F)_p|} \left( \frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p) \right)$$

es un campo de vectores normales unitarios definido sobre  $S$ .

5. Finalmente, como un caso particular importante del anterior, consideremos, para una función diferenciable  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , su grafo

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}.$$

que vimos que se podía escribir como la imagen inversa mediante  $F(x, y, z) = z - f(x, y)$  de su valor regular 0. Como

$$(\nabla F)_{(x, y, z)} = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right)$$

para todo  $(x, y, z) \in G(f)$ . La aplicación  $N : G(f) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right)$$

es un campo de vectores normales unitarios sobre  $G(f)$ .

Una vez examinados estos ejemplos, el objetivo que nos planteamos es relacionar la orientabilidad  $S$  con la existencia de un campo de vectores normales unitarios globalmente definido sobre  $S$ .

Empezamos trabajando sobre un entorno coordinado de una superficie regular. En particular, lo que sigue demuestra que para cada punto de una superficie regular existe un entorno abierto suyo en donde está definido un campo de vectores normales unitarios.

Consideremos una parametrización local  $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow S$  de una superficie regular  $S$ . Para cada  $q \in \bar{\mathbf{x}}(U)$  sabemos que

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(\bar{\mathbf{x}}^{-1}(q)) \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(\bar{\mathbf{x}}^{-1}(q)) \perp T_q S \text{ para todo } q \in \bar{\mathbf{x}}(U),$$

por tanto

$$\left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right) \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1} : \bar{\mathbf{x}}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es un campo de vectores normales que no se anula nunca, lo que permite definir  $N : \bar{\mathbf{x}}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$N(q) := \frac{1}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(\bar{\mathbf{x}}^{-1}(q)) \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(\bar{\mathbf{x}}^{-1}(q)) \right|} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right) \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1}(q)$$

que es un campo de vectores normales unitarios definido sobre  $\bar{\mathbf{x}}(U)$ . Escribiremos abreviadamente

$$N = \frac{1}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right|} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right) \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1}.$$

Notemos que, para todo  $(u, v) \in U$ , la base  $\left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u, v), N(\bar{\mathbf{x}}(u, v)) \right)$  de  $\mathbb{R}^3$  representa la misma orientación que la base usual.

Supongamos ahora dos parametrizaciones locales

$$\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S, \quad \tilde{\mathbf{x}} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

de una superficie regular  $S$  de manera que  $\bar{\mathbf{x}}(U) \cap \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{U}) \neq \emptyset$ . En este abierto tenemos

$$\left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{v}} \right) \circ \tilde{\mathbf{x}}^{-1} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right) \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1},$$

siendo

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \neq 0$$

en todo punto. De manera que cuando

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} > 0,$$

se cumple

$$\frac{1}{\left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{v}} \right|} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{v}} \right) \circ \tilde{\mathbf{x}}^{-1} = \frac{1}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right|} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right) \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1},$$

y cuando

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} < 0,$$

ocurre

$$\frac{1}{\left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{v}} \right|} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{v}} \right) \circ \tilde{\mathbf{x}}^{-1} = - \frac{1}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right|} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right) \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1}.$$

**Proposición 6.** Una superficie regular  $S$  es orientable si y sólo si existe un campo de vectores normales unitarios  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  (globalmente definido sobre  $S$ ).

*Demostración.* Supongamos que disponemos de una familia de parametrizaciones locales

$$\{ \bar{\mathbf{x}}_i : U_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \}_{i \in \Lambda}$$

que cumplen

$$\cup_{i \in \Lambda} \bar{\mathbf{x}}_i(U_i) = S$$

y que siempre que

$$\bar{\mathbf{x}}_i(U_i) \cap \bar{\mathbf{x}}_j(U_j) \neq \emptyset$$

se tiene

$$\frac{\partial(u_i, v_i)}{\partial(u_j, v_j)} > 0.$$

Dado  $p \in S$  elegimos  $\bar{\mathbf{x}}_{i_0} : U_{i_0} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de manera que  $p \in \bar{\mathbf{x}}_{i_0}(U_{i_0})$ . Definimos ahora

$$N(p) = \frac{1}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right|} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right) (u_i^0, v_i^0),$$

donde  $\bar{\mathbf{x}}(u_i^0, v_i^0) = p$ . Por el comentario previo a la Proposición 6,  $N(p)$  no depende de la parametrización local de la familia que se elija de manera que el punto  $p$  está en el correspondiente entorno coordenado. Por tanto,  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , así definida, es una aplicación que cumple  $N(p) \perp T_p S$  y  $|N(p)| = 1$ , para todo  $p \in S$ . Sólo nos resta ver la diferenciabilidad, pero esto se deduce del hecho de que

$$N \circ \bar{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right|} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right)$$

sobre cada abierto  $U_i$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Recíprocamente, supongamos que existe un campo de vectores normales unitarios  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Para cada punto  $p \in S$  elegimos una parametrización local  $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de manera que  $U$  sea **conexo** y  $p \in \bar{\mathbf{x}}(U)$

Comparemos  $N(p)$  con  $\left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} / \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right| \right) \bar{\mathbf{x}}^{-1}(p)$ .

Ambos son vectores normales y unitarios. Supongamos primero que coinciden (el caso que sean opuestos lo tratamos después). Definimos la función

$$f : \bar{\mathbf{x}}(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(q) = \left\langle N(q), \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} / \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right| \right) \bar{\mathbf{x}}^{-1}(q) \right\rangle$$



que es continua sobre un abierto conexo (no vacío) de  $S$ . Como sólo puede tomar los valores 1 y  $-1$ , y ya sabemos que en  $p$  vale 1, concluimos que  $f$  vale constantemente 1. Cuando ocurra lo anterior, nos quedamos con la parametrización local elegida.

Supongamos ahora que ocurra

$$N(p) = - \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} / \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right| \right) \bar{\mathbf{x}}^{-1}(p).$$

En este caso vamos a modificar la parametrización local. En efecto, consideramos  $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\sigma(x, y) = (y, x)$  (la simétrica respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante). Sea el abierto  $\tilde{U} := \sigma(U)$  de  $\mathbb{R}^2$ , y sea

$$\tilde{\mathbf{x}} := \bar{\mathbf{x}} \circ \sigma : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S,$$

que es una parametrización local, con el mismo entorno coordinado que  $\bar{\mathbf{x}}$ , i.e., con  $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{U}) = \bar{\mathbf{x}}(U)$ , y cumple,

$$N(p) = \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{v}} / \left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{v}} \right| \right) \tilde{\mathbf{x}}^{-1}(p).$$

En este caso, cambiamos  $\bar{\mathbf{x}}$  por  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

Así, hemos logrado una familia de parametrizaciones locales

$$\{ \bar{\mathbf{x}}_p : U_p \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \}_{p \in S}$$

(ahora el conjunto de índices es la propia superficies  $S$ ) de manera que

$$\cup_{p \in S} \bar{\mathbf{x}}_p(U_p) = S$$

y que sobre cada  $\bar{\mathbf{x}}_p(U_p)$  se cumple

$$N = \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_p}{\partial u_p} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_p}{\partial v_p} / \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_p}{\partial u_p} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_p}{\partial v_p} \right| \right) \circ \bar{\mathbf{x}}_p^{-1}.$$

Consideramos dos de estas parametrizaciones locales

$$\bar{\mathbf{x}}_{p_1} : U_{p_1} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S, \quad \bar{\mathbf{x}}_{p_2} : U_{p_2} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

de manera que

$$\bar{\mathbf{x}}_{p_1}(U_{p_1}) \cap \bar{\mathbf{x}}_{p_2}(U_{p_2}) \neq \emptyset.$$

Para cada  $q \in \bar{\mathbf{x}}_{p_1}(U_{p_1}) \cap \bar{\mathbf{x}}_{p_2}(U_{p_2})$  se tiene

$$\left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_{p_1}}{\partial u_{p_1}} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_{p_1}}{\partial v_{p_1}} / \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_{p_1}}{\partial u_{p_1}} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_{p_1}}{\partial v_{p_1}} \right| \right) \circ \bar{\mathbf{x}}_{p_1}^{-1}(q) =$$

$$= N(q) = \left( \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial u_{p_2}} \times \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial v_{p_2}} / \left| \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial u_{p_2}} \times \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial v_{p_2}} \right| \right) \circ \bar{x}_{p_2}^{-1}(q),$$

lo que implica que

$$\frac{\partial(u_{p_1}, v_{p_1})}{\partial(u_{p_2}, v_{p_2})} > 0.$$

Con lo que se concluye que  $S$  es orientable, lo que acaba la demostración.  $\square$

Del resultado anterior deducimos que si una superficie regular es orientable, entonces tiene **dos posibles orientaciones**: la definida por un campo de vectores normales unitarios  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  y la definida por su opuesto  $-N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Si fijamos una de las dos orientaciones, podremos hablar de superficie orientada como el par formado por la superficie y la orientación elegida.

**Observación 7.** Analizando la prueba de la proposición nos damos cuenta de que la diferenciabilidad que se incluye en la definición de campo de vectores normales unitarios se puede debilitar a continuidad; es decir, que realmente hemos probado.

**Proposición 8.** Una superficie regular  $S$  es orientable si y sólo si existe un **campo continuo de vectores normales unitarios**  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  (globalmente definido sobre  $S$ ).

En efecto, en la implicación  $\Leftarrow$  sólo se utiliza la continuidad de  $N$  para asegurar la continuidad de la función

$$f : \bar{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(q) = \left\langle N(q), \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} / \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right| \right) \bar{x}^{-1}(q) \right\rangle$$

En este momento parece lógico preguntarse

**¿ Existe alguna superficie regular que no sea orientable ?**

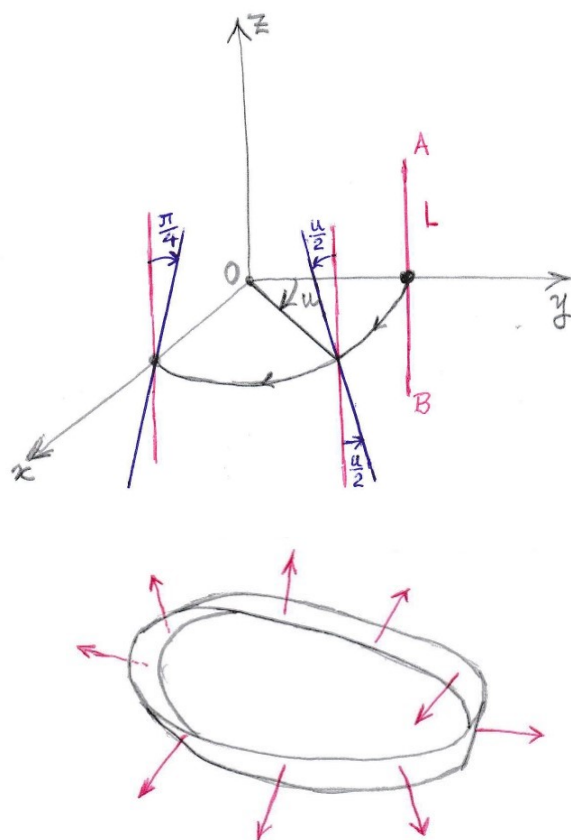
La respuesta es afirmativa. Veamos un ejemplo de superficie regular no orientable. Consideremos la circunferencia en el plano  $z = 0$  de centro  $(0, 0, 0)$  y radio 2; es decir  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$  Sea

además el segmento sin extremos  $L \begin{cases} x = 0, \\ y = 2, \\ -1 < z < 1. \end{cases}$

Vamos a llamar  $A$  y  $B$  a los extremos que completan  $L$  en un segmento cerrado. Movemos rígidamente  $L$  de manera que su centro se mantenga en  $C$  y que cuando el ángulo<sup>5</sup> entre el eje  $OY$  y el vector de posición del punto medio de  $C$  sea  $u$ , el segmento  $L$  ha rotado respecto de su posición vertical original un ángulo  $\frac{u}{2}$ .

Cuando el segmento  $L$  complete una vuelta volverá a su punto inicial pero con los extremos invertidos.

<sup>5</sup>Según la orientación en el plano  $z = 0$  inducida por el vector normal  $-e_3$ .



Intuitivamente,  $M$  es una superficie regular, llamada la **banda de Moebius** en honor a su descubridor. Si existiera un campo de vectores normales unitarios  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , consideramos  $N(p_0)$  con  $p_0 \in C$ , lo desplazamos a lo largo de  $C$  y cuando vuelve a su posición inicial el vector que se obtiene en  $p_0$  es  $-N(p_0)$ .

Se puede ver que  $M$  admite dos parametrizaciones locales

$$\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M, \quad \tilde{x} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$$

de manera que  $\bar{x}(U) \cup \tilde{x}(\tilde{U}) = M$  y

$\bar{x}(U) \cap \tilde{x}(\tilde{U})$  tiene dos componentes conexas  $W_1, W_2$ .

Ocurre

$$\frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} = 1 \text{ en } \bar{x}^{-1}(W_1) \text{ y } \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} = -1 \text{ en } \bar{x}^{-1}(W_2).$$

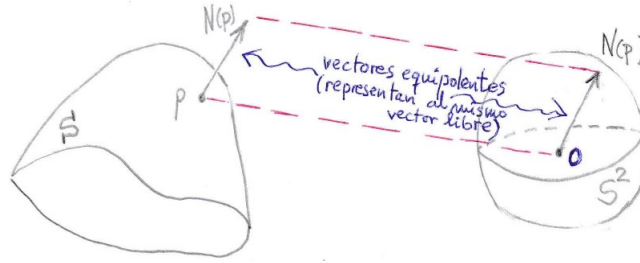
Lo que impide la existencia de un campo de vectores normales unitarios  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

## 2. La aplicación de Gauss

**Definición 9.** Dada una superficie regular orientable  $S$  consideremos un campo de vectores normales unitarios  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Como sabemos que  $|N(p)| = 1$  para todo  $p \in S$ , podemos considerar  $N$  como

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad p \in S \mapsto N(p) \in \mathbb{S}^2$$

donde  $\mathbb{S}^2$  es la esfera centrada en  $(0, 0, 0)$  y de radio 1, i.e., los vectores de módulo 1 del espacio vectorial métrico euclídeo  $\mathbb{R}^3$ . A esta aplicación se le llama la **aplicación de Gauss** de la superficie orientable  $S$  según la orientación definida por  $N$ .



La aplicación de Gauss es diferenciable, por tanto podemos considerar su diferencial en cada punto  $p \in S$ ,

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2.$$

Teniendo en cuenta que, para todo  $p \in S$  y todo  $q \in \mathbb{S}^2$ , se cumple

$$T_p S = N(p)^\perp \quad \text{y} \quad T_q \mathbb{S}^2 = q^\perp$$

resulta que

$$T_{N(p)} \mathbb{S}^2 = T_p S \quad \text{para todo } p \in S.$$

Por tanto podemos escribir

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_p S, \quad w \mapsto dN_p(w) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t),$$

siendo  $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S$ ,  $\epsilon > 0$ , diferenciable con  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = w$ .

**Observación 10.** Comparando con la situación de una curva parametrizada por el arco en el plano  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , el papel de la aplicación de Gauss lo hacía  $e_2 : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $e_2(t) = J e_1(t)$ , siendo  $e_1(t) = \alpha'(t)$  y como

$$(de_2)_{t_0}(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e_2(t_0 + at) = a e_2'(t_0) = -\kappa(t_0) a e_1(t_0).$$

Así,  $(de_2)_{t_0}$  está determinado tan solo por un escalar, a saber,  $\kappa(t_0)$ .

Sea  $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$ , donde  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ , un plano afín. Claramente tenemos

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (a, b, c)$$

que es un vector constante. Por tanto  $dN_p = 0$  para todo  $p \in \pi$ .

**Proposición 11.** Si la aplicación de Gauss  $N$  de una superficie regular orientable conexa  $S$  cumple  $dN_p = 0$  para todo  $p \in S$ , entonces  $S$  está contenida<sup>6</sup> en un plano.

*Demostración.* Ponemos  $N = (N_1, N_2, N_3)$ , entonces cada  $N_i : S \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ , tiene diferencial cero en todo punto de  $S$ . Como  $S$  es conexa sabemos que  $N_i = N_i^0 \in \mathbb{R}$ , por tanto,  $N = N^0 \in \mathbb{R}^3$ .

Ahora mismo ya sabemos que  $T_p S = (N^0)^\perp$  para todo  $p \in S$ , y por tanto, si tomamos un punto fijo  $p_0 \in S$  entonces  $T_p S = T_{p_0} S$  para todo  $p \in S$ . Si construimos el plano afín

$$\pi := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - p_0, N^0 \rangle = 0\}$$

vamos a probar que  $S \subset \pi$ .

Para ello consideramos la función

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(p) := \langle p - p_0, N^0 \rangle$$

que cumple  $f(p_0) = 0$  y es diferenciable al ser la restricción a  $S$  de la función afín  $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \langle x, N^0 \rangle + c_0$ , donde  $c_0 = -\langle p_0, N^0 \rangle \in \mathbb{R}$ . Para todo  $p \in S$  y todo  $w \in T_{p_0} S$ , tenemos

$$df_p(w) = \langle w, N^0 \rangle = 0,$$

es decir,  $df_p = 0$ , para todo  $p \in S$ . Como  $S$  se supone conexa, la función  $f$  ha de ser constante y como sabemos que  $f(p_0) = 0$ , resulta que  $f(p) = 0$  para todo  $p \in S$ , lo que nos dice que  $S \subset \pi$ .  $\square$

**Corolario 12.** Si la aplicación de Gauss  $N$  de una superficie regular orientable conexa y cerrada en  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$ , cumple  $dN_p = 0$  para todo  $p \in S$ , entonces  $S$  es un plano.

**Observación 13.** Notemos que si para una aplicación de Gauss  $N$  se tiene  $dN_p = 0$ , para todo  $p \in S$ , entonces también se tiene lo mismo para la otra, que no es más que  $-N$ .

En el caso de la esfera de centro  $p_0$  y radio  $r(> 0)$

$$\mathbb{S}_r^2(p_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - p_0, x - p_0 \rangle = r^2\},$$

la aplicación de Gauss (normal unitario exterior) es

$$N : \mathbb{S}_r^2(p_0) \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad N(p) = \frac{1}{r} (p - p_0).$$

Por tanto

$$dN_p(a, b, c) = \frac{1}{r} (a, b, c),$$

para todo  $(a, b, c) \in T_p \mathbb{S}_r^2(p_0)$ .

---

<sup>6</sup>Si  $S_1$  y  $S_2$  son superficies regulares y  $S_1 \subset S_2$ , entonces  $S_1$  es un abierto de  $S_2$ .

**Proposición 14.** Si la aplicación de Gauss  $N$  de una superficie regular orientable conexa  $S$  cumple  $dN_p = \lambda 1_{T_p S}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , para todo  $p \in S$ , entonces  $S$  está contenida en una esfera.

*Demostración.* Tenemos que determinar el centro  $p_0$  y el radio  $r$  de la esfera  $\mathbb{S}_r^2(p_0)$ . Intuimos que el radio va a ser  $1/|\lambda|$ . Por otro lado, de la expresión que hemos obtenido para el campo normal unitario exterior  $N$  de  $\mathbb{S}_r^2(p_0)$  se cumple  $p - rN(p) = p_0$ , para todo  $p \in \mathbb{S}_r^2(p_0)$ .

Lo anterior sugiere definir la aplicación

$$F : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(p) := p - \frac{1}{\lambda} N(p),$$

que es diferenciable al serlo  $N$  y cumple

$$dF_p(w) = w - \frac{1}{\lambda} dN_p(w) = w - \frac{1}{\lambda} \lambda w = 0,$$

para todo  $w \in T_p S$  y todo  $p \in S$ . Así,  $dF_p = 0$  para todo  $p \in S$ . Como estamos suponiendo que  $S$  es conexa tenemos que existe un  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  de manera que  $F(p) = p_0$ , para todo  $p \in S$ , es decir,

$$p - p_0 = \frac{1}{\lambda} N(p) \implies |p - p_0| = \frac{1}{|\lambda|},$$

para todo  $p \in S$ , pero esto quiere decir que  $S \subset \mathbb{S}_{1/|\lambda|}^2(p_0)$ . □

**Corolario 15.** Si la aplicación de Gauss  $N$  de una superficie regular orientable conexa y cerrada en  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$ , cumple  $dN_p = \lambda 1_{T_p S}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , para todo  $p \in S$ , entonces  $S$  es una esfera  $\mathbb{S}_{1/|\lambda|}^2(p_0)$ .

**Observación 16.** Notemos que si para una aplicación de Gauss  $N$  se tiene  $dN_p = \lambda 1_{T_p S}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , para todo  $p \in S$ , entonces para la otra aplicación de Gauss,  $-N$ , ocurre  $d(-N)_p = \mu 1_{T_p S}$  con  $\mu = -\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Ejemplo 17.** 1. Consideramos el elipsoide

$$E_{r_1 r_2 r_3} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} + \frac{z^2}{r_3^2} = 1 \right\},$$

que, como antes, escribimos

$$E_{r_1 r_2 r_3} = \{ p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, A(p) \rangle = 1 \},$$

donde  $p = (x, y, z)$  y  $A(p) = \left( \frac{1}{r_1^2} x, \frac{1}{r_2^2} y, \frac{1}{r_3^2} z \right)$ , que es un automorfismo de  $\mathbb{R}^3$  auto-adjunto respecto al producto escalar.

La aplicación de Gauss (normal unitario exterior) es

$$N : E_{r_1 r_2 r_3} \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad N(p) = \frac{1}{|A(p)|} A(p).$$

Si  $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow E_{r_1 r_2 r_3}$ ,  $\epsilon > 0$ , es diferenciable con  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = (a, b, c)$  tenemos

$$\begin{aligned} dN_p(a, b, c) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \frac{1}{|A(\alpha(t))|} A(\alpha(t)) \right) = \\ &= \frac{1}{|A(\alpha(0))|} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\alpha(t)) + \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{1}{|A(\alpha(t))|} \right) A(\alpha(0)) = \\ &= \frac{1}{|A(p)|} A(\alpha'(0)) - \frac{1}{|A(p)|^3} \langle A(p), A(\alpha'(0)) \rangle A(p). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$dN_p(a, b, c) = \frac{1}{|A(p)|} A(a, b, c) - \frac{1}{|A(p)|^3} \langle A(p), A(a, b, c) \rangle A(p).$$

donde  $p = (x_0, y_0, z_0) \in E_{r_1 r_2 r_3}$  y  $\frac{x_0}{r_1^2} a + \frac{y_0}{r_2^2} b + \frac{z_0}{r_3^2} c = 0$ .

2. Para el cilindro  $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \}$  tenemos  $N(x, y, z) = (x, y, 0)$  para todo  $p = (x, y, z) \in C$ . Así

$$dN_p(a, b, c) = (a, b, 0)$$

para todo  $(a, b, c) \in T_p C$ . Por tanto, se cumple

$$dN_p \circ dN_p = dN_p$$

para todo  $p \in C$ . Además,  $\text{rango}(dN_p) = \text{nulidad}(dN_p) = 1$  y 0, 1 son sus dos **valores propios** en todo punto.

3. Finalmente, vamos a considerar el paraboloide elíptico  $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \}$ , que tiene

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} (-2x, -2y, 1).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} dN_p(a, b, c) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4x_0^2 + 4y_0^2}} (-2a, -2b, 0) \\ &\quad - \frac{4x_0 a + 4y_0 b}{(1 + 4x_0^2 + 4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} (-2x_0, -2y_0, 1) \end{aligned}$$

donde  $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$  y  $c = 2x_0 a + 2y_0 b$ . Particularizando,

$$T_{(0,0,0)} S = \{ (a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R} \},$$

$$dN_{(0,0,0)}(a, b, 0) = -2(a, b, 0), \text{ es decir } dN_{(0,0,0)} = -2 \, 1_{T_{(0,0,0)} S}.$$

En todos estos ejemplos, se comprueba fácilmente que el endomorfismo  $dN_p$  es auto-adjunto respecto a la primera forma cuadrática fundamental en  $T_p S$ . Pero esto es parte de un hecho general como lo prueba el siguiente resultado.

**Proposición 18.** *La diferencial en cada punto de la aplicación de Gauss de una superficie orientable  $S$  es auto-adjunta respecto de la primera forma cuadrática fundamental en ese punto.*

*Demostración.* Tenemos que ver que

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$$

para cualesquiera  $w_1, w_2 \in T_p S$  y  $p \in S$ . Gracias a que  $\dim T_p S = 2$  es suficiente comprobar lo anterior para el caso en que  $(w_1, w_2)$  sea una base de  $T_p S$ .

Para cada punto  $p \in S$  elegimos una parametrización local  $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de manera que  $p = \bar{x}(u_0, v_0) \in \bar{x}(U)$  y en  $T_p S$  consideramos la base

$$B_{(u_0, v_0)}^{\bar{x}} = \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} dN_p \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0) \right) &= (dN_p) \circ d\bar{x}_{(u_0, v_0)}(1, 0) = d(N \circ \bar{x})_{(u_0, v_0)}(1, 0) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (N \circ \bar{x})(u_0 + t, v_0) = \frac{\partial (N \circ \bar{x})}{\partial u}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

Análogamente

$$dN_p \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = \frac{\partial (N \circ \bar{x})}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Por tanto, lo que tenemos que ver es

$$\left\langle \frac{\partial (N \circ \bar{x})}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \frac{\partial (N \circ \bar{x})}{\partial v} \right\rangle,$$

en cada  $(u, v) \in U$ .

Para ello, partimos de

$$\left\langle \underbrace{N \circ \bar{x}}_{\text{normal}}, \underbrace{\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}}_{\text{tangente}} \right\rangle = \left\langle \underbrace{N \circ \bar{x}}_{\text{normal}}, \underbrace{\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}}_{\text{tangente}} \right\rangle = 0,$$

en donde derivamos parcialmente respecto a  $u$  y respecto a  $v$  para obtener

$$\left\langle \frac{\partial (N \circ \bar{x})}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\rangle + \left\langle N \circ \bar{x}, \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \frac{\partial (N \circ \bar{x})}{\partial v}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \right\rangle + \left\langle N \circ \bar{x}, \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v \partial u} \right\rangle = 0.$$



Teniendo en cuenta que los dos últimos términos de cada fórmula son iguales por el Lema de Schwarz, hemos probado

$$\left\langle \frac{\partial(N \circ \bar{x})}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(N \circ \bar{x})}{\partial v}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \right\rangle,$$

que es justo lo que queríamos demostrar.  $\square$

Por consiguiente, para  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  existe una base ortonormal  $B = (w_1, w_2)$  formada por vectores propios de  $dN_p$ ; es decir,

$$dN_p(w_1) = \lambda_1 w_1 \text{ y } dN_p(w_2) = \lambda_2 w_2$$

con

$$\langle w_1, w_1 \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1, \quad \langle w_1, w_2 \rangle = 0.$$

De manera que los **valores propios**  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $dN_p$  son dos escalares naturalmente asociados al punto  $p$  según  $N$ . Obsérvese que si cambiamos  $N$  por  $-N$ , los valores propios de  $d(-N)_p$  cambian de signo respecto a los de  $dN_p$ ; es decir, tenemos  $d(-N)_p(w_i) = -dN_p(w_i) = (-\lambda_i)w_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Lo que no cambia al considerar  $-N$  en lugar de  $N$ , i.e., al cambiar la orientación fijada en la superficie orientable  $S$ , es el producto de los valores propios

$$(-\lambda_1)(-\lambda_2) = \lambda_1 \lambda_2 \iff \det(d(-N)_p) = \det(dN_p).$$

Al contrario, al considerar  $-N$  en lugar de  $N$ , la suma de los valores propios cambia de signo

$$(-\lambda_1) + (-\lambda_2) = -(\lambda_1 + \lambda_2) \iff \text{traza}(d(-N)_p) = -\text{traza}(dN_p).$$

Tener los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $dN_p$

equivale a tener  $\det(dN_p)$  y  $\text{traza}(dN_p)$ .

Por otro lado, como  $dN_p$  es auto-adjunto respecto de la primera forma cuadrática fundamental, si definimos

$$\tilde{\Pi}_p(w_1, w_2) := -\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle$$

resulta que  $\tilde{\Pi}_p$  es una forma bilineal simétrica sobre  $T_p S$ ; i.e., una métrica sobre  $T_p S$ . De momento el signo menos es un convenio. Más adelante veremos su papel como notación.

**Definición 19.** Sea  $S$  una superficie regular orientable y sea  $N$  una de sus aplicaciones de Gauss. Se define la **segunda forma cuadrática fundamental** de  $S$  en  $p$  según  $N$  como

$$\Pi_p(w) := -\langle dN_p(w), w \rangle$$

**Observación 20.** Si cambiamos  $N$  por  $-N$  la segunda forma cuadrática fundamental cambia de signo. Recordemos que la primera forma cuadrática fundamental no depende de  $N$ . Por otro lado, la primera forma cuadrática fundamental es definida positiva en todo  $T_p S$  mientras que la segunda no, de hecho veremos que su carácter puede cambiar mucho de un plano tangente a otro.

Podemos a continuación revisitar brevemente los ejemplos anteriores de cálculo y propiedades de la diferencial de la aplicación de Gauss de una superficie regular en un punto desde el punto de vista de la segunda forma cuadrática fundamental en un punto que acabamos de definir.

**Ejemplo 21.** 1. La segunda forma cuadrática fundamental de un plano  $\pi$  es idénticamente nula. Recíprocamente, si la segunda forma fundamental de una superficie regular orientable y conexa  $S$  es nula entonces la diferencial de la aplicación de Gauss también es nula y por tanto, como vimos,  $S$  es un abierto de un plano, que es todo el plano si suponemos además que la superficie es cerrada.

2. Para el caso de una esfera  $\mathbb{S}_r^2(p_0)$ , la segunda forma fundamental respecto al normal unitario exterior es

$$\Pi_p(w) = -\frac{1}{r} \langle w, w \rangle, \quad w \in T_p \mathbb{S}_r^2(p_0),$$

es decir, la segunda forma fundamental es proporcional a la primera con factor de proporcionalidad distinto de cero e independiente del punto.

Recíprocamente, si la segunda forma fundamental de una superficie regular orientable y conexa  $S$  es proporcional a la primera forma fundamental en todo punto, con factor de proporcionalidad  $\neq 0$  independiente del punto, entonces la diferencial de la aplicación de Gauss en cada punto es la multiplicación por un escalar fijo  $\neq 0$  y por tanto, como vimos,  $S$  es un abierto de una esfera, que es toda la esfera si suponemos además que la superficie es cerrada.

3. Sea ahora el elipsoide

$$E_{r_1 r_2 r_3} = \{ p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, A(p) \rangle = 1 \},$$

donde  $p = (x, y, z)$  y  $A(p) = \left( \frac{1}{r_1^2} x, \frac{1}{r_2^2} y, \frac{1}{r_3^2} z \right)$ . Tenemos

$$\Pi_p(w) = -\frac{1}{|A(p)|} \langle A(w), w \rangle,$$

donde  $p = (x_0, y_0, z_0) \in E_{r_1 r_2 r_3}$ , y  $w = (a, b, c) \in T_p E_{r_1 r_2 r_3}$ . En particular, si  $p = (r_1, 0, 0)$ ,  $A(p) = \left( \frac{1}{r_1}, 0, 0 \right)$ ,  $w = (0, b, c)$  con  $b, c \in \mathbb{R}$ ,  $A(w) = \left( 0, \frac{1}{r_2^2} b, \frac{1}{r_3^2} c \right)$  y así

$$\Pi_p(0, b, c) = -r_1 \left( \frac{b^2}{r_2^2} + \frac{c^2}{r_3^2} \right).$$

4. Para el cilindro  $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \}$  y con respecto a la aplicación de Gauss  $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ , se cumple

$$\Pi_p(a, b, c) = -a^2 - b^2,$$

para cualesquiera  $p \in C$ ,  $(a, b, c) \in T_p C$ .

5. Consideremos ahora el paraboloide elíptico  $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \}$ , que con respecto a la aplicación de Gauss

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} (-2x, -2y, 1),$$

tiene

$$\begin{aligned} \Pi_p(a, b, c) = & -\frac{1}{\sqrt{1 + 4x_0^2 + 4y_0^2}} \langle (-2a, -2b, 0), (a, b, c) \rangle, \\ & -\frac{4x_0a + 4y_0b}{(1 + 4x_0^2 + 4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\langle (-2x_0, -2y_0, 1), (a, b, c) \rangle}_{=0}, \end{aligned}$$

para cualesquiera  $p \in S$ ,  $(a, b, c) \in T_p S$ . Así,

$$\Pi_p(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x_0^2 + 4y_0^2}} 2a^2 + 2b^2,$$

para todo  $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$ ,  $(a, b, c) \in T_p S$ . Observemos que en el radicando del denominador de la fórmula anterior tenemos

$$1 + |\nabla f|^2(x_0, y_0), \text{ siendo } f(x, y) := x^2 + y^2$$

y donde

$$(\nabla f)(x_0, y_0) = (2x_0, 2y_0)$$

es el gradiente en el punto  $(x_0, y_0)$  de la función que define el grafo. Por otro lado, en

$$2a^2 + 2b^2 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

la matriz  $2 \times 2$  que aparece es justamente la matriz hessiana de la función  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$ . Finalmente, recordemos que si  $(a, b, c) \in T_p S$ ,  $p = (x_0, y_0, z_0)$  entonces  $(a, b, c) = (a, b, 2x_0a + 2y_0b)$ , de manera que la matriz fila (y matriz columna) que aparece en la fórmula anterior identifica de manera unívoca al vector tangente  $(a, b, c)$ .

6. Generalizando consideremos el grafo

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$$

de una función diferenciable  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . La aplicación  $N : G(f) \rightarrow \mathbb{S}^2$  dada por

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right)$$

es una de las dos aplicaciones de Gauss de la superficie orientable  $G(f)$ .

Haciendo uso del gradiente de  $f$ ,  $\nabla f$ , que en cada punto  $(x, y) \in U$  es el vector  $(\nabla f)(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$ , la fórmula anterior suele abreviarse como sigue

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} (-\nabla f, 1).$$

Como antes vamos a calcular

$$dN_p(a, b, c) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} N(x(t), y(t), z(t)),$$

siendo  $p = (x_0, y_0, z_0) \in G(f)$  y  $z_0 = f(x_0, y_0)$ ;  $(a, b, c) \in T_p G(f)$  y, por tanto,  $a \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + b \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = c$ ;  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  una curva diferenciable en  $G(f)$  que pasa por  $(x_0, y_0, z_0)$  con velocidad  $(a, b, c)$ .

Así,

$$\begin{aligned} dN_p(a, b, c) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2(x_0, y_0)}} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), -\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)), 1 \right) + \\ &+ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2(x(t), y(t))}} \right) \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el vector del segundo sumando es normal y, por tanto, es perpendicular al vector tangente  $(a, b, c)$  y que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), -\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)), 1 \right) = \\ &= \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)a - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)b, -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)a - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)b, 0 \right), \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \Pi_p(a, b, c) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2(x_0, y_0)}} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, si tomamos la parametrización global usual del grafo

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

y tenemos en cuenta que  $(a, b, c) \in T_p G(f)$  se puede expresar como

$$(a, b, c) = a \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(x_0, y_0) + b \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(x_0, y_0),$$

podemos reescribir la expresión anterior como sigue:

$$\begin{aligned} \Pi_p \left( a \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(x_0, y_0) + b \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(x_0, y_0) \right) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2(x_0, y_0)}} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A continuación vamos a dar una **interpretación geométrica** de la cantidad  $\Pi_p(w)$  para  $w \in T_p S$  con  $|w| = 1$ . Antes necesitamos introducir un nuevo concepto.

**Definición 22.** <sup>7</sup> Un subconjunto  $C$  del espacio afín euclídeo  $\mathbb{R}^3$  se dice que es una **curva regular** si para cada  $p \in C$  existen un entorno abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  y una aplicación  $\alpha : I \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ ,  $I$  intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  de manera que:

1. (**Diferenciabilidad**)  $\alpha$ , vista de  $I$  en  $\mathbb{R}^3$ , es diferenciable; es decir, si ponemos  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in I$ , las funciones  $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables de clase  $C^\infty$ .
2. (**Parametrizaciones locales**)  $\alpha : I \rightarrow V \cap C$  es un homeomorfismo. Es decir,  $\alpha$  es biyectiva y continua, dotando a  $V \cap C$  de la topología inducida por la  $V$  (o por la de  $\mathbb{R}^3$  que es la misma) y  $\alpha^{-1} : V \cap C \rightarrow I$  es continua.

Como esto ocurre para todo punto de  $C$ , tenemos que  $C$ , con su topología inducida, es localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Nótese que como por 1 ya tenemos que  $\alpha : I \rightarrow V \cap C$  es continua, lo único que requiere este apartado es que  $\alpha : I \rightarrow V \cap C$  sea biyectiva y que su inversa sea continua.

3. (**Regularidad**) Para cada  $t_0 \in I$  la diferencial  $d\alpha_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva. Como

$$d\alpha_{t_0}(a) = (x'(t_0)a, y'(t_0)a, z'(t_0)a) = a \alpha'(t_0),$$

para todo  $a \in \mathbb{R}$ , tenemos que  $d\alpha_{t_0}$  es inyectiva si, y sólo si,  $\alpha'(t_0) \neq 0$ . De manera que lo que afirmamos es que  $\alpha$  es una curva parametrizada regular (en el sentido del tema 1).

De manera resumida,  $C$  es una curva regular del espacio euclídeo si para cada punto  $p \in C$  existen un entorno abierto  $W$  de  $p$  en  $C$  (que será de la forma  $V \cap C$  para un entorno abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$ ) y un homeomorfismo  $\alpha : I \rightarrow W$ , donde  $I$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ , de manera que considerada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es diferenciable con diferencial inyectiva en cada punto de  $I$ .

Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva parametrizada regular, dado  $t_0 \in I$  existe  $\epsilon > 0$  de manera que  $\alpha([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon])$  es una curva regular en el sentido de esta definición.

Consideremos una superficie regular orientable  $S$ ,  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  una de sus dos aplicaciones de Gauss y  $\Pi_p$  la segunda forma cuadrática fundamental en  $p$  con respecto a  $N$ . Vamos ahora con la interpretación geométrica de la cantidad  $\Pi_p(w)$  para  $w \in T_p S$  con  $|w| = 1$ .

<sup>7</sup>Aunque podríamos dar esta definición de manera más escueta, preferimos darla de este modo para que se vea su paralelismo con la definición de superficie regular.

Sea  $\pi := p + L(\{w, N(p)\})$  el plano afín que pasa por  $p$  con plano vectorial de dirección  $\vec{\pi} = L(\{w, N(p)\})$ . El plano  $\pi$  corta a  $S$  en una curva plana  $C$  que es regular cerca de  $p$ . Se llama a  $C$  una sección normal a  $S$  en  $p \in S$  según  $w \in T_p S$ ,  $|w| = 1$ , (notemos que  $\pi = p + L(\{w, N(p)\}) = p + L(\{w, -N(p)\})$ ).

En el plano  $\vec{\pi}$  consideramos la orientación definida por la base ortonormal  $(w, N(p))$ . Si  $J$  es la rotación (vectorial) de ángulo  $\pi/2$  según esa orientación, tenemos  $J(w) = N(p)$ . Sea  $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S$ ,  $\epsilon > 0$ , una parametrización local de  $C$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = w$ . Calculemos su diedro de Frenet y las correspondientes ecuaciones.

$$e_1(t) = \alpha'(t), \quad e_2(t) = J e_1(t),$$

para todo  $t \in I$ .

$$\begin{aligned} e_1'(t) &= \kappa(t) e_2(t) \\ e_2'(t) &= -\kappa(t) e_1(t) \end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \langle e_1'(0), e_2(0) \rangle = \langle \alpha''(0), J \alpha'(0) \rangle = \langle \alpha''(0), (N \circ \alpha)(0) \rangle = \\ &= -\langle \alpha'(0), (N \circ \alpha)'(0) \rangle = -\langle w, dN_p(w) \rangle = \underline{\Pi_p(w)}, \end{aligned}$$

en donde hemos hecho uso de

$$\langle \alpha'(t), (N \circ \alpha)(t) \rangle = 0,$$

para todo  $t \in I$  y, por tanto,

$$\langle \alpha''(t), (N \circ \alpha)(t) \rangle + \langle \alpha'(t), (N \circ \alpha)'(t) \rangle = 0,$$

para todo  $t \in I$ .

Así, la segunda forma cuadrática fundamental en  $p$  sobre cualquier vector tangente unitario  $w \in T_p S$  coincide con la curvatura de la sección normal de  $S$  en  $p$  según  $w$ .

**Observación 23.** Nótese que en el cálculo anterior se obtiene

$$\kappa(0) = -\langle w, dN_p(w) \rangle,$$

de manera que esta fórmula justifica el signo en la definición de  $\Pi_p(w)$ .

**Definición 24.** Sea  $S$  una superficie regular orientable y sea  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  una de las dos aplicaciones de Gauss de  $S$ . Llamamos a

$$A_p := -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$$

el *endomorfismo de Weingarten* en  $p$  relativo a  $N$ . Con esta notación la segunda forma cuadrática fundamental se escribe

$$\Pi_p(w) = \langle A_p(w), w \rangle,$$

para todo  $w \in T_p S$ , i.e.,  $A_p$  es el endomorfismo de  $T_p S$ , auto-adjunto respecto a la primera forma cuadrática fundamental. Por tanto, haciendo uso de la primera forma cuadrática fundamental, tener  $A_p$  equivale a tener  $\Pi_p$ .

Sabemos que existe una base ortonormal  $(w_1, w_2)$  de  $T_p S$  de manera que

$$A_p(w_1) = k_1 w_1, \quad A_p(w_2) = k_2 w_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad k_1 \geq k_2,$$

donde los valores propios  $k_1$  y  $k_2$  se interpretan ahora como

$$\Pi_p(w_1) = k_1, \quad \Pi_p(w_2) = k_2,$$

curvaturas de secciones normales a  $S$  en  $p$ .

**Definición 25.** A los valores propios  $k_1$  y  $k_2$  de  $A_p$  se les llama *curvaturas principales*. Notemos que si cambiamos  $N$  por  $-N$  la segunda forma cuadrática fundamental  $\Pi_p$  cambia a  $-\Pi_p$  y el endomorfismo de Weingarten  $A_p$  cambia a  $-A_p$ , por tanto, las curvaturas principales cambian de signo.

Como las curvaturas principales son curvaturas de secciones normales a  $S$  en  $p$ , surge de manera natural la siguiente pregunta:

¿Cual es el papel de las curvaturas principales de  $S$  en  $p$  entre todas las curvaturas normales a  $S$  en  $p$ ?

**Lema 26.** Sean  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial métrico euclídeo con  $\dim V = 2$  y  $A : V \rightarrow V$  lineal y auto-adjunto respecto de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Considera la forma cuadrática asociada  $Q(w) := \langle A(w), w \rangle$  como aplicación

$$Q : C = \{w \in V : \langle w, w \rangle = 1\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si  $w_1, w_2 \in C$  son los vectores donde la aplicación continua  $Q$  alcanza sus valores máximo y su mínimo  $\mu_1, \mu_2$  respectivamente sobre el compacto  $C$  de  $V$  entonces  $(w_1, w_2)$  es una base ortonormal de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  con  $A(w_1) = \mu_1 w_1$  y  $A(w_2) = \mu_2 w_2$ .

Por tanto, las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  en  $p$  son la mayor y menor, respectivamente, de las curvaturas de las secciones normales a  $S$  en el punto  $p$ .

**Observación 27.** Sea  $V$  es un espacio vectorial real con  $\dim V = n (\geq 1)$ . Tomamos  $B = (v_1, \dots, v_n)$  una base ordenada de  $V$  y sea el isomorfismo

$$b_B : \mathbb{R}^n \rightarrow V, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

Existe una única topología  $\mathfrak{T}_B$  que hace que  $b_B$  sea homeomorfismo. Si  $B'$  es otra base de  $V$  entonces  $\mathfrak{T}_{B'} = \mathfrak{T}_B$ , por tanto esta topología no depende de la base con la que se construya. Con esta topología, las formas lineales y las formas cuadráticas sobre  $V$  son continuas.

¿Determinan  $k_1$  y  $k_2$  a cualquier curvatura normal a  $S$  en  $p$ ?

Tomemos una base ortonormal positiva  $B = (w_1, w_2)$  de  $T_p S$  con  $A_p(w_1) = k_1 w_1$  y  $A_p(w_2) = k_2 w_2$ . Cada vector tangente en  $p$ , que sea unitario,  $w$  se escribe  $w = \cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2$ , donde  $\alpha$  es el ángulo orientado entre  $w_1$  y  $w$ . Si llamamos  $k_w(p)$  a la curvatura normal a  $S$  en  $p$  según  $w$  tenemos

$$k_w(p) = \Pi_p(w) = k_1 \cos^2(\alpha) + k_2 \sin^2(\alpha),$$

que se llama la **fórmula de Euler** y responde a la pregunta anterior.

**Definición 28.** Sea  $S$  una superficie regular orientable y sea  $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$  el endomorfismo de Weingarten en  $p$  relativo a  $N$ . Llamamos a

$$K(p) := \det(A_p), \quad H(p) := \frac{1}{2} \text{traza}(A_p),$$

la **curvatura de Gauss** de  $S$  en  $p$  y la **curvatura media** de  $S$  en  $p$  relativa a  $N$ . Como la curvatura de Gauss  $K(p)$  no cambia a tomar  $-N$  en lugar de  $N$ , no hace falta decir cual es la aplicación de Gauss que se ha usado para obtenerla. Esto no es así para la curvatura media  $H(p)$  que cambia de signo cuando se considera  $-N$  en lugar de  $N$ .

En términos de las curvatura principales  $k_1$  y  $k_2$  de  $S$  en  $p$  relativas a  $N$  tenemos

$$K(p) = k_1 k_2, \quad H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

De manera que  $H(p)$  es la **media aritmética** de  $k_1$  y  $k_2$ , y si éstas tienen el mismo signo,  $\sqrt{K(p)}$  es la **media geométrica** de  $k_1$  y  $k_2$ . Obsérvese que

$$k_1(p) = k_2(p) = 0 \Leftrightarrow H(p) = K(p) = 0 \Leftrightarrow A_p = 0.$$

Veamos una relación algebraica (universal) entre  $K(p)$  y  $H(p)$ . Notemos primero que según el teorema de Hamilton-Cayley<sup>8</sup> tenemos

$$A_p^2 - \text{traza}(A_p) A_p + \det(A_p) I = 0$$

donde  $I$  es la identidad de  $T_p S$ , es decir

$$A_p^2 - 2H(p) A_p + K(p) I = 0.$$

Tomando trazas queda

$$\text{traza}(A_p^2) - 4H(p)^2 + 2K(p) = 0,$$

y así,

$$K(p) = -\frac{1}{2} \text{traza}(A_p^2) + 2H(p)^2,$$

para todo  $p \in S$ . Como una aplicación sencilla

---

<sup>8</sup>Todo operador lineal satisface funcionalmente su polinomio característico. Lo que en el caso de dimensión 2 se puede ver fácilmente comprobando que cada matriz de orden  $2 \times 2$  satisface su polinomio característico.



**Corolario 29.** Para cualquier superficie regular orientable  $S$  se cumple  $K \leq 2H^2$ . Si además  $S$  es conexa, se da la igualdad si y sólo si  $S$  es un abierto de un plano.

Por otro lado, como la ecuación característica de  $A_p$  tiene 2 soluciones, sus discriminante tiene que ser  $\geq 0$ . Por tanto,

$$H(p)^2 \geq K(p),$$

y se da la igualdad si, y sólo si,  $k_1 = k_2$  en  $p$ .

Para familiarizarnos con las curvatura de Gauss y media veamos algunos ejemplos sencillos (hasta que no dispongamos de expresiones de  $K$  y de  $H$  relativas a una parametrización nuestra capacidad de cálculo es limitada)

**Ejemplo 30.** 1. Para cualquier plano de  $\mathbb{R}^3$  su curvatura de Gauss y su curvatura media se anulan idénticamente. Recíprocamente, si  $K = H = 0$  entonces la diferencial de la aplicación de Gauss es idénticamente nula y, cuando la superficie es conexa, ésta es un abierto de un plano.

2. Para una esfera  $S_r^2$ , con respecto a su normal exterior tenemos  $K = \frac{1}{r^2}$  y  $H = -\frac{1}{r}$

3. Consideremos el elipsoide

$$E_{211} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Sabemos que

$$A_{(x_0, y_0, z_0)}(a, b, c) = \frac{-1}{\sqrt{x_0^2 + 16y_0^2 + 16z_0^2}} (a, 4b, 4c) - \frac{3ax_0}{(x_0^2 + 16y_0^2 + 16z_0^2)^{\frac{3}{2}}} (x_0, 4y_0, z_0),$$

donde  $p = (x_0, y_0, z_0) \in E_{211}$  y  $\frac{x_0}{4}a + y_0b + z_0c = 0$ .

En particular

$$A_{(2,0,0)}(0, b, c) = \frac{-1}{2} (0, 4b, 4c) = -2(0, b, c),$$

por tanto  $k_1 = k_2 = -2$  en  $(2, 0, 0)$ ,  $K(2, 0, 0) = 4$  y  $H(2, 0, 0) = -2$ .

Por otro lado,

$$A_{(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)}(0, 0, 1) = \frac{-4}{\sqrt{10}} (0, 0, 1),$$

$$A_{(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right) = \frac{-8}{5\sqrt{10}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right),$$

por tanto  $\left((0, 0, 1), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right)\right)$  es una base ortonormal de  $T_{(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)}E_{211}$  de vectores propios de  $A_{(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)}$ , con

$$k_1 = \frac{-4}{\sqrt{10}}, \quad k_2 = \frac{-8}{5\sqrt{10}},$$

$$K(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{16}{25} \quad \text{y} \quad H(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{-14}{\sqrt{10}}.$$

4. Para el caso del cilindro

$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \}$  tenemos

$$N(x, y, z) = (x, y, 0)$$

y para  $p = (x, y, z)$ ,

$$A_p(a, b, c) = (-a, -b, 0).$$

Por tanto

$$A_p(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \quad \text{y} \quad A_p(-y, x, 0) = (-1)(-y, x, 0),$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -1, \quad K = 0 \quad \text{y} \quad H = -\frac{1}{2}.$$

5. Finalmente, vamos a considerar el **paraboloides hiperbólico**

$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 \}$ , que tiene

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} (-2x, 2y, 1).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} A_p(a, b, c) &= \frac{-1}{\sqrt{1 + 4x_0^2 + 4y_0^2}} (-2a, 2b, 0) \\ &+ \frac{4x_0a + 4y_0b}{(1 + 4x_0^2 + 4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} (-2x_0, 2y_0, 1) \end{aligned}$$

donde  $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$  y  $c = 2x_0a - 2y_0b$ .

Se cumple

$$\begin{aligned} A_p(1, 0, 2x_0) &= \frac{2(1+4y_0^2)}{(1+4x_0^2+4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} (1, 0, 2x_0) \\ &+ \frac{8x_0y_0}{(1+4x_0^2+4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} (0, 1, -2y_0) \\ A_p(0, 1, -2y_0) &= \frac{-8x_0y_0}{(1+4x_0^2+4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} (1, 0, 2x_0) \\ &- \frac{2(1+4x_0^2)}{(1+4x_0^2+4y_0^2)^{\frac{3}{2}}} (0, 1, -2y_0) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$K(x, y, z) = \frac{-4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2}, \quad H(x, y, z) = \frac{-4x^2 + 4y^2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

### 3. Aplicación de Gauss en coordenadas locales.

Consideremos una superficie regular orientable  $S$  y sea  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  una de sus dos aplicaciones de Gauss. Diremos que una parametrización local  $\bar{x} : U \rightarrow S$  es **compatible** con la orientación en  $S$  definida por  $N$  cuando

$$N = \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} / \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right| \right) \circ \bar{x}^{-1}$$

sobre el entorno coordenado  $\bar{x}(U)$ . Recordemos que todo punto de  $S$  cae dentro de un entorno coordenado obtenido de una parametrización local compatible con la orientación en  $S$  definida por  $N$ .

Para cada  $p = \bar{x}(u_0, v_0) \in \bar{x}(U)$  tenemos la base positiva de  $T_p S$

$$B_{(u_0, v_0)}^{\bar{x}} = \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

Vamos a calcular la matriz del endomorfismo de Weingarten  $A_p$  respecto de  $B_{(u_0, v_0)}^{\bar{x}}$ , siendo  $p = \bar{x}(u_0, v_0)$ . Ponemos

$$\begin{aligned} A_p \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0) \right) &= a_{11} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0) + a_{21} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u_0, v_0) \\ A_p \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u_0, v_0) \right) &= a_{12} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0) + a_{22} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

siendo  $(a_1, a_2)$  (resp.  $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ ) las coordenadas de  $w \in T_p S$  (resp. de  $A_p(w)$ ) en  $B_{(u_0, v_0)}^{\bar{x}}$  es la ecuación matricial de  $A_p$  respecto de  $B_{(u_0, v_0)}^{\bar{x}}$ .

Nótese que al no ser la base  $B_{(u_0, v_0)}^{\bar{x}}$  ortonormal en general, la matriz no tiene que ser simétrica.

Por otro lado,

$$\Pi_p(w) = \langle A_p(w), w \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(u_0, v_0) & f(u_0, v_0) \\ f(u_0, v_0) & g(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} e(u_0, v_0) &= \left\langle A_p \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0) \right\rangle \\ f(u_0, v_0) &= \left\langle A_p \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle = \left\langle A_p \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0) \right\rangle \end{aligned}$$

$$g(u_0, v_0) = \left\langle A_p \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle$$

se llaman los **coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental** relativos a  $\bar{\mathbf{x}}$  en  $(u_0, v_0)$ .

Como ya hicimos anteriormente, derivando parcialmente en

$$\left\langle \underbrace{N \circ \bar{\mathbf{x}}}_{\text{normal}}, \underbrace{\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}}_{\text{tangente}} \right\rangle = \left\langle \underbrace{N \circ \bar{\mathbf{x}}}_{\text{normal}}, \underbrace{\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}}_{\text{tangente}} \right\rangle = 0,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial(N \circ \bar{\mathbf{x}})}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \right\rangle + \left\langle N \circ \bar{\mathbf{x}}, \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial(N \circ \bar{\mathbf{x}})}{\partial v}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \right\rangle + \left\langle N \circ \bar{\mathbf{x}}, \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v \partial u} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial(N \circ \bar{\mathbf{x}})}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right\rangle + \left\langle N \circ \bar{\mathbf{x}}, \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u \partial v} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial(N \circ \bar{\mathbf{x}})}{\partial v}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right\rangle + \left\langle N \circ \bar{\mathbf{x}}, \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v^2} \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Nótese que la segunda y la tercera fórmulas son iguales. Deducimos

$$\begin{aligned} e(u_0, v_0) &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2}(u_0, v_0), N(\bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0)) \right\rangle, \\ f(u_0, v_0) &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u \partial v}(u_0, v_0), N(\bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0)) \right\rangle, \\ g(u_0, v_0) &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v^2}(u_0, v_0), N(\bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Así,  $e$ ,  $f$  y  $g$  son, en cada punto de  $(u, v) \in U$ , la tercera coordenada de  $\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2}(u, v)$ ,  $\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u \partial v}(u, v)$  y  $\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v^2}(u, v)$ , respectivamente, en siguiente base de  $\mathbb{R}^3$

$$\left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u, v), N(\bar{\mathbf{x}}(u, v)) \right),$$

equivalentemente  $\left[ \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2}(u, v) \right]^\perp = e(u, v) N_{\bar{\mathbf{x}}(u, v)}$ , análogamente para  $f$  y  $g$ .

Teniendo en cuenta que

$$N \circ \bar{\mathbf{x}} = \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right|}$$

sobre  $U$ . Podemos escribir

$$e = \frac{\det\left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}\right)}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right|}, \quad f = \frac{\det\left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}\right)}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right|}, \quad g = \frac{\det\left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v^2}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}\right)}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right|}$$

De manera que para el **cálculo práctico** de los coeficientes de la segunda forma fundamental  $\Pi_p$  procederemos del siguiente modo:

1. Elegimos una parametrización local  $\bar{x}$  que contenga a  $p$  su correspondiente entorno coordinado.
2. Calculamos  $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}$  y  $\left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right|$  en  $\bar{x}^{-1}(p)$
3. Hallamos  $\det\left(\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right)$  en  $\bar{x}^{-1}(p)$
4. Aplicamos que  $e = \frac{\det\left(\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right)}{\left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right|}$
5. Seguimos un procedimiento análogo para  $f$  y  $g$ .

En lo que sigue eliminamos, por brevedad, que estamos trabajando en un punto fijo, aunque arbitrario,  $(u_0, v_0) \in U$ . Así, la matriz del endomorfismo de Weingarten respecto de la base que estamos considerando se obtiene de

$$A_p\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right) = a_{11} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + a_{21} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}$$

$$A_p\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right) = a_{12} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + a_{22} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}$$

Sean

$$E = \left\langle \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \right\rangle, F = \left\langle \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\rangle, G = \left\langle \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\rangle$$

los coeficientes de la **primera forma cuadrática fundamental** relativos a  $\bar{x}$ .

Tenemos

$$e = \left\langle A_p\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right), \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \right\rangle = a_{11}E + a_{21}F$$

$$f = \left\langle A_p\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right), \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\rangle = a_{11}F + a_{21}G$$

$$f = \left\langle A_p\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right), \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \right\rangle = a_{12}E + a_{22}F$$

$$g = \left\langle A_p\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right), \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\rangle = a_{12}F + a_{22}G$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Resulta

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{G}{EG-F^2} & \frac{-F}{EG-F^2} \\ \frac{-F}{EG-F^2} & \frac{E}{EG-F^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

es decir,

$$a_{11} = \frac{eG - fF}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{fG - gF}{EG - F^2},$$

$$a_{21} = \frac{fE - eF}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{gE - fF}{EG - F^2}.$$

Como

$$K \circ \bar{x} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad H \circ \bar{x} = \frac{1}{2} \text{traza} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$K \circ \bar{x} = \frac{\det \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}},$$

$$H \circ \bar{x} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

**Observación 31.** La expresión

$$K \circ \bar{x} = \frac{\det \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}},$$

no debe leerse como el cociente del determinante de la segunda forma fundamental entre el determinante de la primera forma fundamental. La razón es muy sencilla:

Una forma bilineal simétrica no tiene asociado un determinante de forma natural.

En efecto, sean  $T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial real  $V$  con dimensión  $n \geq 1$  y  $B = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $\tilde{B} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$  son dos bases ordenadas de  $V$ .

Si  $(a_1, \dots, a_n)$ ,  $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$  son las coordenadas de  $w \in V$  en  $B$  y  $\tilde{B}$  respectivamente,  $(b_1, \dots, b_n)$ ,  $(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$  las coordenadas de  $z \in V$  en  $B$  y  $\tilde{B}$  respectivamente, se tiene

$$T(w, z) = (a_1, \dots, a_n) M_B(T) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) M_{\tilde{B}}(T) \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

siendo

$$M_B(T) = \left( T(v_i, v_j) \right)_{n \times n}, \quad M_{\tilde{B}}(T) = \left( T(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) \right)_{n \times n}.$$

De manera que

$$M_{\tilde{B}}(T) = P^t M_B(T) P, \quad \text{siendo} \quad P = M(1_V, \tilde{B}, B) \in Gl(n, \mathbb{R}).$$

Por tanto,

$$\det M_{\tilde{B}}(T) = \det M_B(T) \det(P)^2.$$

Si  $T_0$  es una forma bilineal simétrica definida positiva sobre  $V$  ocurre que  $\det M_B(T_0) > 0$  para toda base  $B$  y tendríamos

$$\frac{\det M_{\tilde{B}}(T)}{\det M_{\tilde{B}}(T_0)} = \frac{\det M_B(T) \det(P)^2}{\det M_B(T_0) \det(P)^2} = \frac{\det M_B(T)}{\det M_B(T_0)},$$

de manera que el cociente

$$\frac{\det M_B(T)}{\det M_B(T_0)}$$

no depende de la base elegida para calcularlo; de hecho, si  $L$  es endomorfismo de  $V$  que representa a  $T$  según  $T_0$ , i.e.,

$$T(w, z) = T_0(L(w), z),$$

para todos  $w, z \in V$ , se cumple  $M_B(T) = M_B(T_0) M(L, B)$  y, por tanto, este cociente es  $\det(L)$ .

Nótese que si  $V = T_p S$ ,  $T$  es el tensor asociado a la segunda forma cuadrática fundamental y  $T_0$  el tensor asociado a la primera forma cuadrática fundamental se tiene  $L = A_p$ .

**Observación 32.** Este argumento demuestra que podíamos haber definido la curvatura de Gauss como sigue: sea  $S$  una superficie regular orientable y  $N$  una aplicación de Gauss de  $S$ . Para cada  $p \in S$  tomamos una parametrización local  $\bar{x} : U \rightarrow S$  compatible con la orientación en  $S$  dada por  $N$  y tal que  $p = \bar{x}(u_0, v_0) \in \bar{x}(U)$ . Se define

$$K(p) = \frac{\det \begin{pmatrix} e(u_0, v_0) & f(u_0, v_0) \\ f(u_0, v_0) & g(u_0, v_0) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix}},$$

donde numerador y denominador son los determinantes de los coeficientes de la segunda forma cuadrática fundamental y los coeficientes de la primera forma cuadrática fundamental relativos a  $\bar{x}$  en  $p = \bar{x}(u_0, v_0)$ . El cociente es siempre igual para toda parametrización local en las condiciones de  $\bar{x}$ . Un comentario análogo se puede hacer para la curvatura media relativa a  $N$ .

**Observación 33.** También las expresiones que hemos obtenido para  $K \circ \bar{x}$  y  $H \circ \bar{x}$  nos dicen que  $K, H : S \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones **diferenciables**. Por otro lado, las curvaturas principales satisfacen la ecuación de segundo grado

$$t^2 - 2Ht + K = 0,$$

por tanto, con el convenio que  $k_1(p) \geq k_2(p)$  para todo  $p \in S$ , tenemos que  $k_1, k_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$  son **continuas**, y diferenciables excepto quizás en los puntos donde se cumpla  $H^2 = K$ .

**Ejemplo 34.** Para el grafo de una función diferenciable  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\},$$

consideremos la aplicación de Gauss  $N : G(f) \rightarrow \mathbb{S}^2$ , que viene dada por

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} (-\nabla f, 1).$$

Con respecto a la parametrización global usual del grafo

$$\bar{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

tenemos

$$E = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2,$$

y como

$$\Pi_p \left( a \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + b \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

resulta

$$e = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \quad f = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \quad g = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Por tanto,

$$K \circ \bar{x} = \frac{1}{(1 + |\nabla f|^2)^2} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix},$$

$$H \circ \bar{x} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right\}.$$

Equivalentemente,



$$H \circ \bar{x} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right),$$

donde  $\operatorname{div}$  es la divergencia usual, es decir,  $\operatorname{div}(X) = \frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial X_2}{\partial v}$ , siendo  $X = (X_1, X_2)$ ,  $X_1 = X_1(u, v)$ ,  $X_2 = X_2(u, v)$  funciones diferenciables.

**Observación 35.**  $K$  y  $H$  son funciones sobre la superficie, sin embargo, en el caso de grafos se consideran de manera natural sobre el abierto en el que está definida la función del grafo. Así se escribe  $K$  en lugar de  $K \circ \bar{x}$ ,  $H$  en lugar de  $H \circ \bar{x}$  y las fórmulas anteriores se escriben como sigue

$$K = \frac{1}{(1 + |\nabla f|^2)^2} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix}, \quad H = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right).$$

**Ejemplo 36.** Consideremos ahora el toro

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\},$$

donde  $0 < r < a$ . Una parametrización local suya es

$$\bar{x}(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u),$$

con  $0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi$ .

Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= (-r \operatorname{sen} u \cos v, -r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, r \cos u) \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= (-(a + r \cos u) \operatorname{sen} v, (a + r \cos u) \cos v, 0) \end{aligned}$$

de donde deducimos

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (a + r \cos u)^2$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \operatorname{sen} v, -r \operatorname{sen} u) \\ \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} &= (r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -r \operatorname{sen} u \cos v, 0) \\ \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} &= (-(a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \operatorname{sen} v, 0) \end{aligned}$$

Así,

$$e = \frac{\det\left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}\right)}{\left|\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}\right|} = r,$$

$$f = \frac{\det\left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}\right)}{\left|\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}\right|} = 0,$$

$$g = \frac{\det\left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v^2}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}\right)}{\left|\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}\right|} = (a + r \cos u) \cos u.$$

Por tanto,

$$K(\bar{\mathbf{x}}(u, v)) = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)} \quad \text{y} \quad H(\bar{\mathbf{x}}(u, v)) = \frac{1}{2} \frac{a + 2r \cos u}{r^3(a + r \cos u)}.$$

Obsérvese que en ambas fórmulas no hay dependencia del parámetro  $v$ . Eso quiere decir que sobre cada paralelo  $u = u_0$  tanto  $K$  como  $H$  son constantes. En particular, en los paralelos  $u = \frac{\pi}{2}$  y  $u = \frac{3\pi}{2}$  la curvatura de Gauss se anula.

Por otro lado,  $K(\bar{\mathbf{x}}(u, v))$  tiene el mismo signo que  $\cos u$ , de manera que

$$K(\bar{\mathbf{x}}(u, v)) > 0 \quad \text{si} \quad 0 < u < \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \frac{3\pi}{2} < u < 2\pi,$$

$$K(\bar{\mathbf{x}}(u, v)) < 0 \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}.$$

**Definición 37** (Clasificación de los puntos de una superficie regular). *Un punto  $p$  de una superficie regular orientable  $S$  se dice:*

- (1) *Elíptico* si  $K(p) > 0$ ,
- (2) *Hiperbólico* si  $K(p) < 0$ .
- (3) *Parabólico* si  $K(p) = 0$  pero  $A_p \neq 0$  (es decir, cuando el endomorfismo de Weingarten tiene rango 1)
- (4) *Plano* si  $A_p = 0$  (es decir, si  $K(p) = 0$  y  $H(p) = 0$  simultáneamente).

Esta definición no depende de la orientación elegida.

Notemos que decir  $A_p = 0$  equivale con decir que la segunda forma fundamental cumple  $\Pi_p = 0$ . Obviamente, un plano de  $\mathbb{R}^3$  tiene todos sus puntos planos. Recíprocamente, si una superficie regular conexa tiene todos sus puntos planos ha de ser un abierto de un plano.

**Ejemplo 38.** 1. Parece natural preguntarse por la existencia de una superficie regular con algún punto plano pero no con la totalidad de puntos planos. Consideremos la función  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(x, y) = (x^2 + y^2)^2$  y sea  $S$  su grafo en  $\mathbb{R}^3$ . Tenemos

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2),$$

por tanto

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 12x^2 + 4y^2, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 8xy, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 4x^2 + 12y^2,$$

$$(1 + |\nabla f|^2)^2 K = \det \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 \end{pmatrix} = 48(x^2 + y^2)^2.$$

Así,  $K$  se anula en el punto  $(0, 0, 0)$  y es  $> 0$  en cualquier otro punto. Como las derivadas parciales segundas de  $h$  también se anulan en  $(0, 0)$ , tenemos que el punto  $(0, 0, 0)$  es plano y es el único punto plano del grafo de  $h$ .

2. Sea ahora  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^4$  y sea  $S$  el grafo de  $f$ . Notemos que  $K = 0$  sobre toda  $S$  y que  $H(0, y, 0) = 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ . Por tanto todos los puntos de  $S$  de la forma  $(0, y, 0)$  son planos. Sin embargo en cada punto de  $S$  de la forma  $(x_0, y_0, x_0^4)$  con  $x_0 \neq 0$  el endomorfismo de Weingarten tiene rango 1, i.e., todos estos puntos son parabólicos.
3. Ya sabemos que todos los puntos del cilindro definido por  $x^2 + y^2 = 1$  tienen curvatura 0 pero que la curvatura media es una constante no nula. Por tanto todos los puntos de este cilindro son parabólicos. Notemos que la propiedad de tener todos sus puntos parabólicos no caracteriza al cilindro. En efecto, el grafo de la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2$  (que es un cilindro sobre la parábola  $z = x^2$ ,  $y = 0$ ) tiene todos sus puntos parabólicos.
4. Sabemos que los puntos de los paralelos  $u = \frac{\pi}{2}$  y  $u = \frac{3\pi}{2}$  en la parametrización local

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

con  $0 < u < 2\pi$ ,  $0 < v < 2\pi$ , del toro

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\},$$

donde  $0 < r < a$ , tienen curvatura de Gauss cero. ¿Serán parabólicos? Como se cumple

$$H(\bar{\mathbf{x}}(u, v)) = \frac{1}{2} \frac{a + 2r \cos u}{r^3(a + r \cos u)},$$

tenemos que en los puntos con  $u = \frac{\pi}{2}$  o  $u = \frac{3\pi}{2}$ , ocurre  $H = \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \neq 0$ , por tanto todos estos punto son parabólicos.

Además en el toro hay un abierto en el que  $K > 0$  y otro en el que  $K < 0$ , como ya habíamos dicho, teniendo cada uno por frontera esos paralelos. De manera que el primero consiste en puntos elípticos y el segundo en punto hiperbólicos.

Hay que notar que mientras que el subconjunto de puntos planos o el subconjunto de puntos parabólicos no tiene que ser abierto, tanto el subconjunto de puntos elípticos como el de hiperbólicos son abiertos de la superficie por la continuidad de la curvatura de Gauss; de hecho, si una superficie regular  $S$  tiene un punto elíptico (resp. hiperbólico)  $p_0$  entonces tiene un entorno abierto de  $p_0$  con todos sus puntos elípticos (resp. hiperbólicos).

5. Todo punto de un elipsoide es elíptico, en particular, todo punto de una esfera es elíptico. Consideremos el paraboloide elíptico  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$  que es el grafo de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Su curvatura de Gauss es

$$K = \frac{1}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} > 0,$$

lo que nos dice que todos sus puntos son elípticos.

Finalmente, sea el paraboloide hiperbólico  $\tilde{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$  que es el grafo de la función  $h(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Su curvatura de Gauss es

$$K = \frac{1}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{-4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} < 0,$$

por lo que todos sus puntos son hiperbólicos.

**Proposición 39.** *Si tenemos superficies regulares orientables  $S$  y  $\tilde{S}$  tales que existe un movimiento rígido  $F$  del espacio euclídeo de manera que*

$$F(S) = \tilde{S},$$

(i.e.,  $S$  y  $\tilde{S}$  son congruentes) entonces

- (1) Si  $N$  un campo de vectores normales unitarios sobre  $S$ , entonces  $\tilde{N}_{F(p)} := dF_p(N_p) = \vec{F}(N_p)$ , para todo  $p \in S$ , es un campo de vectores normales unitarios sobre  $\tilde{S}$ .
- (2) Si  $f := F|_S : S \rightarrow \tilde{S}$ , se cumple que

$$\tilde{K} \circ f = K \quad \text{y} \quad \tilde{H} \circ f = H,$$

donde  $H, \tilde{H}$  son las curvaturas medias de  $S, \tilde{S}$  relativas a  $N, \tilde{N}$ , respectivamente.

*Demostración.* (1) La aplicación  $\tilde{N} : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es diferenciable ya que  $\tilde{N} = \vec{F} \circ N \circ F^{-1}|_{\tilde{S}}$ . Por otro lado, dado  $\tilde{w} \in T_q \tilde{S}$  existe un único  $w \in T_{F^{-1}(q)} S$  de manera que  $dF_{F^{-1}(q)}(w) = \tilde{w}$ . Por tanto,

$$\langle \tilde{w}, \tilde{N}_q \rangle = \langle dF_{F^{-1}(q)}(w), dF_{F^{-1}(q)}(N_{F^{-1}(q)}) \rangle = \langle w, N_{F^{-1}(q)} \rangle = 0,$$

para todo  $q \in \tilde{S}$ . Como además,

$$\langle \tilde{N}_q, \tilde{N}_q \rangle = \langle \vec{F} N_{F^{-1}(q)}, \vec{F} N_{F^{-1}(q)} \rangle = \langle N_{F^{-1}(q)}, N_{F^{-1}(q)} \rangle = 1,$$

tenemos que  $\tilde{N}$  es un campo de vectores normales unitarios sobre  $\tilde{S}$ .

(2) Como ocurre  $d\tilde{N}_q = \vec{F} \circ dN_{F^{-1}(q)} \circ \vec{F}^{-1}$  según

$$T_q \tilde{S} \rightarrow T_{F^{-1}(q)} S \rightarrow T_{F^{-1}(q)} S \rightarrow T_q \tilde{S}$$

es decir, en la fórmula anterior  $\vec{F}$  representa a  $\vec{F} : T_{F^{-1}(q)} S \rightarrow T_q \tilde{S}$  y  $\vec{F}^{-1} : T_q \tilde{S} \rightarrow T_{F^{-1}(q)} S$  su inversa. Entonces, los endomorfismos de Weingarten en puntos correspondientes cumplen

$$\tilde{A}_q = \vec{F} \circ A_{F^{-1}(q)} \circ \vec{F}^{-1}$$

y por tanto

$$M(\tilde{A}_q, \tilde{B}_q) = P M(A_p, B_p) P^{-1},$$

siendo  $F(p) = q$ ,  $B_p$  una base de  $T_p S$ ,  $\tilde{B}_q$  una base de  $T_q \tilde{S}$  y  $P$  la matriz de  $\vec{F}$  respecto de las bases  $B_p$  en  $T_p S$  y  $\tilde{B}_q$  en  $T_q \tilde{S}$ . Así,

$$\det A_p = \det \tilde{A}_{F(p)} \quad \text{traza } A_p = \text{traza } \tilde{A}_{F(p)}$$

concluyendo la prueba. □

**Proposición 40.** Si  $p_0$  un punto elíptico de una superficie regular  $S$ , entonces existe un entorno  $V$  de  $p_0$  en  $S$  de manera que todos los puntos de  $V$  caen al mismo lado del plano tangente  $p_0 + T_{p_0} S$ . Si  $p_0$  es hiperbólico entonces en todo entorno suyo en  $S$  hay puntos a ambos lados de  $p_0 + T_{p_0} S$ .

*Demostración.* Después de aplicarle a un movimiento rígido a  $S$ , podemos suponer que  $p_0 = (0, 0, 0)$ ,  $p_0 + T_{p_0} S (= T_{p_0} S)$  es el plano  $z = 0$  y  $N_{p_0} = (0, 0, 1)$ .

Considero una función  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  con  $(0, 0) \in U$  de manera que su grafo  $\{(u, v, h(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in U\}$  es un entorno abierto de  $(0, 0, 0)$  en  $S$ .

Por otro lado, sea la función distancia con signo a  $T_{p_0} S$ ,

$$h_{N_{p_0}} : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_{N_{p_0}}(p) = \langle p, N_{p_0} \rangle.$$

Si  $\bar{x}(u, v) = (u, v, h(u, v))$ , sobre  $\bar{x}(U)$  tenemos

$$h_{N_{p_0}}(\bar{x}(u, v)) = \langle \bar{x}(u, v), N_{p_0} \rangle = h(u, v),$$

por lo tanto,

$$h_{N_{p_0}} \circ \bar{x} = h.$$

Hacemos un desarrollo de Taylor de  $h$  alrededor de  $(0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} h(u, v) &= h(0, 0) + \frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) u + \frac{\partial h}{\partial v}(0, 0) v + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(0, 0) u^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(0, 0) uv + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(0, 0) v^2 \right) + R \end{aligned}$$

donde  $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} R/(u^2 + v^2) = 0$ . Como

$$h(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial v}(0, 0) = 0,$$

el desarrollo queda

$$h(u, v) = \frac{1}{2} (e(0, 0)u^2 + 2f(0, 0)uv + g(0, 0)v^2) + R.$$

es decir

$$h(u, v) = \frac{1}{2} \Pi_{p_0} \left( u \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(0, 0) + v \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(0, 0) \right) + R.$$

Si el punto  $p_0$  fuera elíptico, para  $(u, v) \neq (0, 0)$  suficientemente próximo a  $(0, 0)$  tendríamos que  $h(u, v)$  tiene el mismo signo que  $\Pi_{p_0} \left( u \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(0, 0) + v \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(0, 0) \right)$ , que es o bien  $> 0$  o bien  $< 0$ .

Por tanto, o bien  $h_{N_{p_0}}(\bar{x}(u, v)) > 0$  o bien  $h_{N_{p_0}}(\bar{x}(u, v)) < 0$  para  $(u, v)$  próximo a  $(0, 0)$ , con lo cual  $\bar{x}(u, v)$  cae a un mismo lado de  $T_{p_0}S$  para  $(u, v)$  próximo a  $(0, 0)$ .

Si  $p_0$  es hiperbólico existen  $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$  de manera que  $\Pi_{p_0} \left( u_1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(0, 0) + v_1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(0, 0) \right)$  y  $\Pi_{p_0} \left( u_2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(0, 0) + v_2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(0, 0) \right)$  tienen signos opuestos. Consecuentemente,  $\bar{x}(u_1, v_1)$  y  $\bar{x}(u_2, v_2)$  caen en diferentes lados de  $p_0 + T_{p_0}S$ .  $\square$

Vamos ahora a introducir un concepto que además de justificar los adjetivos elíptico, hiperbólico y parabólico, aplicados a un punto de una superficie regular, tiene su importancia histórica.

Sea  $S$  una superficie regular orientable y fijemos  $N$ , una de sus dos orientaciones. Dado un punto  $p$  de  $S$ , que no sea plano, consideramos la segunda forma cuadrática fundamental relativa a  $N$  y el siguiente subconjunto de  $T_pS$ ,

$$D_p(S) := \{w \in T_pS : \Pi_p(w) = \pm 1\}.$$

Dado que existe una base ortonormal  $B_p = (w_1, w_2)$  de  $T_pS$  de manera que

$$A_p(w_1) = k_1 w_1, \quad A_p(w_2) = k_2 w_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad k_1 \geq k_2,$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son las curvaturas principales. Entonces podemos reescribir

$$D_p(S) = \{x_1 w_1 + x_2 w_2 \in T_pS : k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 = \pm 1\}.$$

Como  $k_1$  y  $k_2$  no pueden ser simultáneamente cero ya que suponemos que el punto  $p$  no es plano, la expresión anterior prueba que  $D_p(S)$  es la unión de dos cónicas en  $T_pS$  (una puede ser vacía). Se llama a  $D_p(S)$  la **indicatriz** de Dupin de  $S$  en  $p$ .

En un punto elíptico la indicatriz de Dupin es una **elipse** (que se convierte en una circunferencia si  $k_1 = k_2 (\neq 0)$ ). Recíprocamente, si  $D_p(S)$  es una elipse, entonces  $k_1 k_2 > 0$  y, por tanto, el punto  $p$  es elíptico.

Si el punto  $p$  es hiperbólico, entonces  $D_p(S)$  está formado por dos **hipérbolas** con asíntotas comunes. Recíprocamente,  $D_p(S)$  son dos asíntotas, necesariamente  $k_1 k_2 < 0$  y el punto es hiperbólico.

Finalmente, si el punto es parabólico,  $D_p(S)$  consta de **dos rectas paralelas** (mirando  $T_p S$  como plano afín). Si por example,  $k_1 > 0$  y  $k_2 = 0$ , las rectas serían  $x = 1/\sqrt{k_1}$ ,  $x = -1/\sqrt{k_1}$ . El recíproco también es cierto.

**Definición 41.** Sea  $S$  una superficie regular y orientable. Un punto  $p$  de  $S$  se dice **umbilical** cuando el endomorfismo de Weingarten en  $p$  con respecto a un campo de vectores normales unitarios  $N$  cumple

$$A_p = \lambda I$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  (depende de  $p$ ) e  $I$  denota, por comodidad, la transformación identidad  $1_{T_p S}$ .

Como al cambiar  $N$  por  $-N$  el endomorfismo de Weingarten en  $p$  cambia de signo, resulta que la noción de punto umbilical no depende del campo de vectores normales unitarios sobre  $S$  elegido.

Si todos los puntos de  $S$  son umbilicales, i.e.,  $A_p = \lambda(p) I$  para todo  $p \in S$ , decimos que  $S$  es **totalmente umbilical**.

**Proposición 42.** Son equivalentes:

- (1)  $p$  es un punto umbilical de  $S$ .
- (2) La segunda forma fundamental en  $p$  relativa a  $N$  cumple  $\Pi_p(w) = \lambda \langle w, w \rangle$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , para todo  $w \in T_p S$ .
- (3) Existe una parametrización local  $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  con  $p = \bar{x}(u_0, v_0) \in \bar{x}(U)$  de manera que  $e(u_0, v_0) = \lambda E(u_0, v_0)$ ,  $f(u_0, v_0) = \lambda F(u_0, v_0)$  y  $g(u_0, v_0) = \lambda G(u_0, v_0)$ .
- (4) Las curvaturas principales en  $p$  relativas a  $N$  cumplen  $k_1 = k_2$ .
- (5) Todas las secciones normales a  $S$  en  $p$  tienen en ese punto la misma curvatura.
- (6) Se cumple  $H(p)^2 = K(p)$ .

Aunque son equivalencias muy evidentes, hacemos la prueba.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Si  $A_p = \lambda I$  entonces  $\Pi_p(w) = \langle A_p w, w \rangle = \lambda \langle w, w \rangle$  para todo  $w \in T_p S$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3). Si se cumple  $\Pi_p(w) = \lambda \langle w, w \rangle$  para todo  $w \in T_p S$ , en particular  $\Pi_p\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\right) = \lambda \left\langle \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u_0, v_0) \right\rangle$ , es decir,  $e(u_0, v_0) = \lambda E(u_0, v_0)$ . Análogamente las otras dos igualdades.

(3)  $\Rightarrow$  (4). Si se cumple (3) entonces

$$K(p) = \frac{\det \begin{pmatrix} e(u_0, v_0) & f(u_0, v_0) \\ f(u_0, v_0) & g(u_0, v_0) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix}} = \lambda^2,$$

$$\begin{aligned}
H(p) &= \frac{1}{2} \frac{e(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - 2f(u_0, v_0)F(u_0, v_0) + g(u_0, v_0)E(u_0, v_0)}{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F^2(u_0, v_0)} \\
&= \frac{\lambda}{2} \frac{2(E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F^2(u_0, v_0))}{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F^2(u_0, v_0)} = \lambda.
\end{aligned}$$

Por tanto, las curvaturas principales satisfacen la ecuación de segundo grado  $t^2 - 2\lambda t + \lambda^2 = 0$ , i.e.,  $(t - \lambda)^2 = 0$ , con lo cual  $k_1 = k_2 = \lambda$ .

(4)  $\Rightarrow$  (5) Si  $k$  es la curvatura de una sección normal a  $S$  en  $p$  se cumple  $k_2 \leq k \leq k_1$ , al ser  $k_2$  la menor y  $k_1$  la mayor de las curvaturas normales a  $S$  en  $p$ . Así, si suponemos  $k_2 = k_1$  entonces  $k = k_1 = k_2$ , i.e., todas las curvaturas de secciones normales a  $S$  en  $p$  son iguales.

(5)  $\Rightarrow$  (6) Si todas las curvaturas normales a  $S$  en  $p$  coinciden, en particular tenemos que  $k_1 = k_2$  y por tanto  $H^2(p) = K(p)$ .

(6)  $\Rightarrow$  (1) Si  $\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)^2 = k_1 k_2$  entonces  $k_1 = k_2$  y  $A_p = \lambda I$  con  $\lambda = k_1 = k_2$ .  $\square$

Sabemos que una esfera es totalmente umbilical. Como todo punto plano es umbilical ( $A_p = \lambda I$ , con  $\lambda = 0$ ), todo plano afín también es totalmente umbilical.

Por otro lado, no toda superficie regular ha de tener algún punto umbilical. Por ejemplo, el cilindro

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \}$$

no tiene puntos umbilicales.

El paraboloide elíptico

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \}$$

tiene

$$K(x, y, z) = \frac{4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2}, \quad H(x, y, z) = \frac{2 + 4x^2 + 4y^2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Así,

$$H(x, y, z)^2 = K(x, y, z) \iff (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

por tanto el único punto umbilical de  $S$  es  $(0, 0, 0)$  (donde  $K$  vale 4 y  $H$  vale 2).

El paraboloide hiperbólico

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 \}$$

tiene

$$K(x, y, z) = \frac{-4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} < 0,$$



por tanto la igualdad  $H^2 = K$  es imposible en ningún punto de  $S$ , de manera que no tiene puntos umbilicales.

De hecho, si un punto  $p \in S$  es umbilical entonces  $K(p) \geq 0$  (el recíproco no es cierto como lo muestra el cilindro antes considerado).

El subconjunto de los puntos umbilicales de una superficie regular  $S$  es un subconjunto **cerrado** de  $S$  al ser el subconjunto de  $S$  donde coinciden las funciones continuas  $H^2$  y  $K$ .

**Proposición 43.** *Si una superficie regular totalmente umbilical  $S$ , con*

$$A_p = \lambda(p) I ,$$

*para todo  $p \in S$ , es conexa, entonces  $\lambda$  es constante. En consecuencia,  $K = \lambda^2$  y  $H = \lambda$  son constantes.*

*Demostración.* En primer lugar señalemos que  $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable ya que, en este caso,  $\lambda = H$ .

Veamos ahora que  $(d\lambda)_p = 0$  para todo  $p \in S$ . Esto ocurrirá si para toda parametrización local  $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  se cumple

$$d(\lambda \circ \bar{x})_{(u,v)} = 0 ,$$

para todo  $(u, v) \in U$ , es decir,

$$\frac{\partial(\lambda \circ \bar{x})}{\partial u} = \frac{\partial(\lambda \circ \bar{x})}{\partial v} = 0 .$$

Como

$$A_{\bar{x}(u,v)} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = (\lambda \circ \bar{x})(u, v) \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} ,$$

$$A_{\bar{x}(u,v)} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = (\lambda \circ \bar{x})(u, v) \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} ,$$

ocurre

$$\frac{\partial}{\partial u}(N \circ \bar{x}) = -(\lambda \circ \bar{x})(u, v) \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(N \circ \bar{x}) = -(\lambda \circ \bar{x})(u, v) \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} .$$

Teniendo ahora en cuenta que

$$\frac{\partial^2}{\partial v \partial u}(N \circ \bar{x}) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(N \circ \bar{x}) , \quad \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v}$$

deducimos

$$\frac{\partial(\lambda \circ \bar{x})}{\partial v} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{\partial(\lambda \circ \bar{x})}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} .$$

Por tanto,

$$\frac{\partial(\lambda \circ \bar{x})}{\partial v} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} - \frac{\partial(\lambda \circ \bar{x})}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0$$

lo que prueba que  $d(\lambda \circ \bar{x})_{(u,v)} = 0$ . Como la parametrización local empleada es arbitraria, hemos demostrado que  $(d\lambda)_p = 0$  para todo punto  $p \in S$ .

Utilizando ahora que vimos al final del tema 2 que toda función diferenciable con diferencial idénticamente cero sobre una superficie regular conexa ha de ser constante, concluimos que  $\lambda$  es una función constante.

Finalmente,  $K(p) = \det(\lambda I) = \lambda^2$  y  $H(p) = \frac{1}{2} \text{traza}(\lambda I) = \lambda$  para todo  $p \in S$ . □

**Teorema 44.** *Sea  $S$  es una superficie regular conexa y totalmente umbilical con  $A_p = \lambda I$  en todo  $p \in S$ . Entonces,  $\lambda$  es constante y pueden ocurrir*

1. Si  $\lambda = 0$  entonces  $S$  es un subconjunto abierto de un plano afín.
2. Si  $\lambda \neq 0$  entonces  $S$  es un subconjunto abierto de una esfera de radio  $1/|\lambda|$ .

*Demostración.* Primero de todo, recordemos que por la Proposición anterior  $\lambda$  es constante.

1. Si  $\lambda = 0$  se tiene que la diferencial de la aplicación de Gauss  $N$  es cero en todo punto. Como  $S$  es conexa se tiene  $N = N_0 \in \mathbb{R}^3$ . Por tanto,  $S$  está contenida en un plano determinado por un punto  $p_0$  de  $S$  y con vector normal  $N_0$ , como vimos en Proposición 3.4.

2. Si  $\lambda \neq 0$  entonces para todo  $p \in S$  se tiene que la aplicación  $p \in S \mapsto p - \frac{1}{\lambda} N(p) \in \mathbb{R}^3$  es una constante  $p_0$ . Este es el centro de la esfera y su radio es  $1/|\lambda|$ , como vimos en Proposición 3.5. □

**Corolario 45.** *Sea  $S$  es una superficie regular conexa, cerrada y totalmente umbilical con  $A_p = \lambda I$  en todo  $p \in S$ . Entonces,  $\lambda$  es constante y pueden ocurrir*

1. Si  $\lambda = 0$  entonces  $S$  es un plano afín.
2. Si  $\lambda \neq 0$  entonces  $S$  es una esfera de radio  $1/|\lambda|$ .

*Demostración.* 1. Sabemos que  $S$  es un abierto en un plano  $\pi$ . Si suponemos además que  $S$  es cerrada en  $\mathbb{R}^3$  será cerrada en  $\pi$ . Así,  $S$  sería un abierto y cerrado en un plano  $\pi$  que es conexo. Por tanto,  $S = \pi$  (Corolario 3.1).

2. Sabemos que  $S$  es un abierto en una esfera  $\mathbb{S}_r^2$ . Si suponemos además que  $S$  es cerrada en  $\mathbb{R}^3$  será cerrada en  $\mathbb{S}_r^2$ . Así,  $S$  sería un abierto y cerrado en una esfera  $\mathbb{S}_r^2$  que es conexa. Por consiguiente,  $S = \mathbb{S}_r^2$ . □

## 4. El teorema Egregium de Gauss

**Definición 46.** Un difeomorfismo entre dos superficies regulares  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  se dice *isometría* si  $df_p : T_p S \rightarrow T_{f(p)} \tilde{S}$  es una isometría lineal entre los espacios vectoriales métricos  $(T_p S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(T_{f(p)} \tilde{S}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , para todo  $p \in S$ . Es decir,

$$\langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle,$$

para cualesquiera  $w_1, w_2 \in T_p S, p \in S$ . En otras palabras, un difeomorfismo  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  es una isometría si y solo si

$$I_{f(p)}(df_p(w)) = I_p(w),$$

para todos  $w \in T_p S, p \in S$ .

**Observación 47.** Si disponemos de una aplicación diferenciable entre dos superficies regulares  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  que cumpla:

$$\langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle,$$

para cualesquiera  $w_1, w_2 \in T_p S, p \in S$ , entonces  $df_p$  es inyectiva ya que si suponemos  $df_p(w) = 0$  entonces  $0 = \langle df_p(w), df_p(v) \rangle = \langle w, v \rangle$ , para todo  $v \in T_p S$ . Por tanto,  $w = 0$ . Pero, como tanto dominio como codominio de  $df_p$  tienen dimensión 2, necesariamente  $df_p$  es biyectiva. Por el teorema de la función inversa (Teorema 26 del tema 2), tenemos que  $f$  es un difeomorfismo local.

**Definición 48.** Una *isometría local* es una aplicación diferenciable entre dos superficies regulares  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  que cumple,

$$\langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle,$$

para cualesquiera  $w_1, w_2 \in T_p S, p \in S$ . Claramente, una isometría es isometría local, pero el recíproco no es cierto (Ejemplo 27 del tema 2).

Es claro que la identidad en  $S$  es una isometría, que la inversa de una isometría es también una isometría y que la composición de isometrías es una isometría. Así, la relación binaria “ser isométrica con” en el conjunto de todas las superficies regulares es una relación de equivalencia. Si dos superficies regulares son congruentes, entonces son isométricas. El recíproco no es cierto; es decir, no toda isometría entre superficies regulares va a ser la restricción de un movimiento rígido. En efecto, consideremos las superficies regulares

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 2\pi, z = 0\},$$

$$\tilde{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x \neq 1\}$$

y la aplicación  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  dada por  $f(x, y, 0) = (\cos x, \sin x, y)$ , que es una isometría de  $S$  en  $\tilde{S}$ . Claramente, no existe ningún movimiento rígido del espacio euclídeo que induzca  $f$  mediante restricción.

**Observación 49.** Sean  $S$  y  $\tilde{S}$  superficies regulares y supongamos que existen parametrizaciones locales  $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  y  $\tilde{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{S}$  (definidas en el mismo abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ ) de manera que:

$$E = \tilde{E}, \quad F = \tilde{F}, \quad G = \tilde{G},$$

entonces la aplicación

$$f := \tilde{x} \circ \bar{x}^{-1} : \bar{x}(U) \rightarrow \tilde{x}(U)$$

es una isometría. Nótese que este es un criterio práctico para ver que los abiertos  $\bar{x}(U)$  de  $S$  y  $\tilde{x}(U)$  de  $\tilde{S}$  son isométricos.

Como aplicación práctica, recordemos que para el catenoide  $C$  y el helicoides  $H$  (ver problemas) tenemos parametrizaciones locales  $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow C$  y  $\tilde{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow H$  (definidas en el mismo abierto  $U = ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}^2$ ) dadas por:

$$\bar{x}(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v),$$

$$\tilde{x}(u, v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, u).$$

Así,  $E(u, v) = \tilde{E}(u, v) = \cosh^2 v$ ,  $F(u, v) = \tilde{F}(u, v) = 0$ ,  $G(u, v) = \tilde{G}(u, v) = \cosh^2 v$ . Por tanto,  $\tilde{x} \circ \bar{x}^{-1} : \bar{x}(U) \subset C \rightarrow \tilde{x}(U) \subset H$  es una isometría.

El objetivo fundamental del resto de la sección es probar el siguiente resultado

**Teorema 50. (Teorema Egregium de Gauss)** Si  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  es una isometría entre dos superficies regulares, entonces

$$K(p) = \tilde{K}(f(p)),$$

para todo  $p \in S$ .

**Observación 51. (1)** El teorema Egregium de Gauss es uno de los resultados más importantes en la geometría diferencial de las superficies regulares. Su naturaleza es “local”; es decir, dada una aplicación diferenciable  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  y dado  $p \in S$ , para poder asegurar que  $K(p) = \tilde{K}(f(p))$  es suficiente saber que existen un entorno abierto  $V$  de  $p$  en  $S$  y un entorno abierto  $\tilde{V}$  de  $f(p)$  en  $\tilde{S}$  de manera que  $f|_V : V \rightarrow \tilde{V}$  es una isometría. Por tanto, el teorema Egregium de Gauss es cierto para isometrías locales.

**(2)** Lo que tiene de fascinante es que aunque la curvatura de Gauss se definió como  $K(p) = \det(A_p)$  y  $A_p$  tiene un carácter extrínseco, la curvatura de Gauss al ser invariante por isometrías (que no van a ser, en general, restricciones de movimientos rígidos) es un concepto intrínseco.

**(3)** Como consecuencia del Teorema Egregium de Gauss y de la Observación 49, si supiéramos que  $K_C(\bar{x}(u, v)) = -1/\cosh^4 v$ , tendríamos automáticamente que  $K_H(\tilde{x}(u, v)) = -1/\cosh^4 v$ .

**(4)** Naturalmente se puede utilizar como obstrucción a la existencia de una isometría entre dos superficies regulares dadas. Por ejemplo, el Teorema Egregium de Gauss nos dice directamente que no existe ninguna isometría entre una esfera y un elipsoide de semi-ejes  $a = 2, b = 1, c = 1$ .

(5) Finalmente, las isometrías no conservan las curvaturas medias. En efecto, la isometría de la pagina anterior va de un abierto de un plano, curvatura media cero, en un abierto de un cilindro circular, que tiene curvatura media constante  $\neq 0$ .

La demostración del Teorema Egregium de Gauss usa una nueva expresión local para la curvatura de Gauss, cuyos ingredientes tenemos que definir y estudiar previamente.

Con la mente en el triedro de Frenet de una curva parametrizada, dada una superficie regular orientable  $S$ , dotada de una orientación  $N$ , consideremos una parametrización local  $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , compatible con  $N$ . En cada punto  $\bar{x}(u, v)$  tenemos una base de  $\mathbb{R}^3$  orientada positivamente

$$\left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u, v), (N \circ \bar{x})(u, v) \right).$$

Vamos a expresar las derivadas parciales segundas de la parametrización local como combinación lineal, en cada  $(u, v)$ , de esta base. Ponemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2} &= \Gamma_{11}^1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + e N \circ \bar{x}, \\ \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} &= \Gamma_{12}^1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + f N \circ \bar{x}, \\ \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} &= \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + g N \circ \bar{x}. \end{aligned}$$

Al ser  $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v}$ , en la descomposición correspondiente tendríamos  $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1$  y  $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$  (igualdad de funciones reales definidas sobre  $U$ ).

A las funciones 6 funciones

$$\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$$

se les llama los **símbolos de Christoffel** de  $S$  asociados a la parametrización local  $\bar{x}$  suya.

Vamos a ver cómo calcular los símbolos de Christoffel, lo que nos dirá a la vez que son diferenciables. Multiplicando escalarmente por  $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}$  y  $\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}$  cada una de las tres descomposiciones anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} E \Gamma_{11}^1 + F \Gamma_{11}^2 &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \right\rangle \\ F \Gamma_{11}^1 + G \Gamma_{11}^2 &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\rangle \\ E \Gamma_{12}^1 + F \Gamma_{12}^2 &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \right\rangle \\ F \Gamma_{12}^1 + G \Gamma_{12}^2 &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} E \Gamma_{22}^1 + F \Gamma_{22}^2 &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v^2}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \right\rangle \\ F \Gamma_{22}^1 + G \Gamma_{22}^2 &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v^2}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right\rangle \end{aligned} \right\}$$

Para cada  $(u, v) \in U$  fijo tenemos 3 sistemas de ecuaciones, en cada uno de ellos la matriz de coeficientes es la matriz de la primera forma cuadrática fundamental en  $(u, v)$ , que ya sabemos que es regular. Por tanto, la solución de cada sistema es única y nos da una expresión de los símbolos de Christoffel (las incógnitas) que nos da su diferenciabilidad.

Después de la discusión anterior podemos decir que para una parametrización local  $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  con  $U$  conexo, son equivalentes:

- Los símbolos de Christoffel cumplen  $\Gamma_{1j}^k = 0$ ,
- Los vectores  $\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v^2}$  y  $\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u \partial v}$  son perpendiculares a  $T_{\bar{\mathbf{x}}(u,v)}S$ , para todo  $(u, v) \in U$ ,
- $\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial v} = 0$  en todo punto de  $U$ ,
- $E, F$  y  $G$  son constantes.

Explícitamente,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \right\rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right\rangle &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \right\rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right\rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v^2}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \right\rangle &= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v^2}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} \right\rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}, \end{aligned}$$

lo que nos dice que los símbolos de Christoffel dependen de los coeficientes de la primera forma fundamental y de sus derivadas parciales de primer orden.

**Ejemplo 52. (1)** Sea un plano afín  $\pi$  dado por  $\bar{x}(\lambda, \mu) = p_0 + \lambda w_1 + \mu w_2$ , donde  $w_1, w_2$  son linealmente independientes. Como  $E, F$  y  $G$  son constantes los tres sistemas anteriores son homogéneos. Así,  $\Gamma_{ij}^k = 0$  sobre  $\mathbb{R}^2$ , para cualesquiera índices.

**(2)** Consideremos ahora el cilindro  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  y su parametrización local  $\bar{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ ,  $(u, v) \in ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$ . Se cumple  $E = G = 1, F = 0$ , por tanto, todos los correspondientes símbolos de Christoffel son cero.

**(3)** Sea ahora el grafo de una función diferenciable  $G(h) = \{(u, v, h(u, v)) : (u, v) \in U\}$ . Respecto de la parametrización natural sabemos  $E = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2$ ,  $F = \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v}$  y  $G = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2$ . Usando el primero de los sistemas de la página anterior y las fórmulas en esta página que nos dan los términos independientes del sistema en términos de derivadas parciales de los coeficientes de la primera forma fundamental relativa a esta parametrización obtenemos:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} \frac{\partial h}{\partial u}}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2} \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} \frac{\partial h}{\partial v}}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}.$$

El resto de símbolos de Christoffel se calculan de modo análogo.

Veamos a continuación una nueva expresión local, en términos de los símbolos de Christoffel y de sus derivadas parciales, de la curvatura de Gauss. Ésta será clave para la prueba del Teorema Egregium de Gauss. En concreto,

**Proposición 53.** Sea  $S$  una superficie regular orientable y sea  $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una parametrización local cualquiera de  $S$ . Se cumple

$$K \circ \bar{x} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right),$$

sobre todo punto de  $U$ .

*Demostración.* La idea es considerar las fórmulas que definen los símbolos de Christoffel en p. 45, usar que

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} \right),$$

escribir cada miembro, evaluado en  $(u, v)$ , como combinación lineal de la base

$$\left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u, v), (N \circ \bar{x})(u, v) \right)$$

y luego igualar componente a componente. Así,

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2} \right) = \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} + \frac{\partial e}{\partial v} N \circ \bar{x} + e \frac{\partial N \circ \bar{x}}{\partial v}.$$

Teniendo en cuenta las expresiones del segunda factor del segundo sumando y del segundo factor del cuarto sumando, y agrupando términos, resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2} \right) &= \left( \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - e a_{12} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} + \\ &+ \left( \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - e a_{22} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} + \\ &+ \left( f \Gamma_{11}^1 + g \Gamma_{11}^2 + \frac{\partial e}{\partial v} \right) N \circ \bar{\mathbf{x}},\end{aligned}$$

donde, como ya sabíamos,

$$a_{12} = \frac{fG - gF}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{gE - fF}{EG - F^2}.$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u \partial v} \right) = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial f}{\partial u} N \circ \bar{\mathbf{x}} + f \frac{\partial N \circ \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}.$$

Teniendo en cuenta de nuevo las expresiones del segunda factor del segundo sumando y del segundo factor del cuarto sumando, y agrupando términos, resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u \partial v} \right) &= \left( \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - f a_{11} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} + \\ &+ \left( \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - f a_{21} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v} + \\ &+ \left( e \Gamma_{12}^1 + f \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \right) N \circ \bar{\mathbf{x}},\end{aligned}$$

donde, como ya sabíamos,

$$a_{11} = \frac{eG - fF}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{fE - eF}{EG - F^2}.$$

Si ahora igualamos componentes, obtenemos tres igualdades. La fórmula que buscamos se obtiene precisamente igualando los coeficientes de  $\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}$ .

□

*Demostración.* Veamos ahora la demostración del Teorema Egregium de Gauss (Teorema 50).

Sea  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  una isometría entre superficies regulares  $S$  y  $\tilde{S}$ . Tomamos cualquier parametrización local  $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . Consideramos ahora la parametrización local  $\tilde{\mathbf{x}} := f \circ \bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{S}$  de  $\tilde{S}$ . Tenemos

$$df_{\bar{\mathbf{x}}(u,v)} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u,v) \right) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial u}(u,v), \quad df_{\bar{\mathbf{x}}(u,v)} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u,v) \right) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial v}(u,v)$$



y por tanto,

$$E(u, v) = \tilde{E}(u, v), \quad F(u, v) = \tilde{F}(u, v), \quad G(u, v) = \tilde{G}(u, v), \quad \Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k$$

Por tanto, haciendo uso de la Proposición 53 deducimos

$$K(\bar{\mathbf{x}}(u, v)) = \tilde{K}(\tilde{\mathbf{x}}(u, v)),$$

para todo  $(u, v) \in U$ . Pero, lo anterior es lo mismo que

$$K(\bar{\mathbf{x}}(u, v)) = \tilde{K}(f(\bar{\mathbf{x}}(u, v))),$$

para todo  $(u, v) \in U$ , y como la parametrización local de  $S$  es arbitraria se tiene acabada la prueba.  $\square$