Curvas y Superficies
Curso 2022-23

Tema 2. Superficies en el espacio

1. Definición de superficie y ejemplos

Definición 1. *Un subconjunto S del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se dice que es una superficie regular si para cada $p \in S$ existen un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$ y una aplicación*

$$\bar{\mathbf{x}} : U \to V \cap S, \quad \bar{\mathbf{x}}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,,$$

donde U es un abierto de $\mathbb{R}^2$ de manera que:

(1) (Diferenciabilidad) $\bar{\mathbf{x}}$, vista como una aplicación de U en $\mathbb{R}^3$, es diferenciable; es decir, sus tres componentes

$$x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,$$

son funciones diferenciables de clase C^∞.

(2) (Parametrizaciones locales) $\bar{\mathbf{x}} : U \to V \cap S$ es un homeomorfismo.[1]

Esto quiere decir que $\bar{\mathbf{x}} : U \to V \cap S$ es biyectiva, continua y $\bar{\mathbf{x}}^{-1} : V \cap S \to U$ es continua.

Como por (1), tenemos que $\bar{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{R}^3$ es continua en particular, y ocurre que $\bar{\mathbf{x}}(U) = V \cap S$, es seguro que $\bar{\mathbf{x}} : U \to V \cap S$ es continua.

En cuanto a la condición de que $\bar{\mathbf{x}}^{-1} : V \cap S \to U$ es continua, esta ocurrirá si $\bar{\mathbf{x}}^{-1}$ es la restricción de una función continua $W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida en un abierto W de $\mathbb{R}^3$ de manera que $V \cap S \subset W$.

Dado $q \in V \cap S$ al único par $(u,v) \in U$ de manera que $\bar{\mathbf{x}}(u,v) = q$, se llama las coordenadas de q según la parametrización local $\bar{\mathbf{x}}$.

(3) (Regularidad) Para cada $(u_0, v_0) \in U$ la diferencial

$$d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

es inyectiva o equivalentemente rango$(d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)}) = 2$. Como $d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)}$ es la única aplicación lineal que cumple:

$$d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \right)^\top,$$

[1] Por tanto, para cada $p \in S$ hay un homeomorfismo de un entorno abierto de p en S en un abierto de $\mathbb{R}^2$; Así, S, con de la topología inducida por la de $\mathbb{R}^3$ es un espacio topológico localmente homeomorfo con $\mathbb{R}^2$.

y

$$d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\Big)^{\top},$$

e introducimos las notaciones

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0,v_0) := \Big(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\Big),$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0,v_0) := \Big(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\Big),$$

entonces, lo que estamos haciendo es suponer que

$$\Big\{\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0,v_0)\,, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0,v_0)\Big\}$$

es linealmente independiente para todo $(u_0,v_0)\in U$.

De manera resumida, S es una superficie regular del espacio euclídeo si para cada punto $p\in I$ existen un entorno abierto W de p en S (que será de la forma $V\cap S$ para un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$) y un homeomorfismo $\bar{\mathbf{x}}: U\to W$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^2$, de manera que considerada $\bar{\mathbf{x}}: U\to\mathbb{R}^3$ es diferenciable con diferencial inyectiva en cada punto de U.

Expresemos ahora (3) de manera equivalente. Teniendo en cuenta que

$$d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

entonces, lo que estamos haciendo es suponer que

$$\text{rango}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\end{pmatrix} = 2\,.$$

Todavía de otra forma alternativa, si llamamos

$$E(u_0,v_0) := \Big\langle\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0,v_0)\Big\rangle\,,$$

$$F(u_0,v_0) := \Big\langle\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0,v_0)\Big\rangle\,,$$

$$G(u_0,v_0) := \left\langle \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0,v_0) \right\rangle,$$

teniendo en cuenta que

$$\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0,v_0) \right|^2 = E(u_0,v_0)G(u_0,v_0) - F(u_0,v_0)^2,$$

lo que estamos haciendo es suponer que

$$E(u_0,v_0)G(u_0,v_0) - F(u_0,v_0)^2 > 0.$$

Oservación 2. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U abierto de $\mathbb{R}^n$, es una aplicación diferenciable, su diferencial en cada punto $q_0 \in U$ se puede calcular equivalentemente como sigue

$$df_{q_0}(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \alpha)(t),$$

donde $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to U$, $\epsilon > 0$, es una curva diferenciable que cumple $\alpha(0) = q_0$ y $\alpha'(0) = w$.

En efecto, si escribimos $\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ entonces

$$(x_1(0), ..., x_n(0)) = q_0 \quad \text{y} \quad (x_1'(0), ..., x_n'(0)) = w\,.$$

Por otro lado ponemos

$$f = (f_1, ..., f_m),$$

donde f_i, $1 \leq i \leq m$, son las componentes de f.

Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f_i \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_i\big(x_1(t), ..., x_n(t)\big) =$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(q_0)\, w_1 + ... + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(q_0)\, w_n\,,$$

es decir

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(q_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(q_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(q_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(q_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}$$

lo que demuestra que

$$df_{q_0}(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \alpha)(t)\,.$$

Podemos entonces escribir

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \bar{\mathbf{x}}(u_0+t, v_0),$$

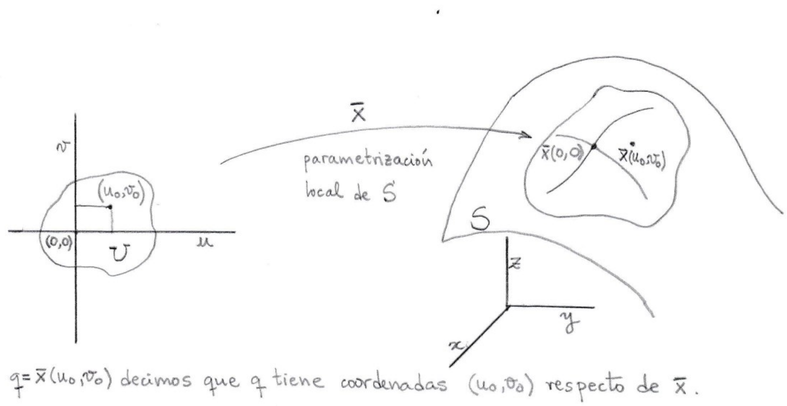
que es la velocidad de la curva $t \mapsto \bar{\mathbf{x}}(u_0 + t, v_0)$ en $t = 0$, o lo que es lo mismo, la velocidad de la curva $u \mapsto \bar{\mathbf{x}}(u, v_0)$ en $u = u_0$.

Análogamente

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0 + t)$$

es la velocidad de la curva $t \mapsto \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0 + t)$ en $t = 0$, es decir, la velocidad de la curva $v \mapsto \bar{\mathbf{x}}(u_0, v)$ en $v = v_0$.

A estas curvas se llaman curvas coordenadas de la parametrización local $\bar{\mathbf{x}}$.



Ejemplo 3.

- Si S es un subconjunto de una superficie regular $\widetilde{S}$, entonces S es una superficie regular sí y solamente si S es abierto (en la topología relativa) de $\widetilde{S}$. Para la condición suficiente, nótese que si $p \in S$ y $\bar{\mathbf{x}} : U \to \widetilde{S}$ es una parametrización local de $\widetilde{S}$ de manera que $p \in \bar{\mathbf{x}}(U)$ entonces $W := \bar{\mathbf{x}}^{-1}(S \cap \bar{\mathbf{x}}(U))$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ contenido en U y $\bar{\mathbf{x}}_{|W} : W \to S$ es una parametrización local de S con $p \in \bar{\mathbf{x}}_{|W}(W)$.

- Consideremos un plano afín π de $\mathbb{R}^3$. Sean $p_0 = (a, b, c) \in \pi$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, tales que $|\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ y $\vec{\pi} = L(\{v, w\})$. Escribamos las correspondientes ecuaciones paramétricas

$$\begin{array}{ccccccc} x & = & a & + & \lambda v_1 & + & \mu w_1 \\ y & = & b & + & \lambda v_2 & + & \mu w_2 \\ z & = & c & + & \lambda v_3 & + & \mu w_3 \end{array}$$

entonces, podemos definir $\bar{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^2 \to \pi$ mediante

$$\bar{\mathbf{x}}(\lambda, \mu) = (a + \lambda v_1 + \mu w_1, b + \lambda v_2 + \mu w_2, c + \lambda v_3 + \mu w_3),$$

que claramente es una aplicación diferenciable.

Además, es biyectiva y continua (al ser diferenciable de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$). La aplicación $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \big(\langle x - p_0, \vec{v}\rangle, \langle x - p_0, \vec{w}\rangle\big)$ es continua y su restricción a π es $\bar{\mathbf{x}}^{-1}$.

Así,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \lambda}(\lambda_0, \mu_0) = \vec{v}\,, \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mu}(\lambda_0, \mu_0) = \vec{w}\,,$$

para todo $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2$, son independientes.

- Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. El grafo de f

  $$G(f) = \left\{\, (u, v, f(u, v)) \ : \ (u, v) \in U \,\right\}$$

  admite una parametrización global

  $$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = \big(\, u, v, f(u, v) \,\big)\,, \quad (u, v) \in U$$

  que es diferenciable al serlo f. Además, es biyectiva y continua (es diferenciable de U en $\mathbb{R}^3$). $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$ es continua y su restricción $G(f) \to U$ es $\bar{\mathbf{x}}^{-1}$.

  Finalmente,

  $$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0) = \Big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\Big)\,, \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0) = \Big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\Big)\,,$$

  para todo $(u_0, v_0) \in U$, son independientes.

- Si S es una superficie regular y F es un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$ entonces $F(S)$ es una superficie regular. De hecho, para cada parametrización local

  $$\bar{\mathbf{x}} : U \to S$$

  de S tenemos que

  $$F \circ \bar{\mathbf{x}} : U \to F(S)$$

  es una parametrización local de $F(S)$. Notemos que si $p \in \bar{\mathbf{x}}(U)$ tiene coordenadas (u_0, v_0) respecto a $\bar{\mathbf{x}}$ entonces $F(p)$ tiene las mismas coordenadas (u_0, v_0) respecto a $F \circ \bar{\mathbf{x}}$.

  Dos superficies regulares que se obtiene una de otra mediante un movimiento rígido (directo o inverso) se llaman congruentes. Dos superficies congruentes son geométricamente idénticas.

  Consideremos ahora el grafo de f tal y como lo habíamos definido

  $$G(f) = \left\{\, (u, v, f(u, v)) \ : \ (u, v) \in U \,\right\},\ (\text{grafo sobre } z = 0)\,,$$

  y sea el movimiento rígido $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (z, x, y)$, entonces

  $$F(G(f)) = \left\{\, (f(u, v), u, v) \ : \ (u, v) \in U \,\right\},\ (\text{grafo sobre } x = 0)\,,$$

  que es también una superficie regular, sería otra forma de dar el grafo de f, esencialmente equivalente con la anterior. también podríamos encontrar otro movimiento rígido que transforme el grafo original en

  $$\left\{\, (u, f(u, v), v) \ : \ (u, v) \in U \,\right\},\ (\text{grafo sobre } y = 0)\,.$$

- Consideremos la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1

$$\mathbb{S}^2 = \{\,(x,y,z)\;:\; x^2+y^2+z^2=1\,\}.$$

Vamos a describir un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{S}^2$ que serán las imágenes de las parametrizaciones que nos servirían para probar que $\mathbb{S}^2$ es una superficie regular. Considero los siguientes abiertos de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} V_{1+} &= \{(x,y,z)\;:\; x>0\}\,, & V_{1-} &= \{(x,y,z)\;:\; x<0\} \\ V_{2+} &= \{(x,y,z)\;:\; y>0\}\,, & V_{2-} &= \{(x,y,z)\;:\; y<0\} \\ V_{3+} &= \{(x,y,z)\;:\; z>0\}\,, & V_{3-} &= \{(x,y,z)\;:\; z<0\} \end{aligned}$$

En corte de cada uno de ellos con $\mathbb{S}^2$ es un abierto en la topología inducida. Como $(x,y,z)\in\mathbb{S}^2$ implica que al menos una de sus coordenadas es $\neq 0$, entonces o bien esa coordenada es >0 o bien esa coordenada es <0. Este argumento demuestra que el punto pertenece a la intersección de uno estos abiertos de $\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{S}^2$.

Llamamos, para $u^2+v^2<1$,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{1+}(u,v) &= (\sqrt{1-u^2-v^2},u,v)\,, \bar{\mathbf{x}}_{1-}(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2},u,v) \\ \bar{\mathbf{x}}_{2+}(u,v) &= (u,\sqrt{1-u^2-v^2},v)\,, \bar{\mathbf{x}}_{2-}(u,v) = (u,-\sqrt{1-u^2-v^2},v) \\ \bar{\mathbf{x}}_{3+}(u,v) &= (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})\,, \bar{\mathbf{x}}_{3-}(u,v) = (u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2}) \end{aligned}$$

que son aplicaciones diferenciables en su dominio común D, el disco unidad abierto de $\mathbb{R}^2$, que lo identificamos de manera natural con $\{(u,v,0)\;:\; u^2+v^2<1\}$, el disco abierto unidad en el plano $z=0$.

Cada parametrización es biyectiva y continua sobre su imagen. Además, cada inversa es la restricción de una aplicación diferenciable. En efecto, consideremos por example

$$\bar{\mathbf{x}}_{3+} : D \to V_{3+}\cap\mathbb{S}^2, \quad (u,v)\mapsto (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})\,.$$

La aplicación continua

$$V_{3+}\to\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;:\; z=0\}, \quad (x,y,z)\mapsto(x,y,0)$$

lleva $V_{3+}\cap\mathbb{S}^2$ en D y su restricción coincide con $\bar{\mathbf{x}}_{3+}^{-1}$, lo que demuestra la continuidad de la inversa.

Por último,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\mathbf{x}}_{3+}}{\partial u}(u_0,v_0) &= \left(1,0,\frac{-u_0}{\sqrt{1-u_0^2-v_0^2}}\right) \\ \frac{\partial\bar{\mathbf{x}}_{3+}}{\partial v}(u_0,v_0) &= \left(0,1,\frac{-v_0}{\sqrt{1-u_0^2-v_0^2}}\right) \end{aligned}$$

son linealmente independientes para todo $(u_0,v_0)\in D$.[2]

[2]Obsérvese que hemos visto que cada punto de $\mathbb{S}^2$ está contenido en un abierto que es el grafo de una cierta función .

- Sea S es una superficie regular. Supongamos que $F : V_1 \to V_2$ es un difeomorfismo entre los abiertos V_1 y V_2 de $\mathbb{R}^3$ y que $S \subset V_1$. Como en el example 2 previo, $F(S)$ es una superficie regular y para cada parametrización local

$$\bar{\mathbf{x}} : U \to S$$

de S tenemos que

$$F \circ \bar{\mathbf{x}} : U \to F(S)$$

es una parametrización local de $F(S)$ (en general, S y $F(S)$ serán geométricamente muy diferentes, salvo en el caso de que F sea un movimiento rígido).

Si considero el difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$

$$F_r(x, y, z) = (rx, ry, rz)\,,$$

donde $r \in \mathbb{R}_+$, entonces $F_r(\mathbb{S}^2)$, es la esfera de centro el origen y radio r, es una superficie regular.

Si considero ahora la traslación de $\mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (x + a, y + b, z + c)\,,$$

entonces $T(\mathbb{S}^2)$, es la esfera de centro (a, b, c) y radio 1, es una superficie regular.

Uniendo ambos argumentos anteriores tenemos que cualquier esfera de $\mathbb{R}^3$ de centro (a, b, c) y radio r es una superficie regular.

Finalmente, si consideramos ahora el difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$

$$F_{a\,b\,c}(x, y, z) = (ax, by, cz)\,,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, entonces el elipsoide

$$F_{a\,b\,c}(\mathbb{S}^2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

es una superficie regular.

En los ejemplos anteriores, para probar que un subconjunto dado S del espacio euclídeo es una superficie regular hemos procedido como sigue:

- Comprobando directamente que hay una familia de parametrizaciones locales cuyas imágenes recubren S y que cada una de ellas cumple los tres puntos de la definición de superficie regular.

- En algunos casos, viendo que S se obtiene de una superficie regular dada al transformarla mediante un difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$.

El objetivo de esta segunda parte de la sección es proporcionar nuevas herramientas, que simplifican a veces el proceso de ver que un subconjunto dado S del espacio euclídeo es una superficie regular y que dan criterios, en ocasiones, para ver que no lo es.

Definición 4. *Dada una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, diremos que $p_0 \in U$ es un punto crítico de f cuando*

$$df_{p_0} = 0,$$

i.e., cuando $df_{p_0}(w) = 0$ para todo $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$. Equivalentemente, teniendo en cuenta que

$$df_{p_0}(w) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0)\, w_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)\, w_n,$$

cuando

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) = 0\,.$$

La imagen $f(p_0)$ de un punto crítico se llama un valor crítico de f. Un punto de $f(U)$ que no sea un valor crítico se llama un valor regular de f.

Proposición 5 (Criterio de la imagen inversa de un valor regular)**.** *Si la función $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $a \in f(U)$ es un valor regular de f entonces*

$$S := f^{-1}(a) = \{\, (x, y, z) \ :\ f(x, y, z) = a \,\}$$

es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Este resultado técnico será consecuencia del teorema de la función implícita. Alternativamente, sea $p \in S$, $p = (x_0, y_0, z_0)$. Alguna de las derivadas parciales de f en p tiene que ser distinta de cero. Supongamos que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0\,.$$

Entonces construimos la aplicación diferenciable[3]

$$F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ por } F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))\,.$$

Notemos que para todo $(x, y, z) \in S$ se tiene $F(x, y, z) = (x, y, a)$.

Como

$$dF_p(1, 0, 0) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\right),$$

$$dF_p(0, 1, 0) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\right),$$

[3]Si ocurriese $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$) tomaríamos $F(x, y, z) = (f(x, y, z), y, z)$ (resp. $F(x, y, z) = (x, f(x, y, z), z)$).

$$dF_p(0,0,1) = \left(0,0,\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right),$$

por tanto $dF_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es biyectiva. Podemos aplicar el teorema de la función inversa que nos dice que existen entornos abiertos $V(p) \subset U$ y $W(F(p)) \subset \mathbb{R}^3$ de manera que

$$F_{|_V} : V \to W$$

es un difeomorfismo. Por tanto,

$$(F_{|_V})^{-1} : W \to V, \quad (F_{|_V})^{-1}(u,v,t) = (u,v,H(u,v,t))$$

es diferenciable.

Se trata ahora de ver que existe una parametrización local $\bar{\mathbf{x}}$ de S cuya imagen es $V \cap S$ (entorno abierto en S del punto p). De hecho, lo que vamos a ver es que $V \cap S$ es el grafo de una función diferenciable h (y por tanto, la parametrización sería del tipo $(u,v) \mapsto (u,v,h(u,v))$).

Veamos en concreto que

$$h : \Omega \to \mathbb{R}, \quad h(u,v) := H(u,v,a),$$

donde Ω es el abierto del plano $z=0$ obtenido al proyectar V sobre dicho plano, cumple

$$\{ (u,v,h(u,v)) \ : \ (u,v) \in \Omega \} = V \cap S.$$

Pero esto se sigue de

$$F(V \cap S) = W \cap \{ (u,v,t) \ : \ t = a \}.$$

$\square$

Observemos que la prueba que acabamos de hacer consiste en despejar z de $f(x,y,z)=a$ en un entorno de p en el que ocurre $\dfrac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ haciendo uso del teorema de la función inversa. Así, se describe un entorno abierto del punto p en $S = f^{-1}(a)$ como el grafo de una función diferenciable.

Aplicaciones de la Proposición 5.

- Para $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ consideremos el elipsoide

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

  La función

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

  es diferenciable, $f^{-1}(0) = E$ y $df_p = 0$ si y sólo si $p = (0,0,0)$, que no pertenece a E. Por tanto 0 es un valor regular de f. En particular, si tomamos $a=b=c=1$ estamos reprobando con este argumento que $\mathbb{S}^2$ es una superficie regular.

- Sea ahora el cilindro
$$C = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2=1 \,\}\,.$$
La función
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y,z) = x^2+y^2-1$$
es diferenciable, $f^{-1}(0) = C$ y $p = (x,y,z)$ cumple $df_p = 0$, es decir,
$$2x = 0, \quad 2y = 0$$
si y sólo si $p = (0,0,z)$ que no pertenece a C. Por tanto 0 es un valor regular de f.
- Finalmente, consideremos el toro
$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2 + z^2 = r^2\right\},$$
donde $0 < r < a$. La función
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2 + z^2 - r^2$$
es diferenciable para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f^{-1}(0) = T$. Como se cumple
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(\sqrt{x^2+y^2}-a)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(\sqrt{x^2+y^2}-a)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\; \frac{\partial f}{\partial z} = 2z\,.$$
Por tanto 0 es un valor regular de f.

Proposición 6. *Dada una superficie regular S, para cada $p \in S$ existe un entorno abierto V de p en S de manera que V es el grafo de una función diferenciable que tiene una de las formas siguientes*
$$z = f(x,y), \quad y = g(x,z), \quad x = h(y,z)\,.$$

Demostración. Elegimos una parametrización $\bar{\mathbf{x}} : U \to S$ con $p = \bar{\mathbf{x}}(u_0,v_0) \in \bar{\mathbf{x}}(U)$. Si $\bar{\mathbf{x}}(u,v) = \big(x(u,v)), y(u,v), z(u,v)\big)$ entonces
$$\text{rango}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix} = 2\,.$$

Por tanto alguna submatriz cuadrada de orden 2 tiene que tener determinante distinto de cero. Supongamos que sea
$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

entonces, si $\pi(x, y, z) := (x, y)$, consideramos la aplicación

$$\pi \circ \bar{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{R}^2\,, \quad (\pi \circ \bar{\mathbf{x}})(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

que es diferenciable y cumple, Según lo anterior, que $d(\pi \circ \bar{\mathbf{x}})_{(u_0,v_0)}$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa, existen entornos abiertos $V_1(u_0, v_0) \subset U$, $V_2(\pi(p)) \subset \mathbb{R}^2$ de manera que

$$\pi \circ \bar{\mathbf{x}} : V_1 \to V_2$$

es un difeomorfismo.

Llamo $V = \bar{\mathbf{x}}(V_1)$ que es un entorno abierto de p en S. Se trata ahora de ver que V es el grafo de una función del tipo $z = f(x, y)$. Los puntos de V son de la forma

$$\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$$

donde $(u, v) \in V_1$. Si componemos la aplicación $(\pi \circ \bar{\mathbf{x}})^{-1} : V_2 \to V_1$ con la función $z : V_1 \to \mathbb{R}$ obtenemos la función diferenciable

$$f : V_2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x, y) := z((\pi \circ \bar{\mathbf{x}})^{-1}(x, y)) = z(u(x, y), v(x, y))$$

cuyo grafo es V.

Los dos casos restantes se prueban de la misma forma y dan lugar a funciones del tipo $x = h(y, z)$ e $y = g(x, z)$. $\square$

Aplicaciones de la Proposición 6.

- Consideremos el punto $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ del cilindro C de $\mathbb{R}^3$ definido por $x^2 + y^2 = 1$ y la parametrización local de C

  $$\bar{\mathbf{x}} : U =]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to C\,, \quad \bar{\mathbf{x}}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)\,.$$

  Como

  $$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(\frac{\pi}{4}, 1) & \frac{\partial y}{\partial v}(\frac{\pi}{4}, 1) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\pi}{4}, 1) & \frac{\partial z}{\partial v}(\frac{\pi}{4}, 1) \end{pmatrix} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0\,,$$

  considero $\Pi(x, y, z) = (y, z)$ y $(\Pi \circ \bar{\mathbf{x}})(u, v) = (\operatorname{sen} u, v)$ que es un difeomorfismo de $V_1 =]0, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$ en $V_2 =]0, 1[\times \mathbb{R}$.

  Entonces la función $h\ :]0, 1[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

  $$h(y, z) = x((\pi \circ \bar{\mathbf{x}})^{-1}(y, z)) = \sqrt{1 - y^2}$$

  es diferenciable y su grafo es

  $$V = \bar{\mathbf{x}}\Big(\,]0, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}\Big) = \big\{\,(x, y, z) \in C\ :\ x > 0, y > 0\,\big\}\,,$$

  entorno abierto de p en C.

- Veamos ahora Cómo se puede aplicar la proposición anterior para ver que

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 0, \ z \geq 0\}$$

no es una superficie regular.

La estrategia es ver que existe un punto que ningún entorno abierto suyo (en la topología de S) es el grafo de una función diferenciable definida sobre algún abierto de $\mathbb{R}^2$.

Elegimos el punto $(0,0,0)$. Como las restricciones de las proyecciones $(x,y,z) \mapsto (0,y,z) \equiv (y,z)$, $(x,y,z) \mapsto (x,0,z) \equiv (x,z)$ a ningún entorno abierto de $(0,0,0)$ en S no son inyectivas, sólo me queda la posibilidad de grafos sobre el plano $z = 0$.

Supongamos que existe un entorno abierto V del punto $(0,0,0)$ en S tal que

$$V = \{\, (x,y,f(x,y)) \ : \ (x,y) \in \Omega \,\},$$

donde Ω es un entorno abierto de $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces, en un entorno abierto de $(0,0,0)$ incluido en V (i.e., quizás más pequeño que V) tiene que ocurrir

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que no es diferenciable en $(0,0)$.

No es lo mismo:

• Buscar una parametrización local en el proceso de demostrar que un cierto subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ es una superficie regular

que,

• Supuesto que sabemos que S es una superficie regular encontrar una parametrización local suya.

En efecto,

Proposición 7. *Sean S una superficie regular y $p \in S$. Si tenemos una aplicación*

$$\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ con } p \in \bar{\mathbf{x}}(U) \subset S$$

que es inyectiva, diferenciable y $d\bar{\mathbf{x}}_{(u,v)}$ es inyectiva para todo $(u,v) \in U$, entonces

$$\bar{\mathbf{x}}^{-1} : \bar{\mathbf{x}}(U) \to U$$

es continua.

Demostración. Como S es una superficie regular, para cada $q = \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0) \in \bar{\mathbf{x}}(U) \subset S$ existe un entorno abierto $W \subset S$ de q de manera que W es el grafo de una función diferenciable, digamos que definida sobre un abierto del plano $z = 0$.[4]

[4]Si el grafo es de una función del tipo $y = g(x,z)$ o del tipo $x = h(y,z)$ se procede de manera anéloga a lo que se dice para una función del tipo $z = f(x,y)$.

Pongamos $V := \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W) \subset U$, que es un abierto del plano por la continuidad de $\bar{\mathbf{x}}$, y sea la aplicación diferenciable

$$F := \pi \circ \bar{\mathbf{x}} : V \to \mathbb{R}^2 , \quad F(u,v) := (x(u,v), y(u,v)) .$$

Como

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix} = 2 ,$$

tenemos que $dF_{(u_0,v_0)}$ es un isomorfismo. El teorema de la función inversa nos dice entonces que existen entornos abiertos $V_1(u_0,v_0) \subset V$ y $V_2(F(u_0,v_0)) \subset \mathbb{R}^2$ de manera que

$$F : V_1 \to V_2$$

es un difeomorfismo. Por tanto, existe su inversa $F^{-1} : V_2 \to V_1$ y también es un difeomorfismo.

Así tenemos que $\bar{\mathbf{x}}^{-1} : \bar{\mathbf{x}}(V_1) \to V_1$ se puede escribir como

$$\bar{\mathbf{x}}^{-1} = F^{-1} \circ \pi$$

sobre $\bar{\mathbf{x}}(V_1)$. Nótese que $\bar{\mathbf{x}}(V_1)$ es un entorno abierto de q en S ya que contiene a q y cumple $\bar{\mathbf{x}}(V_1) = (\pi_{|S})^{-1}(V_2)$ (π es continua). Esto que demuestra que $\bar{\mathbf{x}}^{-1}$ es continua en q, que era un punto arbitrario de $\bar{\mathbf{x}}(U)$, por tanto, hemos probado que $\bar{\mathbf{x}}^{-1} : \bar{\mathbf{x}}(U) \to U$ es continua.

□

2. El cambio de parámetros. Funciones diferenciables sobre superficies.

Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función definida sobre una superficie regular S (que podría ser una parte abierta de otra superficie regular). Queremos definir cuando f es diferenciable en un punto $p_0 \in S$. Una forma natural de proceder sería la siguiente. consideramos una parametrización

$$\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \quad \text{con} \quad p_0 = \bar{\mathbf{x}}(u_0,v_0) \in \bar{\mathbf{x}}(U) \subset S .$$

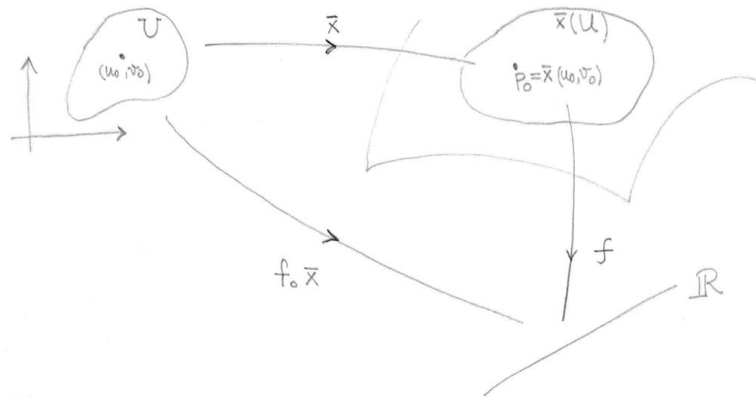
Hacemos la composición

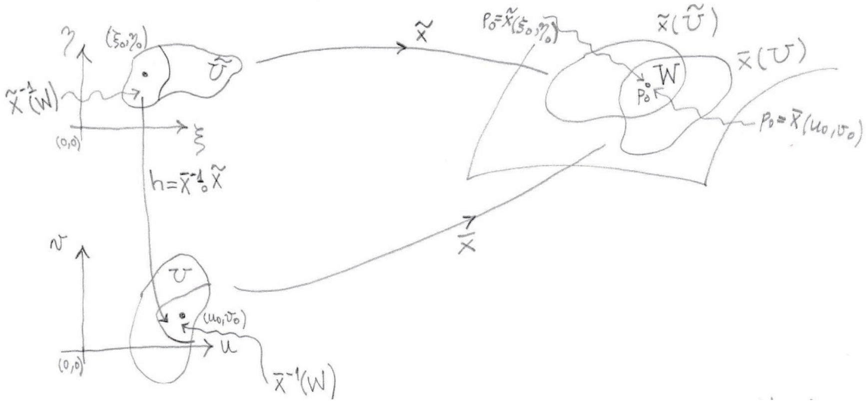
$$f \circ \bar{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{R} , \quad (u,v) \mapsto f(\bar{\mathbf{x}}(u,v)) ,$$

con lo cual tendríamos expresada f localmente en términos de las coordenadas (u,v) y podríamos decir que f es diferenciable en p_0 cuando $f \circ \bar{\mathbf{x}}$ sea diferenciable en $(u_0,v_0) \in U$ en el sentido usual de las funciones reales de dos variables reales.

El problema es que para este mismo punto p_0 puede existir otra parametrización

$$\widetilde{\mathbf{x}} : \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to S \quad \text{con} \quad \widetilde{\mathbf{x}}(\xi_0,\eta_0) = p_0 .$$





En este caso la aplicación

$$h := \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \widetilde{\mathbf{x}} \;:\; \widetilde{\mathbf{x}}^{-1}(W) \to \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W)\,,$$

donde $W = \bar{\mathbf{x}}(U) \cap \widetilde{\mathbf{x}}(\widetilde{U})$ es un homeomorfismo con $h^{-1} = \widetilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}$.

Se llama tanto a h como a h^{-1} cambio de parámetros o cambio de coordenadas. Si ponemos

$$h(\xi, \eta) = (u, v) \quad \text{y} \quad h^{-1}(u, v) = (\xi, \eta)$$

entonces es usual representar a h y a h^{-1} respectivamente por

$$\begin{cases} u = u(\xi, \eta) \\ v = v(\xi, \eta) \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \xi = \xi(u, v) \\ \eta = \eta(u, v) \end{cases}$$

Obsérvese que no podemos concluir que h es diferenciable utilizando que la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable ($\bar{\mathbf{x}}^{-1}$ está definida sobre un conjunto abierto de S y todavía no sabemos lo que es una función diferenciable con dominio una superficie regular, precisamente lo que queremos definir).

No obstante, imaginemos que h fuese diferenciable. En ese caso, de la identidad

$$f \circ \widetilde{\mathbf{x}} = (f \circ \bar{\mathbf{x}}) \circ h \quad \text{en} \quad \widetilde{\mathbf{x}}^{-1}(W)\,,$$

tendríamos que

$$f \circ \widetilde{\mathbf{x}} \text{ es diferenciable en } (\xi_0, \eta_0)$$
$$\text{si y sólo si}$$
$$f \circ \bar{\mathbf{x}} \text{ es diferenciable en } (u_0, v_0)$$

Si esto fuera cierto, podríamos definir la diferenciabilidad de f en p_0 a partir de diferenciabilidad de $f \circ \bar{\mathbf{x}}$ en (u_0, v_0) siendo $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrizacióncualquiera con $p_0 = \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0) \in \bar{\mathbf{x}}(U) \subset S$.

Ejemplo 8. Consideremos la esfera de centro $(0, 0, 1)$ y radio 1

$$\mathbb{S}^2 = \{ (x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \}.$$

Sea $\varphi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 2)\} \to \mathbb{R}^2 \equiv \{z = 0\}$ la proyección estereográfica desde el polo norte $(0, 0, 2)$ de $\mathbb{S}^2$ sobre el plano $z = 0$, es decir, para cada $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 2)\}$, $\varphi(p)$ es el punto del plano $z = 0$ obtenido al intersecar la recta que determinan $(0, 0, 2)$ y p con dicho plano, a saber,

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z} \right).$$

Su inversa es la parametrización $\bar{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$, dada por

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right)$$

y cumple $\bar{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 2)\}$.

Análogamente , Sea $\psi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^2 \equiv \{z = 2\}$ la proyección estereográfica desde el polo sur $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{S}^2$ sobre el plano $z = 2$, es decir, para cada $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\psi(p)$ es el punto del plano $z = 2$ obtenido al intersecar la recta que determinan $(0, 0, 0)$ y p con dicho plano, a saber,

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{2x}{z}, \frac{2y}{z} \right).$$

Su inversa es la parametrización $\widetilde{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$, dada por

$$\widetilde{\mathbf{x}}(\xi, \eta) = \left(\frac{4\xi}{\xi^2 + \eta^2 + 4}, \frac{4\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 4}, \frac{8}{\xi^2 + \eta^2 + 4} \right)$$

y cumple $\bar{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

En este ejemplo tenemos

$$W = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 2), (0, 0, 0)\}, \quad \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W) = \widetilde{\mathbf{x}}^{-1}(W) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

y

$$h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), \qquad (\xi, \eta) \mapsto \left(\frac{4\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \frac{4\eta}{\xi^2 + \eta^2} \right).$$

Proposición 9. *Sea p_0 un punto de una superficie regular S y sean*

$$\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \qquad \widetilde{\mathbf{x}} : \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to S$$

con $p_0 \in W := \bar{\mathbf{x}}(U) \cap \widetilde{\mathbf{x}}(\widetilde{U})$, que es un abierto de S. Entonces el cambio de parámetros

$$h := \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \widetilde{\mathbf{x}} \;:\; \widetilde{\mathbf{x}}^{-1}(W) \to \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W)$$

es un difeomorfismo (entre estos dos abiertos de $\mathbb{R}^2$).

Demostración. Sea $a \in \widetilde{\mathbf{x}}^{-1}(W)$ y llamemos $q = h(a) \in \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W) \subset U$. Notemos que ocurre $\bar{\mathbf{x}}(q) = \widetilde{\mathbf{x}}(a) \in W$.

Como $\bar{\mathbf{x}}$ es una parametrización tenemos que $d\bar{\mathbf{x}}_q$ es inyectiva. Supongamos, tras un cambio de ejes si fuera necesario, que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

Construimos entonces la aplicación

$$F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,, \quad F(u,v,t) = \bar{\mathbf{x}}(u,v) + t\, e_3\,,$$

es decir,

$$F(u,v,t) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v) + t)\,.$$

La aplicación F es diferenciable y cumple $F(u,v,0) = \bar{\mathbf{x}}(u,v)$. Podemos pensar en F como que lleva cada sección $U \times \{t_0\}$ del cilindro macizo $U \times \mathbb{R}$ en la sección $\bar{\mathbf{x}}(U) \times \{t_0\}$ del cilindro macizo $\bar{\mathbf{x}}(U) \times \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) & 0 \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) & 0 \\ \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) & 1 \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

tenemos que $(dF)_{(q,0)}$ es biyectiva. Por consiguiente, podemos aplicar el teorema de la función inversa a F. Así, existe un entorno abierto $V(q) \subset U$, $\epsilon > 0$ y existe un entorno abierto $M(\bar{\mathbf{x}}(q)) \subset \mathbb{R}^3$ de manera que

$$F : V \times]-\epsilon, \epsilon[\to \; M$$

es un difeomorfismo. Por otro lado, como $\widetilde{\mathbf{x}}(a) = \bar{\mathbf{x}}(q)$ de la continuidad de $\widetilde{\mathbf{x}}$ se sigue que existe un entorno abierto $\widetilde{V}$ de a de manera que $\widetilde{\mathbf{x}}(\widetilde{V}) \subset M$. Como la aplicación diferenciable

$$F^{-1} \circ \widetilde{\mathbf{x}}_{|_{\widetilde{V}}}$$

coincide con $h_{|_{\widetilde{V}}}$ tenemos que h es diferenciable en a, que es un punto arbitrario de $\widetilde{\mathbf{x}}^{-1}(W)$, por lo tanto h es una aplicación diferenciable. Análogamente se ve que h^{-1} es diferenciable. Hemos llegado entonces a que h es un difeomorfismo. $\square$

Definición 10. *Sea $f : V \subset S \to \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto abierto V de una superficie regular S. Se dice que f es diferenciable en un punto p de V si para una parametrización $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ con $p \in \bar{\mathbf{x}}(U)$, la composición*

$$f \circ \bar{\mathbf{x}} : W \to \mathbb{R} \quad \textit{donde} \quad W := \bar{\mathbf{x}}^{-1}(V \cap \bar{\mathbf{x}}(U)) \subset U$$

es diferenciable en $\bar{\mathbf{x}}^{-1}(p)$. La función será diferenciable cuando lo sea en todo punto de su dominio de definición. Así, $f : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable si para una familia de parametrizaciones locales $\{\bar{\mathbf{x}}_j : U_j \to S\}$ que cumpla $\cup_j \bar{\mathbf{x}}_j(U_j) = S$ se tiene que $f \circ \bar{\mathbf{x}}_j : U_j \to \mathbb{R}$ es diferenciable para toda j.

Gracias al resultado anterior sobre la diferenciabilidad del cambio de parámetros tenemos que esta definición es correcta, i.e., la diferenciabilidad es independiente de la parametrización local elegida de manera que el punto esté en el correspondiente entorno coordenado.

Observemos que una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ es necesariamente continua. En efecto, tenemos que ver que $f^{-1}(O)$ es un abierto de S para todo abierto O de $\mathbb{R}$. Escribimos

$$S = \cup_j \, \bar{\mathbf{x}}_j(U_j)\,.$$

Como cada $f \circ \bar{\mathbf{x}}_j : U_j \to \mathbb{R}$ es continua, ocurre

$$\bar{\mathbf{x}}_j^{-1}(f^{-1}(O) \cap \bar{\mathbf{x}}_j(U_j)) = (f \circ \bar{\mathbf{x}}_j)^{-1}(O)$$

es abierto de U_j. Como $\bar{\mathbf{x}}_j : U_j \to \bar{\mathbf{x}}_j(U_j)$ es un homeomorfismo, tenemos que

$$f^{-1}(O) \cap \bar{\mathbf{x}}_j(U_j)$$

es abierto en $\bar{\mathbf{x}}_j(U_j)$ y por tanto en S. Finalmente, de la igualdad

$$f^{-1}(O) = \cup_j \big(f^{-1}(O) \cap \bar{\mathbf{x}}_j(U_j)\big)$$

se deduce que $f^{-1}(O)$ es abierto en S.

Ejemplo 11. Como no podía ser de otra manera, si S es una superficie regular y M es un abierto de $\mathbb{R}^3$ de manera que $S \subset M$, entonces la restricción $f : S \to \mathbb{R}$ de una función diferenciable $F : M \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable sobre S (en el sentido que acabamos de definir).

En efecto, si $p \in S$ y $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ con $p \in \bar{\mathbf{x}}(U)$, la función $f \circ \bar{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\bar{\mathbf{x}}^{-1}(p)$ por ser composición de las funciones diferenciables

$$\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \quad \text{y} \quad F : V \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Vamos a particularizar:

1. Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ y S es una superficie regular, entonces $f : S \to \mathbb{R}$, definida por $f(p) = \varphi(p)$, para todo $p \in S$ es diferenciable. φ podría ser una de las formas lineales de la base dual de la usual $\varphi_1(x, y, z) = x$, $\varphi_2(x, y, z) = y$, $\varphi_3(x, y, z) = z$.

Consideremos $v \in \mathbb{R}^3$ con $|v| = 1$ y S una superficie regular. Sea

$$h_v : S \to \mathbb{R}\,, \quad h_v(p) := \langle p, v\rangle$$

para todo $p \in S$, que es diferenciable al ser la restricción de una forma lineal a S.

Si π es el plano que pasa por $0 \in \mathbb{R}^3$ con vector normal v, es decir $\pi = v^\perp$ y utilizamos la descomposición ortogonal

$$\mathbb{R}^3 = \pi \oplus \pi^\perp$$

entonces p, visto como el vector de posición de ese punto desde $0 \in \mathbb{R}^3$, se descompone como

$$p = \big(p - h_v(p)\,v\big) + h_v(p)\,v$$

es decir, $h_v(p)$ es la componente de la proyección de p sobre recta $\pi^\perp = L(\{v\})$ con respecto de v.

Como la cantidad

$$|\langle p, v\rangle|$$

es la distancia del punto p al plano π, a la función h_v se le llama la función altura (con signo) al plano $\pi = v^\perp$. Si S fuera la esfera centrada en $(0,0,1)$ y de radio 1 y $v = e_3$ entonces $h_v(x,y,z) = z$ para todo (x,y,z) de esa esfera.

2. Dado $p_0 \in \mathbb{R}^3$ fijo y S una superficie regular, consideramos la función

$$f_{p_0} : S \to \mathbb{R}\,, \quad f_{p_0}(p) := |p - p_0|^2$$

que es diferenciable, también por ser la restricción a S de una función diferenciable sobre $\mathbb{R}^3$. A la función f_{p_0} se le llama la función cuadrado de la distancia a p_0.

Oservación 12. Si $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es una parametrización local de una superficie regular S, entonces $\bar{\mathbf{x}}(U)$ es también, como sabemos, una superficie regular. En este caso, una función $f : \bar{\mathbf{x}}(U) \to \mathbb{R}$ es diferenciable cuando $f \circ \bar{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable. De manera que si tomamos cualquier función $h : U \to \mathbb{R}$ diferenciable, entonces $f := h \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1} : \bar{\mathbf{x}}(U) \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Más todavía, toda función diferenciable de $\bar{\mathbf{x}}(U)$ en $\mathbb{R}$ se obtiene de esta forma; es decir,

Dada cualquier función diferenciable $f : \bar{\mathbf{x}}(U) \to \mathbb{R}$, existe una única función diferenciable $h : U \to \mathbb{R}$ de manera que $f = h \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1}$, a saber $h := f \circ \bar{\mathbf{x}}$.

En particular, la proyección desde U en la primera componente $\pi_1(u,v) = u$ nos da la función diferenciable $u = \pi_1 \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1}$ y, análogamente, $v = \pi_2 \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1}$.

Al menos intuitivamente, este procedimiento sugiere que así podemos construir funciones diferenciables sobre $\bar{\mathbf{x}}(U)$ que no vendrán en general inducidas por restricción a $\bar{\mathbf{x}}(U)$ de funciones diferenciables definidas en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contenga ese abierto de S.

Definición 13. *Una aplicación continua*

$$F : V_1 \subset S_1 \to S_2$$

de un subconjunto abierto V_1 de una superficie regular S_1 a otra superficie regular S_2 es diferenciable en $p \in V_1$ si dadas parametrizaciones locales

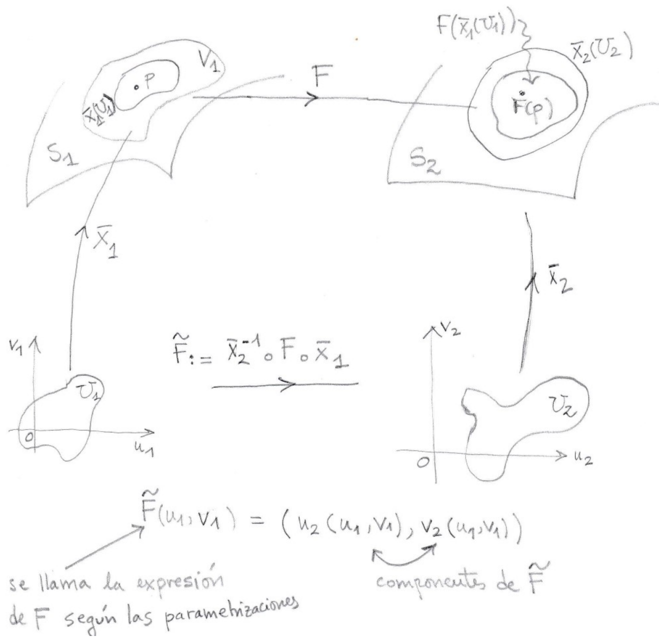
$$\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1} : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1 \quad y \quad \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{2} : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$$

$$con \quad p \in \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1}(U_1) \quad y \quad F(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1}(U_1)) \subset \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{2}(U_2),$$

la aplicación

$$\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{2}^{-1} \circ F \circ \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1} : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to U_2 \subset \mathbb{R}^2$$

es diferenciable en $\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1}^{-1}(p)$. F se dirá diferenciable si lo es en todo punto de su dominio. Esta definición no depende de la elección de parametrizaciones, que cumplan lo requerido, gracias a la Proposición 9. A la aplicación $\widetilde{F} := \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{2}^{-1} \circ F \circ \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1}$ se llama la expresión de F respecto de las parametrizaciones locales $\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1}$ y $\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{2}$.



Así, una aplicación continua $F : S_1 \to S_2$ será diferenciable si para una familia de parametrizaciones locales $\{\bar{\mathbf{x}}_{1j} : U_j \to S_1\}$ de S_1 con la propiedades $\cup_j \bar{\mathbf{x}}_{1j}(U_j) = S_1$ y que para cada j existe una parametrización local $\bar{\mathbf{x}}_{2j} : \widetilde{U}_j \to S_2$ de S_2 de manera que $F(\bar{\mathbf{x}}_{1j}(U_j)) \subset \bar{\mathbf{x}}_{2j}(\widetilde{U}_j)$ se cumple que $\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{2j}^{-1} \circ F \circ \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1j} : U_j \to \widetilde{U}_j$ es diferenciable.

Oservación 14. ¿Por qué exigimos en esta definición que

$$F : V_1 \subset S_1 \to S_2$$

sea continua? La respuesta es que para asegurarnos que para cada $p \in V_1$ existan parametrizaciones

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1 \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}} : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2,$$

que cumplan

$$p \in \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(U_1) \subset V_1 \quad \text{y} \quad F(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(U_1)) \subset \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}(U_2).$$

y así poder efectuar la composición

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}^{-1} \circ F \circ \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to U_2 \subset \mathbb{R}^2.$$

En efecto, dado $p \in V_1$, consideramos $F(p) \in S_2$ y tomamos cualquier parametrización

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}} : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2 \quad \text{con} \quad F(p) \in \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}(U_2).$$

Como F es continua (la suponemos así) y $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}(U_2)$ es un entorno abierto de $F(p)$ en S_2, existe un entorno abierto $\widetilde{V}_1 \subset V_1$ de p de manera que

$$F(\widetilde{V}_1) \subset \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}(U_2).$$

Ahora tomamos una parametrización

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} : \widetilde{U}_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1 \quad \text{de manera que} \quad p \in \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(\widetilde{U}_1).$$

Llamamos $W := \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(\widetilde{U}_1) \cap \widetilde{V}_1$, que es una abierto de $\widetilde{V}_1$ (por tanto también de V_1 y de S_1) y ponemos $U_1 := \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}^{-1}(W)$. Así,

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} := \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}\big|_{U_1} : U_1 \to S_1$$

es una parametrización local de S_1 con

$$p \in \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(U_1) = W \subset \widetilde{V}_1 \subset V_1 \,.$$

Es fácil ver que la composición de aplicaciones diferenciables entre superficies regulares es también una aplicación diferenciable. Obviamente, para cada superficie regular S, la aplicación identidad en S es una aplicación diferenciable de S en sí misma. Nótese, además, que la inversa de una aplicación diferenciable biyectiva no tiene por qué ser diferenciable.

Definición 15. *Dadas superficies regulares S_1 y S_2, una aplicación*

$$F : S_1 \to S_2$$

biyectiva, diferenciable con inversa $F^{-1} : S_2 \to S_1$ diferenciable se llama difeomorfismo. Se dice que una superficie regular S_1 es difeomorfa a otra superficie regular S_2 cuando existe un difeomorfismo $F : S_1 \to S_2$.

En un conjunto cuyos elementos sean superficies regulares, la relación binaria "ser difeomorfa con" es una relación de equivalencia. Dos superficies difeomorfas son, en particular, homeomorfas. Cada clase de equivalencia contiene una superficie regular y todas las que sean difeomorfas con ella. Dos superficies regulares difeomorfas son idénticas desde el punto de vista diferenciable, que no es lo mismo que desde el punto de vista "métrico".

Ejemplo 16. 1. Sea $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización local de una superficie regular S. Sabemos que $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable, pero antes de la definición de aplicación diferenciable entre superficies regulares no tenía sentido preguntarse si

$$\bar{\mathbf{x}} : \underbrace{U}_{\text{superficie regular}} \subset \mathbb{R}^2 \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in U, z = 0\} \longrightarrow \underbrace{\bar{\mathbf{x}}(U)}_{\text{superficie regular}} \subset S$$

es diferenciable como aplicación entre superficies regulares. Pero ésto es ahora claro si consideramos (con las notaciones de la definición)

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(u,v) = (u,v)\,, \quad \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}} = \bar{\mathbf{x}}\,.$$

con lo cual

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}} \circ \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} : U \to U.$$

es la identidad en U, que obviamente es diferenciable.

Por otro lado, veamos que

$$\bar{\mathbf{x}}^{-1} : \bar{\mathbf{x}}(U) \to U$$

también es diferenciable. En efecto, tomamos las parametrizaciones

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} = \bar{\mathbf{x}}\,, \quad \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}(u,v) = (u,v)\,.$$

Por tanto,

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} : U \to U$$

es la también identidad en U.

En resumen: cada parametrización local

$$\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbf{x}(U) \subset S$$

de una superficie regular S es un difeomorfismo. Por tanto, U y $\bar{\mathbf{x}}(U)$ son difeomorfas. Toda superficie regular es, por consiguiente, localmente difeomorfa con el plano euclídeo.

Si S y $\widetilde{S}$ son superficies regulares que admiten parametrizaciones locales con el mismo dominio

$$\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \quad \text{y} \quad \widetilde{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \widetilde{S}\,,$$

entonces los abiertos $\bar{\mathbf{x}}(U)$ de S y $\widetilde{\mathbf{x}}(U)$ de $\widetilde{S}$ son difeomorfos; en particular, dos grafos de funciones definidas en el mismo abierto U de $\mathbb{R}^2$ son difeomorfos.

2. Sean S_1, S_2 superficies regulares de $\mathbb{R}^3$ y

$$\widetilde{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

una aplicación diferenciable definida en un abierto V de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S_1 y que cumple

$$\widetilde{F}(S_1) \subset S_2\,.$$

Entonces, su restricción $F : S_1 \to S_2$ es diferenciable.

En efecto, al ser $F : S_1 \to S_2$ continua, para cada $p \in S_1$ existen parametrizaciones

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1 \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}} : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2,$$

que cumplen

$$p \in \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(U_1) \subset V_1 \quad \text{y} \quad F(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(U_1)) \subset \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}(U_2).$$

Así, podemos escribir

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}^{-1} \circ F \circ \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} = \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}^{-1} \circ \widetilde{F} \circ \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} \;:\; U_1 \longrightarrow U_2\,,$$

por lo tanto, $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}^{-1} \circ F \circ \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}$ es diferenciable en $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}^{-1}(p)$, para todo $p \in \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(U_1)$.

Veamos algunos casos concretos del ejemplo anterior.

a) Para $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ fijos, consideramos

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad F(x, y, z) = (ax, by, cz),$$

que es claramente diferenciable al ser lineal.
Se cumple que

$$F(\mathbb{S}^2) = E_{a\,b\,c}\,,$$

siendo $\mathbb{S}^2$ la esfera unitaria centrada en el $(0, 0, 0)$ y $E_{a\,b\,c}$ el elipsoide

$$E_{a\,b\,c} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

La restricción de F

$$f : \mathbb{S}^2 \to E_{a\,b\,c}\,, \quad f(x, y, z) = (ax, by, cz)$$

es un difeomorfismo.

b) La aplicación

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad F(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+z^2}}, z \right)$$

es diferenciable y cumple

$$F(H) = C\,,$$

donde H es el hiperboloide (de una hoja)

$$H = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 - z^2 = 1\,\}$$

y C el cilindro

$$C = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 = 1\,\}\,.$$

La restricción de F

$$f : H \to C\,, \quad f(x, y, z) = \Big(\frac{x}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+z^2}}, z\Big)$$

es un difeomorfismo con inverso

$$f^{-1}(u, v, t) = \big(u\sqrt{1+t^2}, v\sqrt{1+t^2}, t\big)\,.$$

c) Consideremos la simetría respecto del plano $\pi \equiv \{z = 0\}$

$$s_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad s_\pi(x, y, z) = (x, y, -z)$$

que es diferenciable y cumple

$$s_\pi(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2\,.$$

Su restricción

$$\sigma_\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2\,, \quad \sigma_\pi(x, y, z) = (x, y, -z)$$

es un difeomorfismo de $\mathbb{S}^2$ en si misma.

d) Sea $G_{L\,\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el giro de ángulo $\theta \in [0, 2\pi[$ alrededor de la recta L, el eje Oz,

$$G_{L\,\theta}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si C es el cilindro del ejemplo 2*b* tenemos

$$G_{L\,\theta}(C) = (C)\,.$$

Por tanto, su restricción

$$g_{L\,\theta} : C \to C\,,$$
$$g_{L\,\theta}(x, y, z) = (\cos\theta\, x - \operatorname{sen}\theta\, y, \operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y, z)$$

es un difeomorfismo de C en si mismo.

e) Consideremos la aplicación diferenciable

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad f(x, y, z) = (\cos x, \operatorname{sen} x, y)\,.$$

Si π es el plano $z = 0$ y C el cilindro del ejemplo 2*b* tenemos

$$F(\pi) = C\,.$$

Por tanto su restricción

$$f : \pi \to C\,, \quad f(x,y,0) = (\cos x, \operatorname{sen} x, y)$$

es una aplicación diferenciable.

Notemos que f es sobreyectiva y no es inyectiva, pero $f|_{]0,2\pi[\times\mathbb{R}\times\{0\}}$ es inyectiva. Intuitivamente, f enrolla el plano $z = 0$ sobre el cilindro C.

3. Sean $\bar{\mathbf{x}}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1$ y $\bar{\mathbf{x}}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$ parametrizaciones locales de las superficies regulares S_1 y S_2. Dada una aplicación diferenciable $\widetilde{F} : U_1 \to U_2$, la aplicación $F : \bar{\mathbf{x}}_1(U_1) \to \bar{\mathbf{x}}_2(U_2)$ definida por $F = \bar{\mathbf{x}}_2 \circ \widetilde{F} \circ \bar{\mathbf{x}}_1^{-1}$ es claramente diferenciable entre las superficies $\bar{\mathbf{x}}_1(U_1)$ y $\bar{\mathbf{x}}_2(U_2)$ y $\widetilde{F}$ es la expresión de F respecto a las correspondientes parametrizaciones.

3. El plano tangente a la superficie en un punto

Definición 17. *Sea S una superficie regular y sea $p \in S$. Un vector tangente a S en p es $\alpha'(0)$, donde $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^3$, $\epsilon > 0$ es una curva parametrizada diferenciable con $Im\alpha \subset S$ y tal que $\alpha(0) = p$; es decir, el vector tangente a una curva parametrizada en S que pasa por p.*

Notemos que poner $\alpha(0) = p$ no es una restricción. En efecto, si tenemos una curva diferenciable $\beta : I \to S$ de manera que $\beta(t_0) = p$ trasladamos el intervalo y definimos $\alpha(t) = \beta(t + t_0)$ obteniendo una curva parametrizada α que cumple $\alpha(0) = \beta(t_0)$ y $\alpha'(0) = \beta'(t_0)$.

Llamamos T_pS al conjunto de todos los vectores tangentes a S en el punto p. Veamos que T_pS es un plano vectorial, concretamente el plano vectorial de dirección del plano tangente afín a S en p (que sería el plano afín $p + T_pS$).

Proposición 18. *Sea S una superficie regular y sea $p \in S$. Para cada parametrización local $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ con $p \in \bar{\mathbf{x}}(U)$ se cumple*

$$T_pS = d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)}(\mathbb{R}^2) \quad \textit{siendo} \quad \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0) = p\,.$$

En particular, T_pS no depende de la parametrización elegida $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ con $p \in \bar{\mathbf{x}}(U)$ y es un subespacio vectorial de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Sea $w = d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)}(X)$ con $X = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Consideramos la curva diferenciable

$$\alpha(t) = \bar{\mathbf{x}}\big((u_0, v_0) + t(a, b)\big)\,, \quad t \in]-\epsilon, \epsilon[, \epsilon > 0$$

que cumple

$$\alpha(0) = \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0) = p \quad \text{y} \quad \alpha'(0) = d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)}(X) = w\,,$$

lo que demuestra que

$$d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)}(\mathbb{R}^2) \subset T_pS\,.$$

Veamos ahora la otra inclusión. Tomamos $w \in T_pS$. Por definición, existe una curva diferenciable

$$\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to S, \epsilon > 0 \quad \text{con} \quad \alpha(0) = p, \; \alpha'(0) = w \, .$$

Sea $\epsilon > 0$ es tan pequeño como sea necesario para que $\mathrm{Im}\alpha \subset \bar{\mathbf{x}}(U)$. Construimos la curva parametrizada

$$\gamma := \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to U \subset \mathbb{R}^2 \, ,$$

que cumple

$$\gamma(0) = \bar{\mathbf{x}}^{-1}(\alpha(0)) = \bar{\mathbf{x}}^{-1}(p) = (u_0, v_0) \, .$$

Así,

$$d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)}(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\bar{\mathbf{x}} \circ \gamma)(t) = \alpha'(0) = w \, ,$$

lo que demuestra que $T_pS \subset d\bar{\mathbf{x}}_{(u_0,v_0)}(\mathbb{R}^2)$. □

Cada parametrización local $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ con $p = \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0) \in \bar{\mathbf{x}}(U)$ nos proporciona una base de T_pS, a saber

$$B^{\bar{\mathbf{x}}}_{(u_0,v_0)} = \Big(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0) \Big)$$

que se llama la base de T_pS asociada a $\bar{\mathbf{x}}$.

Dado $w \in T_pS$ veamos cuales son sus coordenadas en esta base. Sabemos que $w = \alpha'(0)$ para una curva diferenciable en S tal que $\alpha(0) = p$. Tomamos α de la forma

$$\alpha = \bar{\mathbf{x}} \circ \gamma$$

donde $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to U \subset \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$, dada por $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, cumple $\gamma(0) = (u_0, v_0)$. Tenemos

$$w = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \bar{\mathbf{x}}(u(t), v(t)) = u'(0)\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0) + v'(0)\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0) \, .$$

Por tanto las coordenadas de w en la base $B^{\bar{\mathbf{x}}}_{(u_0,v_0)}$ son

$$(u'(0), v'(0))$$

donde $\gamma(t) = (u(t), v(t)) = (\bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \alpha)(t)$.

Oservación 19. El hecho de que $B^{\bar{\mathbf{x}}}_{(u_0,v_0)}$ sea una base del plano tangente T_pS, siendo $\bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0) = p$, nos permite determinar T_pS también como

$$T_pS = \Big(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0) \Big)^{\perp}$$

.

Ejemplo 20. 1. Sea S el plano afín de $\mathbb{R}^3$ que pasa por $p_0 \in \mathbb{R}^3$ con dirección $\vec{S} = L(\{w_1, w_2\})$, $\{w_1, w_2\}$ linealmente independiente, es decir $S = p_0 + L(\{w_1, w_2\})$ Una parametrización global de S es

$$\bar{\mathbf{x}}(\lambda, \mu) = p_0 + \lambda w_1 + \mu w_2\,, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Como $\bar{\mathbf{x}}(0,0) = p_0$ ocurre $d\bar{\mathbf{x}}_{(0,0)}(\mathbb{R}^2) = T_{p_0}S$, pero $d\bar{\mathbf{x}}_{(0,0)}(\mathbb{R}^2) = \vec{S}$, por tanto

$$T_{p_0}S = \vec{S} = L(\{w_1, w_2\})$$

independientemente de quien sea $p_0 \in S$. De otro modo, si ponemos

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \langle x - p_0, N\rangle = 0\}\,, \text{ donde } N := w_1 \times w_2\,,$$

resulta

$$T_pS = \vec{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \langle x, N\rangle = 0\}\,.$$

2. Sea ahora $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \;:\; \langle x, x\rangle = 1\}$ la esfera unitaria de centro el $(0,0,0)$. Veamos que

$$T_p\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \;:\; \langle p, x\rangle = 0\} = L(\{p\})^{\perp}\,.$$

En efecto, tanto $T_p\mathbb{S}^2$ como $L(\{p\})^{\perp}$ tienen dimensión 2. Por tanto es suficiente ver que $T_p\mathbb{S}^2 \subset L(\{p\})^{\perp}$. Sea $w \in T_p\mathbb{S}^2$ y sea $\alpha(t)$ una curva diferenciable en $\mathbb{S}^2$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$.

Así

$$\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle = 1 \;\Rightarrow \langle \alpha(0), \alpha'(0)\rangle = 0 \text{ es decir } w \in L(\{p\})^{\perp}\,.$$

Más generalmente, para la esfera de centro p_0 y radio $r(>0)$

$$\mathbb{S}^2_r(p_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \;:\; \langle x - p_0, x - p_0\rangle = r^2\}\,,$$

sea $w \in T_p\mathbb{S}^2_r(p_0)$ y sea $\alpha(t)$ una curva diferenciable en $\mathbb{S}^2_r(p_0)$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Tenemos

$$\langle \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0\rangle = r^2 \;\Rightarrow \langle \alpha(0) - p_0, \alpha'(0)\rangle = 0\,,$$

y por lo tanto

$$w \in L(\{p - p_0\})^{\perp}\,,$$

lo que demuestra, haciendo uso una vez más de la igualdad de dimensiones, que

$$T_p\mathbb{S}^2_r(p_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \;:\; \langle p - p_0, x\rangle = 0\} = (p - p_0)^{\perp}\,.$$

3. Consideramos ahora el elipsoide

$$E_{a\,b\,c} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

que vamos a reescribir como

$$E_{a\,b\,c} = \left\{\, X \in \mathbb{R}^3 \;:\; \langle X, AX \rangle = 1 \right\},$$

donde notamos $X = (x, y, z)$ y $AX = \left(\frac{1}{a^2}x, \frac{1}{b^2}y, \frac{1}{c^2}z \right)$.

Observemos que A es un operador lineal de $\mathbb{R}^3$ auto-adjunto respecto al producto escalar (ordinario) de $\mathbb{R}^3$.

Si $w \in T_pE_{a\,b\,c}$ y $\alpha(t)$ es una curva diferenciable en $E_{a\,b\,c}$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$, se tiene

$$\langle \alpha(t), A\,\alpha(t) \rangle = 1\,.$$

De donde, derivando, haciendo uso de que A es auto-adjunto y valorando en $t = 0$, obtenemos

$$\langle \alpha'(0), A\,\alpha(0) \rangle = 0\,,$$

lo que nos dice que $w \in (A\,p)^{\perp}$, es decir $T_pE_{a\,b\,c} \subset (A\,p)^{\perp}$. Una vez más, la igualdad de dimensiones nos da la igualdad

$$T_pE_{a\,b\,c} = \{X \in \mathbb{R}^3 \;:\; \langle X, A\,p \rangle = 0\} = (A\,p)^{\perp}\,.$$

4. Supongamos ahora que tenemos una superficie regular S dada como la imagen inversa de un valor regular c de una función diferenciable $F : V \to \mathbb{R}$, V abierto de $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{(x, y, z) \in V \;:\; F(x, y, z) = c\}\,.$$

Sean $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ y $w \in T_{p_0}S$. Escribimos $w = \alpha'(0)$ para una curva diferenciable en S con $\alpha(0) = p_0$. Decir que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in S$ es decir que

$$F(x(t), y(t), z(t)) = c\,.$$

Por tanto

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(x(t), y(t), z(t)) = 0\,,$$

es decir,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p_0)\, x'(0) + \frac{\partial F}{\partial y}(p_0)\, y'(0) + \frac{\partial F}{\partial z}(p_0)\, z'(0) = 0\,,$$

donde $w = (x'(0), y'(0), z'(0))$. Equivalentemente,

$$\left\langle\, (\nabla F)_{p_0}, w \,\right\rangle = 0\,,$$

donde $(\nabla F)_{p_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p_0), \frac{\partial F}{\partial y}(p_0), \frac{\partial F}{\partial z}(p_0) \right) \neq (0, 0, 0)$ es el gradiente de F en p_0.

Notemos que $(\nabla F)_{p_0} \neq 0$ si, y sólo si, $(dF)_{p_0} \neq 0$, y esto último ocurre al ser $p_0 \in S = F^{-1}(c)$, c valor regular de F.

Hemos probado entonces que $T_{p_0}S \subset (\nabla F)_{p_0}^{\perp}$, y como ambos subespacios tienen la misma dimensión tienen que coincidir, así que tenemos

$$T_{p_0}S = \{w \in \mathbb{R}^3 \ : \ \big\langle \, (\nabla F)_{p_0}, w \, \big\rangle = 0\} \, .$$

Claramente, los ejemplos 2 y 3 quedan como casos particulares de éste.

5. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto U de $\mathbb{R}^2$. Consideremos su grafo[5]

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \ : \ (x, y) \in U\} \, .$$

Si definimos

$$F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, , \quad F(x, y, z) = z - f(x, y)$$

es diferenciable al serlo f y $G(F) = F^{-1}(0)$. Como

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \, , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} \, , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 \, ,$$

tenemos que 0 es un valor regular de F y

$$(\nabla F)_{(x,y,z)} = \Big(-\frac{\partial f}{\partial x}, \ -\frac{\partial f}{\partial y}, \ 1 \Big)$$

para todo $(x, y, z) \in G(f)$.

Por tanto,

$$T_pG(f) = \Big\{ w \in \mathbb{R}^3 \ : \ w_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + w_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = w_3 \Big\} \, .$$

siendo $p = (x, y, f(x, y))$, $w = (w_1, w_2, w_3)$.

También podríamos haber considerado la parametrización global de $G(f)$

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (u, v, f(u, v)) \, .$$

Calcular entonces

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u, v) = \Big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \Big) \, , \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u, v) = \Big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \Big)$$

que sería la base explícita de $T_pG(f)$, o bien decir que éste es el subespacio ortogonal a su producto vectorial

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u, v) = \Big(-\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial f}{\partial v}(u, v), 1 \Big) \, .$$

[5] Por sencillez, consideramos grafos sobre abiertos del plano $z = 0$. Para grafos de funciones del tipo $y = g(x, z)$ o del tipo $x = h(y, z)$ se procede de forma análoga

4. La diferencial de una aplicación diferenciable. Difeomorfismos

Definición 21. *Sea $F : S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable entre superficies regulares. Tomamos $p \in S_1$ y consideramos T_pS_1 y $T_{F(p)}S_2$. Queremos definir una aplicación lineal*

$$dF_p : T_pS_1 \to T_{F(p)}S_2$$

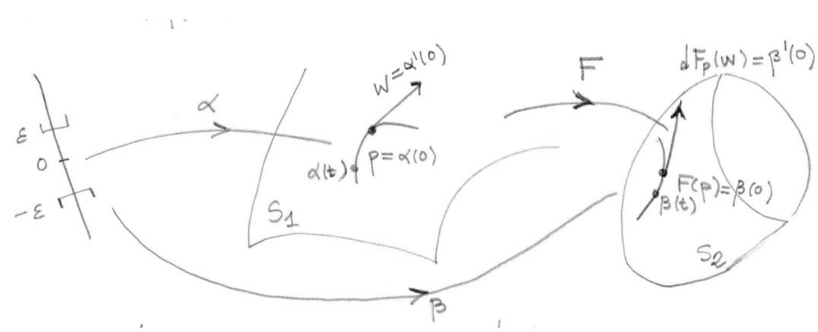
que vamos a llamar la diferencial de F en el punto $p \in S_1$. Lo hacemos como sigue:

Dado $w \in T_pS_1$ consideramos una curva diferenciable α en S_1 de manera que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Componemos con F obteniendo una curva diferenciable $\beta := F \circ \alpha$ que cumple

$$\beta(0) = F(p) \quad y \quad \beta'(0) \in T_{F(p)}S_2 \,. \quad \text{Ponemos } dF_p(w) := \beta'(0) \,.$$

Proposición 22 (Justificación de la definición)**.** *Con las notaciones anteriores, ocurre que*

1. *El vector $\beta'(0)$ no depende de la elección de la curva α, con tal de que α cumpla $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$, con lo cual tenemos que dF_p es una aplicación.*
2. *La aplicación dF_p es lineal.*



Demostración. Como $F : S_1 \to S_2$ es diferenciable tomamos

$$\bar{\mathbf{x}}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1 \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{x}}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$$

$$\text{con} \quad p \in \bar{\mathbf{x}}_1(U_1) \quad \text{y} \quad F(\bar{\mathbf{x}}_1(U_1)) \subset \bar{\mathbf{x}}_2(U_2),$$

de manera que la aplicación

$$\widetilde{F} := \bar{\mathbf{x}}_2^{-1} \circ F \circ \bar{\mathbf{x}}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to U_2 \subset \mathbb{R}^2$$

es diferenciable en $\bar{\mathbf{x}}_1^{-1}(p)$.

La curva α será de la forma

$$\alpha(t) = \bar{\mathbf{x}}_1(u_1(t), v_1(t))$$

donde

$$t \mapsto (u_1(t), v_1(t))$$

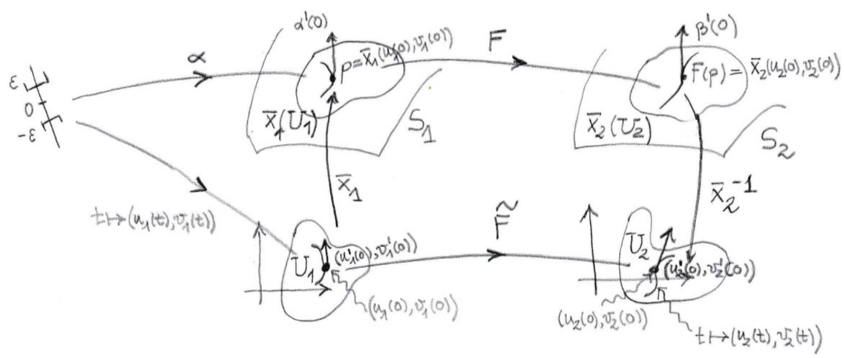
es una curva en U_1 con $(u_1(0), v_1(0)) = \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1}^{-1}(p)$.

Ahora, para la curva $\beta := F \circ \alpha$ tenemos

$$\beta(t) = F\big(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{1}(u_1(t), v_1(t))\big) = \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{2}(u_2(t), v_2(t))$$

donde

$$(u_2(t), v_2(t)) = \widetilde{F}(u_1(t), v_1(t)) = \Big(\widetilde{F}_1(u_1(t), v_1(t)), \widetilde{F}_2(u_1(t), v_1(t))\Big).$$



Así

$$\beta'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{2}(u_2(t), v_2(t)) = u'_2(0)\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_2}{\partial u_2}(u_2^0, v_2^0) + v'_2(0)\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_2}{\partial v_2}(u_2^0, v_2^0)$$

donde $(u_2^0, v_2^0) := (u_2(0), v_2(0))$.

La regla de la cadena aplicada a $u_2(t) = \widetilde{F}_1(u_1(t), v_1(t))$ nos da

$$u'_2(0) = u'_1(0)\frac{\partial \widetilde{F}_1}{\partial u_1}(u_1^0, v_1^0) + v'_1(0)\frac{\partial \widetilde{F}_1}{\partial v_1}(u_1^0, v_1^0)\,,$$

donde $(u_1^0, v_1^0) := (u_1(0), v_1(0))$, y aplicada a $v_2(t) = \widetilde{F}_2(u_1(t), v_1(t))$,

$$v'_2(0) = u'_1(0)\frac{\partial \widetilde{F}_2}{\partial u_1}(u_1^0, v_1^0) + v'_1(0)\frac{\partial \widetilde{F}_2}{\partial v_1}(u_1^0, v_1^0)\,.$$

Podemos escribir las dos fórmulas anteriores como

$$\begin{pmatrix} u'_2(0) \\ v'_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1(0) \\ v'_1(0) \end{pmatrix}$$

con

$$a_{11} = \frac{\partial \widetilde{F}_1}{\partial u_1}(u_1^0, v_1^0), \qquad a_{12} = \frac{\partial \widetilde{F}_1}{\partial v_1}(u_1^0, v_1^0)$$

$$a_{21} = \frac{\partial \widetilde{F}_2}{\partial u_1}(u_1^0, v_1^0), \qquad a_{22} = \frac{\partial \widetilde{F}_2}{\partial v_1}(u_1^0, v_1^0)$$

Notemos que $(u'_1(0), v'_1(0))$ son las coordenadas de w en $B^{\bar{\mathbf{x}}_1}_{(u_1^0,v_1^0)} = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial u_1}(u_1^0, v_1^0), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial v_1}(u_1^0, v_1^0) \right)$ y $(u'_2(0), v'_2(0))$ las de $\beta'(0)$ en $B^{\bar{\mathbf{x}}_2}_{(u_2^0,v_2^0)} = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_2}{\partial u_2}(u_2^0, v_2^0), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_2}{\partial v_2}(u_2^0, v_2^0) \right)$.

Lo anterior nos dice que $\beta'(0)$ sólo depende de F, de p y de w. Así, $\beta'(0)$ es independiente de α con tal de que cumpla $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Esto demuestra que dF_p es una aplicación.

Para 2 nótese que la fórmula matricial anterior nos dice que

$$dF_p\Big(a_1 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial u_1}(u_1^0, v_1^0) + a_2 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial v_1}(u_1^0, v_1^0)\Big) =$$

$$= (a_{11}\, a_1 + a_{12}\, a_2)\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_2}{\partial u_2}(u_2^0, v_2^0) + (a_{21}\, a_1 + a_{22}\, a_2)\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_2}{\partial v_2}(u_2^0, v_2^0)$$

con lo cual, dF_p es lineal. Nótese también que

$$M\Big(dF_p, B^{\bar{\mathbf{x}}_1}_{(u_1^0,v_1^0)}, B^{\bar{\mathbf{x}}_2}_{(u_2^0,v_2^0)}\Big) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

lo que nos da también una forma explícita de cálculo de dF_p.

□

Ejemplo 23. 1. Consideremos una aplicación diferenciable $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y supongamos que cumple $F(S_1) \subset S_2$ para dos superficies regulares S_1, S_2. Sea $f : S_1 \to S_2$ la aplicación diferenciable obtenida por restricción de F. Entonces se cumple

$$df_p(w) = dF_p(w)\,, \text{ para todo } p \in S_1 \text{ y todo } w \in T_pS_1$$

En efecto, sabemos que al ser $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, su diferencial en cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ se puede calcular como sigue

$$dF_p(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (F \circ \alpha)(t),$$

donde $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^3$, $\epsilon > 0$, es una curva diferenciable que cumple $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w \in \mathbb{R}^3$. Si tomamos $p \in S_1$ y $\alpha(t) \in S_1$ entonces $w \in T_pS_1$ y

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (F \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = df_p(w)\,.$$

a) Si $F := A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fuera una aplicación lineal y $A(S_1) \subset S_2$ entonces

$$df_p(w) = A(w)\,, \text{ para } \text{ todo } p \in S_1 \text{ y todo } w \in T_pS_1\,.$$

Por ejemplo, para $A = \pi$, dada por $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$, la proyección ortogonal sobre el plano $z = 0$, y $S_1 = S_2 = C$ siendo

$$C = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 = 1\,\}\,,$$

entonces, si $f : C \to C$ denota la restricción (dominio y codominio, como siempre) de π a C tenemos para $p = (x_0, y_0, z_0) \in C$

$$df_p : T_{(x_0,y_0,z_0)}C \to T_{(x_0,y_0,0)}C\,, \quad df_p(a, b, c) = (a, b, 0)\,.$$

b) Si A es una isometría lineal del espacio vectorial métrico euclídeo $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^2$ es la esfera unitaria centrada en $(0, 0, 0)$ entonces $A(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$ y se cumple

$$df_p : T_p\mathbb{S}^2 \to T_{A(p)}\mathbb{S}^2\,, \quad df_p(a, b, c) = A(a, b, c)\,.$$

Por ejemplo, si fuese $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ entonces

$$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2\,, \quad f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

es la aplicación antípoda y cumple

$$df_p : T_p\mathbb{S}^2 \to T_{(-p)}\mathbb{S}^2\,, \quad df_p(a, b, c) = (-a, -b, -c)\,.$$

2. Si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fuera una aplicación afín y $F(S_1) \subset S_2$ entonces, si $f : S_1 \to S_2$ denota la restricción de F de S_1 en S_2 tenemos

$$df_p(w) = \vec{F}(w)\,, \text{ para } \text{ todo } p \in S_1 \text{ y todo } w \in T_pS_1\,.$$

siendo $\vec{F}$ la aplicación lineal asociada a la aplicación afín F.

3. Sabemos que la aplicación

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad F(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+z^2}}, z\right)$$

es diferenciable y cumple

$$F(H) = C\,,$$

donde H es el hiperboloide (de una hoja)

$$H = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 - z^2 = 1\,\}$$

y C el cilindro

$$C = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 = 1\,\}\,.$$

y que

$$f : H \to C\,, \quad f(x,y,z) = F(x,y,z)$$

es un difeomorfismo.

Vamos a obtener una expresión explícita de $df_p(w)$ para cualesquiera $p \in H$ y $w \in T_pH$. En efecto, si $p = (x_0, y_0, z_0) \in H$, tenemos $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$. Por otro lado,

$$T_pH = \{\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax_0 + by_0 - cz_0 = 0 \,\} = (x_0, y_0, -z_0)^\perp\,,$$

Si $q = (u_0, v_0, t_0) \in C$, tenemos $u_0^2 + v_0^2 = 1$ y

$$T_qC = \{\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ au_0 + bv_0 = 0 \,\} = (u_0, v_0, 0)^\perp\,.$$

Tomamos entonces

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ diferenciable con } \alpha(t) \in H,$$

$$\alpha(0) = p \ \text{ y } \ \alpha'(0) = (a,b,c)\,,$$

(no hace falta calcular la forma explícita de α para lo que sigue). Consideramos

$$\beta(t) = \underbrace{f(x(t), y(t), z(t))}_{F(x(t),y(t),z(t))} = \left(\frac{x(t)}{\sqrt{1+z(t)^2}}, \frac{y(t)}{\sqrt{1+z(t)^2}}, z(t) \right) \in C$$

que cumple

$$\beta(0) = f(p) \ \text{ y } \ \beta'(0) = df_p(a,b,c)\,.$$

Teniendo en cuenta que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\frac{x(t)}{\sqrt{1+z(t)^2}} \right) = Ma + Nc,$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\frac{y(t)}{\sqrt{1+z(t)^2}} \right) = Mb + Pc\,, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} z(t) = c\,,$$

siendo

$$M = \frac{1}{\sqrt{1+z_0^2}}\,, \quad N = -\frac{x_0 z_0}{(1+z_0^2)^{3/2}}\,, \quad P = -\frac{y_0 z_0}{(1+z_0^2)^{3/2}}\,,$$

obtenemos

$$df_p(a,b,c) = (Ma + Nc, Mb + Pc, c)\,,$$

donde $p = (x_0, y_0, z_0)$ y $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$, $ax_0 + by_0 - cz_0 = 0$. No hace falca comprobar que

$$df_p(a,b,c) \in T_{f(p)}C\,.$$

Eso tiene que suceder. No obstante, uno puede ver directamente a partir de las igualdades anteriores que eso ocurre.

Proposición 24 (Regla de la cadena). *Sean S_1, S_2 y S_3 superficies regulares y sean aplicaciones diferenciables*

$$F : S_1 \to S_2\,, \quad G : S_2 \to S_3\,.$$

Para cada $p \in S_1$ se cumple

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p\,.$$

Demostración. Sean $w \in T_pS_1$ y $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to S_1$, $\epsilon > 0$, diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces,

$$dF_p(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (F \circ \alpha)(t)\,,$$

$$d(G \circ F)_p(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big((G \circ F) \circ \alpha\big)(t)\,.$$

Para calcular

$$\big(dG_{F(p)} \circ dF_p\big)(w) = dG_{F(p)}\big(dF_p(w)\big)$$

tenemos que tomar una curva $\beta(t) \in S_2$ diferenciable que cumpla $\beta(0) = F(p)$ y $\beta'(0) = dF_p(w)$, y entonces

$$dG_{F(p)}\big(dF_p(w)\big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (G \circ \beta)(t)\,.$$

Basta ahora con observar que podemos tomar precisamente $\beta = F \circ \alpha$, siendo α la curva previamente descrita, para concluir

$$\begin{aligned} dG_{F(p)}\big(dF_p(w)\big) =& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(G \circ (F \circ \alpha)\big)(t) \\ =& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big((G \circ F) \circ \alpha\big)(t) = d(G \circ F)_p(w)\,. \end{aligned}$$

□

Está claro que la diferencial en un punto de la aplicación identidad en una superficie regular S es la aplicación identidad en el tangente en ese punto, en símbolos

$$(d1_S)_p = 1_{T_pS} \text{ para todo } p \in S\,.$$

Usando este hecho y la proposición anterior tenemos la siguiente consecuencia

Corolario 25. *Para cada difeomorfismo $F : S_1 \to S_2$ entre dos superficies regulares S_1 y S_2 se tiene que dF_p es biyectiva y*

$$\big(dF_p\big)^{-1} = \big(dF^{-1}\big)_{F(p)}$$

para todo $p \in S_1$

Obsérvese que esta fórmula permite el cálculo de $\big(dF^{-1}\big)_{F(p)}$ sin conocer explícitamente F^{-1}.

Teorema 26 (Teorema de la función inversa)**.** *Si $F : S_1 \to S_2$ es una aplicación diferenciable entre dos superficies regulares S_1 y S_2 y ocurre que*

$$dF_{p_0} \ \text{es biyectiva}\,,$$

entonces existe un entorno abierto de $V_1 \subset S_1$ de p_0 y existe un entorno abierto $V_2 \subset S_2$ de $F(p_0)$ de manera que

$$F\big|_{V_1} : V_1 \to V_2 \ \text{es un difeomorfismo.}$$

Demostración. Elegimos parametrizaciones locales

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1 \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}} : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$$

$$\text{con} \quad p_0 \in \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(U_1) \quad \text{y} \quad F(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(U_1)) \subset \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}(U_2).$$

Sabemos que la aplicación

$$\widetilde{F} := \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}^{-1} \circ F \circ \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to U_2 \subset \mathbb{R}^2$$

es diferenciable en $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}^{-1}(p_0)$. Le aplicamos a $\widetilde{F}$ la regla de la cadena en $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}^{-1}(p_0)$ obteniendo

$$d\widetilde{F}_{\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}^{-1}(p_0)} = \underbrace{\left(d\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}^{-1}\right)_{F(p_0)}}_{\text{biyectiva}} \circ dF_{p_0} \circ \underbrace{\left(d\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}\right)_{\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}^{-1}(p_0)}}_{\text{biyectiva}}$$

lo que nos dice que

$$d\widetilde{F}_{\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}^{-1}(p_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ \text{ es biyectiva}\,.$$

Según el teorema de la función inversa clásico, existe bolas abiertas

$$B_{r_1}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}^{-1}(p_0)) \subset U_1\,, \quad B_{r_2}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}^{-1}F(p_0)) \subset U_2$$

de manera que

$$\widetilde{F}\Big|_{B_{r_1}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}^{-1}(p_0))} \ : \ B_{r_1}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}^{-1}(p_0)) \to B_{r_2}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}^{-1}F(p_0))$$

es un difeomorfismo. Si tomamos los abiertos de S_1 y S_2

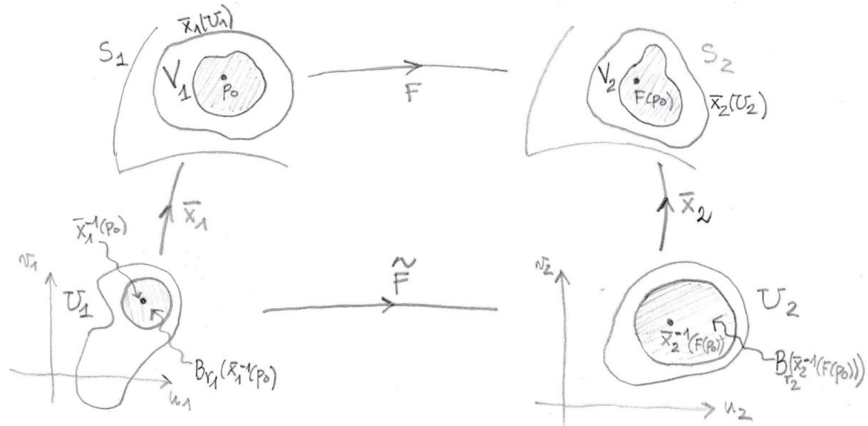
$$V_1 := \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}\Big(B_{r_1}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}^{-1}(p_0))\Big)\,, \quad V_2 := \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}\Big(B_{r_2}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}^{-1}F(p_0))\Big)$$

resulta que

$$F|_{V_1} : V_1 \subset S_1 \longrightarrow V_2 \subset S_2$$

es un difeomorfismo.

□



Ejemplo 27. Consideremos la aplicación diferenciable

$$F : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \longrightarrow C\ ,\ \ F(x, y, 0) = (\cos x, \operatorname{sen} x, y)\ ,$$

del plano $z = 0$ en el cilindro C. Sabemos que es sobreyectiva pero no es inyectiva. Sin embargo, para cada punto $p = (x_0, y_0, 0)$ de dicho plano y cada vector $(a, b, 0)$ de su plano tangente en p tenemos

$$dF_p(a, b, 0) = (-a \operatorname{sen} x_0, a \cos x_0, b)\ .$$

De donde deducimos que dF_p es inyectiva, para todo punto p del plano. Por tanto dF_p tiene que ser también sobreyectiva. En definitiva, dF_p es biyectiva.

Con este ejemplo vemos que la tesis del Teorema 26 no se puede extender hasta llegar a decir que la aplicación diferenciable ha de ser un difeomorfismo global, ni siquiera aún cuándo su diferencial sea biyectiva en todo punto.

4.1. La diferencial de una función diferenciable

Definición 28. *Consideremos una función diferenciable*

$$f : V \subset S \to \mathbb{R}$$

definida en un abierto V de una superficie regular S. Para cada $p \in V$ definimos la diferencial de f en dicho punto como

$$df_p : T_pS \to \mathbb{R}\ , \quad df_p(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \alpha)(t)\ ,$$

donde $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to S$, $\epsilon > 0$, es una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w \in T_pS$.

Igual que ocurría con el caso de las aplicaciones diferenciables entre superficies regulares, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \alpha)(t)$$

sólo depende de f, de $p \in V$ y de $w \in T_pS$ y df_p es lineal.

Si tomamos una parametrización local

$$\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S \quad \text{con} \quad p = \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0) \in \bar{\mathbf{x}}(U)$$

entonces

$$df_p\Big(a_1 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0) + a_2 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0)\Big) =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \, a_1 + \lambda_2 \, a_2 \,,$$

donde

$$\lambda_1 = df_p\Big(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0)\Big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\big(\bar{\mathbf{x}}(u_0 + t, v_0)\big)$$

$$\lambda_2 = df_p\Big(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0)\Big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\big(\bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0 + t)\big).$$

Ejemplo 29. 1. Tomemos $V = \bar{\mathbf{x}}(U)$ para una parametrización local $\bar{\mathbf{x}}$ de S y sean las funciones coordenadas asociadas

$$u : V \to \mathbb{R}\,, \quad v : V \to \mathbb{R}\,,$$

es decir, dado $p \in V$, $\big(u(p), v(p)\big)$ es el único punto de U de manera que $\bar{\mathbf{x}}\big(u(p), v(p)\big) = p$, o si se quiere (u, v) son las funciones componentes de la aplicación diferenciable $\bar{\mathbf{x}}^{-1} : V \to U$ (lo que además asegura que estas funciones son diferenciables). Como

$$du_p\Big(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0)\Big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u(\bar{\mathbf{x}}(u_0 + t, v_0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(u_0 + t) = 1$$

$$du_p\Big(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0)\Big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u(\bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0 + t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(u_0) = 0$$

entonces

$$du_p\Big(a_1 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0) + a_2 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0)\Big) = a_1 \,.$$

Análogamente

$$dv_p\Big(a_1 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0) + a_2 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0)\Big) = a_2 \,.$$

En definitiva, (du_p, dv_p) es la base de $(T_pS)^* := \operatorname{Hom}(T_pS, \mathbb{R})$ dual de la base $\Big(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0)\Big)$ de T_pS.

2. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineal. Consideremos la restricción f de φ a una superficie regular S, $f : S \to \mathbb{R}$. Se tiene

$$df_p(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(\alpha(t)) \, ,$$

donde $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in S$ es diferenciable y cumple $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Teniendo en cuenta que toda forma lineal sobre $\mathbb{R}^3$ es del tipo

$$\varphi(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

donde $(a_1, a_2, a_3) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3))$, tenemos

$$df_p(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(a_1 x(t) + a_2 y(t) + a_3 z(t) \big) =$$

$$= a_1 x'(0), + a_2 y'(0) + a_3 z'(0) \, ,$$

es decir,

$$df_p(w) = \varphi(w) \, .$$

Un caso particular importante es el siguiente ejemplo.

3. Sea S una superficie regular. Para cada $v \in \mathbb{R}^3$ con $|v| = 1$ considero la correspondiente función altura

$$h_v : S \to \mathbb{R} \, , \quad h_v(p) = \langle p, v \rangle \, .$$

Vamos a calcular $(dh_v)_p(w)$ para $w \in T_pS$. Para ello escribimos $w = \alpha'(0)$ para una curva diferenciable $\alpha :] - \epsilon, \epsilon[\to S$, $\epsilon > 0$, con $\alpha(0) = p$. Tenemos,

$$(dh_v)_p(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h_v(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \alpha(t), v \rangle = \langle w, v \rangle \, .$$

Observemos que $(dh_v)_p(w) = 0$ para todo $w \in T_pS$, i.e., el punto p es crítico para h_v, si, y sólo si, $v \perp T_pS$

En el caso particular de que S sea la esfera centrada en $(0, 0, 1)$ y de radio 1 y $v = (0, 0, 1)$ ocurre que p es un punto crítico de h_v si y sólo si $p = (0, 0, 2)$ o $p = (0, 0, 0)$, los polos norte y sur de esta esfera respectivamente.

4. Sea S una superficie regular y sea $p_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ un punto fijo del espacio euclídeo que no pertenezca a S. Consideremos la función distancia al cuadrado a p_0

$$f_{p_0} : S \to \mathbb{R} \, , \quad f_{p_0}(p) = |p - p_0|^2 \, .$$

Vamos a calcular $(df_{p_0})_p(w)$ para $w \in T_pS$. Para ello escribimos $w = \alpha'(0)$ para una curva diferenciable $\alpha :] - \epsilon, \epsilon[\to S$, $\epsilon > 0$, con $\alpha(0) = p$. Se tiene

$$(df_{p_0})_p(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_{p_0}(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0 \rangle \,,$$

con lo que

$$(df_{p_0})_p(w) = 2\langle w, p - p_0 \rangle \,.$$

Así, un punto $p \in S$ es crítico para f_{p_0} si, y sólo si, $\overrightarrow{p_0 p} \perp T_p S$.

5. Supongamos ahora una aplicación diferenciable

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,, \quad F = (F_1, F_2, F_3)$$

y una superficie regular S, de manera que $F(S) \subset S$. Representemos la restricción de F a S por

$$f : S \to S \,, \quad f(p) = F(p) \,.$$

Por otro lado, sea la restricción de cada componente F_j, de F, $j = 1, 2, 3$, a S

$$f_j : S \to \mathbb{R} \,.$$

Para cada $p \in S$ y cada $w \in T_p S$ podemos calcular

$$df_p(w) \in T_{f(p)} S \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad (df_j)_p(w) \in \mathbb{R} \,, \; j = 1, 2, 3 \,.$$

Nos preguntamos si, de manera natural, ocurre

$$df_p(w) = \big((df_1)_p(w), (df_2)_p(w), (df_3)_p(w) \big) \,.$$

Para dar una respuesta, tomamos una curva diferenciable $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to S$, $\epsilon > 0$, con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$ y calculamos

$$\begin{aligned} df_p(w) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\alpha(t)) = \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big(F_1(\alpha(t)), F_2(\alpha(t)), F_3(\alpha(t)) \Big) = \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big(f_1(\alpha(t)), f_2(\alpha(t)), f_3(\alpha(t)) \Big) = \\ &= \Big((df_1)_p(w), (df_2)_p(w), (df_3)_p(w) \Big) \,. \end{aligned}$$

Acabamos este tema abordando una cuestión natural. Está claro que si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función constante, entonces $df_p = 0$ para todo $p \in S$. Recíprocamente, supongamos que una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ cumple

$$df_p = 0 \,.$$

¿Cuándo podremos afirmar que f es constante?

Fijado un punto $p_0 \in S$, para cada parametrización local $\bar{\mathbf{x}} : U \to S$ de manera que $p_0 \in \bar{\mathbf{x}}(U)$ se cumpliría para una tal función

$$d\big(f \circ \bar{\mathbf{x}}\big)_{(u,v)} = 0\,, \text{ para todo } (u,v) \in U\,.$$

Por tanto, si U es conexo (siempre se puede elegir una parametrización local de cada punto con dominio conexo) tenemos que $f \circ \bar{\mathbf{x}}$ es constante sobre U, es decir,

$$f \text{ es constante en el entorno abierto conexo } \bar{\mathbf{x}}(U) \text{ de } p \text{ en } S$$

Recapitulando, hemos visto que

Proposición 30. *Si una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ cumple $df_p = 0$ para todo $p \in S$, entonces cada punto $p \in S$ tiene un entorno abierto conexo $V_p \subset S$ de manera que $f\big|_{V_p} =$ constante (dependiente de p).*

Este resultado es <u>local</u> y no me asegura que la función sea constante sobre toda S. Supongamos ahora que S es conexa. Como toda superficie regular es localmente arco conexa, necesariamente S es arco conexa.

Así, dados $p, q \in S$ existe $\gamma : [a,b] \to S$, $a < b$, continua con $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$. Como $\gamma([a,b])$ es compacto en S, del recubrimiento por entornos abiertos conexos $\{V_{\gamma(t)}\}_{t\in[a,b]}$ en donde $f|_{V_{\gamma(t)}}$ es una constante (que depende de $\gamma(t)$) podemos extraer un sub-recubrimiento finito de manera que

$$\gamma([a,b]) \subset V_{\gamma(t_0)} \cup \cdots \cup V_{\gamma(t_m)} \quad \text{con} \quad V_{\gamma(t_i)} \cap V_{\gamma(t_{i+1})} \neq \emptyset$$

siendo $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_m = b$, $0 \leq i \leq m-1$.

Como f es constante en cada $V_{\gamma(t_i)}$, digamos que $f\big(V_{\gamma(t_i)}\big) = a_i$, y ocurre $V_{\gamma(t_i)} \cap V_{\gamma(t_{i+1})} \neq \emptyset$, entonces $a_i = a_{i+1}$, $0 \leq i \leq m-1$. En definitiva, hemos llegado a que $f(p) = f(q)$, probando el siguiente resultado <u>global</u>

Proposición 31. *Si una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ cumple $df_p = 0$ para todo $p \in S$ y la superficie regular S es conexa entonces f es constante.*