Juan Manuel Rodríguez Gómez
49 55 94 94 Z

ESTADÍSTICA MULTIVARIANTE

TAREA VOLUNTARIA 2

① En el Análisis de Componentes Principales (ACP), deducir la tercera componente principal, U_3. (Justificar así que a_3 es el vector propio asociado al tercer valor propio de mayor módulo de la matriz Σ)

La tercera componente principal, U_3, debe ser incorrelada con la primera y segunda componentes principales (ya calculadas, $U_1 = a_1^t X$, $U_2 = a_2^t X$, siendo X un vector aleatorio centrado, $E[X] = 0$, y con matriz de covarianzas $\Sigma = E[XX^t]$, y siendo a_i el vector propio asociado al i-ésimo valor propio de mayor módulo de la matriz Σ, $i = 1,2$). Hay que maximizar la varianza de U_3.

Para garantizar la existencia de este máximo también han de imponerse condiciones de acotación sobre el vector de pesos. En este caso, que a_3 sea un vector unitario.

Así, el problema a resolver sería el siguiente:

$$\text{máx}\left(Var[U_3]\right)$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \|a_3\| = a_3^t a_3 = 1 \\ cov(U_1, U_3) = 0 \\ cov(U_2, U_3) = 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que X es un vector aleatorio centrado, $E[X]=0$, se tiene que $E[a_3^t X] = 0$, lo que implica que:

$$\underline{Var[U_3]} = E[U_3^2] = E[a_3^t X a_3^t X] = E[a_3^t X X^t a_3] = a_3^t E[XX^t] a_3 = \underline{a_3^t \Omega a_3}$$

Del mismo modo:

$$\underline{Cov(U_1, U_3)} = E[a_1^t X a_3^t X] = E[a_1^t X X^t a_3] = a_1^t E[XX^t] a_3 = \underline{a_1^t \Omega a_3}$$

$$\underline{Cov(U_2, U_3)} = E[a_2^t X a_3^t X] = E[a_2^t X X^t a_3] = a_2^t E[XX^t] a_3 = \underline{a_2^t \Omega a_3}$$

Por tanto, el problema queda como sigue:

$$\underset{a_3}{\text{máx}} \left(a_3^t \Omega a_3 \right)$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \|a_3\| = a_3^t a_3 = 1 \\ a_1^t \Omega a_3 = 0 \\ a_2^t \Omega a_3 = 0 \end{cases}$$

Aplicando el Teorema de los multiplicadores de Lagrange para la obtención de extremos condicionados, el problema se reduce a:

$$\underset{a_3}{\text{máx}} \left\{ a_3^t \Omega a_3 - \lambda (a_3^t a_3 - 1) - \mu a_1^t \Omega a_3 - \gamma a_2^t \Omega a_3 \right\}$$

Derivando la expresión anterior respecto a a_3 (matricialmente y teniendo en cuenta que Ω es simétrica) e igualando a cero, obtenemos que:

$$2\Omega a_3 - 2\lambda a_3 - \mu \Omega a_1 - \gamma \Omega a_2 = 0$$

Si multiplicamos esta última expresión por a_1^t a la izquierda se obtiene:

$$2a_1^t \Omega a_3 - 2\lambda a_1^t a_3 - \mu a_1^t \Omega a_1 - \gamma a_1^t \Omega a_2 = 0$$

Teniendo en cuenta que $a_1^t \Omega a_3 = 0$ (es la segunda restricción del problema), que $a_1^t a_3 = 0$ (por ser perpendiculares), $a_1^t \Omega a_2 = 0$ (ya que $Cov(U_1, U_2) = 0$), y que $a_1^t \Omega a_1 \neq 0$, la expresión queda como $\mu a_1^t \Omega a_1 = 0$, de donde se deduce que $\underline{\mu = 0}$.

Si multiplicamos ahora la expresión inicial por a_2^t a la izquierda se obtiene:

$$2a_2^t \Omega a_3 - 2\lambda a_2^t a_3 - \gamma a_2^t \Omega a_2 = 0 \qquad (\mu = 0)$$

Teniendo en cuenta que $a_2^t \Omega a_3 = 0$ (es la tercera restricción del problema), que $a_2^t a_3 = 0$ (por ser perpendiculares), y que $a_2^t \Omega a_2 \neq 0$, la expresión queda como $\gamma a_2^t \Omega a_2 = 0$, de donde se deduce que $\underline{\gamma = 0}$.

Así, la ecuación a resolver queda como sigue:

$$2\Omega a_3 - 2\lambda a_3 = 0 \Rightarrow \underline{(\Omega - \lambda I) a_3 = 0}, \qquad (1)$$

de donde se deduce que <u>a_3 es el vector propio asociado al valor propio λ de la matriz Ω.</u>

Finalmente, es fácil deducir que λ es la varianza de U_3 ya que:

$$\mathrm{Var}[U_3] = a_3^t \Omega a_3 = \lambda a_3^t a_3 = \lambda,$$

multiplicando **(1)** por a_3^t a la izquierda y teniendo en cuenta que a_3 es unitario ($\|a_3\| = a_3^t a_3 = 1$, primera restricción del problema).

En conclusión, la tercera componente principal es $U_3 = a_3^t X$, con a_3 el vector propio asociado al tercer valor propio de mayor módulo de la matriz Ω.