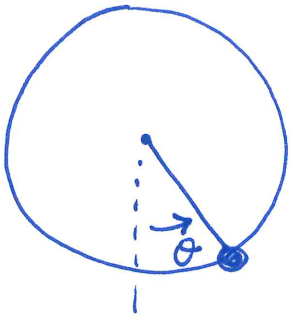
Las oscilaciones de un péndulo y el movimiento armónico simple

En la Física de Bachillerato se aproxima el movimiento de un péndulo por el de un oscilador armónico



$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\theta = 0.$$

Como $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$, las dos ecuaciones se parecen cerca del origen y se espera que para pequeñas oscilaciones $(\theta \simeq 0)$ las soluciones de ambas ecuaciones estén cerca.

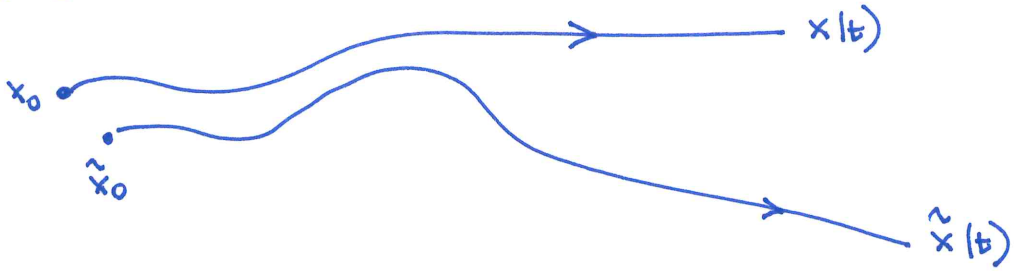
En esta lección vamos a desarrollar una teoría alrededor de la pregunta siguiente: suponemos que $x(t)$ e $y(t)$ son soluciones de los problemas de Cauchy

$$\dot{x} = X(t,x),\ x(t_0) = x_0, \qquad \dot{y} = Y(t,y),\ y(\tilde{t}_0) = y_0.$$

Suponemos que los campos X e Y están próximos, así como las condiciones iniciales (t_0, x_0), $(\tilde{t}_0, y_0)$, ¿podemos asegurar que $x(t)$ e $y(t)$ están próximas? ¿en qué sentido?

Dependencia continua respecto a condiciones iniciales

Pensemos en un fluido con campo de velocidades $X(t,x)$ y observemos el movimiento de dos partículas que empiezan desde posiciones muy próximas, al menos a corto plazo estas partículas deberán permanecer cercanas



El resultado que vamos a presentar precisa esta intuición.

<u>Teorema</u> Se supone que $X : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es un campo continuo y, para cada condición inicial en D, el problema de Cauchy asociado a $\dot{x} = X(t,x)$ tiene una <u>única</u> solución.

Fijamos una condición inicial $(t_0, x_0) \in D$ y suponemos que la solución $x(t)$ de

$$\dot{x} = X(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

está definida en $[a,b]$ con $a < t_0 < b$.

Sean $(t_{0n}, x_{0n}) \in D$ condiciones iniciales que cumplen

$$t_{0n} \to t_0, \quad x_{0n} \to x_0.$$

Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ el problema

$$\dot{x} = X(t,x), \quad x(t_{0n}) = x_{0n}$$

tiene solución $x_n(t)$ definida en $[a,b]$ y se cumple

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \quad \text{uniformemente en } t \in [a,b].$$

<u>Observaciones</u>

1. Sin ser muy precisos podemos resumir el teorema: la unicidad implica la dependencia continua.

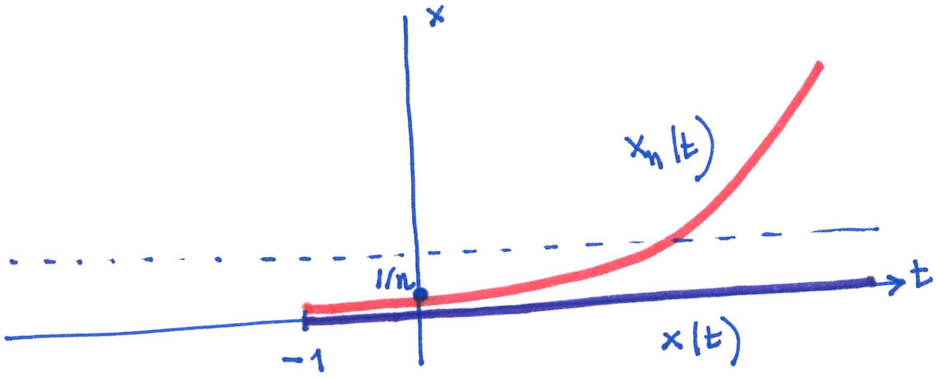
2. Es esencial que el intervalo de definición de $x(t)$ sea compacto.
Vamos a ver dos ejemplos en los que, con intervalos abiertos, no es válida la conclusión del teorema.

Ejemplo 1 $\dot{x} = 2x$, $x(0) = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

Consideramos el problema límite

$$\dot{x} = 2x, \; x(0) = 0,$$

cuya única solución es $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.
Podemos aplicar el teorema en intervalos compactos $[a,b]$, $a<0<b$; la conclusión sería que $x_n(t) = \frac{1}{n} e^{2t}$ converge a 0 uniformemente en $[a,b]$. Sin embargo esta convergencia no es uniforme en $[-1,\infty[$



Ejemplo 2 $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 1 + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

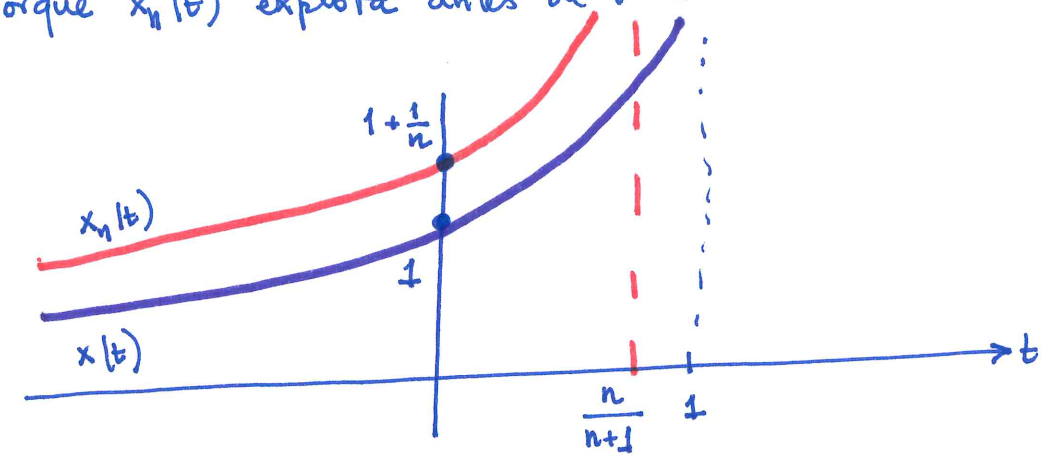
La solución del problema límite

$$\dot{x} = x^2, \; x(0) = 1$$

es $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$, $t \in]-\infty, 1[$. El teorema sería aplicable en cada intervalo compacto $[a,b]$, $a<0<b<1$ y nos diría que $x_n(t) = \dfrac{x_0}{1-x_0 t}$ converge uniformemente a $x(t)$ en $[a,b]$.

Sin embargo esta convergencia no se puede dar en $]-1,1[$

porque $x_n(t)$ explota antes de $t=1$



Demostraremos el teorema en dos pasos:

Paso 1 Caso Particular $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, X acotado. En este caso solo hay que suponer la unicidad para $\dot{x} = X(t,x)$, $x(t_0)=x_0$ en $[a,b]$.

Paso 2 Caso General

En el primer paso usaremos un lema sobre convergencia uniforme. La demostración se deja como ejercicio.

Lema Se supone que $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ es una sucesión de funciones que cumplen:

(i) $\{f_n\}$ es uniformemente acotada y equicontinua

(ii) Existe una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}^d$ tal que si $\{f_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial que converge uniformemente, entonces $\{f_{\sigma(n)}\} \to f$.

Entonces la sucesión completa $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en $[a,b]$.

Demostración del Teorema (Paso 1) Suponemos $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ y

$$\|X(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d.$$

Sabemos por la teoría de prolongación que todas las soluciones de la ecuación $\dot{x} = X(t,x)$ están definidas en $]-\infty,\infty[$.

Sea $x_n(t)$ una solución de

$$\dot{x} = X(t,x), \quad x(t_{on}) = x_{on}$$

vamos a probar que $x_n(t) \to x(t)$ uniformemente en $t \in [a,b]$.

Para ello aplicaremos el lema con $f_n = x_n$, $f = x$. De la ecuación integral

$$x_n(t) = x_{on} + \int_{t_{on}}^{t} X(s, x_n(s))\,ds$$

se deducen las estimaciones

$$\|x_n(t)\| \leq \|x_{on}\| + M|t - t_{on}|,$$

$$\|x_n(t) - x_n(\tilde{t})\| \leq M|t - \tilde{t}|,$$

válidas en toda la recta real. De aquí es fácil deducir que $\{x_n\}$ es uniformemente acotada y equicontinua en $[a,b]$.

Veamos ahora que se cumple la condición (ii) del lema. Suponemos que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial uniformemente convergente. Designamos por x^* al límite de esta parcial y debemos probar que $x^* = x$. Para ello pasamos al límite en la identidad

$$x_{\sigma(n)}(t) = x_{o\sigma(n)} + \int_{t_{o\sigma(n)}}^{t} X(s, x_{\sigma(n)}(s))\,ds$$

y obtenemos

$$x^*(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} X(s, x^*(s))\,ds.$$

En este paso al límite usaremos el teorema de la convergencia dominada de un modo que ya debe ser familiar.

La función continua $x^*(t)$ es solución de la ecuación integral y por tanto lo es también del problema de Cauchy

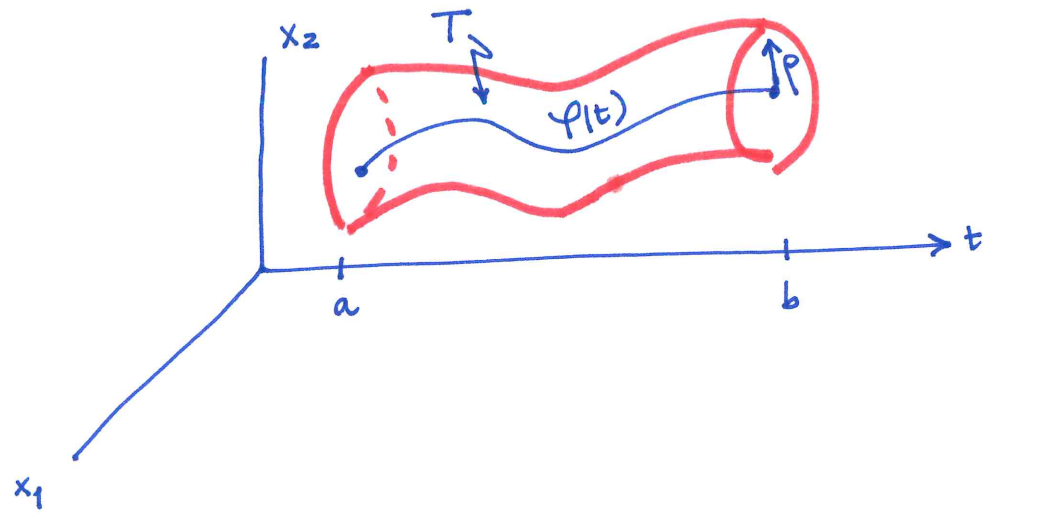
$$\dot{x} = X(t,x), \; x(t_0) = x_0.$$

Por hipótesis sabemos que este problema tiene una única solución definida en $[a,b]$ y por tanto $x^*(t) = x(t)$, $t \in [a,b]$. Así, $x_{\sigma(n)} \longrightarrow x$ unif. en $[a,b]$.

Para tratar el caso general necesitaremos algunas ideas sobre la noción de retracción.

Dada una función continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ y un número $\rho > 0$, consideramos el "tubo"

$$T = \{ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \; t \in [a,b], \; \|x - \varphi(t)\| \leq \rho \}$$

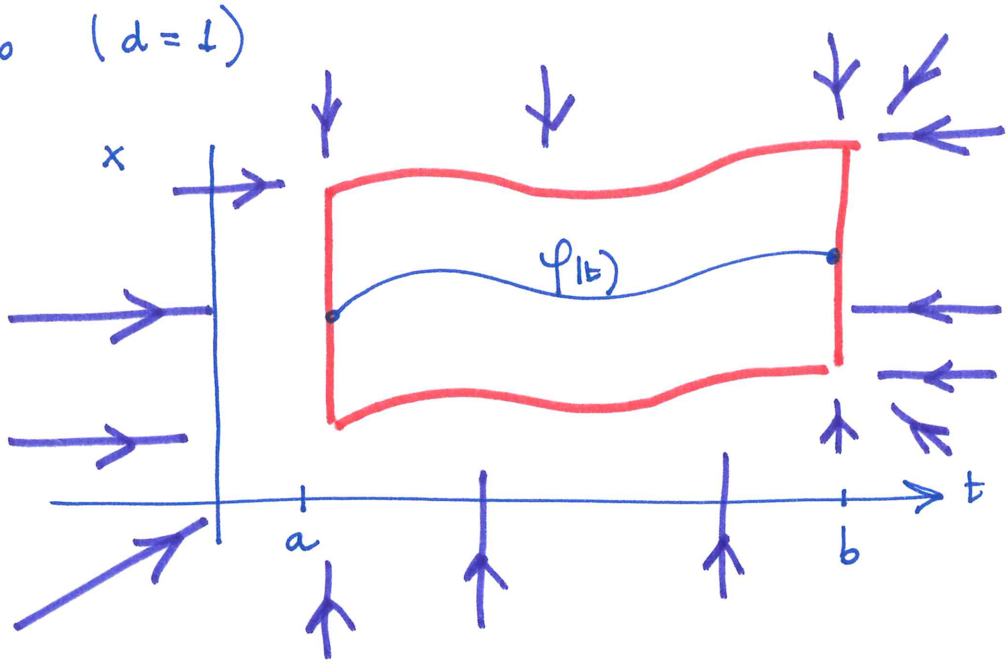


$(d=2)$

Es posible construir un retracción de todo el espacio a T; es decir, existe una función continua

$$r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow T \quad \text{tal que } r(t,x) = (t,x) \text{ si } (t,x) \in T.$$

Este hecho es bastante intuitivo y nos podemos convencer con un dibujo $(d=1)$



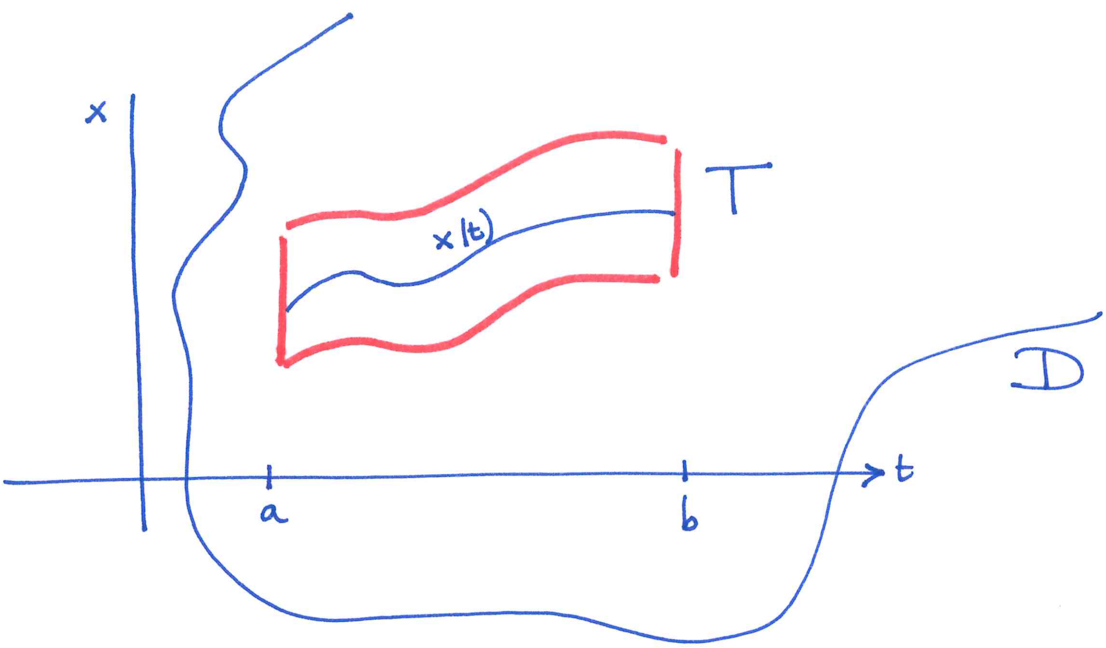
También es posible escribir r de modo explícito,

$$r(t,x) = (\sigma(t), R(t,x)) , \quad \sigma(t) = \begin{cases} a, & t \leq a \\ t, & a < t < b \\ b, & t \geq b \end{cases}$$

$$R(t,x) = \begin{cases} x & \text{si } \|x-\varphi(t)\| \leq \rho \\ \varphi(t) + \rho \dfrac{(x-\varphi(t))}{\|x-\varphi(t)\|} & \text{si } \|x-\varphi(t)\| > \rho . \end{cases}$$

<u>Demostración del Teorema (Paso 2)</u> Dado que la gráfica de $x(t)$, $\{(t,x(t)) : t \in [a,b]\}$ es un compacto dentro de D, podemos encontrar un radio $\rho > 0$ lo bastante pequeño ~~como~~ para que el tubo T alrededor de $x(t)$ quede también dentro de D,

$$T \subset D$$



Definimos el campo modificado

$$X^*: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad X^*(t,x) = X(r(t,x))$$

y observamos que X^* es un campo acotado y definido en todo el espacio,

$$\|X^*(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$$

Si $M = \max_T \|X(t,x)\|$.

Ahora vamos a aplicar el Paso 1 a la ecuación modificada. Para ello debemos probar que el problema

$$\dot{x} = X^*(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

tiene una única solución definida en $[a,b]$.

Como $r(t,x(t)) = (t,x(t))$ observamos que la solución $x(t)$ del problema original también lo es del modificado.

Veamos que es la única. Sea $x^*(t)$ una solución y definamos

$$I = \{t \in [a,b] : x^*(t) = x(t)\}.$$

Probaremos $I=[a,b]$. Como I es no vacío ($t_0 \in I$) y cerrado, será suficiente probar que es abierto (relativo a $[a,b]$).

Dado $\tau \in I$ sabemos que $x(\tau)=x^*(\tau)$ y, por continuidad, existe $\delta>0$ tal que

$$\|x(t)-x^*(t)\| \leq \rho \quad \text{si} \quad t \in J_\tau = [\tau-\delta, \tau+\delta] \cap [a,b].$$

Así $(t, x^*(t))$ queda dentro de T cuando $t \in J_\tau$ y, como r es la identidad en el tubo,

$$X^*(t, x^*(t)) = X(r(t, x^*(t))) = X(t, x^*(t)).$$

En consecuencia la restricción de $x^*(t)$ a J_τ es solución de la ecuación original $\dot{x} = X(t, x(t))$. Como $x^*(t)$ y $x(t)$ cumplen la misma condición inicial en τ, por la unicidad(*) se cumplirá $x^*(t)=x(t)$ en J_τ. Así $J_\tau \subset I$, lo que prueba que I es abierto relativo.

Una vez que sabemos $I=[a,b]$ o, lo que es lo mismo,

$$x(t) = x^*(t) \quad \forall t \in [a,b],$$

tenemos que $x(t)$ es la única solución en $[a,b]$ de $\dot{x}=X(t,x)$, $x(t_0)=x_0$. Aplicamos el paso 1 al campo X^* y obtenemos, para n grande, una sucesión $x_n^*(t)$, $t \in [a,b]$, formada por soluciones de los problemas

$$\dot{x} = X^*(t,x), \; x(t_{0n}) = x_{0n}$$

y que convergen uniformemente a $x(t)$ en $[a,b]$

(*) El caso $\tau = a, b$ se debe tratar con más cuidado

Al ser la convergencia uniforme existirá un natural $N \in \mathbb{N}$ a partir del cual

$$\| x_n^*(t) - x(t) \| \leq \rho \quad \forall t \in [a, b],\ n \geq N.$$

Entonces $x_n^*(t)$ también es solución del ~~teo~~ problema original

$$\dot{x} = X(t, x),\ x(t_{0n}) = x_{0n}$$

y el teorema está probado.

Ecuaciones diferenciales con parámetros

Las ecuaciones diferenciales en Física suelen depender de ~~los~~ parámetros: las masas de los planetas en el modelo Newtoniano del sistema solar y la longitud en un péndulo, etcétera.

Normalmente esos parámetros sólo se conocen de forma aproximada e interesa saber que las soluciones cambian poco cuando esos parámetros se perturban.

Comenzamos por el ejemplo del péndulo,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \theta = 0,\quad \theta(0) = \vartheta_0,\ \dot{\theta}(0) = \omega_0$$

y designamos por $\theta(t; \ell)$ a la solución. Nos gustaría saber que la posición $\theta(t; \ell)$ y la velocidad $\dot{\theta}(t; \ell)$ son continuas con respecto a la longitud ℓ. Trabajaremos en el espacio de estados,

$$\dot{x} = X(t, x, \ell),\ x = (x_1, x_2),\ X(t, x, \ell) = \left(x_2, -\frac{g}{\ell} \operatorname{sen} x_1\right).$$

Vamos ahora a una formulación general. Consideramos un campo que depende de m parámetros $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$,

$$X : D \times \Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad (t, x, \lambda) \longmapsto X(t, x, \lambda)$$

donde D y Λ son conjuntos abiertos y conexos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y $\mathbb{R}^m$. Suponemos que X es continuo en $D \times \Lambda$ y que hay <u>unicidad</u> para el problema de Cauchy asociado a $\dot{x} = X(t, x, \lambda)$ con cualquier condición inicial en D.

Fijamos $(t_0, x_0) \in D$ y designamos por $x(t; \lambda)$ a la solución de

$$\dot{x} = X(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0 .$$

<u>Teorema</u> En las condiciones anteriores se supone que $\{\lambda_n\}$ es una sucesión en Λ que converge a $\lambda_* \in \Lambda$. Además $x(t; \lambda_*)$ está definida en $[a, b]$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ la solución $x(t; \lambda_n)$ está definida en $[a, b]$ y se cumple

$$\lim_{n \to \infty} x(t; \lambda_n) = x(t; \lambda_*)$$

uniformemente en $t \in [a, b]$.

<u>Observaciones</u>

1. De nuevo es esencial que el intervalo de definición sea compacto. La solución de

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(0) = 1$$

es $x(t; \lambda) = e^{\lambda t}$, $t \in \,]-\infty, \infty[$. Dados $\lambda_n = \frac{1}{n}$, $\lambda_* = 0$

se cumple $x(t;\lambda_n) = e^{\frac{1}{n}t}$ que converge a $x(t;\lambda_*) = 1$.
Esta convergencia es uniforme en cada intervalo compacto pero no lo es en todo $\mathbb{R}$ $\left(x(n;\lambda_n) = e \not\to 1 \right)$

2. La teoría de integrales dependientes de parámetros se engloba en parte en el teorema anterior. Supongamos que

$f : \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}$ es continua y definamos

$$F : \Lambda \to \mathbb{R}, \quad F(\lambda) = \int_a^b f(t,\lambda)\, dt.$$

Entonces F es continua. Para justificarlo definimos el campo

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}, \quad X(t,x,\lambda) = f(t,\lambda).$$

El problema de valores iniciales

$$\dot{x} = X(t,x,\lambda), \quad x(a) = 0$$

tiene la única solución

$$x(t;\lambda) = \int_a^t f(s,\lambda)\, ds.$$

Entonces $F(\lambda) = x(b;\lambda)$.

A partir del teorema de la convergencia dominada se pueden obtener resultados más profundos.

Vamos a probar el teorema con un truco que lo reduce a un corolario del teorema sobre dependencia continua.

Demostración La idea consiste en hacer que el parámetro λ pase a ser incógnita. Para ello definimos la incógnita $\xi = (x,\lambda) \in \mathbb{R}^{d+m}$ y consideramos el sistema

$$\dot{x} = X(t,x,\lambda), \quad \dot{\lambda} = 0.$$

El campo $\mathcal{X}(t,\xi) = (X(t,x,\lambda), 0)$ está definido y es continuo, $\mathcal{X} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d+m} \to \mathbb{R}^{d+m}$, $\mathcal{D} = D \times \Lambda$.

Además, para cada condición inicial en $\mathcal{D}$ hay solución y es única $\xi(t) = (x(t), \lambda)$

sol de $\dot{x} = X(t,x,\lambda)$ Constante

La condición inicial $(t_0, x_0, \lambda_n) \in \mathcal{D}$ converge a (t_0, x_0, λ_*) y por tanto $\lim_{n\to\infty} \xi_n(t) = \xi(t)$ unif. en $[a,b]$. Esto equivale a decir que $x(t;\lambda_n) \to x(t,\lambda_*)$ unif en $[a,b]$.

Vamos a utilizar este teorema para discutir el problema con el que empezamos la lección.

Aproximación del péndulo por el oscilador armónico

Para cada $\varepsilon > 0$ llamamos $\theta(t;\varepsilon)$ a la solución del problema

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \theta = 0, \quad \theta(0) = \varepsilon, \ \dot{\theta}(0) = 0.$$

El teorema de dependencia continua con respecto a condiciones iniciales implica que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \theta(t,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dot{\theta}(t,\varepsilon) = 0$$

uniformemente en $t \in [a,b]$, para cada intervalo compacto $[a,b]$.

Este resultado es intuitivo, pues dejamos caer el péndulo de muy poca altura. Vamos a obtener un resultado mucho más fino que nos liga $\theta(t,\varepsilon)$ con la solución del problema lineal

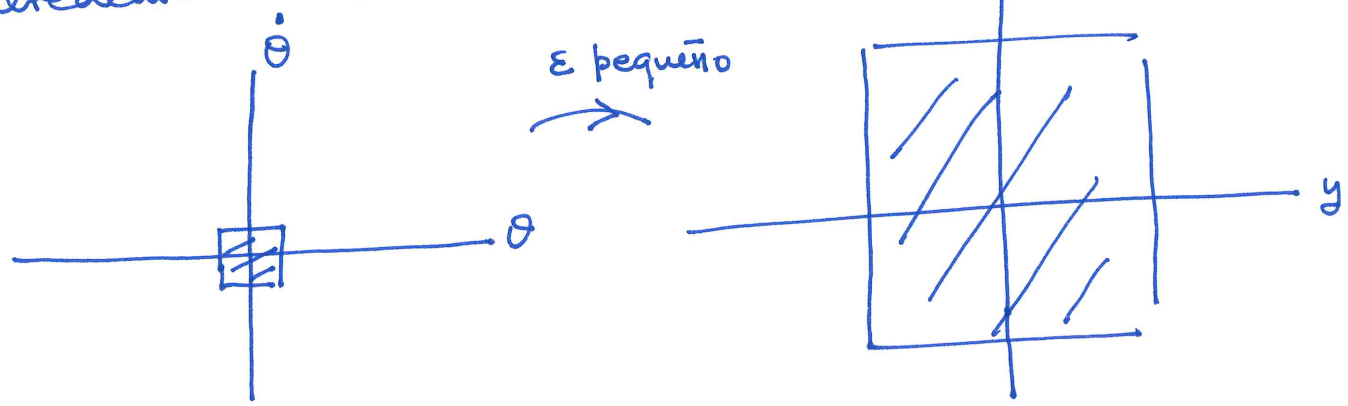
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varepsilon, \quad \dot{\varphi}(0) = 0,$$

que viene dada por la fórmula $\varphi_\varepsilon(t) = \varepsilon \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t$.

Para ello introducimos el cambio de variable

$$\theta = \varepsilon y_1, \qquad \dot{\theta} = \varepsilon y_2,$$

que tiene una doble finalidad, por una parte pasamos a un sistema de primer orden y por otra hacemos un zoom alrededor de $\theta = \dot{\theta} = 0$



Obtenemos

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -\frac{g}{\ell}\left(\frac{\operatorname{sen} \varepsilon y_1}{\varepsilon y_1}\right) y_1, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

La función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(y_1, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \varepsilon y_1}{\varepsilon y_1} & \text{si } \varepsilon y_1 \neq 0 \\ 1 & \text{si } \varepsilon y_1 = 0 \end{cases}$$

es continua. Entonces el campo

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad X(t, y_1, y_2, \varepsilon) = \left(y_2, -\frac{g}{\ell} F(y_1, \varepsilon) y_1\right)$$

es continuo y hay unicidad para cada problema de Cauchy.

Usando el teorema de dependencia continua respecto a parámetros, para

$$\dot{y} = Y(t, y, \varepsilon), \quad y(0) = (1,0),$$

deducimos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y_1(t,\varepsilon) = \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} y_2(t,\varepsilon) = -\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, \operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t,$$

uniformemente en $t \in [a,b]$.

Deshaciendo el cambio obtenemos los desarrollos, para $\varepsilon \to 0$,

$$\theta(t,\varepsilon) = \varepsilon \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t + o(\varepsilon)$$

$$\dot{\theta}(t,\varepsilon) = -\varepsilon\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, \operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t + o(\varepsilon)$$

que son uniformes en $t \in [a,b]$.

<u>Nota</u> Hemos usado la notación "o pequeña". Dadas dos funciones $f = f(\lambda)$, $g = g(\lambda)$,

$$f(\lambda) = o(g(\lambda)) \text{ si } \lambda \to 0 \text{ significa } \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} = 0.$$

La solución general

Consideramos la ecuación $\dot{x} = X(t,x)$ con $X : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua y suponemos que hay unicidad para el problema de Cauchy con cualquier condición inicial $(t_0, x_0) \in D$. La solución de

$$\dot{x} = X(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

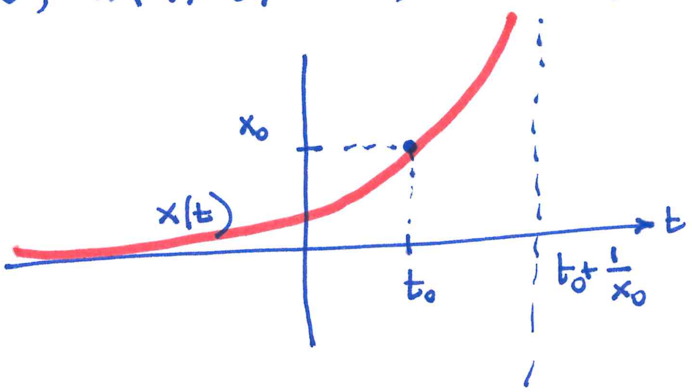
se va a denotar por $x(t; t_0, x_0)$ y estará definida en intervalo maximal $-\infty \leq \alpha < t_0 < \omega \leq +\infty$. El intervalo maximal puede variar con la condición inicial y por eso escribiremos $\alpha = \alpha(t_0, x_0)$, $\omega = \omega(t_0, x_0)$.

Veamos un ejemplo en el que es posible calcular de modo explícito:

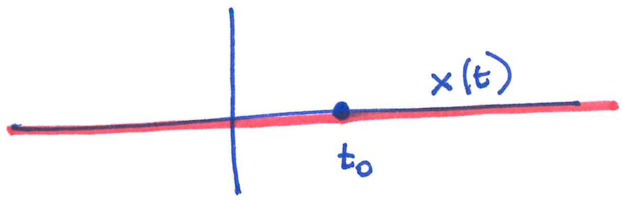
$$\dot{x} = x^2, \quad D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x(t; t_0, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$

Para determinar el intervalo maximal distinguimos tres tipos de soluciones según la posición de la asíntota $1 = x_0(t - t_0)$.

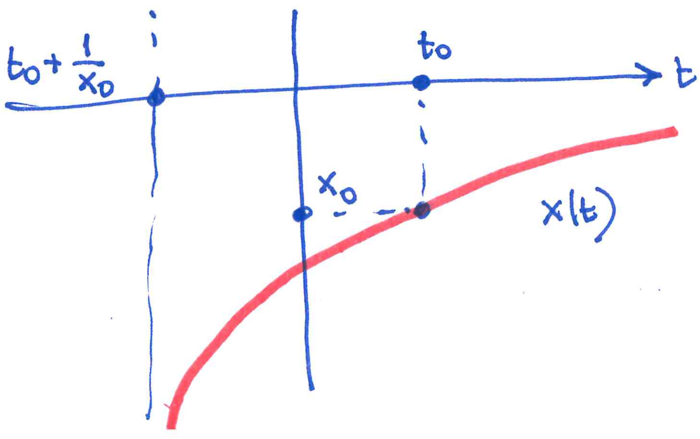
i) Si $x_0 > 0$, $\alpha(t_0, x_0) = -\infty$, $\omega(t_0, x_0) = t_0 + \frac{1}{x_0}$



ii) Si $x_0 = 0$, $\alpha(t_0, x_0) = -\infty$, $\omega(t_0, x_0) = +\infty$



iii) Si $x_0 < 0$, $\alpha(t_0, x_0) = t_0 + \frac{1}{x_0}$, $\omega(t_0, x_0) = +\infty$



Volvemos al caso general y definimos la solución general

$$x : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}\times D \to \mathbb{R}^d, \quad (t; t_0, x_0) \longmapsto x(t; t_0, x_0)$$

donde

$$\mathcal{D} = \{ (t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times D : \alpha(t_0, x_0) < t < \omega(t_0, x_0) \}.$$

<u>Teorema</u> $\mathcal{D}$ es abierto y x es continua.

En la prueba usaremos un resultado sobre convergencia uniforme que se deja como ejercicio.

<u>Lema</u> Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ y sea $t_n \in [a,b]$ con $t_n \to t_*$. Entonces $f_n(t_n) \to f(t_*)$.

<u>Demostración del Teorema</u> Fijamos $(\tau; t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ y escogemos números a y b que cumplen

$$\alpha(t_0, x_0) < a < \tau, t_0 < b < \omega(t_0, x_0).$$

Dada una sucesión $(t_{0n}, x_{0n}) \in D$ que converge a (t_0, x_0) sabemos, por el teorema de dependencia continua, que si $n \geq N$ entonces

(i) $\quad \alpha(t_{0n}, x_{0n}) < a < b < \omega(t_{0n}, x_{0n})$

y

(ii) $\quad x(t; t_{0n}, x_{0n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t; t_0, x_0)$ uniformemente en $t \in [a,b]$.

A partir de (i) se prueba, por reducción al absurdo, que existe $\delta > 0$ tal que si $|\tilde{t}_0 - t_0| < \delta$, $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < \delta$ entonces

$$\alpha(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) < a < b < \omega(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0).$$

Entonces $[a,b] \times]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\times B_\delta(x_0) \subset \mathcal{D}$ y esto prueba que $\mathcal{D}$ es abierto.

Probemos ahora que x es continua. Para ello vamos a usar la caracterización de continuidad por sucesiones, el lema sobre convergencia uniforme y (ii).

Dada una sucesión $(\tau_n; t_{0n}, x_{0n}) \to (\tau; t_0, x_0)$, escogemos N tal que si $n \geq N$ se cumple i) y definimos

$$f_n(t) = x(t; t_{0n}, x_{0n}), \quad t \in [a,b].$$

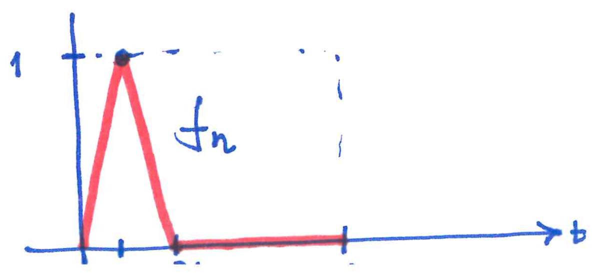
Sabemos por ii) que f_n converge uniformemente a $f(t) = x(t; t_0, x_0)$. Como $\tau_n \to \tau$ podemos usar el lema para deducir que

$$x(\tau_n; t_{0n}, x_{0n}) = f_n(\tau_n) \longrightarrow f(\tau) = x(\tau; t_0, x_0),$$

hemos probado la continuidad de x como función de tres variables $(t; t_0, x_0)$.

<u>Nota</u> Conviene volver a pensar un poco en el lema. La convergencia uniforme juega un papel crucial. Veamos un ejemplo de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ que convergen <u>puntualmente</u> a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t_n \to t_*$, pero $f_n(t_n) \not\to f(t_*)$

$$f(t) \equiv 0, \quad t_n = \frac{1}{n}, \quad t_* = 0$$



$$f_n(t_n) = 1 \not\to f(t_*) = 0.$$