

Cuestiones para pensar 11

1. Dada una superficie regular orientable S y N aplicación de Gauss de S ¿qué quiere decir que una parametrización local \bar{x} es compatible con la orientación en S definida por N ?
2. Si Π_p es la segunda forma fundamental de S relativa a N y e, f, g son los coeficientes de Π relativos a \bar{x} ¿qué relación hay entre las matrices $\begin{pmatrix} e(u,v) & f(u,v) \\ f(u,v) & g(u,v) \end{pmatrix}$ y $M(A_{\bar{x}(u,v)}, (\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}))$?
3. ¿Cómo se llega a que $g(u,v)$ puede venir definido equivalentemente por $g(u,v) = \langle \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2}(u,v), N_{\bar{x}(u,v)} \rangle$?
4. ¿Es cierto que si $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v}(u,v) \in T_{\bar{x}(u,v)} S$ entonces $f(u,v) = 0$?
5. ¿Qué quiere decir $\det(\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2}(u,v), \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u,v)) = 0$ para un par $(u,v) \in U$ (dominio de \bar{x})?
6. ¿Es cierto que $K(\bar{x}(u,v)) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} e(u,v) & f(u,v) \\ f(u,v) & g(u,v) \end{pmatrix} = 0$?
7. ¿Es cierto que $H(\bar{x}(u,v)) = 0 \Leftrightarrow e(u,v)G(u,v) + g(u,v)E(u,v) = 2f(u,v)F(u,v)$?
8. ¿Cómo se obtiene la diferenciabilidad de K y H ?
9. Para una superficie regular que sea el grafo de una función f ¿qué relación hay entre K y la matriz hessiana de f ?
10. ¿Cuál es el significado de $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0$?
11. ¿Es cierto que si p_0 es un punto elíptico de S entonces existe un entorno abierto $V(p_0) \subset S$ de manera que todo punto de V también es elíptico?
12. ¿Es cierto que si p_0 es un punto parabólico de S entonces existe un entorno abierto $V(p_0) \subset S$ de manera que todo punto de V también es parabólico?

(2)

13. ¿Son los puntos planos un subconjunto de los puntos parabólicos?
14. Si S tiene un punto elíptico p_0 y un punto hiperbólico p_1 , ¿tiene que tener un punto parabólico?
15. ¿Puedes dar un ejemplo de una superficie regular que cumpla $K=0$ pero que contenga tanto puntos planos como parabólicos?
16. ¿Tiene el toro definido por $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1$ algún punto plano? ¿tiene algún punto umbilical?
17. ¿Qué diferencia hay entre los grafos de las funciones $f(x,y)=x^2+y^2$, $h(x,y)=x^2-y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en términos de sus curvaturas de Gauss?
18. ¿Cómo se comportan K y H con respecto a movimientos rígidos de \mathbb{R}^3 ?
19. ¿Qué tiene que ver la posición relativa de un entorno $V(p) \subset S$ con $p+T_p S$ con el hecho de que el punto p sea elíptico?
20. ¿Cómo son las curvaturas principales en un punto umbilical?
21. ¿Puede una superficie regular tenga algún punto umbilical pero no todos?
22. ¿Qué se puede decir de una superficie regular orientable compacta con todos sus puntos umbilicales.
23. Si tenemos una superficie regular S con $K \leq 0$ ¿qué podemos decir de cada punto umbilical suyo?