Diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales

Partimos de una ecuación diferencial

$$\dot{x} = \overline{X}(t,x)$$

para la que el campo $\overline{X}$ tiene buenas propiedades de diferenciabilidad. Conocemos de manera explícita una solución $\varphi(t)$, ¿qué podemos decir de las soluciones cercanas a $\varphi(t)$? Esta situación se presenta muy a menudo. Por ejemplo, para la ecuación del péndulo

$$\dot{\theta} = \omega \,, \quad \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \theta$$

tenemos la solución de equilibrio $\varphi(t) = (\theta(t), \omega(t))$, $\theta \equiv 0, \omega \equiv 0$ y nos gustaría decir algo sobre las pequeñas oscilaciones.

Fijamos un instante $t_0 \in]\alpha, \omega[$, intervalo maximal de $\varphi(t)$. Dado $\xi \in \mathbb{R}^d$ cercano a $\varphi(t_0)$ denotamos por $x(t,\xi)$ a la solución del problema de Cauchy

$$\dot{x} = \overline{X}(t,x), \quad x(t_0) = \xi .$$

Sabemos que $(t,\xi) \longmapsto x(t,\xi)$ es continua en un entorno de $(t_0, \varphi(t_0))$ pero imaginemos que además es diferenciable. Entonces podemos hacer un desarrollo de Taylor en ξ (o bien aplicar la noción de diferenciabilidad) para llegar a la fórmula

$$x(t,\xi) = \varphi(t) + \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \varphi(t_0))\,(\xi - \varphi(t_0)) + o(\|\xi - \varphi(t_0)\|) \quad \text{si } \xi \to \varphi(t_0)$$

válida si $t \in [a,b] \subset]\alpha, \omega[$.

Hemos encontrado una fórmula aproximada para las soluciónes cercanas a $\varphi(t)$ pero ¿podemos derivar respecto a las condiciones iniciales? ¿cómo se calcula $\frac{\partial x}{\partial \xi}$?

Antes de hacer cosas rigurosas hagamos un cálculo formal. Si pensamos en la solucion $x = x(t, \xi)$ como función de dos variables, $\dot{x}(t,\xi) = \frac{\partial x}{\partial t}(t, \xi)$, reescribimos la ecuación diferencial como

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\xi) = X(t, x(t,\xi))$$

y derivamos con respecto a ξ haciendo uso de la regla de las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial t}(t,\xi) = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t,\xi)) \frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\xi)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial t}(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\xi)\right)$$

Si llamamos $Y(t)$ a la derivada parcial $\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\xi)$ con ξ fijo observamos que cumple

$$\dot{Y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t,\xi)) Y.$$

Ecuación lineal llamada ecuación variacional en $x(t,\xi)$.

Diferenciabilidad de la solución respecto a condiciones iniciales

Vamos a probar que cuando el campo es regular entonces también lo es la solución general.

Teorema Se supone que $X: D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es continuo, existe $\frac{\partial X}{\partial x}$ y la aplicación $(t,x)\in D \mapsto \frac{\partial X}{\partial x}(t,x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ es continua. Entonces la solución general $x: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^d$, $(t;t_0,x_0) \mapsto x(t;t_0,x_0)$ es diferenciable y sus derivadas son

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t;t_0,x_0) = \dot{x}(t;t_0,x_0) = X(t;x(t;t_0,x_0))$$

$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t;t_0,x_0) = y(t)$ donde $y(t)$ es la única solución de

$$\dot{y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t,x(t;t_0,x_0))\,y \,, \quad y(t_0) = -X(t_0,x_0)$$

$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t;t_0,x_0) = Y(t)$ donde $Y(t)$ es la única solución de

$$\dot{Y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t;x(t;t_0,x_0))\,Y \,, \quad Y(t_0) = I_d.$$

Observaciones 1. Las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial t}$ y $\frac{\partial x}{\partial t_0}$ son vectores en $\mathbb{R}^d$ mientras que $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ es una matriz en $\mathbb{R}^{d\times d}$.
Las funciones $y(t)$ e $Y(t)$ son soluciones de la misma ecuación lineal pero $y(t)$ es una solución vectorial e $Y(t)$ es una solución matricial (la matriz fundamental principal en t_0)

2. Para entender cómo aparecen esas fórmulas vamos a derivar en la ecuación diferencial de un modo formal,

dando por supuesto que las derivadas cruzadas conmutan,

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t;t_0,x_0) = X(t, x(t;t_0,x_0))$$

Derivando respecto a t_0,

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)\right)}_{y(t)} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t,t_0,x_0))\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)}_{y(t)}$$

Para encontrar la condición inicial derivamos la identidad

$$x(t_0;t_0,x_0) = x_0 \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial t}(t_0;t_0,x_0) + \frac{\partial x}{\partial t_0}(t_0;t_0,x_0) = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t_0}(t_0;t_0,x_0)}_{y(t_0)} = -\frac{\partial x}{\partial t}(t_0;t_0,x_0) = -X(t_0,x_0)$$

Derivando la ecuación respecto a x_0,

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)\right)}_{Y(t)} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t;t_0,x_0))\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)}_{Y(t)}$$

y derivando la condición inicial respecto a x_0,

$$x(t_0;t_0,x_0) = x_0 \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial x_0}(t_0;t_0,x_0) = I_d$$

3. La ecuación lineal

$$\dot{y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t;t_0,x_0))\,y$$

se suele llamar ecuación variacional alrededor de la solución $x(t;t_0,x_0)$. Para encontrarla hace falta conocer la solución

$x(t;t_0,x_0)$ de forma explícita. Vamos a hacer el cálculo en un caso concreto.

Ecuación variacional del péndulo alrededor del equilibrio

Consideramos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0\,, \quad \theta(0)=\theta_0\,, \quad \dot{\theta}(0)=\omega_0$$

y llamamos $\theta(t;\theta_0,\omega_0)$ a la solución. Para $\theta_0=0, \omega_0=0$ sabemos que $\theta(t;0,0)=0$ y vamos a calcular $\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}(t;0,0)$, $\frac{\partial\theta}{\partial\omega_0}(t;0,0)$. En primer lugar observamos que el teorema es aplicable haciendo $t_0=0$ y pasando a un sistema de primer orden $(x_1=\theta\,,\ x_2=\dot{\theta})$

$$x=(x_1,x_2), \qquad X(t,x) = \left(x_2, -\frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,x_1\right)$$

Calculamos

$$\frac{\partial X}{\partial x}(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

que, evaluada en $x_1(t;0,0)=0$, $x_2(t;0,0)=0$, nos da el sistema

$$\dot{Y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t,x(t;0,0))\,Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix} Y$$

Observamos que se trata de la ecuación del muelle en el espacio de fases

$$\left.\begin{aligned} \dot y_1 &= y_2 \\ \dot y_2 &= -\frac{g}{l} y_1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \ddot y_1 + \frac{g}{l} y = 0.$$

Si imponemos la condición inicial $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$,

llegamos a

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t & \sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \\ -\sqrt{\frac{g}{l}}\,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t & \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \end{pmatrix}$$

y concluimos que

$$\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}(t;0,0) = \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\omega_0}(t;0,0) = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Si desarrollamos por Taylor, en $(\theta_0,\omega_0) = (0,0)$, la función $\theta(t;\theta_0,\omega_0)$ obtenemos

$$\theta(t;\theta_0,\omega_0) = \theta(t;0,0) + \frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}(t;\theta_0,\omega_0)\,\theta_0 + \frac{\partial\theta}{\partial\omega_0}(t;\theta_0,\omega_0)\,\omega_0 + R(t;\theta_0,\omega_0)$$

donde $\displaystyle\lim_{(\theta_0,\omega_0)\to(0,0)} \frac{R(t;\theta_0,\omega_0)}{|\theta_0|+|\omega_0|} = 0.$

Llegamos a la aproximación

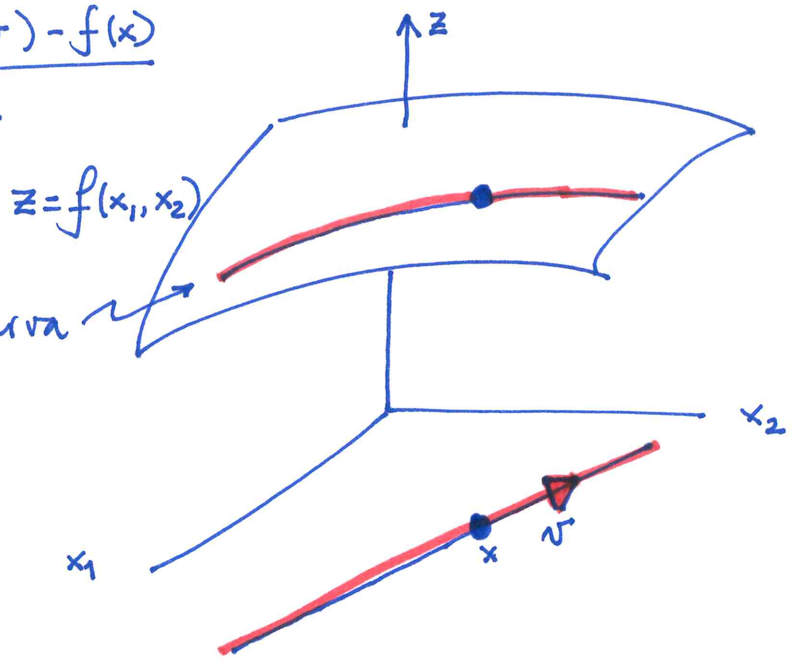
$$\theta(t;\theta_0,\omega_0) = \underbrace{\theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \omega_0\sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}_{\text{m.a.s.}} + R(t;\theta_0,\omega_0)$$

Prepararemos la demostración del teorema con dos observaciones preliminares.

① Una condición suficiente para la diferenciabilidad

Dada una función $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $\mathcal{U} = \mathring{\mathcal{U}}$, y dados un punto $x \in \mathcal{U}$ y un vector $v \in \mathbb{R}^p$, definimos la derivada direccional

$$D_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}$$



$D_v f(x)$ pendiente de la curva

Supongamos que, para cada $v \in \mathbb{R}^p$, la aplicación $x \in \mathcal{U} \longmapsto D_v f(x) \in \mathbb{R}^q$ es continua.

Entonces f es diferenciable en $\mathcal{U}$ y la diferencial $f'(x)$ está dada por la fórmula

$$f'(x) v = D_v f(x).$$

② Un sucedáneo del teorema del valor medio para funciones vectoriales

Dada una función $f: \mathcal{U} = \mathring{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ de clase C^1 y dos puntos $x, y \in \mathcal{U}$ tales que el segmento $[x,y] \subset \mathcal{U}$ se cumple

$$f(x) - f(y) = \left[\int_0^1 f'(\lambda x + (1-\lambda) y)\, d\lambda \right] (x-y).$$

Observamos que $f'(\lambda x + (1-\lambda) y)$ es una matriz en $\mathbb{R}^{q \times p}$ y la integral se entiende coordenada a coordenada. Los vectores son columna.

La demostración es corta,

$$f(x)-f(y) \underset{\text{Regla de Barrow}}{=} \int_0^1 \frac{d}{d\lambda}\left[f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\right]d\lambda \underset{\text{Regla de la Cadena}}{=} \int_0^1 f'\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)(x-y)\,d\lambda$$

$$\underset{\text{linealidad}}{=} \left[\int_0^1 f'\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)d\lambda\right](x-y)$$

Observamos que las dos primeras integrales son en $\mathbb{R}^d$ y la última en $\mathbb{R}^{d\times d}$.

Demostración del Teorema de diferenciabilidad

Nos limitaremos a discutir la diferenciabilidad en x_0; el caso general es similar.

Fijamos $(t_0,x_0)\in D$ y un intervalo compacto $[a,b]$ de manera que $(t;t_0,x_0)\in \mathcal{D}$ si $t\in[a,b]$. Dado $v\in\mathbb{R}^d$ definimos el cociente incremental

$$\Delta_h(t) = \frac{1}{h}\left[x(t;t_0,x_0+hv)-x(t;t_0,x_0)\right], \quad t\in[a,b]$$

que está bien definido si $h\neq 0$ es pequeño. Probaremos que este incremento es solución de un sistema lineal.

<u>Lema</u> Existe una función $A:[a,b]\times[-\varepsilon,\varepsilon]\to\mathbb{R}^{d\times d}$, $A=A(t,h)$, que es continua y cumple

$$\dot{\Delta}_h = A(t,h)\,\Delta_h \quad \text{si } h\neq 0$$

$$A(t,0)=\frac{\partial X}{\partial x}\left(t,x(t;t_0,x_0)\right).$$

Demostración del Teorema de diferenciabilidad

Fijamos $(t_*; t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ y un intervalo compacto $[a,b]$ de manera que

$$\alpha(t_0,x_0) < a < t_*, t_0 < b < \omega(t_0,x_0).$$

Probaremos que las derivadas direccionales con respecto a x_0 existen y son continuas, la derivada parcial respecto a t_0 es similar.

Dado $v \in \mathbb{R}^d$ definimos el cociente incremental

$$\Delta_h(t) = \frac{1}{h}\left[x(t; t_0, x_0 + hv) - x(t; t_0, x_0)\right]$$

y observamos que está bien definido si $t \in [a,b]$ y $h \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Probaremos que este incremento es solución de un sistema lineal homogéneo.

<u>Lema</u> Existe una función $A : [a,b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $(t,h) \mapsto A(t,h)$, que es continua y cumple

$$\dot{\Delta}_h(t) = A(t,h)\Delta_h(t) \quad \text{si } t \in [a,b], h \neq 0$$

$$A(t,0) = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t;t_0,x_0)).$$

Por ahora damos por bueno el lema y continuamos la demostración. Por la definición de Δ_h observamos que se cumple

$$\dot{\Delta}_h = A(t,h)\Delta_h, \quad \Delta_h(t_0) = v.$$

Se trata de un problema de valores iniciales para una ecuación lineal que depende del parámetro h. Como este problema tiene unicidad (es lineal) podemos aplicar el teorema de dependencia continua con respecto a parámetros en el dominio $]a,b[\times \mathbb{R}^d \times \Lambda$ con $\Lambda =]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Entonces $\Delta_h(t)$ converge, si $h\to 0$, a la solución del problema límite

$$\dot{y} = A(t,0)y, \quad y(t_0)=v.$$

Ya tenemos que existe la derivada direccional

$$\lim_{h\to 0}\Delta_h(t) \quad \text{si} \quad t\in]a,b[.$$

A nosotros nos interesará en t_*.

Sabemos por el lema que se trata del problema asociado a la ecuación variacional

$$\dot{y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t;t_0,x_0))y, \quad y(t_0)=v.$$

Aplicamos la teoría de sistemas lineales y denotamos por $Y(t)$ a la matriz fundamental principal en t_0, $Y(t_0)=I_{d\times d}$.

Entonces, $y(t) = Y(t)v$.

Acabamos de probar que existen las derivadas direccionales de la función

$$x_0 \longmapsto x(t;t_0,x_0)$$

y sabemos su relación con la ecuación variacional. Ahora vamos a probar que estas ~~direccion~~ derivadas direccionales son funciones continuas de $(t;t_0,x_0)$. Para nuestro propósito la notación $Y(t)$ es demasiado abreviada, en realidad Y también depende de la condición inicial (t_0,x_0). Escribiremos

$$Y = Y(t;t_0,x_0)$$

solución de

$$\dot{Y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t;t_0,x_0))Y, \quad Y(t_0)=I_{d\times d}$$

De nuevo tenemos una ecuación lineal (ahora matricial) que depende del parámetro $\lambda = (t_0, x_0)$.

Por el teorema de dependencia continua respecto a condiciones iniciales y las hipótesis sobre el campo X, sabemos que

$$(t; t_0, x_0) \in \mathcal{D} \longmapsto \frac{\partial X}{\partial x}\big(t, x(t; t_0, x_0)\big) \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

es continua. Volveremos a aplicar el teorema de dependencia continua con respecto a parámetros en el dominio $]a,b[\times \mathbb{R}^{d\times d} \times \Lambda$ donde Λ es un pequeño entorno en $\mathcal{D}$ de (t_0, x_0). Se escogerá el entorno de manera que $x(t; t_1, x_1)$ esté bien definido en $[a,b]$ si $(t_1, x_1) \in \Lambda$.

En este caso tenemos dependencia de parámetros y condiciones iniciales

$$\underbrace{\dot{Y}}_{\text{incógnita}} = \underbrace{\frac{\partial X}{\partial x}\big(t, x(t; \overbrace{t_0, x_0}^{\text{parámetro}})\big)}_{\text{campo vectorial}} Y, \quad Y(\underbrace{t_0}_{\text{instante inicial}}) = I_{d\times d}$$

pero no es difícil probar una versión del teorema de dependencia continua que combine ambas cosas. Deducimos que

$$(t; t_0, x_0) \in\ ]a,b[\times \Lambda \longmapsto Y(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

es continua. En conclusión, la función $x_0 \longmapsto x(t; t_0, x_0)$ admite derivadas direccionales en la dirección de $v \in \mathbb{R}^d$ dada por $Y(t; t_0, x_0)v$. Esta derivada direccional es continua como función de $(t; t_0, x_0)$. Sabemos que la solución general tiene derivada parcial ~~continua~~ respecto a t y podemos probar que también tiene respecto a t_0 y ambas son continuas en $(t; t_0, x_0)$. Así, la solución general tiene todas las derivadas parciales y son continuas, por tanto es diferenciable. En realidad podemos decir más, es de clase C^1.

Como consecuencia de la demostración obtenemos las fórmulas

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t;t_0,x_0) = X(t, x(t;t_0,x_0)), \quad \frac{\partial x}{\partial x_0}(t;t_0,x_0) = Y(t;t_0,x_0)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t;t_0,x_0) = -Y(t;t_0,x_0)\, X(t_0,x_0)$$

Demostración del Lema

$$\dot{\Delta}_h(t) = \frac{1}{h}\left[\dot{x}(t;t_0,x_0+hv) - \dot{x}(t;t_0,x_0)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[X(t, x(t;t_0,x_0+hv)) - X(t, x(t;t_0,x_0))\right]$$

$$= \underbrace{\left[\int_0^1 \frac{\partial X}{\partial x}(t, \lambda x(t;t_0,x_0+hv) + (1-\lambda)x(t;t_0,x_0))\, d\lambda\right]}_{\overset{\shortparallel}{A(t,h)} \text{ si } h\neq 0} \Delta_h(t)$$

sucedáneo del Teorema de Valor Medio

Para probar que $h\neq 0 \mapsto A(t,h)$ es continua se usa la teoría de integrales dependientes de parámetros y la dependencia continua respecto a condiciones iniciales. Para calcular $\lim_{h\to 0} A(t,h)$ se puede usar el teorema de la convergencia dominada y la dependencia continua respecto a condiciones iniciales

Diferenciabilidad con respecto a parámetros

(*) $\qquad x' = X(t,x,\lambda), \quad x(t_0)=x_0$

$X: G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ continua, G abierto + conexo

$\exists \frac{\partial X}{\partial x}(t,x,\lambda), \frac{\partial X}{\partial \lambda}(t,x,\lambda)$ y además las funciones

$(t,x,\lambda)\in G \mapsto \frac{\partial X}{\partial x}(t,x,\lambda)\in \mathbb{R}^{d\times d}, \quad (t,x,\lambda)\in G \mapsto \frac{\partial X}{\partial \lambda}(t,x,\lambda)\in\mathbb{R}^{d\times m}$

son continuas

Dado $\lambda=(\lambda_1 \dots \lambda_m)$ tal que $(t_0,x_0,\lambda)\in G$, podemos definir la solución de (*), con intervalo maximal $]\alpha(\lambda),\omega(\lambda)[$.

Consideramos el conjunto donde $x(t;\lambda)$ está bien definida

$$\mathcal{G} = \{(t,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m : (t_0,x_0,\lambda)\in G, \ \alpha(\lambda)<t<\omega(\lambda)\}$$

y la función

$$x: \mathcal{G}\to\mathbb{R}^d, \quad (t,\lambda)\mapsto x(t;\lambda)$$

<u>Teorema</u> $\mathcal{G}$ es abierto en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ y $x\in C^1(\mathcal{G},\mathbb{R}^d)$. Además, $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,\lambda)$ es la solución del problema de valores iniciales

$$y' = \frac{\partial X}{\partial x}(t,x(t,\lambda),\lambda)\,y + \frac{\partial X}{\partial \lambda}(t,x(t,\lambda),\lambda), \quad y(t_0)=0.$$

<u>Nota</u> La ecuación variacional es ahora una ecuación lineal completa del tipo

$$y' = A(t)y + b(t).$$

Además, $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,\lambda)$ es una solución matricial,

$$y = (y_1|\dots|y_m), \quad y_i = \frac{\partial x}{\partial \lambda_i}(\cdot,\lambda)$$

<u>Un ejemplo</u> $\quad x'' + x + \varepsilon x^3 = 0, \; x(0) = 0, \; \dot{x}(0) = 0$

En este caso el único parámetro es ε. Por unicidad sabemos que $x(t;\varepsilon) = 0$, $(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$. En este caso no hay que aplicar ningún teorema, sabemos que $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;\varepsilon) = 0$.

<u>Un ejemplo más complicado</u> $\quad x'' + x + \varepsilon x^3, \; x(0) = 1, \; \dot{x}(0) = 0$

En este caso no es posible encontrar $x(t;\varepsilon)$ de forma explícita si $\varepsilon \neq 0$. Pero para $\varepsilon = 0$,

$$x(t;0) = \cos t, \; t \in \mathbb{R}.$$

Es posible probar que $x(t;\varepsilon)$ está siempre definida en $]-\infty,+\infty[$ si $\varepsilon>0$ (Ejercicio). Pretendemos calcular $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;0)$.

{ En general, $x(t;\varepsilon)$ está definida en $]\alpha(\varepsilon),\omega(\varepsilon)[$ pero $\alpha(\varepsilon) = -\infty$, $\omega(\varepsilon) = +\infty$ si ε es pequeño }

Pasamos a un sistema de primer orden $y_1 = x$, $y_2 = x'$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad d = 2, \quad m = 1$$

$$y' = Y(t,y,\varepsilon), \quad Y(t,y,\varepsilon) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 - \varepsilon y_1^3 \end{pmatrix}$$

Estamos en las hipótesis del teorema con

$$\frac{\partial Y}{\partial y}(t,y,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-3\varepsilon y_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}(t,y,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1^3 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon) = z(t)$ solución de

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-3\varepsilon y_1(t,\varepsilon)^2 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1(t,\varepsilon)^3 \end{pmatrix}, \quad z(0) = 0.$$

Para $\varepsilon = 0$,

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos^3 t \end{pmatrix}, \quad z(0) = 0$$

Aplicamos la fórmula de variación de constantes

$$z' = A(t)\, z + b(t), \quad z(t_0) = z_0, \quad \Phi(t) \text{ m.f. de } z' = A(t)\, z$$

con $\Phi(t_0) = I$

$$z(t) = \Phi(t)\, z_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds$$

En nuestro caso,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$ Rotación horaria de ángulo t

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$ anti-horaria

$$z(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos^3 s \end{pmatrix} ds = \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} \cos^3 s \operatorname{sen} s \\ -\cos^4 s \end{pmatrix} ds$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \underset{\displaystyle \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;0)}{\underset{\shortparallel}{z_1(t)}} = -\frac{\cos^5 t}{4} - \operatorname{sen} t \left(\cos^3 t \operatorname{sen} t + \frac{3}{8}\left(t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t)\right)\right)$$

Para $\varepsilon \neq 0$ pero próximo a cero obtenemos un desarrollo asintótico de la solución, $t \in \mathbb{R}$

$$x(t,\varepsilon) = x(t;0) + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;0)\,\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0$$

$$= \cos t + z_1(t)\,\varepsilon + o(\varepsilon)$$

Este desarrollo es uniforme para t en intervalos compactos

[Ejercicio]

<u>Demostración del Teorema</u> Consideramos el sistema ampliado

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+m}, \qquad \begin{cases} x' = X(t,x,y) \\ y' = 0 \end{cases}$$

con condición inicial $\xi(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$. El campo ampliado

$\mathfrak{X} : G \to \mathbb{R}^{d+m}$, $\mathfrak{X}(t,\xi) = \begin{pmatrix} X(t,x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$ está en las condiciones del teorema de diferenciabilidad respecto a condiciones iniciales pues

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \xi}(t,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(t,x,y) & \frac{\partial X}{\partial \lambda}(t,x,y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+d)\times(m+d)}$$

La solución general $\xi(t;t_0,\xi_0)$ está definida en

$$\mathcal{D} = \{(t;t_0,\xi_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d+m} : (t_0,\xi_0) \in G,\ \alpha(t_0,\xi_0) < t < \omega(t_0,\xi_0)\}$$

y es C^1. Observamos que $\mathcal{G}$ es la imagen de $\mathcal{D}$ por la proyección $\left(t;t_0,\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right) \mapsto (t;\lambda)$, así que $\mathcal{G}$ es abierto en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$. Además, $x(t;\lambda)$ es la composición de la primera coordenada de $\xi(t;t_0,\xi_0)$ con la inyección $(t,\lambda) \mapsto \left(t;t_0,\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$. Por la regla de la cadena $x(t,\lambda)$ es C^1. Para calcular $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,\lambda)$ calculamos la ecuación variacional a lo largo de $\xi(t;t_0,\xi_0)$,

$$\eta' = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \xi}(t,\xi(t;t_0,\xi_0))\,\eta, \quad \eta(t_0) = I_{m+d}$$

$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial \lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ es la primera coordenada de η.

La solución general $\xi(t;t_0,\xi_0)$ tiene dos componentes que denotaremos por $\xi_1 \in \mathbb{R}^d$ y $\xi_2 \in \mathbb{R}^m$,

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \text{ de manera que } x(t;\lambda) = \xi_1\left(t;t_0,\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$$

y $$\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t;\lambda) = \frac{\partial \xi_1}{\partial z_0}\left(t;t_0,\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ I_{m\times m} \end{pmatrix}$$

Escribimos $\frac{\partial \xi}{\partial z_0}(t;t_0,z_0)$ por bloques y observamos que $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ es el bloque M_{12}

$$\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0}(t;t_0,\xi_0) = \left(\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right) = M$$

$M_{21} = 0$, $M_{22} = I$

M es la solución de $M' = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \xi}(t,\xi(t;t_0,\xi_0))M$, $M(t_0) = I$

$$\begin{pmatrix} M_{11}' & M_{12}' \\ M_{21}' & M_{22}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} & \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_{12}' = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x}M_{12} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \lambda}\underset{I}{\underset{\shortparallel}{M_{22}}} \quad \text{ec. variacional}$$

$$M(t_0) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \Longrightarrow M_{12}(t_0) = 0$$