Problemas del Tema 3

1.- Sean S y $\widetilde{S}$ dos superficies regulares difeomorfas. Demuestra que o bien ambas son simultáneamente orientables o bien no orientables.

2.- Considera una superficie regular S que tiene la siguiente propiedad: existe un vector $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, de manera que $v \notin T_pS$, para todo $p \in S$. Prueba que S es orientable. Encuentra un ejemplo de una superficie regular orientable que no cumpla la anterior condición suficiente.

3.- Considera una superficie regular orientable S, $p \in S$ y el endomorfismo de Weingarten correspondiente a una de las orientaciones de S, $A_p : T_pS \longrightarrow T_pS$. Comprueba que si (w_1, w_2) es una base de T_pS se cumple

(a) $A_p(w_1) \times A_p(w_2) = K(p)\, w_1 \times w_2, \qquad A_p(w_1) \times w_2 \,+\, w_1 \times A_p(w_2) = 2H(p)\, w_1 \times w_2.$

(b) Particulariza al caso en que $w_1 = \dfrac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0)$, $w_2 = \dfrac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0)$, para una parametrización local $\bar{\mathbf{x}}$ de S con $\bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0) = p$.

(c) Da una aplicación práctica concreta de las anteriores fórmulas al cálculo de K y de H.

4.- Considera el elipsoide $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1\right\}$.

(a) Prueba que es orientable y calcula un campo de vectores normales unitarios N globalmente definido sobre él.

(b) Demuestra que $N : E \longrightarrow \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo.

(c) Calcula $K(0,1,0)$, $H(0,1,0)$, $k_1(0,1,0)$ y $k_2(0,1,0)$.

5.- Considera un elipsoide genérico $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\right\}$, $a > b > c > 0$.

Comprueba que la curvatura de Gauss en todo punto $(x, y, z) \in E$ es

$$K(x, y, z) \;=\; \frac{1}{a^2 b^2 c^2}\, \frac{1}{\left(\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}\right)^2}.$$

¿Donde alcanza K el valor máximo? ¿Donde alcanza el valor mínimo?

6.- Considera el paraboloide hiperbólico $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = x^2 - y^2\right\}$.

(a) Prueba que es orientable y calcula un campo de vectores normales unitarios N globalmente definido sobre él.

(b) Calcula su segunda forma fundamental en todo punto respecto a su parametrización global natural.

(c) Calcula sus funciones curvatura de Gauss, curvatura media y curvaturas principales.

(d) ¿Tiene algún punto parabólico? ¿Tiene algún punto umbilical?

7.- Prueba que no existe ninguna superficie regular orientable S de manera que su curvatura de Gauss y su curvatura media cumplan en un mismo punto $p_0 \in S$, $K(p_0) = 1$, $H(p_0) = \dfrac{1}{2}$.

8.- Sean S una superficie regular y $f : S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene un punto crítico $p_0 \in S$. Se define $\mathrm{H}_{p_0}(f)(w) := \dfrac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}(f \circ \alpha)(t)$, donde $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to S$, $\epsilon > 0$, es una curva diferenciable que cumple $\alpha(0) = p_0$, $\alpha'(0) = w$.

(a) Prueba que $\mathrm{H}_{p_0}(f)(w)$ no depende de α con tal de que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0) = w$, i.e., para esta f dada, sólo depende de p_0 y w ($\mathrm{H}_{p_0}(f)$ se llama el hessiano de f en p_0).

(b) Prueba que si f alcanza en p_0 un valor máximo local (resp. mínimo local) entonces $\mathrm{H}_{p_0}(f)(w) \leq 0$ (resp. $\mathrm{H}_{p_0}(f)(w) \geq 0$) para todo $w \in T_{p_0}S$.

(c) Prueba que si se cumple $\mathrm{H}_{p_0}(f)(w) \leq 0$, para todo $w \in T_{p_0}S$, dándose la igualdad si y sólo si $w = 0$, entonces f alcanza en p_0 un valor máximo local. Prueba, finalmente, que si se cumple $\mathrm{H}_{p_0}(f)(w) \geq 0$, para todo $w \in T_{p_0}S$ entonces f alcanza en p_0 un valor mínimo local.

9.- Sea S una superficie regular orientable y compacta. Considera la función $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |p|^2$, para todo $p \in S$.

(a) Demuestra que p_0 es un punto crítico de f si y sólo si $p_0 = \lambda N_{p_0}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, (N es un campo de vectores normales unitarios sobre S).

(b) Prueba que $\mathrm{H}_{p_0}(f)(w) = 2\{\, |w|^2 + \lambda \langle A_{p_0}(w), w\rangle \,\}$, para todo $w \in T_{p_0}(S)$

(c) Prueba que si f alcanza en p_0 su máximo entonces $\lambda \neq 0$ y ocurre $K(p_0) \geq \dfrac{1}{\lambda^2} > 0$ (por tanto, S tiene un punto elíptico).

(d) Prueba que es imposible que $H = 0$.

(d) Finalmente, si S está contenida en una bola cerrada de centro el origen y radio $r > 0$, concluye la estimación $K(p_0) \geq \dfrac{1}{r^2}$.

10.- Para cada número real $\lambda > 0$, considera $F_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la correspondiente homotecia (vectorial), $F_\lambda(v) = \lambda\, v$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

(a) Prueba que F_λ es un difeomorfismo.

(b) Si S es una superficie regular orientable también lo es $\widetilde{S} := F_\lambda(S)$.

(c) Si $\varphi := F|_S : S \longrightarrow \widetilde{S}$, prueba que

$$\widetilde{K} \circ \varphi = \frac{1}{\lambda^2} K \qquad \text{y} \qquad \widetilde{H} \circ \varphi = \frac{1}{\lambda} H,$$

donde H, $\widetilde{H}$ son las curvaturas medias de S, $\widetilde{S}$ relativas a N, $\widetilde{N} =: N \circ \varphi^{-1}$, respectivamente.

(d) Encuentra una aplicación práctica concreta de las fórmulas del apartado anterior.

11.- Considera una superficie regular orientable S. Supongamos que para cada punto $p \in S$ existe una parametrización local $\bar{\mathbf{x}}$ de S, que contiene a p en el correspondiente entorno coordenado, cuyos coeficientes de la primera forma fundamental cumplen $E = G >$ y $F = 0$ y tal que $\dfrac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{\mathbf{x}}}{\partial v^2} = 0$. Prueba que la curvatura media de S cumple $H = 0$.

12.- Sea la catenoide $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 - \cosh^2 z = 0\}$. Prueba que $K(x, y, z) = \dfrac{-1}{\cosh^4 z}$ y que $H = 0$. Calcula también k_1 y k_2 para una orientación elegida.

13.- Dado el helicoide $\bar{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, u)$, comprueba que $K(\bar{\mathbf{x}}(u, v)) = \dfrac{-1}{(1 + v^2)^2}$ y que $H = 0$. Calcula también k_1 y k_2 para una orientación elegida.

14.- Sea el hiperboloide $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Considera la aplicación de Gauss $N(x, y, z) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + x^2}} \big(x, y, -z\big)$. Comprueba que $K(x, y, z) = \dfrac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ y $H(x, y, z) = \dfrac{1}{2} \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

15.- Calcula los símbolos de Christoffel correspondientes a la parametrización local por coordenadas polares del plano $z = 0$. Usando la ecuación Gauss (para esta parametrización) comprueba que $K = 0$.

16.- Prueba que no existe ninguna superficie regular S con una parametrización local $\bar{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ de manera que $E = G = 1$, $F = 0$ y $e = -g = 1$, $f = 0$.

17.- Dadas las superficies regulares $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 - \cosh^2 z = 0\}$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x = y^2\}$, prueba que no existen abiertos U de C y V de S que sean isométricos.