Conceptos básicos de Combinatoria.

- Variaciones
- Permutaciones.
- Combinaciones.
- Relación de ejercicios.

VARIACIONES

Dado un conjunto con n elementos distintos, las variaciones de p elementos son los distintos grupos ordenados que pueden formarse con p elementos cualesquiera de dicho conjunto.

- **Variaciones sin repetición,** $p \leq n$: ***grupos ordenados de*** p ***elementos distintos***:

  Variaciones sin repetición de dos elementos de $\{1, 2, 3\} \rightarrow 12,\ 13,\ 21,\ 23,\ 31,\ 32.$

  El número de variaciones sin repetición indica de cuántas formas pueden elegirse p elementos distintos de un conjunto de n elementos distintos, teniendo en cuenta el orden:

  $$\boxed{V_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1); \quad n, p \in \mathbb{N},\ p \leq n}$$

- **Variaciones con repetición,** $p \in \mathbb{N}$: ***grupos ordenados de*** p ***elementos, no necesariamente distintos***:

  Variaciones con repetición de dos elementos de $\{1, 2, 3\} \rightarrow 11,\ 12,\ 13,\ 21,\ 22,\ 23,\ 31,\ 32,\ 33.$

  El número de variaciones con repetición indica de cuántas formas pueden elegirse p elementos de un conjunto de n elementos distintos, pudiendo haber repeticiones y teniendo en cuenta el orden (ahora $n, p \in \mathbb{N}$ son arbitrarios):

  $$\boxed{VR_n^p = n^p; \quad n, p \in \mathbb{N}}$$

Ejemplo 1: *¿De cuántas formas se puede elegir una junta directiva entre los 24 miembros de un club si dicha junta está constituida por un presidente, un vicepresidente, un tesorero y un secretario?*

Solución: Hay que elegir ordenadamente cuatro individuos distintos entre los 24 miembros:

$$V_{24}^4 = 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 255.024.$$

Ejemplo 2: *¿Cuántas columnas de quiniela hay que rellenar para acertar seguro los 14 resultados? (sin tener en cuenta el pleno al 15).*

Solución: Hay que rellenar todas las posibles columnas. Cada columna se compone de 14 elementos ordenados del conjunto $\{1, X, 2\}$ y, obviamente, debe haber repeticiones; por tanto, el número de columnas posibles es:

$$VR_3^{14} = 3^{14} = 4.782.969.$$

Nota: Notemos que en V_n^p ha de ser $p \leq n$. Cuando $p = n$, cada variación contiene a los n elementos del conjunto, y es una reordenación de dichos elementos; en tal caso, se denomina una permutación.

PERMUTACIONES

Son las distintas ordenaciones de un conjunto de elementos.

- **Permutaciones sin repetición:** ***ordenaciones de elementos distintos.***

Permutaciones de los números 1, 2, 3 $\rightarrow 123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321.$

El número de permutaciones sin repetición de n elementos indica de cuántas formas pueden ordenarse n elementos distintos:

$$\boxed{P_n = V_n^n = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!; \quad n \in \mathbb{N}}$$

- **Permutaciones con repetición:** ***ordenaciones de elementos no necesariamente distintos:***

Permutaciones de los números 1, 1, 3 $\rightarrow 113,\ 131,\ 311.$

El número de permutaciones con repetición de n elementos indica de cuántas formas pueden ordenarse n elementos no necesariamente distintos:

$$\{\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{\alpha_1},\ \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{\alpha_2}, \ldots, \underbrace{a_m, \ldots, a_m}_{\alpha_m}\} \ \rightarrow \ \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n.$$

$$\boxed{PR_n^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!}; \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_m, n \in \mathbb{N} \ / \ \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n.}$$

Ejemplo 3: *¿Cuántas ordenaciones pueden hacerse con las letras de la palabra PENA?*

Solución: Son las permutaciones de cuatro letras distintas:

$$P_4 = 4! = 24$$

.

Ejemplo 4: *¿Cuántas ordenaciones distintas pueden hacerse con las letras de la palabra ESTADÍSTICA? ¿Cuántas empiezan y acaban por S?*

Solución: Ya que hay repeticiones en las once letras, el número de ordenaciones distintas es

$$PR_{11}^{2,1,1,1,2,2,2} = \frac{11!}{2!\ 1!\ 1!\ 1!\ 2!\ 2!\ 2!} = 2.494.800.$$

Para ver cuántas empiezan y acaban por S separamos las dos S y permutamos las restantes letras, ETADITICA:

$$PR_9^{2,1,1,1,2,2} = \frac{9!}{2!\ 1!\ 1!\ 1!\ 2!\ 2!} = 45.360.$$

COMBINACIONES

Dado un conjunto con n elementos distintos, las combinaciones de p elementos son los distintos grupos no ordenados que pueden formarse con p elementos cualesquiera de dicho conjunto (dos grupos con los mismos elementos en distinto orden se consideran el mismo).

- **Combinaciones sin repetición,** $p \leq n$: ***grupos no ordenados de*** p ***elementos distintos***.

  Combinaciones sin repetición de dos elementos de $\{1, 2, 3\} \to 12,\ 13,\ 23.$

  El número de combinaciones sin repetición indica de cuántas formas pueden elegirse p elementos distintos de un conjunto de n elementos distintos sin tener en cuenta el orden:

$$\boxed{C_n^p = \tbinom{n}{p} = \frac{n!}{p!\ (n-p)!} = C_n^{n-p}; \quad n, p \in \mathbb{N},\ p \leq n.}$$

- **Combinaciones con repetición**, $p \in \mathbb{N}$: ***grupos no ordenados de*** p ***elementos, no necesariamente distintos***.

  Combinaciones con repetición de dos elementos de $\{1, 2, 3\} \to 11,\ 12,\ 13,\ 22,\ 23,\ 33.$

  El número de combinaciones con repetición indica de cuántas formas pueden elegirse p elementos, no necesariamente distintos, de un conjunto de n elementos distintos, sin tener en cuenta el orden ($n, p \in \mathbb{N}$ son arbitrarios):

$$\boxed{CR_n^p = C_{n+p-1}^p; \quad n, p \in \mathbb{N}.}$$

Ejemplo 5: *¿Cuántas apuestas de primitiva hay que hacer para acertar seguro una de 6?*

Solución: En cada apuesta hay que elegir 6 números distintos del conjunto $\{1, \ldots, 49\}$, siendo indiferente el orden de elección. Las posibles formas de hacerlo, y hay que rellenarlas todas para acertar con seguridad, son

$$C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\ 43!} = 12.983.816.$$

Ejemplo 6: *¿De cuántas formas diferentes pueden aparecer dos caras y cuatro cruces en seis lanzamientos de una moneda?*

Solución 1: Numerando los lanzamientos, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, el problema es elegir los dos (distintos) en los que sale cara. Ya que el orden de elección es indiferente, las formas son

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!\ 4!} = 15.$$

Solución 2: Permutaciones de los elementos del conjunto $\{C, C, X, X, X, X\}$: $PR_6^{2,4} = C_6^2$.

Ejemplo 7: *¿De cuántas formas pueden elegirse simultáneamente tres bolas de una urna en la que hay al menos tres blancas y tres negras, si las bolas del mismo color son indistinguibles?*

Solución: Ya que las bolas del mismo color son indistinguibles, al sacar las tres bolas sólo veremos el número de blancas y el número de negras. Por lo tanto, el problema es elegir tres elementos del conjunto $\{B,\ N\}$ (evidentemente, con repetición).

Además, como las bolas se extraen simultáneamente, el orden es indistinto. Así, el número de formas es

$$CR_2^3 = C_4^3 = 4.$$

En efecto: las formas son 3 blancas, 2 blancas y 1 negra, 2 negras y 1 blanca, 3 negras.

RELACIÓN DE EJERCICIOS

1. La clave de una caja fuerte se compone de cinco dígitos. ¿Cuál es el número de combinaciones que habrá que probar para estar seguro de abrir la caja?

   Solución: 100000.

2. En un bar, cinco amigos han pedido tres cafés y dos cervezas. ¿De cuántas formas pueden repartirse las cinco bebidas?

   Solución: 10.

3. En un torneo de ajedrez participan diez jugadores. ¿Cuántas partidas jugarán si deben hacerlo todos contra todos?

   Solución: 45.

4. Un profesor acostumbra contar exactamente tres chistes distintos cada año en su clase y su política es no contar un año los tres mismos que ya ha contado en algún año anterior. ¿Cuántos chistes distintos necesitará para contar en sus 35 años de servicio?

   Solución: 7.

5. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5? ¿Y con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4?

   Solución: 125, 100.

6. Un estudiante debe responder a seis de las diez preguntas de un examen. ¿Entre cuántos grupos distintos puede elegir?

   Solución: 210.

7. ¿Cuántos números de seis cifras se pueden formar con tres unos, dos doses y un tres?

   Solución: 60.

8. Se considera una función de tres variables. Determinar el número de derivadas parciales de orden dos, supuesto que existen.

   Solución: 6.

1.- La clave de una caja fuerte se compone de cinco dígitos. ¿Cuál es el número de combinaciones que habrá que probar para estar seguro de abrir la caja?

Solución: La clave se compone de cinco elementos, no necesariamente distintos, elegidos en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Luego se trata de ver de cuántas formas podemos elegir esos cinco elementos.

Ya que distintas ordenaciones de los mismos cinco elementos dan lugar a distintas claves ($01234 \neq 10342$), el número de claves posibles es $VR_{10}^{5} = 10^5$ =100000.

2.- En un bar, cinco amigos han pedido tres cafés y dos cervezas. ¿De cuántas formas pueden repartirse las cinco bebidas?

Solución 1: Disponemos de un conjunto de cinco bebidas, de las que tres son cerveza (C) y dos son café (X):

$$\{C,\ C,\ C,\ X,\ X\}.$$

Se trata de distribuir estos cinco elementos entre cinco personas distintas. Por lo tanto, se trata de determinar las distintas ordenaciones de estos cinco elementos. Ya que hay tres iguales entre sí y otros dos iguales entre sí, el número de formas de distribuirlas es $PR_5^{3,2} = \dfrac{5!}{3!\ 2!} = 10$.

Solución 2: Elegimos tres personas para darles cerveza (a las otras dos se les da café). Puesto que el orden de elección de estas tres personas es indistinto, esto puede hacerse de $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\ 2!} = 10$ formas distintas.

3.- En un torneo de ajedrez participan diez jugadores. ¿Cuántas partidas jugarán si deben hacerlo todos contra todos?

Solución: Cada partida deben jugarla dos jugadores distintos. Luego hemos de ver de cuantas formas podemos elegir dos elementos distintos del conjunto de los diez jugadores. Ya que el orden de elección es indiferente (jugar A contra B es lo mismo que B contra A), el número de partidas es $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{8!\ 2!} = 45$.

4.- Un profesor acostumbra contar exactamente tres chistes distintos cada año en su clase y su política es no contar un año los tres mismos que ya ha contado en algún año anterior. ¿Cuántos chistes distintos necesitará para contar en sus 35 años de servicio?

Solución: Sea k el número de chistes necesarios. Cada año elige tres de esos k (según el enunciado, no importa el orden, lo único que importa es que cada año varíe al menos un chiste). Las formas de elegir los tres chistes es C_k^3 y, puesto que debe tener para 35 años, ha de ser

$$C_k^3 = \frac{k!}{3!\ (k-3)!} \geq 35 \ \Rightarrow \ \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \geq 35 \ \Rightarrow \ k(k-1)(k-2) \geq 210 \ \Rightarrow \ k \geq 7.$$

5.- ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5? ¿Y con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4?

Solución:

1 Hay que elegir tres elementos del conjunto $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, de forma que puede haber repeticiones y, además, influye el orden ($112 \neq 211$). Por lo tanto existen $VR_5^3 = 5^3 = 125$ números distintos.

2 Razonando de forma similar, habría 125 números también en este caso; sin embargo, a éstos hay que quitar todos los que comienzan por cero, que son $VR_5^2 = 5^2 = 25$. Por lo tanto, habrá 100 números de tres cifras con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4.

6.- Un estudiante debe responder a seis de las diez preguntas de un examen. ¿Entre cuántos grupos distintos puede elegir?

Solución: Debe elegir seis preguntas distintas, sin tener en cuenta el orden; por tanto, $C_{10}^6 = \dfrac{10!}{6!\ 4!} = 210$ preguntas.

7.- ¿Cuántos números de seis cifras se pueden formar con tres unos, dos doses y un tres?

Solución: Se trata de permutar seis elementos con repeticiones, $PR_6^{3,2,1} = \dfrac{6!}{3!\ 2!\ 1!} = 60$.

8.- Se considera una función de tres variables. Determinar el número de derivadas parciales de orden dos, supuesto que existen.

Solución: Consideramos la función $f(x,y,z)$ Cada derivada de orden dos puede hacerse eligiendo dos variables del conjunto $\{x,y,z\}$, pudiendo estar repetidas. Ya que el orden de derivación es indistinto, el número de derivadas de orden dos es $CR_3^2 = \binom{3+2-1}{2} = 6$.

9.- Probar que el coeficiente τ de Kendall toma valores entre -1 y 1.

Solución: $\tau = \dfrac{S}{\frac{n(n-1)}{2}}$, donde S es la diferencia entre el número de pares concordantes y discordantes en un conjunto de n pares de rangos. El mayor valor de S se obtiene cuando todos los pares son concordantes, y el menor valor, cuando todos los pares son discordantes. El número total de pares que pueden elegirse para compararlos dos a dos es $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, lo que implica que τ varía entre -1 y 1.