GRADO EN MATEMÁTICAS - CURSO 2023-2024
ASIGNATURA: ESTADÍSTICA MULTIVARIANTE

RELACIÓN 1 (TEMA 1)

1. Sea $\boldsymbol{Y}$ un vector aleatorio definido por

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\alpha} + D\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z},$$

con $\boldsymbol{\alpha}$ un vector $p \times 1$, D una matriz $p \times r$, $\boldsymbol{X}$ un vector aleatorio con distribución $N_r(\mathbf{0}, \Sigma_{\boldsymbol{X}})$ ($\Sigma_{\boldsymbol{X}}$ no singular) y $\boldsymbol{Z}$ un vector aleatorio con distribución $N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 I_p)$, siendo $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Z}$ independientes. Entonces:

   a) Obtener la distribución de $\boldsymbol{Y}$.

   b) Obtener la distribución del vector conjunto $\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$.

   c) Probar que $E[\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}] = \Sigma_{\boldsymbol{X}} D' \Sigma_{\boldsymbol{Y}}^{-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\alpha})$.

   d) Probar que $\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}$ tiene distribución $N_p(\boldsymbol{\alpha} + D\boldsymbol{X}, \sigma^2 I_p)$.

2. En relación con el ejercicio anterior, probar que los resultados obtenidos siguen siendo válidos en el caso en que sea $\Sigma_{\boldsymbol{X}}$ singular, con la salvedad de que en el apartado *(d)* se tendrá que la distribución de $\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}$ es $N_p(\boldsymbol{\alpha} + D\Sigma_{\boldsymbol{X}}\Sigma_{\boldsymbol{X}}^{-}\boldsymbol{X}, \sigma^2 I_p)$, siendo $\Sigma_{\boldsymbol{X}}^{-}$ una inversa generalizada de la matriz $\Sigma_{\boldsymbol{X}}$ (es decir, alguna matriz tal que $\Sigma_{\boldsymbol{X}}\Sigma_{\boldsymbol{X}}^{-}\Sigma_{\boldsymbol{X}} = \Sigma_{\boldsymbol{X}}$). [Para ello, tener en cuenta que el resultado sobre condicionamiento en la distribución normal multivariante se cumple en el caso en que la matriz Σ pueda ser singular, reemplazando $\Sigma_{(11)}^{-1}$ por $\Sigma_{(11)}^{-}$ (análogamente, $\Sigma_{(22)}^{-1}$ por $\Sigma_{(22)}^{-}$)]

3. Sea $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ y sea $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^p$. Probar que

$$E[(\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}))^k] = \begin{cases} \frac{(2m)!}{2^m m!}(\boldsymbol{\alpha}'\Sigma\boldsymbol{\alpha})^m & \text{, si } k = 2m \text{ (par)} \\ 0 & \text{, si } k = 2m-1 \text{ (impar)} \end{cases}$$

[**Resultado auxiliar**: Sea $X \sim N(0, \sigma^2)$. Entonces, los momentos de X vienen dados por

$$E[X^k] = \begin{cases} \sigma^k (k-1)!! & \text{, si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{, si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

siendo $n!!$ el factorial doble de n, definido por el producto de todos los enteros entre 1 y n con la misma paridad ('par' o 'impar') que n]

4. Sea $\boldsymbol{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$, con $\mathrm{rango}(\Sigma) = k$. Sea la descomposición espectral de Σ dada por $\Sigma = H\Lambda H'$, con el particionamiento $H = (H_1|H_2)$, $\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, siendo $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, con $\lambda_1, \ldots \lambda_k > 0$. Probar que $\Sigma^+ = H_1 D^{-1} H_1'$ es la matriz inversa de Moore-Penrose de Σ, es decir, satisface las condiciones:

a) $\Sigma\Sigma^+\Sigma = \Sigma$

b) $\Sigma^+\Sigma\Sigma^+ = \Sigma^+$

c) $(\Sigma^+\Sigma)' = \Sigma^+\Sigma$

d) $(\Sigma\Sigma^+)' = \Sigma\Sigma^+$

5. Sea $\Sigma = (\sigma_{ij})$ una matriz 3×3 simétrica tal que

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 1, \quad \sigma_{12} = 0.$$

Probar que, al menos para $(\sigma_{13} + \sigma_{23}) > \frac{3}{2}$, Σ no es una matriz definida positiva.

6. Sea $\boldsymbol{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, I_p)$. Sean $\boldsymbol{Y}_1 = C_1\boldsymbol{Z}$ e $\boldsymbol{Y}_2 = C_2\boldsymbol{Z}$, con C_i una matriz $k_i \times p$, $k_i \leq p$ $(i = 1, 2)$. Encontrar una condición necesaria y suficiente para la independencia de $\boldsymbol{Y}_1$ e $\boldsymbol{Y}_2$.

7. Sea $\boldsymbol{Y} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, donde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar la distribución de $Z = 2Y_1 - Y_2 + 3Y_3$.

b) Encontrar la distribución conjunta de $Z_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ y $Z_2 = Y_1 - Y_2 + 2Y_3$.

c) Encontrar la distribución de Y_2.

d) Encontrar la distribución conjunta de Y_1 e Y_3.

e) Encontrar la distribución conjunta de Y_1, Y_3 y $\frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)$.

f) Encontrar un vector $\boldsymbol{Z}$ tal que $\boldsymbol{Z} = (T')^{-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}) \sim N_3(\mathbf{0}, I)$, siendo T la matriz correspondiente a la factorización de Cholesky, $\Sigma = T'T$.

g) Encontrar un vector $\boldsymbol{Z}$ tal que $\boldsymbol{Z} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}) \sim N_3(\mathbf{0}, I)$, siendo $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ la inversa de la matriz correspondiente a la factorización en raíz cuadrada, $\Sigma = \Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}$.

8. Sea $\boldsymbol{Y} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, donde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las variables y vectores aleatorios siguientes son independientes?:

a) Y_1 e Y_2.

b) Y_1 e Y_3.

c) Y_2 e Y_3.

d) (Y_1, Y_2) e Y_3.

e) (Y_1, Y_3) e Y_2.

9. Suponer que $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{X}$ son subvectores de dimensiones respectivas 2×1 y 3×1, con $\boldsymbol{\mu}$ y Σ conjuntas correspondientemente particionadas según

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\begin{array}{c} 3 \\ -2 \\ \hline 4 \\ -3 \\ 5 \end{array} \right), \quad \Sigma = \left(\begin{array}{rr|rrr} 14 & -8 & 15 & 0 & 3 \\ -8 & 18 & 8 & 6 & -2 \\ \hline 15 & 8 & 50 & 8 & 5 \\ 0 & 6 & 8 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Suponer que $\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \sim N_5(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

a) Encontrar $E[\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}]$.
b) Encontrar $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})$.

10. Suponer que las variables aleatorias X e Y tienen función de distribución conjunta

$$F(x, y) = \Phi(x)\Phi(y)[1 + \alpha(1 - \Phi(x))(1 - \Phi(y))],$$

siendo $|\alpha| \leq 1$ y denotando $\Phi(\cdot)$ la función de distribución normal estándar. Probar que las distribuciones marginales correspondientes a X e Y son normales estándar.

11. Sean $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots$ vectores aleatorios independientes tales que $\boldsymbol{X_i} \sim N_m(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $i = 1, 2, \ldots$, y sea

$$\boldsymbol{S}_N = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{X}_i.$$

Para $N_1 < N_2$:

a) Encontrar la distribución de $(\boldsymbol{S}'_{N_1}, \boldsymbol{S}'_{N_2})'$.
b) Encontrar la distribución condicionada de $\boldsymbol{S}'_{N_1}$ dada $\boldsymbol{S}'_{N_2}$.

12. Suponer que $\boldsymbol{X} \sim N_3(\boldsymbol{0}, \Sigma)$, siendo

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Existe algún valor de ρ para el cual las variables $X_1 + X_2 + X_3$ y $X_1 - X_2 - X_3$ sean independientes?