GEOMETRÍA II: Capítulo 1

Diagonalización de Endomorfismos

- **1.1. Valores y vectores propios. Subespacios propios.**
- **1.2. Polinomio característico. Multiplicidad geométrica y algebraica.**
- **1.3. El teorema fundamental de diagonalización.**

1. Introducción

★ Ya conoces que las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, al elegir bases en ellos, las puedes representar por matrices. En particular, si estudias endomorfismos de un espacio vectorial, es suficiente con elegir una base para obtener la representación matricial. Así para $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}_n)$ y $\mathcal{B}_1$ una base de $\mathbf{V}_n$ obtienes la matriz $M_1 = M(f, \mathcal{B}_1)$. Recuerda también que, una vez elegida la base, la aplicación $\Phi_{\mathcal{B}_1} : \mathbf{End}(\mathbf{V}_n) \to \mathcal{M}_n$ definida, precisamente, por $\Phi_{\mathcal{B}_1}(f) = M_1 = M(f, \mathcal{B}_1)$ es lineal y biyectiva, esto es, un isomorfismo. De modo que tienes un montón de isomorfismos entre estos espacios vectoriales, uno para cada base que tomes en $\mathbf{V}_n$.

★ Por lo anterior, el mismo endomorfismo está representado por diferentes matrices según la base que elijas. Las matrices que representan a un mismo endomorfismo se llaman **semejantes** y algebraicamente están relacionadas como sigue:

$$M_1 = M(f, \mathcal{B}_1) \quad M_2 = M(f, \mathcal{B}_2) \quad \Rightarrow \quad M_2 = P.M_1.P^{-1}$$

donde P es la matriz de cambio de base $P = M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

★ Recuerda también que las matrices semejantes tienen la misma traza y el mismo determinante. Es decir que el **determinante** y la **traza** son dos invariantes por la semejanza de matrices y, realmente, son **propiedades del endomorfismo**

$$\boxed{\text{traza}(f) = \text{traza}(M(f, \mathcal{B}))} \qquad \boxed{\det(f) = \det(M(f, \mathcal{B}))}$$

donde $\mathcal{B}$ es cualquier base del espacio vectorial $\mathbf{V}n$.

★ Naturalmente, un problema general que aparece al estudiar aplicaciones lineales es el de elegir bases para que las representaciones matriciales sean tan simples como sea posible. Esta idea general de simpleza la vamos a concretar, traducir, en nuestro caso por ser **diagonal**. De manera precisa, el problema que planteamos es el siguiente:

> **Dado un endomorfismo, $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$, ¿existe una base, $\mathcal{B}$, de $\mathbf{V}_n$ tal que la matriz $M(f, \mathcal{B})$ es diagonal?**

★ Este problema, planteado en un contexto geométrico, tiene una versión algebraica equivalente:

> **Dada una matriz cuadrada, $M \in \mathcal{M}_n$, ¿es semejante a otra diagonal?**

Cuando la repuesta sea afirmativa diremos que el endomorfismo es diagonalizable o que la matriz es diagonalizable por semejanza.

★ De manera rápida, nos damos cuenta de que ambos problemas, equivalentes, poseen una **respuesta negativa**. En efecto, la existencia de una base $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ en $\mathbf{V}_n$ de manera que $M(f, \mathcal{B})$ es diagonal obliga a los vectores de dicha base a cumplir la siguiente condición: $f(E_i)$ debe ser colineal con E_i esto es

$$\bigstar\bigstar \boxed{f(E_i) = \lambda_i\, E_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R}} \qquad 1 \le i \le n$$

★ Si consideras en el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ un giro, con centro el origen, y ángulo, por ejemplo $\pi/4$, es obvio que no puedes encontrar vectores, distintos del cero, que al girarlos cuarenta y cinco grados se queden en la misma recta vectorial. Es decir, no puedes encontrar soluciones a la anterior ecuación y por lo tanto no puedes diagonalizar dicho endomorfismo. También puedes realizar el siguiente argumento.

En la base usual, $\mathcal{B}_0 = \{E_1^0, E_2^0\}$, de $\mathbb{R}^2$ la rotación anterior viene representada por la matriz siguiente

$$M(R_{\pi/4}, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Tratamos de encontrar vectores $E = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ obviamente distintos del vector cero y que verifiquen $f(E) = \lambda\, E$ para algún número real λ. Por tanto

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 - \lambda & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así los posibles números reales, λ, que pueden arreglar el problema deben ser los que anulen el determinante de la matriz de coeficientes del sistema homogéneo anterior

$$\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1 = 0$$

Pero esta ecuación de segundo grado en λ tiene discriminante estrictamente negativo y por lo tanto no tiene raíces reales.

★ Lo mismo ocurre obviamente para cualquier giro R_α con $\alpha \neq 0$ ($\alpha = 0$ es la identidad) y $\alpha \neq \pi$ ($\alpha = \pi$ es la aplicación antípoda).

2. Vectores y Valores Propios

★ Ya hemos visto que el problema de diagonalizar endomorfismos, $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$, (o diagonalizar matrices por semejanza) pasa por encontrar una base $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ de $\mathbf{V}^n$ cuyos vectores cumplan $f(E_i) = \lambda_i \, E_i$ para ciertos números reales λ_i. Ello nos lleva a considerar las soluciones no triviales de la ecuación siguiente

$$\bigstar\bigstar \boxed{f(X) = \lambda\, X} \qquad X \neq \vec{0}$$

★ Esto sugiere o motiva la siguiente definición. **Un vector $X \in \mathbf{V}$, distinto del vector cero, se dice ser propio para $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que** $f(X) = \lambda\, X$. Al correspondiente número real se le llama **valor propio del endomorfismo**.

★ Después de esto, el problema de diagonalizar un endomorfismo (o por semejanza, una matriz) es equivalente al de encontrar una base formada por vectores propios.

★ Para trabajar con la ecuación anterior, la representamos de manera matricial. Si elegimos una base cualquiera, $\mathcal{B}_0 = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$, entonces la ecuación anterior se puede representar matricialmente por

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \, E_i \equiv (a_1, a_2, ..., a_n) = a \qquad M(f, \mathcal{B}_o) = M$$

$$f(X) = M.a^t \qquad \lambda X = (\lambda \mathbf{I}_n) a^t$$

$$f(X) = \lambda\, X \qquad \Leftrightarrow \qquad (M - \lambda \mathbf{I}_n).a^t = 0.$$

Para que este sistema homogéneo tenga soluciones no triviales su determinante (polinomio de grado n en λ que se llama **polinomio característico** de f) debe ser cero

$$\star\star\boxed{\mathbf{P}_f(\lambda) = \det(M - \lambda \mathbf{I}_n) = 0} \qquad \textbf{ecuación característica}\star\star$$

★ Una observación antes de seguir. Hemos hablado de polinomio y ecuación característicos de un endomorfismo y en realidad hemos usado una base y la representación matricial en dicha base. Sería bueno que se notara que en realidad no depende de la base. Ello es claro pues si dos matrices, M y N, son semejantes, representan al mismo endomorfismo en sendas bases, entonces existe una matriz regular, P, la del cambio de base, de manera que

$$N = P.M.P^{-1} \quad \Rightarrow \quad N - \lambda \mathbf{I}_n = P.(M - \lambda \mathbf{I}_n).P^{-1}$$

lo que prueba que las matrices $M - \lambda \mathbf{I}_n$ y $N - \lambda \mathbf{I}_n$ son también semejantes y en particular tienen el mismo determinante y así producen la misma ecuación característica.

★ A cada valor propio, λ, de un endomorfismo, uno le puede asociar un número natural, su **multiplicidad aritmética**, $\mathbf{a}_\lambda$, o número de veces que λ aparece como raiz de la ecuación característica.

★ Por otro lado, se puede considerar el conjunto de los vectores de $\mathbf{V}^n$ que son propios para un mismo valor propio, λ de $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}n)$, es decir

$$\mathbf{U}_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n \, : \, f(\vec{x}) = \lambda\, \vec{x}\}$$

Resulta que $\mathbf{U}_\lambda$ es siempre un subespacio vectorial de $\mathbf{V}^n$, el subespacio propio definido por, o asociado con, λ (**lo puedes comprobar de ejercicio**). Se define la **multiplicidad geométrica** del valor propio λ por la dimensión del subespacio propio asociado con él, es decir

$$\boxed{\mathbf{g}_\lambda = \dim(\mathbf{U}_\lambda)} \qquad \textbf{multiplicidad geométrica}$$

★ La suma de subespacios propios es directa. Es decir, si λ y μ son dos valores propios distintos de un endomorfismo, $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$, entonces $\mathbf{U}_\lambda \cap \mathbf{U}_\mu = \{0\}$. Aquí tienes la comprobación

$$X \in \mathbf{U}_\lambda \cap \mathbf{U}_\mu \quad \Rightarrow \quad f(X) = \lambda\, X = \mu\, X \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \mu)X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0$$

3. El Caso de dimensión dos

♣ Vamos, en primer lugar, a analizar el caso de dimensión dos. Sea $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^2)$ y elegimos una base cualquiera $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ de $\mathbf{V}^2$ así que tenemos la matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La ecuación característica del endomorfismo es

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \text{traza}(M)\,\lambda + \det(M) = 0$$

♣ Por lo tanto los valores propios del endomorfismo $f : \mathbf{V}^2 \to \mathbf{V}2$ son las raíces de la anterior ecuación de segundo grado en la que M es la matriz que lo representa en cualquier base.

♣ Después de esto y como sabes discutir una ecuación de segundo grado, te puedes encontrar con las siguientes posibilidades:

1. Si $(\text{traza}(M))^2 - 4\det(M) < 0$, discriminante negativo, la ecuación no tiene raíces reales. No existen valores propios y por tanto el endomorfismo no es diagonalizable, no existe ninguna base en la que lo represente una matriz diagonal.

2. Si $(\text{traza}(M))^2 - 4\det(M) = 0$, en este caso la ecuación de segundo grado tiene una raíz doble. Sólamente existe un valor propio. Para poder diagonalizar necesitas una base de vectores propios y por tanto elegir dos vectores propios linealmente independientes, como hay un único valor propio, la única posibilidad es la de que el endomorfismo sea proporcional a la identidad.

3. Si $(\text{traza}(M))^2 - 4\det(M) > 0$, en este caso la ecuación tiene dos raíces reales distintas λ_1 y λ_2. Sean ahora E_1 y E_2 dos vectores propios para λ_1 y λ_2, respectivamente. Entonces $\{E_1, E_2\}$ forman una base de $\mathbf{V}2$. Para comprobarlo, es suficiente con ver que los dos vectores son linealmente independientes.

$$aE_1 + bE_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(aE_1 + bE_2) = a\lambda_1 E_1 + b\lambda_2 E_2 = 0$$

   Manipulando estas dos ecuaciones obtienes

$$a(\lambda_1 - \lambda_2)E_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = 0$$

Finalmente, la matriz que representa al endomorfismo en esta base es la siguiente matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

♣ Aquí tienes unos cuantos ejemplos para practicar. Se consideran los endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión dos, que en una cierta base vienen representados por las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Discute, en cada caso, la posibilidad de diagonalizar la aplicación lineal y calcula, cuando sea posible, una base de vectores propios.

♣ Observa que cualquier endomorfismo cuya matriz, en cierta base, sea simétrica es automáticamente diagonalizable. En efecto si

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

entonces si haces la cuenta obtienes

$$(\text{traza}(M))^2 - 4\det(M) = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

4. Preliminares al Caso General

★ Tenemos $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$ y tratamos de encontrar condiciones bajo las cuales se puede diagonalizar. Esto es, encontrar una base en la que el endomorfismo esté representado por una matriz diagonal. Además, ya sabemos que ello es lo mismo que decir que los vectores de dicha base deben ser vectores propios. La cuestión entonces se reduce a encontrar condiciones bajo las cuales existe una base en $\mathbf{V}^n$ formada por vectores propios de f.

★ Una primera cuestión es entonces la de estudiar los vectores propios de f. Ellos están relacionados a los valores propios de f los cuales aparecen como raíces de la ecuación característica. A cada valor propio, λ, le hemos asociado dos números naturales

- La multiplicidad aritmética, $\mathbf{a}_\lambda$, o número de veces que aparece λ como raiz de la ecuación característica.
- La multiplicidad geométrica, $\mathbf{g}_\lambda$, o dimensión del subespacio vectorial propio, $\mathbf{U}_\lambda$, formado por los vectores propios correspondientes con λ.

★ Vamos a empezar probando que para cada valor propio, μ, de cualquier endomorfismo, $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$, siempre se verifica la siguiente relación

$$\bigstar\bigstar \boxed{\mathbf{g}_\mu \leq \mathbf{a}_\mu} \bigstar\bigstar$$

Para ello consideramos una base del subespacio propio $\mathbf{U}_\mu$, sea $\{E_1, ..., E_{\mathbf{g}_\mu}\}$. A continuación la ampliamos hasta obtener una base de $\mathbf{V}^n$. Entonces, en esta base, el polinomio característico de f es de la forma siguiente

$$\mathbf{P}_f(\lambda) = (\lambda - \mu)^{\mathbf{g}_\mu}.\mathbf{Q}(\lambda)$$

donde $\mathbf{Q}(\lambda)$ es un polinomio, en λ, con grado $n - \mathbf{g}_\mu$. Lo que prueba que $\lambda = \mu$ aparece, al menos, $\mathbf{g}_\mu$ veces como valor propio y así la desigualdad anterior.

★ Suponemos ahora que $f \in \mathbf{V}^n$ tiene valores propios $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$ y representamos por $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_r$ a los subespacios propios asociados con dichos valores propios, los cuales suponemos que son obviamente distintos dos a dos. Tomamos vectores en cada uno de ellos, esto es $E_i \in \mathbf{U}_i$ con $1 \leq i \leq r$. Vamos entonces a ver que estos vectores son necesariamente linealmente independientes. Usamos un argumento de inducción sobre r. Es obvio que para $r = 1$, la afirmación es cierta pues los vectores propios son distintos del vector cero. Además también hemos visto que la afirmación es cierta en el caso $r = 2$. Suponemos entonces que le afirmación es cierta para $r - 1$. Consideramos pues números reales verificando

$$a_1E_1 + a_2E_2 + ... + a_rE_r = 0$$

aplicando el endomorfismo y usando que los vectores son propios, se obtiene

$$a_1\mu_1E_1 + a_2\mu_2E_2 + ... + a_r\mu_rE_r = \vec{0}$$

se multiplica la primera ecuación por μ_1 y se restan las dos ecuaciones, obteniendo

$$a_2(\mu_2 - \mu_1)E_2 + ... + a_r(\mu_r - \mu_1)E_r = \vec{0}$$

finalmente, usamos la hipótesis de inducción para garantizar que todos los coeficientes en esta ecuación deben ser cero y como los valores propios son distintos dos a dos, se obtiene

$$a_2 = a_3 = ... = a_r = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$

★ A continuación vamos a ver que la suma de subespacios propios es directa.

- Empezamos considerando dos subespacios propios, $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ entonces

  $$\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \{\vec{0}\}$$

  en efecto, si $X \in \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$, entonces $f(X) = \mu_1X = \mu_2X$. Puesto que los dos valores propios son distintos, se obtiene que $X = 0$. Así podemos escribir la suma como $\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2$.

- A continuación vamos a ver que $(\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2) \cap \mathbf{U}_3 = \{\vec{0}\}$. En efecto, si no fuese así, existiría un vector distinto al cero, $X \in (\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2) \cap \mathbf{U}_3$. Lo que implica que existen vectores $E_1 \in \mathbf{U}_1$ y $E_2 \in \mathbf{U}_2$ de manera que $X = E_1 + E_2$ y esto representa una combinación lineal, no trivial, de tres vectores propios asociados a valores propios distintos dos a dos lo que proporciona una contradicción. Por lo tanto se tiene $\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \oplus \mathbf{U}_3$.
- Procediendo así de manera sucesiva observamos que $(\bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathbf{U}_i) \cap \mathbf{U}_r = \{\vec{0}\}$. Por lo tanto la suma de subespacios propios es directa. En particular, se tiene

$$\boxed{\dim(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + ... + \mathbf{U}_r) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{g}_i}$$

donde, naturalmente, los $\mathbf{g}_i = \dim(\mathbf{U}_i)$ es la multiplicidad geométrica de μ_i.

5. El Criterio General de Diagonalización

★ Sea $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$ un endomorfismo y supongamos que es diagonalizable entonces existe una base formada por vectores propios. La matriz que lo representa, en dicha base, es diagonal y consideramos que en su diagonal principal aparecen r números reales distintos, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$, y cada μ_i se repite $\mathbf{a}_i$ veces y naturalmente $\sum_{i=1}^{r} \mathbf{a}_i = n$. El polinomio característico del endomorfismo es entonces

$$\mathbf{P}_f(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{\mathbf{a}_1}.(\lambda - \mu_2)^{\mathbf{a}_2}...(\lambda - \mu_r)^{\mathbf{a}_r}$$

por tanto, el subespacio propio $\mathbf{U}_i$ admite una base formada por los $\mathbf{a}_i$ vectores de la anterior que son propios para el valor propio μ_i, lo que implica que $\mathbf{g}_i = \mathbf{a}_i$. Se tiene entonces la siguiente condición necesaria para la diagonalización:

Para que un endomorfismo $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}_n)$ sea diagonalizable, es necesario que las dos siguientes condiciones se cumplan

- **La ecuación característica tiene n raíces, valores propios, contados con sus multiplicidades, $\sum_{i=1}^{r} \mathbf{a}_i = n$.**
- **Para cada valor propio las multiplicidades aritmética y geométrica deben coincidir, $\mathbf{g}_i = \mathbf{a}_i$ para $1 \leq i \leq r$.**

★★ Resulta que las condiciones anteriores son suficientes para que un endomorfismo sea diagonalizable. Así suponemos que

1. $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$ admite n valores propios contados con multiplicidad sean $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$ con multiplicidades $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_r$ verificando $\sum_{i=1}^{r} \mathbf{a}_i = n$

2. Para cada valor propio las multiplicidades aritmética y geométrica coinciden, $\mathbf{g}_i = \mathbf{a}_i$ para $1 \leq i \leq r$

Entonces f **es diagonalizable**.

★★ **Prueba.-** Empezamos considerando la suma, que sabemos es directa, de los subespacios propios, entonces su dimensión usando las condiciones suficientes es

$$\dim(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + ... + \mathbf{U}_r) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{g}_i = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{a}_i = n$$

lo que prueba que

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + ... + \mathbf{U}_r$$

Ahora se considera una base de cada subespacio propio y al reunirlas, se obtiene una base, de $\mathbf{V}^n$, formada por vectores propios de f.

Como resumen aquí tienes el enunciado del criterio que acabamos de probar para diagonalizar endomorfismos

CRITERIO DE DIAGONALIZACIÓN.- Un endomorfismo, $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V}^n)$ es diagonalizable si y solamente si se complen las dos siguientes condiciones

- **Su ecuación característica tiene, exactamente, n raíces o valores propios, contados con multiplicidad**.
- **Para cada valor propio, las multiplicidades aritmética y geométrica coinciden**.

6. Algunos Ejercicios

♣ *Considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que en la base canónica viene representado por la siguiente matriz*

$$M(f, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

¿Es diagonalizable?

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$$

así, el discriminante es $\Delta = 36 > 0$ y es diagonalizable al tener dos valores propios distintos. Los valores propios son $\mu_1 = 8$ y $\mu_2 = 2$. Calculamos los subespacios propios.

- $\mathbf{U}_1$:
$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x \\ 8y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y \quad \text{recta}$$
- $\mathbf{U}_2$:
$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = -4y \quad \text{recta}$$

Eligiendo un vector en cada una de las rectas propias, se obtiene una base de vectores propios
$$\mathcal{B}: \qquad E_1 = (2,1) \quad E_2 = (-4,1)$$
Entonces la matriz de f en la base $\mathcal{B}$ es
$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

♣ *Considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que en la base canónica viene representado por la siguiente matriz*
$$M(f, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
Calcula sus valores y subespacios vectoriales propios, ¿es diagonalizable?. Si lo fuera, calcula una base de vectores propios.

La ecuación característica es
$$\mathbf{P}_f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$$
El endomorfismo tiene tres valores propios simples, la multiplicidad aritmética de cada uno de ellos vale uno. Calculamos sus subespacios propios

- $\mathbf{U}_1$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad y = z = 0$$
- $\mathbf{U}_2$:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad z = y - x = 0$$

- $\mathbf{U}_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad z - y = -2x + y + z = 0$$

Eligiendo un vector en cada una de las rectas propias, se obtiene una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ en la cual la matriz de f es diagonal, precisamente

$$M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Ejercicios

Ejercicio 1.- Calcula los valores propios de las siguientes matrices o de los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ que ellas representan, o de los endomorfismos de V que en la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ vienen representados por ellas

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ se considera la base $\mathcal{B}_0 = \{1, t, t^2\}$ y el endomorfismo, f, que en dicha base viene representado por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Existe en $\mathcal{P}_2$ una base de vectores propios para dicho endomorfismo? ¿Es la matriz M semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 3.- Sea $f \in End(V)$ un endomorfismo de manera que $\lambda = 0$ es uno de sus valores propios. ¿Se puede garantizar que f no es automorfismo?

Ejercicio 4.- Sea $f \in End(V)$ de manera que no es automorfismo. ¿Se puede garantizar que $\lambda = 0$ es necesariamente un valor propio de f?

Ejercicio 5.- Sea $f \in End(V)$ y λ un valor propio del mismo. Comprueba que el subespacio propio U_λ coincide con el núcleo del endomorfismo $f - \lambda I_V$

Ejercicio 6.- Sea $f \in End(V)$ de manera que admite n valores propios simples. ? Se puede garantizar que f es diagonalizable?

Ejercicio 7.- En S_2 se considera la base siguiente

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y el endomorfismo f que en dicha base viene representado por la matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Existe en $\mathcal{P}_2$ una base de vectores propios para dicho endomorfismo? ¿Es la matriz M semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 8.- En $\mathcal{M}_2$ se considera el endomorfismo definido como sigue

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}$$

Calcula valores propios y subespacios propios. ¿Es diagonalizable?

Ejercicio 9.- Sea λ un valor propio de $f \in End(V)$. Considera el endomorfismo $f^2 = f \circ f$, ¿ puedes asegurar que λ^2 es un valor propio de dicho endomorfismo? De manera general, ¿puedes afirmar que λ^r es un valor propio de $f^r = f \circ ... \circ f$ (r veces)?

Ejercicio 10.- Si $f \in End(V)$ es un endomorfismo diagonalizable, ¿se puede asegurar que f^r también lo es?

Ejercicio 11.- En $\mathcal{M}_2$ se considera el endomorfismo definido como sigue

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} b & b+c \\ 2a-2c & 4d \end{pmatrix}$$

Calcula valores propios y subespacios propios. ¿ Es diagonalizable?

Ejercicio 12.- En $\mathbb{R}^4$ se considera el endomorfismo f cuya matriz en la base canónica es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿Es diagonalizable?

Ejercicio 13.- Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si un endomorfismo es diagonalizable y todos sus valores propios son distintos de cero, entonces es un automorfismo.

- Si un automorfismo es diagonalizable, entonces su inverso también lo es.
- Si dos matrices son semejantes, entonces tienen el mismo polonomio característico.
- Si dos matrices tienen la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico, entonces son semejantes.

Ejercicio 14.- Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si dos endomorfismos son diagonalizables y poseen los mismos valores propios entonces son idénticos.
- Si $\lambda = 42$ es un valor propio de un cierto endomorfismo, f, entonces f tiene exactamente 21 vectores propios asociados con $\lambda = 42$.
- Dos vectores propios, asociados a dos valores propios diferentes, son automáticamente linealmente independientes.
- Un endomorfismo puede ser diagonalizado en varias bases diferentes.

Ejercicio 15.- En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ se considera la base $\mathcal{B} = \{1-t, 1+t, t^2\}$ y el endomorfismo, f, representado, en dicha base, por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿ Es diagonalizable? ¿ se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 16.- En $\mathbb{R}^4$ se considera el endomorfismo, f, representado en la base canúnica por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿ Es diagonalizable? ¿ se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 17.- Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si λ es un valor propio de $f \in End(V)$ entonces $-\lambda$ es un valor propio de su endomorfismo dual $f^* \in End(V)^*_n)$

- λ es un valor propio de $f \in End(V)$ si y solo si lo es de su endomorfismo dual $f^* \in End(V)^*_n)$
- Un endomorfismo y su dual tienen el mismo polinomio característico.
- Un endomorfismo es diagonalizable si y solo si su endomorfismo dual lo es.

Ejercicio 18.- En el espacio vectorial $\mathbf{A}_3$ de las matrices antisimétricas de orden tres se considera la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Se considera el endomorfismo, $f \in \mathbf{End}(\mathbf{A}_3)$, representado en la base anterior por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿ Es diagonalizable? ¿ se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 19.- Responde, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son ciertas

- Si λ es un valor propio de $f \in End(V)$ y μ un valor propio de $h \in End(V)$ entonces $\lambda + \mu$ es un valor propio de $f + h$
- Toda matriz simétrica de orden dos es semejante a una matriz diagonal.
- Si $f \in End(V^{17})$ posee 17 valores propios simples, entonces es diagonalizable.
- Si $f \in End(V^{24})$ posee 24 valores propios simples, entonces es diagonalizable.

Ejercicio 20.- En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ se considera la base $\mathcal{B} = \{1 + t^2, 1 - t^2, t\}$ y el endomorfismo, f, representado, en dicha base, por la siguiente matriz

$$M = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula sus valores y vectores propios. ¿ Es diagonalizable? ¿ se puede afirmar que la matriz anterior es semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 21.- Para cada número real $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera el endomorfismo f_α de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canúnica es

$$M_\alpha = M(f_\alpha, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 & 1-\alpha \\ \alpha - 2 & \alpha & 2-\alpha \\ \alpha - 2 & \alpha - 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

¿ Qué valores debe tomar α para que algún valor propio de f_α tenga multiplicidad aritmética dos?. ¿ Para qué valores de α es diagonalizable f_α?

Ejercicio 22.- Se consideran las siguientes matrices cuadradas y de orden tres

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

¿ Existe alguna de ellas que sea semejante a una matriz diagonal?

Ejercicio 23.- ¿ Son semejantes las dos matrices siguientes?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 24.- Estudia para qué valores de los parámetros α y β la siguiente matriz representa, en una cierta base de un cierto espacio vectorial, a un endomorfismo diagonalizable

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

GEOMETRÍA II: Capítulo 2

Formas Bilineales y Formas Cuadráticas

- **2.1. Definiciones y ejemplos. Expresión matricial. Congruencia de matrices.**
- **2.2. Clasificación de formas cuadráticas reales. Ley de inercia de Sylvester.**
- **2.3. Diagonalización ortogonal de matrices simétricas.**

1. Introducción

★ Seguramente recuerdas la manera de definir el producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^3$. Si tienes, por ejemplo, los vectores $\vec{x} = (1, 2, -1)$ e $\vec{y} = (2, 1, 1)$ entonces su producto escalar es

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 2 + 2 - 1 = 3$$

En general si tomas dos vectores, cualesquiera, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3$ de $\mathbb{R}^3$, le asocias un número real, su **producto escalar**, que obtienes multiplicando coordenada a coordenada y sumando, es decir

$$\bigstar \ \boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\, y_i} \quad \text{Producto Escalar}$$

★ El producto escalar lo puedes ver como una aplicacióon que asocia a cada pareja de vectores, de $\mathbb{R}^3$, un núumero real (su producto escalar). El dominio de la aplicación es $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y su codominio es $\mathbb{R}$

$$\boxed{\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y}}$$

★ Quisiera que te fijaras en las siguientes propiedades de esta aplicación, del producto escalar

- $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \cdot \vec{y} = \vec{x}_1 \cdot \vec{y} + \vec{x}_2 \cdot \vec{y}$
- $(\alpha\, \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha\, \vec{x} \cdot \vec{y}$
- $\vec{x} \cdot (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x} \cdot \vec{y}_1 + \vec{x} \cdot \vec{y}_2$
- $\vec{x} \cdot (\alpha\, \vec{y}) = \alpha\, \vec{x} \cdot \vec{y}$

★ Si miras al producto escalar como una aplicación "de dos variables", ambas vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces las dos primeras de las propiedades anteriores significan que el producto escalar es lineal en la primera variable, mientras que las otras dos hacen referencia a su linealidad en la segunda variable. En este sentido, diremos que el producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^3$ es una **forma bilineal**.

★ Recuerda que una forma lineal, sobre $\mathbb{R}^3$ (o en general, sobre un espacio vectorial), es una aplicación lineal del espacio vectorial en $\mathbb{R}$. El conjunto de formas lineales permite definir el espacio dual del dado.

★ Naturalmente, la existencia de una aplicación bilineal no es exclusiva del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Observa que en las propiedades lo que estamos asegurando es el buen comportamiento de la aplicación, de dos variables, frente a la estructura (suma y producto por escalares) del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Yo creo que somos capaces de abstraer las propiedades anteriores y decidir cuándo en un espacio vectorial, $\mathbf{V}^n$ con dimensión n, una aplicación de dos variables, $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$ es **bilineal**. En efecto, se ha de cumplir lo siguiente

- $\mathbf{b}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{y}) + \mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{y})$
- $\mathbf{b}(\alpha\, \vec{x}, \vec{y}) = \alpha\, \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y})$
- $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}_1) + \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}_2)$
- $\mathbf{b}(\vec{x}, \alpha\, \vec{y}) = \alpha\, \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y})$

2. Formas Bilineales versus Matrices Cuadradas

★ Imagina que sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ realizas construcciones de formas del tipo siguiente

- $\mathbf{b} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{b}((x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1.y_2 - 3x_2.y_2 + x_3.y_1 + 4x_3.y_3$$

- $\mathbf{b} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{b}((x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1.y_2 - 81x_1.y_3 + 48x_2.y_3 + 89x_3.y_1 + 102x_3.y_3$$

¿puedes asegurar que estás construyendo formas bilineales?

♣ Naturalmente, para responder, de manera razonada, a estas preguntas, puedes tratar de probar, en cada uno de los dos casos, una a una las cuatro propiedades de la definición de forma bilineal. No obstante, también puedes proceder de otra manera, quizá más simple o, puede que más elegante pero, en cualquier caso relacionada, una vez más, con la teoría de matrices. Observa que, en el primer caso, la forma $\mathbf{b}$ la puedes escribir del siguiente modo

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

De la misma manera, en el segundo caso, la forma se puede escribir como sigue

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -81 \\ 0 & 0 & 48 \\ 89 & 0 & 102 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Es claro ahora que, usando las propiedades que conoces de las operaciones con matrices, puedes deducir que, en ambos casos, se trata de una forma bilineal.

★ Además, lo anterior se podría reproducir a partir de cualquier matriz. Quiero decir que si te dan una matriz, cualquiera, de orden tres

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

entonces puedes definir, a partir de ella, la siguiente forma, obviamente bilineal, sobre $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, x_i\, y_j$$

♣ Observa, en particular que el producto escalar que ya conoces para $\mathbb{R}^3$ es un caso especial de esta construcción. En efecto si tomas la matriz M como la identidad entonces si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ tienes

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

★ Es claro también que lo anterior puede ser extendido, sin ninguna dificultad adicional, al caso de $\mathbb{R}^n$. Así, si te dan una matriz cuadrada de orden n, $M \in \mathbf{M}_n$ cuyos items los representas por a_{ij}, puedes construir la siguiente forma bilineal sobre $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como sigue modo: los vectores de $\mathbb{R}^n$ los puedes ver como matrices fila de modo que podemos hacer el siguiente producto de matrices

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}.M.\vec{y}^{\,t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j} \tag{1}$$

es claro, usando las propiedades que conoces del producto y otras operaciones con matrices, que la aplicación así definida cumple las cuatro propiedades requeridas para ser una forma bilineal. En particular, cuando la matriz M es la identidad de orden n entonces tienes el producto escalar, que como puedes pensar no es exclusivo de las dimensiones dos y tres. Si $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ entonces tienes

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

♣ Ya sabes construir, usando matrices, montones de formas bilineales sobre, en general, $\mathbb{R}^n$. Como debes sospechar, en este punto, aparecen unas cuantas preguntas naturales, por ejemplo

- ¿Cuántas formas bilineales puedes construir sobre $\mathbb{R}^n$?
- ¿Toda forma bilineal sobre $\mathbb{R}^n$ procede de una matriz cuadrada de orden n?

Es obvio que ambas preguntas están relacionadas. En efecto, si la respuesta a la segunda fuese afirmativa entonces obtienes una repuesta contundente a la primera. **Puedo construir tantas formas bilineales sobre $\mathbb{R}^n$ como matrices cuadradas de orden n.** Obtendrías así una bella identificación, biyección o aplicación biyectiva, entre $\mathbf{M}_n$ y el conjunto de las formas bilineales sobre $\mathbb{R}^n$.

★ Bien pues, la teoría es tan perfecta, tan a medida, que lo anterior es verdad. Veamos pues que en efecto, toda forma bilineal $\mathbf{b}$ sobre $\mathbb{R}^n$ procede de una matriz $M \in \mathbf{M}_n$. En otras palabras, veamos que si tenemos definida una forma bilineal a partir de una matriz, entonces podemos recuperar la matriz a partir de la forma bilineal. Observa entonces de (1) que si consideras la base canónica $\mathcal{B}_o = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, entonces el item a_{ij} (ocupa la fila i columna j) de la matriz M es

$$\boxed{a_{ij} = \mathbf{b}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Hemos hecho un gran descubrimiento, los items de la matriz M, y así la propia matriz, se recuperan haciendo las imágenes, por la forma bilineal $\mathbf{b}$, de las parejas de vectores de la base canónica. Entonces, imagina que te dan una forma bilineal, $\mathbf{b}$ sobre $\mathbb{R}^n$, puedes definir una matriz, $M \in \mathbf{M}_n$ definiendo sus items por la fórmula anterior, es claro entonces que si defines una forma bilineal usando esta matriz (1) entonces obtienes $\mathbf{b}$.

♣ Unas observaciones para continuar

- En primer lugar, es claro de lo anterior que para determinar una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^n$ es suficiente con conocer las imágenes por ella de las parejas de vectores obtenidas de la base canónica.

- Naturalmente y como siempre, el aparente protagonismo, que en esta construcción, tienen por un lado $\mathbb{R}^n$ y por otro, su base canónica, no es tal. Lo anterior no es exclusivo de $\mathbb{R}^n$ ni de su base canónica, $\mathcal{B}_o$, sino que se puede extender a cualquier espacio vectorial, $\mathbf{V}^n$, tomando cualquier base, $\mathcal{B}$ sobre el mismo. En efecto,

- **Extensión.-** Si tienes una forma bilineal, $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$ y tomas una base cualquiera, $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$, entonces puedes definir la matriz $M \in \mathbf{M}_n$ cuyos items son

  $$\boxed{a_{ij} = \mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

  Ahora dados dos vectores cualesquiera, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \, \vec{x}_i$ e $\vec{y} = \sum_{j=1}^n y_j \, \vec{x}_j$. Entonces, usas la bilinealidad de $\mathbf{b}$ para obtener

  $$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{b}\left(\sum_{i=1}^n x_i \, \vec{x}_i ; \sum_{j=1}^n y_j \, \vec{x}_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \, y_j \, \mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \, x_i \, y_j$$

  Claramente, esta expresión se puede escribir en forma matricial del siguiente modo: si representamos por X e Y a las matrices fila que expresan las coordenadas de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en la base $\mathcal{B}$ entonces tienes

  $$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = X.M.Y^t} \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^n \qquad \text{Expresión matricial forma bilineal}$$

- **Conclusión.-** Si fijas una base, $\mathcal{B}$, de un espacio vectorial, $\mathbf{V}^n$, entonces hablar de formas bilineales sobre éste es lo mismo que hablar de matrices cuadradas de orden n.

3. Algunos ejemplos

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, puedes calcular las formas bilineales que en la base canónica vienen representadas, respectivamente, por las siguientes matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Entoncces obtienes

   - $\mathbf{b}_1(\vec{x}, \vec{y}) = x_1.y_1 + x_2.y_2$
   - $\mathbf{b}_2(\vec{x}, \vec{y}) = x_1.y_1 - x_2.y_2$
   - $\mathbf{b}_3(\vec{x}, \vec{y}) = x_1.y_2 + x_2.y_1$
   - $\mathbf{b}_4(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1.y_1 + 2x_1.y_2 + 8x_2.y_1 + 4x_2.y_2$
   - $\mathbf{b}_5(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1.y_1 - 2x_1.y_2 - 2x_2.y_1 + x_2.y_2$

2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se considera la forma bilineal definida por (producto escalar usual)

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3$$

   es claro que la matriz que representa a esta forma bilineal en la base canónica, $\mathcal{B}_o$, es la identidad. Vamos a calcular la matriz que la representa en la base $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1 = (1,1,1); \vec{x}_2 = (1,-1,1); \vec{x}_3 = (1,0,4)\}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{x}_1) & \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) & \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{x}_3) \\ \mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{x}_1) & \mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{x}_2) & \mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{x}_3) \\ \mathbf{b}(\vec{x}_3, \vec{x}_1) & \mathbf{b}(\vec{x}_3, \vec{x}_2) & \mathbf{b}(\vec{x}_3, \vec{x}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se considera la aplicación bilineal definida como sigue

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1.y_2 - x_2.y_1 + x_1.y_3 - x_3.y_2 + x_2.y_3 - x_3.y_2$$

   entonces su matriz en la base canónina es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. En el espacio vectorial $\mathbf{M}_2$ puedes definir la aplicación $\mathbf{b} : \mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_2 \to \mathbb{R}$ por

$$\mathbf{b}(M, N) = \text{traza}(M.N^t)$$

   y comprobar, usando propiedades de las operaciones con matrices que se trata de una forma bilineal.

5. Puedes comprobar que la matriz de la anterior forma bilineal en la base $\mathcal{B}$ definida por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   es la matriz identidad

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}) = \mathbf{I}_4$$

6. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_3$ puedes definir la aplicación $\mathbf{b} : \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ por

$$\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P(t).Q(t)\, dt$$

y comprobar que se trata de una forma bilineal.

7. Ahora puedes calcular la matriz que representa a la forma bilineal anterior en cualquier base de $\mathcal{P}_3$. Por ejemplo, en la base $\mathcal{B}_o = \{1, t, t^2\}$, la matriz de $\mathbf{b}$ es la siguiente

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

8. En un espacio vectorial $\mathbf{V}^n$ puedes considerar dos formas lineales, $\varphi, \psi \in (\mathbf{V}^n)^*$ y entonces definir $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{x}).\psi(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^n$$

entonces puedes comprobar que se trata de una forma bilineal.

4. Formas bilineales simétricas y antisimétricas

★ Las formas bilineales pueden cumplir propiedades adicionales. Nuevamente realizamos mimetismo con respecto del producto escalar que ya conoces para definir la **simetría**. Sabes que $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$, entonces decimos que el producto escalar es una **forma bilineal simétrica**. En general, una forma bilineal, $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$, se dice simétrica si ocurre lo siguiente

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{y}, \vec{x})} \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^n$$

♣ Puesto que las formas bilineales están representadas, cuando tomas bases, por matrices, parece natural preguntarse si la simetría de una forma bilineal y la simetría de las matrices que la representan son equivalentes. La respuesta es, evidentemente, afirmativa. Por un lado si $\mathbf{b}$ es una forma bilineal y simétrica sobre $\mathbf{V}^n$ y tomas cualquier base $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ entonces se cumple que

$$\mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \mathbf{b}(\vec{x}_j, \vec{x}_i) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Pero la matriz $M(\mathbf{b}, \mathcal{B})$ es la que tiene por items precisamente los números reales $\mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ y por lo tanto M es simétrica.

Para probar el recíproco, supones que en una cierta base, $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$, la matriz $M(\mathbf{b}, \mathcal{B})$ es simétrica, ello implica que

$$a_{ij} = \mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \mathbf{b}(\vec{x}_j, \vec{x}_i) = a_{ji} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Ahora para dos vectores cualesquiera $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i\, \vec{x}_i$ e $\vec{y} = \sum_{j=1}^n y_j\, \vec{x}_j$ de $\mathbf{V}^n$ tienes

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\, y_j\, x_i = \mathbf{b}(\vec{y}, \vec{x})$$

Puedes comprobar que en los ejemplos anteriores de formas bilineales existen bastantes de ellas que son simétricas, ¿cuáles?

★ Yo creo que tampoco te puede sorprender la existencia de formas bilineales antisimétricas. En efecto, una forma bilineal, $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$, se dice ser antisimétrica cuando

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) = -\mathbf{b}(\vec{y},\vec{x})} \qquad \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbf{V}^n$$

Naturalmente puedes comprobar que la antisimetría de una forma bilineal equivale a la de las matrices que la representan en las distintas bases de $\mathbf{V}^n$.

♣ Para acabar este epígrafe, un par de cuestiones. Una esperable, la segunda menos pero también natural

- *Toda forma bilineal se descompone, de modo único, como suma de dos formas bilineales, la primera simétrica y la segunda antisimétrica.* Para comprobarlo, justo mimetizamos las cuentas que hicimos, el año pasado con matrices. Así si te dan una forma bilineal, $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$, observamos que la forma bilineal $\mathbf{b}_s : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$,definida por
$$\mathbf{b}_s(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) + \mathbf{b}(\vec{y},\vec{x})) \qquad \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbf{V}^n$$
es simétrica y la forma bilineal $\mathbf{b}_a : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$,definida por
$$\mathbf{b}_a(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) - \mathbf{b}(\vec{y},\vec{x})) \qquad \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbf{V}^n$$
es antisimétrica. Además, es obvio que
$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_s + \mathbf{b}_a$$
- *Una forma bilineal es antisimétrica si y solo si verifica que* $\mathbf{b}(\vec{x},\vec{x}) = 0$ *cualquiera que sea* $\vec{x} \in \mathbf{V}^n$
  - **(⇒)** Si $\mathbf{b}$ es antisimétrica entonces $\mathbf{b}(\vec{x},\vec{x}) = -\mathbf{b}(\vec{x},\vec{x}) = 0$
  - **(⇐)** la condición suficiente se sigue del cáculo siguiente, tomas dos vectores cualesquiera $\vec{x},\vec{y} \in \mathbf{V}^n$ y entonces
$$0 = \mathbf{b}(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{x},\vec{x}) + \mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) + \mathbf{b}(\vec{y},\vec{x}) + \mathbf{b}(\vec{y},\vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) + \mathbf{b}(\vec{y},\vec{x})$$

5. Formas Cuadráticas

♠ Recuerda, del curso pasado, que cuando estudiabas el producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$, entonces definías a partir de él la idea de norma de vectores $\vec{x}.\vec{x}$ cuyos valores son sienpre no negativos y por tanto existe su raíz cuadrada positiva a la que llamabas módulo $\vec{x}$. En esencia, lo que tienes es una aplicación

$$\mathbf{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad \mathbf{Q}(\vec{x}) = \vec{x}.\vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

♠ Esta misma definición la puedes hacer sobre cualquier espacio vectorial, siembre que tengas una forma bilineal. En tal caso, es decir si tienes $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ entonces puedes definir la aplicación

$$\mathbf{Q} : \mathbf{V}^n \to \mathbb{R} \qquad \mathbf{Q}(\vec{x}) = \mathbf{b}(\vec{x},\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{V}^n$$

A esta aplicación le llamaremos la **forma cuadrática** asociada con la forma bilineal $\mathbf{b}$. Las formas cuadráticas poseen las siguientes propiedades, derivadas de manera sencilla y directa de las de las formas bilineales

- $\mathbf{Q}(\vec{0}) = 0$
- $\mathbf{Q}(\alpha\,\vec{x}) = \alpha^2.\mathbf{Q}(\vec{x}), \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R} \quad \forall\vec{x} \in \mathbf{V}^n$
- $\mathbf{Q}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathbf{Q}(\vec{x}) + \mathbf{Q}(\vec{y}) + \mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) + \mathbf{b}(\vec{y},\vec{x}) \qquad \forall\vec{x},\vec{y} \in \mathbf{V}^n$

♠ Por lo que has visto antes, es claro que la forma cuadrática asociada con una forma bilineal antisimétrica es trivial. Lo que se puede usar para ver que distintas formas bilineales pueden tener asociadas la misma forma cuadrática.

Aquí tienes un par de ejemplos, en $\mathbb{R}^3$ consideras las dos siguientes formas bilineales

$$\mathbf{b}_1(\vec{x},\vec{y}) = x_1.y_2 + 2x_2.y_1 + x_1.y_3 + 2x_3.y_1 + x_2.y_3 + 2x_3.y_2$$

$$\mathbf{b}_2(\vec{x},\vec{y}) = 3x_1.y_2 + 3x_1.y_3 + 3x_2.y_3$$

Puedes ver que la forma cuadrática de ambas formas bilineales es la siguiente

$$\mathbf{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad \mathbf{Q}(\vec{x}) = 3x_1.x_2 + 3x_1.x_3 + 3x_2.x_3$$

Con ello, lo que deseo que comprendas es que si esto lo ves como una aplicación, con dominio el conjunto de todas las formas bilineales sobre un cierto espacio vectorial y codominio el de formas cuadráticas sobre el mismo, que aplica cada forma bilineal en su correspondiente forma cuadrática, entonces **no es inyectiva**. Las siguientes cuestiones puedes considerarlas como los titulares que encuadran y resumen la noticia sobre cualquier espacio vectorial, $\mathbf{V}^n$

1. Si tienes una forma bilineal, $\mathbf{b}$, y representas por $\mathbf{Q}$ a su forma cuadrática, entonces puedes sumar a $\mathbf{b}$ cualquier forma bilineal antisimétrica, $\mathbf{a}$, para obtener otra forma bilineal, $\mathbf{b}+\mathbf{a}$ cuya forma cuadrática sigue siendo $\mathbf{Q}$

2. Si una forma bilineal, $\mathbf{b}$, la descompones, como sabes, en su parte simétrica y su parte antisimétrica, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_s + \mathbf{b}_a$ entonces la forma cuadrática de la forma bilineal original es la asociada a su parte simétrica. En otras palabras, la forma cuadrática de una forma bilineal solo depende de su parte simétrica.

3. Si la aplicación de la que estamos hablando la restringes a formas bilineales simétricas (lo que en el siguiente epígrafe llamaremos métricas) entonces se convierte en biyectiva. En efecto si tienes una forma bilineal y simétrica, $\mathbf{b}$, cuya forma cuadrática es $\mathbf{Q}$ entonces para cualquier pareja de vectores, $\vec{x},\vec{y}$, tienes

$$\mathbf{Q}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{x},\vec{x}) + \mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) + \mathbf{b}(\vec{y},\vec{x}) + \mathbf{b}(\vec{y},\vec{y})$$

y entonces, suando la simetría de $\mathbf{b}$ obtienes

$$\mathbf{b}(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}(\vec{x}+\vec{y}) - \mathbf{Q}(\vec{x}) - \mathbf{Q}(\vec{y}))$$

fórmula que te permite recuperar la forma bilineal simétrica de su forma cuadrática.

★ **Nota Informativa.-** En general, cuando tienes una forma bilineal y simétrica (lo que llamaremos una métrica), $\mathbf{b}$, sobre un espacio vectorial, entonces tienes su forma cuadrática, $\mathbf{Q}$, y siguiendo la jerigonza relativista puedes clasificar a los vectores de tu espacio $\mathbf{V}^n$ en tres clases o familias

- Vectores espaciales, si $\mathbf{Q}(\vec{x}) > 0$
- Vectores temporales, si $\mathbf{Q}(\vec{x}) < 0$
- Vectores luminosos, si $\mathbf{Q}(\vec{x}) = 0$ con $\vec{x} \neq 0$

6. Métricas

♣ A partir de ahora, vamos a estudiar formas bilineales simétricas, a las que llamaremos **métricas**, sobre espacios vectoriales. Así si $\mathbf{V}^n$ es un espacio vectorial, una métrica sobre $\mathbf{V}^n$ es una forma bilineal y simétrica $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$. Al par $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ le llamaremos **espacio vectorial métrico** o simplemente espacio métrico.

★ **Ortogonalidad.-** En general, en un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, puedes hablar de ortogonalidad de vectores. Así, dos vectores, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^n$, son ortogonales, con respecto a $\mathbf{b}$ si ocurre que

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = 0} \qquad \text{ortogonales}$$

Naturalmente, esta idea se puede extender a subespacios vectoriales. Así si tienes dos subespacios vectoriales, $\mathbf{U}$ y $\mathbf{W}$ entonces puedes decir que son ortogonales si ocurre que

$$\mathbf{b}(\vec{u}, \vec{w}) = 0 \qquad \forall \vec{u} \in \mathbf{U} \quad \text{y} \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{W}$$

♣ No es difícil comprender que estudiando la fauna de espacios métricos, o, simplemente, la de métricas sobre un mismo espacio vectorial, te puedes encontrar con comportamientos muy diferentes, algunos contra natura, rayando la aberración. Para convencerte de ello, voy a ponerte algunos ejemplos de métricas sobre el plano. De las cinco formas bilineales, sobre el plano $\mathbb{R}^2$, que consideramos en el ejemplo 1, es claro que salvo la cuarta, las otras cuatro son métricas.

1. $\boxed{(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)}$ Esta geometría métrica debe resultarte bastante familiar, la conoces bien del bachillerato. En efecto, el plano dotado con la métrica definida como el producto escalar que estudiaste el curso pasado. Se trata de un plano Euclideo y en él la noción de ortogonalidad es también conocida por perpendicularidad. No obstante, tendrás algunas sorpresas relacionadas con esta geometría, en esta tema y aún más en el siguiente. Quizá y de momento, una propiedad que me conviene recordarte es que en este plano métrico se verifica lo siguiente

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{b}_1(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b}_1(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

2. $\boxed{(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)}$ En este plano métrico, lo anterior no se cumple. Encuentras vectores, distintos de cero, con los siguientes tres comportamientos posibles

   - Los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en la región $x_1 > x_2$ satisfacen $\mathbf{b}_2(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, se llaman vectores espaciales en la jerigonza relativista.
   - Los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en la región $x_1 < x_2$ satisfacen $\mathbf{b}_2(\vec{x}, \vec{x}) < 0$, se llaman vectores temporales en el argot relativista.
   - Finalmente, los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ en las rectas $x_1 = \pm x_2$ satisfacen $\mathbf{b}_2(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, se llaman vectores luminosos en la jerga relativista.

   Evidentemente, se trata de un plano de Lorentz.

3. $\boxed{(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_3)}$ En este caso los dos vectores de la base canónica son luminosos $\mathbf{b}_3(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \mathbf{b}_3(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 0$. Si consideramos la base $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ formada por $\vec{x}_1 = (\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$

y $\vec{x}_2 = (\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$ entonces es fácil comprobar que en esta base la matriz de la métrica es

$$M(\mathbf{b}_3, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de manera que se trata de una métrica de Lorentz, como en el caso anterior, aunque referida a una base formada por vectores luminosos.

4. $\boxed{(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_5)}$ El caso de este plano métrico es, todavía, más raro y patológico. En esta geometría existen vectores distintos al cero que son capaces de ser ortogonales a todos los vectores del plano. En efecto si deseamos calcular los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ que son ortogonales a todos los vectores $\vec{y}$ del plano, por la bilinealidad de la métrica, en la segunda veriable, ello es equivalente a considerar aquellos que son ortogonales a los dos vectores de la base canónica

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2x_1 + x_2 = 0$$

Obtienes así que los vectores ortogonales a todos los del plano son los que están en la recta de ecuación $-2x_1 + x_2 = 0$ Si tomas un vector de esta recta, por ejemplo $\vec{v}_2 = (1, 2)$ entonces puedes considerar cualquier otro vector que no esté en esta recta, por ejemplo $\vec{v}_1 = (1, 0)$ para tener una base, $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, del plano y en ella la matriz de la métrica es

$$M(\mathbf{b}_5, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

★ Lo anterior permite clasificar a las métricas en dos grandes grupos. Aquellas que poseen vectores distintos de cero que son ortogonales a todos los del espacio (es suficiente con que lo sea a todos los de una base) las llamaremos **métricas degeneradas** y las que no tengan vectores ortogonales a todos los del espacio que serán las **métricas no degeneradas**.

★ **El radical de una métrica.-** Si te dan un espacio vectorial métrico $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ entonces, para saber donde andas, conviene calcular el conjunto de aquellos vectores que son ortogonales a todos los de $\mathbf{V}^n$. Esto es lo que se llama el **radical** de la métrica

$$\mathrm{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b}) = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n \ : \ \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \ \forall \vec{y} \in \mathbf{V}^n\}$$

puedes comprobar de manera sencilla que el radical de un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, es siempre un subespacio vectorial de $\mathbf{V}^n$, a su dimensión se le llama nulidad de la métrica.

Naturalmente las métricas degeneradas tienen radical no trivial, la nulidad es mayor que cero; mientras que los espacios métricos no degenerados poseen radical trivial.

★ **Problema.-** ¿Cómo se distingue si una métrica es degenerada o no? Obviamente, calculando el radical y viendo si es trivial o no. Pero, a efectos prácticos, si te dan una métrica por la matriz que la representa en una cierta base ¿cómo codifica la matriz el hecho de que la métrica sea degenerada o no? ¿existe algo en la matriz que nos delate si la métrica es de una manera u otra?

★ **Respuesta.-** La respuesta, naturalmente, es afirmativa. Tienes un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, tomas una base $\mathbf{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ de manera que tienes la matriz $M = M(\mathbf{b}, \mathcal{B})$. Es obvio que un vector, $\vec{x}$, está en el radical $\text{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ si y sólo si ocurre $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}_1) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}_2) = ... = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}_n) = 0$ lo que equivale a que su matriz de coordenadas $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sea una solución del siguiente sistema homogéneo de n ecuaciones

$$X.M = O \quad \text{donde} \quad O = 0, 0, ..., 0)$$

y naturalmente ello equivale a que $\det(M) = 0$. Hemos descubierto que las **métricas degeneradas** se corresponden con matrices que poseen **determinante cero** (ello obviamente no depende de la base que elijas para representar a la métrica). Por lo tanto las **métricas no degeneradas** vienen representadas, en cualquier base, por matrices con **determinante distinto de cero**.

Ejercicio.- En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica, $\mathbf{b}$, que en la base canónica viene representada por la siguiente matriz

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces, como sabes, puedes calcular su radical del siguiente modo, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \text{Rad}(\mathbb{R}^3, \mathbf{b})$ si y solo si $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{e}_1) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{e}_2) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{e}_3) = 0$ lo que implica que

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\text{Rad}(\mathbb{R}^3, \mathbf{b}) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$. La nulidad de esta métrica es uno.

♣ Si tienes un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, entonces puedes considerar un subespacio complementario, $\mathbf{U}$, de $\text{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ en $\mathbf{V}^n$, esto es

$$\mathbf{V}^n = \text{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b}) \oplus \mathbf{U}$$

Es claro que, de la propia definición de radical, si tomas vectores en ambos sumandos entonces son ortogonales de manera que la suma directa anterior es, además, una suma ortogonal.

★ Es importante que comprendas que si tienes un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, y tomas un subespacio, $\mathbf{U}$, de $\mathbf{V}^n$, entonces la métrica la puedes restringir al subespacio para convertirlo en un espacio métrico. Esto es, puedes considerar a $\mathbf{b}$ actuando sobre parejas de vectores de $\mathbf{U}$ con lo que obtienes una forma bilineal y simétrica, esto es una métrica, sobre $\mathbf{U}$ que, si no hay confusión, puedes seguir representando por $\mathbf{b}$. No obstante el hecho de que el espacio métrico de partida sea degenerado o no degenerado, no obliga en absoluto, a que sus subespacios lo sean. En este sentido, se pueden dar todas las posibilidades

- En un espacio métrico degenerado puedes encontrar, obviamente, subespacios degenerados. En efecto, si $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ es degenerado, entonces su radical es un subespacio no trivial y, por definición, la métrica sobre él es trivial y por lo tanto degenerada.

- En un espacio métrico degenerado puedes encontrar subespacios no degenerados. También es claro, si tomas cualquier subespacio complementario al radical

  $$\mathbf{V}^n = \text{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b}) \oplus \mathbf{U}$$

  entonces, es claro que el subespacio $\mathbf{U}$, naturalmente con la métrica inducida, es no degenerado.

- En un espacio métrico no degenerado puedes encontrar, obviamente, subespacios no degenerados. Por ejemplo cualquier plano del espacio Euclideo ($\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar representado en la base canónica por la matriz identidad) Otro ejemplo, toma, por ejemplo, en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ la métrica que en la base canónica está representada por la siguiente matriz

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  entonces puedes comprobar que los planos

  - $\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}(\{(1,1,0);(0,0,1)\})$
  - $\mathbf{U}_2 = \mathbf{L}(\{(1,-1,0);(0,0,1)\})$

  son no degenerados

- En un espacio métrico no degenerado puedes encontrar subespacios degenerados. En el espacio métrico anterior, los planos

  - $\mathbf{W}_1 = \mathbf{L}(\{(1,0,0);(0,0,1)\})$
  - $\mathbf{W}_2 = \mathbf{L}(\{(0,1,0);(0,0,1)\})$

  son degenerados.

7. Matrices Congruentes

♣ En este epígrafe vamos a estudiar un problema natural al que ya estamos acostumbrados. Tienes un espacio métrico $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ entonces si tomas dos bases de $\mathbf{V}^n$, por ejemplo $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$, en cada una de ellas la métrica está representada por una matriz simétrica, $M_1 = M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_1)$ y $M_2 = M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_2)$, la cuestión es entonces la de conocer la relación que existe entre estas dos matrices.

Para resolver el problema, sean $\vec{x}, \vec{y}$ dos vectores cualesquiera de $\mathbf{V}^n$. Representamos por X y X', respectivamente a las matrices fila de las coordenadas de $\vec{x}$ en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Del mismo modo, Y e Y' serán las correspondientes al vector $\vec{y}$. Entonces tienes

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = X.M_1.Y^t = X'.M_2.Y'^t$$

Por otro lado si P representa a la matriz del cambio de base, esto es, $P = M(\mathbf{1}_\mathbf{V}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ entonces tienes

$$X' = P.X \qquad Y' = PY$$

y por lo tanto obtienes

$$X.M_1.Y^t = X^t(P^t.M_2.P).Y^t$$

Cuando en esta expresión tomas a los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como vectores de la base $\mathcal{B}_1$ entonces para cada elección obtienes la igualdad de dos items correspondientes de las matrices M_1 y $P.M_2.P^t$ con lo que estas matrices son iguales

$$\boxed{M_1 = P^t.M_2.P} \qquad \text{matrices congruentes}$$

Como consecuencia obtienes los siguientes invariantes por congruencia

- Todas las matrices congruentes (representan a la misma métrica) tienen el mismo rango. Ello es debido a que tanto P como P^t son no singulares.

- Si dos matrices son congruentes entonces el signo de sus determinantes es el mismo

$$\det(M_1) = \det(M_2).\,(\det(P))^2$$

8. Subespacios y Ortogonalidad

★ Ya conoces algunas cosas relativas al comportamiento de los subespacios de un espacio métrico con respecto a la métrica. Te recuerdo las más importantes. Estamos, obviamente en un espacio métrico $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$

- Siempre que tomes un subespacio, $\mathbf{U}$, de $\mathbf{V}^n$ puedes restringir la métrica sobre él para obtener un subespacio métrico.

- La naturaleza de la métrica (degenerada o no degenerada) no es, en general, heredada por los subespacios.

- El radical de una métrica es siempre un subespacio degenerado pues la métrica sobre él es trivial.

- Los subespacios complementarios del radical son todos no degenerados.

- Tomando un complementario del radical, obtienes una descomposición del tipo

$$\mathbf{V}^n = \mathrm{Rad}(\mathbf{V}^n, \mathbf{b}) \oplus \mathbf{U} \qquad \text{suma directa y ortogonal}$$

  en consecuencia si tomas bases de ambos subespacios y las reúnes para formar una base de $\mathbf{V}^n$, entonces la matriz de la métrica en esta base es esencialmente la de la métrica restringida a $\mathbf{U}$ en la base que has tomado sobre este subespacio, convenientemente orlada de ceros.

En esencia, lo que estamos diciendo es que el estudio de métricas degeneradas se puede reducir al de métricas no degeneradas sobre los complementarios del radical.

★ **NOTA.-** A partir de ahora, a menos que se diga lo contrario, vamos a considerar espacios métricos no degenerados.

★ Si te dan un subespacio, $\mathbf{U}_r$ (dimensión r), de un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, entonces puedes definir su subespacio ortogonal como sigue

$$\mathbf{U}^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n \ : \ \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{u}) = 0 \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{U}_r\}$$

Es claro que el conjunto de vectores así definido es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}^n$ (lo puedes comprobar como ejercicio). Además, su dimensión es $n - r$ (recuerda que estamos en el caso de espacios métricos no degenerados). Para comprobarlo, observa que si tomas cualquier base de $\mathbf{U}_r$, por ejemplo $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_r\}$, entonces un vector, $\vec{x}$ está en $\mathbf{U}^{\perp}$ si y sólo si se verifica

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{u}_1) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{u}_2) = ... = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{u}_r) = 0$$

la cuestión es escribir estas ecuaciones en una base para obtener un sistema de r ecuaciones lineales homogéneas en las n coordenadas de $\vec{x}$, relativas a esa base. Las r ligaduras son independientes y aquí interviene que la métrica es no degenerada con lo cual constituyen unas ecuaciones implícitas para $\mathbf{U}^{\perp}$.

Como ya tenemos una base de $\mathbf{U}_r$, la ampliamos para obtener la siguiente base de $\mathbf{V}^n$

$$\bar{\mathcal{B}} = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_r, \vec{x}_{r+1}, ..., \vec{x}_n\}$$

En esta base la métrica viene representada por una matriz simétrica no singular puesto que la métrica es no degenerada

$$M = M(\mathbf{b}, \bar{\mathcal{B}}) = (\alpha_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

las r ecuaciones anteriores al expresarlas en esta base son

$$\mathbf{b}(\vec{u}_1, \vec{x}) = \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = 0$$

$$\mathbf{b}(\vec{u}_2, \vec{x}) = \alpha_{21}x_1 + ... + \alpha_{2n}x_n = 0$$

....

$$\mathbf{b}(\vec{u}_r, \vec{x}) = \alpha_{r1}x_1 + ... + \alpha_{rn}x_n = 0$$

naturalmente, estas r ecuaciones homogéneas son independientes pues la matriz M es regular, lo que prueba que la dimensión de $\mathbf{U}^{\perp}$ es $n - r$.

★ Lo anterior no ocurre si el espacio métrico en el que estás trabajando es degenerado. Aquí tienes un ejemplo. Considera en $\mathbb{R}^3$ la métrica, $\mathbf{b}$, representada en la base canónica por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Tienes entonces una métrica degenerada cuyo radical, puedes comprobarlo, es la recta siguiente

$$\mathrm{Rad}(\mathbb{R}^3, \mathbf{b}) = \mathbf{L}(\{\vec{v} = (1, 1, 1)\})$$

Si ahora tomas el plano $\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0); \{\vec{v} = (1, 1, 1)\})$ entonces puedes calcular su subespacio ortogonal y obtienes que es el siguiente plano

$$\mathbf{U}^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 - x_2 = 0\}$$

con lo que no se cumple que la suma de dimensiones es tres.

♣ Ya sabes que aunque $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ sea un espacio métrico no degenerado, tiene subespacios degenerados. Imagina que tomas un subespacio $\mathbf{U}$, con dimensión r. Por lo que se ha visto antes, el subespacio ortogonal, $\mathbf{U}^{\perp}$, tiene dimensión $n - r$. La suma de las dimensiones de $\mathbf{U}$ y de $\mathbf{U}^{\perp}$ es justamente la del espacio ambiente. Naturalmente, hay que preguntar **¿cuándo se puede romper el espacio ambiente, $\mathbf{V}^n$, en suma directa, y por tanto ortogonal, de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{\perp}$?**

La anterior descomposición ortogonal se produce si y sólo si $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{\perp} = \{\vec{0}\}$. Lo que, obviamente, es equivalente a que no exista ningún vector en $\mathbf{U}$, distinto al cero, que esté en $\mathbf{U}^{\perp}$, es decir que sea ortogonal con todos los vectores de $\mathbf{U}$. Falta entonces concluir con que lo anterior equivale a que el subespacio $\mathbf{U}$ es no degenerado. Hemos probado entonces las siguientes afirmaciones

- **Sea U un subespacio no degenerado de un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathrm{b})$ no degenerado entonces se tiene la siguiente descomposición en suma directa ortogonal**

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{U} \oplus_{\perp} \mathbf{U}^{\perp} \qquad \text{directa y ortogonal}$$

- **Si para un subespacio, U, de un espacio métrico no degenerado se tiene la descomposición anterior, entonces el subespacio es no degenerado**.
- **Como consecuencia, cuando tienes un subespacio no degenerado, de entre todos sus complentarios, puedes determinar uno, único, que es ortogonal a él, a partir de ahora, le llamaremos su complemento ortogonal**.
- **Además de manera inmediata puedes ver que un subespacio es no degenerado si y sólo si su ortogonal lo es**.

Aquí tienes algunos ejemplos

Ejemplo 1.- Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar Euclideo que ya conoces, esto es la métrica representada, en la base canónica, por la matriz identidad. Entonces cualquier recta vectorial es un subespacio no degenerado. En efecto si tomas cualquier recta, $\mathbf{R} = \mathbf{L}(\{\vec{x}\})$, la métrica Euclidea restringida a ella y en la base $\{\vec{x}\})$ es la matriz de orden uno $\begin{pmatrix} \vec{x}.\vec{x} \end{pmatrix}$ cuyo determinante es, obviamente distinto de cero, de manera más concreta positivo.

Ejemplo 2.- Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica, $\mathbf{b}$, representada, en la base canónica por la siguiente matriz

$$M = M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Este ejercicio está dedicado a determinar las rectas $\mathbf{R} = \mathbf{L}(\{\vec{x}\})$ que son no degeneradas. Como en el ejercicio anterior, la matriz de la métrica restringida a $\mathbf{R}$ es $\begin{pmatrix} \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) \end{pmatrix}$ y su determinante sigue siendo el número $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x})$ pero ahora, no tenemos la garantía de que sea distinto de cero. Si el vector es $\vec{x} = (x, y, z)$ entonces $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) = x^2 + y^2 - z^2$ y naturalmente, este número puede ser positivo (vectores espaciales), negativo (vectores temporales) y cero (vectores luminosos). Estos últimos son los que proporcionan las rectas degeneradas. La conclusión es que las rectas vectoriales degeneradas son, justamente, las generatrices del cono con ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 \qquad \textbf{cono de luz}$$

Ejemplo 3.- Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con la métrica representada, en la base canónica, por la matriz identidad (ya sabes el producto escalar que bien conoces). Entonces te propongo que tomes cualquier plano, el que se te ocurra y trates de ver si es degenerado o no.

Ejemplo 4.- Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica, $\mathbf{b}$, representada, en la base canónica por la siguiente matriz

$$M = M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora consideramos el plano $\mathbf{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x + 3y - z = 0\}$, veamos si es degenerado o no degenerado. Para ello lo que haremos será, en primer lugar calcular una base del plano y después calcular la matriz de la métrica, restringida al plano, en dicha base para finalmente calcular su determinante.

$$\mathbf{U} = \{(x, y, 2x + 3y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbf{L}(\{\vec{x}_1 = (1, 0, 2), \vec{x}_2 = (0, 1, 3)\})$$

Entonces la matriz de la métrica, restringida a $\mathbf{U}$, en la base anterior es

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es distinto de cero y por lo tanto se trata de un plano no degenerado.

No creas, en esta espacio métrico también existen planos degenerados, por ejemplo considera el plano de ecuación $3x + 4y - 5z = 0$ entonces puedes calcular una base del mismo, por ejemplo $\vec{x}_1 = (5, 0, 3), \vec{x}_2 = (0, 5, 4)$. Ahora la matriz de la métrica, restringida a este plano, en la base anterior es

$$\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$$

que es una matriz singular, su determinante es cero, lo que implica que el plano es degenerado.

♣ **Nota.-** Puedes elegir planos en el espacio métrico definido anteriormente y tratar de ver si son degenerados o no. Después, si quieres *rizar el rizo*, puedes tratar de encontrar alguna regla para determinar todos los planos degenerados (y por tanto los no degenerados) de este espacio métrico.

Ejemplo 5.- *En $\mathbb{R}^3$ considera la métrica que, en la base canónica, viene dada por la matriz identidad (el producto escalar Euclideo que conoces del curso pasado). Calcula los subespacios ortogonales a los siguientes*

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{(1, 1, 1)\}) \qquad \mathbf{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - y - z = 0\}.$$

Para que un vector esté en $^\perp$ es suficiente con que sea ortogonal al vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$ el cual forma una base del primer subespacio vectorial (recta) entonces obtienes

$$\mathbf{U}^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\} \qquad \textbf{plano perpendicular}$$

Para calcular $\mathbf{W}^\perp$ observamos que los vectores $\vec{w}_1 = (1, 0, 1)$ y $\vec{w}_2 = (0, 1, -1)$ forman una base de $\mathbf{W}$ y por lo tanto

$$\mathbf{W}^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + z = y - z = 0\} \qquad \textbf{recta perpendicular}$$

Ejemplo 6.- *En $\mathbb{R}^3$ considera la métrica que en la base canónica viene representada por la siguiente matriz*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula los subespacios ortogonales a los siguientes

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{(1, 1, 0)\}) \qquad \mathbf{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - y - z = 0\}.$$

Para que un vector esté en $\mathbf{U}^{\perp}$ es suficiente con que sea ortogonal al vector $\vec{u} = (1,1,0)$ el cual forma una base del primer subespacio vectorial (recta) entonces obtienes

$$\mathbf{U}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - y = 0 \right\}$$

Dicho subespacio (plano), evidentemente contiene a la propia recta $\mathbf{U}$, esta situación es imposible en la geometría Euclidea que conoces del curso pasado.
Para calcular $\mathbf{W}^{\perp}$ observamos que los vectores $\vec{w}_1 = (1,0,1)$ y $\vec{w}_2 = (0,1,-1)$ forman una base de $\mathbf{W}$ y por lo tanto

$$\mathbf{W}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + z = y + z = 0\} = \mathbf{L}(\{(1,1,-1)\})$$

En este caso se tiene $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^{\perp} = \{\vec{0}\}$ y por lo tanto $\mathbb{R}^3 = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}$, como en la geometría Euclidea.

Ejemplo 7.- *En $\mathbb{R}^3$ considera la métrica que en la base canónica viene representada por la siguiente matriz*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula los subespacios ortogonales a los tres planos coordenados.
Una base del plano coordenado $\mathbf{U}_{12} \equiv z = 0$ es, obviamente la formada por los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$. Por lo tanto

$$\mathbf{U}_{12}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y = 0\} \qquad \textbf{eje}\, z$$

Una base del plano coordenado $\mathbf{U}_{13} \equiv y = 0$ es, obviamente la formada por los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_3$. Por lo tanto

$$\mathbf{U}_{13}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = z = 0\} \qquad \textbf{eje}\, x$$

Una base del plano coordenado $\mathbf{U}_{23} \equiv x = 0$ es, obviamente la formada por los vectores $\vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$. Por lo tanto

$$\mathbf{U}_{23}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = z = 0\} \qquad \textbf{eje}\, y$$

Nota.- Deberías fijarte en la situación tan distinta que se obtiene en el resultado anterior.

Ejemplo 8.- *En $\mathcal{P}_2$ considera la métrica definida por*

$$\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^4 P(t).Q(t)\, dt$$

Calcula el subespacio ortogonal del plano generado por los polinomios $1 - t$ y $1 + t^2$. Para ello tomamos $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ y

$$\mathbf{b}(P(t), 1 - t) = \int_0^2 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 - a_0 t - a_1 t^2 - a_2 t^3) dt = -\frac{2}{3} a_1 - \frac{4}{3} a_2 = 0$$

Los polinomios ortogonales con el $1 - t$ son los que verifican $a_1 + 2a_2 = 0$.

$$\mathbf{b}(P(t), 1 + t^2) = \int_0^2 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_0 t^2 + a_1 t^3 + a_2 t^4) dt = \frac{14}{3} a_0 + 6a_1 + \frac{136}{15} a_2 = 0$$

Los polinomios ortogonales con el $1 + t^2$ son los que verifican $35a_0 + 45a_1 + 68a_2 = 0$. Por tanto los polinomios ortogonales a todos los del plano dado deben verificar conjuntamente las dos siguientes ligaduras: $a_1 + 2a_2 = 0$ y $35a_0 + 45a_1 + 68a_2 = 0$.

9. Bases Ortogonales

★ En un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, la métrica la puedes representar por muchas matrices, dependiendo de la base que tomes, todas estas matrices, como bien sabes, son congruentes. Interesa entonces elegir bases donde las matrices sean diagonales. Geométricamente ello implica que dichas bases deben estar formadas por vectores que son ortogonales dos a dos. Tenemos entonces el siguiente problema

¿Existen bases ortogonales en un espacio métrico?

Este problema también se puede plantear en términos de congruencia de matrices en los siguientes términos

¿Es toda matriz simétrica congruente a otra diagonal?

★ Vamos a ver que podemos resolver de manera afirmativa el primer problema y por tanto el segundo. Es claro que podemos considerar, sin perder generalidad y como por otro lado lo estamos haciendo, el caso de métricas no degeneradas. En efecto, si probamos la existencia de bases ortogonales en cualquier espacio métrico no degenerado, entonces también se tiene dicha existencia en los espacio métricos degenerados. Recuerda que todo espacio métrico es la suma directa y ortogonal de su radical con cualquier complementario suyo.

★ Para probar el resultado realizaremos un argumento constructivo para probar la existencia de bases ortogonales. Tienes el espacio métrico $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ y empiezas eligiendo el primer vector de la futura base ortogonal, $\vec{x}_1$, con la única condición de que no sea luminoso (recuerda que estamos en un contexto de métrica no degenerada, su m atriz en cualquier base debe ser regular y entonces al diagonalizar, no puede haber ceros en la diagonal principal).

$$¿\exists\, \vec{x}_1 \in \mathbf{V}^n \quad : \quad \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{x}_1) \neq 0?$$

Si ello no fuese posible, todos los vectores deberían ser luminosos, pero en general, de la bilinealidad y simetría de $\mathbf{b}$ puedes escribir

$$\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{b}(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) - \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) - \mathbf{b}(\vec{y}, \vec{y})\right) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^n$$

Así si todos los vectores son luminosos la forma bilineal $\mathbf{b}$ debe ser trivial. Por lo tanto

$$\exists\, \vec{x}_1 \in \mathbf{V}^n \quad : \quad \mathbf{b}(\vec{x}_1, \vec{x}_1) \neq 0$$

Con ello garantizamos que la recta generada por $\vec{x}_1$, que representamos por $\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}(\{\vec{x}_1\})$, es un subespacio no degenaro y entonces admite un complemento ortogonal de dimensión $n-1$ y tienes

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{U}_1 \oplus^{\perp} \mathbf{U}_1^{\perp}$$

Resulta que $\mathbf{U}_1^{\perp}$, con la métrica inducida, es un espacio métrico con dimensión $n-1$ y podemos elegir en él el segundo vector de la base, $\vec{x}_2$ con la condición de que no sea luminoso.

$$\exists\, \vec{x}_2 \in \mathbf{U}_1^{\perp} \quad : \quad \mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{x}_2) \neq 0$$

Si representamos por $\mathbf{U}_2 = \mathbf{L}(\{\vec{x}_2\})$ a la recta que genera este vector, es un subespacio no degenerado y admite un complemento ortogonal en $\mathbf{U}_1^{\perp}$ con lo que se tiene

$$\mathbf{U}_1^{\perp} = \mathbf{U}_2 \oplus^{\perp} \mathbf{U}_2^{\perp}$$

El subespacio, no degenerado, $\mathbf{U}_2^\perp$ se convierte en un espacio métrico con dimensión $n-2$ y en él elegimos el tercer vector de la base con la condición de que no sea luminoso. Realizando n elecciones obtenemos la base ortogonal.

Aquí tienes algunos ejemplos

Ejemplo 1.- *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *considera la métrica,* $\mathbf{b}$*, que en la base canónica viene representada por la siguiente matriz*

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula una base ortogonal para dicha métrica.
Empezamos eligiendo como primer vector uno que no sea luminoso, por ejemplo, $\vec{x}_1 = (1,0,0)$ y calculamos el subespacio ortogonal a la recta $\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}(\{\vec{x}_1\})$, se tiene

$$\mathbf{U}_1^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -x+y+z=0\}$$

En este plano, no degenerado, elegimos el segundo vector de la base, por ejemplo, $\vec{x}_2 = (1,1,0)$ y volvemos a calcular el complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_2 = \mathbf{L}(\{\vec{x}_2\})$ obteniendo

$$\mathbf{U}_2^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3y+2z=0\}$$

Finalmente elegimos el tercer vector de la base en la recta $\mathbf{U}_1^\perp \cap \mathbf{U}_2^\perp$, por ejemplo, $\vec{x}_3 = (1,-2,3)$. Obtienes así una base ortonormal, $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, y la matriz de la métrica en dicha base es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

donde hemos calculado $\mathbf{b}(\vec{x}_2, \vec{x}_2) = 3$ y $\mathbf{b}(\vec{x}_3, \vec{x}_3) = 15$

Ejemplo 2.- *En el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden dos,* $\mathbf{S}_2$*, se considera la métrica definida por*

$$\mathbf{b}(M,N) = \text{Traza}(M.N)$$

Calcula una base ortogonal para dicho espacio métrico. Empezamos eligiendo un primer vector que no sea luminoso. Entonces, lo mejor es calcular la expresión de los vectores luminosos

$$\mathbf{b}(M,M) = \text{Traza}(M.M) = \text{Traza}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right] = a^2 + 2b^2 + c^2$$

en consecuencia no existen vectores luminosos. Tomamos entonces como primer vector de la base

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}(\{M_1\})$ obteniendo

$$\mathbf{U}_1^\perp = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix} \ : \ b,c \in \mathbb{R}\right\}$$

Elegimos el segundo vector en este plano, por ejemplo

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_2 = \mathbf{L}(\{M_2\})$ obteniendo

$$\mathbf{U}_2^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \, : \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Elegimos el tercer vector en $\mathbf{U}_1^{\perp} \cap \mathbf{U}_2^{\perp}$, por ejemplo

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos así una base ortogonal, $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3\}$ y la matriz de la métrica en dicha base es

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.- *En $\mathcal{P}_3$ se considera la métrica definida por*

$$\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P(t).Q(t)\, dt$$

Calcula una base ortogonal de $(\mathcal{P}_3, \mathbf{b})$. Como en el ejemplo anterior, nos damos cuenta de que $\mathbf{b}(P(t), P(t)) \geq 0$ siendo cero únicamente cuando el polinomio es cero. En consecuencia, el cono de luz es trivial. Por lo tanto podemos elegir como primer vector de la futura base ortogonal a cualquier polinomio, obviamente que no sea cero. Pomamos, por ejemplo $P_1(t) = 1$ y determinamos el subespacio, complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}(\{P_1(t)\})$

$$\mathbf{U}_1^{\perp} = \left\{ P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \, : \, \int_0^1 P(t)\, dt = 0 \right\}$$

con lo que

$$\mathbf{U}_1^{\perp} = \left\{ P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \, : \, a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 = 0 \right\}$$

Puedes entonces elegir como segundo vector de tu futura base ortogonal al polinomio $P_2(t) = 1 - 2t$ y determinar el subespacio, complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_2 = \mathbf{L}(\{P_2(t)\})$

$$\mathbf{U}_2^{\perp} = \left\{ P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \, : \, \int_0^1 P(t)(1-2t)\, dt = 0 \right\}$$

ahora un cálculo sencillo te permitirá ver que

$$\mathbf{U}_2^{\perp} = \left\{ P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \, : \, 10a_1 + 10a_2 + 9a_3 = 0 \right\}$$

por lo que el tercer vector de tu futura base ortogonal debes elegirlo en el plano $\mathbf{U}_1^{\perp} \cap \mathbf{U}_2^{\perp}$. Entonces, puedes elegir, por ejemolo, al polinomio $P_3(t) = 1 - 6t + 6t^2$ y determinar el subespacio, complemento ortogonal de la recta $\mathbf{U}_3 = \mathbf{L}(\{P_3(t)\})$

$$\mathbf{U}_3^{\perp} = \left\{ P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \, : \, \int_0^1 P(t)(1-6t+6t^2)\, dt = 0 \right\}$$

Puedes comprobar después de un cálculo sencillo que

$$\mathbf{U}_3^{\perp} = \{P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \, : \, 2a_2 + 3a_3 = 0\}$$

de manera que el último vector de tu base ortogonal deberás tomarlo como un polinomio en la recta $\mathbf{U}_1^{\perp} \cap \mathbf{U}_2^{\perp} \cap \mathbf{U}_3^{\perp}$. Puedes ver que las ecuaciones paramétricas de esta recta son

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{20} a_3 \\ a_1 &= \frac{3}{5} a_3 \\ a_2 &= -\frac{3}{2} a_3 \end{aligned}$$

de manera que tomando $a_3 = 20$ obtienes como cuarto y último polinomio de tu base ortonormal $P_4(t) = -1 + 12t - 30t^2 + 20t^3$. Entonces la base ortogonal que te has regalado es la siguiente

$$\mathcal{B} = \{P_1(t) = 1; P_2(t) = 1 - 2t; P_3(t) = 1 - 6t + 6t^2; P_4(t) = -1 + 12t - 30t^2 + 20t^3\}$$

Si te apetece, puedes ahora calcular la matriz de la métrica en esta base y comprobar que debería de darte una matriz diagonal, es un buen ejercicio.

10. Bases Ortonormales, Signatura o Índice

★ Una vez que hemos conseguido una base ortogonal para un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, nos encontraremos que en la diagonal de la matriz que representa a la métrica en dicha base habrá un cierto número de valores positivos y otro de valores negativos (no puede haber ceros pues estamos hablando de métricas que son no degeneradas). Concretamente $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p, \vec{x}_{p+1}, \cdots, \vec{x}_n\}$ con

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_i) = a_{ii} > 0 \quad 1 \leq i \leq p} \qquad \boxed{\mathbf{b}(\vec{x}_j, \vec{x}_j) = c_{jj} > 0 \quad p+1 \leq j \leq n}$$

En estas condiciones, podemos **normalizar** la base ortogonal, es decir, sin cambiar las direcciones, cambiamos los vectores de la base por los siguientes

$$\boxed{\vec{v}_i = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \vec{x}_i \quad 1 \leq i \leq p} \qquad \boxed{\vec{v}_j = \frac{1}{\sqrt{-c_{jj}}} \vec{x}_j \quad p+1 \leq j \leq n}$$

En esta nueva base, la matriz de la métrica sigue siendo diagonal pero en la diagonal principal aparece $+1$ justamente p veces y -1 justamente $n-p$ veces. A estas base las llamaremos ortonormales.

★ Sea $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ un espacio métrico y sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ dos bases ortogonales entonces el número de valores negativos (y por lo tanto también el de positivos) que aparecen en la diagonal de las dos matrices diagonales que representan a la métrica en dichas bases es el mismo. En efecto, supongamos que en $M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_1)$ aparecen p valores positivos y $n-p$ negativos. Suponemos que en $M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_2)$ aparecen q valores positivos y $n-q$ negativos, además los podemos normalizar en ambos casos para que sean $+1$ y -1, esto es

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p, \vec{x}_{p+1}, \cdots, \vec{x}_n\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_q, \vec{y}_{q+1}, \cdots, \vec{y}_n\}$$

con

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{x}_i,\vec{x}_i)=+1 \quad 1\leq i\leq p} \qquad \boxed{\mathbf{b}(\vec{x}_j,\vec{x}_j)=-1 \quad p+1\leq j\leq n}$$

y

$$\boxed{\mathbf{b}(\vec{y}_k,\vec{y}_k)=+1 \quad 1\leq k\leq q} \qquad \boxed{\mathbf{b}(\vec{y}_l,\vec{y}_l)=-1 \quad q+1\leq l\leq n}$$

Vamos a ver que $p=q$

para ello consideramos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbf{V}^n$ en los que indicamos sus dimensiones

$$\mathbf{U}_p=\mathbf{L}(\{\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_p\}) \quad \mathbf{U}^{\perp}_{n-p}=\mathbf{L}(\{\vec{x}_{p+1},\cdots,\vec{x}_n\}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}^n=\mathbf{U}_p\oplus^{\perp}\mathbf{U}^{\perp}_{n-p}$$

$$\mathbf{W}_q=\mathbf{L}(\{\vec{y}_1,\cdots,\vec{y}_q\}) \quad \mathbf{W}^{\perp}_{n-q}=\mathbf{L}(\{\vec{y}_{q+1},\cdots,\vec{y}_n\}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}^n=\mathbf{W}_q\oplus^{\perp}\mathbf{W}^{\perp}_{n-q}$$

Ahora consideramos el subespacio vectorial $\mathbf{U}_p\cap\mathbf{W}^{\perp}_{n-q}$, si $\vec{z}$ es un vector de dicho subespacio vectorial entonces tienes

$$\vec{z}\in\mathbf{U}_p \quad \Rightarrow \quad \vec{z}=\sum_{i=1}^{p} a_i\vec{x}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}(\vec{z},\vec{z})=\sum_{i=1}^{p} a_i^2$$

$$\vec{z}\in\mathbf{W}^{\perp}_{n-q} \quad \Rightarrow \quad \vec{z}=\sum_{j=q+1}^{n} b_j\,\vec{y}_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}(\vec{z},\vec{z})=-\sum_{j=q+1}^{n} b_j^2$$

Combinando ambas expresiones, obtienes que $\vec{z}=\vec{0}$ y por lo tanto la suma de ambos subespacios vectoriales es directa, es decir

$$\dim(\mathbf{U}_p+\mathbf{W}^{\perp}_{n-q})=p+n-q\leq n \quad \Rightarrow \quad p\leq q$$

Considerando ahora el subespacio $\mathbf{U}^{\perp}_{n-p}\cap\mathbf{W}_q$ obtienes que $q\leq p$.

★ Al número común de valores diagonales negativos que te aparecen en cualquier base ortogonal se le suele llamar **signatura** o **índice** de la métrica. En esencia es la mayor dimensión de los subespacios vectoriales en los que la métrica es definida negativa.

★ **NOTA.-** La misma prueba anterior se puede reproducir para métricas degeneradas. Basta con sustituir los subespacios $\mathbf{U}_p$ y $\mathbf{W}_q$ por los subespacios $\mathbf{U}_p\oplus\mathrm{Rad}(\mathbf{V}^n,\mathbf{b})$ y $\mathbf{W}_q\oplus\mathrm{Rad}(\mathbf{V}^n,\mathbf{b})$ y usar el mismo argumento.

★ **CONCLUSIÓN (Ley de inercia de Sylvester.-** Para cualquier espacio métrico, $(\mathbf{V}^n,\mathbf{b})$, hemos encontrado tres números naturales que suman la dimensión del espacio vectorial

- La nulidad o dimensión del radical, r
- La signatura o índice, p, mayor dimensión de los subespacios sobre los que la métrica es definida negativa
- El número $n-(r+p)$ que indica la mayor dimensión de los espacios sobre los que la métrica es definida positiva

Entonces en cualquier base ortogonal, la matriz de la métrica es diagonal y tiene r ceros, p items igual a -1 y $n-(p+r)$ items igual a 1 en la diagonal principal.

11. Isometrías

★ Ya sabes que al definir cualquier estructura matemática, tienes con ella asociada una relación de igualdad. En este sentido, dos conjuntos se consideran iguales cuando puedes establecer entre ellos una biyección. Dos grupos son iguales cuando son isomorfos. Lo mismo que dos espacios vectoriales, son iguales cuando puedes establecer entre ellos una aplicación que sea lineal y biyectiva. Recuerda que si dos espacios vectoriales son isomorfos entonces tienen la misma dimensión. Así, decimos que la dimensión de un espacio vectorial es un invariante. También sabes que el recíproco es cierto, si dos espacios vectoriales tienen la misma dimensión entonces puedes definir isomorfismos entre ellos.

★ En este tema hemos introducido la idea de espacio métrico y deberiamos establecer la relación de igualdad entre espacios métricos. Es claro que para que dos espacios vectoriales métricos los podamos considerar iguales deben ser, en primer lugar, iguales como espacios vectoriales. Es decir deben ser isomorfos y por tanto tener la misma dimensión. Partimos entonces de dos espacios vectoriales métricos que tengan la misma dimensión: $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ y $(\mathbf{W}^n, \mathbf{b}')$ (hemos representado a propósito la dimensión común, n, en la parte superior). Entre ellos podemos establecer muchos isomorfismos, sin embargo, unos serán compatibles con las métricas y otros no. Diremos que un isomorfismo, $f : \mathbf{V}^n \to \mathbf{W}^n$, es una **isometría** entre los espacios vectoriales métricos $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ y $(\mathbf{W}^n, \mathbf{b}')$ cuando se verifique la siguiente condición de compatibilidad

$$\boxed{\mathbf{b}'(f(\vec{x}, f(\vec{y}) = \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y})} \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^n$$

★ Entonces si entre dos espacios vectoriales métricos tenemos definida una isometría diremos que son **isométricos** esto es iguales como espacios métricos. Naturalmente si ello ocurre deben tener la misma dimensión. También **tienen la misma signatura**. Esto es, **la signatura (o el índice) es otro invariante frente a las isometrías**. Para verlo, es suficiente con que observes lo siguiente: si $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ es una base de $\mathbf{V}^n$, entonces, por ser f un isomorfismo, tienes que $\mathcal{B}' = \{f(\vec{x}_1), \cdots, f(\vec{x}_n)\}$ es una base de $\mathbf{W}^n$. Al ser f una isometría tienes una información extra, **las matrices de las métricas en estas bases coinciden**, es decir

$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}) = M(\mathbf{b}', \mathcal{B}')$$

esto es suficiente para poder asegurar que ambas métricas tienen la misma signatura.

★ Ocurre que el recíproco del hecho anterior también es cierto. Es decir, tienes el siguiente resultado de clasificación. **Dos espacios vectoriales $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$ y $(\mathbf{W}^n, \mathbf{b}')$ son isométricos si y solo si tienen la misma dimensión y la misma signatura**. Para creernos la condición suficiente, suponemos que los dos espacios vectoriales tienen dimensión n y ambas métricas signatura s entonces podemos encontrar, en ambos espacios vectoriales, bases ortonormales del siguiente tipo

$$\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_s, \vec{x}_{s+1}, \cdots, \vec{x}_n\} \quad \mathbf{b}(\vec{x}_i, \vec{x}_i) = -1 \quad 1 \leq i \leq s \quad \mathbf{b}(\vec{x}_j, \vec{x}_j) = +1 \quad s-1 \leq j \leq n$$

$$\mathcal{B}' = \{\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_s, \vec{y}_{s+1}, \cdots, \vec{y}_n\} \quad \mathbf{b}'(\vec{y}_i, \vec{y}_i) = -1 \quad 1 \leq i \leq s \quad \mathbf{b}'(\vec{y}_j, \vec{y}_j) = +1 \quad s-1 \leq j \leq n$$

Ahora defines una aplicación lineal $f : \mathbf{V}^n_s \to \mathbf{W}^n_s$ aplicando uno a uno los vectores de estas bases, $f(\vec{x}_k) = \vec{y}_k$, $1 \leq k \leq n$, y extendiendo por linealidad. Consigues, de esta forma, un isomorfismo que, evidentemente, resulta ser una isometría.

★ **NOTA.-** El resultado anterior vale para métricas degeneradas haciendo intervenir a la nulidad. **Dos espacios métricos son isométricos si y solo si tienen la misma dimensión, la misma nulidad y la misma signatura**.

12. Ejercicios

1. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica, $\mathbf{b}$, que en la base canónica viene representada por la siguiente matriz
$$M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
¿Es $\mathbf{b}$ una métrica degenerada? Calcula la matriz que la representa en la siguiente base $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1); (1, 1, 1); (0, 1, 2)\}$

2. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y en él, la métrica, $\mathbf{b}$, representada, en la base canónica por la siguiente matriz
$$M = M(\mathbf{b}, \mathcal{B}_o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Prueba que un plano vectorial, $\mathbf{U}$, de ecuación $ax + by + cz = 0$ es degenerado si y sólo si el vector $\vec{n} = (a, b, c)$ pertenece al cono de luz de $(\mathbb{R}^3, \mathbf{b})$.

3. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica representada, en la base canónica, por la matriz identidad. ¿Es cierto que todos los planos de este espacio métrico son no degenerados?

4. Se considera una forma bilineal cualquiera, $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$. Prueba que existen dos, únicas, formas bilineales, $\mathbf{b}_s$ simétrica y $\mathbf{b}_a$ antisimétrica, sobre $\mathbf{V}^n$ de manera que $\mathbf{b} = \mathbf{b}_s + \mathbf{b}_a$.

5. ¿Es cierto que la forma cuadrática asociada con una forma bilineal solo depende de la parte simétrica de la misma?

6. Sea $\mathbf{b} : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, y $\mathbf{Q} : \mathbf{V}^n \mathbb{R}$ su forma cuadrática. Prueba las dos siguientes afirmaciones
   - $\mathbf{b}$ es simétrica si y solo si la puedes recuperar a partir de $\mathbf{Q}$.
   - $\mathbf{b}$ es antisimétrica si y solo si $\mathbf{Q}$ se anula.

7. Para cada vector (fijo), $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, se define la aplicación $\mathbf{b}_{\vec{v}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por
$$\mathbf{b}_{\vec{v}}(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x} \wedge \vec{y}).\vec{v}_o \qquad \text{producto mixto}$$
   - Comprueba que es una forma bilineal antisimétrica
   - Si $\mathbf{b}_{\vec{v}} = \mathbf{b}_{\vec{w}}$, ¿qué se puede decir de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$?
   - Si conoces $\mathbf{b}_{\vec{v}}$ y $\mathbf{b}_{\vec{w}}$, ¿puedes calcular $\mathbf{b}_{\vec{v}+\vec{w}}$?
   - Si conoces $\mathbf{b}_{\vec{v}}$, ¿puedes calcular $\mathbf{b}_{\lambda\vec{v}}$? para $\lambda \in \mathbb{R}$

8. Ya sabes que en un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, los vectores pueden ser de tres tipos

- $\vec{x} \in \mathbf{V}^n$ es **espacial** si $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) > 0$
- $\vec{x} \in \mathbf{V}^n$ es **temporal** si $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) < 0$
- $\vec{x} \in \mathbf{V}^n$ es **luminoso** si $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) = 0$

Caracteriza los tres tipos de vectores en los espacios métricos $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)$ donde $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ son las métricas cuyas matrices en la base canónica son, respectivamente

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. En un espacio métrico, $(\mathbf{V}^n, \mathbf{b})$, se consideran los siguientes subconjuntos:

   - $\mathbf{E} = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n \,:\, \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) > 0\}$ Conjunto de vectores espaciales
   - $\mathbf{T} = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n \,:\, \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) < 0\}$ Conjunto de vectores temporales
   - $\mathbf{L} = \{\vec{x} \in \mathbf{V}^n \,:\, \mathbf{b}(\vec{x}, \vec{x}) = 0\}$ Conjunto de vectores luminosos

   ¿Es alguno de ellos un subespacio vectorial de $\mathbf{V}^n$?

10. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica representada, en la base canónica, por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

    Encuentra los conjuntos definidos en el ejercicio anterior en este espacio métrico. Calcula también una base ortogonal del mismo.

11. ¿Se puede asegurar que toda matriz simétrica de orden dos es congruente a una matriz diagonal?

12. ¿Se puede asegurar que toda matriz simétrica de orden dos y determinante positivo es congruente a la matriz identidad?

13. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_3$ se considera la métrica $\mathbf{b}$ definida por

$$\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P(t).Q(t)\, dt$$

    - Calcula el conjunto de vectores que son ortogonales en dicha métrica al polinomio $1 - t^2$. ¿Es un subespacio vectorial dicho conjunto?
    - Calcula el conjunto de vectores que son ortogonales, en dicha métrica, a todos los polinomios del subespacio vectorial $\mathcal{P}_1$. ¿Es un subespacio vectorial dicho conjunto?
    - Calcula una base ortonormal del espacio métrico $(\mathcal{P}_3, \mathbf{b})$

14. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_3$ se considera la métrica $\mathbf{b}$ definida por

$$\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P'(t).Q'(t)\, dt$$

    - Calcula el radical de dicha métrica
    - Calcula el subespacio ortogonal, en dicha métrica, al subespacio vectorial $\mathcal{P}_1$.

- Calcula una base ortonormal del espacio métrico $(\mathcal{P}_3, \mathbf{b})$

15. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2$ se considera $\mathbf{b} : \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{b}(M, N) = \text{Traza}(M.N^t)$$

- Prueba que es una métrica no degenerada
- Calcula el conjunto de vectores ortogonales a todas las matrices anti-simétricas
- Calcula una base ortonormal de $(\mathcal{M}_2, \mathbf{b})$ cuyos vectores sean matrices simétricas o anti-simétricas.

16. Se considera la métrica $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$ que, en la base canónica, está representada por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Encuentra una base ortonormal del espacio métrico $(\mathbf{R}^3, \mathbf{b})$

17. Si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}'$ son dos métricas sobre un mismo espacio vectorial, $\mathbf{V}^n$, y tales que sus formas cuadráticas coinciden, ¿puedes asegurar que las dos métricas coinciden?

18. En $\mathbb{R}^3$ se considera la familia de métricas, representadas, en la base canónica, por las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

- Calcula los valores del parámetro a para que las matrices anteriores representen métricas no degeneradas sobre $\mathbb{R}^3$
- Calcula la signatura de estas métricas
- Prueba que las matrices anteriores son siempre congruentes con matrices diagonales.

19. En $\mathbb{R}^2$ considera las métricas, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, que vienen representadas, en la base canónica, por las siguientes matrices

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Se puede garantizar que los planos métricos $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)$ son isométricos? En caso afirmativo, construye uns isometría.

20. En $\mathbb{R}^2$ considera las métricas, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, que vienen representadas, en la base canónica, por las siguientes matrices

$$G_1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Se puede garantizar que los planos métricos $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)$ son isométricos? En caso afirmativo, construye uns isometría.

21. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, representadas por las siguientes matrices en la base canónica

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Se puede garantizar que los planos métricos $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)$ son isométricos? ¿son congruentes las dos matrices anteriores?

22. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, representadas por las siguientes matrices en la base canónica

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Se puede garantizar que los planos métricos $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_1)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathbf{b}_2)$ son siométricos? ¿son congruentes las dos matrices anteriores?

23. Construye una isometría entre cada par de los siguientes espacios métricos

    - $\mathbb{R}^3$ con la métrica representada, en la base canónica, por la matriz identidad.
    - $\mathbf{S}_2$ con la métrica $\mathbf{b}(M, N) = \text{Traza}(M.N)$
    - $\mathcal{P}_2$ con la métrica $\mathbf{b}(P(t), Q(t)) = \int_0^1 P(t).Q(t)\,dt$

24. Prueba que toda métrica no degenerada en $\mathbb{R}^2$ es isométrica a una de las siguientes tres

    - La representada en la base canónica por la matriz identidad.
    - La representada en la base canónica por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
    - La representada en la base canónica por la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

25. En $\mathbb{R}^3$ se considera la recta $\mathbf{W} = \mathbf{L}(\}\vec{x} = (1, 1, 1)\})$ y el plano, $\mathbf{U}$ de ecuación $z = 0$. Encuentra métricas degeneradas sobre $\mathbf{R}^3$ que cumplan, respectivamente los siguientes supuestos

    - Su radical es $\mathbf{W}$ y el plano $\mathbf{U}$ es Euclideo.
    - Su radical es $\mathbf{W}$ y el plano $\mathbf{U}$ es Lorentziano.

26. En $\mathbb{R}^3$ se considera la recta $\mathbf{W} = \mathbf{L}(\}\vec{x} = (1, 1, -1)\})$ y el plano, $\mathbf{U}$ de ecuación $y - z = 0$. Encuentra métricas degeneradas sobre $\mathbf{R}^3$ que cumplan, respectivamente los siguientes supuestos

    - Su radical es $\mathbf{W}$ y el plano $\mathbf{U}$ es Euclideo.
    - Su radical es $\mathbf{W}$ y el plano $\mathbf{U}$ es Lorentziano.

27. En $\mathbb{R}^4$ se considera la métrica representada, en la base canónica por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

    - Calcula su radical

- Calcula una base ortogonal de $(\mathbf{R}^4, \mathbf{b})$
- Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 = 0$ con la métrica inducida por $\mathbf{b}$
- Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_1 + x_2 = 0$ con la métrica inducida por $\mathbf{b}$
- ¿Son isométricos los dos hiperplanos anteriores?

28. En $\mathbb{R}^4$ se considera la métrica representada, en la base canónica por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Calcula su radical
- Calcula una base ortogonal de $(\mathbf{R}^4, \mathbf{b})$
- Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_2 = 0$ con la métrica inducida por $\mathbf{b}$
- Encuentra una base ortonormal del hiperplano de ecuación $x_2 + x_3 = 0$ con la métrica inducida por $\mathbf{b}$
- ¿Son isométricos los dos hiperplanos anteriores?

Tema III: Espacios Vectoriales Euclídeos

Geometría II, Grado en Matemáticas

1. Métricas euclídeas

El producto escalar estudiado en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ durante los dos cursos de Bachillerato, ha sido la herramienta fundamental que permitió desarrollar la geometría en el plano y en el espacio. A lo largo de este tema extenderemos este concepto a cualquier espacio vectorial y estudiaremos las propiedades vectoriales de la geometría Euclidiana.

Definición 1 Sea $V^n(\mathbb{R})$ un espacio vectorial real y g una métrica en V, se dice que g es *Euclídea* si g es definida positiva. Un espacio vectorial métrico (V^n, g) se dice *Euclídeo* si g es una métrica euclídea en V.

Es claro que si (V^n, g) es euclídeo, entonces existe una base $\mathbb{B}$ de V tal que $M(g, \mathbb{B}) = \mathbb{I}_n$ y por tanto, utilizando coordenadas en dicha base, si $x, y \in V$ son tales que $x_{\mathbb{B}} = (x_1, \cdots, x_n)$, $y_{\mathbb{B}} = (y_1, \cdots, y_n)$, entonces

$$g(x, y) = x_{\mathbb{B}} \mathbb{I}_n y_{\mathbb{B}}^t = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

★ Puedes comprobar fácilmente que si $V = \mathbb{R}^2$, las siguientes métricas son euclídeas:

- g_1, donde $M(g_1, \mathbb{B}_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- g_2, donde $M(g_2, \mathbb{B}_u) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1.1. Criterio de Sylvester

En primer lugar aprenderemos un criterio muy útil para determinar si una métrica es o no euclídea.

Sea A una matriz simétrica de orden n,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se definen las submatrices principales de A como aquellas situadas en su esquina superior izquierda. Esto es, para cada $k = 1, \cdots, n$ se denotará por A_k la k-ésima submatriz principal A, esto es,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Teorema 1 (Criterio de Sylvester) *Sea $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una métrica en V y A su matriz en una cierta base $\mathbb{B}$ de V. Entonces g es definida positiva si y sólo si $|A_k| > 0$ para cada $k = 1, \cdots, n$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ y denotemos por $U_k =< u_1, \cdots, u_k >$. Es claro que la restricción de g a U_k es también definida positiva y por tanto existe una matriz singular P_k tal que $A_k = P_k^t \mathbb{I}_k P_k$, esto es, $|A_k| = |P_k|^2 > 0$, para todo $k = 1, \cdots, n$.

Probaremos el recíproco por inducción sobre n. Para $n = 1$ el resultado es evidente, supongamos que el recíproco es cierto para toda métrica con matriz de orden $n-1$ y vamos a demostrarlo para g.

Por hipótesis de inducción sabemos que al ser $|A_k| > 0$, $k = 1, \cdots, n-1$, la restricción de g a U_{n-1}, g_{n-1}, es definida positiva. Así existe una base $\mathbb{B}_1 = \{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ en U_{n-1} tal que $M(g_{n-1}, \mathbb{B}_1) = \mathbb{I}_{n-1}$, esto es

$$M(g, \{e_1, \cdots e_{n-1}, u_n\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

De donde deducimos fácilmente que A es congruente con la matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Así, $\tilde{A} = P^t A P$ y $a = |\tilde{A}| = |P|^2 |A| > 0$, esto es, g es definida positiva lo que concluye la demostración. □

★ Observa que que una forma cuadrática ω es definida negativa si y sólo si $-\omega$ es definida positiva. Por tanto, puedes usar el criterio anterior para demostrar que ω es definida negativa si y sólo si $(-1)^k |A_k| > 0$ para todo $k = 1, \cdots, n$.

1.2. Norma de un vector

★ Sea (V^n, g) un espacio vectorial euclídeo y $x \in V$, se define la norma de x, $\|x\|$, como

$$\|x\| = \sqrt{g(x,x)}.$$

Puedes ver fácilmente que se verifican las siguientes propiedades:

- $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in V$.
- $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
- $\|ax\| = |a| \|x\|$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$, para todo $x \neq 0$

Teorema 2 (Desigualdad de Schwarz) *Para cualesquiera vectores $x, y \in V$, se tiene*

$$|g(x,y)| \leq \|x\| \ \|y\|.$$

Además, se da la igualdad si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

Demostración. Si $y = 0$, es claro el resultado.

Supongamos que $y \neq 0$, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$0 \leq g(x - \lambda y, x - \lambda y) = \|x\|^2 - 2\lambda g(x,y) + \lambda^2 \|y\|^2,$$

que solo se puede cumplir si el discriminante de dicha ecuación es no positivo. Esto es, $\|x\|^2\|y\|^2 \geq g(x,y)^2$, o equivalentemente $|g(x,y)| \leq \|x\| \ \|y\|$.

Además, se da la igualdad si y sólo si $0 = g(x - \lambda y, x - \lambda y)$, esto es si y sólo si x e y son linealmente dependientes. □

Teorema 3 (Desigualdad de triangular (o de Minkowski)) *Para cualesquiera vectores $x, y \in V$, se tiene*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Además, se da la igualdad si y sólo si x e y tienen la misma dirección y sentido.

Demostración. Usando la desigualdad de Schwarz tenemos,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= g(x+y, x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2g(x,y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \ \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

de donde se sigue la desigualdad. Además, la igualdad ocurre si y sólo si $g(x,y) = \|x\| \ \|y\|$, esto es si y sólo si x e y son proporcionales pero con igual sentido. □

★ Para el caso particular de $(\mathbb{R}^n, g_u)$ con el producto escalar usual las dos desigualdades anteriores nos dicen que:

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n} \ \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n},$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ + \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

para cualesquiera $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$.

Definición 2 De la desigualdad de Schwarz deducimos que para cualesquiera $x, y \in V$ no nulos, existe un único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{g(x,y)}{\|x\| \ \|y\|}.$$

Dicho $\theta = \measuredangle(x,y)$ diremos que es el *ángulo* (no orientado) que forman los vectores x e y.

★ De lo anterior, x e y son ortogonales si y sólo si forman un ángulo de $\pi/2$. Como

$$\|x + y\|^2 = g(x+y, x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2g(x,y), \qquad \forall x, y \in V$$

se tiene el bien conocido Teorema

Teorema 4 (Pitágoras) *Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y $x, y \in V \setminus \{0\}$. Entonces x e y son ortogonales si y sólo si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Ejemplo 1 *En $(\mathbb{R}^2, g_u)$ con el producto escalar usual, los vectores $x = (1,1)$, $y = (1,0)$ forman un ángulo de $\pi/4$*

Ejemplo 2 *En $(\mathbb{R}^2, g)$, donde $M(g, \mathbb{B}_u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, los vectores $x = (1,1)$, $y = (1,0)$ forman un ángulo de $\pi/3$.*

Ejemplo 3 *En $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$, donde $M(\tilde{g}, \mathbb{B}_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, los vectores $x = (1,1)$, $y = (1,0)$ forman un ángulo de* $\mathrm{ArcCos}(\sqrt{2/3})$.

2. Bases ortogonales y ortonormales

★ La primera observación que podemos hacer relacionada con vectores ortogonales en un espacio vectorial euclídeo (V^n, g) es que cualquier conjunto de vectores ortogonales dos a dos tiene que ser linealmente independiente y por consiguiente n vectores ortogonales dos a dos han de formar siempre una base.

En efecto, si $\{u_1, \cdots, u_k\}$ son ortogonales dos a dos y

$$\alpha_1 u_1 + \cdots \alpha_n u_n = 0,$$

entonces, multiplicando con la métrica por u_j en la expresión anterior, tendremos $\alpha_j \|u_j\|^2 = 0$, $\forall\ j = 1, \cdots, k$, esto es $\alpha_j = 0,\ \ j = 1, \cdots, k$ lo que prueba la observación.

★ Por la existencia de bases ortogonales vista en el Tema anterior, conocemos que en todo espacio vectorial euclídeo, (V,g) existirán bases ortogonales (donde la matriz de la métrica será diagonal) y bases ortonormales (donde la matriz de la métrica será la identidad). Además, si $\mathbb{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces para todo vector $x \in V$ se cumple

$$x = g(x, u_1)u_1 + \cdots + g(x, u_n)u_n,$$

esto es, las coordenadas de x en la base $\mathbb{B}$ son $x_{\mathbb{B}} = (g(x, u_1), \cdots, g(x, u_n))$.

2.1. Construcción de bases

★ Conocemos del Tema II, tres métodos diferentes (geométrico, Gauss y matrices elementales) que nos permiten encontrar bases ortogonales y ortonormales de V. Usando cualquiera de estos métodos podemos conseguir una base $\mathbb{B}$ donde la matriz de la métrica es diagonal y todos sus valores son positivos. Para ortonormalizar dicha base basta dividir todos los vectores de la misma por su correspondiente módulo.

Ejemplo 4 *Calcula una base ortonormal del espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, g)$, donde g es la métrica euclídea que en la base usual está dada por la siguiente matriz:*

$$M(g, \mathbb{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Usando por ejemplo el método geométrico, si cogemos $u_1 = (1, 0, 0)$ y calculamos su ortogonal tendremos $< u_1 >^{\perp} \equiv x - y = 0$. Así podemos coger $u_2 = (1, 1, 0)$. Como $< u_2 >^{\perp} \equiv x + y = 0$, un vector perpendicular a u_1 y u_2 será el vector $u_3 = (0, 0, 1)$.

Es claro que la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ es ortogonal. Dividiendo por los módulos de dichos vectores obtendremos una base ortonormal. Ahora bien $g(u_1, u_1) = 1$, $g(u_2, u_2) = 1$ y $g(u_3, u_3) = 1$ y concluimos que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es ya una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g)$.

★ **Método de Gram-Schmidt**. Este método nos va a proporcionar una nueva forma de obtener una base ortonormal a partir de una base cualquiera de un espacio vectorial euclídeo.

Teorema 5 (Gram-Schmidt) *Sea (V^n, g) un espacio vectorial euclídeo y $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base cualquiera, entonces existe una base ortogonal (ortonormal) $\widetilde{\mathbb{B}} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de V^n tal que*

$$< u_1, \cdots, u_k >=< v_1, \cdots, v_k >, \qquad \forall\ k = 1, \cdots n.$$

Demostración. Tomamos $u_1 = v_1$ y buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$ para que $u_2 = v_2 - \lambda u_1$ sea ortogonal a u_1, esto es

$$0 = g(u_1, v_2) - \lambda \|u_1\|^2.$$

Escogiendo $\lambda = g(u_1, v_2)/\|u_1\|^2$ conseguimos que u_1 y u_2 sean ortogonales y que

$$< u_1, u_2 >=< v_1, v_2 > .$$

Para aplicar inducción, suponemos que $\{u_1, \cdots, u_k\}$ es un conjunto ortogonal con

$$< u_1, \cdots, u_k >=< v_1, \cdots, v_k >,$$

y tomamos $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ para que

$$u_{k+1} = v_{k+1} - \lambda_1 u_1 - \cdots - \lambda_k u_k$$

sea orthogonal a $< u_1, \cdots, u_k >$. Esto es

$$0 = g(v_{k+1}, u_i) - \lambda_i \|u_i\|^2, \qquad i = 1, \cdots, k.$$

De esta forma si $\lambda_i = g(v_{k+1}, u_i)/\|u_i\|^2$, $i = 1, \cdots, k$ conseguimos $u_{k+1} \in < u_1, \cdots, u_k >^{\perp}$ y $< u_1, \cdots, u_{k+1} >=< v_1, \cdots, v_{k+1} >$. Para ortonormalizar la base $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ basta dividir los vectores por su respectiva norma. □

Ejercicio 1 *Puedes practicar aplicando el método anterior a ortonormalizar la base usual del Ejemplo 4.*

2.2. Cambio de base

★ Si consideramos $\mathbb{B}$ y $\widetilde{\mathbb{B}}$ dos bases ortonormales de un espacio vectorial euclídeo (V, g), tenemos que $M(g, \mathbb{B}) = \mathbb{I}_n$ y $M(g, \widetilde{\mathbb{B}}) = \mathbb{I}_n$, y cómo éstas han de ser congruentes,

$$\mathbb{I}_n = P^t \mathbb{I}_n P = P^t P, \qquad \text{donde } P = M(\widetilde{\mathbb{B}} \to \mathbb{B}),$$

lo que indica que P ha de ser una matriz **ortogonal**.

3. Proyecciones y simetrías ortogonales

★ Sea Sea (V^n, g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de dimensión k de V^n. Es claro que (U, g) es también euclídeo y existe un único complemento ortogonal $U^\perp$,

$$V = U \oplus U^\perp.$$

Ejemplo 5 *Es fácil ver que en el ejemplo 4, si* $U =< (1, 1, 0) >$, *entonces* $U^\perp = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$.

Definición 3 Sea (V^n, g) un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio suyo de dimensión k. Es claro de la descomposición anterior que para cualesquiera $x \in V$ existen únicos vectores $x_U \in U$ y $x_{U^\perp} \in U^\perp$ tal que $x = x_U + x_{U^\perp}$ y en consecuencia se pueden definir las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} p_U &: V \longrightarrow V, \qquad p_U(x) = x_U, \\ s_U &: V \longrightarrow V, \qquad s_U(x) = x_U - x_{U^\perp}. \end{aligned}$$

p_U y s_U se llaman, respectivamente, *proyección y simetría ortogonal* sobre U.

Puedes comprobar fácilmente que se verifican las siguientes propiedades:

- p_U y s_U son endomorfismos de V.
- Si $\mathbb{B} = \{e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n\}$ es una base de V tal que

  $$U =< e_1, \cdots, e_k >, \qquad U^\perp =< e_{k+1}, \cdots, e_n >,$$

  entonces
  $$M(p_U, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M(s_U, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_k & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{n-k} \end{pmatrix}.$$
- p_U es diagonalizable con valores propios $\lambda = 1$, $\lambda = 0$ y subespacios propios U y $U^\perp$, respectivamente.
- s_U es diagonalizable con valores propios $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ y subespacios propios U y $U^\perp$, respectivamente.
- Existen bases ortonormales de V que diagonalizan a p_U y a s_U.
- La matriz de p_U en cualquier base ortonormal de V es simétrica.
- La matriz de s_U en cualquier base ortonormal de V es simétrica.
- La matriz de s_U en cualquier base ortonormal de V es una matriz ortogonal.

Ejemplo 6 *Sea* $(\mathbb{R}^3, g)$ *el espacio vectorial euclídeo, donde* g *está dada en la base usual por la siguiente matriz:*

$$M(g, \mathbb{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre el subespacio $U = \{(x, y, z) \mid x - y = 0\}$ *en la base usual.*

Para resolver el ejercicio cogemos bases de U y $U^{\perp}$, respectivamente. De la definición de U tenemos que $U =< (1,1,0),(0,0,1) >$ y $U^{\perp} =< (1,0,0) >$, en consecuencia en la base

$$\mathbb{B} = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$$

la matriz de p_U está dada por $M(p_U,\mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y por tanto cambiando de base,

$$M(p_U,\mathbb{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1.}$$

Puedes seguir practicando con el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2 *Se considera* $(\mathcal{S}_2, g)$ *el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden dos con la métrica euclídea* g *dada por* $g(A,B) = \mathrm{Traza}(AB)$. *Calcular la matriz de la simetría ortogonal respecto al subespacio* $U = \{A \in \mathcal{S}_2 \mid \mathrm{Traza}(A) = 0\}$ *en la base*

$$\mathbb{B}_u = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Proposición 1 (Mínima distancia) *Sea* (V,g) *un espacio vectorial euclídeo y* U *un subespacio vectorial de* V. *Consideremos* $x_0 \in V$, *entonces*

$$p_U(x_0) = u_0 \iff \quad \|x_0 - u_0\| < \|x_0 - u\|, \quad \forall u \in U \setminus \{u_0\}.$$

Demostración. $\boxed{\Longrightarrow}$ Como $x_0 - u_0 \in U^{\perp}$, se verifica que $g(x_0 - u_0, u - u_0) = 0$ para todo vector $u \in U$. Así, por el Teorema de Pitágoras

$$\|x_0 - u\|^2 = \|x_0 - u_0 + u_0 - u\|^2 = \|x_0 - u_0\|^2 + \|u_0 - u\|^2 \geq \|x_0 - u_0\|^2$$

con igualdad si y sólo si $u = u_0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Recíprocamente, si $u_0 \in U$ minimiza la distancia de x_0 a U y suponemos que $p_U(x_0) = u_1$, entonces

$$\|x_0 - u_1\|^2 \geq \|x_0 - u_0\|^2 = \|x_0 - u_1\|^2 + \|u_0 - u_1\|^2 \geq \|x_0 - u_1\|^2$$

esto es, $u_1 = u_0$. □

4. Endomorfismos autoadjuntos y diagonalización

Estamos ya en condiciones de aprender a diagonalizar matrices simétricas, simultáneamente, por semejanza y por congruencia.

Definición 4 Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Vamos a decir que f es *autoadjunto respecto de* g si

$$g(f(x),y) = g(x,f(y)), \qquad \forall\ x,y \in V$$

De la definición anterior tenemos que si $\mathbb{B}$ es una base de V tal que $G = M(g, \mathbb{B})$ y $A = M(f, \mathbb{B})$, entonces f es autoadjunto si y sólo si

$$x_{\mathbb{B}}^t\ A^t G\ y_{\mathbb{B}} = x_{\mathbb{B}}^t\ A^t G^t\ y_{\mathbb{B}} = x_{\mathbb{B}}^t\ GA\ y_{\mathbb{B}}$$

para cualesquiera vectores $x, y \in V$.

A partir de aquí te propongo como ejercicio que pruebes las siguientes caracterizaciones de los endomorfismos autoadjuntos.

Teorema 6 *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo autoadjunto entonces son equivalentes:*

1. *f es autoadjunto.*
2. *Si $\mathbb{B}$ es base de V, $G = M(g, \mathbb{B})$ y $A = M(f, \mathbb{B})$, entonces GA es simétrica.*
3. *Existe una base $\mathbb{B}$ de V tal que si $G = M(g, \mathbb{B})$ y $A = M(f, \mathbb{B})$, entonces GA es una matriz simétrica*
4. *La matriz de f en cualquier base ortonormal de V es simétrica.*
5. *Existe una base ortonormal $\mathbb{B}$ de V tal que $M(f, \mathbb{B})$ es simétrica.*

Como primeras propiedades de los endomorfismos autoadjuntos tenemos:

Proposición 2 *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo autoadjunto,*

- *si U es un subespacio vectorial de V tal que $f(U) \subseteq U$, entonces $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$.*
- *los subespacios propios de f son ortogonales dos a dos.*

Demostración. Sea $y \in U^\perp$. Entonces, por ser f autoadjunto y U invariante, se tiene que para todo $x \in U$, $g(f(y), x) = g(y, f(x)) = 0$, esto es, $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Por otro lado, si V_λ y V_μ son subespacios propios distintos de f asociados a los valores propios si λ y μ, entonces dados dos vectores cualesquiera $x \in V_\lambda$ e $y \in V_\mu$, se tiene

$$g(f(x), y) = \lambda g(x, y) = g(x, f(y)) = \mu g(x, y),$$

esto es $(\lambda - \mu)g(x, y) = 0$ y x e y han de ser ortogonales. □

Lema 1 *Sea A una matriz simétrica de orden n. Entonces A tiene al menos un valor propio real.*

Demostración. Denotemos por g_u el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ y consideremos

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_u(x, x) = 1\}$$

la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$. Es claro que la función $\phi : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = g_u(Ax, x), \qquad x \in \mathbb{S}^{n-1}$$

es continua sobre un cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. Por Bolzano, conocemos que ha de existir un punto $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ de máximo, esto es, $\phi(p) \geq \phi(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Sea $v \in < p >^\perp$ unitario y ortogonal a p. Consideremos $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$\alpha(t) = \phi(\cos(t)p + \operatorname{sen}(t)v).$$

Es claro que α es diferenciable y que $\alpha(0) = \phi(p)$ es un máximo de α. Así

$$0 = \left.\frac{d\alpha(t)}{dt}\right|_{t=0} = 2g_u(Ap, v)$$

y por tanto $Ap \in (< p >^{\perp})^{\perp}$, esto es, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Ap = \lambda p$ lo que concluye a demostración. $\square$

Del Lema anterior y teniendo en cuenta que la matriz que representa a un endomorfismo autoadjunto en una base ortonormal es siempre simétrica, obtenemos:

Corolario 1 *Todo endomorfismo autoadjunto f de un un espacio vectorial euclídeo (V^n, g) tiene siempre algún valor propio.*

Teorema 7 *Todo endomorfismo autoadjunto f de un un espacio vectorial euclídeo (V^n, g) es diagonalizable.*

Demostración. Por el Corolario anterior se sabe que existen valores propios de f. Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ los valores propios de f, entonces o bien f es diagonalizable o bien

$$U = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r} \neq V.$$

En este último caso y como $f(U) \subseteq U$, se tendrá que $f : U^{\perp} \longrightarrow U^{\perp}$ es también autoadjunto y tendrá algún vector propio $x \in U^{\perp} \cap V_{\lambda_i} \subset U^{\perp} \cap U = \{0\}$, lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 2 *Toda matriz simétrica es, simultáneamente, diagonalizable por semejanza y por congruencia.*

Demostración. Sea A una matriz simétrica de orden n. Entonces A es la matriz en la base usual del endomorfismo $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $f_A(x) = Ax$, que trivialmente es autoadjunto en $(\mathbb{R}^n, g_u)$ donde por g_u denotamos el producto escalar usual. Como f_A es diagonalizable y los subespacios propios de f_A son ortogonales dos a dos, deducimos que es posible encontrar una base $\mathbb{B}$ ortonormal de vectores propios de f_A. Esto es, $P^{-1}AP$ es diagonal, donde P es la matriz de cambio de base entre bases ortonormales. Así P es ortogonal y A es diagonalizada, simultáneamente, por semejanza y congruencia. $\square$

5. Isometrías lineales

Recordamos del tema anterior que una aplicación lineal f entre dos espacios vectoriales métricos (V_1, g_1) y (V_2, g_2) es una *isometría* si f es biyectiva y conserva las métricas, esto es,

$$g_1(x, y) = g_2(f(x), f(y)), \qquad \forall\ x, y \in V_1.$$

5.1. Algunas propiedades de las isometrías euclídeas

Para el case particular de un espacio vectorial euclídeo (V, g) se tiene:

- Todo endomorfismo f de V que conserva la métrica es una isometría

  En efecto, si $f(x) = 0$, entonces $\|x\|^2 = g(x, x) = g(f(x), f(x)) = 0$ y por tanto $x = 0$. Así $N(f) = \{0\}$ y f es biyectiva.

- Todo endomorfismo f de V que conserva la norma es una isometría

  En efecto, si $\|x\| = \|f(x)\|$ para todo $x \in V$, entonces para cualesquiera $x, y \in V$ se verifica

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{1}{2}\{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\} = g(f(x), f(y)) \end{aligned}$$

- Toda isometría f entre euclídeos conserva ángulos.

  En efecto, para cualesquiera $x, y \in V \setminus \{0\}$,

$$\cos(\measuredangle(x,y)) = \frac{g(x,y)}{\|x\|\ \|y\|} = \frac{g(f(x), f(y))}{\|f(x)\|\ \|f(y)\|} = \cos(\measuredangle(f(x), f(y))).$$

- Un isomorfismo entre espacios vectoriales euclídeos que conserva ángulos no es necesariamente una isometría.

  Por ejemplo, basta observar que las *homotecias de razón k*, $h_k = kI_V$, conservan ángulos pero dilatan la norma. En efecto,

$$\begin{aligned} &\frac{g(h_k(x), h_k(y))}{\|h_k(x)\|\ \|h_k(y)\|} = \frac{k^2 g(x,y)}{k^2\|x\|\ \|y\|} = \frac{g(x,y)}{\|x\|\ \|y\|} \\ &\|h(x)\| = |k|\|x\|. \end{aligned}$$

  para cualesquiera $x, y \in V$, y por tanto no son isometrías si $k \neq 1$.

Proposición 3 *Un endomorfismo f de un espacio vectorial euclídeo es una isometría si y sólo si su matriz respecto de una base ortonormal es una matriz ortogonal.*

Demostración. Sea $\mathbb{B}$ una base ortonormal de V y $A = M(f, \mathbb{B})$, entonces al coger coordenadas en $\mathbb{B}$ se tiene que $g(x,y) = g(f(x), f(y))$ si y sólo si,

$$x_{\mathbb{B}}^t \mathbb{I}_n y_{\mathbb{B}} = x_{\mathbb{B}}^t A^t \mathbb{I}_n A y_{\mathbb{B}} = x_{\mathbb{B}}^t A^t A y_{\mathbb{B}}$$

y por tanto f es una isometría si y sólo si A es una matriz ortogonal. $\square$

Observación 1 *Si en una base $\mathbb{B}$ cualquiera de V la matriz de un endomorfismo f es A, entonces f es una isometría si y sólo si,*

$$M(g, \mathbb{B}) = A^t M(g, \mathbb{B}) A.$$

Como consecuencia $\det(A) = \pm 1$.

Ejemplo 7 *Las siguientes matrices ortogonales* $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *proporcionan ejemplos de isometrías entre un plano vectorial euclídeo, respecto de una base ortonormal.*

5.2. Más propiedades

Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f : V \longrightarrow V$ una isometría entonces

★ Si λ es un valor propio de f, $\lambda \in \{1, -1\}$.

En efecto, si $f(x) = \lambda x$, como f es isometría se tendrá que $\|x\| = \|f(x)\| = |\lambda|\|x\|$ y por tanto $\lambda = \pm 1$.

★ Los subespacios propios de f son ortogonales.

En efecto, si V_1 y V_{-1} son subespacios propios de f y $x \in V_1$, $y \in V_{-1}$, entonces

$$g(x, y) = g(f(x), f(y)) = -g(x, y)$$

y por tanto $g(x, y) = 0$.

5.3. Isometrías del plano euclídeo

Consideremos (V^2, g) un plano euclídeo y $\mathbb{B} = \{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de V^2. Si$f : V^2 \longrightarrow V^2$ es una isometría, entonces $f(\mathbb{B}) = \{f(e_1), f(e_2)\}$ es otra base ortonormal de V^2. Por ser $f(e_1)$ y $f(e_2)$ unitarios, existen únicos $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi[$ tal que

$$f(e_1) = \cos(\theta_1)e_1 + \operatorname{sen}(\theta_1)e_2, \qquad f(e_2) = \cos(\theta_2)e_1 + \operatorname{sen}(\theta_2)e_2.$$

Además, la ortogonalidad de $f(e_1)$ y $f(e_2)$ nos dice que

$$\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2) = \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

y por tanto solo hay dos posibilidades,

★ o bien $f(e_2) = f(e_2) = -\operatorname{sen}(\theta_1)e_1 + \cos(\theta_1)e_2$ esto es f es **Rotación de ángulo** θ_1, cuya matriz en la base $\mathbb{B}$ está dada por

$$M(f, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\operatorname{sen}(\theta_1) \\ \operatorname{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}.$$

En este caso Traza$(f) = 2\cos(\theta_1)$ y $\det(f) = 1$ y no hay vectores propios salvo que $\theta_1 = 0$ o $\theta_1 = \pi$, esto es, $f = I_V$ o $f = -I_V$.

★ o bien $f(e_2) = f(e_2) = \operatorname{sen}(\theta_1)e_1 - \cos(\theta_1)e_2$, **Simetría respecto de una recta** cuya matriz en la base $\mathbb{B}$ está dada por

$$M(f, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \operatorname{sen}(\theta_1) \\ \operatorname{sen}(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \end{pmatrix}.$$

En este caso Traza$(f) = 0$ y $\det(f) = -1$, hay dos valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y por tanto f es diagonalizable y si $V_1 =< u_1 >$ y $V_{-1} =< u_2 >$, u_1 y u_2 son ortogonales y la matriz de f en la base $\{u_1, u_2\}$ está dada por

$$M(f, \{u_1, u_2\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esto es, f es la simetría ortogonal respecto de la recta V_1.

★ Obsérvese que la composición de isometrías es siempre una isometría. Esta será un giro si su determinante es 1 o una simetría si su determinante es -1.

Ejemplo 8 *Sea (V, g) un plano vectorial euclídeo y $\mathbb{B} = \{e_1, e_2\}$ una base de V tal que*

$$M(g, \mathbb{B}) = G = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Y sean f_1 y f_2 endomorfismos de V tales que

$$M(f_1, \mathbb{B}) = A_1 = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad M(f_2, \mathbb{B}) = A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Probar que f_1 y f_2 son isometrías de (V, g) y clasificarlas.

Es fácil comprobar que $A_i^t G A_i = G$, $i = 1, 2$ y por tanto f_1 y f_2 son isometrías. Por otro lado $\det(f_1) = -1$ y por tanto f_1 es una simetría ortogonal respecto del subespacio propio

$$V_1 = \{v = x_1 e_1 + x_2 e_2 \mid x_1 = 2x_2\}.$$

En cuanto a f_2, $\det(f_2) = 1$ y f_2 es un giro de ángulo θ con $2\cos(\theta) = \text{Traza}(f_2) = \sqrt{2}$, esto es, $\theta = \pi/4$.

5.4. Isometrías en el espacio euclídeo

Consideremos (V^3, g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión tres y $f : V^3 \longrightarrow V^3$ una isometría. Como el polinomio característico de f, $p_f(\lambda)$, es de grado tres, tenemos que existe al menos un valor propio de f, esto es, existe $u \in V \setminus \{0\}$ tal que $f(u) = \pm u$.

Como la recta $U =< u >$ es invariante por f, se tendrá que $f : U^\perp \longrightarrow U^\perp$ es una isometría del plano euclídeo $(U^\perp, g)$ y por tanto un giro o una simetría. Por tanto existe una base ortonormal $\mathbb{B}$ de $V^3 = U \oplus U^\perp$ y tenemos las siguientes posibilidades:

- $M(f, \mathbb{B}) = \pm \mathbb{I}_3$ y $f = \pm I_V$.
- $M(f, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & -\operatorname{sen}(\theta_1) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}$ y f es un giro de ángulo θ_1 con eje la recta vectorial dada por el subespacio propio V_1. En este caso, $\text{Traza}(f) = 1 + 2\cos(\theta_1)$ y $\det(f) = 1$.
- $M(f, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0) \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $f$es la simetría ortogonal respecto al plano V_1. En este caso, $\text{Traza}(f) = 1$ y $\det(f) = -1$.
- $M(f, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & -\operatorname{sen}(\theta_1) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}$ y f es composición de un giro entorno a la recta V_{-1} y de una simetría ortogonal respecto al plano $V_{-1}^\perp$. En este caso, $\text{Traza}(f) = -1 + 2\cos(\theta_1)$ y $\det(f) = -1$.
- $M(f, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0) \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $f$es la simetría ortogonal respecto a la recta V_1. En este caso, $\text{Traza}(f) = -1$ y $\det(f) = 1$.

Ejemplo 9 *En* $(\mathbb{R}^3, g_u)$ *calcula el giro* f *de ángulo* $\pi/4$ *alrededor del eje* $E = \{(x, y, z) \mid x = y, z = 0\}$

Sabemos que si cogemos $\mathbb{B}$ base ortonormal de $E \oplus E^{\perp}$,

$$\mathbb{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), (0, 0, 1) \right\},$$

entonces

$$M(f, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & -\operatorname{sen}(\theta_1) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \theta_1 = \pi/4$$

y por tanto $M(f, \mathbb{B}_u) = PM(f, \mathbb{B})P^{-1}$ donde $P = M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}_u)$.

Ejercicio 3 *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera la métrica euclídea* g_ω *asociada a la forma cuadrática* ω *dada por*

$$\omega(x, y, z) = 5x^2 - 16xy - 4xy - 4xz + 13y^2 + 6yz + 2z^2.$$

Se consideran $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *los endomorfismos dados por las siguientes matrices:*

$$M(f_1, \mathbb{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M(f_2, \mathbb{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que son isometrías y clasificarlas

Ejercicio 4 *En* $(\mathbb{R}^2, g_u)$ *se consideran* f_1 *el giro de ángulo* $\pi/4$ *y* f_2 *la simetría ortogonal respecto a la recta* $r \equiv x - y = 0$. *Clasificar* $f_1 \circ f_2$ *y* $f_2 \circ f_1$.

Ejercicio 5 *En* $\mathbb{R}^3$ *se consideran la métrica euclídea* g_ω *asociada a la forma cuadrática*

$$\omega(x, y, z) = x^2 - +2xz + y^2 + 2yz + 3z^2.$$

y f_1 *el endomorfismo cuya matriz en la base usual está dada por*

$$M(f_1, \mathbb{B}_u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & -1 - \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & -1 + \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Clasifica f_1.

5.5. El caso general

Para el caso general de un espacio vectorial euclídeo (V^n, g) se puede demostrar el siguiente resultado de clasificación:

Teorema 8 *Sea* $f : V \longrightarrow V$ *una isometría de* (V, g). *Entonces existen* $p, q, s \in \mathbb{N}$ *con* $p + q + 2s = n$ *y una base ortonormal* $\mathbb{B}$ *de* V *tal que*

$$M(f, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix},$$

donde $R(\theta_j) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\operatorname{sen}(\theta_j) \\ \operatorname{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}$, *con* $0 < \theta_j < 2\pi$, $\theta_j \neq \pi$ *para todo* j.

Demostración. Consideremos V_1 y V_{-1} los subespacios propios de f. Es claro que $V_1 \perp V_{-1}$ y que si denotamos por $W_1 = V_1 \oplus V_{-1}$, $f : W_1^\perp \longrightarrow W_1^\perp$ es una isometría sin vectores propios. Si $W_1 \neq V$, como

$$h = f + f^{-1} : W_1^\perp \longrightarrow W_1^\perp$$

es autoadjunto y todo endomorfismo autoadjunto se puede diagonaizar, existe $p_1 \in W_1^\perp$ tal que $h(p_1) = \lambda p_1$ o equivalentemente, $f(p_1) = \lambda p_1 + f(p_1)$. Por tanto,

$$f : U_1 =< p_1, f(p_1 >\longrightarrow U_1 =< p_1, f(p_1 >$$

es una isometría sin vectores propios, con lo que f será, en el plano U_1, un giro de ángulo θ_1 cuya matriz en una base ortonormal de U_1 estará dada por $R(\theta_1)$.

Si ahora cogemos $W_2 = W_1 \oplus U_1$, entonces $W_2 = V$ o si no, $h : W_2^\perp \longrightarrow W_2^\perp$ es también autoadjunto y, como antes, existe p_2 vector propio de h en $W_2^\perp$. Así,

$$f : U_2 =< p_2, f(p_2 >\longrightarrow U_2 =< p_2, f(p_2 >$$

es un giro de ángulo θ_2 cuya matriz en una base ortonormal de U_2 será $R(\theta_2)$.

Reiterando el proceso, podemos descomponer $V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$ y encontrar una base ortonormal de V donde la matriz de f es como en el enunciado del Teorema. $\square$