Juan Manuel Rodríguez Gómez 49 55 94 94 Z

PÁGINA 1

ESTADÍSTICA MULTIVARIANTE

TAREA VOLUNTARIA 4

1 Obtener un modelo factorial con dos factores para el ejemplo de la diapositiva 17 del Tena 4 - Análisis Factorial.

Se considera un vector aleatorio que almacena las calificaciones de tres asignaturas distintas $X = (X_1, X_2, X_3)$. Partiendo de la estimación de la matriz de correlaciones, entre las calificaciones, siquiente:

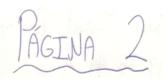
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0'83 & 0'78 \\ 0'83 & 1 & 0'67 \\ 0'78 & 0'67 & 1 \end{pmatrix},$$

se pretende ajustar un modelo factorial con dos factores.

Según la ecuación X = AF + L, el modelo para dos factores tendrá la siquiente expresión:

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}.$$

Esto implica, a través de la igualdad fundamental $S = E[XX^{\dagger}] = AA^{\dagger} + D$, que: $S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}.$



Sustituyendo y operando en la expresión anterior:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0'83 & 0'78 \\ 0'83 & 1 & 0'67 \\ 0'78 & 0'67 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{14}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{14}a_{31} + a_{12}a_{32} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} & a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} & a_{21}^2 + a_{32}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

De la expresión anterior se obtiene el siguiente sistema de 6 ecuaciones con 9 incógnitas:

cuyas soluciones son:

$$a_{41} = 0'983 \qquad a_{42} = 0'015 \qquad \left(\frac{d_1}{d_1} = 0'033 \right)$$

$$a_{24} = 0'844 \qquad a_{22} = 0'022 \qquad \left(\frac{d_2}{d_2} = 0'287 \right)$$

$$a_{31} = 0'793 \qquad a_{32} = 0'031 \qquad \left(\frac{d_3}{d_3} = 0'370 \right)$$
Por tanto, el modelo ajustado con dos factores queda de la forma:
$$\begin{pmatrix} X_4 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'983 & 0'015 \\ 0'844 & 0'022 \\ 0'793 & 0'031 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$