ESTADÍSTICA MULTIVARIANTE

UGR, GRADO EN MATEMÁTICAS
Curso Académico 2023-2024

José Miguel Angulo Ibáñez (*jmangulo@ugr.es*)

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada

- **TEMA 1. Distribución Normal Multivariante**

  Complemento: Distribuciones esféricas y elípticas

- DEFINICIÓN: Se dice que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ tiene una *distribución esférica* si $\mathbf{X}$ y $H\mathbf{X}$ tienen la misma distribución, para toda matriz ortogonal H de dimensión $p \times p$.

- CARACTERIZACIÓN I (en términos de la densidad, si existe): Un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ con distribución de tipo continuo tiene una distribución esférica si y solo si su función de densidad puede expresarse como

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}'\mathbf{x}),$$

para alguna función escalar $g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$.

- CARACTERIZACIÓN II (en términos de la función característica): Un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ tiene una distribución esférica si y solo si su función característica es de la forma

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \xi(\mathbf{t}'\mathbf{t}),$$

para alguna función escalar $\xi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

Distribuciones esféricas (cont.)

- EJEMPLO 1: $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 I_p)$ tiene una distribución esférica (□ Probar)

  (Observación: Bajo la caracterización I se requerirá que la distribución sea no degenerada, *i. e.* $\sigma^2 > 0$)

- EJEMPLO 2: Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio con distribución esférica y tal que $P[\mathbf{X} = \mathbf{0}] = 0$. Se define $\mathbf{U} := \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}$, para $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, y con cualquier asignación cuando $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ (por ejemplo, en la propia esfera unidad, $\mathcal{S}_p \subset \mathbb{R}^p$). Entonces $\mathbf{U}$ también tiene una distribución esférica (□ Probar)

- EJEMPLO 3: Más generalmente, si $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_p)'$ es un vector aleatorio p-dimensional con distribución esférica, se tiene entonces que, dada cualquier transformación radial 'isotrópica' Borel-medible $\mathbf{h} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$, de la forma

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = g(\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x}, \quad \text{con } g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \text{ Borel-medible},$$

  el vector aleatorio transformado $\mathbf{h}(\mathbf{X}) = (h_1(\mathbf{X}), \ldots, h_p(\mathbf{X}))'$ también tendrá una distribución esférica (□ Probar)

Distribuciones esféricas (cont.)

- RESULTADO (extensión de un resultado visto anteriormente):

  Si $\mathbf{X}$ tiene una distribución esférica con $P[\mathbf{X} = \mathbf{0}] = 0$, y se definen

$$R = \|\mathbf{X}\| = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\frac{1}{2}}$$
$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{X}}{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\frac{1}{2}}} = R^{-1}\mathbf{X}, \quad \text{para } \mathbf{X} \neq \mathbf{0}$$

  (con cualquier asignación para $\mathbf{U}$ cuando $\mathbf{X} = \mathbf{0}$; por ejemplo, en la propia esfera unidad $\mathcal{S}_p \subset \mathbb{R}^p$), entonces $\mathbf{U}$ tiene también una distribución esférica, y R y $\mathbf{U}$ son <u>independientes</u> (□ Probar)

- Este resultado significa que la distribución de $\mathbf{X}$, en el caso de una distribución esférica, viene en realidad determinada por la distribución de la variable aleatoria R

- DEFINICIÓN: Se dice que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ tiene una *distribución elíptica*, con parámetros dados por un vector p-dimensional $\boldsymbol{\mu}$ y una matriz $(p \times p)$-dimensional V simétrica y definida positiva, si se puede expresar de la forma

  $$\mathbf{X} = A\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}, \quad \text{con:} \quad \begin{array}{l} V = AA',\ A \text{ matriz } p \times p \text{ no singular} \\ \mathbf{Z} \text{ vector aleatorio con distribución esférica} \end{array}$$

  Se denotará, en este caso, $\mathbf{X} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, V)$.

- CARACTERIZACIÓN I (en términos de la densidad, <u>si existe</u>): Un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ con distribución de tipo continuo tiene una distribución elíptica si y solo si su función de densidad puede expresarse como

  $$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = |V|^{-\frac{1}{2}} g\left((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' V^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right),$$

  para alguna función escalar $g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Distribuciones elípticas (cont.)

- CARACTERIZACIÓN II (en términos de la función característica): Un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ tiene una distribución elíptica si y solo si su función característica es de la forma

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}}\xi(\mathbf{t}'V\mathbf{t}),$$

para alguna función escalar $\xi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

- EJEMPLO: $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \quad (\Sigma > 0)$ tiene una distribución elíptica, $\mathbf{X} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. En este caso, por tanto, se tiene que $V = \Sigma$.

(□ Probar)

OBSERVACIONES:

- Si $\mathbf{X} \sim E_p(\mathbf{0}, \sigma^2 I_p)$, con $\sigma^2 > 0$, entonces $\mathbf{X}$ tiene una distribución esférica (y recíprocamente)
- Si para $\mathbf{X} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, V)$ existen los momentos $E[\mathbf{X}]$ y Cov$(\mathbf{X})$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}] &= \boldsymbol{\mu} \\ \text{Cov}(\mathbf{X}) &= \alpha V, \quad \text{con } \alpha = -2\xi'(0) \end{aligned}$$

- Las distribuciones marginales de distribuciones elípticas son elípticas
- Las distribuciones condicionadas de distribuciones elípticas son elípticas
- INDEPENDENCIA Y NORMALIDAD:

  Sea $\mathbf{X} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, V)$, con V una matriz diagonal. Si $X_1, \ldots, X_p$ son (mutuamente) independientes, entonces $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, V)$