# Geometría III

## Relación de Ejercicios 2

(1) Sea $A$ un espacio afín euclídeo y $p, q \in A$. Recordemos que el punto medio entre $p$ y $q$ se definía como $m_{pq} = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pq}$. Demostrar que $d(p, m_{pq}) = d(q, m_{pq})$.

Tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} d(p, m_{pq}) &= \|\overrightarrow{pm_{pq}}\| = \cancel{p} + \frac{1}{2}\overrightarrow{pq} - \cancel{p} = \frac{1}{2}\overrightarrow{pq} \\ d(q, m_{pq}) &= d(m_{pq}, q) = \|\overrightarrow{m_{pq}q}\| = q - p - \frac{1}{2}\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pq} - \frac{1}{2}\overrightarrow{pq} = \frac{1}{2}\overrightarrow{pq} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d(p, m_{pq}) = d(q, m_{pq})}$$

(2) (Hiperplano afín de puntos equidistantes). Dados tres puntos $p, q, r \in \mathbb{R}^n$, demostrar que se cumple la igualdad:

$$d(p,r)^2 - d(q,r)^2 = 2\langle \overrightarrow{rm_{pq}}, \overrightarrow{qp} \rangle,$$

donde $m_{pq}$ es el punto medio entre $p$ y $q$. Utilizar esta igualdad para probar lo siguiente: si $p \neq q$, entonces el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^n$ que se encuentran a la misma distancia de $p$ y de $q$ coincide con el hiperplano afín $m_{pq} + L(\{\overrightarrow{pq}\})^{\perp}$.

Se trata de la identidad del paralelogramo. Tenemos que:

$$d(p,r)^2 = \|\overrightarrow{pr}\|^2 = \langle \overrightarrow{pr}, \overrightarrow{pr} \rangle = \langle r-p, r-p \rangle = \langle r, r-p \rangle - \langle p, r-p \rangle =$$

$$= \langle r,r \rangle - \langle r,p \rangle - \langle p,r \rangle + \langle p,p \rangle = \langle r,r \rangle - 2\langle p,r \rangle + \langle p,p \rangle.$$

$$d(q,r)^2 = \|\vec{qr}\|^2 = \langle \vec{qr}, \vec{qr} \rangle = \langle r-q, r-q \rangle = \langle r, r-q \rangle - \langle q, r-q \rangle =$$

$$= \langle r,r \rangle - \langle r,q \rangle - \langle q,r \rangle + \langle q,q \rangle = \langle r,r \rangle - 2\langle r,q \rangle + \langle q,q \rangle .$$

Por tanto:

$$d(p,r)^2 - d(q,r)^2 = \cancel{\langle r,r \rangle} - 2\langle p,r \rangle + \langle p,p \rangle - \cancel{\langle r,r \rangle} + 2\langle r,q \rangle - \langle q,q \rangle =$$

$$= 2\langle p,-r \rangle + \langle p,p \rangle + 2\langle r,q \rangle + \langle q,-q \rangle =$$

$$= 2\langle p,-r \rangle + 2\langle q,r \rangle + \langle p,p \rangle = \langle q,-q \rangle =$$

$$= \dots = 2\left\langle p + \frac{1}{2}\vec{pq} - r, p-q \right\rangle = 2\langle \vec{rM_{pq}}, \vec{qp} \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d(p,r)^2 - d(q,r)^2 = 2\langle \vec{rM_{pq}}, \vec{qp} \rangle}$$

La segunda parte del ejercicio queda pendiente.

3 Calcular las proyecciones y las simetrías ortogonales de $\mathbb{R}^2$ con respecto de los ejes coordenados.

Comencemos considerando el eje $X$ (durante todo el ejercicio trabajaremos en el sistema de referencia usual $R_0$ de $\mathbb{R}^2$). Tenemos que:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

$$S^\perp = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

$$\vec{S} = S$$

$$\vec{S^\perp} = S^\perp$$

Denotemos $(a,b) = \pi_{S,S^\perp}(x,y)$. Entonces:

- $(a,b) \in S \Rightarrow b = 0$
- $\overrightarrow{(x,y)(a,b)} \in \vec{S}^\perp \Rightarrow \overline{(a-x, b-y)} \in \vec{S}^\perp \Rightarrow a - x = 0 \Rightarrow a = x$

Por tanto:

$$\left.\begin{matrix} a = x \\ b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\pi_{S^\perp}(x,y) = (x,0)}$$

Calculemos ahora la simetría ortogonal. Tenemos que:

$$\sigma_{S^\perp}(x,y) = \sigma_{S,S^\perp}(x,y) = (x,y) + 2\,\overrightarrow{(x,y)\,\pi_{S^\perp}(x,y)} = 2\pi_{S^\perp}(x,y) - (x,y) =$$
$$= (2x, 0) - (x,y) = (x,-y)$$

$$\boxed{\sigma_{S^\perp}(x,y) = (x,-y)}$$

Análogamente, para el <u>eje Y</u>, obtenemos que:

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$
$$T^\perp = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

$$\boxed{\pi_{T^\perp}(x,y) = (0,y)}$$

$$\boxed{\sigma_{T^\perp}(x,y) = (-x,y)}$$

④ Calcular, según el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la distancia del punto $p = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ a la recta afín $S$ de ecuaciones $x - y - z = 0$ y $x - y + z = a$.

Durante todo el ejercicio trabajaremos en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$. Tenemos que $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x-y-z=0 \\ x-y+z=a \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x-y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{matrix} \right\} =$
$= L(\{(1,1,0)\})$. Calculemos $\overrightarrow{S^{\perp}}$:

$$\overrightarrow{S^{\perp}} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z), (1,1,0) \rangle = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \right\}$$

Denotemos $(a', b, c) = \pi_{S^{\perp}}(x,y,z)$. Entonces:

•) $(a',b,c) \in S \Rightarrow \begin{cases} a'-b-c=0 \\ a'-b+c=a \end{cases}$

•) $\overrightarrow{(x,y,z)(a',b,c)} \in \overrightarrow{S^{\perp}} \Rightarrow (a'-x, b-y, c-z) \in \overrightarrow{S^{\perp}} \Rightarrow a'-x+b-y=0$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} a'-b-c=0 \\ a'-b+c=a \\ a'+b=x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = \frac{a}{4} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ b = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{a}{4} \\ c = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_{S^{\perp}}(x,y,z) = \left( \frac{a}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{a}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{a}{2} \right)$$

Por tanto:

$$d(p,S) = d((1,1,1),S) = d\left((1,1,1), \pi_{S^\perp}(1,1,1)\right) = d\left((1,1,1), \left(\frac{a}{4}+1, -\frac{a}{4}+1, \frac{a}{2}\right)\right) =$$

$$= \left\| \overrightarrow{(1,1,1)\left(\frac{a}{4}+1, -\frac{a}{4}+1, \frac{a}{2}\right)} \right\| = \left\| \left(\frac{a}{4}, -\frac{a}{4}, \frac{a}{2}-1\right) \right\| =$$

$$= \sqrt{\left\langle \left(\frac{a}{4}, -\frac{a}{4}, \frac{a}{2}-1\right), \left(\frac{a}{4}, -\frac{a}{4}, \frac{a}{2}-1\right) \right\rangle} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4} + 1 - a} = \sqrt{\frac{3a^2}{8} - a + 1}$$

$$d(p,S) > 0 \iff \frac{3a^2}{8} - a + 1 > 0 \quad (\text{Esto se cumple } \forall a \in \mathbb{R})$$

En conclusión:

$$\boxed{d(p,S) = \sqrt{\frac{3a^2}{8} - a + 1} \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}}$$

5) En $\mathbb{R}^3$, calcular, según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, la distancia entre la recta afín $S$ de ecuaciones $x+y=0$ y $x-y+z=1$, y la recta afín $S'$ de ecuaciones $x+y=a$ y $x-y+bz=1$.

Comencemos calculando las ecuaciones paramétricas de las rectas $S$ y $S'$. Tenemos que:

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x+y=0 \\ x-y+z=1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \left(\frac{1-\alpha}{2}, -\frac{1-\alpha}{2}, \alpha\right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$P_{\alpha=1} = (0,0,1) \quad ; \quad P_{\alpha=0} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$S = (0,0,1) + L\left(\left\{ \overrightarrow{P_{\alpha=1}P_{\alpha=0}} \right\}\right) = (0,0,1) + L\left(\left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)\right\}\right) = \left(\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, 1-\lambda\right),$$
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$S' = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x+y=a \\ x+y-bz=1 \end{array} \right\}$$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & -b & 1 \end{array}\right) = 2 \iff \left\{ \begin{array}{l} b \neq 0 \text{ y } a \in \mathbb{R} \\ b = 0 \text{ y } a \neq 1 \Rightarrow \text{En este caso el sistema sería incompatible} \end{array} \right.$$

Si no, $S'$ no sería una recta

$$S' = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x+y=a \\ x+y-bz=1 \end{array} \right\} = \left\{ \left( a + \frac{1-a-\alpha b}{2}, -\frac{1-a-\alpha b}{2}, \alpha \right) : \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, b \neq 0 \right\}$$

$$q_{\alpha=0} = \left( a + \frac{1-a}{2}, -\frac{1-a}{2}, 0 \right) ; \quad q_{\alpha=\frac{1}{b}} = \left( a - \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{1}{b} \right)$$

$$S' = \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{1}{b} \right) + L\left( \left\{ \overrightarrow{q_{\alpha=\frac{1}{b}} q_{\alpha=0}} \right\} \right) = \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{1}{b} \right) + L\left( \left\{ \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{b} \right) \right\} \right) =$$

$$= \left( \frac{a+\mu}{2}, \frac{a-\mu}{2}, \frac{-\mu}{b} \right), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Tomemos ahora $p_0 = \left( \frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, 1-\lambda \right) \in S$ y $q_0 = \left( \frac{a+\mu}{2}, \frac{a-\mu}{2}, \frac{-\mu}{b} \right) \in S'$. Imponemos la condición de que $\overrightarrow{p_0 q_0} = \left( \frac{a+\mu-\lambda}{2}, \frac{a-\mu-\lambda}{2}, -\frac{\mu}{b} \; 1 \; \lambda \right) \in \overrightarrow{S}^{\perp} \cap \overrightarrow{S'}^{\perp}$.

Calculemos $\overrightarrow{S}^{\perp} \cap \overrightarrow{S'}^{\perp}$:

$$\overrightarrow{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y+z=0 \end{array} \right\} = L\left( \{ (1,-1,-2) \} \right)$$

$$\overrightarrow{S}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z), (1,-1,-2) \rangle = 0 \right\} =$$

$$= L\left( \{ (1,1,0), (2,0,1) \} \right) = \left\{ (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\overrightarrow{S'} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y+bz=0 \end{array} \right\} = L\left( \left\{ \left(1,-1,-\frac{2}{b}\right) \right\} \right)$$

$$\overrightarrow{S'}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left\langle (x,y,z), \left(1,-1,-\frac{2}{b}\right) \right\rangle = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y-\frac{2}{b}z = 0 \right\}$$

Por tanto:

$$\overrightarrow{S}^{\perp} \cap \overrightarrow{S'}^{\perp} = \left\{ (\lambda_1+2\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 : \cancel{\lambda_1}+2\lambda_2-\cancel{\lambda_1}-\frac{2}{b}\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ (\lambda_1, \lambda_1, 0) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0 \right\}$$

Como $\overrightarrow{p_0q_0} = \left( \frac{a+\mu-\lambda}{2}, \frac{a-\mu-\lambda}{2}, -\frac{\mu}{b}-1+\lambda \right) \in \overrightarrow{S}^{\perp} \cap \overrightarrow{S'}^{\perp}$, entonces:

$$\frac{a+\mu-\lambda}{2} + \frac{a-\mu-\lambda}{2} = 0 \Rightarrow \frac{-2\lambda+a}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{a}{2}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

Luego, tomando $\mu = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} p_0 = \left( \frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, 1-\lambda \right) = \left( \frac{a}{4}, -\frac{a}{4}, 1-\frac{a}{2} \right) \\ q_0 = \left( \frac{a+\mu}{2}, \frac{a-\mu}{2}, \frac{-\mu}{b} \right) = \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{p_0q_0} = \left( \frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{a}{2}-1 \right)$$

Por tanto:

$$d(S,S') = \|\overrightarrow{p_0q_0}\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{p_0q_0}, \overrightarrow{p_0q_0} \right\rangle} = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{9a^2}{16} + \frac{a^2-4a+4}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{14a^2-16a+16}{16}}$$

En conclusión:

- •) Si $a=0$ y $b=1 \Rightarrow S=S' \Rightarrow d(S,S')=0$
- •) Si $a\in\mathbb{R}$ y $b=0 \Rightarrow d(S,S')=\sqrt{\frac{14a^2-16a+16}{16}}$
- •) Para cualquier otro caso, $S'$ no sería una recta

(6) Dados los siguientes pares de rectas, estudia su posición relativa. Si se cortan, determina el ángulo que forman y, en caso contrario, calcula la distancia entre ellas.

a) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$, $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x=y\}$.

Obtengamos los vectores directores de $R$ y $S$:

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\} = (0,0)+L(\{(1,1)\}) \Rightarrow \vec{v}_1=(1,1)$$

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x=y\} = (0,0)+L(\{(1,2)\}) \Rightarrow \vec{v}_2=(1,2)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\neq 0$, entonces los vectores directores son linealmente independientes, luego, las rectas no son paralelas y, como estamos en $\mathbb{R}^2$, la única posibilidad restante es que $R$ y $S$ son secantes.

Veamos si $R$ y $S$ son perpendiculares:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow R \text{ y } S \text{ no son perpendiculares}$$

Calculemos el ángulo que forman $R$ y $S$:

$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{v}_1\| = \sqrt{\langle \vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle} = \sqrt{2} \\ \|\vec{v}_2\| = \sqrt{\langle \vec{v}_2,\vec{v}_2\rangle} = \sqrt{5} \\ \langle \vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle = \|\vec{v}_1\|\cdot\|\vec{v}_2\|\cdot\cos(\measuredangle(\vec{v}_1,\vec{v}_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\left(\measuredangle(\vec{v}_1,\vec{v}_2)\right) \Rightarrow \measuredangle(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\measuredangle(R,S) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0'32175 \text{ rad} \approx 18'435^\circ}$$

b) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = y+1\}$, $S = \{(2\lambda, 1+2\lambda) : \lambda\in\mathbb{R}\}$.

Obtengamos los vectores directores de $R$ y $S$:

$$R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = y+1\} = (1,0) + L(\{(-1,-1)\}) \Rightarrow \vec{v}_1 = (-1,-1)$$

$$S = \{(2\lambda, 1+2\lambda) : \lambda\in\mathbb{R}\} \Rightarrow \vec{v}_2 = (2,2)$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, entonces los vectores directores son linealmente dependientes, luego, las rectas $R$ y $S$ son paralelas o iguales. Tomemos $p = (1,3)\in S$. Vemos que $1 \neq 3+1 = 4$, luego, $p\notin R$ y, por tanto, $R$ y $S$ son paralelas.

Tomemos $p_0 = (1,0)\in R$. Tenemos que $\vec{S}^\perp = L(\{(2,2)\})^\perp = L(\{(-1,1)\})$. La recta perpendicular a $R$ y $S$ que pasa por $p_0\in R$ es $T = (1,0) + L(\{(-1,1)\}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y = 1\}$. Calculemos el punto de corte entre $S$ y $T$:

$$S = \{(2\lambda, 1+2\lambda) : \lambda\in\mathbb{R}\}$$

$$2\lambda + \cancel{1} + 2\lambda = \cancel{1} \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow q_0 = (0,1)\in S$$ es el punto de corte entre $S$ y $T$

Por tanto:

$$\boxed{d(R,S) = d(p_0,q_0) = d((1,0),(0,1)) = \sqrt{2}}$$

⑦ Consideremos el espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado $\leq 2$ con coeficientes reales, dotado de su estructura afín canónica. Introduzcamos en el espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$ la métrica euclidiana:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

y convirtamos el espacio afín $P_2(\mathbb{R})$ en euclídeo. Comprueba que las rectas $S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : p(0) = 5,\ p''(8) = 4\}$, $T = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : p'(0) = 0,\ p'(1) = 4\}$ se cortan en un punto y calcula el ángulo que forman.

Tomemos $p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R})$. Si $p(x) \in S$:

$$\left.\begin{array}{l} p(0) = c \\ p''(8) = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c = 5 \\ 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \end{array}\right.$$

Luego, si $p(x) \in S$, entonces $p(x) = 2x^2 + bx + 5$, $b \in \mathbb{R}$. Luego:

$$S = \{2x^2 + bx + 5 \in P_2(\mathbb{R}) : b \in \mathbb{R}\}$$

$$p_{b=1}(x) = 2x^2 + x + 5 \ ; \ p_{b=2}(x) = 2x^2 + 2x + 5$$

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{p_{b=1}(x)\,p_{b=2}(x)} = x$$

Por otro lado, si $p(x) \in T$:

$$\left.\begin{array}{l} p'(0) = b \\ p'(1) = 2a + b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ 2a + b = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \end{array}\right.$$

Luego, si $p(x) \in T$, entonces $p(x) = 2x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Luego:

$$T = \left\{ 2x^2 + c \in P_2(\mathbb{R}) : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$p_{c=1}(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad p_{c=2}(x) = 2x^2 + 2$$

$$\vec{v_2} = \overrightarrow{p_{c=1}(x)\, p_{c=2}(x)} = 1$$

Como $\vec{v_1} = x$ y $\vec{v_2} = 1$ son linealmente independientes, las rectas $S$ y $T$ no son paralelas y, como estamos en $\mathbb{R}^2$, la única posibilidad restante es que $S$ y $T$ son secantes.

Veamos si $S$ y $T$ son perpendiculares:

$$\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle = \int_0^1 x\, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow S \text{ y } T \text{ no son perpendiculares}$$

Calculemos el ángulo que forman $S$ y $T$:

$$\| \vec{v_1} \| = \sqrt{\langle \vec{v_1}, \vec{v_1} \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2\, dx} = \sqrt{\left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\| \vec{v_2} \| = \sqrt{\langle \vec{v_2}, \vec{v_2} \rangle} = \sqrt{\int_0^1 1\, dx} = \sqrt{\left[ x \right]_0^1} = 1$$

$$\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle = \| \vec{v_1} \| \cdot \| \vec{v_2} \| \cdot \cos\left( \measuredangle (\vec{v_1}, \vec{v_2}) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot \cos\left( \measuredangle(\vec{v_1}, \vec{v_2}) \right) \Rightarrow \measuredangle(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \arccos\left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\measuredangle(S, T) = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ}$$

⑧ Encuentra, si existe, un movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$ que lleve la recta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\}$ en la recta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=1\}$ y la recta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$ en la recta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=1\}$.

Comencemos estudiando la posición relativa de las dos rectas:

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\}=(0,0)+L(\{(0,1)\})$$

$$\vec{v}_1=(0,1)$$

$$S'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=1\}=(0,1)+L(\{(1,0)\})$$

$$\vec{v}_2=(1,0)$$

Veamos si $S$ y $S'$ son perpendiculares:

$$\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle=0\cdot 1+1\cdot 0=0 \Rightarrow S \text{ y } S' \text{ son perpendiculares}$$

Calculemos el punto de corte de $S$ y $S'$:

$$S\cap S'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{matrix} x=0 \\ y=1\end{matrix}\right\}=\{(0,1)\}$$

Entonces, cualquier giro centrado en $p_0=(0,1)$ y ángulo orientado $\pm\frac{\pi}{2}$ respecto a la orientación usual de $\mathbb{R}^2$ llevará $S$ en $S'$. Por tanto:

$$G_1(S)=G_1(p_0)+\vec{G}_1(\vec{S})=G_1(p_0)+\vec{G}_1(L(\{(0,1)\}))=G_1(p_0)+L(\{\vec{G}_1(0,1)\})=$$
$$=p_0+\vec{S'}=(0,1)+L(\{(1,0)\})=S'$$

Determinemos dicho giro. Para ello, consideremos el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_1=\{p_0;B_0\}$. Escribimos:

$$M(G_1;\mathcal{R}_1)=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/2) & -\operatorname{sen}(\pi/2) \\ 0 & \operatorname{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Luego:

$$M(G_1;\mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)\cdot M(G_1;\mathcal{R}_1)\cdot M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(G_1;\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Calculemos ahora la posición relativa de las rectas:

$$T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = 0\} = (0,0) + L(\{(1,0)\})$$

$$\vec{w}_1 = (1,0)$$

$$T' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = 1\} = (1,0) + L(\{(0,1)\})$$

$$\vec{w}_2 = (0,1)$$

Veamos si $T$ y $T'$ son perpendiculares:

$$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2\rangle = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0 \Rightarrow T \text{ y } T' \text{ son perpendiculares}$$

Calculemos el punto de corte de $T$ y $T'$:

$$T\cap T' = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} = \{(1,0)\}$$

Entonces, cualquier giro centrado en $q_0 = (1,0)$ y ángulo orientado $\pm\frac{\pi}{2}$ respecto a la orientación usual de $\mathbb{R}^2$ llevará $T$ en $T'$. Por tanto:

$$G_2(T) = G_2(q_0) + \vec{G}_2(\vec{T}) = G_2(q_0) + \vec{G}_2\left(L(\{(1,0)\})\right) = G_2(q_0) + L\left(\{\vec{G}_2(1,0)\}\right) =$$

$$= q_0 + \vec{T}' = (1,0) + L\left(\{(0,1)\}\right) = T'$$

Determinemos dicho giro. Para ello, consideremos el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_2 = \{ q_0 ; B_0 \}$. Escribimos:

$$M(G_2 ; \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/2) & -\operatorname{sen}(\pi/2) \\ 0 & \operatorname{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(G_2 ; \mathcal{R}) = M(Id_{\mathbb{R}^3} ; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) \cdot M(G_2 ; \mathcal{R}_2) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3} ; \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{M(G_2 ; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)}$$

9) Sean $f_1, f_2$ las simetrías ortogonales en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ respecto las rectas $\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 2\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 1\}$, respectivamente. Calcula $f_1 \circ f_2$ y descríbela.

Tenemos que:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 2\} = (2,0) + L\left(\{(-2,-2)\}\right)$$

Calculemos $\vec{\mathcal{R}}_1^{\perp}$:

$$\vec{\mathcal{R}}_1^{\perp} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x,y), (-2,-2) \rangle = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\} = L\left(\{(1,-1)\}\right)$$

Tenemos entonces que $\{(-2,-2),(1,-1)\}$ forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Para que sea ortonormal dividimos cada vector por su módulo:

$$\|(-2,-2)\| = \sqrt{\langle(-2,-2),(-2,-2)\rangle} = 2\sqrt{2}$$
$$\|(1,-1)\| = \sqrt{\langle(1,-1),(1,-1)\rangle} = \sqrt{2}$$

Luego, $B = \left\{ v_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Teniendo en cuenta que $q = (2,0) \in R_1$, podemos considerar el sistema de referencia $R = \{q ; B\}$ de forma que la simetría ortogonal $f_1$ respecto de la recta $R_1$ es:

$$M(f_1 ; R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(f_1 ; R_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3} ; R, R_0) \cdot M(f_1 ; R) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3} ; R, R_0)^{-1} =$$
$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{array}\right)^{-1} =$$
$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Repetimos el proceso con $R_2$. Tenemos que:

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 1\} = (1,0) + L(\{(2,1)\})$$

Calculemos $R_2^\perp$:

$$R_2^\perp = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x,y),(2,1)\rangle = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\} = L(\{(1,-2)\})$$

Tenemos entonces que $\{(2,1),(1,-2)\}$ forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Para que sea ortonormal dividimos cada vector por su módulo:

$$\|(2,1)\| = \sqrt{\langle (2,1),(2,1)\rangle} = \sqrt{5}$$
$$\|(1,-2)\| = \sqrt{\langle (1,-2),(1,-2)\rangle} = \sqrt{5}$$

Luego, $B' = \left\{ w_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right), w_2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Teniendo en cuenta que $q' = (1,0) \in R_2$, podemos considerar el sistema de referencia $R' = \{q'; B'\}$ de forma que la simetría ortogonal $f_2$ respecto de la recta $R_2$ es:

$$M(f_2; R') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(f_2; R_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3}; R', R_0) \cdot M(f_2; R') \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}; R', R_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2/\sqrt{5} & \sqrt{5}/5 \\ 0 & \sqrt{5}/5 & -2/\sqrt{5} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2/\sqrt{5} & \sqrt{5}/5 \\ 0 & \sqrt{5}/5 & -2/\sqrt{5} \end{array}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2/5 & 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 4/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

En conclusión:

$$M(f_1 \circ f_2; R_0) = M(f_1; R_0) \cdot M(f_2; R_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2/5 & 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 4/5 & -3/5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{M(f_1 \circ f_2; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 6/5 & 4/5 & -3/5 \\ -8/5 & 3/5 & 4/5 \end{array}\right)}$$

Tenemos que:

•) $\det\left(\overrightarrow{f_1 \circ f_2}\right) = \begin{vmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{vmatrix} = 1$

•) $(f_1 \circ f_2)(x,y) = (x,y) \iff \left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{6}{5}, \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5}\right) = (x,y) \iff$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}y = -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y = \frac{8}{5} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \qquad P_{f_1 \circ f_2} = \{(3,1)\} \neq \emptyset$$

Por tanto, $f_1 \circ f_2$ es un giro de centro $(3,1)$ y ángulo orientado $\vartheta \in \,]0, 2\pi[$.

(10) En $\mathbb{R}^4$, calcular, según los valores de $a \in \mathbb{R}$, la distancia entre $S = (0,1,1,0) + L(\{(a,0,1,1)\})$ y el plano afín de ecuaciones $x+y+z+t=1$ y $x-y=0$.

Calculemos unas ecuaciones paramétricas de ambos subespacios:

$$S = (0,1,1,0) + L(\{(a,0,1,1)\}) = \{(a\lambda, 1, 1+\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$T = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x+y+z+t=1 \\ x-y=0 \end{array}\right\} = (0,0,1,0) + L(\{(0,0,-1,1), (1,1,-1,-1)\}) =$$

$$= \{(\mu, \mu, 1-\gamma-\mu, \gamma-\mu) : \gamma, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Tomemos $p_0 = (a\lambda, 1, 1+\lambda, \lambda) \in S$ y $q_0 = (\mu, \mu, 1-\gamma-\mu, \gamma-\mu) \in T$. Impongamos que $\overrightarrow{p_0 q_0} = (\mu - a\lambda, \mu - 1, -\gamma-\mu-\lambda, \gamma-\mu-\lambda) \in \vec{S}^{\perp} \cap \vec{T}^{\perp}$. Calculemos $\vec{S}^{\perp} \cap \vec{T}^{\perp}$:

$$\vec{S}^{\perp} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,t), (a,0,1,1) \rangle = 0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : ax+z+t=0\}$$

$$\vec{T}^{\perp} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} \langle (x,y,z,t), (0,0,-1,1) \rangle = 0 \\ \langle (x,y,z,t), (1,1,-1,-1) \rangle = 0 \end{array}\right\} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} -z+t=0 \\ x+y-z-t=0 \end{array}\right\} =$$

$$= L(\{(1,-1,0,0), (0,2,1,1)\}) = \{(\lambda_1, -\lambda_1+\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Luego:

$$\vec{S}^{\perp} \cap \vec{T}^{\perp} = \{(\lambda_1, -\lambda_1+\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) \in \mathbb{R}^4 : \cancel{\lambda_1} - \cancel{\lambda_1} + \cancel{\lambda_2} - \cancel{\lambda_2} - \lambda_2 = 0\} =$$

$$= \{(\lambda_1, -\lambda_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : \lambda_1 \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1,0,0)\}) =$$

$$= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x+y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{array}\right\}.$$

Finalmente, como $\vec{p_0 q_0} \in \vec{S}^{\perp} \cap \vec{T}^{\perp}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \mu - a\lambda + \mu - 1 = 0 \\ -\gamma - \mu - \lambda = 0 \\ \gamma - \mu - \lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = \frac{1}{a+2} \\ \lambda = \frac{-1}{a+2} \\ \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p_0 q_0} = \left(\frac{a+1}{a+2}, \frac{-a-1}{a+2}, 0, 0\right)$$

$$d(S,T) = \|\vec{p_0 q_0}\| = \sqrt{\langle \vec{p_0 q_0}, \vec{p_0 q_0} \rangle} = \sqrt{\frac{a^2+1+2a+a^2+1+2a}{a^2+4+4a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(S,T) = \sqrt{\frac{2a^2+4a+2}{a^2+4a+4}}$$

(11) Demostrar que si $A$ es un espacio afín euclídeo de dimensión $n$, entonces existe un movimiento rígido $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Pendiente.

(12) Demostrar que todo movimiento rígido de una recta afín en sí misma es una traslación o una simetría central.

Pendiente.

(13) Sea $f: A \to A$ un movimiento rígido. Dadas dos rectas afines $S$ y $S'$ en $A$, demostrar que $f(S)$ y $f(S')$ son dos rectas afines en $A$ que determinan el mismo ángulo que $S$ y $S'$.

Pendiente.

(14) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación afín tal que:

$$f(-1,-1) = (0,0) \ , \ f(-1,-2) = (1,0) \ , \ f(0,-1) = (0,1).$$

Demostrar que $f$ es un movimiento rígido y clasificarlo.

Comencemos hallando la expresión matricial de la aplicación $f$. Para ello, consideremos $\mathcal{R}_1 = \{(-1,-1) ; B_1 = \{(0,-1),(1,0)\}\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{(0,0) ; B_2 = \{(1,0),(0,1)\}\}$. Es evidente que ambos son sistemas de referencia rectangulares en $\mathbb{R}^2$. Tenemos que:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde:

$$M(\vec{f} ; B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_{\mathbb{R}^2}$$

$$M(f ; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = Id_{\mathbb{R}^3}$$

Es evidente que $M(\vec{f}; B_1, B_2) \cdot M(\vec{f}; B_1, B_2)^t = Id_{\mathbb{R}^2} \in O(2,\mathbb{R})$ y, como $B_1$ y $B_2$ son bases ortonormales, $f$ es un movimiento rígido.

Notemos que $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_0$ (sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^2$), luego:

$$M(f; \mathcal{R}_0) = M(f; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(f; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M(f; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Clasifiquemos el movimiento rígido:

- $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$
- $f(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow (-y-1, x+1) = (x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=0 \end{array}\right\} \qquad P_f = \{(-1,0)\} \neq \emptyset$$

Por tanto, como $\det(\vec{f}) = 1$ y $P_f = \{(-1,0)\} \neq \emptyset$, entonces $f$ es un giro de centro $q = (-1,0) \in \mathbb{R}^2$ y ángulo orientado $\theta \in ]0, 2\pi[$ con respecto a la orientación usual de $\mathbb{R}^2$. Para calcular $\theta$:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

(15) Demostrar que si $p$ y $q$ son dos puntos de un espacio afín euclídeo $A$, entonces siempre existe un movimiento rígido $f: A \longrightarrow A$ tal que $f(p) = q$. De forma más general, probar que si $A$ tiene dimensión finita y $S, S'$ son dos subespacios afines de $A$ con dimensión $m$, entonces existe un movimiento rígido $f: A \longrightarrow A$ tal que $f(S) = S'$.

Pendiente.

(16) Construir un movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$ que transforme la recta afín $S$ de ecuación $x + y = 2$ en la recta afín $S' = (1,-1) + L(\{(1,1)\})$. Clasificar el movimiento obtenido.

Comencemos estudiando la posición relativa de ambas rectas:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\} = (1,1) + L(\{(1,-1)\})$$

$$\vec{v_1} = (1,-1) \text{ es el vector director de } S$$

$$S' = (1,-1) + L(\{(1,1)\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 2\}$$

$$\vec{v_2} = (1,1) \text{ es el vector director de } S'$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, entonces los vectores directores son linealmente independientes, luego, las rectas no son paralelas ni coincidentes y, como estamos en $\mathbb{R}^2$, la única posibilidad restante es que <u>$S$ y $S'$ son secantes.</u>

Veamos si $S$ y $S'$ son perpendiculares:

$$\langle (1,-1), (1,1) \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \underline{S \text{ y } S' \text{ son perpendiculares}}$$

Calculemos $S \cap S'$:

$$S \cap S' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} x+y=2 \\ x-y=2 \end{matrix} \right\} = \{(2,0)\}$$

Luego, calculemos el giro $G$ de centro $p_0 = (2,0) \in \mathbb{R}^2$ y ángulo orientado $\frac{\pi}{2}$ respecto a la orientación usual en $\mathbb{R}^2$ de forma que $G(S) = S'$ y $G(S') = S$.

Tomando el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, B_0\}$, tenemos que:

$$M(G;\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/2) & -\text{sen}(\pi/2) \\ 0 & \text{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(G;\mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R},\mathcal{R}_0) \cdot M(G;\mathcal{R}) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M(G;\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)}$$

17 Sean $\sigma_1$ y $\sigma_2$ las simetrías en $\mathbb{R}^2$ respecto de las rectas afines $x+y=0$ y $x+2y=2$, respectivamente. Calcular de forma explícita el movimiento rígido $f = \sigma_1 \circ \sigma_2$ en coordenadas usuales. Clasifícalo.

Sea $\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\} = (0,0) + L(\{(1,-1)\})$. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \vec{\mathcal{R}_1} = L(\{(1,-1)\}) \\ V_{-1} = \vec{\mathcal{R}_1}^{\perp} = L(\{(1,1)\}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} q_1 = (0,0) \in \mathcal{R}_1 \\ (1,-1) \in V_1 \\ (1,1) \in V_{-1} \end{array}$$

Luego, formamos el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{(0,0); B_1 = \{(1,-1),(1,1)\}\}$. Ortonormalizando $B_1$, tenemos $B_1' = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$. Usando $\mathcal{R}' = \{(0,0); B_1'\}$, tenemos que:

$$M(\sigma_1; \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(\sigma_1; \mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}', \mathcal{R}_0) \cdot M(\sigma_1; \mathcal{R}') \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}', \mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(\sigma_1; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Sea $\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 2\} = (0,1) + L(\{(2,-1)\})$. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \overrightarrow{\mathcal{R}_2} = L(\{(2,-1)\}) \\ V_{-1} = \overrightarrow{\mathcal{R}_2}^{\perp} = L(\{(1,2)\}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} q_2 = (0,1) \in \mathcal{R}_2 \\ (2,-1) \in V_1 \\ (1,2) \in V_{-1} \end{array}$$

Luego, formamos el sistema de referencia $\mathcal{R}'' = \{(0,1); B_2 = \{(2,-1),(1,2)\}\}$. Ortonormalizando $B_2$, tenemos que $B_2' = \{(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}), (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}$. Usando $\mathcal{R}''' = \{(0,1); B_2'\}$ tenemos que:

$$M(\sigma_2; \mathcal{R}''') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(\sigma_2;\mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}''',\mathcal{R}_0)\cdot M(\sigma_2;\mathcal{R}''')\cdot M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}''',\mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{array}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M(\sigma_2;\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 4/5 & 3/5 & -4/5 \\ 8/5 & -4/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

Para calcular $f = \sigma_1 \circ \sigma_2$:

$$M(f;\mathcal{R}_0) = M(\sigma_1;\mathcal{R}_0)\cdot M(\sigma_2;\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 4/5 & 3/5 & -4/5 \\ 8/5 & -4/5 & -3/5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M(f;\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -8/5 & 4/5 & 3/5 \\ -4/5 & -3/5 & 4/5 \end{array}\right)}$$

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

- $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{vmatrix} = 1$
- $f(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{8}{5}, -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5}\right) = (x,y) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y = \frac{8}{5} \\ -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y = \frac{4}{5} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \end{array}\right\} \quad P_f = \{(-2,2)\} \neq \emptyset$$

Luego, como $\det(\vec{f}) = 1$ y $P_f = \{(-2,2)\} \neq \emptyset$, entonces $f$ es un giro de centro $q = (-2,2) \in \mathbb{R}^2$ y ángulo orientado $\theta = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0'644$ rad $\approx 36'9^\circ$ respecto a la orientación usual en $\mathbb{R}^2$.

(18) ¿Son movimientos rígidos las aplicaciones $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x,y) = (y-2, x+1)$ y $g(x,y) = (2y-1, -2x+3)$? Si alguna de ellas lo es, clasificarlo.

Tenemos que:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$M(\vec{f}; B_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M(\vec{f}; B_0) \cdot M(\vec{f}; B_0)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= Id_{\mathbb{R}^2} \in O(2, \mathbb{R})$$

$$M(\vec{g}; B_0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M(\vec{g}; B_0) \cdot M(\vec{g}; B_0)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \neq$$
$$\neq Id_{\mathbb{R}^2}$$

Luego, g no es un movimiento rígido pero f sí lo es. Clasifiquemos f:

- $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$
- $f(x,y) = (x,y) \iff (y-2, x+1) = (x,y) \iff \left\{ \begin{array}{l} -x+y = 2 \\ x - y = -1 \end{array} \right\} \iff$

$\iff$ El sistema no tiene solución $\quad P_f = \emptyset$

Luego, f es una traslación $T_u$, $u \in \vec{\mathbb{R}}^2$. En el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{(-2,1); B_0\}$ tenemos que:

$$\boxed{M(f; \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

(19) Calcular en coordenadas usuales de $\mathbb{R}^2$ los siguientes movimientos:

a) El giro de centro en el punto $o:(1,2)$ y ángulo orientado $\sigma = \frac{2\pi}{3}$ respecto de la orientación usual.

La orientación usual de $\mathbb{R}^2$ es la que tiene por base positiva a la base usual $B_0$ de $\mathbb{R}^2$. Fijando el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{(1,2); B_0\}$, la matriz del giro $G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en el plano euclídeo usual $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ viene dada por:

$$M(G;\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(2\pi/3) & -\operatorname{sen}(2\pi/3) \\ 0 & \operatorname{sen}(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Considerando el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^2$:

$$M(Id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(G;\mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(G;\mathcal{R}) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{M(G;\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{3}+1 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array}\right)}$$

b) La simetría ortogonal deslizante respecto de la recta afín $x-y=1$ con vector de deslizamiento $u=(1,1)$.

Tenemos que hallar la expresión de $f = \tau_u \circ \sigma_{S^\perp}$. Tenemos que $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y=1\} = (1,0) + L(\{(1,1)\}) \Rightarrow \vec{S} = L(\{(1,1)\})$, por lo que se satisface la condición $u=(1,1)\in\vec{S}$.

Calculemos una base ortonormal:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{S} = L(\{(1,1)\}) \\ \vec{S}^\perp = L(\{(1,-1)\}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B = \left\{ v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\ \text{es una base ortonormal.} \end{array}$$

Tomando el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{q; B\}$, $q=(1,0)\in S$, la simetría ortogonal respecto de la recta $S$ viene dada por:

$$M(\sigma_{S^\perp}; \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(\sigma_{S^\perp}; \mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)\cdot M(\sigma_{S^\perp}; \mathcal{R}) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{array}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M(\sigma_{S^\perp}; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por otro lado:

$$M(\tau_u ; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$M(f ; \mathcal{R}_0) = M(\tau_u ; \mathcal{R}_0) \cdot M(\sigma_{S^\perp} ; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M(f ; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}$$

20) Se considera la aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya expresión matricial con respecto a $\mathcal{R}_0$ es:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que $f$ es una simetría deslizante.

De la expresión matricial de $f$ se deduce que:

$$M(\vec{f} ; B_0) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Observemos que $M(\vec{f} ; B_0) \cdot M(\vec{f} ; B_0)^t = I_2 \Rightarrow M(\vec{f} ; B_0) \in O(2, \mathbb{R})$. Como el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0 = \{(0,0) ; B_0\}$ en $\mathbb{R}^2$ es rectangular con respecto al producto escalar clásico, $f$ es un movimiento rígido.

Reescribiendo la expresión matricial de $f$:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline f(x,y) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -3/5 & -4/5 \\ 1 & -4/5 & 3/5 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \end{array}\right)$$

Vemos que:

•) $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{vmatrix} = -1$

•) $f(x,y) = (x,y) \iff \left(-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3, -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1\right) = (x,y) \iff$

$\iff \begin{cases} -\frac{8}{5}x - \frac{4}{5}y = -3 \\ -\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y = -1 \end{cases}$ El sistema no tiene solución $\Rightarrow P_f = \emptyset$

Luego, como $\det(\vec{f}) = -1$ y $P_f = \emptyset$, entonces $f$ es una simetría deslizante.

b) Calcular la recta afín de simetría y el vector de traslación.

Nos piden encontrar la recta $S$ respecto a la que simetrizamos y el vector $u \in \vec{S}$ con el que trasladamos, de forma que $f = \tau_u \circ \sigma_{S^\perp}$.

Tomamos un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, el $(0,0)$, y calculamos $M_{(0,0)f(0,0)}$:

$$f(0,0) = (3,1) \Rightarrow M_{(0,0)f(0,0)} = (0,0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{(0,0)(3,1)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \in S$$

Por otro lado:

$$\vec{S} = V_1 = \ker(\vec{f} - Id_{\mathbb{R}^2}) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -8/5 & -4/5 \\ -4/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x\right\} = L(\{(1,-2)\})$$

Luego, $S = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + L(\{(1,-2)\})$.

Una segunda forma de calcular $S$ es:

$$S = \left\{ m_{(a,b)f(a,b)} : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ (a,b) + \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b + 3, -\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b + 1\right) - (a,b)\right] : \right.$$

$$\left. : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \frac{1}{2}(a,b) + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b + 3, -\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b + 1\right) : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{10}\left(2a - 4b + 15, -4a + 8b + 5\right) : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Tomando $\lambda = 2a - 4b$:

$$S = \left\{ \frac{1}{10}\left(\lambda + 15, -2\lambda + 5\right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + L(\{(1,-2)\}).$$

Finalmente, para calcular el vector de deslizamiento $u \in \vec{S}$ de $f$, basta con elegir cualquier punto de $S$ y calcular su imagen. Por sencillez, tomamos $p = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \in S$. Tenemos que $f(p) = f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{17}{10}, \frac{1}{10}\right)$. Luego:

$$u = \overrightarrow{pf(p)} = \overrightarrow{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(\frac{17}{10}, \frac{1}{10}\right)} \Longrightarrow u = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right).$$

(21) Demostrar que la composición de dos simetrías ortogonales en $\mathbb{R}^2$ es un giro, una traslación o la identidad. ¿De qué depende que se obtenga un giro, una traslación o la identidad?

Consideremos dos simetrías ortogonales en $\mathbb{R}^2$, $f$ y $g$. Como $f$ y $g$ son simetrías ortogonales, sabemos que:

$$\det(\vec{f}) = \det(\vec{g}) = -1$$

$$\det(\overrightarrow{g \circ f}) = \det(\vec{g}) \cdot \det(\vec{f}) = 1$$

Considerando el conjunto de puntos fijos de $g \circ f$, $P_{g\circ f}$, tenemos las siguientes posibilidades:

- Si $P_{g\circ f} = \emptyset \Rightarrow g\circ f$ es una traslación.
- Si $P_{g\circ f} = \{p\}$, $p \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow g\circ f$ es un giro.
- Si $P_{g\circ f} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow g\circ f$ es la identidad en $\mathbb{R}^2$.

Vemos que, el hecho de que se obtenga un giro, una traslación o la identidad depende del conjunto de puntos fijos de $g\circ f$.

(22) Calcular las proyecciones y las simetrías de $\mathbb{R}^3$ con respecto a los ejes coordenados y a los planos coordenados.

Pendiente.

(23) Sean $\sigma_1$ y $\sigma_2$ las simetrías en $\mathbb{R}^3$ respecto de los planos afines $x+y=1$ y $x-z=2$, respectivamente. Calcula de forma explícita el movimiento rígido $f = \sigma_1 \circ \sigma_2$ en coordenadas usuales. Clasifícalo.

Comencemos hallando $\sigma_1$:

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=1\} = (1,0,0) + L(\{(-1,1,0),(0,0,1)\})$$

$$\vec{S_1}^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} \langle (x,y,z),(-1,1,0)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z),(0,0,1)\rangle = 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} -x+y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} = L(\{(1,1,0)\})$$

Tomamos $B_1 = \{(-1,1,0),(0,0,1),(1,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Ortonormalizando, tenemos $B_1' = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$. Tomando $q_1 = (1,0,0) \in S_1$, podemos definir el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_1 = \{q_1 ; B_1'\}$. Tenemos que:

$$M(\sigma_1 ; \mathcal{R}_1) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(\sigma_1 ; \mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^4} ; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\sigma_1 ; \mathcal{R}_1) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^4} ; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(\sigma_1 ; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hallemos ahora $\sigma_2$:

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 2\} = (2,0,0) + L(\{(0,1,0),(1,0,1)\})$$

$$\vec{S_2}^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} \langle (x,y,z),(0,1,0)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z),(1,0,1)\rangle = 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} y = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right\} = L(\{(1,0,-1)\})$$

Tomamos $B_2 = \{(0,1,0), (1,0,1), (1,0,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Ortonormalizando, tenemos $B_2' = \left\{(0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$. Tomando $q_2 = (2,0,0) \in S_{2}$, podemos definir el sistema de referencia rectangular $R_2 = \{q_2 ; B_2'\}$. Tenemos que:

$$M(\sigma_2 ; R_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(\sigma_2 ; R_0) = M(Id_{\mathbb{R}^4} ; R_2, R_0) \cdot M(\sigma_2 ; R_2) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^4} ; R_2, R_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{array}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(\sigma_2 ; R_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para calcular $f = \sigma_1 \circ \sigma_2$:

$$M(f ; R_0) = M(\sigma_1 ; R_0) \cdot M(\sigma_2 ; R_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M(f ; R_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

- $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$

•) $f(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow (-y+1, -z-1, x\ 2) = (x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-y=-1 \\ -y-z=1 \\ x-z=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1-\lambda \end{array}\right. \quad P_f = (1,0,-1) + L(\{(-1,1,-1)\}) \neq \emptyset$$
$$\dim(P_f) = 1$$

Luego, como $\det(\vec{f}) = -1$ y $P_f = (1,0,-1) + L(\{(-1,1,-1)\})$, entonces $f$ es... (Acabar).

(24) Demuestra que las siguientes aplicaciones afines son movimientos rígidos del plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ y clasifícalas:

a) $f(x,y) = \left(3 - \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y,\ 1 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f}; B_0) \cdot M(\vec{f}; B_0)^t = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in O(2,\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f$ es un movimiento rígido

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

•) $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} -3/5 & 4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{vmatrix} = 1$

•) $f(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \left(3 - \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y,\ 1 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right) = (x,y) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{8}{5}x + \frac{4}{5}y = -3 \\ -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{7}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{array}\right. \quad P_f = \left\{\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)\right\} \neq \emptyset$$

Luego, como $\det(\vec{f}) = 1$ y $P_f = \left\{\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)\right\} \neq \emptyset$, $f$ es un giro de centro $\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ y ángulo orientado $\theta = \arccos\left(\frac{-3}{5}\right) = 2'21$ rad $\approx 126'62°$.

b) $f(x,y)=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1, \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+2\right).$

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f};B_0)\cdot M(\vec{f};B_0)^t=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2\in O(2,\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ es un movimiento rígido}$$

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

- $\det(\vec{f})=\begin{vmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

- $f(x,y)=(x,y) \iff \left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1, \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+2\right)=(x,y) \iff$

$$\iff \begin{cases} -\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=-1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{1-2\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{2+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$P_f=\left\{\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\neq\emptyset$$

Luego, como $\det(\vec{f})=1$ y $P_f=\left\{\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\neq\emptyset$, $f$ es un giro de centro $\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ y ángulo orientado $\theta=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}=60°$.

c) $f(x,y)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+1, \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-1\right).$

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f};B_0)\cdot M(\vec{f};B_0)^t = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in O(2,\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f$ es un movimiento rígido

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

•) $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -1$

•) $f(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1\right) = (x,y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$ El sistema no tiene solución $\Rightarrow P_f = \emptyset$

Luego, como $\det(\vec{f}) = -1$ y $P_f = \emptyset$, $f$ es la simetría deslizante respecto a la recta afín $S = \{m_{pf(p)} : p \in \mathbb{R}^2\}$ con vector de deslizamiento $u = \overrightarrow{qf(q)} \in \vec{S}$, $q \in S$.

d) $f(x,y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 5\right)$.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f};B_0)\cdot M(\vec{f};B_0)^t = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in O(2,\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f$ es un movimiento rígido

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

- $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{vmatrix} = -1$

- $f(x,y) = (x,y) \iff \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 5\right) = (x,y) \iff$

$$\iff \begin{cases} -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = -2 \\ \frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y = -5 \end{cases}$$ El sistema no tiene solución $\Rightarrow P_f = \emptyset$

Luego, como $\det(\vec{f}) = -1$ y $P_f = \emptyset$, $f$ es la simetría deslizante respecto a la recta afín $S = \{m_{pf(p)} : p \in \mathbb{R}^2\}$ con vector de deslizamiento $u = \overrightarrow{qf(q)} \in \vec{S}$, $q \in S$.

(25) Calcular en coordenadas usuales de $\mathbb{R}^3$ los siguientes movimientos:

a) El movimiento helicoidal de eje $S = (1,2,1) + L(\{(1,0,-1)\})$ y ángulo $\frac{\pi}{2}$ con vector de traslación $v = (-3,0,3)$.

Sabemos que:

$$\vec{S} = L(\{(1,0,-1)\}) = V_1$$
$$v = (-3,0,3) \in \vec{S}, \quad v \neq \vec{0}$$

$$V_1^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z), (1,0,-1) \rangle = 0\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\} = L(\{(0,1,0), (1,0,1)\})$$

Luego, tomando el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{(1,2,1) \in S ;$

$; B = \{(0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\}\}$, tenemos que:

$$(-3,0,3)_B = (0,0,-3\sqrt{2})$$

$$M(f;\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(f;\mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^4};\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(f;\mathcal{R})\cdot M(Id_{\mathbb{R}^4};\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{array}\right)^{-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{M(f;\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 5/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{array}\right)}$$

b) La simetría deslizante respecto del plano afín $x+y+z=1$ con vector de traslación $v=(1,-1,0)$.

Pendiente.

c) La composición de la rotación de eje $S=(1,2,0)+L(\{(0,1,0)\})$ y ángulo $\frac{\pi}{2}$ con la simetría respecto del plano afín $y=-1$.

Sabemos que:

$$\vec{S} = L(\{(0,1,0)\})$$

$$\vec{S}^{\perp} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(0,1,0)\rangle = 0\} =$$

$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=0\} = L(\{(1,0,0),(0,0,1)\})$$

Formamos el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{ q_0 ; B = \{(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0)\} \}$, donde $\underset{\substack{\shortparallel \\ (0,0,0)}}{q_0}$ es el único punto fijo de $f$. Tenemos que:

$$M(f;\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(f;\mathcal{R}_0) = M(Id_{\mathbb{R}^4}; \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(f;\mathcal{R}) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^4}; \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)^{-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{M(f;\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

**26** Se consideran las aplicaciones afines $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(2x+2y+z+2,\ x-2y+2z-2,\ 2x-y-2z-4\right),$$

$$g(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(2x+2y+\quad+3,\ -2x+y+2z,\ -x+2y-2z-3\right).$$

Demostrar que son movimientos rígidos de $\mathbb{R}^3$ y clasificarlos.

Pendiente.

(27) Demuestra que las siguientes aplicaciones afines son movimientos rígidos del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ y clasifícalas:

a) $f(x,y,z) = (2+y,\ x,\ 1+z)$.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f}; B_0) \cdot M(\vec{f}; B_0)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in O(3,\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f$ es un movimiento rígido

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

- $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

- $f(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow (2+y,\ x,\ 1+z) = (x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y = -2 \\ x-y = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$$ El sistema no tiene solución $\Rightarrow P_f = \emptyset$

Luego, como $\det(\vec{f}) = -1$ y $P_f = \emptyset$, $f$ es una simetría ortogonal deslizante respecto de un plano $S$ y vector de deslizamiento $u$. Calculemos ahora $S$ y $u$:

$$\vec{S} = V_1 = \ker(\vec{f} - Id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \right\} = L(\{(0,0,1),(1,1,0)\})$$

Tomemos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ genérico y calculemos $S$:

$$\overrightarrow{(x,y,z)f(x,y,z)} = (-x+y+2,\ x-y,\ 1) \in \vec{S} \Rightarrow -x+y+2-(x-y)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+y=-1$$

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -x+y=-1\} = (1,0,0)+L(\{(0,0,1),(1,1,0)\})$$

Finalmente, calculemos el vector de deslizamiento $u \in \vec{S}$. Tomamos $(1,0,0)\in S$. Tenemos que:

$$u = \overrightarrow{(1,0,0)f(1,0,0)} = (2,1,1)-(1,0,0) \Rightarrow u=(1,1,1)$$

b) $f(x,y,z) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{x-\sqrt{3}y}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x+y}{2},\ z+1\right)$.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f};B_0)\cdot M(\vec{f};B_0)^t = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in O(3,\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f$ es un movimiento rígido

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

•) $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

•) $f(x,y,z) = (x,y,z) \iff \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x+y}{2}, z+1\right) = (x,y,z) \iff$

$\iff \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 1 = 0 \end{cases}$ El sistema no tiene solución $\Rightarrow P_f = \emptyset$

Luego, como $\det(\vec{f}) = 1$ y $P_f = \emptyset$, $f$ es un movimiento helicoidal de eje $S$, ángulo orientado $\theta \in \,]0, 2\pi[$ y vector de deslizamiento $u$. Calculemos $S$, $\theta$ y $u$:

$$\vec{S} = V_1 = \ker(\vec{f} - Id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} = L(\{(0,0,1)\})$$

Tomemos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ genérico y calculemos $S$:

$$\overrightarrow{(x,y,z)f(x,y,z)} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x-y}{2}, 1\right) \in \vec{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-x-\sqrt{3}y}{2} = 0 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x-y}{2} = 0 \end{cases}$$

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} = (1,1,0) + L(\{(0,0,1)\})$$

Para calcular el ángulo $\alpha \in [0, \pi]$ no orientado:

$$2\cos(\alpha) + 1 = tr(\vec{f}) \Rightarrow 2\cos(\alpha) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Para calcular el ángulo orientado $\theta$ respecto a la orientación elegida en $\vec{S}^{\perp}$, elegimos una base ortonormal $B$ que determine la orientación positiva $O$ en $\vec{S}^{\perp}$ que vamos a fijar. Tenemos que $\vec{S}^{\perp} = L(\{(0,0,1)\})^{\perp} = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$, luego, tomando $B = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$:

$$M(\vec{f}_{|\vec{S}^{\perp}}; B) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \text{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Por último, calculemos el vector de deslizamiento $u \in \vec{S}$. Tomamos $(1,1,0) \in S$. Tenemos que:

$$u = \overrightarrow{(1,1,0)f(1,1,0)} = (1,1,1) - (1,1,0) \Rightarrow u = (1,0,0)$$

c) $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z + 1, \ y, \ \frac{-\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z - 1\right)$.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f};B_0)\cdot M(\vec{f};B_0)^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in O(3,\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f \text{ es un movimiento rígido}}$$

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

•) $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 1$

•) $f(x,y,z) = (x,y,z) \iff \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z + 1,\ y,\ \frac{-\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z - 1\right) = (x,y,z) \iff$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = -1 \\ 0 = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z = 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \lambda \\ z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$P_f = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + L(\{(0,1,0)\}) \neq \emptyset$$

Luego, como $\det(\vec{f}) = 1$ y $P_f = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + L(\{(0,1,0)\}) \neq \emptyset$, $\underline{f \text{ es un giro con eje } S = P_f \text{ y ángulo } \theta \in ]0,2\pi[ \text{ respecto de la orientación de } \vec{S}}$.

d) $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z + 2,\ y+2,\ \frac{-\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z + 2\right)$.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f};B_0)\cdot M(\vec{f};B_0)^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in O(3,\mathbb{R}) \Rightarrow \underline{f \text{ es un movimiento rígido}}$$

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

•) $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = -1$

•) $f(x,y,z) = (x,y,z) \iff \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z + 2,\ y+2,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z + 2\right) = (x,y,z) \iff$

$$\iff \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z = -2 \\ 2 = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}z = -2 \end{cases}$$ El sistema no tiene solución $\Rightarrow P_f = \emptyset$

Luego, como $\det(\vec{f}) = -1$ y $P_f = \emptyset$, $f$ es una simetría ortogonal deslizante respecto del plano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{(x,y,z)f(x,y,z)} \in \vec{S} = V_1\}$ y vector de deslizamiento $u = \overrightarrow{pf(p)}$, $p \in S$.

e) $f(x,y,z) = \left(-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z + 3,\ y,\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z - 1\right)$.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f};B_0)\cdot M(\vec{f};B_0)^t=\begin{pmatrix}-4/5 & 0 & 3/5\\ 0 & 1 & 0\\ 3/5 & 0 & 4/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4/5 & 0 & 3/5\\ 0 & 1 & 0\\ 3/5 & 0 & 4/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3\in O(3,\mathbb{R})\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f$ es un movimiento rígido

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

- $\det(\vec{f})=\begin{vmatrix}-4/5 & 0 & 3/5\\ 0 & 1 & 0\\ 3/5 & 0 & 4/5\end{vmatrix}=-1$

- $f(x,y,z)=(x,y,z)\iff\left(-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}z+3,\ y,\ \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}z-1\right)=(x,y,z)\iff$

$$\iff\begin{cases}-\frac{9}{5}x+\frac{3}{5}z=-3\\ 0=0\\ \frac{3}{5}x-\frac{1}{5}z=1\end{cases}\iff\begin{cases}x=\frac{\lambda+5}{3}\\ y=\mu\\ z=\lambda\end{cases}\quad\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

$$P_f=\left(\frac{5}{3},0,0\right)+L\left(\{(1,0,3),(0,1,0)\}\right)$$

$$\dim(P_f)=2$$

Luego, como $\det(\vec{f})=-1$ y $P_f=\left(\frac{5}{3},0,0\right)+L\left(\{(1,0,3),(0,1,0)\}\right)$, $f$ es una simetría ortogonal respecto del plano $S=P_f$.

f) $f(x,y,z)=\left(-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}z+3,\ y+4,\ \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}z-1\right)$.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}-4/5 & 0 & 3/5\\ 0 & 1 & 0\\ 3/5 & 0 & 4/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f};B_0)\cdot M(\vec{f};B_0)^t = \begin{pmatrix} -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in O(3,\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f$ es un movimiento rígido

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

- $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{vmatrix} = -1$

- $f(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z + 3,\ y+4,\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z - 1\right) = (x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{5}x + \frac{3}{5}z = -3 \\ 4 = 0 \\ \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}z = 1 \end{cases}$$ El sistema no tiene solución $\Rightarrow P_f = \emptyset$

Luego, como $\det(\vec{f}) = -1$ y $P_f = \emptyset$, $f$ es una simetría ortogonal deslizante respecto del plano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{(x,y,z)f(x,y,z)} \in \vec{S} = V_1\}$ y vector de deslizamiento $u = \overrightarrow{pf(p)},\ p \in S$.

g) $f(x,y,z) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{1}{\sqrt{5}}z,\ \frac{\sqrt{5}}{3}x - \frac{2}{3\sqrt{5}}y + \frac{4}{3\sqrt{5}}z,\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)$.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ \sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f}; B_0)\cdot M(\vec{f}; B_0)^t = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ \sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \\ 2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} & -1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in O(3,\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ $f$ es un movimiento rígido

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

- $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ \sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{vmatrix} = -1$

- $f(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{1}{\sqrt{5}}z, \frac{\sqrt{5}}{3}x - \frac{2}{3\sqrt{5}}y + \frac{4}{3\sqrt{5}}z, -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right) = (x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{1}{\sqrt{5}}z = 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{3}x - \frac{15+2\sqrt{5}}{15}y + \frac{4}{3\sqrt{5}}z = 0 \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad P_f = \{(0,0,0)\} \neq \emptyset$$

Luego, como $\det(\vec{f}) = -1$ y $P_f = \{(0,0,0)\} \neq \emptyset$, $f$ es la composición de un giro de eje $S = (0,0,0) + V_{-1}$ y ángulo orientado $\theta \in \,]0,2\pi[$ y una simetría ortogonal respecto del plano $T = (0,0,0) + V_{-1}^{\perp}$.

h) $f(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}x - \frac{2}{3\sqrt{5}}y + \frac{4}{3\sqrt{5}}z, \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{1}{\sqrt{5}}z, -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)$.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f};B_0)\cdot M(\vec{f};B_0)^t=\begin{pmatrix}\sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5}\\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ -2/3 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}/3 & 0 & -2/3\\ -2/3\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & -1/3\\ 4/3\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 2/3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3\in O(3,\mathbb{R}) \Rightarrow f \text{ es un movimiento rígido}$$

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

•) $\det(\vec{f})=\begin{vmatrix}\sqrt{5}/3 & -2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5}\\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ -2/3 & -1/3 & 2/3\end{vmatrix}=1$

•) $f(x,y,z)=(x,y,z) \iff \left(\frac{\sqrt{5}}{3}x-\frac{2}{3\sqrt{5}}y+\frac{4}{3\sqrt{5}}z, \frac{2}{\sqrt{5}}y+\frac{1}{\sqrt{5}}z, -\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z\right)=(x,y,z) \iff$

$$\iff \left.\begin{cases}\frac{-3+\sqrt{5}}{3}x-\frac{2}{3\sqrt{5}}y+\frac{4}{3\sqrt{5}}z=0\\ \frac{-5+2\sqrt{5}}{5}y+\frac{1}{\sqrt{5}}z=0\\ -\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z=0\end{cases}\right\}=\begin{cases}x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\lambda\\ y=(2+\sqrt{5})\lambda, \ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}$$

$$P_f=(0,0,0)+L\left(\left\{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}, 1\right)\right\}\right)\neq\emptyset$$

Luego, como $\det(\vec{f})=1$ y $P_f=(0,0,0)+L\left(\left\{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}, 1\right)\right\}\right)\neq\emptyset$, $f$ es un giro de eje $S=P_f$ y ángulo orientado $\sigma\in]0,2\pi[$.

i) $f(x,y,z)=\left(1+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z, 1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z\right)$.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2/3 & -2/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f}; B_0) \cdot M(\vec{f}; B_0)^t = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in O(3, \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f$ es un movimiento rígido

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

◦) $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{vmatrix} = -1$

◦) $f(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z\right) = (x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = -1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad P_f = \{(0,2,1)\} \neq \emptyset$$

Luego, como $\det(\vec{f}) = -1$ y $P_f = \{(0,2,1)\} \neq \emptyset$, $f$ es la composición de un giro de eje $S = (0,2,1) + V_{-1}$ y ángulo orientado $\theta \in ]0, 2\pi[$ y una simetría ortogonal respecto del plano $T = (0,2,1) + V_{-1}^{\perp}$.

(28) Se considera la aplicación afín $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial con respecto a $\mathcal{R}_u$ es:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que $f$ es una simetría ortogonal deslizante.

Tenemos que:

$$M(\vec{f}; B_0) \cdot M(\vec{f}; B_0)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in O(3, \mathbb{R}) \Rightarrow f \text{ es un movimiento rígido}$$

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

$\bullet)$ $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$\bullet)$ $f(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow (y+2, x, z+1) = (x,y,z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y = -2 \\ x-y = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$ El sistema no tiene solución $\Rightarrow P_f = \emptyset$

Luego, como $\det(\vec{f}) = -1$ y $P_f = \emptyset$, $f$ es una simetría ortogonal deslizante respecto del plano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{(x,y,z)f(x,y,z)} \in \vec{S} = V_1\}$ y vector de deslizamiento $u = \overrightarrow{pf(p)}$, $p \in S$.

b) Calcular el plano afín de simetría y el vector de traslación.

Calculemos el plano afín de simetría $S$:

$$\vec{S} = V_1 = \ker(\vec{f} - Id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} \cancel{-x+y=0} \\ x-y=0 \end{matrix}\right\} = L(\{(1,1,0),(0,0,1)\})$$

$$\overrightarrow{(x,y,z)f(x,y,z)} = (-x+y+2, x-y, 1) \in \vec{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x+y+2-x+y = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y = 1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y=1\} = (1,0,0) + L(\{(1,1,0),(0,0,1)\})$$

Finalmente, calculemos el vector de deslizamiento $u$. Tomemos $p = (1,0,0) \in S$. Tenemos que:

$$u = \overrightarrow{(1,0,0)f(1,0,0)} = (2,1,1) - (1,0,0) \Rightarrow \underline{u = (1,1,1) \in \vec{S}}$$

(29) Se considera la aplicación afín $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial con respecto a $\mathcal{R}_u$ es:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\sqrt{3})/2 \\ -(1+\sqrt{3})/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que $f$ es un movimiento helicoidal.

Tenemos que:

$$M(\vec{f}; B_0) \cdot M(\vec{f}; B_0)^t = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in O(3,\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f \text{ es un movimiento rígido}}$$

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

- $\det(\vec{f}) = \begin{vmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

- $f(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1+\sqrt{3}}{2}, z+1\right) = (x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ 0 = 1 \end{cases}$$ El sistema no tiene solución $\Rightarrow P_f = \emptyset$

Luego, como $\det(\vec{f}) = 1$ y $P_f = \emptyset$, <u>$f$ es un movimiento helicoidal de eje $S$, ángulo orientado $\theta \in \,]0, 2\pi[$ y vector de deslizamiento $u$.</u>

b) Calcular el eje, el ángulo y el vector de traslación.

Calculemos el eje $S$:

$$\vec{S} = V_1 = \ker(\vec{f} - Id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} = L(\{(0,0,1)\}).$$

$$\overrightarrow{(x,y,z) f(x,y,z)} = \left( -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1 \right) \in \vec{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-2+\sqrt{3}}{2}, 0\right) + L(\{(0,0,1)\}).$$

Calculemos ahora el vector de deslizamiento $u$. Tomemos $p = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-2+\sqrt{3}}{2}, 0\right) \in S$. Tenemos que:

$$u = \overrightarrow{\left(-\frac{1}{2}, \frac{-2+\sqrt{3}}{2}, 0\right) f\left(-\frac{1}{2}, \frac{-2+\sqrt{3}}{2}, 0\right)} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-2-\sqrt{3}}{2}, 1\right) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{-2+\sqrt{3}}{2}, 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = (0, -\sqrt{3}, 1)$$

Finalmente, calculemos el ángulo $\theta \in ]0, 2\pi[$ respecto a la orientación de $\vec{S}^{\perp}$. Tenemos que:

$$\vec{S}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z), (0,0,1) \rangle = 0 \right\} = L(\{(1,0,0), (0,1,0)\})$$

$$M(f_{|\vec{S}^{\perp}}; B_0) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

30) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera el movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$f_\alpha(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(-x+2y+2z+2,\ 2x+2y-z-1,\ 2x-y+2z-\alpha\right).$$

Clasificar, según los valores de $\alpha$, qué tipo de movimiento es $f_\alpha$, calculando en cada caso el conjunto de puntos fijos.

Reescribimos $f$ como:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$M(\vec{f}; B_0)\cdot M(\vec{f}; B_0)^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \in O(3,\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f \text{ es un movimiento rígido}}$$

Clasifiquemos el movimiento rígido $f$:

- $\det(\vec{f}) = -1$
- $f(x,y,z) = (x,y,z) \iff \left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z+\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{\alpha}{3}\right) =$

$$= (x,y,z) \iff \left\{\begin{array}{l} -\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z = -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z = \frac{\alpha}{3} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} -2x+y+z=-1 \\ 2x-y-z=1 \\ 2x-y-z=\alpha \end{array}\right.$$

Estudiemos el sistema en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$rg(A|b) = rg\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & | & -1 \\ 2 & -1 & -1 & | & 1 \\ 2 & -1 & -1 & | & \alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 2 & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Luego:

- Si $\alpha \neq 1 \Rightarrow$ El sistema es incompatible $\Rightarrow P_f = \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ es una simetría ortogonal deslizante respecto del plano $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{(x,y,z)f(x,y,z)} \in \vec{S} = V_1 \right\}$ y el vector de deslizamiento $u = \overrightarrow{pf(p)}$, $p \in S$.

- Si $\alpha = 1 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado $\Rightarrow$
$\Rightarrow P_f = (0,0,-1) + L\left(\left\{(1,0,2),(0,1,-1)\right\}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ es una simetría ortogonal respecto del plano $S = P_f$.

31) Discutir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^3$ con $p \neq q$, existe un único plano afín $S$ tal que $\sigma_S(p) = q$.

b) En $\mathbb{R}^3$, la composición de una simetría ortogonal y una traslación siempre es una simetría ortogonal o una simetría ortogonal deslizante.

c) La composición de dos rotaciones en $\mathbb{R}^3$ nunca puede tener un único punto fijo.

Pendiente.

(32) Decide de forma razonada qué tipo de movimiento rígido es.

a) La composición de dos simetrías ortogonales en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

Sean $f$ y $g$ dos simetrías ortogonales en $\mathbb{R}^2$. Tenemos que:

$$\det(\vec{f}) = -1 \;;\; P_f = \{p\},\ p \in \mathbb{R}^2$$

$$\det(\vec{g}) = -1 \;;\; P_g = \{q\},\ q \in \mathbb{R}^2$$

Luego:

$$\underline{\det(\overrightarrow{g \circ f})} = \det(\vec{g}) \cdot \det(\vec{f}) = \underline{1}$$

- •) Si $P_{g \circ f} = \emptyset \Rightarrow g \circ f$ es una traslación
- •) Si $P_{g \circ f} = \{u\},\ u \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow g \circ f$ es un giro
- •) Si $P_{g \circ f} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow g \circ f = Id_{\mathbb{R}^2}$

b) La composición de dos simetrías ortogonales con deslizamiento en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

Sean $f$ y $g$ dos simetrías ortogonales con deslizamiento en $\mathbb{R}^2$. Tenemos que:

$$\det(\vec{f}) = -1 \;;\; P_f = \emptyset$$

$$\det(\vec{g}) = -1 \;;\; P_g = \emptyset$$

Luego:

$$\underline{\det(\overrightarrow{g \circ f})} = \det(\vec{g}) \cdot \det(\vec{f}) = \underline{1}$$

- •) Si $P_{g \circ f} = \emptyset \Rightarrow g \circ f$ es una traslación
- •) Si $P_{g \circ f} = \{u\},\ u \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow g \circ f$ es un giro
- •) Si $P_{g \circ f} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow g \circ f = Id_{\mathbb{R}^2}$

c) La composición de un giro y una simetría en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

Sea $f$ un giro y $g$ una simetría en $\mathbb{R}^2$. Tenemos que:

$$\det(\vec{f}) = 1 \ ; \quad P_f = \{p\},\ p \in \mathbb{R}^2$$

$$\det(\vec{g}) = -1 \ ; \quad P_g = \{a + \lambda v : a \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}, v \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}\}$$

Luego:

$$\det(\overrightarrow{g \circ f}) = \det(\vec{g}) \cdot \det(\vec{f}) = -1$$

- Si $P_{g \circ f} = \{b + \mu v' ; b \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}, v' \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow$ $g \circ f$ es una simetría respecto de $P_{g \circ f}$
- Si $P_{g \circ f} = \emptyset \Rightarrow$ $g \circ f$ es una simetría deslizante

d) La composición de un giro y una simetría con deslizamiento en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

Sea $f$ un giro y $g$ una simetría con deslizamiento en $\mathbb{R}^2$. Tenemos que:

$$\det(\vec{f}) = 1 \ ; \quad P_f = \{p\},\ p \in \mathbb{R}^2$$

$$\det(\vec{g}) = -1 \ ; \quad P_g = \emptyset$$

Luego:

$$\det(\overrightarrow{g \circ f}) = \det(\vec{g}) \cdot \det(\vec{f}) = -1$$

- Si $P_{g \circ f} = \{a + \lambda v ; a \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}, v \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow$ $g \circ f$ es una simetría respecto de $P_{g \circ f}$
- Si $P_{g \circ f} = \emptyset \Rightarrow$ $g \circ f$ es una simetría deslizante

e) La composición de dos simetrías ortogonales en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Sean $f$ y $g$ dos simetrías ortogonales en $\mathbb{R}^3$. Tenemos que:

$$\det(\vec{f}) = -1 \quad ; \quad P_f = \{a+\lambda v \,;\, a\in\mathbb{R}^3, \lambda\in\mathbb{R}, v\in\vec{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\det(\vec{g}) = -1 \quad ; \quad P_g = \{b+\mu v' \,;\, b\in\mathbb{R}^3, \mu\in\mathbb{R}, v'\in\vec{\mathbb{R}^3}\}$$

Luego:

$$\det(\overrightarrow{g\circ f}) = \det(\vec{g})\cdot\det(\vec{f}) = 1$$

- Si $P_{g\circ f} = \mathbb{R}^3 \Rightarrow g\circ f = Id_{\mathbb{R}^3}$
- Si $P_{g\circ f} = \{c+\gamma v'' \,;\, c\in\mathbb{R}^3, \gamma\in\mathbb{R}, v''\in\vec{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow$ $g\circ f$ es un giro de eje $P_{g\circ f}$
- Si $P_{g\circ f} = \emptyset \Rightarrow$ $g\circ f$ es una traslación si $\overrightarrow{g\circ f} = Id_{\mathbb{R}^3}$
  $g\circ f$ es un movimiento helicoidal si $\overrightarrow{g\circ f} \neq Id_{\mathbb{R}^3}$

f) La composición de un giro y una simetría en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Sea $f$ un giro y $g$ una simetría en $\mathbb{R}^3$. Tenemos que:

$$\det(\vec{f}) = 1 \quad ; \quad P_f = \{a+\lambda v \,;\, a\in\mathbb{R}^3, \lambda\in\mathbb{R}, v\in\vec{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\det(\vec{g}) = -1 \quad ; \quad P_g = \{b+\mu v'+\gamma v'' \,;\, b\in\mathbb{R}^3, \mu,\gamma\in\mathbb{R}, v',v''\in\vec{\mathbb{R}^3}\}$$

Luego:

$$\det(\overrightarrow{g\circ f}) = \det(\vec{g})\cdot\det(\vec{f}) = -1$$

- Si $P_{g\circ f} = \{c+\alpha w+\beta w' \,;\, c\in\mathbb{R}^3, \alpha,\beta\in\mathbb{R}, w,w'\in\vec{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow$ $g\circ f$ es una simetría en $\mathbb{R}^3$
- Si $P_{g\circ f} = \{p\}, p\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ $g\circ f$ es la composición de un giro y una simetría
- Si $P_{g\circ f} = \emptyset \Rightarrow$ $g\circ f$ es una simetría deslizante

g) La composición de un giro y una traslación en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.
Pendiente.

h) La composición de dos simetrías centrales en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.
Pendiente.

(33) Sea $f: (A, \langle,\rangle) \longrightarrow (A', \langle,\rangle)$ una aplicación afín entre espacios afines euclídeos, y sea $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ un sistema de referencia rectangular en $(A, \langle,\rangle)$. Demostrar que $f$ es una isometría si, y solo si, $f(\mathcal{R}) = \{f(p_0), f(p_1), \dots, f(p_n)\}$ es un sistema de referencia rectangular en $(A', \langle,\rangle)$.

$\Rightarrow$] Sea $B = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$ una base ortonormal de $\vec{A}$. Como $f$ es una isometría, $\langle \vec{f}(u), \vec{f}(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, $\forall u, v \in \vec{A} \Rightarrow \langle \vec{f}(\overrightarrow{p_0p_i}), \vec{f}(\overrightarrow{p_0p_j})\rangle = \langle \overrightarrow{p_0p_i}, \overrightarrow{p_0p_j}\rangle = 0$ (ya que $B$ es una base ortonormal), $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Esto nos dice que $\vec{f}(B) = \{\vec{f}(\overrightarrow{p_0p_1}), \dots, \vec{f}(\overrightarrow{p_0p_n})\}$ es una base ortogonal de $\vec{A}$. Además, como

$$\|\vec{f}(\overrightarrow{p_0p_i})\| = \left(\langle \vec{f}(\overrightarrow{p_0p_i}), \vec{f}(\overrightarrow{p_0p_i})\rangle\right)^{1/2} = \left(\langle \overrightarrow{p_0p_i}, \overrightarrow{p_0p_i}\rangle\right)^{1/2} = \|\overrightarrow{p_0p_i}\| = 1$$

(ya que $B$ es una base ortonormal), $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Esto nos dice que $\vec{f}(B) = \{\vec{f}(\overrightarrow{p_0p_1}), \dots, \vec{f}(\overrightarrow{p_0p_n})\}$ es una base ortonormal de $\vec{A}$, luego, $f(\mathcal{R})$ es un sistema de referencia rectangular en $(A', \langle,\rangle)$.

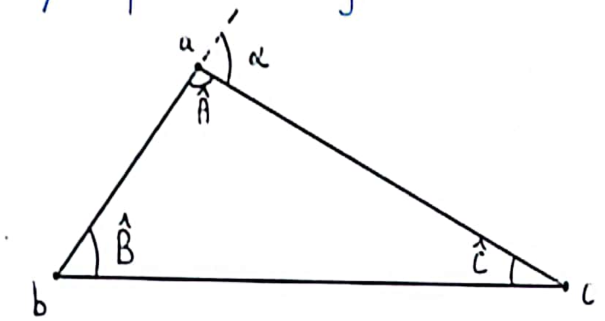
$\Leftarrow$] Como $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia rectangular en $(A, \langle,\rangle)$, $B = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$ es una base ortonormal en $\vec{A}$. Por otro lado, como $f(\mathcal{R}) = \{f(p_0), \dots, f(p_n)\}$ es un sistema de referencia rectangular en $(A', \langle,\rangle)$, $f(B) = \{\vec{f}(\overrightarrow{p_0p_1}), \dots, \vec{f}(\overrightarrow{p_0p_n})\}$ es una base ortonormal en $\vec{A'}$. Por tanto:

$$M(\vec{f}; B, f(B)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n \text{ es ortogonal} \Rightarrow f \text{ es una isometría. } \blacksquare$$

(34) Consideremos un triángulo $\{a,b,c\}$ en un plano afín euclídeo $(A, \langle , \rangle)$. Definimos el ángulo exterior en el vértice $a$ como el suplementario del interior en $a$:

$$\measuredangle_e(\vec{ab}, \vec{ac}) = \pi - \hat{A} = \pi - \measuredangle_0(\vec{ab}, \vec{ac}),$$

y análogamente para los otros dos vértices. Prueba que cada ángulo exterior es estrictamente mayor que los dos ángulos internos no adyacentes.




Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \\ \hat{A}+\alpha=\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\pi}-\alpha+\hat{B}+\hat{C}=\cancel{\pi} \Rightarrow \alpha=\hat{B}+\hat{C}$$

Como $\alpha = \hat{B}+\hat{C}$ y $\hat{B}>0, \hat{C}>0$, entonces $\alpha > \hat{B}$ y $\alpha > \hat{C}$.

Análogo para los vértices b y c.

(35) Prueba que en un triángulo isósceles (esto es, con dos lados de igual longitud), en un plano afín euclídeo, la recta de Euler contiene al incentro.

Pendiente.

(36) Encuentra un triángulo, en el plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$, en el que la recta de Euler no contenga al incentro.

Pendiente.