

# GEOMETRÍA II. RELACIÓN DE PROBLEMAS 3

## ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

Curso 2019-20

1. Sea  $V$  un espacio vectorial real. Denotemos por  $\mathcal{B}_s^+(V)$  al conjunto de todas las métricas euclídeas sobre  $V$ . Demuestra que:

a) Si  $g, g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$  entonces  $g + g' \in \mathcal{B}_s^+(V)$ .

b) Si  $a > 0$  y  $g \in \mathcal{B}_s^+(V)$  entonces  $ag \in \mathcal{B}_s^+(V)$ .

¿Es  $\mathcal{B}_s^+(V)$  un subespacio vectorial de  $\mathcal{B}(V)$ ?

2. Sean  $(V, g)$  y  $(V', g')$  dos espacios vectoriales euclídeos. Se define la *métrica producto*  $g \times g'$  en  $V \times V'$  a partir de la igualdad:

$$(g \times g')((u, u'), (v, v')) = g(u, v) + g'(u', v').$$

Demuestra que  $g \times g'$  es una métrica euclídea en  $V \times V'$ .

3. Decide de forma razonada si son euclídeas o no las métricas sobre  $\mathbb{R}^3$  cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha+4 & -2 & 2 \\ -2 & \alpha+1 & -1 \\ 2 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

4. Dados dos vectores cualesquiera  $u$  y  $v$  de un espacio vectorial euclídeo  $(V, g)$ , demuestra que se cumplen estas propiedades:

a) Identidad del paralelogramo:  $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ .

b) Teorema del coseno:  $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos \angle(u, v)$ .

c) Teorema de Pitágoras:  $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff u \perp v$ .

d)  $\|u\| = \|v\| \iff u+v \perp u-v$ .

e)  $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u-v\|$ .

5. Utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz en un espacio vectorial euclídeo conveniente para probar las siguientes desigualdades y caracterizar cuando se obtiene la igualdad en cada una de ellas.

a) Para cualesquiera números  $x_1, \dots, x_n \geq 0$ , se cumple que:

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

b) Para cada matriz simétrica  $A$  de orden  $n$  se verifica que  $(\operatorname{tr}(A))^2 \leq n \operatorname{tr}(A^2)$ .

c) Para cualquier función continua  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se cumple que:

$$\left( \int_a^b \varphi(t) dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b \varphi(t)^2 dt.$$

6. Consideremos  $\mathbb{R}^4$  con su métrica euclídea usual  $g_u$ . Calcula una base ortonormal de  $(U, g_U)$ , donde  $U$  es el subespacio de  $\mathbb{R}^4$  dado por:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 4y - z + 3t = 0\}.$$

Amplia la base anterior hasta conseguir una base ortonormal de  $(\mathbb{R}^4, g_u)$ . Calcula las coordenadas del vector  $u = (1, 0, 0, 1)$  en la base obtenida.

7. En el espacio vectorial  $S_2(\mathbb{R})$  de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales se considera la métrica  $g$  definida como  $g(A, C) = \operatorname{tr}(AC)$ .

a) Prueba que  $g$  es una métrica euclídea.

b) Utiliza el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de  $(S_2(\mathbb{R}), g)$  a partir de la base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Encuentra dos matrices linealmente independientes  $A, C \in S_2(\mathbb{R})$  que sean unitarias y que formen ángulo  $\pi/3$  con  $I_2$ .

8. En el espacio vectorial  $\mathbb{R}_2[x]$  de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por:

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx.$$

Demuestra que la base usual  $B_u$  de  $\mathbb{R}_2[x]$  no es ortonormal. Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de  $(\mathbb{R}_2[x], g)$  a partir de  $B_u$ .

9. En  $\mathbb{R}^3$  se considera la métrica  $g$ , cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Demuestra que la métrica  $g$  es euclídea.
- Calcula el ángulo que forman los vectores  $u = (1, 1, 0)$  y  $v = (0, -1, 1)$ .
- Calcula la proyección ortogonal y la simetría ortogonal del vector  $u = (2, 1, 0)$  con respecto al plano  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ .

10. En el espacio  $M_2(\mathbb{R})$  de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por  $g(A, C) = \text{tr}(AC^t)$ . Se definen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calcula el ángulo determinado por  $A$  y  $C$ .
- Calcula las proyecciones ortogonales de  $A$  sobre  $U = L(C)$  y sobre  $U^\perp$ .
- Calcula la imagen de  $A$  por la simetría respecto del subespacio de  $M_2(\mathbb{R})$  dado por:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - b + c - d = 0, -a + d = 0 \right\}.$$

- Da una base de  $W^\perp$ , siendo  $W$  el subespacio del apartado anterior.

11. Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial euclídeo de dimensión  $n$  y  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Se sabe que  $\|v_i\| = 2$  para cada  $i = 1, \dots, n$  y que  $\angle(v_i, v_j) = \pi/3$  si  $i \neq j$ . Calcula  $M(g, B)$  y una base ortonormal de  $(V, g)$ .

12. Se consideran los endomorfismos  $f, h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dados por:

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z), \quad M(h, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3/2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que  $f$  y  $h$  son autoadjuntos respecto a la métrica euclídea usual. Calcula dos bases ortonormales de  $\mathbb{R}^3$  en las que las matrices de  $f$  y  $h$  sean diagonales.

13. En  $\mathbb{R}^3$  se considera el endomorfismo  $f$  que en la base  $B = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 1), (1, 1, 1)\}$  tiene la siguiente matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudia si  $f$  es autoadjunto con respecto a la métrica euclídea usual de  $\mathbb{R}^3$  y, en caso de serlo, encuentra una base ortonormal de vectores propios de  $f$ .

14. Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial euclídeo tridimensional. Supongamos que:

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en una cierta base  $B$  de  $V$ . Sea  $f : V \rightarrow V$  el endomorfismo dado por:

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que  $f$  es autoadjunto en  $(V, g)$  y encuentra una base ortonormal de  $(V, g)$  formada por vectores propios de  $f$ .

15. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

encuentra una matriz  $P \in O(3)$  tal que  $P^{-1}AP$  sea diagonal.

16. Sea  $g$  la métrica de  $\mathbb{R}^3$  cuya matriz en la base usual es:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula los valores propios de  $A$  y estudia su signo para determinar el índice de  $g$ . Clasifícala en función de los parámetros  $a, b \in \mathbb{R}$ . ¿En algún caso se obtiene la métrica euclídea usual o la métrica lorentziana usual de  $\mathbb{R}^3$ ?

17. Se considera la familia de métricas  $g_{a,b}$  en  $\mathbb{R}^4$  tales que:

$$M(g_{a,b}, B_u) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & b & -1 \end{pmatrix}.$$

Clasifica, según los valores de  $a, b \in \mathbb{R}$ , las métricas  $g_{a,b}$ .

18. Sean  $V$  un plano vectorial,  $B$  una base de  $V$  y  $g$  la métrica en  $V$  tal que:

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos, para cada  $a \in \mathbb{R}$ , el endomorfismo  $f_a : V \rightarrow V$  dado por:

$$M(f_a, B) = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Prueba que  $g$  es una métrica euclídea sobre  $V$  y encuentra los valores de  $a$  para los que  $f_a$  es autoadjunto en  $(V, g)$ .
- b) ¿Existe algún valor de  $a$  tal que  $f_a$  es una isometría en  $(V, g)$ ?

19. Describe las isometrías de  $(\mathbb{R}^2, g_u)$  cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

20. Sea  $(V, g)$  un plano vectorial euclídeo y  $B$  una base de  $V$  para la que:

$$M(g, B) = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Estudia si los endomorfismos  $f, h : V \rightarrow V$  tales que:

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M(h, B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

son isometrías de  $(V, g)$ . En caso afirmativo, describe tales isometrías.

21. En  $\mathbb{R}^3$  se consideran la métrica euclídea  $g$  cuya matriz en la base usual viene dada por

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y el endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(5x + 2y + z, -10x - y + z, 4x + y + 2z).$$

- a) Comprueba que  $f$  es una isometría.
- b) Encuentra una base ortonormal en la que  $f$  adopte su forma canónica y clasifícala.

22. Describe geométricamente las isometrías de  $(\mathbb{R}^3, g_u)$  cuyas matrices en la base usual son:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

23. Sobre el espacio vectorial  $\mathbb{R}_2[x]$  de los polinomios de grado  $\leq 2$  con coeficientes reales se considera la métrica euclídea  $g$  tal que la base  $B = \{1, x, x^2\}$  es ortonormal. Demuestra que el endomorfismo  $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  dado por:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \frac{1}{3} ((2a_0 - a_1 + 2a_2) + (-a_0 + 2a_1 + 2a_2)x + (2a_0 + 2a_1 - a_2)x^2)$$

es una isometría en  $(\mathbb{R}_2[x], g)$  y descríbela.

24. Sobre el espacio vectorial euclídeo  $(S_2(\mathbb{R}), g)$ , donde  $g(A, C) = \text{tr}(AC)$ , se define el endomorfismo  $f : S_2(\mathbb{R}) \rightarrow S_2(\mathbb{R})$  dado por:

$$f \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}c \end{pmatrix}.$$

Demuestra que  $f$  es una isometría de  $(S_2(\mathbb{R}), g)$  y descríbela.

25. Consideremos  $\mathbb{R}^2$  con su métrica euclídea usual.

- Calcula la matriz  $M(f, B_u)$ , siendo  $f$  la simetría axial con respecto a  $U = L((2, 3))$ .
- Calcula, en las coordenadas usuales, las ecuaciones de un giro que lleve el vector  $(-4, 3)$  en el vector  $(5, 0)$ .

26. Consideremos  $\mathbb{R}^3$  con su métrica euclídea usual.

- Calcula la matriz  $M(f, B_u)$ , siendo  $f$  una rotación de ángulo  $\pi/2$  con eje dado por  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, x - z = 0\}$ .
- Calcula, en coordenadas usuales, las ecuaciones de la simetría ortogonal respecto al plano perpendicular a la recta  $U$  del apartado anterior.
- Calcula  $M(f, B_u)$ , donde  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una isometría que verifique  $f(1, -1, 0) = (1, -1, 0)$ ,  $f(1, 1, 5) = (3, 3, -3)$  y  $\det(f) = 1$ .

27. En  $(\mathbb{R}^3, g_u)$ , calcula la matriz en  $B_u$  de  $h \circ \sigma_U$ , donde  $\sigma_U$  es la simetría ortogonal con respecto al plano  $U$  de ecuación  $z = 0$ , y  $h$  es el giro de ángulo  $\pi/3$  alrededor del eje  $OX$ . Clasifica y describe la isometría resultante.
28. En  $(\mathbb{R}^3, g_u)$ , encuentra si es posible una isometría  $f$  que lleve el subespacio  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$  en el subespacio  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ . Si es posible da  $M(f, B_u)$ , clasifica y describe la isometría  $f$ .
29. Responde de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
- Si  $g$  es una métrica euclídea sobre  $V$ , entonces todos los elementos diagonales de la matriz de  $g$  en cualquier base de  $V$  son positivos. ¿Es cierto el recíproco?
  - Sea  $g$  una métrica cuya matriz en una base  $B$  tiene un valor propio negativo. Entonces  $g$  no es euclídea.
  - Sean  $u$  y  $v$  dos vectores no nulos de un espacio vectorial euclídeo  $(V, g)$  que forman un ángulo  $\alpha$ . Entonces el ángulo que forman  $2u$  y  $2v$  es  $2\alpha$ .
  - Toda base  $B$  de un espacio vectorial  $V$  es base ortonormal para una única métrica euclídea sobre  $V$ .
  - Si  $U$  es un hiperplano de un espacio vectorial euclídeo entonces hay exactamente dos vectores perpendiculares a  $U$  y unitarios.
  - Toda matriz cuadrada con determinante 1 o  $-1$  es ortogonal.
  - Si dos subespacios de un espacio vectorial euclídeo son perpendiculares y unimos dos bases ortonormales, una de cada uno de ellos, obtenemos una base ortonormal de la suma de los dos subespacios.
  - Sea  $U$  un subespacio vectorial de un espacio vectorial euclídeo  $(V, g)$ . Entonces, se cumple la igualdad  $I_V = 2\pi_U - \sigma_U$ , donde  $\pi_U$  and  $\sigma_U$  son la proyección y simetría ortogonales respecto a  $U$ .
  - Todo endomorfismo autoadjunto de un espacio vectorial euclídeo es automorfismo.
  - Todo endomorfismo diagonalizable de un espacio vectorial es autoadjunto respecto de alguna métrica euclídea en dicho espacio.
  - Dos vectores propios linealmente independientes de un endomorfismo autoadjunto son ortogonales.
  - Si  $f : V \rightarrow V$  es una isometría de un espacio vectorial euclídeo  $(V, g)$  entonces dos vectores propios de  $f$  asociados a valores propios distintos son ortogonales.
  - Toda isometría de un espacio vectorial euclídeo es un endomorfismo autoadjunto.
  - En un espacio vectorial euclídeo  $(V, g)$ , dados dos subespacios vectoriales de la misma dimensión siempre existe una isometría de  $(V, g)$  que lleva uno en otro.
  - En  $(\mathbb{R}^2, g_u)$  consideramos el giro  $r_\theta$  de ángulo  $\theta \in (0, 2\pi)$  y la simetría ortogonal  $\sigma$  con respecto a la recta de ecuación  $y = 0$ . Entonces,  $f = r_\theta \circ \sigma$  es la simetría ortogonal con respecto a la recta de ecuación  $(\cos \theta - 1)x + (\sin \theta)y = 0$ .

- o) En un plano vectorial euclídeo la composición de dos simetrías axiales es un giro.
- p) Si una matriz ortogonal de orden 2 no es diagonal y tiene determinante positivo, entonces no es diagonalizable.
- q) Toda isometría de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 5 para la que el subespacio de vectores fijos tiene dimensión 2 tiene determinante  $-1$ .
- r) Sobre un espacio vectorial euclídeo  $(V, g)$  de dimensión impar no existe ninguna isometría  $f$  tal que  $f \circ f = -I_V$ .
- s) Si  $(V, g)$  es un espacio vectorial euclídeo y  $f$  un endomorfismo autoadjunto de  $g$  que además es una isometría entonces  $f$  es una simetría ortogonal.
- t) Si  $V$  un espacio vectorial y  $g$  y  $g'$  son dos métricas euclídeas en  $V$  que verifican  $g(u, v) = 0 \iff g'(u, v) = 0$ , entonces  $g' = \lambda g$ ,  $\lambda > 0$ .
- u) Sea  $M_2(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales y la métrica  $g(A, C) = \text{traza}(A M C^t)$  donde  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ . Entonces  $g$  es una métrica euclídea si y solo si  $a > 0$  y  $\det(M) > 0$ .
- v) Sea  $(V, g)$  un plano vectorial métrico no degenerado que verifica la siguiente propiedad:

Todo endomorfismo  $f$  de  $V$  que cumple

$$g(f(u), v) = g(u, f(v)), \forall u, v \in V$$

es diagonalizable.

Entonces  $g$  es definida positiva o definida negativa.

- w) Dada  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una matriz invertible existe  $P$  una matriz ortogonal y  $Q$  una matriz triangular superior con todos los elementos de su diagonal positivos tal que  $A = P \cdot Q$ .