GRADO EN MATEMÁTICAS - CURSO 2023-2024
ASIGNATURA: ESTADÍSTICA MULTIVARIANTE

RELACIÓN 2 (TEMA 2)

1. Sea A una matriz aleatoria con distribución $W_p(n, I_p)$. Probar que $\text{tr}(A)$ tiene distribución $\mathcal{X}^2_{np}$.

2. Sea A una matriz aleatoria con distribución $W_p(n, \Sigma)$ $\quad (\Sigma > 0)$. Probar que, para cualesquiera vectores $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$, las variables aleatorias $\mathbf{a}'A\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}'A\mathbf{b}$ son independientes si y solo si $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{b} = 0$.

3. Probar que si $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N$ constituyen una muestra aleatoria simple de una distribución $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ $(\Sigma > 0)$, y el parámetro vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ es <u>conocido</u>, entonces el estimador máximo-verosímil de Σ es
$$\hat{\Sigma} := \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} (\mathbf{X}_\alpha - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_\alpha - \boldsymbol{\mu})'$$
(bajo la condición de ser esta matriz definida positiva). Comprobar si este estimador es o no insesgado.

4. Sea A una matriz aleatoria con distribución $W_p(n, \Sigma)$ $\quad (\Sigma > 0)$. Probar, usando la función de densidad de Wishart, que
$$E[|A|^r] = |\Sigma|^r 2^{pr} \frac{\Gamma_p\left(\frac{1}{2}n + r\right)}{\Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right)}, \quad \forall r > 0.$$
[OBSERVACIÓN: La definición de la 'densidad de Wishart', y de la correspondiente 'función característica de Wishart', sigue siendo válida, por extensión, tomando como parámetro 'grados de libertad' cualquier número real n tal que $n > p - 1$ (aunque la definición implícita en términos de vectores $\mathbf{Z}_\alpha \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ $(\Sigma > 0)$ independientes sólo se aplicaría para el caso en que n es entero, con $n \geq p$)]

5. Sea $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N$ una muestra aleatoria simple de una distribución $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ $\quad (\Sigma > 0)$. Sea $A = \sum_{\alpha=1}^{N} (\mathbf{X}_\alpha - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_\alpha - \bar{\mathbf{X}})'$ la matriz de dispersiones muestral, con $\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{X}_\alpha$ el vector de medias muestral.
   (a) Probar que la matriz $\text{Cov}(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{X}_\alpha - \bar{\mathbf{X}})$ es nula, para $\alpha = 1, \ldots, N$. Deducir, entonces, que $\bar{\mathbf{X}}$ y A son independientes.
   (b) Encontrar una matriz B tal que $A = \mathsf{X}'B\mathsf{X}$, con $\mathsf{X} = (\mathbf{X}_1 \cdots \mathbf{X}_N)'$ (matriz $(N \times p)$-dimensional).
   (c) Suponiendo que $N > p$, encontrar alguna matriz $(p \times p)$-dimensional G tal que $GAG' \sim W_p(N - 1, I_p)$.