Cuestiones para pensar 6

1. Consideremos un plano afín Π, $p_0 \in \Pi$, $B = (w_1, w_2)$, $\widetilde{B} = (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)$ bases de $\vec{\Pi}$ y las correspondientes parametrizaciones $\bar{x}(u,v) = p_0 + u\, w_1 + v\, w_2$; $\widetilde{x}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = p_0 + \widetilde{u}\, \widetilde{w}_1 + \widetilde{v}\, \widetilde{w}_2$.
¿Está relacionado el cambio de parámetros $h = \bar{x}^{-1} \circ \widetilde{x}$ con la ecuación de cambio de base en $\vec{\Pi}$ cuando los vectores de $\widetilde{B}$ se ponen en combinación lineal de los de B?

2. ¿Qué significa que un cambio de parámetros (general) $h = \bar{x}^{-1} \circ \widetilde{x}$ es un difeomorfismo?

3. ¿Qué argumento emplearías para concluir que $f^2 : S \to \mathbb{R}$, $f^2(p) := f(p)^2$, es diferenciable partiendo de que $f : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable?

4. Da un ejemplo de una superficie regular S y una función $g : S \to \mathbb{R}$ que sea continua pero no diferenciable.

5. ¿Por qué en la definición de la función altura con signo $h_v : S \to \mathbb{R}$ se pide que $|v| = 1$?

6. Imagina que tienes parametrizaciones locales de las superficies regulares S_1 y S_2,

$$\bar{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \bar{x}_1(U_1) \subset S_1 \ , \ \bar{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \bar{x}_2(U_2) \subset S_2$$

y una aplicación diferenciable $\widetilde{F} : U_1 \to U_2$. Comprueba que existe una aplicación diferenciable $F : \bar{x}_1(U_1) \to \bar{x}_2(U_2)$ de manera que $\bar{x}_2^{-1} \circ F \circ \bar{x}_1 = \widetilde{F}$. Argumenta que, en general, F no va a ser la restricción de una aplicación diferenciable a $\bar{x}_1(U_1)$ i.e., $\hat{F} : V_1 \subset \mathbb{R}^3 \to V_2 \subset \mathbb{R}^3$, V_1, V_2 abiertos de $\mathbb{R}^3$, $F = \hat{F}|_{\bar{x}_1(U_1)} : \bar{x}_1(U_1) \to \bar{x}_2(U_2)$.

7. Encuentra un difeomorfismo entre el paraboloide elíptico de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el cilindro parabólico $x = y^2$ (que no son afínmente equivalentes).

8. ¿En qué sentido una parametrización local $\bar{x}$ de S, considerada como $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \bar{x}(U) \subset S$ es un difeomorfismo?