Cuestiones del tema 3 (segunda parte)

1.- Si S es una superficie regular y $h : S \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable ¿qué tiene que cumplir p_0 respecto de f para que podamos hablar del hessiano de f en p_0?

2.- Considera una superficie regular S y $h : S \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(p) = |x_0 - p|^2$, $p \in S$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ fijo. Si $p_0 \in S$ es un punto crítico de h ¿qué relación hay entre $Hess_{p_0} h$ y II_{p_0}?

3.- Si p_0 es un punto elíptico de S, ¿podemos asegurar algo respecto a la posición relativa de $p_0 + T_{p_0}S$ y la totalidad de la superficie S?

4.- ¿Es posible encontrar un movimiento rígido que lleve una esfera de radio 1 en una esfera de radio 2?

5.- Encuentra un ejemplo no trivial de isometría del elipsoide $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1\right\}$ en sí mismo.

6.- Encuentra dos superficies regulares $S, \tilde{S}$ y una isometría local $f : S \to \tilde{S}$ que no sea isometría (global).

7.- Considera una superficie regular S y sea $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización local suya ¿puede ser $\bar{x} : U \to \bar{x}(U)$ una isometría? Si la respuesta fuese afirmativa, ¿qué nos dice este hecho del abierto $\bar{x}(U)$ de S?

8.- Da alguna razón para justificar que los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^{k} asociados a una parametrización local $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ cumplen $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$ ¿Qué indica exactamente cada índice de Γ_{ij}^{k}?

9.- ¿Es cierto que si conozco Γ_{12}^{1}, Γ_{12}^{2} y f, conozco $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v}$?

10.- ¿Es cierto que tener la parte normal de $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2}$ equivale a tener el coeficiente de la segunda forma fundamental e?

11.- ¿Por qué N_u y N_v no dependen de N?

12.- Si sabemos que $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} = g N$ ¿da ésto alguna información de los símbolos de Christoffel Γ_{22}^{1} y Γ_{22}^{2}?

13.- Explíquese cómo se obtienen $\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} \\ \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 G = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \end{cases}$

14.- ¿Cómo se prueba que si los coeficientes de la primera forma fundamental son constantes entonces $\Gamma_{ij}^k = 0$?

15.- ¿Como se prueba que si $\Gamma_{ij}^k = 0$, sobre U conexo, entonces los coeficientes de la primera forma fundamental son constantes?

16.- ¿Es cierto que los símbolos de Christoffel sólo dependen de los coeficientes de la primera forma fundamental y de sus derivadas parciales? Si la respuesta es afirmativa ¿que tiene de sorprendente esto?

17.- ¿Por qué el teorema Egregium de Gauss no afirma nada de la curvatura media?

18.- La afirmación recíproca al teorema Egregium de Gauss diría que si $\varphi : S \to \tilde{S}$ es una aplicación diferenciable que cumpla $K(p) = \tilde{K}(\varphi(p))$ para todo $p \in S$ entonces φ es una isometría ¿piensas que es falsa? En caso afirmativo, construye un contraejemplo.

19.- Para la deducción del teorema Egregium hemos usado la ecuación de Gauss $K = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2\right)$ ¿Podíamos haber usado esta otra ecuación, deducida de manera similar a la anterior, $KF = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1$?

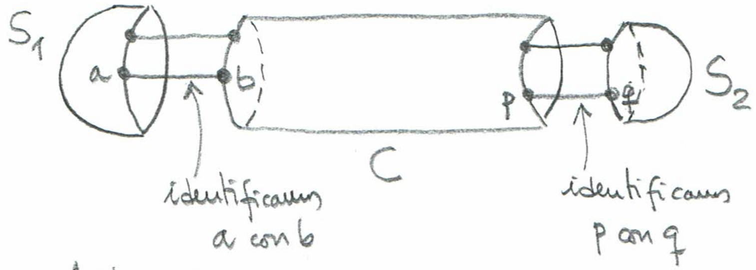
20.- ¿Conoces un ejemplo de una parametrización local $\bar{x}$ de una superficie regular de manera que los correspondientes símbolos de Christoffel no sean todos cero pero $K=0$?

21.- ¿Existe alguna superficie regular S que admita una parametrización local $\bar{x}$ de manera que $E=1$, $G=2$, $F=0$ y $e=g=1$, $f=0$?

22.- ¿Existe alguna superficie regular compacta con curvatura de Gauss que cumpla $K<0$? ¿Y con $K \leq 0$?

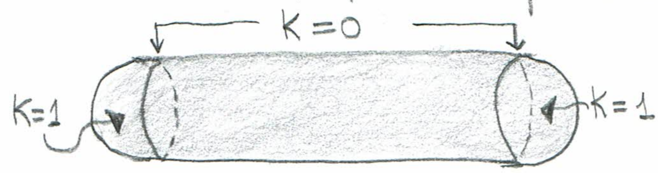
23.- ¿Existe alguna superficie regular compacta con $H=0$?

24.- Consideremos $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1,\ 0\leq z\leq 1\}$, $S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1,\ z\leq 0\}$, $S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ z\geq 1\}$



Pegamos S_1, C y S_2 identificando de forma natural los puntos de los bordes.

Así, obtenemos una superficie compacta S



Sabemos que $K: S\rightarrow\mathbb{R}$ es continua, sin embargo en cada uno de los casquetes abiertos ocurre $K=1$ y en el cilindro cerrado C tenemos $K=0$ ¿Donde está el problema? ¿Es incorrecto el razonamiento? ¿Es correcto el razonamiento pero incorrecta su interpretación?

25.- Explica la razón por la cual si tenemos parametrizaciones locales $\bar{x}: U\subset\mathbb{R}^2\rightarrow S$, $\tilde{x}: U\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\tilde{S}$ tales que $E=\tilde{E}$, $F=\tilde{F}$ y $G=\tilde{G}$, entonces la aplicación de $\bar{x}(U)$ en $\tilde{x}(U)$ que lleva cada punto p de $\bar{x}(U)$ de coordenadas (u,v) según $\bar{x}$ en el punto de $\tilde{x}(U)$ de coordenadas (u,v) según $\tilde{x}$ es una isometría.