Cuestiones para pensar 4

1. Si S es una superficie regular, ¿es posible que para $p, q \in S$, $p \neq q$, tengamos una misma parametrización local $\overline{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \to \overline{x}(U) \subset S$ con $p, q \in \overline{x}(U)$?

2. Considera $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=0\}$ ¿existe algún entorno abierto de $(0,0,0)$ en la topología de C que sea homeomorfo a un disco abierto de $\mathbb{R}^2$?

3. Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función $f(x,y) = |x|$ ¿es el grafo de f $G(f) = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ una superficie regular? ¿Es $G(f)$, dotado de su topología inducida por $\mathbb{R}^3$, homeomorfo a $\mathbb{R}^2$?

4. ¿Podemos encontrar una parametrización global del elipsoide $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{3} = 1\}$? ¿y en el caso del cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + z^2 = 3\}$?

5. Para $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, ¿es cierto que $|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2$?

6. Justifica rigurosamente que para una aplicación lineal $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se puede identificar dA_p con la propia A, para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

7. Dada una parametrización local $\overline{x}: V \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S \subset S$ de una superficie regular y $(u_0, v_0) \in V$ ¿quién es la velocidad de la curva $u \longmapsto \overline{x}(u, v_0)$? ¿quién es la velocidad de la curva $v \longmapsto \overline{x}(u_0, v)$?

8.- ¿Puede un plano afín tener una parametrización local, es decir, cuya imagen no sea todo el plano?

9.- ¿Es cierto que el grafo de una función $f: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, V abierto, es una superficie regular si y sólo si f es diferenciable?