Geometría III

Relación de Ejercicios 4

(1) Sea A un espacio afín. Denotemos por $\mathbb{R}$ al conjunto formado por las rectas afines de A. Dadas dos rectas L_1 y L_2 en $\mathbb{R}$, decimos que $L_1 \sim L_2$ si L_1 es paralela a L_2. Demostrar que:

a) La relación $\sim$ es de equivalencia en $\mathbb{R}$.

- Reflexiva: $L_1 \sim L_1$ (Trivial)
- Simétrica: $L_1 \sim L_2 \Rightarrow L_2 \sim L_1$

  Los espacios vectoriales tienen la misma dimensión
- Transitiva: $L_1 \sim L_2$ y $L_2 \sim L_3 \Rightarrow L_1 \sim L_3$

$\Rightarrow$ $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$

b) Existe una biyección $f: \mathbb{R}/\sim \longrightarrow P(\vec{A})$.

$\mathbb{R}/\sim$ es un espacio cociente donde las clases de equivalencia son rectas paralelas. Para que dos rectas sean paralelas, sus variedades de dirección deben ser proporcionales, lo que equivale a que los vectores sean proporcionales, que es, precisamente, la definición de $P(\vec{A})$.

(2) Mostrar un espacio proyectivo en el que existan dos rectas proyectivas que no se corten.

Sean $\mathbb{R}$ y S dos rectas proyectivas. Sabemos que $\mathbb{R} \cap S = \emptyset \Leftrightarrow \hat{\mathbb{R}} \cap \hat{S} = \{\vec{0}\}$. Nos situamos en $\underbrace{\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)}$ y construimos un sistema de ecuaciones implícitas homogéneo que sea compatible determinado. Por ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 \quad + 2x_2 \quad = 0 \\ \quad x_1 \quad + 2x_3 = 0 \\ x_0 - x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Tiene solución única y es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0)$

Ahora, asignamos dos ecuaciones implícitas a R y dos a S:

$$R = \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad S = \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_0 - x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\hat{R} = L(\{(0,1,0,-1),(2,-1,-1,0)\}) \qquad \hat{S} = L(\{(3,2,0,-1),(1,0,1,0)\})$$

R es la recta proyectiva que pasa por $(0:1:0:-1)$ y $(2:-1:-1:0)$

S es la recta proyectiva que pasa por $(3:2:0:-1)$ y $(1:0:1:0)$

Sabiendo que lo expresamos en coordenadas homogéneas y en la base canónica, tenemos que $\hat{R} \cap \hat{S} = \{\vec{0}\} \Rightarrow R \cap S = \emptyset$.

(3) Demostrar que, en un espacio proyectivo tridimensional, dos planos proyectivos distintos se cortan en una recta proyectiva.

Supongamos que P y S son dos planos proyectivos. Sabemos que la dimensión de un plano proyectivo es 2, luego, distinguimos los siguientes casos:

- Si $\dim(S \cap P) = 3 \Rightarrow$ No tendría sentido.
- Si $\dim(S \cap P) = 2 \Rightarrow S \cap P$ es un plano proyectivo $\Rightarrow S = P$!! Contradicción.
- Si $\dim(S \cap P) = 1 \Rightarrow$ S y P se cortan en una recta proyectiva.
- Si $\dim(S \cap P) = 0 \Rightarrow$ S y P no se cortan !! Contradicción

④ Sean $\{p_1, \ldots, p_m\}$ puntos proyectivos en $P(V)$, donde $p_i = [v_i]$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Recordemos que los puntos son proyectivamente independientes si los vectores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son linealmente independientes en V.

a) Demostrar que esta definición no depende de representantes.

Sean $\{v_1, \ldots, v_m\}$ y $\{v_1', \ldots, v_m'\}$ dos conjuntos de vectores linealmente independientes y supongamos que $v_i = \lambda v_i'$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Por definición, $[v_i] = [v_i']$, $\forall i = 1, \ldots, m$, y, por hipótesis del enunciado, $p_i = [v_i] = [v_i'] = p_i'$, $\forall i = 1, \ldots, m$, luego, efectivamente, la definición no depende de representantes.

b) Justificar que si $\{p_1, \ldots, p_m\}$ son proyectivamente independientes, entonces existe un único subespacio proyectivo E con $\dim(E) = m-1$ y tal que $\{p_1, \ldots, p_m\} \subseteq E$.

Si $\{p_1, \ldots, p_m\}$ son proyectivamente independientes, entonces, por hipótesis, existe un conjunto de vectores linealmente independientes en V, $\{v_1, \ldots, v_m\}$, luego, denotemos $\hat{E} = L(\{v_1, \ldots, v_m\}) \subseteq V$. Por definición, sabemos que existe la proyección E del subespacio vectorial $\hat{E}$, del cual sabemos que $\dim(E) = \dim(\hat{E}) - 1 = m-1$.

⑤ Sea $(A_0, \vec{A_0}, \rightarrow)$ un espacio afín n-dimensional y sea $E = \mathbb{R} \times \vec{A_0}$ espacio vectorial producto. Fijemos $p_0 \in A_0$ y consideremos la inyección natural $i: A_0 \longrightarrow E$, $i(p) = (1, \overrightarrow{p_0p})$. Llamemos A al hiperplano $i(A_0)$ de E como espacio afín, obviamente contenido en E^*, y consideremos el embebimiento canónico $e: A \longrightarrow P(E)$, $e = \pi_{|A}$, donde $\pi: E^* \longrightarrow P(E)$ es la proyección natural. Demostrar que:

a) $A_\infty = \pi(\{0\} \times \vec{A_0}^*)$.

b) Para todo $S = q + \vec{S} \subseteq A_0$ subespacio afín:

$$X_S := X_{i(S)} = \pi((1, \overrightarrow{p_0q})) \vee \pi(\{0\} \times \vec{S}^*) = \pi\left(\left(L(\{(1, \overrightarrow{p_0q})\}) + \{0\} \times \vec{S}\right)^*\right)$$

$$S_\infty := i(S)_\infty = \pi(\{0\} \times \vec{S}^*).$$

Pendiente.

⑥ En un espacio proyectivo se consideran una recta proyectiva L y un hiperplano proyectivo H. Demostrar que, o bien $L \subseteq H$, o bien $L \cap H$ es un único punto.

Consideremos el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n = P(\mathbb{R}^{n+1})$. Sabemos que $\dim(L) = 1$ y que $\dim(H) = n-1$. Tenemos las siguientes posibilidades:

- $\dim(L \cap H) > 1 \Rightarrow$ No tendría sentido.
- $\dim(L \cap H) = 1 \Rightarrow L \cap H = L \Rightarrow L \subseteq H$.
- $\dim(L \cap H) = 0 \Rightarrow L \cap H = \{p\}$ (punto proyectivo).

⑦ Calcular unas ecuaciones implícitas para la recta proyectiva en $\mathbb{P}^3$ que pasa por los puntos $p = [0,1,0,1]$ y $q = [1,1,1,0]$.

Sea $R = p \vee q$ la recta proyectiva que pasa por p y q. Tenemos que:

$$\hat{R} = \widehat{p \vee q} = \hat{p} + \hat{q} = L(\{(0,1,0,1)\}) + L(\{(1,1,1,0)\}) = L(\{(0,1,0,1),(1,1,1,0)\})$$

Calculemos las ecuaciones implícitas de R (sabemos que, en $\mathbb{R}$, R se corresponde con un plano $\Rightarrow \dim = 2$):

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \beta \\ x_2 = \alpha + \beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{array}\right.$$

⑧ Si $M_2(\mathbb{R})$ denota al espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden 2, calcula las ecuaciones implícitas en $P(M_2(\mathbb{R}))$ del plano proyectivo $p \vee R$, donde $p = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \in P(M_2(\mathbb{R}))$ y R es la recta proyectiva en $P(M_2(\mathbb{R}))$ con ecuaciones implícitas $\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array}\right\}$ en la base canónica $B_0 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Tenemos que $R = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$, luego:

$$\widehat{R \vee P} = \hat{R} + \hat{P} = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right) + L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Pasando a ecuaciones implícitas:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha + \gamma \\ x_2 = \alpha - \gamma \\ x_3 = \beta \\ x_4 = -2\alpha + \gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{ x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \right.$$

Ecuaciones implícitas del plano proyectivo $R \vee P$

(9) Sea S el subespacio proyectivo de $\mathbb{P}^3$ con ecuaciones implícitas:

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_0 - x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right. .$$

Sea R_a la recta proyectiva en $\mathbb{P}^3$ que pasa por los puntos $p = (1:-1:1:-1)$ y $q = (0:0:a:1)$, donde $a \in \mathbb{R}$. Calcular $S \cap R_a$ y $S \vee R_a$.

Tenemos que:

$\dim(\mathbb{P}^3)$ - Número de ecuaciones de $S = 3 - 2 = 1 \Rightarrow S$ es una recta proyectiva

$$S = \left\{\begin{array}{l} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_0 - x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\hat{S} = L(\{(1,-1,0,0), (0,0,1,-1)\})$$

$$R_a = p \vee q = [1,-1,1,-1] \vee [0,0,a,1]$$

$$\hat{R}_a = \widehat{p \vee q} = \hat{p} + \hat{q} = L(\{(1,-1,1,-1)\}) + L(\{(0,0,a,1)\}) = L(\{(1,-1,1,-1), (0,0,a,1)\})$$

Calculemos las ecuaciones implícitas de $S \cap R_a$:

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = \alpha \\ x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha + a\beta \\ x_3 = -\alpha + \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 + x_1 = 0 \\ (1+a)x_0 - x_2 + ax_3 = 0 \end{array}\right.$$

Calculemos la intersección $S \cap R_a$:

$$S \cap R_a = \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_0 - x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + x_1 = 0 \\ (1+a)x_0 - x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+a & 0 & -1 & a & 0 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+a & 0 & -1 & a & 0 \end{array}\right) \begin{cases} \text{Si } a = -1 \Rightarrow rg(A|b) = 2 \\ \text{Si } a \neq -1 \Rightarrow rg(A|b) = 3 \end{cases}$$

- Si $a = -1$:

$$S \cap R_a = \begin{Bmatrix} x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \widehat{S \cap R_a} = L\left(\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}\right)$$

- Si $a \neq -1$:

$$S \cap R_a = \begin{Bmatrix} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + x_1 = 0 \\ (1+a)x_0 - x_2 + ax_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_0 = \lambda \\ x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -\lambda \end{Bmatrix} \Rightarrow \widehat{S \cap R_a} = L\left(\{(1,-1,1,-1)\}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \cap R_a = (1:-1:1:-1)$$

En conclusión:

$$\boxed{S \cap R_a = \begin{cases} T \equiv \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} & \text{si } a = -1 \text{ (Recta proyectiva)} \\ (1:-1:1:-1) & \text{si } a \neq -1 \text{ (Punto proyectivo)} \end{cases}}$$

Calculemos ahora $S \vee \Pi_a$:

$$\widehat{S \vee \Pi_a} = \hat{S} + \hat{\Pi}_a = L(\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}) + L(\{(1,-1,1,-1),(0,0,a,1)\}) =$$

$$= L(\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1),(0,0,a,1)\})$$

•) Si $a=-1$:

$$\widehat{S \vee \Pi_a} = L(\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\})$$

$$\widehat{S \vee \Pi_a} \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ x_1 = -\alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\beta \end{cases} \Rightarrow \widehat{S \vee \Pi_a} \equiv \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

•) Si $a \neq -1$:

$$\widehat{S \vee \Pi_a} = L(\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1),(0,0,a,1)\})$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & -1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & a \\ x_3 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & a \\ x_3 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & a \\ x_3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(1+a)x_0 - (1+a)x_1 = 0$$

En conclusión:

$$S \vee \Pi_a = \begin{cases} L \equiv \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} & \text{si } a=-1 \text{ (Recta proyectiva)} \\ \\ P \equiv -(1+a)x_0 - (1+a)x_1 = 0 & \text{(Plano proyectivo)} \end{cases}$$

(10) Considera el plano afín T de $\mathbb{R}^3$ determinado por los puntos $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$x_1 - 2x_2 - 1 = x_2 - 2x_3 + 3 = 0.$$

Determina las ecuaciones implícitas en coordenadas homogéneas canónicas de la proyectivización canónica X_T de T en $\mathbb{P}^3$. Calcula también las ecuaciones de su variedad del infinito canónica T_∞.

Sabemos que T viene dada como $T = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \end{array} \right\}$ en ecuaciones implícitas, por lo que la proyectivización canónica de T viene dada por:

$$X_T = \left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 : \begin{array}{l} -x_0 + x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_0 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

y su variedad del infinito canónica es:

$$T_\infty = \left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 : \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

(11) Determinar las ecuaciones implícitas en la base canónica $B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ de la recta proyectiva R del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ que pasa por los puntos $p = (1 : 0 : -1)$, $q = (0 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^2$.

Considerando la base usual B_0 de $\mathbb{R}^3$, sabemos que la recta proyectiva R viene dada como $R = V(p \cup q)$. Pasando al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, tenemos que:

$$p = (1 : 0 : -1) \Rightarrow \hat{p} = L(\{(1,0,-1)\}) \quad \text{(Recta vectorial)}$$

$$q = (0 : 1 : 1) \Rightarrow \hat{q} = L(\{(0,1,1)\}) \quad \text{(Recta vectorial)}$$

Por tanto, la ecuación implícita de $R = V(p \cup q)$ viene dada en la base usual de $\mathbb{R}^3$ por $V(\widehat{p \cup q}) = \hat{p} + \hat{q}$, luego:

$$\hat{R} = \hat{p} + \hat{q} = L(\{(1,0,-1)\}) + L(\{(0,1,1)\}) = L(\{(1,0,-1),(0,1,1)\})$$

Pasando a ecuaciones implícitas:

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = \alpha \\ x_1 = \beta \\ x_2 = -\alpha + \beta \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = -x_0 + x_1 \Rightarrow \boxed{-x_0 + x_1 - x_2 = 0}$$

Ecuación implícita de R en la base usual de $\mathbb{R}^3$

(12) Dada la proyectividad $f: P(S_2(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ inducida por el isomorfismo lineal

$$\hat{f}: S_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \hat{f}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b \\ a \end{pmatrix},$$

determina las ecuaciones matriciales de f en las bases canónicas B_0 y B_0' de $S_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente dadas por:

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_0' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Calcula también la matriz $M(f; B, B')$ para las bases B y B' de $S_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente dadas por:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}.$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{f}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \hat{f}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{f}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{M(\hat{f}; B_0, B_0') = M(f; B_0, B_0') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Calculemos ahora $M(f; B, B')$. Sabemos que:

$$M(f; B, B') = M(Id_{\mathbb{P}^2}; B'_0, B') \cdot M(f; B_0, B'_0) \cdot M(Id_{\mathbb{P}^2}; B, B_0)$$

$$M(f; B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(f; B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(13) Describir todas las proyectividades $f: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tales que:

$$f(1:1:0) = (0:1:1), \quad f(0:1:1) = (1:0:1), \quad f(1:0:1) = (1:1:0).$$

Tenemos que:

$f: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

$f(1:1:0) = (0:1:1)$

$f(0:1:1) = (1:0:1)$

$f(1:0:1) = (1:1:0)$

Pasando al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ $\Longrightarrow$

$\hat{f}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\hat{f}(1,1,0) = a(0,1,1)$

$\hat{f}(0,1,1) = b(1,0,1) \qquad a,b,c \in \mathbb{R}^*$

$\hat{f}(1,0,1) = c(1,1,0)$

Con respecto a las bases $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ y $B_0 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, tenemos que:

$$M(\hat{f}; B, B_0) = M(f; B, B_0) = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$M(f; B_0, B_0) = M(f; B, B_0)\, M(Id_{\mathbb{P}^2}; B_0, B)$$

$$M(f; B_0) = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$M(f; B_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b+c & b-c & b+c \\ a+c & a-c & -a+c \\ a-b & a+b & -a+b \end{pmatrix}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}^*$$

En conclusión:

$$\boxed{f(x,y,z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b+c & b-c & b+c \\ a+c & a-c & -a+c \\ a-b & a+b & -a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}^*}$$

14 Sean E_1 y E_2 dos subespacios proyectivos de $P(V)$. Demostrar que existe una homografía $f: P(V) \longrightarrow P(V)$ tal que $f(E_1) = E_2$ si, y solo si, $\dim(E_1) = \dim(E_2)$.

Consideremos los subespacios proyectivos E_1 y E_2 y los pasamos al espacio vectorial V:

$$\hat{E}_1 = L(\{p_0, \dots, p_n\}) \Rightarrow \dim(\hat{E}_1) = n+1 \Rightarrow \dim(E_1) = \dim(\hat{E}_1) - 1 = n$$

$$\hat{E}_2 = L(\{p_0', \dots, p_m'\}) \Rightarrow \dim(\hat{E}_2) = m+1 \Rightarrow \dim(E_2) = \dim(\hat{E}_2) - 1 = m$$

Supongamos que $n \leq m$. Por definición, el conjunto de puntos $\{p_0, \dots, p_n\}$ y $\{p_0', \dots, p_m'\}$ son proyectivamente independientes, luego, existe una proyectividad $f: E_1 \longrightarrow E_2$ tal que $f(p_i) = p_i'$, $\forall i = 0, \dots, n$. Para que f sea una homografía, debe darse que $n = m \iff \dim(E_1) = \dim(E_2)$.

(15) Demostrar que toda homografía $f: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tiene al menos un punto fijo.

Pendiente.

(16) Si R, S, R', S' son rectas en un plano proyectivo $P(E)$ con $R \neq S$ y $R' \neq S'$, prueba que existe una homografía $f: P(E) \longrightarrow P(E)$ tal que:

$$f(R) = R' \quad y \quad f(S) = S'.$$

Pendiente.

(17) Considera un triángulo (A,B,C) en un espacio afín $\mathcal{A}$, que está visto como hiperplano de un espacio vectorial E (entendido como espacio afín) con $\vec{0} \notin \mathcal{A}$. Considera una traslación $\Upsilon: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ y llama $A' = \Upsilon(A)$, $B' = \Upsilon(B)$ y $C' = \Upsilon(C)$. Prueba que los triángulos (A,B,C) y (A',B',C') son perspectivamente equivalentes en el sentido de que los triángulos proyectivos $(e(A), e(B), e(C))$ y $(e(A'), e(B'), e(C'))$ son perspectivamente equivalentes en $P(E)$, donde $e: \mathcal{A} \longrightarrow P(E)$ es el embebimiento canónico.

Escribamos $\Upsilon: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $\Upsilon(p) = p + u$, para un vector $u \in \vec{\mathcal{A}}^*$. Si $\pi: E^* \longrightarrow P(E)$ es la proyección natural, tenemos que:

$$e(A) \vee e(A') = \pi\left(L(\{A, A'\})^*\right) = \pi\left(L(\{A, A+u\})^*\right) = \pi\left(L(\{A, u\})^*\right)$$

Análogo para $e(B) \vee e(B')$ y $e(C) \vee e(C')$. Por tanto:

$$\left(e(A) \vee e(A')\right) \cap \left(e(B) \vee e(B')\right) = \pi\left(L(\{A,u\})^* \cap L(\{B,u\})^*\right) \ni \pi(u)$$

Análogo para $\left(e(A) \vee e(A')\right) \cap \left(e(C) \vee e(C')\right)$ y $\left(e(B) \vee e(B')\right) \cap \left(e(C) \vee e(C')\right)$. De aquí que $(e(A), e(B), e(C))$ y $(e(A'), e(B'), e(C'))$ son perspectivamente equivalentes en $P(E)$ desde el punto $O = \pi(u) \in \pi(\vec{\mathcal{A}}^*) = \mathcal{A}_\infty$.

(18) Sean $f: P(E) \longrightarrow P(E)$ una homografía sin puntos fijos, (A,B,C) un triángulo y $O \in P(E) \setminus \{A,B,C\}$ un punto tales que:

$$f(O \vee A) = O \vee A, \quad f(O \vee B) = O \vee B, \quad f(O \vee C) = O \vee C.$$

Prueba que los triángulos (A,B,C) y $(f(A), f(B), f(C))$ son perspectivamente equivalentes desde O.

Sabemos que:

$$\begin{aligned} O \vee A &= f(O \vee A) = f(O) \vee f(A) \\ O \vee B &= f(O \vee B) = f(O) \vee f(B) \\ O \vee C &= f(O \vee C) = f(O) \vee f(C) \end{aligned}$$

Por tanto, como $O \notin \{A,B,C\}$, deducimos que:

$$\begin{aligned} \{O\} &= (O \vee A) \cap (O \vee B) = (f(O) \vee f(A)) \cap (f(O) \vee f(B)) = \{f(O)\} \\ \{O\} &= (O \vee A) \cap (O \vee C) = (f(O) \vee f(A)) \cap (f(O) \vee f(C)) = \{f(O)\} \\ \{O\} &= (O \vee B) \cap (O \vee C) = (f(O) \vee f(B)) \cap (f(O) \vee f(C)) = \{f(O)\} \end{aligned}$$

Luego:

$O \vee A = O \vee f(A)$ y $O, A, f(A)$ están alineados

$O \vee B = O \vee f(B)$ y $O, B, f(B)$ están alineados

$O \vee C = O \vee f(C)$ y $O, C, f(C)$ están alineados

Esto prueba que los triángulos (A,B,C) y $(f(A), f(B), f(C))$ son perspectivamente equivalentes desde O.