Teoremas globales.-

Decimos que un teorema es "global" cuando involucra a la totalidad de la superficie. Ya hemos demostrado un teorema global: las únicas superficies regulares conexas que son totalmente umbilicales son ó bien abiertos de una esfera ó bien abiertos de un plano. Por contra, un resultado local sólo nos da información de un cierto abierto de la superficie: si p es un punto elíptico de una superficie regular S entonces existe un entorno abierto V de p en S de manera que todos los puntos de V caen en el mismo subespacio de los dos que determina el espacio tangente afín $p+T_pS$.

Nos proponemos probar ahora dos importantes resultados globales.

Teorema (Jellet-Liebmann). Una superficie regular compacta y conexa con curvatura media constante $H=H_0\in\mathbb{R}$ y curvatura de Gauss $K>0$ es una esfera.

Teorema (Hilbert-Liebmann). Una superficie regular compacta y conexa con curvatura de Gauss constante $K=K_0\in\mathbb{R}$ es una esfera.

Observaciones. (1) Una superficie regular compacta es orientable. Esta afirmación es un hecho no trivial. Se puede probar de varias maneras, por ejemplo a partir del teorema de separación de Jordan-Brouwer. Asumiremos sin prueba el resultado en lo que sigue. (2) En ambos teoremas la tesis es que la superficie coincide con la totalidad de una esfera. Nótese que una superficie regular es compacta, entonces es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$. Si una superficie cerrada está incluida en otra, que sea conexa, necesariamente es la totalidad de la superficie que la contiene. (3) Teniendo en cuenta que toda superficie regular compacta tiene un punto elíptico tenemos que la constante K_0 del Teorema de Hilbert-Liebmann es >0. (4) Si se elimina la compacidad en ambos resultados ya no son ciertos. En efecto, un plano nos sirve como contraejemplo de que no se pueden extender estos teoremas al caso de superficies cerradas.

Para demostrar ambos teoremas vamos a hacer uso del siguiente resultado técnico (que probaremos al final):

> Lema (Hilbert). Sea S una superficie regular orientada y sean $k_1, k_2 : S \longrightarrow \mathbb{R}$ las curvaturas principales respecto a una orientación N de S, $k_2 \leq k_1$. Supongamos que en un punto $p_0 \in S$ se cumplen las tres propiedades siguientes:
>
> (1) k_1 tiene un máximo local en p_0.
>
> (2) k_2 tiene un mínimo local en p_0.
>
> (3) $K(p_0) > 0$; i.e., p_0 es un punto elíptico de S.
>
> Entonces, p_0 es un punto umbilical.

Demostración del teorema de Jellet-Liebmann.- Como S es compacta la función continua $k_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza su mínimo en un cierto punto $p_0 \in S$. Teniendo en cuenta que

$k_1 = 2H_0 - k_2$ en todo punto de S, siendo H_0 el valor constante de H, entonces

k_1 alcanza su máximo en p_0.

En efecto, si $k_2(p_0) \leq k_2(p)$, para todo $p \in S$ entonces
$k_1(p_0) = 2H_0 - k_2(p_0) \geq 2H_0 - k_2(p) = k_1(p)$, para todo $p \in S$.
Usando ahora la hipótesis $K > 0$ en todo punto, tenemos en particular $K(p_0) > 0$. Según el lema de Hilbert p_0 es umbilical; es decir, $k_2(p_0) = k_1(p_0)$. Si $p \in S$ es cualquiera tenemos

$$\underbrace{k_2(p_0) \leq k_2(p) \leq k_1(p) \leq k_1(p_0)}_{\text{iguales}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} k_2(p) = k_1(p) \\ \text{para todo } p \in S \end{array}}$$

Hemos demostrado que todo punto de S es umbilical con $A_p = k(p) I$ donde $k(p) = k_1(p) = k_2(p)$ ó bien $k(p) > 0$ en todo $p \in S$, ó bien $k(p) < 0$ en todo $p \in S$. Así, S está contenida en una esfera. Por la observación (2) anterior S es la totalidad de la esfera en la que está contenida.

Demostración del teorema de Hilbert-Liebmann.- Como ya comentamos en la observación (3) tenemos $K = K_0 > 0$. Considero como antes las curvaturas principales k_1, k_2, $k_2 \leq k_1$, relativas a una orientación N de S. Como S es compacta y $k_2 : S \to \mathbb{R}$ continua, existe $p_0 \in S$ donde k_2 alcanza su mínimo.

Al ser $K_0 = k_1(p) \cdot k_2(p)$, $K_0 > 0$, tenemos que tanto k_1 como k_2 no tienen ceros y $k_1(p) = \dfrac{K_0}{k_2(p)}$, de manera que

$$k_1(p_0) = \frac{K_0}{k_2(p_0)} \geqslant \frac{K_0}{k_2(p)} = k_1(p)\text{; es decir,}$$

k_1 alcanza su máximo en p_0.

Como $K_0 > 0$, en particular $K(p_0) = K_0 > 0$. Según el lema de Hilbert, $k_2(p_0) = k_1(p_0)$. Si $p \in S$ cualquiera, razonando como en la página anterior

$$\underbrace{k_2(p_0) \leq k_2(p) \leq k_1(p) \leq k_1(p_0)}_{\text{iguales}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} k_1(p) = k_2(p) \\ \text{para todo } p \in S \end{array}}$$

Así, S está contenida en una esfera, y al ser S compacta, coincide con la totalidad de la esfera que la contiene.

Nota: Una superficie regular compacta y conexa con $K > 0$ se llama ovaloide. Con esta notación el teorema de Jellet-Liebmann se enunciaría: un ovaloide de curvatura media constante es una esfera.

Demostración del lema de Hilbert.-

Vamos a suponer, por reducción al absurdo, que $k_1(p_0) \neq k_2(p_0)$.

Como $k_1 \geq k_2$, lo que estamos diciendo es que

$$\boxed{k_1(p_0) > k_2(p_0)}.$$

Tomamos una base ortonormal (v_1, v_2) de $T_{p_0}S$ de manera que $v_1 \times v_2 = N_{p_0}$ y

$$A_{p_0}(v_1) = k_1(p_0)\, v_1 \ , \ A_{p_0}(v_2) = k_2(p_0)\, v_2$$

Sea F el movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$ que cumple

$$F(p_0) = (0,0,0) \ ; \ \vec{F}(v_1) = (1,0,0), \ \vec{F}(v_2) = (0,1,0), \ \vec{F}(N_{p_0}) = (0,0,1).$$

Entonces la superficie regular $\widetilde{S} := F(S)$ cumple

$(0,0,0) \in \widetilde{S}$, $T_{(0,0,0)}\widetilde{S}$ es el plano $z=0$, $\widetilde{A}_{(0,0,0)}(1,0,0) = \widetilde{k}_1(0,0,0)\,(1,0,0)$,
$\widetilde{A}_{(0,0,0)}(0,1,0) = \widetilde{k}_2(0,0,0)\,(0,1,0)$, $\widetilde{k}_i(F(p)) = k_i(p)$ $i=1,2$,
en particular $\widetilde{k}_i(0,0,0) = k_i(p_0)$, $i=1,2$, $\widetilde{K}(F(p)) = K(p)$,
en particular $\widetilde{K}(0,0,0) = K(p_0)$.

Además, S es una esfera si y sólo si $\widetilde{S}$ es una esfera.
Por comodidad de notación llamamos S a $\widetilde{S}$, p_0 a $(0,0,0)$ y razonamos sobre S, representando a $\widetilde{S}$.

Existe un entorno abierto V de p_0 en S y existe una función diferenciable $h: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(0,0) \in \mathcal{U}$, de manera que

$$V = \{ (u, v, h(u,v)) : (u,v) \in \mathcal{U} \} \subset S.$$

Consideramos la parametrización local natural

$$\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$$

$$\bar{x}(u,v) = (u, v, h(u,v))$$

con $\bar{x}(U) = V$, que cumple $\bar{x}(0,0) = p_0 (= (0,0,0))$ y

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(0,0) = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial u}(0,0)\right) \in T_{p_0}S$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(0,0) = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial v}(0,0)\right) \in T_{p_0}S.$$

Como $T_{p_0}S$ es el plano $z=0$ tenemos necesariamente

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial h}{\partial v}(0,0) = 0}$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}}{\sqrt{1+|Dh|^2}}, \quad f = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}}{\sqrt{1+|Dh|^2}}, \quad g = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}}{\sqrt{1+|Dh|^2}}$$

Recordemos (pág. 4, 21/04/2020) que

unitario $\qquad\qquad\qquad\qquad$ unitario

$$\mathrm{II}_{p_0}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(0,0)\right) = k_1(p_0), \quad \mathrm{II}_{p_0}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(0,0)\right) = k_2(p_0)$$

por tanto

iguales $\qquad\qquad\qquad\qquad$ iguales

$$\boxed{e(0,0) = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(0,0), \quad g(0,0) = \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(0,0), \quad f(0,0) = \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(0,0) = 0}$$

Consideramos

$$E_1(v) := \frac{1}{\left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(0,v)\right|} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(0,v) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2(0,v)}} \cdot \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial u}(0,v)\right) \in T_{\bar{x}(0,v)} S$$

unitarios

$$E_2(u) := \frac{1}{\left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u,0)\right|} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u,0) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2(u,0)}} \cdot \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial v}(u,0)\right) \in T_{\bar{x}(u,0)} S$$

y definimos las funciones diferenciables:

$$h_1(v) = \langle A E_1(v), E_1(v) \rangle = \frac{\partial^2 h/\partial u^2 (0,v)}{\left[1+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2(0,v)\right]\sqrt{1+|Dh|^2(0,v)}}, \quad -\varepsilon < v < \varepsilon, \ \varepsilon > 0$$

$$h_2(u) = \langle A E_2(u), E_2(u) \rangle = \frac{\partial^2 h/\partial v^2 (u,0)}{\left[1+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2(u,0)\right]\sqrt{1+|Dh|^2(u,0)}}, \quad -\delta < u < \delta, \ \delta > 0$$

Notemos que $\langle A E_1(v), E_1(v) \rangle = \frac{1}{1+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2(0,v)} \cdot \underbrace{\left\langle A \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(0,v), \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}(0,v) \right\rangle}_{e(0,v)}$

y análogamente,

$$\langle A E_2(u), E_2(u) \rangle = \frac{1}{1+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2(u,0)} \underbrace{\left\langle A \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u,0), \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}(u,0) \right\rangle}_{g(u,0)}$$

Tenemos

ya que $A E_1(0) = k_1(p_0) E_1(0)$; hipótesis (1) ; $k_1(\bar{x}(0,v))$ = máximo valor de $II(z)$ donde $|z|=1$

$$h_1(0) = \langle A E_1(0), E_1(0) \rangle = k_1(p_0) \geq k_1(\bar{x}(0,v)) \geq \langle A E_1(v), E_1(v) \rangle = h_1(v)$$

ya que $A E_2(0) = k_2(p_0) E_2(0)$; $k_2(\bar{x}(u,0))$ = mínimo valor de $II(z)$ donde $|z|=1$

$$h_2(0) = \langle A E_2(0), E_2(0) \rangle = k_2(p_0) \leq k_2(\bar{x}(u,0)) \leq \langle A E_2(u), E_2(u) \rangle = h_2(u)$$

hipótesis (2)

para $-\varepsilon < v < \varepsilon$ y $-\delta < u < \delta$. Por tanto h_1 alcanza en $v=0$ un máximo local y h_2 alcanza en $u=0$ un mínimo local.

Por consiguiente, $h_1'(0) = h_2'(0) = 0$ y

$$\boxed{h_1''(0) \leq 0 \leq h_2''(0)}.$$

Calculando $h_1''(v)$ y evaluando en $v=0$, nos queda

$$h_1''(0) = \frac{\partial^4 h}{\partial u^2 \partial v^2}(0,0) - k_1(p_0)\, k_2(p_0)^2 \leq 0$$

y análogamente

$$h_2''(0) = \frac{\partial^4 h}{\partial u^2 \partial v^2}(0,0) - k_2(p_0)\, k_1(p_0)^2 \geq 0$$

Así,

$$0 \geq h_1''(0) - h_2''(0) = k_2(p_0)\, k_1(p_0)^2 - k_1(p_0)\, k_2(p_0)^2 = \underbrace{k_1(p_0) k_2(p_0)}_{\substack{K(p_0)>0 \\ \text{por la hipótesis (3)}}} \left[k_1(p_0) - k_2(p_0)\right]$$

lo que implica que $k_1(p_0) - k_2(p_0) \leq 0$.

Es decir, $\boxed{k_1(p_0) \leq k_2(p_0)}$, que es una contradicción.

Observación.- Realmente el lema de Hilbert dice "algo más". En efecto, existe un entorno abierto W de p_0 en S de manera que $k_1(p_0) \geq k_1(p)$ y $k_2(p_0) \leq k_2(p)$, para todo $p \in W$. Podemos tomar W conexo. Así, tenemos

$$k_2(p_0) \leq k_2(p) \leq k_1(p) \leq k_1(p_0)$$

Como en el lema de Hilbert se concluye que p_0 es umbilical entonces la cadena de desigualdades acaba en $k_1(p_0) = k_2(p_0)$. Por tanto $k_2(p) = k_1(p)$ para todo $p \in W$. El abierto conexo W es totalmente umbilical, como $K(p_0) > 0$, tenemos $k_2(p) = k_1(p) > 0$ ó bien < 0. Así, W es un abierto de una esfera (comparar con pág. 3, prueba del teorema de Jellet-Liebmann).