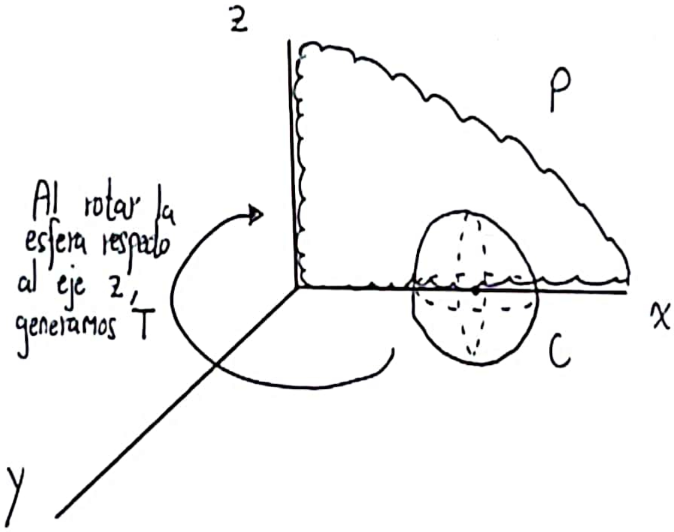
Geometría III

Relación de Ejercicios 3

① (El toro de revolución). En el semiplano $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{smallmatrix} y=0 \\ x\geq 0 \end{smallmatrix}\}$, tomamos una circunferencia C de centro $(c,0,0)$ y radio $r > 0$ con $c > r > 0$. Se llama toro de revolución generado por C a la superficie T obtenida al rotar C alrededor del eje z. Dibujar T y describir la superficie como el conjunto de soluciones de una ecuación con 3 incógnitas. ¿Es dicha ecuación la de una cuádrica?



Las ecuaciones paramétricas del toro de revolución son:
$$\begin{cases} x = \cos(\theta)\cdot(R + r\cos(\varphi)) \\ y = \operatorname{sen}(\theta)\cdot(R + r\cos(\varphi)) \\ z = r\operatorname{sen}(\varphi) \end{cases},$$
donde R es la distancia desde el punto $(0,0,0)$ hasta el $(c,0,0)$, r es el radio de la esfera, $r < R$, y $\theta, \varphi \in [0, 2\pi]$.

② Sea L una recta afín en $\mathbb{R}^n$ y C una hipercuádrica. Demostrar que se da una, y solo una, de las siguientes posibilidades: o bien $L \cap C = \emptyset$, o bien $L \cap C$ es un punto, o bien $L \cap C$ consta de dos puntos, o bien $L \subseteq C$.

Pendiente.

③ (El hiperboloide de una hoja como unión de rectas). Consideremos el hiperboloide de una hoja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Para cada punto $p \in C \cap \{z=0\}$, tomamos la recta afín $L_p = p + L(\mathcal{G}(p) + e_3)$, donde $\mathcal{G}$ es el giro de 90° en el plano $z=0$ centrado en el origen y $e_3 = (0,0,1)$. Demostrar que C coincide con la unión de todas las rectas L_p.

Pendiente.

④ Sea H una hipercuádrica en $\mathbb{R}^n$ con matriz $\hat{C}$ en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_o$. Diremos que H es invariante por homotecias lineales si para toda homotecia $h_{0,r}$ con centro el origen $0 \in \mathbb{R}^n$ y razón $r \neq 0$, $M(h_{0,r}^{-1} ; \mathcal{R}_o)^t \cdot \hat{C} \cdot M(h_{0,r}^{-1} ; \mathcal{R}_o) = \lambda \hat{C}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dependiendo de r); en particular, $h_{0,r}(H) = H$ para todo $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demostrar que H cumple esta propiedad si, y solo si, $\hat{C} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$, donde C es simétrica y no nula. Mostrar algunos ejemplos de este tipo de cuádricas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Pendiente.

⑤ Construir explícitamente un isomorfismo afín $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(C) = C'$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $n=2$, $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$, $C' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\right\}$.

b) $n=3$, $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$, $C' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$.

c) $n=2$, $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\right\}$, $C' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 = 0\right\}$.

d) $n=3$, $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax^2 + by^2 = 1\right\}$, $C' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Pendiente.

6) Clasificar las siguientes cónicas:

a) $2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0$.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{R_0}(H)$$

con núcleo simétrico asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 3$ y que $r_H = rg(C_0) = 2$, luego, $R_H = r_H + 1$, $= 3$ por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de la matriz C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 2 \\ 2 & -1-t \end{pmatrix} = t^2 - t - 6 = (-3+t)(2+t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2 \text{ son los valores propios de } C_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = s = 1 \Rightarrow s_H = |t-s| = 0$$

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 3 & -1 \\ 3 & 2-t & 2 \\ -1 & 2 & -1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 2t^2 + 15t - 11$$

De la regla de Descartes se deduce que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y una negativa. Por tanto, $S_H = 1$, luego, $S_H = s_H + 1$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)}$$

esto es, H es una hipérbola afín.

b) $2x^2 - y^2 + 2xy + 4x - 2y + 1 = 0.$

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 3$ y que $r_H = rg(C_0) = 2$, luego, $R_H = r_H + 1 = 3$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de la matriz C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & -1-t \end{pmatrix} = t^2 - t - 3$$

De la regla de Descartes se deduce que $p(t)$ tiene una raíz positiva y una raíz negativa, luego, $s_H = 0$.

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 2 & -1 \\ 2 & 2-t & 1 \\ -1 & 1 & -1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 2t^2 + 7t - 5$$

De la regla de Descartes se deduce que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y una negativa. Por tanto, $S_H = 1$, luego, $S_H = s_H + 1 = 1$.

En conclusión la forma reducida de H es:

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)}$$

esto es, H es una hipérbola afín.

c) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0$.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 2$ y que $r_H = rg(C_0) = 1$, luego, $R_H = r_H + 1 = 2$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de la matriz C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t = t(t-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2 \text{ son los valores propios de } C_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 1,\ s = 0 \Rightarrow s_H = |t - s| = 1$$

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 2t^2 + 2t$$

De la regla de Descartes se deduce que $\hat{p}(t)$ tiene una raíz positiva y una negativa. Por tanto, $S_H = 0$, luego, $S_H = s_H - 1 = 0$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

esto es, H es un par de rectas paralelas.

d) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 1$ y que $r_H = rg(C_0) = 1$, luego, $R_H = r_H = 1$, por lo que estamos en el caso (I).

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esto es, H es una recta doble.

e) $x^2+y^2+2xy+2x+2y+2=0$.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0=\left(\begin{array}{c|cc}2&1&1\\ \hline 1&1&1\\ 1&1&1\end{array}\right)\in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\in N_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H=rg(\hat{C}_0)=2$ y que $r_H=rg(C_0)=1$, luego, $R_H=r_H+1$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de la matriz C_0 viene dado por:

$$p(t)=\det\begin{pmatrix}1-t&1\\1&1-t\end{pmatrix}=t^2-2t=t(t-2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=2 \text{ son los valores propios de } C_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=1,\ s=0\Rightarrow s_H=|t-s|=1$$

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t)=\det\begin{pmatrix}2-t&1&1\\1&1-t&1\\1&1&1-t\end{pmatrix}=-t^3+4t^2-2t$$

De la regla de Descartes se deduce que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y ninguna negativa. Por tanto, $S_H=2$, luego, $S_H=s_H+1=2$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left\{\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 0&1&0\\ 0&0&0\end{array}\right)\right\}$$

esto es, H es vacío.

f) $4x^2 + 2y^2 - 2xy + x - 3y - 3 = 0$

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} -3 & 1/2 & -3/2 \\ \hline 1/2 & 4 & -1 \\ -3/2 & -1 & 2 \end{array}\right) \in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in N_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 3$ y que $r_H = rg(C_0) = 2$, luego, $R_H = r_H + 1 = 3$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de la matriz C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 4-t & -1 \\ -1 & 2-t \end{pmatrix} = t^2 - 6t + 7$$

De la regla de Descartes se deduce que $p(t)$ tiene dos raíces positivas y ninguna negativa, luego, $s_H = 2$.

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det\begin{pmatrix} -3-t & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 4-t & -1 \\ -3/2 & -1 & 2-t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t^2 + \frac{27}{2}t - 29$$

De la regla de Descartes se deduce que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y una negativa. Por tanto, $S_H = 1$, luego, $S_H = s_H - 1 = 1$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)}$$

esto es, H es una elipse afín.

Escaneado con CamScanner

g) $-x^2 + xy - \sqrt{3}x + \sqrt{3}y = 0.$

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \hline -\sqrt{3}/2 & -1 & 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \in N_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 3$ y que $r_H = rg(C_0) = 2$, luego, $R_H = r_H + 1 = 2$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de la matriz C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} -1-t & 1/2 \\ 1/2 & -t \end{pmatrix} = t^2 + t - \frac{1}{4}$$

De la regla de Descartes se deduce que $p(t)$ tiene una raíz positiva y otra negativa, luego, $s_H = 0$.

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det\begin{pmatrix} -t & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1-t & 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & -t \end{pmatrix} = -t^3 - t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{3}{2}$$

De la regla de Descartes se deduce que $\hat{p}(t)$ tiene una raíz positiva y dos negativas. Por tanto, $S_H = 1$, luego, $S_H = s_H + 1 = 0$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)}$$

esto es, H es una hipérbola afín.

⑦ Para cada una de las siguientes cónicas, encontrar un isomorfismo afín de $\mathbb{R}^2$ que nos lleve a su ecuación reducida:

a) $x^2 - 7y^2 - 6xy + 10x + 2y + 9 = 0$.

Tenemos que:

$$H(x,y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 7y^2 - 6xy + 10x + 2y + 9 = 0\} \Rightarrow \hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \in N_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 2$ y que $r_H = rg(C_0) = 2$, luego, $R_H = r_H = 2$, por lo que estamos en el caso (I).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & -3 \\ -3 & -7-t \end{pmatrix} = t^2 + 6t - 16 = (t+8)(t-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -8,\ \lambda_2 = 2 \text{ son los valores propios de } C_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 1,\ s = 1 \Rightarrow S_H = 0 \underbrace{=}_{\substack{\text{Esto se da} \\ \text{porque estamos} \\ \text{en el caso (I)}}} S_H$$

Luego, H es un par de rectas secantes y su forma reducida es:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Calculemos los subespacios propios asociados:

$$V_{-8} = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = L(\{(1,3)\})$$

$$V_{2} = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = L(\{(-3,1)\})$$

Por lo que una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle)$ es $B = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\right\}$ y la forma de Sylvestera de C_0, la cual es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, se alcanza en la base ortogonal de $(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle)$ $B_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1), \frac{1}{\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\right\}$.

Si denotamos $\mathcal{R}_1 = \{(0,0); B_1\}$, sabemos que:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_1}(H)$$

Luego:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3/\sqrt{20} & 1/\sqrt{80} \\ 0 & 1/\sqrt{20} & 3/\sqrt{80} \end{array}\right)^t \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3/\sqrt{20} & 1/\sqrt{80} \\ 0 & 1/\sqrt{20} & 3/\sqrt{80} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 9 & -7/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ \hline -7/\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H)$$

Si $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1)$ representan las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$, entonces H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por los ceros del polinomio:

$$x_1^2 - \frac{14}{\sqrt{5}}x_1 - y_1^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}y_1 + 9 = 0$$

$$\left(x_1 - \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0$$

Las ecuaciones analíticas:

$$x_2 = x_1 - \frac{7}{\sqrt{5}}\ ,\quad y_2 = y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}$$

definen un cambio de $\mathcal{R}_1$ a un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ con $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2)$ representando las coordenadas en $\mathcal{R}_2$ de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$. Claramente, $x_2^2 - y_2^2 = 0$ es la ecuación analítica de H en $\mathcal{R}_2$ y, por tanto:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H)$$

Si se quiere una determinación más explícita de $\mathcal{R}_2$, obsérvese que, por definición:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -7/\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

de donde:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 7/\sqrt{5} & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3/\sqrt{20} & 1/\sqrt{80} \\ 0 & 1/\sqrt{20} & 3/\sqrt{80} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 7/\sqrt{5} & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -11/5 & -3/2\sqrt{5} & 1/4\sqrt{5} \\ 2/5 & 1/2\sqrt{5} & 3/4\sqrt{5} \end{array}\right)$$

Observemos de lo anterior que:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}; R_2, R_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}; R_2, R_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \in M_{R_2}(H)$$

Toda afinidad $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisface que $M_{R_0}(f(H)) = M(f^{-1}; R_0)^t \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(f^{-1}; R_0)$ o, equivalentemente, $M(f^{-1}; R_0)^t \cdot M_{R_0}(H) \cdot M(f^{-1}; R_0) \in M_{R_0}(f(H))$. Basta con elegir la única f tal que $M(f; R_0)^{-1} = M(f^{-1}; R_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3}; R_2, R_0)$, luego:

$$M(f; R_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3}; R_2, R_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -11/5 & -3/2\sqrt{5} & 1/4\sqrt{5} \\ 2/5 & 1/2\sqrt{5} & 3/4\sqrt{5} \end{array}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(f; R_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -7/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 6/\sqrt{5} \end{array}\right)$$

b) $9x^2 + 4y^2 + 12xy - 52 = 0$.

Pendiente.

8. ¿Existe alguna elipse en la familia de cónicas $\alpha x^2 + y^2 + \alpha xy + 2x - 2y + \alpha = 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$?

Pendiente.

(9) Encontrar la ecuación reducida y decir de qué tipo es la cónica siguiente en función del parámetro real α:

$$\alpha x^2 + y^2 + 4\alpha xy - 2x - 4y + \alpha = 0.$$

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha & -1 & -2 \\ \hline -1 & \alpha & 2\alpha \\ -2 & 2\alpha & 1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 2\alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_{R_0}(H)$$

Tenemos que:

$$\det(C_0) = -4\alpha^2 + \alpha = 0 \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\det(\hat{C}_0) = -4\alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0 \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = \frac{1}{4} \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Luego, distinguimos los siguientes casos:

- Si $\alpha = 1$:

$$R_H = r_H = 2 \Rightarrow \text{Caso (I)}$$

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t - 3$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene una raíz positiva y una negativa. Luego, $S_H = s_H = 0$.

En conclusión, H es un par de rectas secantes.

•) Si $\alpha = -1$:

$$R_H = r_H = 2 \Rightarrow \text{Caso (I)}$$

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} -1-t & -2 \\ -2 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - 5$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene una raíz positiva y una raíz negativa. Luego, $S_H = s_H = 0$.

En conclusión, H es un par de rectas secantes.

•) Si $\alpha = \frac{1}{4}$:

$$R_H = r_H + 1 = 2 \Rightarrow \text{Caso (II)}$$

$$p(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-t & 1/2 \\ 1/2 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - \frac{5}{4}t$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene una raíz positiva y ninguna negativa. Luego, $s_H = 1$.

$$\hat{p}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-t & -1 & -2 \\ -1 & \frac{1}{4}-t & 1/2 \\ -2 & 1/2 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{75}{16}t$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene una raíz positiva y una negativa. Luego, $S_H = 0$ y, por tanto, $S_H = s_H - 1 = 0$.

En conclusión, H es un par de rectas paralelas.

•) Si $\alpha = 0$:

$$R_H = r_H + 2 = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La única posibilidad es que H es una parábola

• Si $\alpha \neq -1, 0, \frac{1}{4}, 1$:

$$R_H = r_H + 1 = 3 \Rightarrow \text{Caso (II)}$$

$$p(t) \overset{det}{=} \begin{pmatrix} \alpha - t & 2\alpha \\ 2\alpha & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - (\alpha+1)t - 4\alpha^2 + \alpha$$

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} \alpha - t & -1 & -2 \\ -1 & \alpha - t & 2\alpha \\ -2 & 2\alpha & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + (2\alpha+1)t^2 + (3\alpha^2 - 2\alpha + 5)t - 4\alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha - 1$$

- Si $\alpha < 0$:

$p(t)$ tiene dos raíces negativas

H es una elipse

- Si $\alpha > 0$:

$p(t)$ tiene una raíz positiva y una negativa

H es una hipérbola

(10) Clasifica afínmente la cónica H del plano afín $\mathbb{R}^2$ que en el sistema de referencia usual R_0 viene definida por la ecuación:

$$x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 1 = 0.$$

Encuentra un sistema de referencia R_2 de $\mathbb{R}^2$ en el que H adopte su forma canónica.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & -3/2 & 2 \\ \hline -3/2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in N_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 3$ y que $r_H = rg(C_0) = 2$, luego, $R_H = r_H + 1 = 3$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & -2 \\ -2 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t - 3 \qquad p(t) = 0 \iff \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene una raíz positiva y una negativa. Por tanto, $s_H = 0$.

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det\begin{pmatrix} -1-t & -3/2 & 2 \\ -3/2 & 1-t & -2 \\ 2 & -2 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + t^2 + \frac{45}{4}t + \frac{35}{4}$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene una raíz positiva y dos raíces negativas. Luego, $S_H = 1$, por lo que $S_H = s_H + 1 = 0$.

Esto nos dice que H es una hipérbola y su forma reducida es:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Calculemos los subespacios propios de C_0:

$$V_{-1} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = L(\{(1,1)\})$$

$$V_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = L(\{(1,-1)\})$$

Tenemos que $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\}$ es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ y la forma de Sylvester de C_0, la cual es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, se alcanza en la base ortogonal de $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ $B_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\}$.

Si definimos el sistema de referencia $\mathcal{R}_1 = \{(0,0); B_1\}$, sabemos que $M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_1}(H)$, luego:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right)^t \cdot \left(\begin{array}{c|cc} -1 & -3/2 & 2 \\ \hline -3/2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} -1 & -7\sqrt{6}/12 & \sqrt{2}/4 \\ \hline -7\sqrt{6}/12 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/4 & 0 & -1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H)$$

Si $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1)$ representan las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$, entonces H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por los ceros del polinomio:

$$x_1^2 - \frac{7\sqrt{6}}{12} x_1 - y_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{4} y_1 - 1 = 0$$

$$\left(x_1 - \frac{7\sqrt{6}}{24}\right)^2 - \left(y_1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 - \frac{37}{24} = 0$$

$$-\frac{24}{37}\left(x_1 - \frac{7\sqrt{6}}{24}\right)^2 + \frac{24}{37}\left(y_1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 + 1 = 0$$

Luego, las ecuaciones analíticas:

$$y_2 = \frac{2\sqrt{222}}{37} x_1 - \frac{7\sqrt{37}}{74}, \quad x_2 = \frac{2\sqrt{222}}{37} y_1 + \frac{\sqrt{111}}{74}$$

definen un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$, siendo $x_2^2 - y_2^2 + 1 = 0$ la ecuación analítica de H en $\mathcal{R}_2$ y, por tanto:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H)$$

Si se quiere una determinación más explícita de $\mathcal{R}_2$, tenemos que:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_1)=M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)^{-1}=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{111}}{74} & 0 & \frac{2\sqrt{222}}{37} \\ \frac{-7\sqrt{37}}{74} & \frac{2\sqrt{222}}{37} & 0 \end{array}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{7\sqrt{8214}}{888} & 0 & \frac{\sqrt{222}}{12} \\ -\frac{\sqrt{24642}}{888} & \frac{\sqrt{222}}{12} & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{7\sqrt{6}}{24} & 0 & \frac{\sqrt{222}}{12} \\ -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{222}}{12} & 0 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}\ ,\mathcal{R}\ )\cdot M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_1)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{7\sqrt{6}}{24} & 0 & \frac{\sqrt{222}}{12} \\ -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{222}}{12} & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\boxed{M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1/6 & \frac{\sqrt{111}}{12} & \frac{\sqrt{37}}{12} \\ -5/12 & \frac{\sqrt{111}}{12} & -\frac{\sqrt{37}}{12} \end{array}\right)}$$

11) Demuestra los siguientes enunciados:

a) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una elipse.

Tomemos $F_1, F_2\in\mathbb{R}^2$ dos puntos cualesquiera y consideremos:

$$H=\{p\in\mathbb{R}^2 : d(p,F_1)+d(p,F_2)=2b\}.$$

Como $d(F_1,F_2) \leq d(p,F_1)+d(p,F_2) \Rightarrow 2b < d(F_1,F_2) \Rightarrow \mathcal{H} = \emptyset$, luego, suponemos $2b \geqslant d(F_1,F_2)$.

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cualquier movimiento rígido tal que:

$$f(F_1) = (-a,0) \in \mathbb{R}^2$$
$$f(F_2) = (a,0) \in \mathbb{R}^2$$

donde $2a = d(F_1,F_2) \leq 2b \Rightarrow a \leq b$. Basta con probar que $f(\mathcal{H})$ es una elipse. Tenemos que:

$$d\Big((x,y),(-a,0)\Big) + d\Big((x,y),(a,0)\Big) = 2b \Leftrightarrow \sqrt{(x+a)^2+y^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2} = 2b$$

Operando:

$$(x-a)^2 + y^2 = \left(2b - \sqrt{(x+a)^2+y^2}\right)^2$$

$$b^2 + ax - b\sqrt{(x+a)^2+y^2} = 0$$

$$\left(b^2+ax\right)^2 = b^2\left[(x+a)^2+y^2\right]$$

$$\frac{1}{b^2}x^2 + \frac{1}{b^2-a^2}y^2 - 1 = 0$$

que corresponde a una elipse euclidiana.

b) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una hipérbola.

Tomemos $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ dos puntos cualesquiera y consideremos:

$$\mathcal{H} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left| d(p,F_2) - d(p,F_1) \right| = 2b \right\}.$$

Excluimos el caso $b=0$ ya que en tal caso $\mathcal{H}$ sería la mediatriz del segmento $[F_1, F_2]$. Como $d(p,F_1) \leq d(F_1,F_2) + d(p,F_2)$ y $d(p,F_2) \leq d(F_1,F_2) + d(p,F_1)$, tenemos que:

$$2b = \left| d(p,F_2) - d(p,F_1) \right| \leq d(F_1,F_2).$$

Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un movimiento rígido tal que:

$$f(F_1) = (0,-a) \in \mathbb{R}^2$$
$$f(F_2) = (0,a) \in \mathbb{R}^2$$

donde $2a = d(F_1,F_2) \geqslant 2b \Rightarrow a \geqslant b$. Basta con probar que $f(\mathcal{H})$ es una hipérbola. Tenemos que:

$$\left| d\big((x,y),(0,a)\big) - d\big((x,y),(0,-a)\big) \right| = 2b \iff \left| \sqrt{x^2+(y-a)^2} - \sqrt{x^2+(y+a)^2} \right| = 2b$$

Suponiendo que $2b > 0$ y operando:

$$x^2 + (y-a)^2 = \left(2b + \sqrt{x^2+(y+a)^2}\right)^2$$
$$b^2 + ay + b\sqrt{x^2+(y+a)^2} = 0$$
$$\left(b^2 + ay\right)^2 = b^2\left[x^2+(y+a)^2\right]$$
$$\frac{1}{a^2-b^2}x^2 - \frac{1}{b^2}y^2 + 1 = 0$$

que corresponde a una hipérbola euclidiana.

c) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ que equidistan de una recta (llamada directriz) y de un punto exterior a la misma (llamado foco), es una parábola.

Tomemos un punto $F \in \mathbb{R}^2$ y una recta $R \subset \mathbb{R}^2$ y consideremos:

$$H = \{ p \in \mathbb{R}^2 : d(p,F) = d(p,R) \}$$

Excluimos el caso $p \in R$ ya que en tal caso H sería la recta ortogonal a R que pasa por p. Supongamos pues que $p \notin R$.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cualquier movimiento rígido tal que:

$$f(F) = (0,-a) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = a\}, \ a > 0$$

Probemos que $f(H)$ es una parábola. Tenemos que:

$$f(H) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(y+a)^2 + x^2} = |y-a| \right\}$$

Luego, $(x,y) \in f(H)$ si, y solo si:

$$(y+a)^2 + x^2 - (y-a)^2 = 0$$

$$x^2 + 4ay = 0$$

$$\frac{1}{2a}x^2 + 2y = 0$$

que corresponde a una parábola euclidiana.

12) Expresar en coordenadas usuales de $\mathbb{R}^2$ las ecuaciones de las siguientes cónicas:

a) $E = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p,F_1) + d(p,F_2) = 4\}$, donde $F_1 = (0,2)$, $F_2 = (-2,0)$.

Tenemos que:

$$d\Big((x,y),(0,2)\Big) + d\Big((x,y),(-2,0)\Big) = 4 \iff$$

$$\iff \sqrt{x^2+(y-2)^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 4$$

Operando:

$$\left(\sqrt{x^2+(y-2)^2}\right)^2 = \left(4-\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+(y-2)^2 = 16+(x+2)^2+y^2-8\sqrt{(x+2)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{4}-4y = 16+\cancel{x^2}+\cancel{4}+4x+\cancel{y^2}-8\sqrt{(x+2)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = \left(2\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2+2xy = 4\left[(x+2)^2+y^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy = 4x^2+16+16x+4y^2 \Rightarrow \boxed{3x^2+3y^2-2xy+16x+16=0}$$

b) La parábola P de foco $F=(2,2)$ y directriz de ecuación $x+y=0$.

Sea $p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ un punto de la parábola, $F=(2,2)$ el foco y $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\}$ la directriz. Tenemos que:

$$d(p,D) = \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} \qquad d(p,F) = \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$$

Se tiene que cumplir que:

$$d(p,D)=d(p,F) \Rightarrow \frac{|x+y|}{\sqrt{2}}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{2}=(x-2)^2+(y-2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{2}=x^2+4-4x+y^2+4-4y \Rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2xy=\cancel{x^2}+4-4x+\cancel{y^2}+4-4y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2xy+4x+4y-8=0 \Rightarrow \boxed{xy+2x+2y-4=0}$$

(13) En $\mathbb{R}^2$ consideramos las rectas afines de ecuaciones $x+y=1$ y $x-y=1$. ¿Es una cónica el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que equidistan de ambas rectas? En caso afirmativo, escribir su ecuación reducida y decir de qué tipo es.

Recordemos que la distancia de un punto a una recta viene determinado por:

$$d(p,S)=d(p,\pi_{S^\perp}(p))$$

Tenemos que:

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=1\}$$

$$\vec{S}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\}=L(\{(1,-1)\})$$

$$\vec{S^\perp}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \langle(x,y),(1,-1)\rangle=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y=0\}$$

Denotamos $(a,b)=\pi_{S^\perp}(x,y)$. Tenemos que:

- $(a,b)\in S \Rightarrow a+b=1$
- $\overrightarrow{(x,y)(a,b)}\in \vec{S^\perp} \Rightarrow (a-x)-(b-y)=0 \Rightarrow a-x+y-b=0$

$$\left.\begin{cases} a+b=1 \\ a-x+y-b=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=1-\dfrac{1-x+y}{2} \\ b=\dfrac{1-x+y}{2} \end{cases}$$

Luego:

$$d\left((x,y),\, \pi_{S^\perp}(x,y)\right) = \sqrt{\left(x+1-\frac{1-x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x+y}{2}+y\right)^2}$$

Análogamente, tenemos que:

$$S' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y=1\right\}$$

$$\vec{S'} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y=0\right\} = L\left(\left\{(1,1)\right\}\right)$$

$$\vec{S'^{\perp}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x,y),(1,1)\rangle = 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\right\}$$

Denotamos $(a',b') = \pi_{S'^\perp}(x,y)$. Tenemos que:

- $(a',b') \in S' \Rightarrow a'-b'=1$
- $\overrightarrow{(x,y)(a',b')} \in \vec{S'^{\perp}} \Rightarrow (a'-x)+(b'-y)=0$

$$\begin{cases} a'-b'=1 \\ a'-x+b'-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 1+\dfrac{x+y-1}{2} \\ b' = \dfrac{x+y-1}{2} \end{cases}$$

Luego:

$$d\left((x,y),\, \pi_{S'^\perp}(x,y)\right) = \sqrt{\left(x+1+\frac{x+y-1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{x+y-1}{2}\right)^2}$$

Definimos $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d(p,S) = d(p,S')\right\}$. Tenemos que:

$$d(p,S) = d(p,S') \Leftrightarrow \cancel{\sqrt{}}\left(x+1-\frac{1-x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x+y}{2}+y\right)^2 = \cancel{\sqrt{}}\left(x+1+\frac{x+y-1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{x+y-1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{3x+y+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+3y-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3x-y+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x+3y}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{9x^2} + 3xy + \cancel{3x} + 3xy + \cancel{y^2} + y + \cancel{3x} + y + \cancel{1} + \cancel{x^2} + 3xy - \cancel{x} + 3xy + \cancel{9y^2} - 3y - \cancel{x} - 3y + \cancel{1} =$$

$$= \cancel{9x^2} - 3xy + \cancel{3x} - 3xy + \cancel{y^2} - y + \cancel{3x} - y + \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{x} + 3y - \cancel{x} + \cancel{x^2} - 3xy + 3y - 3xy + \cancel{9y^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 3xy - y = 0$$

Luego:

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3xy - y = 0\}$$

(14) Clasificar las siguientes cuádricas:

a) $2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0.$

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in N_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 3$ y que $r_H = rg(C_0) = 2$, luego, $R_H = r_H + 1 = 3$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 2 & 0 \\ 2 & -2-t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = -t^3 + 8t = t(-t^2+8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=0,\ t=-\sqrt{8},\ t=\sqrt{8} \text{ son los valores propios de } C_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=1,\ s=1 \Rightarrow s_H = |t-s| = 0$$

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2-t & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} = t^4 - t^3 - 18t^2 + 4t$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y una negativa. Por tanto, $S_H = 1$, luego, $S_H = s_H + 1 = 0$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

esto es, H es un cilindro hiperbólico.

b) $xy - 2 = 0$.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in N_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 4$ y que $r_H = rg(C_0) = 2$, luego, $R_H = r_H + 2 = 4$, por lo que estamos en el caso (III).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} -t & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = -t^3 + \frac{1}{4}t = t\left(-t^2 + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = 0,\ t = -\frac{1}{2},\ t = \frac{1}{2}$ son los valores propios de $C_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = 1,\ s = 1 \Rightarrow s_H = |t - s| = 0$$

Tenemos que $s_H = 0 = \underbrace{S_H}_{\text{Esto es así porque estamos en el caso (III)}}$. En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

esto es, H es un paraboloide hiperbólico.

c) $2xy + 2xz + 2yz - 4 = 0$.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in N_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 4$ y que $r_H = rg(C_0) = 3$, luego, $R_H = r_H + 1 = 4$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t + 2$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene una raíz positiva y dos negativas, luego, $s_H = 1$.

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det\begin{pmatrix} -4-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -t & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -t \end{pmatrix} = t^4 + 4t^3 - 3t^2 - 14t - 8$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene una raíz positiva y tres negativas, luego, $S_H = 2$. Luego, $S_H = s_H + 1 = 2$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

esto es, H es un hiperboloide de dos hojas.

d) $2x^2 + 3y^2 + 2xy - 2yz + 2z + 2 = 0$.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in N_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 4$ y que $r_H = rg(C_0) = 3$, luego, $R_H = r_H + 1 =$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 1 & 3-t & -1 \\ 0 & -1 & -t \end{pmatrix} = -t^3 + 5t^2 - 4t - 2$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene dos raíces positivas y una negativa, luego, $s_H = 1$.

Análogamente, el polinomio característica de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3-t & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -t \end{pmatrix} = t^4 - 7t^3 + 13t^2 - t - 9$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene tres raíces positivas y una negativa, luego, $S_H = 2$. Por tanto, $S_H = s_H + 1 = 2$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

esto es, H es un hiperboloide de dos hojas.

e) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2z + 1 = 0$.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 4$ y que $r_H = rg(C_0) = 2$, luego, $R_H = r_H + 2 = 4$, por lo que estamos en el caso (III).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t^2 - 2t$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene dos raíces positivas y ninguna negativa, luego, $r_H = 2$. Tenemos que $s_H = 2 = \underbrace{S_H}_{\substack{\text{Esto es así} \\ \text{porque estamos} \\ \text{en el caso (III)}}}$

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

esto es, H es un paraboloide elíptico.

f) $3y^2 + 2xy - 2yz + 2z + 2 = 0$.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 4$ y que $r_H = rg(C_0) = 2$, luego, $R_H = r_H + 2 = 4$, por lo que estamos en el caso (III).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 1 & 3-t & -1 \\ 0 & -1 & -t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t^2 + 2t$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene una raíz positiva y una negativa, luego, $s_H = 0$. Tenemos que $s_H = 0 = \underbrace{S_H}_{\text{Esto es así porque estamos en el caso (III)}}$

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

esto es, H es un paraboloide hiperbólico.

g) $x^2 + z^2 + 2xz - 4 = 0$.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 2$ y que $r_H = rg(C_0) = 1$, luego, $R_H = r_H + 1 = 2$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 2t^2$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene una raíz positiva y ninguna negativa, luego, $= 1$.

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det\begin{pmatrix} -4-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = t^4 + 2t^3 - 8t^2$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene una raíz positiva y una negativa, luego, $S_H = 0$. Por tanto, $S_H = s_H - 1 = 0$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

esto es, H es un par de planos paralelos.

h) $xy + xz + yz - 2x - y + 3z + 13 = 0$.

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 13 & -1 & -1/2 & 3/2 \\ \hline -1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \in M_{R_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 4$ y que $r_H = rg(C_0) = 3$, luego, $R_H = r_H + 1 = 4$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -t & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -t \end{pmatrix} = -t^3 + \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene una raíz positiva y dos negativas, luego, $s_H = 1$.

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} 13-t & -1 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & -t & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -t & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 & -t \end{pmatrix} = t^4 - 13t^3 - \frac{17}{4}t^2 + \frac{45}{4}t + 5$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y dos negativas, luego, $S_H = 0$. Por tanto, $S_H = s_H - 1 = 0$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

esto es, H es un hiperboloide de una hoja.

(15) Clasifica afínmente la cuádrica H del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que en el sistema de referencia usual R_0 viene definida por la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 4x + 2 = 0.$$

Encuentra un sistema de referencia de $\mathbb{R}^3$ en el que H adopte su forma canónica.

En el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_{\mathcal{R}_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 3$ y que $r_H = rg(C_0) = 1$, luego, $R_H = r_H + 2 = 3$, por lo que estamos en el caso (III).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t^2 = t^2(-t+3) \Rightarrow$$

$\Rightarrow t=0,\ t=3$ son los valores propios de $C_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t=1,\ s=0 \Rightarrow s_H = |t-s| = 1$$

Tenemos que $s_H = 1 = \underbrace{S_H}_{\text{Esto es así porque estamos en el caso (III)}}$

En conclusión, la forma reducida de $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-4x+2=0\}$ es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

esto es, H es un cilindro parabólico.

Calculemos los subespacios propios de C_0:

$$V_0 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = L\left(\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}\right)$$

$$V_3 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = L\left(\{(1,1,1)\}\right)$$

Aplicamos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a los vectores de V_0:

$$u_1 = (-1,1,0)$$

$$u_2 = (-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

Luego, $B = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{\sqrt{6}}{3}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right\}$ es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3,\langle,\rangle)$ y la forma de Sylvester de C_0, la cual es $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, se alcanza en la base ortogonal $B_1 = \left\{\frac{1}{3}(1,1,1),(-1,1,0),(-1,-1,2)\right\}$ de $(\mathbb{R}^3,\langle,\rangle)$ (notemos la irrelevancia proporcional de los $v\in V_0$).

Definamos el sistema de referencia $\mathcal{R}_1 = \{(0,0,0);B_1\}$. Sabemos que $\hat{C}_1 = M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)^t\cdot\hat{C}_0\cdot M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)\in M_{\mathcal{R}_1}(H)$, luego:

$$\hat{C}_1 = M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)^t\cdot\hat{C}_0\cdot M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&1/3&1/3&1/3\\0&-1&1&0\\0&-1&-1&2\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc}2&-2&0&0\\\hline -2&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&1/3&-1&-1\\0&1/3&1&-1\\0&1/3&0&2\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{C}_1 = \left(\begin{array}{c|ccc}2&-2/3&2&2\\\hline -2/3&1&0&0\\2&0&0&0\\2&0&0&0\end{array}\right)\in M_{\mathcal{R}_1}(H)$$

Luego, H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por la ecuación:

$$x_1^2 - \frac{4}{3}x_1 + 4y_1 + 4z_1 + 2 = 0$$

Esto es:

$$\left(x_1-\frac{2}{3}\right)^2+4y_1+4z_1+\frac{4}{3}=0$$

$$\left(x_1-\frac{2}{3}\right)^2+2\left(2y_1+2z_1+\frac{2}{3}\right)=0$$

Luego, las ecuaciones analíticas:

$$x_2=x_1-\frac{2}{3}\,,\ y_2=y_1\,,\ z_2=2y_1+2z_1+\frac{2}{3}$$

forman un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ en el que la ecuación analítica de H es $x_2^2+2z_2=0$.

(16) Clasifica afínmente la cuádrica H del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene definida por la ecuación:

$$x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+x+y+z+1=0.$$

Usando el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0=\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 1/2 & 1/2 & 1/2\\ \hline 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1\end{array}\right)\in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1\end{pmatrix}\in N_{\mathcal{R}_0}(H)$$

Tenemos que $R_H=rg(\hat{C}_0)=4$ y que $r_H=rg(C_0)=3$, luego, $R_H=r_H+1=4$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1-t & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t^2 - \frac{9}{4}t + 2$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene tres raíces positivas y ninguna negativa, luego, $s_H = 3$.

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1-t & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1-t & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1-t \end{pmatrix} = t^4 - 4t^3 + \frac{72}{16}t^2 - 2t + \frac{5}{16}$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene cuatro raíces positivas y ninguna negativa, luego, $S_H = 4$. Por tanto, $S_H = s_H + 1 = 4$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

esto es, H es el vacío.

(17) Para la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0$$

determinar un isomorfismo afín de $\mathbb{R}^3$ que nos lleve a su ecuación reducida.

En el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 9 & -3 & -3 & -2 \\ \hline -3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_{R_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 4$ y que $r_H = rg(C_0) = 3$, luego, $R_H = r_H + 1 = 4$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t + 2 = -(-2+t)(t+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 2,\ \underset{(\text{doble})}{t = -1} \text{ son los valores propios de } C_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 1,\ s = 2 \Rightarrow s_H = |t - s| = 1$$

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} 9-t & -3 & -3 & -2 \\ -3 & -t & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -t & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -t \end{pmatrix} = t^4 - 9t^3 - 25t^2 - 17t - 2$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene una raíz positiva y cuatro negativas, luego, $S_H = 3$. Por tanto, $S_H = s_H + 2 = 3$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

esto es, H es un hiperboloide de dos hojas.

Para encontrar un sistema de referencia en el que H adopta su forma canónica, primero debemos cambiar $\hat{C}_0$ y C_0 por sus opuestas, consiguiendo así que las formas de Sylvester de estas matrices sea la forma canónica indicada anteriormente. Por tanto:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} -9 & 3 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora C_0 tiene como valores propios 1 y -2. Calculemos los subespacios propios asociados:

$$V_{-2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = L(\{(1,1,1)\})$$

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = L(\{(1,-1,0), (1,0,-1)\})$$

Aplicamos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a los vectores de V_1:

$$u_1 = (1,-1,0)$$

$$u_2 = (1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

Luego, $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \right\}$ es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$ y la forma de Sylvester de C_0, la cual es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, se alcanza en la base ortogonal $B_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,1) \right\}$ de $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$.

Definamos el sistema de referencia $\mathcal{R}_1 = \{(0,0,0); B_1\}$. Sabemos que $\hat{C}_1 = M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}_1}(H)$, luego:

$$\hat{C}_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} -9 & 3 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \hat{C}_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} -9 & 0 & 2/\sqrt{6} & 8/\sqrt{6} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1 & 0 \\ 8/\sqrt{6} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}_1}(H)$$

Luego, H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por la ecuación:

$$x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 + \frac{4}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{16}{\sqrt{6}} z_1 - 9 = 0$$

Esto es:

$$x_1^2 + \left(y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(z_1 - \frac{8}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1 = 0$$

Luego, las ecuaciones analíticas:

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad z_2 = z_1 - \frac{8}{\sqrt{6}}$$

definen un cambio de $\mathcal{R}_1$ a un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$. Si $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2, z_2)$ son las coordenadas en $\mathcal{R}_2$ de un punto $p \in \mathbb{R}^3$, $x_2^2 + y_2^2 - z_2^2 + 1 = 0$ es la ecuación analítica de H en $\mathcal{R}_2$ y, por tanto:

$$\hat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}_2}(H)$$

Si se quiere una determinación más explícita de $\mathcal{R}_2$, obsérvese que, por definición:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1 & 0 \\ -8/\sqrt{6} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

de donde:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1 & 0 \\ 8/\sqrt{6} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1 & 0 \\ 8/\sqrt{6} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 2 & 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{array}\right)$$

Para toda afinidad $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sabemos que:

$$M(f^{-1}; \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}; \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}(f(H))$$

Elegimos la única f tal que $M(f^{-1}; \mathcal{R}_0) = M(f; \mathcal{R}_0)^{-1} = M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)$, esto es:

$$M(f; \mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} \Longrightarrow \boxed{M(f; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ -8/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{array}\right)}$$

(18) Encontrar la ecuación reducida afín y decir de qué tipo es la cuádrica siguiente en función del parámetro real α:

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 4x - 2y + \alpha = 0.$$

Pendiente.

(19) Sean F_1 y F_2 dos puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Consideramos el lugar geométrico definido por $E = \{p \in \mathbb{R}^3 : d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2a\}$, siendo $2a > d(F_1, F_2)$. Estudiar si E es o no una cuádrica en $\mathbb{R}^3$ y, en caso afirmativo, decidir de qué tipo es.

Pendiente.

(20) En $\mathbb{R}^3$ consideramos el punto $F = (0,0,1)$ y el plano afín S de ecuación $x - z = 0$. Definimos el conjunto:

$$C = \{p \in \mathbb{R}^3 : d(p, F) = d(p, S)\}.$$

Demostrar que C es una cuádrica y clasificarla.

Sabemos que la distancia de un punto a un plano viene dada por:

$$d(p, S) = d(p, \pi_{S^\perp}(p))$$

Por tanto, tenemos que:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$$

$$\vec{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\} = L(\{(1,0,1), (0,1,0)\})$$

$$\vec{S}^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} \langle (x,y,z), (1,0,1) \rangle = 0 \\ \langle (x,y,z), (0,1,0) \rangle = 0 \end{matrix}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x + z = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$$

Denotemos $(a,b,c) = \pi_{S^\perp}(x,y,z)$. Tenemos que:

- $(a,b,c) \in S \Rightarrow a-c=0$
- $\overrightarrow{(x,y,z)(a,b,c)} \in \vec{S}^\perp \Rightarrow \begin{cases} b=y \\ a-x+c-z=0 \end{cases}$

$$\left.\begin{cases} a-c=0 \\ b=y \\ a-x+c-z=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} a=c=\frac{x+z}{2} \\ b=y \\ c=\frac{x+z}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_{S^\perp}(x,y,z) = \left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2}\right)$$

Por tanto:

$$d(p,F) = \sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}$$

$$d(p,S) = d\left((x,y,z), \pi_{S^\perp}(x,y,z)\right) = \sqrt{\left(\frac{-x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-z}{2}\right)^2}$$

Luego:

$$d(p,F) = d(p,S) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{-x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-z}{2}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2 = \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+1-2z = \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}xz+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}xz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+1-2z = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}z^2-xz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2+xz-2z+1=0$$

$$\boxed{C = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2+xz-2z+1=0\right\}}$$

En el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \in M_{R_0}(C)$$

$\underbrace{C \text{ es una cuádrica}}$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \in N_{R_0}(C)$$

Tenemos que $R_c = rg(\hat{C}_0) = 4$ y que $r_c = rg(C_0) = 2$, luego, $R_c = r_c + 2 = 4$, por lo que estamos en el caso (III).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 1/2 - t & 0 & 1/2 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 - t \end{pmatrix} = -t^3 + 2t^2 - t$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene dos raíces positivas y ninguna negativa, luego, $s_c = 2$. Por tanto, $s_c = 2 \underbrace{=}_{\substack{\text{Esto es así} \\ \text{porque estamos} \\ \text{en el caso (III)}}} S_c$

En conclusión, la forma reducida de C es:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

esto es, $\underbrace{C \text{ es un paraboloide elíptico.}}$

(21) Encontrar la ecuación reducida de la hipercuádrica en $\mathbb{R}^4$ de ecuación:

$$2x^2 - y^2 + z^2 - w^2 + 2xz - 2yz + 2yw + 2x - 2y + 2w + 1 = 0.$$

En el sistema de referencia usual tenemos que:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H)$$

Tenemos que $R_H = rg(\hat{C}_0) = 5$ y que $r_H = rg(C_0) = 4$, luego, $R_H = r_H + 1 = 5$, por lo que estamos en el caso (II).

El polinomio característico de C_0 viene dado por:

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1-t & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1-t \end{pmatrix} = t^4 - t^3 - 6t^2 + 3t + 2$$

La regla de Descartes nos dice que $p(t)$ tiene dos raíces positivas y dos negativas, luego, $s_H = 0$.

Análogamente, el polinomio característico de $\hat{C}_0$ viene dado por:

$$\hat{p}(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-t & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1-t & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1-t \end{pmatrix} = -t^5 + 2t^4 + 8t^3 - 14t^2 + t + 3$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y tres negativas, luego, $S_H = 1$. Por tanto, $S_H = s_H + 1 = 1$.

En conclusión, la forma reducida de H es:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y su ecuación reducida es:

$$\boxed{x^2+y^2-z^2-w^2+1=0}$$

(22) Sea S un subespacio afín de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ y C una hipercuádrica. Demostrar que se da una de las siguientes posibilidades:

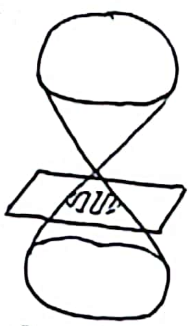
a) $S \cap C = \emptyset$.

b) $S \subseteq C$.

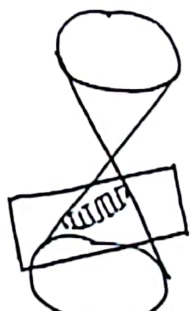
c) $S \cap C$ es una hipercuádrica en S (identificando S con $\mathbb{R}^k$).

Pendiente.

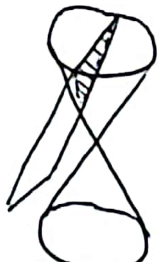
(23) Clasificar las cónicas que se obtienen al cortar el cono $x^2+y^2=z^2$ con un plano afín.



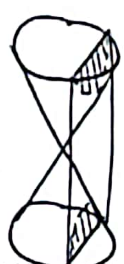
Circunferencia



Elipse



Parábola



Hipérbola