Curvas y Superficies
Curso 2022-23

Tema 1. Curvas en el plano y en el espacio

1. Curvas parametrizadas. Curvas regulares. Longitud de arco

Representaremos por $\mathbb{R}^3$ el espacio afín euclídeo tridimensional[1]. Un elemento $p \in \mathbb{R}^3$ es un punto identificado con el vector libre representado por el vector de origen $0 \in \mathbb{R}^3$ y extremo p.

Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ escribiremos su producto escalar como

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$

y por

$$|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

la longitud del vector u.

Una función f definida en un intervalo abierto I de la recta real $\mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{R}$ se dirá diferenciable cuando tenga en cada punto de I derivadas de todos los órdenes; es decir, cuando es de clase C^∞ [2]. Cuando f está definida en un intervalo J de $\mathbb{R}$ que no es abierto (con interior no vacío), diremos que es diferenciable cuando exista un intervalo abierto I con $J \subset I$ y una función diferenciable $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ de manera que

$$\tilde{f}_{|J} = f.$$

Es decir, cuando f es la restricción a J de una función diferenciable definida en un intervalo abierto que contiene a J.

Definición 1. *Una aplicación $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, cuyas componentes*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

$t \in I$, son funciones diferenciables, se dirá una curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$. [3] *A la imagen o traza de α la notaremos por $\alpha(I)$. Llamamos a*

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

el vector velocidad de α en t y a

$$\alpha''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$$

el vector aceleración de α en t.

---

[1] Análogamente, $\mathbb{R}^2$ será el plano euclídeo usual

[2] Obviamente, hay conceptos de los que siguen que son válidos para clase C^k, para algún $k \geq 1$. No obstante, optamos por unificar suponiendo siempre C^∞

[3] Análogamente se define una curva parametrizada en $\mathbb{R}^2$.

Definición 2. *Se dice que una curva parametrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es regular cuando $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Una curva parametrizada regular α tiene bien definida la recta tangente en cada $t_0 \in I$. A saber*

$$R_{\alpha(t_0)} = \left\{ \alpha(t_0) + \lambda\, \alpha'(t_0) \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definición 3. *Dada una curva parametrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, se define su longitud desde $t = a$ hasta $t = b$, $a, b \in I$, $a < b$, como*

$$L_a^b(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

Si $\phi : J \to I$ es un difeomorfismo, consideramos

$$\beta := \alpha \circ \phi : J \to \mathbb{R}^3,$$

es decir, $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$, para todo $s \in J$, que es una curva parametrizada con

$$\beta(J) = \alpha(I).$$

Llamaremos a β una reparametrización de α. Como, según la regla de la cadena, se cumple

$$\underbrace{\beta'(s)}_{\text{vector}} = \underbrace{\alpha'(\phi(s))}_{\text{vector}}\ \underbrace{\phi'(s)}_{\text{escalar}},$$

y $\phi'(s) \neq 0$, para todo $s \in J$, tenemos que

β es regular si y sólo si α es regular.

Proposición 4. *La longitud de una curva parametrizada es invariante por reparametrizaciones.*

Demostración. Sean $c, d \in J$, $c < d$. Con las notaciones anteriores,

$$\int_c^d |\beta'(s)| ds = \int_c^d |\alpha'(\phi(s))|\, |\phi'(s)| ds = \epsilon \int_c^d |\alpha'(\phi(s))| \phi'(s) ds,$$

donde $\epsilon = 1$ si $\phi' > 0$ y $\epsilon = -1$ si $\phi' < 0$. Por tanto,

$$L_c^d(\beta) = \epsilon \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} |\alpha'(t)| dt,$$

por el teorema de cambio de variable. Es decir,

$$L_c^d(\beta) = L_a^b(\alpha),$$

donde $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$ cuando $\phi' > 0$ y $\phi(c) = b$, $\phi(d) = a$ cuando $\phi' < 0$.

□

En en caso en que la curva parametrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ sea regular, existe una familia de reparametrizaciones suyas especial. En efecto, dado $t_0 \in I$, considero la función

$$s_{t_0} : I \to \mathbb{R}, \quad s_{t_0}(t) := \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)| dt.$$

Tenemos

$$s_{t_0}(t_0) = 0, \quad \overbrace{\frac{ds_{t_0}}{dt}(t) = |\alpha'(t)| > 0}^{\text{no depende de } t_0},$$

para todo $t \in I$. Por tanto, s es un difeomorfismo de I en un intervalo J_{t_0} con $0 \in J_{t_0}$. A la curva parametrizada

$$\beta_{t_0} := \alpha \circ \phi_{t_0} : J_{t_0} \to \mathbb{R}^3,$$

donde $\phi_{t_0}^{-1} = s_{t_0}$, se le llama la reparametrización de α por el parámetro longitud de arco con base t_0.

Obsérvese que

$$s_{t_1} = s_{t_0} + k,$$

con $k = -s_{t_0}(t_1) \in \mathbb{R}$, para cualesquiera $t_0, t_1 \in I$. Por tanto,

$$J_{t_1} = J_{t_0} + k.$$

Así,

$$\phi_{t_1}(s + k) = \phi_{t_0}(s),$$

para todo $s \in J_{t_0}$. Por tanto

$$\beta_{t_1}(s + k) = \beta_{t_0}(s),$$

para todo $s \in J_{t_0}$. De manera que β_{t_1} y β_{t_0} son esencialmente la misma curva. Por eso a $\beta \equiv \beta_{t_0}$ se le llama simplemente la reparametrización por la longitud por el arco de α.

Teniendo en cuenta que

$$\beta'(s) = \alpha'(\phi(s)) \frac{d\phi}{ds} = \alpha'(\phi(s)) \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \alpha'(\phi(s)) \frac{1}{|\alpha'(\phi(s))|},$$

se tiene

$$|\beta'(s)| = 1, \text{ para todo } s, \text{y por lo tanto } L_{s_0}^{s}(\beta) = s - s_0.$$

Definición 5. *Se dice que una curva está parametrizada por el parámetro arco cuando su vector velocidad en cada punto es unitario. Por tanto es necesariamente regular y su longitud entre los valores a y b, $a < b$, de su parámetro es precisamente $b - a$.*

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido entonces

$$\beta := F \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^3$$

es también una curva parametrizada. Se dice que β y α son congruentes (de hecho F mueve rígidamente $\alpha(I)$ en $\beta(I)$) es decir, esencialmente la misma curva.

Precisamente, el objetivo fundamental del estudio de las curvas parametrizadas es decidir cuando dos curvas parametrizadas dadas α y β son o no congruentes basándose en el estudio de "invariantes geométricos" que más adelante introduciremos (funciones curvatura y torsión); es decir, saber cuando existe tal F, sin calcularla explícitamente y saber cuando no existe ningún movimiento rígido F que cumpla lo anterior.

Ejemplo 6.

1. La curva $\alpha(t) = (x_0, y_0, z_0)$ para todo t; es decir, α es constante, es trivialmente una curva parametrizada totalmente degenerada. α es constante si sólo si su vector velocidad es nulo en todo punto.

2. Si tenemos una recta afín R de $\mathbb{R}^3$ que pasa por $p_0 = (a, b, c)$ con dirección definida por el vector (no nulo) $v = (v_1, v_2, v_3)$ descrita en ecuaciones paramétricas, éstas nos dan de manera natural una curva parametrizada

$$\alpha(t) = (a + t\,v_1, b + t\,v_2, c + t\,v_3),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Notemos que $\alpha(\mathbb{R}) = R$ y $\alpha'(t) = v \neq 0$, para todo t. Así, α es regular y la recta tangente a α en t_0 es la propia R para todo t_0. Haciendo $t = \dfrac{s}{|v|}$ tenemos la reparametrización por el arco $\beta(s) = \alpha\Big(\dfrac{s}{|v|}\Big)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

3. Partimos de una función diferenciable $f : I \to \mathbb{R}$ y definimos

$$\alpha_f(t) = (t, f(t)),$$

para todo $t \in I$. α_f es una curva parametrizada con

$$\alpha_f(I) = \underbrace{\{\,(t, f(t))\ :\ t \in I\,\}}_{\text{grafo de } f},$$

el grafo de f en $\mathbb{R}^2$; más todavía, α_f considerada de I en el grafo de f es un homeomorfismo. Además $\alpha_f'(t) = (1, f'(t))$, para todo t, lo que prueba que α_f es regular. La recta tangente a α_f en t_0 es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(t_0, f(t_0))$. Finalmente, notemos que para $a, b \in I$, $a < b$, ocurre

$$L_a^b(\alpha_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$

4. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (a + r\cos t, b + r\,\mathrm{sen} t),$$

donde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ fijos. Tenemos que $\alpha(\mathbb{R})$ es la circunferencia de centro (a, b) y radio r. Como $\alpha'(t) = (-r\,\mathrm{sen} t, r\cos t)$ y seno, coseno no se pueden anular simultáneamente, tenemos que α es regular. Si hacemos el cambio $t = \frac{s}{r}$ obtenemos la reparametrización por el arco

$$\beta(s) = \Big(a + r\cos\Big(\frac{s}{r}\Big), b + r\,\mathrm{sen}\Big(\frac{s}{r}\Big) \Big).$$

Además ocurre

$$L_0^{2\pi}(\alpha) = r\int_0^{2\pi} dt = 2\pi r.$$

5. ¿ Qué diferencia hay entre $\alpha(s) = (\cos s, \mathrm{sen} s)$, $s \in \mathbb{R}$, y $\gamma(t) = (\cos(2t), \mathrm{sen}(2t))$, $t \in \mathbb{R}$?

   Se cumple $\alpha(\mathbb{R}) = \gamma(\mathbb{R})$ la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1. α es la reparametrización por el arco de γ con base $t_0 = 0$. Como $\gamma(t) = \alpha(2t)$, para todo t, tenemos $\gamma'(t) = 2\,\alpha'(2t)$ y por tanto

   $$|\gamma'(t)| = 2\,|\alpha'(2t)|.$$

   La velocidad escalar con que γ recorre la circunferencia es el doble de la correspondiente a α. Notemos que ambas recorren la circunferencia en sentido contrario al de avance de las agujas de un reloj.

6. ¿ Qué diferencia hay entre $\alpha(s) = (\cos s, \mathrm{sen} s)$, $s \in \mathbb{R}$, y $\beta(t) = (\mathrm{sen} t, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$?

   Se cumple $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R})$ la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1. Como $\beta(t) = \alpha\big(\frac{\pi}{2} - t\big)$ tenemos

   $$\beta'(t) = -\alpha'\big(\frac{\pi}{2} - t\big),$$

   para todo $t \in \mathbb{R}$. Mientras que α recorre la circunferencia en sentido contrario al de avance de las agujas de un reloj (sentido anti horario), β recorre esa misma circunferencia en el mismo sentido que el de avance de las agujas de un reloj (sentido horario). Notemos que ambas curvas están parametrizadas por el arco.

7. En general, describir una “figura” de $\mathbb{R}^2$ (o de $\mathbb{R}^3$) como la imagen de una curva parametrizada no es fácil y, cuando se puede hacer, no es única la forma de hacerlo. Llamaremos a este proceso, una parametrización de la figura considerada.

   Por ejemplo, si tenemos una elipse en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$

   $$\frac{(x-a)^2}{r_1^2} + \frac{(y-b)^2}{r_2^2} = 1,$$

   donde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $r_1 > 0, r_2 > 0$, inspirándonos en el ejemplo 5, reescribimos la ecuación como

   $$\Big(\frac{x-a}{r_1}\Big)^2 + \Big(\frac{y-b}{r_2}\Big)^2 = 1.$$

   Con lo cual proponemos $\alpha(t) = (a + r_1\cos t, b + r_2\,\mathrm{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

8. Consideremos la curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t)$, la curva parametrizada es regular. Sin embargo $\alpha(2) = (0,0) = \alpha(-2)$, y no hay otra pareja de reales distintos del dominio donde α tome un mismo valor. De manera que α no es globlamente inyectiva. Sin embargo el comportamiento local es distinto. En general,

Si una curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, con $n = 2$ o 3, es regular, como consecuencia del teorema de la función inversa, para cada $t_0 \in I$ existe un $\epsilon = \epsilon(t_0) > 0$ tal que $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\subset I$ y

$$\gamma_{|]t_0-\epsilon,t_0+\epsilon[} \text{ es inyectiva.}$$

En efecto, si ocurre $x'(t_0) \neq 0$ construimos la aplicación

$$F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad F(t,u,v) = (x(t), y(t) + u, z(t) + v),$$

que es diferenciable. Su matriz jacobiana en $(t_0, 0, 0)$ es invertible ya que su determinante es $x'(t_0) \neq 0$. Según el teorema de la función inversa, existe un $\epsilon > 0$, un entorno abierto U del punto $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2$ y un entorno abierto V del punto $F(t_0,0,0) = \alpha(t_0)$ en $\mathbb{R}^3$ de manera que F lleva biyectivamente $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\times U$ en V.

Si $t_1, t_2 \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ y suponemos que $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, ocurre $F(t_1,0,0) = F(t_2,0,0)$ y por tanto $t_1 = t_2$.

Hay que hacer notar que esta propiedad que acabamos de ver para cada curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $n = 2$ o 3, no quiere decir que $\alpha(I)$, dotado de la topología inducida, sea un espacio topológico localmente homeomorfo a la recta real $\mathbb{R}$ [4]

En efecto, $(0,0) \in \alpha(\mathbb{R})$. Un entorno abierto en la topología inducida se obtiene intersecando un entorno abierto del punto $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2$ con $\alpha(\mathbb{R})$. Si tal entorno abierto existe, también cumplirá igual propiedad cualquier bola abierta centrada en $(0,0)$ contenida en él. Notemos que la intersección de tal bola con $\alpha(\mathbb{R})$ tiene la propiedad que al quitarle el punto $(0,0)$ tiene 3 o 4 componentes conexas. Esto impide que ese punto tenga un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$.

9. Consideremos la curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$ (no contenida en un plano) [5]

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\, t, b\,t),$$

[4] En general, un espacio topológico M se dice localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ cuando para cada punto $p \in M$ existe un entorno abierto U de p y un homeomorfismo $\varphi : U \to O$, donde O es un abierto de $\mathbb{R}^m$.

[5] alabeada en lenguaje clásico.

donde $a > 0$, $b > 0$ son constantes, y $t \in \mathbb{R}$. Como $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2+b^2} > 0$ en todo t, α es regular. Además,

$$L_0^{2\pi}(\alpha) = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

Si hacemos el cambio $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ obtenemos la reparametrización por el arco

$$\beta(t) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\,\text{sen}\,\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b\,s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

- La proyección sobre el plano $z=0$ parametriza la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ en dicho plano.
- El parámetro t es el ángulo orientado entre $(1,0,0)$ y $(a\cos t, a\,\text{sen}\,t, 0)$ donde el plano $z=0$ tiene la orientación inducida por la base $\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$.
- $\alpha(\mathbb{R})$ está contenida en el cilindro circular recto $x^2+y^2=a^2$.
- $\text{d}(\alpha(t),\alpha(t+2\pi)) = 2b\pi$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (lo que implica que $\alpha(\mathbb{R})$ no está acotada).
- $\cos\measuredangle(\alpha'(t), e_3) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

La curva α se llama hélice circular de radio a y paso $2b\pi$.

2. Teoría local de curvas regulares planas: curvatura y diedro de Frenet.

Vamos a definir la función curvatura de una curva parametrizada regular en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

Fijamos la orientación en $\mathbb{R}^2$ definida por la base usual $B_u = \big((1,0),(0,1)\big)$ y sea J la rotación (vectorial) de ángulo $\dfrac{\pi}{2}$ Según esa orientación; es decir,

$$J(x,y) = (-y,x),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Notemos que si $v \in \mathbb{R}^2$, $|v|=1$, entonces $\big(v, J(v)\big)$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ que también representa la orientación escogida (se dice también orientada positivamente).

Dada una curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ consideremos la familia de bases ortonormales orientadas positivamente

$$B_{\alpha(t)} = \big(e_1(t), e_2(t)\big),$$

donde

$$e_1(t) := \frac{1}{|\alpha'(t)|}\,\alpha'(t), \quad e_2(t) := Je_1(t),$$

siendo $t \in I$ cualquiera.

Calculemos $e_1'(t)$. Como $\langle e_1(t), e_1(t)\rangle = 1$ tenemos

$$0 = \frac{d}{dt}\langle e_1(t), e_1(t)\rangle = 2\,\langle e_1'(t), e_1(t)\rangle,$$

lo cual quiere decir que

$$e_1'(t) = a_{12}(t)e_2(t),$$

con

$$\underbrace{a_{12}(t) = \langle e_1'(t), e_2(t)\rangle}_{\text{función diferenciable}}.$$

Análogamente,

$$e_2'(t) = a_{21}(t)e_1(t),$$

con

$$\underbrace{a_{21}(t) = \langle e_2'(t), e_1(t)\rangle}_{\text{función diferenciable}}.$$

Derivando en $\langle e_1(t), e_2(t)\rangle = 0$ obtenemos

$$\underbrace{\langle e_1'(t), e_2(t)\rangle}_{a_{12}(t)} + \underbrace{\langle e_1(t), e_2'(t)\rangle}_{a_{21}(t)} = 0.$$

Así podemos escribir

$$\begin{array}{rcr} e_1'(t) & = & a_{12}(t)e_2(t) \\ e_2'(t) & = & -a_{12}(t)e_1(t) \qquad\qquad \end{array}$$

que se llaman las ecuaciones de Frenet de α.

Llamamos a

$$\kappa(t) := \frac{a_{12}(t)}{|\alpha'(t)|}$$

la curvatura de la curva regular α en t. Nótese que si α está parametrizada por el arco entonces la fórmula anterior es simplemente $\kappa(t) = a_{12}(t)$.

Para una curva parametrizada regular $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ cualquiera, teniendo en cuenta que

$$a_{12}(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|^2}\,\langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle,$$

resulta

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|^3}\,\langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}\,.$$

De cualquiera de las expresiones de la anteriores se deduce que la función curvatura

$$\kappa : I \to \mathbb{R}$$

es diferenciable.

Aparecen de manera natural las siguientes cuestiones:

• ¿ Cómo se comportan el diedro de Frenet y la curvatura frente a reparametrizaciones?

• ¿ Cómo se comporta el diedro de Frenet y la curvatura frente a movimientos rígidos?

• ¿ Está de acuerdo el nombre “curvatura” con lo que nosotros entendemos como tal intuitivamente ?

Respecto a la primera pregunta, consideremos una curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ y sea $\phi : J \to I$ un difeomorfismo. Calculemos primero el diedro de Frenet

$$\tilde{e}_1(s) := \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|} = \frac{\alpha'(\phi(s))\phi'(s)}{|\alpha'(\phi(s))||\phi'(s)|} = \epsilon\, e_1(\phi(s)),$$

$$\tilde{e}_2(s) := J\tilde{e}_1(s) = \epsilon\, Je_1(\phi(s)) = \epsilon\, e_2(\phi(s)),$$

donde $\epsilon = 1$ cuando $\phi' > 0$ y $\epsilon = -1$ si $\phi' < 0$. Así,

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1'(s) &= \epsilon\, e_1'(\phi(s))\, \phi'(s) = \epsilon\, a_{12}(\phi(s))\, \phi'(s)\, e_2(\phi(s)) \\ &= a_{12}(\phi(s))\, \phi'(s)\, \tilde{e}_2(s),\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\tilde{a}_{12}(s) = a_{12}(\phi(s))\, \phi'(s).$$

Análogamente,

$$\tilde{e}_2'(s) = -a_{12}(\phi(s))\, \phi'(s)\, \tilde{e}_1(s).$$

Por tanto,

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{\tilde{a}_{12}(s)}{|\beta'(s)|} = \frac{a_{12}(\phi(s))\, \phi'(s)}{|\alpha'(\phi(s))||\phi'(s)|} = \epsilon\, \kappa(\phi(s)),$$

para todo $s \in J$. Hemos visto

Si un cambio de parámetro ϕ cumple $\phi' > 0$ entonces

$$\tilde{\kappa}(s) = \kappa(\phi(s)),$$

para todo $s \in J$. Mientras que si cumple $\phi' < 0$ entonces

$$\tilde{\kappa}(s) = -\kappa(\phi(s)),$$

para todo $s \in J$. De alguna manera la “invarianza” y la “anti-invarianza” anteriores nos dicen que la curvatura de una curva parametrizada regular α hacen mención a su imagen $\alpha(I)$.

Intuitivamente, uno piensa que tener una curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ con todas sus reparametrizaciones equivale a tener $\alpha(I)$. En este sentido $|\kappa(t)|$, parece ser una propiedad de $\alpha(t)$.

Si sólo consideramos reparametrizaciones de α que sean monótonas crecientes (resp. monótona decrecientes), $\kappa(t)$, parece ser una propiedad de $\alpha(t)$ cuando el sentido de recorrido de $\alpha(I)$ con la reparametrización es el mismo (resp. es el opuesto) que el de α.

Vamos ahora con la segunda cuestión. Partimos de una curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ y sea F un movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$. La curva $\beta := F \circ \alpha$ es también regular y congruente con α. Calculemos su diedro de Frenet en términos del diedro de Frenet de α.

$$\underline{\tilde{e}_1(t)} := \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{\vec{F}\alpha'(t)}{|\vec{F}\alpha'(t)|} = \vec{F}\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \underline{\vec{F}e_1(t)},$$

$$\underline{\tilde{e}_2(t)} := J\tilde{e}_1(t) = J\vec{F}e_1(t) = \epsilon\,\vec{F}Je_1(t) = \underline{\epsilon\,\vec{F}e_2(t)},$$

donde $\epsilon = 1$ si F es directo y $\epsilon = -1$ si F es inverso. En efecto, si F es directo, entonces $\vec{F}$ es una rotación vectorial de un cierto ángulo θ. En efecto, como J es la rotación vectorial de $\dfrac{\pi}{2}$, resulta que $J\vec{F}$ es la rotación de $\theta + \dfrac{\pi}{2}$, y por tanto

$$J \circ \vec{F} = \vec{F} \circ J.$$

Si el movimiento rígido F es inverso, $\vec{F}$ es una simetría vectorial respecto a un subespacio L de dimensión 1 de $\mathbb{R}^2$. Podemos tomar una base ortonormal del tipo $(v, J(v))$ donde $v \in L$ es unitario. Tenemos

$$J\vec{F}(v) = J(v), \quad J\vec{F}(Jv) = J(-J(v)) = -J^2(v) = v,$$

mientras que

$$\vec{F}J(v) = -J(v), \quad \vec{F}J(J(v)) = -\vec{F}(v) = -v.$$

Por tanto, en este caso tenemos

$$J \circ \vec{F} = -\vec{F} \circ J.$$

Así, podemos escribir

$$\underline{\tilde{e}_1'(t)} = [\vec{F}e_1(t)]' = \vec{F}e_1'(t) = a_{12}(t)\vec{F}e_2(t) = \underline{\epsilon\,a_{12}(t)\tilde{e}_2(t)},$$

$$\underline{\tilde{e}_2'(t)} = \epsilon\,[\vec{F}e_2(t)]' = \epsilon\,\vec{F}e_2'(t) = -\epsilon\,a_{12}(t)\vec{F}e_1(t) = \underline{-\epsilon\,a_{12}(t)\tilde{e}_1(t)}.$$

Por tanto,

$$\tilde{a}_{12}(t) = \epsilon\,a_{12}(t).$$

Así,

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{\tilde{a}_{12}(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{\epsilon\,a_{12}(t)}{|\alpha'(t)|} = \epsilon\,\kappa(t),$$

para todo t.

Resumiendo, dada una curva parametrizada regular α, si F es un movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$, la curva $F\circ\alpha$ tiene la misma (resp. opuesta) curvatura en cada t que α cuando F es directo (resp. cuando F es inverso). Obsérvese que esta propiedad nos da una obstrucción a la existencia de un movimiento rígido F; en efecto, imaginemos que tenemos dos curvas parametrizadas por el arco $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ de manera que existe un $t_1 \in I$ tal que $|\kappa_\alpha(t_1)| \neq |\kappa_\beta(t_1)|$. Entonces, no existe un movimiento rígido del plano F de manera que $F \circ \alpha = \beta$.

Entramos en la tercera cuestión.

- Si una curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ admite una reparametrización $\beta = \alpha \circ \phi$ de manera que

$$\beta(s) = p_0 + (s - s_0)v,$$

donde $p_0 \in \mathbb{R}^2$, $s_0 \in \mathbb{R}$ y $v \neq 0$ es un vector de $\mathbb{R}^2$,[6] entonces

$$\kappa_\alpha = 0.$$

Esto se sigue de que $\kappa_\beta(s) = \epsilon\, \kappa_\alpha(\phi(s))$ para todo s, con $\epsilon = 1$ o $\epsilon = -1$ y que claramente $\beta'' = 0$, lo que implica que $\kappa_\beta = 0$.

Recíprocamente, si α tiene curvatura cero, tras una reparametrización por el arco, la curva obtenida β tiene $\kappa_\beta = 0$, lo cual, por la primera ecuación de Frenet para β, quiere decir $\beta'' = 0$.

- Sea ahora la curva regular $\alpha_f : I \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha_f(t) = (t, f(t))$, donde $f : I \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Tenemos

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}} = \frac{f''(t)}{\left(1 + f'(t)^2\right)^{3/2}}\,.$$

Así, el signo de $\kappa(t)$ es el mismo que el de $f''(t)$. Donde f es cóncava ($f''(t) < 0$) la curvatura es negativa; donde f es convexa ($f''(t) > 0$) la curvatura es positiva.

Notemos que

$$\kappa = 0 \text{ si y sólo si } f(t) = at + b, \text{ para } a, b \in \mathbb{R}.$$

- Sean $\alpha, \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\alpha(t) = (a + r\cos t, b + r\,\mathrm{sen} t),\ \ \gamma(s) = (a + r\,\mathrm{sen} s, b + r\cos s)$$

donde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, fijos. Tenemos que $\alpha(\mathbb{R}) = \gamma(\mathbb{R})$ es la circunferencia de centro (a, b) y radio r (aunque la recorren en sentido contrario). Como

$$\alpha'(t) = (-r\,\mathrm{sen} t, r\cos t),\ \alpha''(t) = (-r\ \cos t, -r\,\mathrm{sen} t) = J\alpha'(t),$$

$$\gamma'(s) = (r\cos s, -r\,\mathrm{sen} s),\ \gamma''(t) = (-r\,\mathrm{sen} s, -r\ \cos s) = -J\gamma'(s)$$

resulta

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|^3}\,\langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle = \frac{1}{r},$$

$$\kappa_\gamma(s) = \frac{1}{|\gamma'(s)|^3}\,\langle \gamma''(s), J\gamma'(s)\rangle = -\frac{1}{r}\,.$$

[6] Por ejemplo, $\alpha(t) = (1 + e^t, 2 - e^t)$

Proposición 7. *Dada una curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, su curvatura cumple*

$$|\kappa| = \frac{1}{r}, \qquad r > 0,$$

si, y sólo si, existe $p_0 \in \mathbb{R}^2$ de manera que $|\alpha(t) - p_0| = r$ para todo $r \in I$.

Demostración. Tras un cambio de parámetro, si fuera necesario, suponemos $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$. La primera ecuación de Frenet se escribe

$$\alpha''(t) = \epsilon \frac{1}{r} J\alpha'(t),$$

con $\epsilon = 1$ o $\epsilon = -1$, por tanto

$$\frac{d}{dt}\big(\alpha(t) + \epsilon\, r\, J\alpha'(t)\big) = 0,$$

para todo $t \in I$. De manera que

$$\alpha(t) + \epsilon\, r\, J\alpha'(t) = p_0,$$

para todo $t \in I$, donde $p_0 \in \mathbb{R}^2$ fijo. Lo que implica

$$|\alpha(t) - p_0| = |-\epsilon\, r J\alpha'(t)| = r\,.$$

Recíprocamente, si ocurre $|\alpha(t) - p_0| = r$ entonces

$$0 = \frac{d}{dt}\langle \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0\rangle = 2\,\langle \alpha'(t), \alpha(t) - p_0\rangle,$$

lo que implica

$$\alpha(t) - p_0 = \lambda\, J\alpha'(t), \quad \text{con} \quad \lambda = \epsilon\, r\,.$$

Derivando y aplicando J a ambos miembros de esta última fórmula, tenemos

$$\alpha''(t) = \frac{-1}{\lambda} J\alpha'(t),$$

lo que directamente nos dice

$$|\kappa(t)| = \frac{1}{|\lambda|} = \frac{1}{r}\,.$$

□

- Consideremos ahora $\alpha(t) = (a + r_1 \cos t, b + r_2\, \text{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$, curva parametrizada regular con $\alpha(\mathbb{R})$ una elipse centrada en (a, b) y con semiejes $r_1 > r_2 (> 0)$. Tenemos

$$\alpha'(t) = (-r_1\, \text{sen} t, r_2 \cos t), \quad \alpha''(t) = (-r_1 \cos t, -r_2\, \text{sen} t) \text{ y}$$

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}} = \frac{r_1 r_2}{\left(r_1^2 \operatorname{sen}^2 t + r_2^2 \cos^2 t\right)^{3/2}}\,.$$

Como

$$\kappa'(t) = -\frac{3r_1 r_2 (r_1^2 - r_2^2) \operatorname{sen} t \cos t}{\left(r_1^2 \operatorname{sen}^2 t + r_2^2 \cos^2 t\right)^{5/2}}\,,$$

ocurre $\kappa'(t) = 0$ si y sólo si $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Además

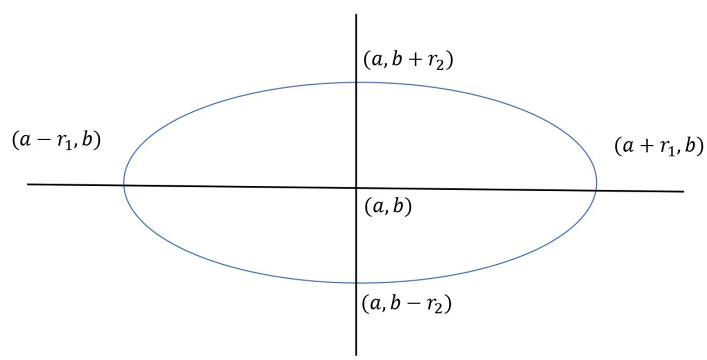
$$\kappa'(t) < 0 \text{ si } 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ o } \pi < t < \frac{3\pi}{2}\,,$$
$$\kappa'(t) > 0 \text{ si } \frac{\pi}{2} < t < \pi \text{ o } \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi\,,$$

$$\kappa \text{ es estrictamente decreciente en } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ y } \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[,$$

$$\kappa \text{ es estrictamente creciente en } \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\text{ y } \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[.$$

Por tanto $\kappa(0) = \kappa(\pi) = \frac{r_1}{r_2^2}$ valor máximo (global) y

$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \kappa\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{r_2}{r_1^2}$ valor mínimo (global).



Proposición 8. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada con $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in I$. Consideremos un vector v con $|v| = 1$ y llamemos $\theta(t)$ al ángulo orientado, Según la orientación usual de $\mathbb{R}^2$, entre v y $\alpha'(t)$ (en ese orden), para todo $t \in I$. Entonces*

$$\kappa(t) = \theta'(t),$$

para todo $t \in I$.[7]

[7]Es decir, la curvatura de α (curva parametrizada por el arco) en t es la rapidez de cambio de dirección de su velocidad respecto a la dirección fija definida por v.

Demostración. El ángulo orientado $\theta(t) \in [0, 2\pi[$ y está definido por

$$\cos\theta(t) = \langle v, \alpha'(t)\rangle, \quad \mathbf{sen}\,\theta(t) = \mathbf{det}_{B_u}(v, \alpha'(t)),$$

donde $\det_{B_u}(v, \alpha'(t)) = \det\begin{pmatrix} v_1 & x'(t) \\ v_2 & y'(t)\end{pmatrix} = -\langle v, J\alpha'(t)\rangle$.

Derivando en las dos ecuaciones anteriores, tenemos

$$-\theta'(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t) = \langle v, \alpha''(t)\rangle\,,$$

$$\theta'(t)\cos\theta(t) = -\langle v, J\alpha''(t)\rangle\,.$$

Aplicando ahora la ecuación de Frenet $\alpha''(t) = \kappa(t)J\alpha'(t)$ en el miembro derecho de estas fórmulas, obtenemos

$$-\theta'(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t) = -\kappa(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\,,$$

$$\theta'(t)\cos\theta(t) = \kappa(t)\cos\theta(t).$$

En todo t tal que $\theta(t) \neq 0, \pi$ ocurre $\mathrm{sen}\,\theta(t) \neq 0$, y por lo tanto, la primera fórmula nos dice $\kappa(t) = \theta'(t)$. Si $t_0 \in I$ es tal que $\theta(t_0) = 0$ o $\theta(t_0) = \pi$ entonces $\cos\theta(t_0) = 1$ o $\cos\theta(t_0) = -1$, con lo que la segunda fórmula nos dice $\kappa(t_0) = \theta'(t_0)$, lo que concluye la prueba. □

Teorema 9. *Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ curvas parametrizadas por la longitud de arco. Si ocurre*

$$\kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(t),$$

para todo $t \in I$, entonces existe un único movimiento rígido directo F del plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ de manera que

$$\beta = F \circ \alpha\,.$$

Demostración. Fijamos $t_0 \in I$ y sean los puntos $\alpha(t_0)$, $\beta(t_0)$ del plano euclídeo y las bases ortonormales positivas

$$B_{\alpha(t_0)} = (e_1(t_0), e_2(t_0)), \quad B_{\beta(t_0)} = (\tilde{e}_1(t_0), \tilde{e}_2(t_0))$$

del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^2$. Recordemos que, Según nuestra hipótesis, $e_1(t_0) = \alpha'(t_0)$, $e_2(t_0) = J\alpha'(t_0)$, $\tilde{e}_1(t_0) = \beta'(t_0)$ y $\tilde{e}_2(t_0) = J\beta'(t_0)$.

Dados los sistemas de referencia ortonormales

$$R = \{\alpha(t_0), B_{\alpha(t_0)}\} \quad \widetilde{R} = \{\beta(t_0), B_{\beta(t_0)}\},$$

existe un único movimiento rígido F del plano euclídeo que cumple

$$F(\alpha(t_0)) = \beta(t_0) \quad \text{y} \quad \vec{F}(e_i(t_0)) = \tilde{e}_i(t_0), \quad i = 1, 2.$$

Como $\vec{F}$ lleva una base ortonormal en otra con la misma orientación, resulta que $\det\vec{F} = 1$ y, así, F es directo.

Recordemos que la expresión explícita de F es

$$F\big(\alpha(t_0) + \lambda e_1(t_0) + \mu e_2(t_0)\big) = \beta(t_0) + \lambda\tilde{e}_1(t_0) + \mu\tilde{e}_2(t_0),$$

para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Se trata ahora de ver que F cumple $\beta = F \circ \alpha$ y que es el único movimiento rígido directo con esa propiedad. Empecemos por la unicidad. Si F_1 es otro movimiento rígido directo que cumple $\beta = F_1 \circ \alpha$, entonces

$$\underline{F_1(\alpha(t_0))} = \beta(t_0) = \underline{F(\alpha(t_0))}.$$

con lo que ya tenemos que F_1 y F coinciden en un punto. Bastaría entonces con ver que $\vec{F_1} = \vec{F}$.

Recordemos que $\vec{F_1}(\overrightarrow{pq}) := \overrightarrow{F_1(p)F_1(q)}$, siendo $\overrightarrow{pq} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ para $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$.

Tomando $p = \alpha(t_0)$, $q = \alpha(t_0 + h)$, $h \neq 0$, resulta

$$\vec{F_1}\left(\overrightarrow{\alpha(t_0)\alpha(t_0+h)}\right) = \overrightarrow{\beta(t_0)\beta(t_0+h)},$$

de donde, multiplicando por $1/h$ y tomando límites cuando $h \to 0$, obtenemos

$$\underline{\vec{F_1}(e_1(t_0))} = \tilde{e}_1(t_0) = \underline{\vec{F}(e_1(t_0))}.^8$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\underline{\vec{F_1}(e_2(t_0))} &= \vec{F_1}J(e_1(t_0)) = J\vec{F_1}(e_1(t_0)) = J\tilde{e}_1(t_0) = \\ &= \tilde{e}_2(t_0) = \underline{\vec{F}(e_2(t_0))},\end{aligned}$$

ya que $\vec{F_1} \circ J = J \circ \vec{F_1}$. Lo que demuestra que $\vec{F_1} = \vec{F}$. Pero, si dos movimientos rígidos coinciden en un punto y tienen la misma isometría lineal asociada entonces coinciden. Por tanto, hemos visto que si tal F existe entonces es único.

Veamos ahora que, tal y como fue definido F, se cumple

$$\vec{F}(e_1(t)) = \tilde{e}_1(t), \quad \underline{\text{para todo } t \in I}.$$

Inspirados en las ecuaciones de Frenet, consideremos la ecuación diferencial lineal

$$X'(t) = \kappa(t)\, JX(t),$$

donde $\kappa(t) := \kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(t)$. Es decir,

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) \\ \kappa(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}.$$

Observemos que esta ecuación tiene la propiedad de que si $X(t)$ es una solución entonces $\vec{F}(X(t))$ es también una solución (debido a $[\vec{F}(X(t))]' = \vec{F}(X'(t))$ y $\vec{F} \circ J = J \circ \vec{F}$).

Así, al ser $e_1(t)$ una solución (debido a la primera de las ecuaciones de Frenet para α) tenemos que $\vec{F}(e_1(t))$ es otra solución; de hecho,

[8] Alternativamente $\tilde{e}_1(t_0) = \beta'(t_0) = (F_1 \circ \alpha)'(t_0) = \vec{F_1}(\alpha'(t_0)) = \vec{F_1}(e_1(t_0))$.

$\vec{F}(e_1(t))$ es la única solución que cumple la condición inicial $\vec{F}(e_1(t_0)) = \tilde{e}_1(t_0)$.

Pero la primera de las ecuaciones de Frenet para β nos dice que $\tilde{e}_1(t)$ es también solución, obviamente con la misma condición inicial. Por la unicidad llegamos a

$$\vec{F}(e_1(t)) = \tilde{e}_1(t), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad t \in I,$$

es decir,

$$\vec{F}(\alpha'(t)) = \beta'(t), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad t \in I.$$

Veamos finalmente que $F(\alpha(t)) = \beta(t)$ para todo $t \in I$. Escribimos

$$\overrightarrow{\alpha(t_0)\alpha(t)} = \alpha(t) - \alpha(t_0) = \int_{t_0}^{t} \alpha'(t)dt\,,$$

$$\overrightarrow{\beta(t_0)\beta(t)} = \beta(t) - \beta(t_0) = \int_{t_0}^{t} \beta'(t)dt\,,$$

(integración componente a componente). Así

$$\begin{aligned} F(\alpha(t)) - F(\alpha(t_0)) = \overrightarrow{F(\alpha(t_0))F(\alpha(t))} = \vec{F}(\overrightarrow{\alpha(t_0)\alpha(t)}) = \\ = \vec{F}\int_{t_0}^{t} \alpha'(t)dt = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(\alpha'(t))dt = \\ = \int_{t_0}^{t} \beta'(t)dt = \beta(t) - \beta(t_0). \end{aligned}$$

Como sabemos que $F(\alpha(t_0)) = \beta(t_0)$, la fórmula anterior acaba la prueba. □

Corolario 10. *Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ curvas parametrizadas por la longitud de arco. Si ocurre*

$$\kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(t),$$

para todo $t \in I$ y, además, existe $t_0 \in I$ de manera que

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), \quad (e_1(t_0), e_2(t_0)) = (\tilde{e}_1(t_0), \tilde{e}_2(t_0)),$$

entonces

$$\beta = \alpha\,.$$

Observaciones.

- Este teorema es resultado global, i.e., involucra las curvas dadas α y β al completo. Teniendo en cuenta que una curva parametrizada en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ cuya imagen está contenida en un plano afín, puede verse como una curva parametrizada en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$, este teorema podría darse en el apartado 4 de este primer tema como una consecuencia del Teorema 13. No obstante, hemos pensado que adelantarlo es oportuno y ayuda a la claridad de la exposición de la materia.

- Se trata de un resultado de unicidad. Nos dice que dada $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por el arco, las únicas curvas parametrizadas por el arco $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ de manera que tienen la misma función curvatura que α son las que se obtienen como composición de un movimiento rígido directo arbitrario con la propia α.

- En este teorema no tiene ninguna prioridad una curva parametrizada sobre la otra; de hecho, si se tiene $\beta = F \circ \alpha$ entonces $\alpha = F^{-1} \circ \beta$ y F^{-1} es un movimiento rígido directo al serlo F.

- Para la construcción de F se usa un $t_0 \in I$, pero F no depende de esta elección. Por otra parte, la demostración nos da una forma explícita de construcción de F en un hipotético caso concreto.

- Decía F. Klein (1849-1925) en su "Programa de Erlangen"que una geometría[9] es una par (M, G) donde M es un conjunto y G es un subgrupo del grupo de las transformaciones de M.

  Una propiedad que cumple un subconjunto T de M se dice geométrica (i.e., interesa en (M, G)) cuando también la cumple todo subconjunto de M obtenido de T mediante una transformación de G.

  Si consideramos M el conjunto de todas las curvas parametrizadas por el arco en $\mathbb{R}^2$ y como G el grupo de transformaciones de M definido por los movimientos rígidos directos de $\mathbb{R}^2$, donde $F \in G$ actúa sobre $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ modificándola como $F \circ \alpha$. El teorema nos dice que la curvatura tiene entidad geométrica y es única para cada clase de curvas congruentes en la geometría (M, G).

- ¿Qué pasaría si la hipótesis del teorema sobre las curvaturas cambiase a $\kappa_\alpha(t) = -\kappa_\beta(t)$ para todo $t \in I$? Lo primero es que no existiría ningún movimiento rígido directo F de manera que $\beta = F \circ \alpha$.

  Pensemos en el siguiente ejemplo. Sean $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $\beta(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se cumple que $\kappa_\alpha = 1 = -\kappa_\beta$ como ya sabemos. Consideremos $F(x, y) = (y, x)$, es decir, F es la simetría con respecto a la recta de ecuación $y = x$. F es un movimiento rígido inverso (como la recta pasa por $(0, 0)$ es una recta vectorial, y Así $\vec{F} = F$). De manera natural aparece entonces la siguiente cuestión:

  > Si $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ son curvas parametrizadas por la longitud de arco tales que $\kappa_\beta(t) = -\kappa_\alpha(t)$, para todo $t \in I$, ¿existe un único movimiento rígido inverso F del plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ de manera que
  >
  > $$\beta = F \circ \alpha\,?$$

[9] Klein intentó poner orden en la geometría de su época dando una noción de geometría que estructura la mayoría de las existentes en su tiempo. Pero no toda geometría se puede encuadrar en su definición.

Nótese que si H es un movimiento rígido inverso del plano, entonces $\tilde{\alpha} := H \circ \alpha$ cumple $\kappa_\beta(t) = \kappa_{\tilde{\alpha}}(t)$ para todo t. Por tanto, el Teorema 9 se puede aplicar a $\tilde{\alpha}$ y β dando un movimiento rígido F de manera que $\beta = F \circ \tilde{\alpha}$. Así, $\beta = (F \circ H) \circ \alpha$ y $F \circ H$ es un movimiento rígido inverso (razónese la unicidad).

- El teorema no dice nada sobre la existencia de una curva parametrizada regular con curvatura prefijada; es decir, la siguiente proposición:

Proposición 11. *Dada una función diferenciable $\kappa : I \to \mathbb{R}$ existe una curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ de manera que $\kappa_\alpha = \kappa$.*

Demostración. Si $X(t)$ es una solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) \\ \kappa(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix},$$

que también escribimos

$$X'(t) = \kappa(t) J X(t),$$

se tiene $\langle X'(t), X(t) \rangle = 0$. Por tanto, $\langle X(t), X(t) \rangle$ =constante. Si suponemos la condición inicial $X(t_0) = v$ unitario, entonces $|X(t)| = 1$ para todo $t \in I$.

El problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} X'(t) &= \kappa(t) J X(t), \\ X(t_0) &= v\,. \end{aligned}$$

tiene solución única $X : I \to \mathbb{R}^2$. La curva

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} X(t)\, dt$$

cumple $\alpha'(t) = X(t)$, por tanto $|\alpha'(t)| = 1$. Además, de la ecuación que satisface $X(t)$ resulta

$$\kappa_\alpha(t) = \langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle = \kappa(t)\,.$$

□

3. Teoría local de curvas regulares en el espacio: curvatura, torsión y triedro de Frenet

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Supongamos que

$$\{\alpha'(t), \alpha''(t)\} \text{ es linealmente independiente para todo } t \in I.$$

Como $\alpha'(t) \neq 0$, eso quiere decir que la aceleración $\alpha''(t)$ nunca es colineal con la velocidad $\alpha'(t)$.[10] En el caso particular en el que la curva esté parametrizada por el arco, la anterior propiedad equivale con que la aceleración no se anule en ningún t.

Queremos a continuación construir una base ortonormal orientada positiva

$$B_{\alpha(t)} = (e_1(t), e_2(t), e_3(t))$$

para cada $t \in I$, dependiendo diferenciablemente de t. En primer lugar, definimos

$$e_1(t) := \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

Le llamamos el vector tangente unitario a α en $t \in I$.

Debido a la dimensión, ahora no tenemos J como en el caso del plano euclídeo, para poder aplicar a $e_1(t)$ (las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ son alrededor de una recta, mientras que en $\mathbb{R}^2$ son alrededor de un punto). Pongamos

$$\tilde{e}_2(t) := \alpha''(t) - \langle \alpha''(t), e_1(t) \rangle e_1(t),$$

que cumple

$$\tilde{e}_2(t) \neq 0 \quad \text{y} \quad \langle e_1(t), \tilde{e}_2(t) \rangle = 0,$$

para todo $t \in I$. Si la curva estuviera parametrizada por el arco y su aceleración no se anulase nunca, entonces $\tilde{e}_2(t)$ coincide con su aceleración en t.

Ahora normalizamos

$$e_2(t) := \frac{\tilde{e}_2(t)}{|\tilde{e}_2(t)|},$$

que se llama el vector normal unitario a α en $t \in I$.

Finalmente, definimos

$$e_3(t) := e_1(t) \times e_2(t),$$

que se llama vector binormal unitario a α en $t \in I$. Así, hemos construido, para cada $t \in I$, una base ortonormal positivamente orientada[11] de $\mathbb{R}^3$

$$B_{\alpha(t)} = (e_1(t), e_2(t), e_3(t)).$$

Tenemos Además asegurado que cada $e_i(t)$, $i = 1, 2$, es diferenciable. Llamaremos a $B_{\alpha(t)}$ el triedro de Frenet de α en t.

El plano $\pi^{osc}_{\alpha(t_0)}$ que pasa por $\alpha(t_0)$ con dirección definida por $e_1(t_0)$, $e_2(t_0)$, o equivalentemente con vector normal $e_3(t_0)$, se llama el plano osculador a α en t_0, en símbolos

$$\pi^{osc}_{\alpha(t_0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle x - \alpha(t_0), e_3(t_0) \rangle = 0\}.$$

[10]Notemos que una curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$ que cumple que su velocidad y aceleración son linealmente independientes en cada t es necesariamente regular. Aquí, hemos exigido primeramente la regularidad de la curva por claridad.

[11]Define la misma orientación en $\mathbb{R}^3$ que la base usual ya que $\det_{B_u}(e_1(t), e_2(t), e_3(t)) = 1$.

El plano $\pi^{rec}_{\alpha(t_0)}$ que pasa por $\alpha(t_0)$ con dirección definida por $e_1(t_0)$, $e_3(t_0)$, o equivalentemente con vector normal $e_2(t_0)$, se llama el plano rectificante a α en t_0.

$$\pi^{rec}_{\alpha(t_0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle x - \alpha(t_0), e_2(t_0)\rangle = 0\}.$$

El plano $\pi^{nor}_{\alpha(t_0)}$ que pasa por $\alpha(t_0)$ con dirección definida por $e_2(t_0)$, $e_3(t_0)$, o equivalentemente con vector normal $e_1(t_0)$, se llama el plano normal a α en t_0.

$$\pi^{nor}_{\alpha(t_0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle x - \alpha(t_0), e_1(t_0)\rangle = 0\}.$$

Queremos calcular $e_i'(t)$, $i = 1, 2, 3$. Como $\langle e_1'(t), e_1(t)\rangle = 0$, $\underline{e_1'(t) \text{ no depende de } e_1(t)}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} e_1'(t) &= \Big(\frac{1}{|\alpha'(t)|}\Big)'\alpha'(t) + \frac{1}{|\alpha'(t)|}\,\alpha''(t) = \\ &= \Big(\frac{1}{|\alpha'(t)|}\Big)'|\alpha'(t)|\,e_1(t) + \frac{1}{|\alpha'(t)|}\langle\alpha''(t), e_1(t)\rangle e_1(t) + \\ &\quad + \frac{1}{|\alpha'(t)|}|\tilde{e}_2(t)|\,e_2(t)\,, \end{aligned}$$

con lo que $\underline{e_1'(t) \text{ tampoco depende de } e_3(t)}$. En definitiva,

$$e_1'(t) = a_{12}(t)e_2(t), \ \text{donde } a_{12}(t) = \langle e_1'(t), e_2(t)\rangle\,.$$

Análogamente, de $\langle e_2'(t), e_2(t)\rangle = 0$ se deduce que $\underline{e_2'(t) \text{ no depende de } e_2(t)}$. Así que

$$e_2'(t) = a_{21}(t)e_1(t) + a_{23}(t)e_3(t)\,,$$

donde

$$a_{21}(t) = \langle e_2'(t), e_1(t)\rangle\,, a_{23}(t) = \langle e_2'(t), e_3(t)\rangle\,.$$

Por último, de $\langle e_3'(t), e_3(t)\rangle = 0$ se deduce que $\underline{e_3'(t) \text{ no depende de } e_3(t)}$.

Por otra parte, veamos que $\underline{e_3'(t) \text{ tampoco depende de } e_1(t)}$. En efecto, derivando en $\langle e_1(t), e_3(t)\rangle = 0$ llegamos a

$$\langle e_1'(t), e_3(t)\rangle + \langle e_1(t), e_3'(t)\rangle = 0,$$

y ya sabíamos que el primero de los sumandos es cero.

Así,

$$e_3'(t) = a_{32}(t)e_2(t), \ \text{donde } a_{32}(t) = \langle e_3'(t), e_2(t)\rangle\,.$$

Tengamos ahora en cuenta que

$$\langle e_2'(t), e_1(t)\rangle + \langle e_2(t), e_1'(t)\rangle = 0,$$

lo que implica que

$$a_{21}(t) = -a_{12}(t).$$

Por otro lado, de

$$\langle e_3'(t), e_2(t)\rangle + \langle e_3(t), e_2'(t)\rangle = 0,$$

tenemos

$$a_{32}(t) = -a_{23}(t).$$

Así podemos escribir

$$\begin{array}{rcllll} e_1'(t) & = & & a_{12}(t)e_2(t) & \\ e_2'(t) & = & -a_{12}(t)e_1(t) & & +a_{23}(t)e_3(t) \\ e_3'(t) & = & & -a_{23}(t)e_2(t) & \end{array}$$

que se llaman las ecuaciones de Frenet de α.

La curvatura de α en t se define como

$$\kappa(t) = \frac{a_{12}(t)}{|\alpha'(t)|}\,,$$

La torsión de α en t se define como

$$\tau(t) = \frac{a_{23}(t)}{|\alpha'(t)|}\,.$$

Las funciones $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ son diferenciables.

Veamos una particularidad de $\kappa(t)$ en este caso. Lo primero es recordar que $\tilde{e}_2(t) = \alpha''(t) - \langle \alpha''(t)(t), e_1(t)\rangle\, e_1(t)$ nunca es cero. Por tanto,

$$0 < |\tilde{e}_2(t)|^2 = |\alpha''(t) - \langle \alpha''(t)(t), e_1(t)\rangle\, e_1(t)|^2 =$$

$$= |\alpha''(t)|^2 - \langle \alpha''(t), e_1(t)\rangle^2 =$$

$$= |\alpha''(t)|^2 - \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t)\rangle^2}{|\alpha'(t)|^2}\,.$$

Ahora

$$a_{12}(t)\,|\tilde{e}_2(t)| = \langle e_1'(t), \tilde{e}_2(t)\rangle =$$

$$= \Big\langle \Big(\frac{1}{|\alpha'(t)|}\Big)'\alpha'(t) + \frac{1}{|\alpha'(t)|}\alpha''(t), \alpha''(t) - \langle \alpha''(t), e_1(t)\rangle\, e_1(t)\Big\rangle =$$

$$= \frac{1}{|\alpha'(t)|}\Big\{|\alpha''(t)|^2 - \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t)\rangle^2}{|\alpha'(t)|^2}\Big\} > 0.$$

Por consiguiente, $a_{12}(t) > 0$, para todo $t \in I$, lo que equivale con

$$\kappa(t) > 0 \text{ para todo } t \in I\,.$$

Es decir, la curvatura que hemos definido para una curva parametrizada regular en $\mathbb{R}^3$ es siempre estrictamente positiva, mientras la curvatura de una curva parametrizada regular en $\mathbb{R}^2$ podía cambiar de signo.

En el caso en que ocurra $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in I$, tenemos

$$e_1(t) = \alpha'(t).$$

Por otro lado, al ser $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$, ocurre $\tilde{e}_2(t) = \alpha''(t)$, que no se puede anular ya que seguimos suponiendo que $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ es linealmente independiente, por tanto

$$e_2(t) = \frac{\alpha''(t)}{|\alpha''(t)|}.$$

Finalmente,

$$e_3(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha''(t)|},$$

Así, cuando $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$, las ecuaciones de Frenet[12] se escriben

$$\begin{array}{rcccc} e_1'(t) & = & & \kappa(t)e_2(t) & \\ e_2'(t) & = & -\kappa(t)e_1(t) & & +\tau(t)e_3(t) \\ e_3'(t) & = & & -\tau(t)e_2(t) & \end{array}$$

y

$$\kappa(t) = \langle \alpha''(t), \frac{\alpha''(t)}{|\alpha''(t)|} \rangle = |\alpha''(t)| > 0,$$

$$\tau(t) = \frac{\det_{B_u}(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\kappa^2(t)}.$$

De manera análoga al caso de curvas en $\mathbb{R}^2$ tenemos:

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular de manera que $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ es linealmente independiente para todo t.

• Si $\phi : J \to I$ es un difeomorfismo y ponemos $\gamma := \alpha \circ \phi$, entonces se cumple

$$k_\gamma(s) = k_\alpha(\phi(s)), \quad \tau_\gamma(s) = \tau_\alpha(\phi(s)), \text{ para todo } t \in I.$$

• Si F un movimiento rígido directo de $\mathbb{R}^3$. Si ponemos $\beta := F \circ \alpha$, entonces se cumple

$$k_\beta(t) = k_\alpha(t), \quad \tau_\beta(t) = \tau_\alpha(t), \text{ para todo } t \in I.$$

Comentario. Para entender mejor el concepto de curvatura de una curva parametrizada γ en $\mathbb{R}^3$ de manera que $\{\gamma'(t), \gamma''(t)\}$ es linealmente independiente para todo t, vamos a relacionarlo con el de curvatura de una curva parametrizada regular en $\mathbb{R}^2$.

[12] Hay que hacer notar que en algunos libros llaman torsión a la función opuesta a la torsión según nuestra definición.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada con $|\alpha'(t)| = 1$ y $|\alpha''(t)| > 0$ para todo $t \in I$. De una manera natural podemos considerarla identificada con $\overline{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ definida por $\overline{\alpha}(t) = (x(t), y(t), 0)$ siendo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Escribimos $\overline{\alpha}(t) = (\alpha(t), 0)$. Como $|\overline{\alpha}'(t)| = 1$ para todo t, tenemos que $\overline{\alpha}$ cumple la propiedad que le ponemos a las curvas de $\mathbb{R}^3$ que estamos estudiando y

$$\kappa_{\overline{\alpha}}(t) = |\overline{\alpha}''(t)| = |\alpha''(t)| > 0\,.$$

Por otro lado, $\kappa_\alpha(t) = \langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle$. De manera que

$$\kappa_{\overline{\alpha}}(t) = |\kappa_\alpha(t)|\,.$$

Proposición 12. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular tal que $|\alpha'(t)| = 1 y, |\alpha''(t)| > 0$ para todo t. Se cumple que $\alpha(I)$ está contenida en un plano afín π si y sólo si $\tau_\alpha = 0$.*

Demostración. Si ocurre $\alpha(I) \subset \pi := \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle x - p_0, v\rangle = 0, |v| = 1\}$, se tiene

$$\langle \alpha(t) - p_0, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha^{(j)}(t), v\rangle = 0,\ j = 1, 2, 3\,,$$

por tanto $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)\}$ es linealmente dependiente. Así $\tau_\alpha = 0$.

Recíprocamente, si $\tau_\alpha = 0$ tenemos que $e_3(t) = v$ vector contante unitario. Como $\langle \alpha'(t), v\rangle = 0$ tenemos que

$$\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), v\rangle = 0$$

lo que nos dice que $\alpha(I)$ está contenido en el plano afín $\pi = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle x - \alpha(t_0), v\rangle = 0\}$, que es el plano osculador en todos los puntos de α. □

Ejemplo 13. *(hélice circular recta) Consideremos la curva parametrizada regular en $\mathbb{R}^3$*

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, b\,t),$$

donde $a > 0$, $b > 0$ son constantes, y $t \in \mathbb{R}$. Vamos a calcular el triedro de Frenet de α en cada $t \in \mathbb{R}$. Primeramente

$$\alpha'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)\,,$$

y Así $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Por tanto

$$e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,(-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)\,.$$

Por otro lado, como $\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle = 0$,

$$\tilde{e}_2(t) = \alpha''(t) = (-a\cos t, -a\,\mathrm{sen}\,t, 0)\,.$$

Como $|\tilde{e}_2(t)| = a$, resulta

$$e_2(t) = (-\cos t, -\mathrm{sen}\,t, 0)\,.$$

Finalmente,

$$e_3(t) = e_1(t) \times e_2(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,(b\,\mathrm{sen}\,t, -b\cos t, a)\,.$$

Así,

$$\kappa(t) = \frac{a_{12}(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}\,,$$

$$\tau(t) = \frac{a_{23}(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{a^2+b^2}\,.$$

Comentarios.

- Si ponemos $\alpha = \alpha_{a,b}$ para hacer patente la dependencia de α de las constantes positivas a y b, y $\kappa_{a,b} := \kappa_{\alpha_{a,b}}$, $\tau_{a,b} := \tau_{\alpha_{a,b}}$, tenemos

  $$\kappa_{a,b} = \frac{1}{a}\,\frac{a^2}{a^2+b^2} < \frac{1}{a}\,, \qquad \tau_{a,b} = \frac{1}{b}\,\frac{b^2}{a^2+b^2} < \frac{1}{b}\,.$$

  Además, para cada $b = b_0 > 0$ fijo

  $$\kappa_{a,b_0} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad a \longrightarrow \infty \quad \text{o} \quad a \longrightarrow 0\,,$$

  y κ_{a,b_0} (definida en $a > 0$) alcanza su valor máximo absoluto $\dfrac{1}{2b_0}$ cuando $a = b_0$, i.e., en el caso

  $$\alpha(t) = (b_0 \cos t, b_0 \operatorname{sen} t, b_0\, t)\,.$$

  Para cada $a = a_0 > 0$ fijo

  $$\tau_{a_0,b} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad b \longrightarrow \infty \quad \text{o} \quad b \longrightarrow 0\,,$$

  y $\tau_{a_0,b}$ (definida en $b > 0$) alcanza su valor máximo absoluto $\dfrac{1}{2a_0}$ cuando $b = a_0$, i.e., en el caso

  $$\alpha(t) = (a_0 \cos t, a_0 \operatorname{sen} t, a_0\, t)\,.$$

- La familia biparamétrica de hélices $\{\alpha_{a,b}\}$ cumple la siguiente propiedad

  $$\kappa_{b,a} = \tau_{a,b}\,, \qquad \tau_{b,a} = \kappa_{a,b}\,.$$

4. Teorema fundamental de curvas en el espacio

Vamos a dividir el teorema fundamental de las curvas en el espacio euclídeo en dos. Empezamos con la "unicidad", luego veremos la de "curvatura y torsión prescritas".

Teorema 14. *Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ curvas parametrizadas por la longitud de arco y tales que $\alpha''(t) \neq 0$, $\beta''(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Si ocurre*

$$\kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(t), \quad \tau_\beta(t) = \tau_\alpha(t),$$

para todo $t \in I$, entonces existe un único movimiento rígido directo F del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ de manera que

$$\beta = F \circ \alpha\,,$$

es decir, α y β son congruentes, lo que significa que son geométricamente idénticas.

Demostración. Fijamos $t_0 \in I$ y sean los puntos $\alpha(t_0)$, $\beta(t_0)$ del espacio euclídeo y las bases ortonormales positivas

$$B_{\alpha(t_0)} = (e_1(t_0), e_2(t_0), e_3(t_0)), \quad B_{\beta(t_0)} = (\tilde{e}_1(t_0), \tilde{e}_2(t_0), \tilde{e}_3(t_0))$$

del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Dados los sistemas de referencia ortonormales

$$R = \{\alpha(t_0), B_{\alpha(t_0)}\} \quad \widetilde{R} = \{\beta(t_0), B_{\beta(t_0)}\},$$

existe un único movimiento rígido F del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ que cumple

$$F(\alpha(t_0)) = \beta(t_0) \quad \text{y} \quad \vec{F}(e_i(t_0)) = \tilde{e}_i(t_0), \quad i = 1, 2, 3.$$

Como $\vec{F}$ lleva una base ortonormal en otra con la misma orientación, resulta que $\det \vec{F} = 1$ y, así, F es directo.

Recordemos que la expresión explícita de F es

$$F\big(\alpha(t_0) + \lambda e_1(t_0) + \mu e_2(t_0) + \eta e_3(t_0)\big) =$$

$$= \beta(t_0) + \lambda \tilde{e}_1(t_0) + \mu \tilde{e}_2(t_0) + \eta \tilde{e}_3(t_0),$$

para todo $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$.

Se trata ahora de ver que $\vec{F}$ cumple $\vec{F}(e_i(t)) = \tilde{e}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, para todo $t \in I$.[13] En efecto, consideremos las funciones $f_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, definidas por

$$f_i(t) = |\vec{F}(e_i(t)) - \tilde{e}_i(t)|^2$$

que son diferenciables, ≥ 0 y cumplen $f_i(t_0) = 0$. Si vemos que $f_1 + f_2 + f_3$ es constante, esta constante tiene que ser cero y, por tanto, tendríamos lo que queremos: $\vec{F}(e_i(t)) - \tilde{e}_i(t) = 0$, para todo $t \in I$.

Usando que $\vec{F}$ es una isometría lineal, tenemos

$$f_1(t) = \langle \vec{F}(e_1(t)), \vec{F}(e_1(t)) \rangle - 2\langle \vec{F}(e_1(t)), \tilde{e}_1(t) \rangle + \langle \tilde{e}_1(t), \tilde{e}_1(t) \rangle \; =$$

[13] Ahora el razonamiento no será como en el Teorema 9.

$$= \langle e_1(t), e_1(t)\rangle - 2\langle \vec{F}(e_1(t)), \tilde{e}_1(t)\rangle + \langle \tilde{e}_1(t), \tilde{e}_1(t)\rangle\,.$$

Por tanto

$$f_1'(t) = \frac{d}{dt}\Big\{ \underbrace{\langle e_1(t), e_1(t)\rangle}_{=1} -2\,\langle \vec{F}(e_1(t)), \tilde{e}_1(t)\rangle + \underbrace{\langle \tilde{e}_1(t), \tilde{e}_1(t)\rangle}_{=1} \Big\} =$$

$$= -2\,\langle \vec{F}(e_1'(t)), \tilde{e}_1(t)\rangle - 2\,\langle \vec{F}(e_1(t)), \tilde{e}_1'(t)\rangle =$$

$$= -2\,\kappa(t)\,\langle \vec{F}(e_2(t)), \tilde{e}_1(t)\rangle - 2\,\kappa(t)\,\langle \vec{F}(e_1(t)), \tilde{e}_2(t)\rangle\,,$$

por la primera ecuación de Frenet para ambas curvas, donde $\kappa(t) := \kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(t)$ por hipótesis.

Análogamente

$$f_2'(t) = -2\,\langle \vec{F}(e_2'(t)), \tilde{e}_2(t)\rangle - 2\,\langle \vec{F}(e_2(t)), \tilde{e}_2'(t)\rangle =$$

$$= 2\,\kappa(t)\,\langle \vec{F}(e_1(t)), \tilde{e}_2(t)\rangle - 2\,\tau(t)\,\langle \vec{F}(e_3(t)), \tilde{e}_2(t)\rangle +$$

$$+ 2\,\kappa(t)\,\langle \vec{F}(e_2(t)), \tilde{e}_1(t)\rangle - 2\,\tau(t)\,\langle \vec{F}(e_2(t)), \tilde{e}_3(t)\rangle\,,$$

por la segunda ecuación de Frenet para ambas curvas, donde $\tau(t) = \tau_\alpha(t) = \tau_\beta(t)$, y

$$f_3'(t) = -2\,\langle \vec{F}(e_3'(t)), \tilde{e}_3(t)\rangle - 2\,\langle \vec{F}(e_3(t)), \tilde{e}_3'(t)\rangle =$$

$$= 2\,\tau(t)\,\langle \vec{F}(e_2(t)), \tilde{e}_3(t)\rangle + 2\,\tau(t)\,\langle \vec{F}(e_3(t)), \tilde{e}_2(t)\rangle\,,$$

por la tercera ecuación de Frenet para ambas curvas.

Por tanto

$$\frac{d}{dt}\Big\{ f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \Big\} = 0\,,$$

y como $f_1(t_0) + f_2(t_0) + f_3(t_0) = 0$, resulta que

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0\,.$$

Como cada función en no negativa, esto implica

$$f_i(t) = 0,\ .$$

$i = 1, 2, 3$, para todo $t \in I$; es decir,

$$\vec{F}(e_i(t)) = \tilde{e}_i(t)\,,$$

$i = 1, 2, 3$, para todo $t \in I$.

En particular, hemos probado que

$$\vec{F}(\alpha'(t)) = \beta'(t)\,,$$

es decir,

$$\vec{F}\underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}}_{\alpha'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{22} & c_{33} \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{SO}(3)} \underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}}_{\alpha'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{x}'(t) \\ \tilde{y}'(t) \\ \tilde{z}'(t) \end{pmatrix}}_{\beta'(t)}\,.$$

Al ser

$$F\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{22} & c_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

reescribimos lo que hemos probado como

$$(F\circ\alpha)'(t) = \beta'(t)\,,$$

para todo $t \in I$. Como sabemos que

$$(F\circ\alpha)(t_0) = \beta(t_0)\,,$$

deducimos

$$(F\circ\alpha)(t) = \beta(t)\,,$$

para todo $t \in I$.

Si F_1 es otro movimiento rígido que cumple

$$(F_1\circ\alpha)(t) = \beta(t) = (F\circ\alpha)(t)\,,$$

para todo $t \in I$, veamos que $F_1 = F$.

Tenemos

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{F_1}(e_1(t_0))} &= \vec{F_1}(\alpha'(t_0)) = \beta'(t_0) = \tilde{e}_1(t_0) = \underline{\vec{F}(e_1(t_0))}\,, \\
\underline{\vec{F_1}(e_2(t_0))} &= \frac{1}{|\alpha''(t_0)|}\vec{F_1}(\alpha''(t_0)) = \frac{1}{|\alpha''(t_0)|}(F_1\circ\alpha)''(t_0) = \\
&= \frac{1}{|\alpha''(t_0)|}(F\circ\alpha)''(t_0) = \frac{1}{|\alpha''(t_0)|}\vec{F}(\alpha''(t_0)) = \underline{\vec{F}(e_2(t_0))}\,, \\
\underline{\vec{F_1}(e_3(t_0))} &= \vec{F_1}(e_1(t_0)) \times \vec{F_1}(e_2(t_0)) = \\
&= \vec{F}(e_1(t_0)) \times \vec{F}(e_2(t_0)) = \underline{\vec{F}(e_3(t_0))}\,.
\end{aligned}$$

Con lo que $\vec{F_1} = \vec{F}$. Como también ocurre $F_1(\alpha(t_0)) = F(\alpha(t_0))$, podemos afirmar $F_1 = F$, lo que acaba la demostración. □

Corolario 15. *Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ curvas parametrizadas por la longitud de arco y tales que $\alpha''(t) \neq 0$, $\beta''(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Si ocurre*

$$\kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(t), \quad \tau_\beta(t) = \tau_\alpha(t),$$

para todo $t \in I$ y existe $t_0 \in I$ tal que

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), \quad (e_1(t_0), e_2(t_0), e_3(t_0)) = (\tilde{e}_1(t_0), \tilde{e}_2(t_0), \tilde{e}_3(t_0)),$$

entonces

$$\beta = \alpha\,.$$

Teorema 16. *Para cada par de funciones diferenciables*

$$\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}, \quad \kappa > 0,$$

existe una curva parametrizada por el parámetro arco $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *de manera que*

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa(t), \quad \tau_\alpha(t) = \tau(t)\,,$$

para todo $t \in I$.

El Teorema 14 añade al Teorema 16 que la curva parametrizada α es única salvo movimientos rígidos directos del espacio afín euclídeo. Este enunciados juntos dan el nombre a esta última sección del tema 1: el teorema fundamental de la teoría de curvas en el espacio euclídeo.

Demostración. Lo primero que hacemos es recordar las ecuaciones de Frenet para una curva parametrizada por el parámetro arco, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, de manera que $\alpha''(t) \neq 0$ para todo t.

$$\begin{array}{rcl} e_1'(t) & = & \kappa(t)e_2(t) \\ e_2'(t) & = & -\kappa(t)e_1(t) \qquad\qquad +\tau(t)e_3(t) \\ e_3'(t) & = & -\tau(t)e_2(t) \end{array}$$

Notemos que κ y τ son la curvatura y la torsión de α.

Reescribimos estas ecuaciones como sigue. Primero ponemos

$$e_1(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))\,,$$

$$e_2(t) = (y_4(t), y_5(t), y_6(t))\,,$$

$$e_3(t) = (y_7(t), y_8(t), y_9(t))\,.$$

Entonces la primera ecuación de Frenet queda como sigue:

$$y_i'(t) = \kappa(t)\, y_{i+3}(t)\,, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

la segunda ecuación de Frenet queda

$$y_j'(t) = -\kappa(t)\, y_{j-3}(t) + \tau(t)\, y_{j+3}(t)\,, \quad j = 4, 5, 6\,,$$

y, finalmente, la tercera ecuación de Frenet se escribe

$$y_h'(t) = -\tau(t)\, y_{h-3}(t)\,, \quad h = 7, 8, 9\,.$$

Si ponemos

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t), y_5(t), y_6(t), y_7(t), y_8(t), y_9(t))^\top,$$

donde el superíndice $\top$ significa transposición, y

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t)\,\mathbf{I}_3 & 0 \\ -\kappa(t)\,\mathbf{I}_3 & 0 & \tau(t)\,\mathbf{I}_3 \\ 0 & -\tau(t)\,\mathbf{I}_3 & 0 \end{pmatrix}_{9\times 9}$$

que es antisimétrica, entonces las ecuaciones de Frenet se escriben

$$y'(t) = A(t)\,y(t)\,,$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Motivados por lo anterior planteamos el siguiente problema de valores iniciales

$$y'(t) = A(t)\,y(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

donde $A(t)$ se construye a partir de las funciones dadas como en la construcción anterior, $t_0 \in I$, e $y : I \to \mathbb{R}^9$.

Tomamos una base ortonormal ordenada positiva (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ y ponemos $y_0 = (v_1, v_2, v_3)^\top$. Podemos afirmar,

> Existe una única $y : I \to \mathbb{R}^9$ diferenciable que satisface la EDL anterior con la condición inicial dada.

Si llamamos

$$e_1(t) := (y_1(t), y_2(t), y_3(t))\,,$$
$$e_2(t) := (y_4(t), y_5(t), y_6(t))\,,$$
$$e_3(t) := (y_7(t), y_8(t), y_9(t))\,,$$

es decir,

$$y(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t))^\top,$$

tenemos, por continuidad, que existe $\epsilon > 0$ tal que $(e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ es una base orientada positivamente para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. En efecto,la función

$$t \in I \mapsto \mathbf{det}(e_1(t), e_2(t), e_3(t))$$

es continua y, como para $t = t_0$ vale $1 > 0$, entonces tiene que ser > 0 en un entorno abierto de t_0. No se sabe, en principio, que $(e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ sea ortonormal (la condición de que se cumpla la ortonormalidad en $t = t_0$ no se extiende por continuidad del mismo modo anterior).

La ecuación diferencial que hemos tratado se construyó pensando que $y(t)$ era el triedro de Frenet en cada t para una curva dada α parametrizada por el arco. Supongamos eso de nuevo y veamos qué satisfacen las derivadas de las 6 funciones (que son constantes en este caso)

$$\langle e_i(t), e_j(t)\rangle\,,$$

con $i \leq j,\ \ i,j \in \{1,2,3\}$.

Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle e_1(t), e_2(t)\rangle &= \langle e_1'(t), e_2(t)\rangle + \langle e_1(t), e_2'(t)\rangle = \\
&= \kappa(t)\langle e_2(t), e_2(t)\rangle - \kappa(t)\langle e_1(t), e_1(t)\rangle + \tau(t)\langle e_1(t), e_3(t)\rangle\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle e_1(t), e_3(t)\rangle &= \langle e_1'(t), e_3(t)\rangle + \langle e_1(t), e_3'(t)\rangle = \\
&= \kappa(t)\langle e_2(t), e_3(t)\rangle - \tau(t)\langle e_1(t), e_2(t)\rangle\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle e_2(t), e_3(t)\rangle &= \langle e_2'(t), e_3(t)\rangle + \langle e_2(t), e_3'(t)\rangle = \\
&= -\kappa(t)\langle e_1(t), e_3(t)\rangle + \tau(t)\langle e_3(t), e_3(t)\rangle \\
&\quad -\tau(t)\langle e_2(t), e_2(t)\rangle\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle e_1(t), e_1(t)\rangle &= 2\,\kappa(t)\langle e_1(t), e_2(t)\rangle\,, \\
\frac{d}{dt}\langle e_2(t), e_2(t)\rangle &= -2\,\kappa(t)\langle e_1(t), e_2(t)\rangle + \\
&\quad +2\,\tau(t)\langle e_2(t), e_3(t)\rangle\,,
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\langle e_3(t), e_3(t)\rangle = -2\,\tau(t)\langle e_2(t), e_3(t)\rangle\,.$$

Si ponemos

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t))^\top,$$

donde

$$\begin{aligned}
&x_1(t) = \langle e_1(t), e_2(t)\rangle,\ \ x_2(t) = \langle e_1(t), e_3(t)\rangle\ x_3(t) = \langle e_2(t), e_3(t)\rangle\,, \\
&x_4(t) = \langle e_1(t), e_1(t)\rangle,\ \ x_5(t) = \langle e_2(t), e_2(t)\rangle\ x_6(t) = \langle e_3(t), e_3(t)\rangle\,.
\end{aligned}$$

entonces se cumple

$$\begin{aligned}
x'(t) &= B(t)\,x(t) \\
x(t_0) &= (0,0,0,1,1,1)^\top
\end{aligned}$$

siendo $B(t)$ una matriz 6×6 cuyos elementos no nulos dependen linealmente de $\kappa(t)$ y $\tau(t)$ y, por lo tanto son funciones diferenciables.

Lo anterior nos sugiere construir, a partir de las funciones dadas κ y τ, una matriz $B(t)$ de la forma anterior y considerar el siguiente problema de valores iniciales:

$$x'(t) = B(t)\,x(t)$$

$$x(t_0) = (0,0,0,1,1,1)^\top$$

que tiene una única solución definida en todo el intervalo I, de hecho, esa única solución es la constante

$$x(t) = (0,0,0,1,1,1)^\top$$

para todo t. Como el argumento anterior también nos dice que es solución

$$x(t) = \big(\langle e_1, e_2\rangle, \langle e_1, e_3\rangle, \langle e_2, e_3\rangle, \langle e_1, e_1\rangle, \langle e_2, e_2\rangle, \langle e_3, e_3\rangle\big)^\top,$$

resulta de la unicidad que

$$\langle e_i(t), e_j(t)\rangle = \delta_{ij}$$

para todo $t \in I$.

En otras palabras,

$$\big(e_1(t), e_2(t), e_3(t)\big)$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ para todo $t \in I$. Como

$$\mathbf{det}\big(e_1(t_0), e_2(t_0), e_3(t_0)\big) = 1$$

y la función

$$t \mapsto \mathbf{det}\big(e_1(t), e_2(t), e_3(t)\big)$$

es continua y sólo puede tomar los valores 1 y -1, concluimos que

$$\mathbf{det}\big(e_1(t), e_2(t), e_3(t)\big) = 1$$

para todo $t \in I$. Hemos visto, por tanto, que todas estas bases ortonormales están orientadas positivamente.

Finalmente, definimos

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} e_1(t)dt\,,$$

con lo cual tenemos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable y como $\alpha'(t) = e_1(t)$ es unitario para todo t, resulta que α está parametrizada por el arco.

Derivando de nuevo se obtiene

$$\alpha''(t) = \kappa(t)\, e_2(t)$$

lo que nos dice que

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa(t)$$

para todo $t \in I$.

Por otro lado,

$$\alpha'''(t) = \kappa'(t)\, e_2(t) + \kappa(t)\, e_2'(t) =$$

$$= \kappa'(t)\, e_2(t) - \kappa(t)^2\, e_1(t) + \kappa(t)\tau(t)\, e_3(t)\,.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha(t) &= \frac{1}{\kappa_\alpha(t)^2}\,\mathrm{det}\big(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)\big) = \\
&= \frac{1}{\kappa(t)^2}\,\mathrm{det}\big(e_1(t), \kappa(t)\, e_2(t), \kappa(t)\tau(t)e_3(t)\big) \\
&= \tau(t),
\end{aligned}$$

para todo $t \in I$, lo que acaba la demostración. □

Teorema 17. *Para cada par de funciones diferenciables*

$$\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}, \quad \kappa > 0,$$

existe una curva parametrizada por el parámetro arco $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ de manera que

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa(t), \quad \tau_\alpha(t) = \tau(t)\,,$$

para todo $t \in I$.

Además, si $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es otra curva parametrizada por el arco que también cumple lo anterior, existe un único movimiento rígido directo F de $\mathbb{R}^3$ de manera que

$$\beta = F \circ \alpha\,.$$

Corolario 18. *Para cada función diferenciable*

$$\kappa : I \to \mathbb{R},\ \kappa > 0 \text{ y cada plano afín } \pi \text{ de } \mathbb{R}^3$$

existe una curva parametrizada por el parámetro arco $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ de manera que

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa(t) \quad y \quad \alpha(I) \subset \pi\,,$$

para todo $t \in I$.

Además, si $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es otra curva parametrizada por el arco de manera que también

$$\kappa_\beta(t) = \kappa(t) \quad y \quad \beta(I) \subset \pi\,,$$

para todo $t \in I$, existe un único movimiento rígido directo F de $\mathbb{R}^3$ que cumple

$$\beta = F \circ \alpha \quad y \quad F(\pi) = \pi\,.$$