ESTADÍSTICA MULTIVARIANTE

UGR, GRADO EN MATEMÁTICAS

Curso Académico 2023-2024

José Miguel Angulo Ibáñez (*jmangulo@ugr.es*)

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada

- **TEMA 2. Inferencia en la Distribución Normal Multivariante**

  Distribución de Wishart: Definición y caracterización. Propiedades y resultados fundamentales

- Según se vio en el Teorema de Fisher multivariante, dada una muestra aleatoria simple $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N$ de una distribución $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ ($\Sigma > 0$), se tiene que la matriz de dispersiones muestral, $A = \sum_{\alpha=1}^{N}(\mathbf{X}_\alpha - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_\alpha - \bar{\mathbf{X}})'$, se distribuye de igual modo que $\sum_{\alpha=1}^{N-1} \mathbf{Z}_\alpha \mathbf{Z}_\alpha'$, con $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_{N-1}$ vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos según una $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ ($\Sigma > 0$)

- Interesa, por tanto, conocer la forma explícita de esta distribución, que juega un papel fundamental en el contexto de la inferencia estadística multivariante

- La distribución de Wishart (1928), que puede verse como una extensión de la distribución $\mathcal{X}^2$ (entre otras distribuciones), constituye el modelo de referencia en relación con la cuestión planteada

- **DEFINICIÓN** (IMPLÍCITA): Sean $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_n$ vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos según una $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ ($\Sigma \geq 0$), con $n \geq p$. Se define la *distribución de Wishart centrada con* n *grados de libertad* como la distribución de la matriz aleatoria $\sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{Z}_\alpha \mathbf{Z}'_\alpha$. Se denota $W_p(n, \Sigma)$.

- Como consecuencia, en el caso de la matriz de dispersiones derivada del muestreo aleatorio simple de una población $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ ($\Sigma > 0$) [se puede extender al caso $\Sigma \geq 0$], tendremos que

$$A = NS_N = (N-1)S_{N-1} \ \sim \ W_p(n, \Sigma), \quad \text{con } n = N - 1$$

Definición (cont.)

- En el $\boxed{\text{caso } \Sigma > 0}$, la *función de densidad* de la distribución $W_p(n,\Sigma)$ tiene la forma

$$f(A) = \frac{|A|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}A)\right\}}{2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{p(p-1)}{4}}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)}, \quad A > 0$$

(es decir, para cada matriz A simétrica definida positiva)

- Recordando que la *función gamma multivariante de orden* m se define como

$$\Gamma_m(z) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{i=1}^{m}\Gamma\left(z - \frac{i-1}{2}\right),$$

se expresa la densidad de Wishart como

$$f(A) = \frac{|A|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}A)\right\}}{2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad A > 0.$$

- **RESULTADO:**

  Si $a \sim W_1(n, \sigma^2)$, entonces $\dfrac{a}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}_n^2$

  (□ Probar)

- OBSERVACIÓN: En relación con el resultado anterior, si

$$\hat{\sigma^2} = s_N^2 := \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha - \bar{x})^2$$

es el EMV de σ^2 en el caso unidimensional ($p = 1$), entonces se tiene que

$$\frac{N s_N^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}_n^2, \quad \text{con } n = N - 1$$

En primer lugar, veamos cómo se define, de forma general, la función característica de una matriz aleatoria (no necesariamente cuadrada):

- Sea Y una matriz aleatoria $(r \times s)$-dimensional. Se define la *función característica* de Y como

$$\phi_Y(\Theta) = E\left[e^{i\,\mathrm{tr}(\Theta' Y)}\right], \quad \forall\Theta \text{ en el espacio de matrices de dimensión } r \times s$$

- En realidad, esta expresión proviene de la vectorización de Y y Θ y el cálculo usual correspondiente de la función característica según la forma vectorial:

$$\phi_{\mathrm{Vec}(Y)}(\mathrm{Vec}(\Theta)) = E\left[e^{i\,\mathrm{Vec}(\Theta)'\mathrm{Vec}(Y)}\right] = E\left[e^{i\,\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}\theta_{kl}Y_{kl}}\right]$$
$$= E\left[e^{i\,\mathrm{tr}(\Theta' Y)}\right]$$

(es decir, en la doble suma solo intervienen los elementos diagonales de la matriz $(s \times s)$-dimensional $\Theta' Y$)

- Ahora bien, en el caso de una matriz aleatoria Y $(r \times r)$-dimensional y <u>simétrica</u>, se puede restringir la formulación al conjunto de las $\frac{1}{2}r(r+1)$ variables correspondientes a la diagonal y la parte triangular superior [o inferior] de Y, adoptando la forma reducida

$$\phi_Y^{\star}(\Theta) = E\left[\exp\left\{ i \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{k=1 \\ k \leq l}}^{r} \theta_{kl} Y_{kl} \right\}\right], \quad \forall\Theta \text{ en el espacio de matrices simétricas de dimensión } r \times r$$

- Se tiene el siguiente resultado para la distribución de Wishart:

RESULTADO: Sea $A \sim W_p(n, \Sigma)$. Entonces,

$$\phi_A(\Theta) = |I_p - 2i\Theta\Sigma|^{-\frac{n}{2}}$$

$$\phi_A^{\star}(\Theta) = |I_p - i\Gamma\Sigma|^{-\frac{n}{2}},$$

$\forall\Theta$ en el espacio de matrices simétricas de dimensión $p \times p$, siendo $\Gamma = (\gamma_{kl})$ (matriz $(p \times p)$-dimensional), con $\gamma_{kl} = (1 + \delta_{kl})\theta_{kl}$, y δ_{kl} la delta de Kronecker.

[1] MOMENTOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN:

RESULTADO: Sea $A \sim W_p(n, \Sigma)$. Entonces,

$$E[A] = n\Sigma$$

$$\text{Cov}(a_{ij}, a_{kl}) = n(\sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}) \qquad (i, j, k, l = 1, \ldots, p)$$

(Se puede obtener una expresión matricial para la matriz de covarianzas de A en términos de productos de Kronecker)

[2] REPRODUCTIVIDAD RESPECTO A GRADOS DE LIBERTAD:

RESULTADO: Sean $A_1, \ldots, A_q$ matrices aleatorias independientes, con $A_j \sim W_p(n_j, \Sigma)$, $j = 1, \ldots, q$. Entonces,

$$A = \sum_{j=1}^{q} A_j \;\sim\; W_p(n, \Sigma), \quad \text{con } n = \sum_{j=1}^{q} n_j$$

(□ Probar)

[3] REPRODUCTIVIDAD BAJO TRANSFORMACIONES LINEALES 'RECTANGULARES'

RESULTADO: Sea $A \sim W_p(n,\Sigma)$ y sea $M_{k\times p}$ una matriz no aleatoria de rango $k \leq p$. Entonces,

$$MAM' \sim W_k(n, M\Sigma M')$$

(□ Probar)

Se prueba también que

$$(MA^{-1}M')^{-1} \sim W_k(n-p+k, (M\Sigma^{-1}M')^{-1})$$

(No se verá la demostración, donde se usa el resultado sobre condicionamiento que se enuncia más adelante en la propiedad [5])

[4] DISTRIBUCIÓN DE LAS MATRICES DE COVARIANZAS Y CUASI-COVARIANZAS MUESTRALES

RESULTADO: Sean $S_N = \frac{A}{N}$ y $S_n = \frac{A}{n}$ (con $n = N - 1$) las matrices de covarianzas y cuasi-covarianzas muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño N de una distribución $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Entonces,

$$S_N \sim W_p(n, \frac{\Sigma}{N})$$

$$S_n \sim W_p(n, \frac{\Sigma}{n})$$

(Este resultado es consecuencia del resultado visto en la propiedad [3])

($\square$ Probar)

[5] MARGINALIZACIÓN (DIAGONAL Y POR BLOQUES) Y CONDICIONAMIENTO

RESULTADO I: Sea $A \sim W_p(n, \Sigma)$. Entonces,

$$\frac{a_{ii}}{\sigma_i^2} \sim \mathcal{X}_n^2, \quad i = 1, \ldots, p$$

(□ Probar)

RESULTADO II: Sea $A \sim W_p(n, \Sigma)$, y sea el particionamiento por cajas

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ y, correspondientemente, } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

con A_{11} de dimensión $q \times q$ y A_{22} de dimensión $(p-q) \times (p-q)$. Entonces,

(i) $A_{11} \sim W_q(n, \Sigma_{11})$ y $A_{22} \sim W_{p-q}(n, \Sigma_{22})$

(ii) Si además $\Sigma_{12} = 0$, entonces A_{11} y A_{22} son independientes

(□ Probar)

[5] MARGINALIZACIÓN (DIAGONAL Y POR BLOQUES) Y CONDICIONAMIENTO (CONT.)

RESULTADO III: Sea $A \sim W_p(n, \Sigma)$, y sea el particionamiento por cajas considerado en el resultado anterior (Resultado II). Entonces, con

$$\begin{aligned} A_{11\cdot 2} &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, & A_{22\cdot 1} &= A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}, \\ \Sigma_{11\cdot 2} &= \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}, & \Sigma_{22\cdot 1} &= \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}, \end{aligned}$$

se tiene que

(a) $A_{11\cdot 2} \sim W_q(n-(p-q), \Sigma_{11\cdot 2})$ y es independiente de A_{12} y A_{22}

(b) $A_{22\cdot 1} \sim W_{p-q}(n-q, \Sigma_{22\cdot 1})$ y es independiente de A_{12} y A_{11}

(c) $A_{12}|A_{22} \sim N_{q\times(p-q)}(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}A_{22}, \Sigma_{11\cdot 2} \otimes A_{22})$

Algunas propiedades de la distribución de Wishart (cont.)

[6] El siguiente resultado será útil en relación con distribución T^2 de Hotelling:

RESULTADO: Sea $A \sim W_p(n, \Sigma)$ y sea $\mathbf{Y}$ un vector aleatorio p-dimensional independiente de A tal que $P[\mathbf{Y} = \mathbf{0}] = 0$. Entonces,

$$\frac{\mathbf{Y}' A \mathbf{Y}}{\mathbf{Y}' \Sigma \mathbf{Y}} \sim \chi^2_n,$$

siendo independiente de $\mathbf{Y}$. (□ Probar)

Se prueba también que

$$\frac{\mathbf{Y}' \Sigma^{-1} \mathbf{Y}}{\mathbf{Y}' A^{-1} \mathbf{Y}} \sim \chi^2_{n-p+1},$$

siendo independiente de $\mathbf{Y}$.

(No se verá la demostración)

Una consecuencia interesante, en el contexto de la inferencia, viene dada por el siguiente **resultado**:

Sea $\{\mathbf{X}_\alpha : \alpha = 1, \ldots, N\}$ una muestra aleatoria simple de una distribución $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Entonces, con $n = N - 1$,

$$n\frac{\bar{\mathbf{X}}' S_n \bar{\mathbf{X}}}{\bar{\mathbf{X}}' \Sigma \bar{\mathbf{X}}} \sim \chi^2_n,$$

siendo independiente de $\bar{\mathbf{X}}$. (□ Probar)

Algunos aspectos complementarios

Entre otros aspectos, a partir de este punto se podrían estudiar, como **complemento**:

- La *distribución de Wishart inversa*, que permite representar de forma directa la distribución de A^{-1} para $A \sim W_p(n, \Sigma)$:

$$A^{-1} \sim W_p^{-1}(n + p + 1, \Sigma^{-1})$$

- La *distribución de Wishart descentrada*, que permite cubrir el caso en que $A = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{Z}_\alpha \mathbf{Z}'_\alpha$, con $\mathbf{Z}_\alpha \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$
- Formas cuadráticas normales matriciales y su relación con la distribución de Wishart