

ESTADÍSTICA MULTIVARIANTE

TAREA VOLUNTARIA 4

- ① Obtener un modelo factorial con dos factores para el ejemplo de la diapositiva 17 del Tema 4 - Análisis Factorial.

Se considera un vector aleatorio que almacena las calificaciones de tres asignaturas distintas $X = (X_1, X_2, X_3)$. Partiendo de la estimación de la matriz de correlaciones, entre las calificaciones, siguiente:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0.83 & 0.78 \\ 0.83 & 1 & 0.67 \\ 0.78 & 0.67 & 1 \end{pmatrix},$$

se pretende ajustar un modelo factorial con dos factores.

Según la ecuación $X = AF + L$, el modelo para dos factores tendrá la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}.$$

Esto implica, a través de la igualdad fundamental $S = E[XX^t] = AA^t + D$, que:

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo y operando en la expresión anterior:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0'83 & 0'78 \\ 0'83 & 1 & 0'67 \\ 0'78 & 0'67 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} & a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} & a_{31}^2 + a_{32}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

De la expresión anterior se obtiene el siguiente sistema de 6 ecuaciones con 9 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 + d_1 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + d_2 = 1 \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + d_3 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0'83 \\ a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} = 0'78 \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} = 0'67 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{matrix} a_{11} = 0'983 & a_{12} = 0'015 \\ a_{21} = 0'844 & a_{22} = 0'022 \\ a_{31} = 0'793 & a_{32} = 0'031 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} d_1 = 0'033 \\ d_2 = 0'287 \\ d_3 = 0'370 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el modelo ajustado con dos factores queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'983 & 0'015 \\ 0'844 & 0'022 \\ 0'793 & 0'031 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$