Geometría III

Relación de Ejercicios 1

① Sea V un espacio vectorial real. Se considera la aplicación $\to: V\times V \longrightarrow V$, $\overrightarrow{uv} := 2u - v$. Estudiar si $\to$ induce o no una estructura de espacio afín en V.

$\to$ induce una estructura afín en V si verifica lo siguiente:

1) $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}, \ \forall p, q, r \in V.$

2) $\forall p \in V, \ \forall v \in V, \ \exists! \, q \in V : \ \overrightarrow{pq} = v.$

Tomemos $p, q, r \in V$. Tenemos que:

$$\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = 2p - q + 2q - r = 2p + q - r = \overrightarrow{pr} + q \neq \overrightarrow{pr} = 2p - r$$

Por tanto, $\to$ no induce una estructura de espacio afín en V.

② Sean $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Definimos los siguientes conjuntos:

$$V = \{ f \in C^1(\mathbb{R}) \ / \ f'(x) + a(x) f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \},$$

$$A = \{ f \in C^1(\mathbb{R}) \ / \ f'(x) + a(x) f(x) = b(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \},$$

donde $C^1(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial real de las funciones de clase C^1 sobre los reales. Se pide lo siguiente:

a) Demostrar que V es un espacio vectorial real.

$V(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real si se verifica lo siguiente:

1) Propiedad conmutativa ($f+g=g+f$, $\forall f,g\in V$):

Tomemos $f,g\in V$. Es fácil ver que $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$, $\forall f,g\in V$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ya que la suma de funciones es conmutativa: $f(x)+g(x)=(f+g)(x)=$
$=(g+f)(x)=g(x)+f(x)$.

2) Propiedad asociativa ($f+(g+h)=(f+g)+h$, $\forall f,g,h\in V$):

Tomemos $f,g,h\in V$. Es fácil ver que $f(x)+(g(x)+h(x))=$
$=(f(x)+g(x))+h(x)$, $\forall f,g,h\in V$, $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)+(g(x)+h(x))=$
$=f(x)+(g+h)(x)=(f+g+h)(x)=(f+g)(x)+h(x)=(f(x)+g(x))+h(x)$.

3) Elemento neutro ($\exists t\in V: f+t=f$, $\forall f\in V$):

Basta tomar $t(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, para que $f(x)+t(x)=f(x)$, $\forall f\in V$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

4) Elemento opuesto ($\forall f\in V$, $\exists -f\in V: f+(-f)=t$):

Sea $f\in V$. Tenemos que:

$$f\in V\Rightarrow f\in C^1(\mathbb{R}): f'(x)+a(x)f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -f'(x)-a(x)f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -f\in V$$

Luego, $\forall f\in V$, $\exists -f\in V: f+(-f)=t$, siendo $t\in V$ el elemento neutro.

Escaneado con CamScanner

5) Propiedad distributiva del producto respecto a la suma en V $\left(\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f,g \in V\right)$:

Tomemos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f,g \in V$. Es fácil ver que $\lambda\left(f(x)+g(x)\right)= = \lambda f(x)+\lambda g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$: $\lambda\left(f(x)+g(x)\right)=\lambda\left(f+g\right)(x)=\left(\lambda f+\lambda g\right)(x)=\lambda f(x)+\lambda g(x)$.

6) Propiedad distributiva del producto respecto a la suma en $\mathbb{R}$ $\left((\lambda+\mu)\cdot f=\lambda f+\mu f,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \forall f \in V\right)$:

Tomemos $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ y $f \in V$. Es fácil ver que $(\lambda+\mu)\cdot f(x)= = \lambda f(x)+\mu f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$: $(\lambda+\mu)\cdot f(x)=\left((\lambda+\mu)\cdot f\right)(x)=\left(\lambda f+\mu f\right)(x)=\lambda f(x)+\mu f(x)$.

7) Pseudoasociativa $\left(\lambda\cdot(\mu\cdot f)=(\lambda\cdot\mu)\cdot f,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \forall f \in V\right)$:

Tomemos $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ y $f \in V$. Es fácil ver que $\lambda\cdot\left(\mu\cdot f(x)\right)= = (\lambda\cdot\mu)\cdot f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$: $\lambda\cdot\left(\mu\cdot f(x)\right)=\lambda\cdot\left(\mu\cdot f\right)(x)=\left(\lambda\cdot\mu\cdot f\right)(x)=(\lambda\cdot\mu)\cdot f(x)$.

8) Unimodular $\left(\exists\, \gamma \in \mathbb{R}:\ \gamma\cdot f=f,\ \forall f \in V\right)$:

Basta tomar $\gamma=1$ para que $\gamma\cdot f(x)=f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

En conclusión, V es un espacio vectorial real.

b) Supongamos sabido que $A \neq \emptyset$. Probar que A es un espacio afín sobre V cuando, para cada par de funciones $f, g \in A$, definimos $\overrightarrow{fg} = g(x) - f(x)$.

A es un espacio afín sobre V si verifica lo siguiente:

1) $\overrightarrow{fg} + \overrightarrow{gh} = \overrightarrow{fh}, \ \forall f, g, h \in A$

Tomemos $f, g, h \in A$. Tenemos que:

$$\overrightarrow{fg} + \overrightarrow{gh} = \cancel{g(x)} - f(x) + h(x) - \cancel{g(x)} = h(x) - f(x) = \overrightarrow{fh}$$

2) $\forall f \in V, \forall h \in V, \exists! g \in V : \overrightarrow{fg} = h$

Tomemos $f, g, h \in A$: $h(x) = g(x) - f(x)$. De esta forma,

$\forall f \in V, \forall h \in V, \exists! g \in V : \overrightarrow{fg} = g(x) - f(x) = h(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

En conclusión, A es un espacio afín sobre V.

3 (Producto de espacios afines). Sean A_1 y A_2 dos espacios afines sobre espacios vectoriales reales V_1 y V_2. Se pide lo siguiente:

a) Demostrar que el producto cartesiano $A_1 \times A_2$ es un espacio afín sobre $V_1 \times V_2$ cuando definimos:

$$\overrightarrow{(p_1, p_2)(q_1, q_2)} = (\overrightarrow{p_1 q_1}, \overrightarrow{p_2 q_2}).$$

$A_1 \times A_2$ es un espacio afín sobre $V_1 \times V_2$ si verifica lo siguiente:

1) $\underbrace{\overrightarrow{(p_1,p_2)(q_1,q_2)} + \overrightarrow{(q_1,q_2)(r_1,r_2)} = \overrightarrow{(p_1,p_2)(r_1,r_2)}}$,

$\underbrace{\forall (p_1,p_2),(q_1,q_2),(r_1,r_2) \in A_1 \times A_2}$

Tomemos $(p_1,p_2),(q_1,q_2),(r_1,r_2) \in A_1 \times A_2$. Tenemos que:

$$\overrightarrow{(p_1,p_2)(q_1,q_2)} + \overrightarrow{(q_1,q_2)(r_1,r_2)} = (\overrightarrow{p_1q_1}, \overrightarrow{p_2q_2}) + (\overrightarrow{q_1r_1}, \overrightarrow{q_2r_2}) =$$
$$= (\overrightarrow{p_1q_1} + \overrightarrow{q_1r_1}, \overrightarrow{p_2q_2} + \overrightarrow{q_2r_2}) = (\cancel{q_1} - p_1 + r_1 - \cancel{q_1}, \cancel{q_2} - p_2 + r_2 - \cancel{q_2}) =$$
$$= (r_1 - p_1, r_2 - p_2) = (\overrightarrow{p_1r_1}, \overrightarrow{p_2r_2}) = \overrightarrow{(p_1,p_2)(r_1,r_2)}$$

2) $\underbrace{\forall (p_1,p_2) \in A_1 \times A_2, \forall (r_1,r_2) \in A_1 \times A_2, \exists! (q_1,q_2) : \overrightarrow{(p_1,p_2)(q_1,q_2)} = (r_1,r_2)}$

Tomemos $(p_1,p_2),(q_1,q_2),(r_1,r_2) \in A_1 \times A_2 : (r_1,r_2) = (\overrightarrow{p_1q_1}, \overrightarrow{p_2q_2})$.

De esta forma, $\forall (p_1,p_2) \in A_1 \times A_2, \forall (r_1,r_2) \in A_1 \times A_2, \exists! (q_1,q_2)$:

: $\overrightarrow{(p_1,p_2)(q_1,q_2)} = (r_1,r_2)$.

En conclusión, $\underbrace{A_1 \times A_2 \text{ es un espacio afín sobre } V_1 \times V_2}$.

b) Supongamos que $\dim(A_1) = m$ y $\dim(A_2) = n$. Sea $R_i = \{o_i ; B_i\}$ un sistema de referencia cartesiano en A_i para cada $i = 1, 2$. Pongamos $B_1 = \{u_1, \dots, u_m\}$ y $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$. Demostrar que el par $R_1 \times R_2 = \{(o_1, o_2) ; B_1 \times B_2\}$, donde:

$$B_1 \times B_2 = \{(u_1,0),\dots,(u_m,0),(0,v_1),\dots,(0,v_m)\},$$

es un sistema de referencia cartesiano en $A_1 \times A_2$. A partir de aquí concluir que $\dim(A_1 \times A_2) = m+n$.

Como $R_1 = \{o_1 ; B_1\}$ es un sistema de referencia de A_1, entonces o_1 es el origen del sistema de referencia y B_1 es una base ordenada de A_1. Ídem para R_2.

Tomamos (o_1, o_2) como origen del sistema de referencia $R_1 \times R_2$. Solo tendríamos que ver que $B_1 \times B_2$ es una base ordenada de $A_1 \times A_2$ lo cual es fácil de ver.

Por tanto, $R_1 \times R_2 = \{(o_1,o_2) ; B_1 \times B_2\}$ es un sistema de referencia de $A_1 \times A_2$.

Como $B_1 \times B_2 = \{\underbrace{(u_1,0),\dots,(u_m,0)}_{m \text{ vectores}},\underbrace{(0,v_1),\dots,(0,v_n)}_{n \text{ vectores}}\}$ es una base ordenada de $A_1 \times A_2$, entonces $\dim(A_1 \times A_2) = m+n$.

c) Sea $(p_1, p_2) \in A_1 \times A_2$. Cómo se relacionan las coordenadas de (p_1,p_2) en $R_1 \times R_2$ con las coordenadas de p_1 en R_1 y de p_2 en R_2.

Teniendo en cuenta que $B_1 \times B_2 = \{(u_1,0),\dots,(u_m,0),(0,v_1),\dots,(0,v_m)\}$, tenemos que:

$$(p_1)_{\mathcal{R}_1} = M\left(Id_{A_1 \times A_2}, \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1\right) \cdot (p_1, p_2)_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$$

$$(p_2)_{\mathcal{R}_2} = M\left(Id_{A_1 \times A_2}, \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2\right) \cdot (p_1, p_2)_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$$

donde:

$$M\left(Id_{A_1 \times A_2}, \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1\right) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow \text{ Columna } m\text{-ésima} \end{array}$$

$$M\left(Id_{A_1 \times A_2}, \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2\right) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \text{ Columna } m\text{-ésima} \qquad \uparrow \text{ Columna } (m+n)\text{-ésima} \end{array}$$

4) En $\mathbb{R}^3$ consideramos el conjunto $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ formado por los puntos: $p_0 = (1,2,1)$, $p_1 = (2,1,0)$, $p_2 = (0,1,0)$, $p_3 = (1,-1,2)$. Demostrar que $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia afín de $\mathbb{R}^3$. Calcular las coordenadas del punto $p = (0,0,0)$ con respecto a $\mathcal{R}$.

Comencemos probando que $\dim(\{p_0, p_1, p_2, p_3\}) = 3$. Para ello:

$$rg(\{p_0, p_1, p_2, p_3\}) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \Rightarrow \dim(\{p_0, p_1, p_2, p_3\}) = 3.$$

Definimos $B = \{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\} = \{(1,-1,1), (-1,-1,-1), (0,-3,1)\}$.

Veamos que B es base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cancel{+3} \cancel{-3} -1 = -2 \neq 0 \Rightarrow B \text{ es base de } \mathbb{R}^3$$

De esta forma, $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\} = \{P_0; B\}$ es un sistema de referencia afín de $\mathbb{R}^3$.

Finalmente, calculemos las coordenadas de $p = (0,0,0)$ con respecto a $\mathcal{R}$. Consideremos $\mathcal{R}_0 = \{(0,0,0); B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}\}$. Tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p' \end{pmatrix} = M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$$

donde:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 2 & -1/2 & -3/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 2 & -1/2 & -3/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{p_{\mathcal{R}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)^t}$$

5. Consideremos el punto $p = (1,-7,4)$ de $\mathbb{R}^3$. Encontrar un sistema de referencia cartesiano de $\mathbb{R}^3$ de forma que $p_{\mathcal{R}} = (-1,-2,2)^t$. ¿Cuántos sistemas de referencia cartesianos en estas condiciones existen?

Consideremos $\mathcal{R}_0 = \{(0,0,0); B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}\}$. Tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p' \end{pmatrix} = M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

donde:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (0,0,0)_{\mathcal{R}} & & M(Id_{\mathbb{R}^3}, B_0, B) & \end{array}\right)$$

Si, por ejemplo, tomamos $M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$ vemos que las coordenadas de $p = (1,-7,4)$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ son $p_{\mathcal{R}} = (-1,-2,2)^t$. De esta forma:

$$(0,0,0)_{\mathcal{R}} = (1,1,-1)^t$$

$$M(Id_{\mathbb{R}^3}, B_0, B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M(Id_{\mathbb{R}^3}, B, B_0) =$$

$$= M(Id_{\mathbb{R}^3}, B_0, B)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ -1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (0,1,-1), (0,-1,0) \right\}$$

En conclusión, tomando el sistema de referencia:

$$\mathcal{R} = \left\{ (0,0,0) ; B = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (0,1,-1), (0,-1,0) \right\} \right\}$$

tenemos que $p_{\mathcal{R}} = (-1,-2,2)^t$, siendo $p = (1,-7,4)$.

Nótese que hemos elegido razonadamente la matriz $M(Id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R})$. Podríamos haber elegido otra matriz diferente que siguiera cumpliendo las condiciones del problema, dando lugar a otro sistema de referencia $\mathcal{R}$. Por tanto, existen infinitos sistemas de referencia que cumplen las condiciones del problema.

⑥ En $\mathbb{R}^2$ se consideran los sistemas de referencia cartesianos dados por $\mathcal{R} = \{O;\ B = \{v_1, v_2\}\}$ y $\mathcal{R}' = \{O';\ B' = \{v_1+v_2,\ v_1-v_2\}\}$.

Supongamos que $\overrightarrow{O'O} = v_1 + v_2$.

a) Escribir la ecuación matricial del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

La ecuación matricial del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sería:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p' \end{pmatrix} = M(Id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$$

donde:

$$M(Id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline O_{\mathcal{R}'} & \multicolumn{2}{c}{M(Id_{\mathbb{R}^2}, B, B')} \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$\overrightarrow{O'O} = v_1 + v_2 \implies O_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M(Id_{\mathbb{R}^2}, B, B') = M(Id_{\mathbb{R}^2}, B', B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

En conclusión, la ecuación matricial del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$$

b) Calcular las coordenadas en $\mathcal{R}'$ del punto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $p_{\mathcal{R}} = (1,1)^t$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{p_{\mathcal{R}'} = (2,0)^t}$$

7. En un plano afín A se considera el sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{a, b, c\}$ y los puntos:

$$a' = a + 2\vec{ab}, \quad b' = a + \vec{ab} - \vec{ac}, \quad c' = a - \vec{ab} - \vec{ac}.$$

Probar que $\mathcal{R}' = \{a', b', c'\}$ es un sistema de referencia afín en A. Calcular las coordenadas de un punto en $\mathcal{R}'$ en función de las coordenadas en $\mathcal{R}$.

Como A es un plano afín, entonces $\dim(A) = 2$. Teniendo esto en cuenta, definimos $B' = \{\vec{a'b'}, \vec{a'c'}\}$. Sabiendo que $B = \{\vec{ab}, \vec{ac}\} = \{b-a, c-a\}$, tenemos que:

$$\vec{a'b'} = b' - a' = \cancel{a} + \vec{ab} - \vec{ac} - \cancel{a} - 2\vec{ab} = -\vec{ab} - \vec{ac} = -1(b-a) - 1(c-a) = (-1,-1)_B$$

$$\vec{a'c'} = c' - a' = \cancel{a} - \vec{ab} - \vec{ac} - \cancel{a} - 2\vec{ab} = -3\vec{ab} - \vec{ac} = -3(b-a) - 1(c-a) = (-3,-1)_B$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \langle \{a', b', c'\} = A \rangle \Rightarrow \boxed{\mathcal{R}' = \{a', b', c'\} \text{ es un sistema de referencia afín en } A}$$

Calculemos ahora la ecuación matricial del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$:

$$\vec{a'a} = a - a' = \cancel{a} - \cancel{a} - 2\vec{ab} = -2\vec{ab}$$

$$-2\vec{ab} = \lambda(-\vec{ab} - \vec{ac}) + \mu(-3\vec{ab} - \vec{ac}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda - 3\mu = -2 \\ -\lambda - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{\mathcal{R}'} = (-1, 1)^t$$

$$M(Id_A, B, B') = M(Id_A, B', B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las coordenadas de un punto p en $\mathcal{R}'$ en función de las coordenadas en $\mathcal{R}$ son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \\ \hline a_{\mathcal{R}'} & M(Id_A, B, B') \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ p' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}}$$

8 Sea A un espacio afín y $S \subseteq A$ un subespacio afín. Dado $p \in A$, demostrar que $S = p + \vec{S}$ si, y solo si, $p \in S$. Además, si $p \notin S$, probar que $S \cap T = \emptyset$, donde $T = p + \vec{S}$.

Comencemos probando que dado un punto $p \in A$, entonces $S = p + \vec{S}$ si, y solo si, $p \in S$:

$\Rightarrow$

Sea $S = p + \vec{S}$. Como S es un subespacio afín de A, entonces, necesariamente, $p \in S$.

$\Leftarrow$

Sea $p \in S$. Por definición de subespacio afín, $S = p + \vec{S}$.

Finalmente, probemos que si $p \notin S$, entonces $S \cap T = \emptyset$, donde $T = p + \vec{S}$. Sea $T = p + \vec{S}$. Si $p \notin S$, $p + \vec{S} = \{p + s \,;\, s \in \vec{S}\}$, donde $\vec{S}$ es un subespacio vectorial, luego, $\forall u \in S$, $\exists -u$ tal que $u + (-u) = e$, siendo $e \in S$ el elemento neutro de la suma $(u + e = u)$. Como $p + e = p$, entonces $p \in p + \vec{S}$ pero sabemos que $p \notin S$, luego $p + \vec{S} \notin S$. Por tanto, si $p \notin S$, entonces $S \neq p + \vec{S} = T$, siendo evidente que $S \cap T = \emptyset$.

9 Demostrar que toda recta afín de $\mathbb{R}^3$ es la intersección de dos planos afines. ¿Es cierta esta afirmación en $\mathbb{R}^n$?

Sean S_1 y S_2 dos planos afines en $\mathbb{R}^3$ $\left(\dim(S_1) = \dim(S_2) = 2\right)$. Para que $S_1 \cap S_2$ sea una recta afín tiene que darse que $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$. Por tanto, por la fórmula de las dimensiones:

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \vee S_2) = 4 - \dim(S_1 \vee S_2)$$

Sabemos que $S_1 \vee S_2 = \bigcap_{T \in F_S} T$, $F_S = \{T \subset \mathbb{R}^3 : S_1 \cup S_2 \subseteq T\}$, luego, como mínimo $\dim(S_1 \vee S_2) = 2$.

•) Si $\dim(S_1 \cap S_2) = 0 \Rightarrow \dim(S_1 \vee S_2) = 5$

•) Si $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 0$, entonces (como $4 \geq \dim(S_1 \vee S_2) \geq 2$) $\dim(S_1 \cap S_2) \leq 2$:

- Si $\dim(S_1 \cap S_2) = 2 \Rightarrow S_1 = S_2$, pero, por hipótesis, $S_1 \neq S_2$.
- Si $\dim(S_1 \cap S_2) = 1 \Rightarrow S_1 \cap S_2$ es una recta afín.
- Si $\dim(S_1 \cap S_2) = 0 \Rightarrow$ Contradicción. Por hipótesis, $\dim(S_1 \cap S_2) \neq 0$.

En conclusión, en $\mathbb{R}^3$, toda recta afín es intersección de dos planos afines.

Sean ahora S_1 y S_2 dos planos afines en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ $\left(\dim(S_1) = \dim(S_2) = 2\right)$.
Por la fórmula de las dimensiones:

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \vee S_2) = 4 - \dim(S_1 \vee S_2)$$

Notemos que tenemos los mismos casos que para $\mathbb{R}^3$. Por tanto, en $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 3)$ toda recta afín es intersección de dos planos afines. Si $n < 3$, esto no sería cierto ya que no existirían planos afines.

(10) Sean L una recta afín y S un hiperplano afín de un espacio afín A. Supongamos que $\vec{L} + \vec{S} = \vec{A}$. Probar que $L \cap S$ es un único punto.

Sabemos que:

$$\dim(A) = n = \dim(\vec{A})$$

$$\dim(L) + \dim(S) = n = \dim(\vec{L}) + \dim(\vec{S})$$

$$\left.\begin{cases} \text{Como } L \text{ es una recta afín} \Rightarrow \dim(\vec{L}) = 1 \\ \text{Como } S \text{ es un hiperplano afín} \Rightarrow \dim(\vec{S}) = n-1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \vec{L} \oplus \vec{S} = \vec{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(\vec{L} \cap \vec{S}) = \dim(L \cap S) = 0 \Rightarrow L \cap S = \{o\}$$

En conclusión, si $\vec{L} + \vec{S} = \vec{A}$, siendo L una recta afín y S un hiperplano afín de A, entonces $L \cap S = \{o\}$, es decir, $L \cap S$ es un único punto.

(11) En cada uno de estos casos, decidir razonadamente si S es o no un subespacio afín de A:

a) $A = \mathbb{R}^5$, $S = \{(x,y,z,t,s) \in \mathbb{R}^5 / -y = 2x + z + 1\}$.

$\vec{S} = \{(x,y,z,t,s) \in \mathbb{R}^5 / 2x + y + z = 0\} = L(\{(0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1),$
$(1,0,-2,0,0), (0,1,-1,0,0)\})$

$$S = \underbrace{(0,-1,0,0,0)}_{\in S} + \underbrace{L(\{(0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1), (1,0,-2,0,0), (0,1,-1,0,0)\})}_{\text{Subespacio vectorial de } \vec{\mathbb{R}^5}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ S es un subespacio afín de $A = \mathbb{R}^5$

b) $A = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

$\vec{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\vec{\mathbb{R}^3}$.

$S = \underbrace{(0,0,0)}_{\in S} + \vec{S} \Rightarrow$ S es un subespacio afín de $A = \mathbb{R}^3$

c) $A=\mathbb{R}^2$, $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2=y^2\}$.

$\vec{S}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2=y^2\}$

$\left.\begin{array}{l}(-1,1)\in\vec{S}\\(2,2)\in\vec{S}\end{array}\right\} \Rightarrow (-1,1)+(2,2)=(1,3)\notin\vec{S} \Rightarrow \vec{S}$ no es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S no es un subespacio afín de $A=\mathbb{R}^2$

d) $A=\mathbb{R}^2$, $S=\{(0,1),(1,0)\}$.

$\vec{S}=\{(0,1),(1,0)\}$

$\left.\begin{array}{l}(0,1)\in\vec{S}\\(1,0)\in\vec{S}\end{array}\right\} \Rightarrow (0,1)+(1,0)=(1,1)\notin\vec{S} \Rightarrow \vec{S}$ no es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S no es un subespacio afín de $A=\mathbb{R}^2$

e) $A=\mathbb{R}^2$, $S=\langle\{(0,1),(1,0)\}\rangle$.

$\vec{S}=\langle\{(0,1),(1,0)\}\rangle=L(\{(0,1),(1,0)\})$ es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$

$S=\underbrace{(0,1)}_{\in S}+\vec{S} \Rightarrow$ S es un subespacio afín de $A=\mathbb{R}^2$

f) $A=\mathbb{R}^3$, $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2\geq 0\}$.

$\vec{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2\geq 0\}$ es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$.

$S=\underbrace{(0,0,0)}_{\in S}+\vec{S} \Rightarrow$ S es un subespacio afín de $A=\mathbb{R}^3$

g) $A=\mathbb{R}^3,\ S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x=y=z\}.$

$\vec{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x=y=z\}=L(\{(1,1,1)\})$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

$S=\underbrace{(0,0,0)}_{\in S}+\vec{S}\Rightarrow$ S es un subespacio afín de $A=\mathbb{R}^3$

h) $A=\mathbb{R}^n,\ S=\mathbb{Q}^n.$

$\vec{\mathbb{Q}^n}$ es un subespacio vectorial de $\vec{\mathbb{R}^n}$.

$S=\underset{\in S}{q}+\vec{\mathbb{Q}^n}\Rightarrow$ S es un subespacio afín de $A=\mathbb{R}^n$

i) $A=M_2(\mathbb{R}),\ S=\left\{\begin{pmatrix} a-2 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix} \,/\, a\in\mathbb{R}\right\}.$

$\vec{S}=\left\{\begin{pmatrix} a-2 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix} \,/\, a\in\mathbb{R}\right\}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\notin\vec{S}\Rightarrow\vec{S}$ no es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{M_2(\mathbb{R})}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ S no es un subespacio afín de $A=M_2(\mathbb{R})$

j) $A=\mathbb{R}[x],\ S=\{p(x)\in\mathbb{R}[x] \,/\, \text{grado}(p(x))=n\}\ (n\in\mathbb{N}).$

$\vec{S}=\{p(x)\in\mathbb{R}[x] \,/\, \text{grado}(p(x))=n\}\ (n\in\mathbb{N})$

$0\in\vec{S}\Rightarrow\vec{S}$ no es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{\mathbb{R}[x]}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ S no es un subespacio afín de $A=\mathbb{R}[x]$

(12) ¿Es siempre la unión de dos subespacios afines un subespacio afín? Si la respuesta es afirmativa, probarlo. Si es negativa, mostrar un contraejemplo.

Sabemos que $S = p + U$ es un subespacio afín si $\exists p \in S$ tal que $U = \{\vec{pu} \,/\, u \in U\}$ es un subespacio vectorial. Por tanto, sean S_1 y S_2 dos subespacios afines y $p \in S_1, S_2$. Tenemos que:

$$S_1 \cup S_2 = p + \bigcup_{i \in I} \vec{S_i} \iff \underbrace{\bigcup_{i \in I} \vec{S_i} \text{ es un subespacio vectorial}}_{\text{Sabemos que, en general, esto no es cierto}}$$

Mostremos un contraejemplo. Sean $p = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, $S_1 = \{(x,0) \,/\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, $S_2 = \{(0,y) \,/\, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Es evidente que:

$$\left.\begin{array}{l}(0,1) \in \vec{S_1} \cup \vec{S_2} \\ (1,0) \in \vec{S_1} \cup \vec{S_2}\end{array}\right\} \Rightarrow (0,1) + (1,0) = (1,1) \notin \vec{S_1} \cup \vec{S_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{S_1} \cup \vec{S_2} \text{ no es un subespacio vectorial} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S_1 \cup S_2 = p + \bigcup_{i \in I} \vec{S_i} \text{ no es un subespacio afín}}$$

(13) Encontrar la recta del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que pasa por $P_0 = (1,1,1)$ y se apoya en las rectas $R_1 = (0,0,1) + L(\{(1,0,1)\})$ y $R_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} x+y=0 \\ z-y+1=0 \end{array}\right\}$.

Sabemos que si A es un espacio afín y $S, T \subseteq A$ son dos subespacios afines de A, entonces S y T se cruzan si no son secantes ($S \cap T = \emptyset$) y no existe ninguna relación de paralelismo ($\vec{S} \not\subset \vec{T}$, $\vec{T} \not\subset \vec{S}$). Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{R}_1 = L(\{(1,0,1)\}) \\ \vec{R}_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} x+y=0 \\ z-y=0\end{array}\right\} = L(\{(-1,1,1)\})\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{R}_1 \not\subseteq \vec{R}_2 \\ \vec{R}_2 \not\subseteq \vec{R}_1\end{array}$$

$$R_1 = (0,0,1) + L(\{(1,0,1)\}) = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} x-z+1=0 \\ y=0\end{array}\right\}$$

$$R_2 = (0,0,-1) + L(\{(-1,1,1)\})$$

$$R_1 \cap R_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} x+y=0 \\ z-y+1=0 \\ y=0 \\ x-z+1=0\end{array}\right\} = \emptyset$$

Por tanto, como $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, $\vec{R}_1 \not\subseteq \vec{R}_2$ y $\vec{R}_2 \not\subseteq \vec{R}_1$, entonces R_1 y R_2 se cruzan. Sabemos que si $R_1 = p_1 + L(\{v_1\})$ y $R_2 = p_2 + L(\{v_2\})$ son dos rectas afines de un espacio afín A que se cruzan y $p_0 \notin (p_1 + L(\{v_1,v_2\})) \cup (p_2 + L(\{v_1,v_2\}))$, entonces existe una única recta afín $R \subseteq A$ que pasa por p_0 y se apoya en R_1 y R_2. Ya hemos visto que R_1 y R_2 se cruzan. Sea $p_0 = (1,1,1)$. Como $p_0 \notin R_1$ y $p_0 \notin R_2$, entonces $p_0 \notin R_1 \cup R_2$. Por tanto, existe una única recta afín $R \subseteq A$ que pasa por $p_0 = (1,1,1)$ y se apoya en R_1 y R_2. Vamos a calcularla. Para ello, comencemos calculando unas ecuaciones paramétricas de R_1. Consideremos el sistema de referencia $R_0 = \{(0,0,0) \,;\, B_0 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\}$. Unas ecuaciones paramétricas de R_1 en R_0 son:

$$(x,y,z)^t = (0,0,1)^t + (1,0,1)^t\lambda = (\lambda, 0, 1+\lambda)^t$$

Calculemos ahora unas ecuaciones paramétricas de R_2 en R_0:

$$(x,y,z)^t = (0,0,-1)^t + (-1,1,1)^t \mu = (-\mu, \mu, -1+\mu)^t$$

Basta encontrar puntos en R_1 y R_2 alineados con $p_0 = (1,1,1)$, es decir, encontrar $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que los puntos $(\lambda, 0, 1+\lambda)$, $(-\mu, \mu, -1+\mu)$ y $p_0 = (1,1,1)$ sean afínmente dependientes, es decir, estén alineados. Por tanto:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \lambda-1 & -\mu-1 \\ -1 & \mu-1 \\ \lambda & \mu-2 \end{pmatrix} = 1 \iff \begin{matrix} \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -\mu-1 \\ -1 & \mu-1 \end{pmatrix} = 0 \\ \det\begin{pmatrix} -1 & \mu-1 \\ \lambda & \mu-2 \end{pmatrix} = 0 \end{matrix} \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{matrix} -\lambda - 2\mu + \lambda\mu = 0 \\ \lambda - \mu - \lambda\mu + 2 = 0 \end{matrix} \right\} \iff \left\{ \begin{matrix} \lambda = -4 \\ \mu = 2/3 \end{matrix} \right\}$$

Por tanto:

$$R = \langle \{(-4,0,-3), (-2/3, 2/3, -1/3), (1,1,1)\} \rangle = \langle \{(-4,0,-3), (1,1,1)\} \rangle \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $R = (1,1,1) + L(\{(-5,-1,-4)\})$ es una recta afín de $\mathbb{R}^3$ que pasa por $p_0 = (1,1,1)$ y se apoya en las rectas R_1 y R_2

14) Demostrar que todo subespacio afín S de $\mathbb{R}^n$ es cerrado para la topología usual. Demostrar también que si $S \neq \mathbb{R}^n$, entonces S tiene interior vacío.

Pendiente.

(15) ¿Para qué valores de $t \in \mathbb{R}$ los puntos $p=(1,0,-1)$, $q=(-2,0,2)$ y $r=(t,0,3)$ de $\mathbb{R}^3$ están alineados? Para dichos valores, calcular una recta afín que los contenga. ¿Es la recta única? ¿Pertenece el punto $s=(-2,2,0)$ a dicha recta?

Los puntos estarán alineados si, y solo si, no son afínmente independientes:

$$\operatorname{rg}(\vec{pq}, \vec{pr}) = 1 \iff \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -3 & t-1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \iff \det\begin{pmatrix} -3 & t-1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0 \iff \boxed{t=-3}$$

Para $t=-3$, una recta $\mathcal{R}$ que contiene a los tres puntos sería:

$$\mathcal{R} = \langle \{(1,0,-1), (-2,0,2), (-3,0,3)\} \rangle = \langle \{(1,0,-1), (-3,0,3)\} \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{R} = (1,0,-1) + L(\{(-4,0,4)\})}$$

$\mathcal{R}$ no es única, podríamos haber tomado también la recta $\mathcal{R}' = (-3,0,3) + L(\{(4,0,-4)\})$.

Para ver si $s=(-2,2,0) \in \mathcal{R}$, calculamos las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{R}$ y vemos si s las verifica. Para ello, supongamos el sistema de referencia $\mathcal{R}_0 = \{(0,0,0); B_u = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\}$. Tenemos que:

$$(x,y,z)^t = (1,0,-1)^t + (-4,0,4)^t \lambda = (1-4\lambda, 0, 4\lambda-1)^t, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{R} \equiv \begin{cases} x = 1-4\lambda \\ y = 0 \\ z = 4\lambda - 1 \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Vemos que la segunda coordenada de s es $2 \neq 0$, luego, $s \in \mathcal{R}$.

(16) Calcular un sistema de referencia afín, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de:

a) La recta afín de $\mathbb{R}^4$ que pasa por los puntos $p=(1,-1,1,2)$ y $q=(0,1,0,-1)$.

$\{p,q\}$ son afínmente independientes, luego, podemos definir el siguiente sistema de referencia de la recta:

$$\boxed{\mathcal{R}=\{(1,-1,1,2);\ B=\{(-1,2,-1,-3)\}\}}$$

Definamos $\mathcal{R}_a=\langle\{(1,-1,1,2),(0,1,0,-1)\}\rangle$. Si denotamos por $\mathcal{R}_0$ al sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^4$, entonces, las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{R}_a$ en $\mathcal{R}_0$ vienen dadas por:

$$\boxed{(x,y,z,t)^t=(1,-1,1,2)^t+(-1,2,-1,-3)^t\lambda=(1-\lambda,2\lambda-1,1-\lambda,2-3\lambda)^t,\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Por otro lado, unas ecuaciones implícitas de $\mathcal{R}_a$ en $\mathcal{R}_0$ son:

$$rg\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ y+1 & 2 \\ z-1 & -1 \\ t-2 & -3 \end{pmatrix}=1 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ y+1 & 2\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} y+1 & 2 \\ z-1 & -1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} z-1 & -1 \\ t-2 & -3\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ -y-2z+1=0 \\ -3z+t+1=0 \end{cases}}$$

b) El hiperplano afín de $\mathbb{R}^4$ que pasa por los puntos $p=(1,0,0,0)$, $q=(0,1,0,0)$, $r=(0,0,1,0)$ y $s=(0,0,0,1)$.

Claramente, los puntos $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ son afínmente independientes, luego, podemos formar el sistema de referencia:

$$\mathcal{R}=\{(1,0,0,0);\ B=\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\}\}$$

para el hiperplano $S=\langle\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}\rangle$.

Si denotamos por $\mathcal{R}_0$ al sistema de referencia usual, unas ecuaciones paramétricas de S vienen dadas por:

$$(x,y,z,t)^t=(1,0,0,0)^t+\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^t,\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$$

Por otro lado, unas ecuaciones implícitas de S en $\mathcal{R}_0$ son:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}x-1&1&1&1\\y&-1&0&0\\z&0&-1&0\\t&0&0&-1\end{pmatrix}=3\iff\det\begin{pmatrix}x-1&1&1&1\\y&-1&0&0\\z&0&-1&0\\t&0&0&-1\end{pmatrix}=0\iff$$

$$\iff x+y+z+t-1=0$$

c) Un plano afín de $\mathbb{R}^3$ que contenga a las rectas afines $S=(1,0,2)+L(\{(1,-1,0)\})$ y $T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix}x+y-z=-1\\y-z=2\end{matrix}\right\}$.

Veamos que S y T son secantes. Consideramos el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$. Las ecuaciones paramétricas de S vienen dadas por:

$$(x,y,z)^t=(1,0,2)^t+(1,-1,0)^t\lambda=(1+\lambda,-\lambda,2)^t,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones implícitas de T por $x=1+\lambda$, $y=-\lambda$, $z=2$ obtenemos que:

$$-1=-1$$
$$-2-\lambda=2 \iff \lambda=-4$$

Luego, sustituyendo $\lambda=-4$ en las ecuaciones paramétricas de S, tenemos que $(-3,4,2)$ es el punto donde se cortan S y T $\left(S\cap T=\{(-3,4,2)\}\right)$, es decir, las rectas S y T son secantes.

Por otra parte:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{T}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{r} x+y-z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\}=L\left(\{(0,1,1)\}\right) \\ \vec{S}=L\left(\{(1,-1,0)\}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow S\vee T=(-3,4,2)+L\left(\{(0,1,1),(1,-1,0)\}\right)$$

Como $\{(0,1,1),(1,-1,0)\}$ son linealmente independientes, podemos definir el siguiente sistema de referencia para el plano afín $S\vee T$:

$$\boxed{\mathcal{R}=\{(-3,4,2)\,;\,B=\{(0,1,1),(1,-1,0)\}\}}$$

Unas ecuaciones paramétricas de $S\vee T$ en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$ son:

$$\boxed{(x,y,z)^t=(-3,4,2)^t+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(\lambda_1,\lambda_2)^t,\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}}$$

Por otro lado, unas ecuaciones implícitas de $S\vee T$ son:

$$rg\begin{pmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ y-4 & 1 & -1 \\ z-2 & 1 & 0 \end{pmatrix}=2 \iff \det\begin{pmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ y-4 & 1 & -1 \\ z-2 & 1 & 0 \end{pmatrix}=0 \iff \boxed{x+y-z+1=0}$$

d) El hiperplano afín de $\mathbb{R}^4$ paralelo al de ecuación $x-y+z-t=7$ y que pasa por el punto $p=(1,-2,3,-2)$.

Sean S y T dos hiperplanos afines paralelos tal que $\vec{S}=\vec{T}=$
$=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x-y+z-t=0\}$ y $T=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x-y+z-t=7\}$.
S tiene por ecuación implícita $x-y+z-t=k$, $k\in\mathbb{R}$. Como el hiperplano S tiene que pasar por el punto $p=(1,-2,3,-2) \Rightarrow 1+2+3+2=k \Rightarrow$
$\Rightarrow k=8$. Por tanto, unas ecuaciones implícitas del hiperplano S en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^4$ son:

$$S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x-y+z-t=8\}$$

Como $\vec{S}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x-y+z-t=0\}=L(\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,-1,0)\})$ y $P_0=(8,0,0,0)\in S$, podemos definir el siguiente sistema de referencia de S:

$$\mathcal{R}=\{(8,0,0,0); B=\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,-1,0)\}\}$$

Finalmente, unas ecuaciones paramétricas de S en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^4$ son:

$$(x,y,z,t)^t=(8,0,0,0)^t+\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^t,\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$$

17 Calcular ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacio afines de $\mathbb{R}^4$ generados por los puntos:

a) $P_0=(1,1,0,1)$, $P_1=(1,-1,1,0)$.

Observemos que $\{P_0, P_1\}$ son afínmente independientes, luego, generan una recta afín $R = (1,1,0,1) + L(\{(0,-2,1,-1)\})$ de $\mathbb{R}^4$. Unas ecuaciones paramétricas de R en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^4$ son:

$$\boxed{(x,y,z,t)^t = (1,1,0,1)^t + (0,-2,1,-1)^t \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Por otro lado, unas ecuaciones implícitas de R en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^4$ son:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ y-1 & -2 \\ z & 1 \\ t-1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \iff \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ y-1 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y-1 & -2 \\ z & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z & 1 \\ t-1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x+1=0 \\ y+2z-1=0 \\ -z-t+1=0 \end{cases}}$$

b) $P_0=(1,1,0,1)$, $P_1=(1,0,1,0)$, $P_2=(0,1,0,1)$.

Observemos que $\{P_0, P_1, P_2\}$ son afínmente independientes, luego, generan un plano afín $S = (1,1,0,1) + L(\{(0,-1,1,-1),(-1,0,0,0)\})$ de $\mathbb{R}^4$. Unas ecuaciones paramétricas de S en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^4$ son:

$$\boxed{(x,y,z,t)^t = (1,1,0,1) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\lambda_1, \lambda_2)^t, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}$$

Por otro lado, unas ecuaciones implícitas de S en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^4$ son:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ t-1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \iff \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ t-1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} -y-z+1=0 \\ y-t=0 \end{cases}}$$

18) En cada uno de los siguientes casos, calcula la intersección $S \cap T$ y la suma $S \vee T$ de los subespacios afines S, T de $\mathbb{R}^3$:

a) $S = (1,2,-1) + L(\{(1,0,-2)\})$, $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} 2x+z-1=0 \\ 4x+y+2z-4=0 \end{matrix}\right\}$.

Comencemos calculando $S \cap T$, para lo cual necesitaremos las ecuaciones implícitas de S. Durante todo el ejercicio consideraremos el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

Unas ecuaciones paramétricas de S son:

$$(x,y,z)^t = (1,2,-1)^t + (1,0,-2)^t \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

de donde se extraen las ecuaciones implícitas de S:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & 0 \\ z+1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \iff \det\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ z+1 & -2 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} -y+2=0 \\ -2x-z+1=0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$S \cap T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{l} -y+2=0 \\ -2x-z+1=0 \\ 2x+z-1=0 \\ 4x+y+2z-4=0 \end{array} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{l} -y+2=0 \\ -2x-z+1=0 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{S \cap T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{l} -y+2=0 \\ -2x-z+1=0 \end{array} \right\} = (0,2,-1) + L(\{(1,0,2)\})}$$

Por otro lado, tenemos que $\vec{S} = L(\{(1,0,-2)\})$ y que $\vec{T} = L(\{(1,8,2)\})$. Tomemos $p = (1,2,-1)$. Como $S \cap T \neq \emptyset$, entonces $S \vee T = p + (\vec{S} + \vec{T})$, luego:

$$\boxed{S \vee T = (1,2,-1) + L(\{(1,0,-2),(1,8,2)\})}$$

b) $S = (-1,0,1) + L(\{(1,1,1)\})$, $T = (1,1,1) + L(\{(-1,-1,-1)\})$.

Comencemos calculando $S \cap T$, para lo cual necesitaremos las ecuaciones implícitas de S y T. Durante todo el ejercicio consideraremos el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

Unas ecuaciones paramétricas de S son:

$$(x,y,z)^t = (-1,0,1)^t + (1,1,1)^t \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

de donde se extraen las ecuaciones implícitas de S:

$$rg \begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ y & 1 \\ z-1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \iff \det \begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y & 1 \\ z-1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x-y+1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

Análogamente para T:

$$(x,y,z)^t = (1,1,1)^t + (-1,-1,-1)^t \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$rg\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ y-1 & -1 \\ z-1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \iff \det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ y-1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y-1 & -1 \\ z-1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x+y=0 \\ -y+z=0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$S \cap T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} x-y+1=0 \\ y-z+1=0 \\ -x+y=0 \\ -y+z=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} x-y+1=0 \\ y-z+1=0 \\ -x+y=0 \end{matrix} \right\} = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S \cap T = \emptyset}$$

Por otro lado, tenemos que $\vec{S} = L(\{(1,1,1)\})$ y que $\vec{T} = L(\{(-1,-1,-1)\})$. Tomemos $p = (-1,0,1)$. Consideremos $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{(-1,0,1)(1,1,1)} = (2,1,0)$. Como $S \cap T = \emptyset$, entonces $S \vee T = p + \left(L(\{\overrightarrow{P_1P_2}\}) + \vec{S} + \vec{T} \right)$, luego:

$$S \vee T = (-1,0,1) + \left(L(\{(2,1,0)\}) + L(\{(1,1,1)\}) + L(\{(-1,-1,-1)\}) \right)$$

$$\boxed{S \vee T = (-1,0,1) + L\left(\{(2,1,0),(1,1,1)\}\right)}$$

c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=1\}$, $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} x+y+z-2=0 \\ y-z-1=0 \end{matrix}\right\}$.

Comencemos calculando $S \cap T$. Durante todo el ejercicio consideraremos el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$. Tenemos que:

$$S \cap T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} x+y+z-1=0 \\ x+y+z-2=0 \\ y-z-1=0 \end{matrix}\right\} = \emptyset \Rightarrow \boxed{S \cap T = \emptyset}$$

Calculemos unas ecuaciones paramétricas de S:

$$x+y+z-1=0 \Rightarrow x = 1-y-z$$

$$(x,y,z) = (1-\lambda-\mu, \lambda, \mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$P_1 = (1,0,0)$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_{\substack{\lambda=1 \\ \mu=0}} = (0,1,0)$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_{\substack{\lambda=1 \\ \mu=0}} = (0,0,1)$$

Análogamente para T:

$$\left.\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-y-z \\ y = 1+z \end{cases}$$

$$(x,y,z) = (1-2\lambda, 1+\lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$P_2 = (1,1,0)$$

$$P_{\lambda=1} = (-1,2,1)$$

Por tanto:

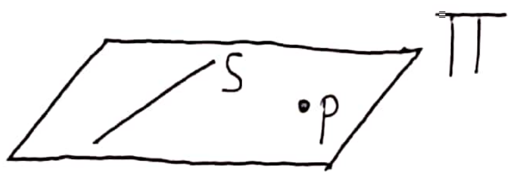
$$S = (1,0,0) + L(\{(-1,1,0),(-1,0,1)\})$$
$$T = (1,1,0) + L(\{(-2,1,1)\})$$

Tenemos que $\vec{S} = L(\{(-1,1,0),(-1,0,1)\})$ y que $\vec{T} = L(\{(-2,1,1)\})$. Tomemos $p = p_1 = (1,0,0)$. Consideremos $\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{(1,0,0)(1,1,0)} = (0,1,0)$. Como $S \cap T = \emptyset$, entonces $S \vee T = p + \left(L(\{\overrightarrow{p_1p_2}\}) + \vec{S} + \vec{T}\right)$, luego:

$$S \vee T = (1,0,0) + \left(L(\{(0,1,0)\}) + L(\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}) + L(\{(-2,1,1)\})\right)$$

$$\boxed{S \vee T = (1,0,0) + L(\{(-1,1,0),(-1,0,1),(0,1,0)\})}$$

19) Probar que si S es una recta afín en un espacio afín A y $p \notin S$, entonces existe un único plano afín T que pasa por p y contiene a S. Calcular unas ecuaciones paramétricas y una ecuación implícita del plano afín en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $p = (1,-2,1)$ y contiene a la recta afín $S = (1,1,1) + L(\{(0,1,1)\})$.



Durante todo el ejercicio trabajaremos siempre respecto al sistema de referencia usual R_0 de A.

Si tomamos $\vec{S}$ $(\dim(\vec{S}) = \dim(S) = 1)$ y $p' \in S$, podemos definir $\overrightarrow{p'p}$. Como $p \notin S$, entonces $\overrightarrow{p'p} \notin \vec{S}$, luego, $\{\vec{S}, \overrightarrow{p'p}\}$ son linealmente independientes y

$\dim(\{\vec{S}, \vec{p'p}\}) = 2$. Por tanto, $\{\vec{S}, \vec{p'p}\} \subseteq \vec{\Pi}$ y, como $\dim(\{\vec{S}, \vec{p'p}\}) = \dim(\vec{\Pi})$, entonces $\vec{\Pi} = \{\vec{S}, \vec{p'p}\}$. Como $\vec{\Pi}$ depende de $p' \in S$ y de p, entonces Π es único para cada S y cada p.

Calculemos unas ecuaciones paramétricas e implícitas del plano afín en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $p = (1,-2,1)$ y contiene a la recta afín $S = (1,1,1) + L(\{(0,1,1)\})$. Consideremos $p' = (1,1,1) \in S$. Tenemos que:

$$\Pi = p + \left(L(\{\vec{p'p}\}) + \vec{S}\right) = (1,-2,1) + L(\{(0,-3,0),(0,1,1)\})$$

Unas ecuaciones paramétricas de Π son:

$$(x,y,z)^t = (1,-2,1)^t + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\lambda_1, \lambda_2)^t, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Por otro lado, unas ecuaciones implícitas de Π son:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ y+2 & -3 & 1 \\ z-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \iff \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ y+2 & -3 & 1 \\ z-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff x-1=0$$

20) Se consideran los subespacios afines de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$S = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \Big/ \begin{matrix} x+y+z+t=1 \\ x-y=1 \end{matrix} \right\},$$

$$T = (1,0,1,0) + L(\{(1,1,-1,-1),(0,0,0,1)\}).$$

Obtener un sistema de referencia cartesiano de $S \cap T$ y de $S \vee T$. Calcular también unas ecuaciones implícitas de $S \vee T$ si es posible.

Comencemos calculando $S \cap T$, para lo cual necesitaremos unas ecuaciones implícitas de T. Durante todo el ejercicio trabajaremos respecto al sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^4$.

Unas ecuaciones paramétricas de T son:

$$(x,y,z,t)^t = (1,0,1,0)^t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (\lambda_1, \lambda_2)^t, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

y unas ecuaciones implícitas de T son:

$$rg \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z-1 & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \iff \det \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ z-1 & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ z-1 & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} y+z-1=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$S \cap T = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{array}{l} y+z-1=0 \\ x+z-2=0 \\ x+y+z+t=1 \\ x-y-1=0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{array}{l} y+z-1=0 \\ x+z-2=0 \\ x+y+z+t-1=0 \end{array} \right\}$$

$$S \cap T = (0,-1,2,0) + L(\{(1,1,-1,1)\})$$

Luego, un sistema de referencia cartesiano de $S \cap T$ es:

$$\mathcal{R}_{S \cap T} = \{(0,-1,2,0) \,;\, B = \{(1,1,-1,1)\}\}$$

Calculemos ahora $S \vee T$, para lo cual necesitaremos unas ecuaciones paramétricas de S:

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$(x,y,z,t)=(\lambda,\lambda-1,\mu,2-2\lambda-\mu), \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

$$S=(0,-1,2,0)+L(\{(1,1,0,-2),(0,0,1,-1)\})$$

Tenemos que $\vec{S}=L(\{(1,1,0,-2),(0,0,1,-1)\})$ y que $\vec{T}=L(\{(1,1,-1,-1),(0,0,0,1)\})$. Tomemos $p=(1,0,1,0)$. Como $S\cap T\neq\emptyset$, entonces $S\vee T=p+(\vec{S}+\vec{T})$, luego:

$$S\vee T=(1,0,1,0)+L(\{(1,1,0,-2),(0,0,1,-1),(1,1,-1,-1),(0,0,0,1)\})$$

$$S\vee T=(1,0,1,0)+L(\{(1,1,0,-2),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\})$$

Por tanto, un sistema de referencia cartesiano de $S\vee T$ es:

$$\mathcal{R}_{S\vee T}=\{(1,0,1,0);\ B=\{(1,1,0,-2),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\}\}$$

$S\vee T$ no tiene ecuaciones implícitas ya que:

$$\text{Número de ecuaciones implícitas de } S\vee T=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(S\vee T)=3-3=0$$

(21) Se consideran los subespacios afines S_1, S_2 de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$S_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0 \end{array} \right\},$$

$$S_2 = (1,0,\lambda,0) + L\left(\{(0,1,-1,1),(1,0,-1,1)\}\right).$$

Calcular $S_1 \cap S_2$ y $S_1 \vee S_2$ en función del parámetro λ.

Durante todo el ejercicio trabajaremos respecto al sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^4$. Comencemos calculando unas ecuaciones implícitas de S_2:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = (1,0,\lambda,0)^t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (\lambda_1, \lambda_2)^t, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 - 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 - \lambda & -1 & -1 \\ x_4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \iff \det\begin{pmatrix} x_1 - 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 - \lambda & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1 - 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + 1 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

Luego, $S_1 \cap S_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{array}{l} -x_1 - x_2 - x_3 + 1 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0 \end{array} \right\}$:

- Si $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ Las 4 ecuaciones son l.i. $\Rightarrow \boxed{S_1 \cap S_2 = \emptyset}$

- Si $\lambda = 1 \Rightarrow$ 3 ecuaciones son l.i. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{S_1 \cap S_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{array}{l} -x_1 - x_2 - x_3 + 2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}}$$

Calculemos ahora $S_1 \vee S_2$. Para ello, necesitaremos unas ecuaciones paramétricas de S_1:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - x_3 \\ x_1 = 2 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 - \lambda_1 - \lambda_2, 2 - 2\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$P_1 = (2,2,0,0)$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_{\substack{\lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0}} = (1,0,1,0)$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_{\substack{\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1}} = (1,1,0,1)$$

$$S_1 = (2,2,0,0) + L(\{(-1,-2,1,0), (-1,-1,0,1)\})$$

Luego, tenemos que $\vec{S_1} = L(\{(-1,-2,1,0), (-1,-1,0,1)\})$ y que $\vec{S_2} = L(\{(0,1,-1,1), (1,0,-1,1)\})$. Tomemos $p = (2,2,0,0)$. Consideremos $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{(2,2,0,0)(1,0,\lambda,0)} = (-1,-2,\lambda,0)$. Luego:

$$S_1 \vee S_2 = (2,2,0,0) + \left(L(\{(-1,-2,\lambda,0)\}) + L(\{(-1,-2,1,0), (-1,-1,0,1), (0,1,-1,1), (1,0,-1,1)\})\right)$$

- Si $\lambda \neq 1 \Rightarrow \{ S_1 \vee S_2 = (2,2,0,0) + L(\{(-1,-2,\lambda,0), (-1,-2,1,0), (-1,-1,0,1), (1,0,-1,1)\})$

- Si $\lambda = 1 \Rightarrow \{ S_1 \vee S_2 = (2,2,0,0) + L(\{(-1,-2,1,0), (-1,-1,0,1), (1,0,-1,1)\})$

(22) Sea S el plano afín de $\mathbb{R}^3$ con ecuación implícita $x+y+z=2$. ¿Qué ecuación implícita satisfacen las coordenadas de los puntos de S con respecto al sistema de referencia afín $\mathcal{R}=\{(-1,1,2),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$?

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=3 \Rightarrow \mathcal{R}=\{(-1,1,2);\ B=\{(2,-1,-2),(1,0,-2),(1,-1,-1)\}\}$$

Calculemos las ecuaciones paramétricas de S respecto al sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$:

$$x+y+z=2 \Rightarrow x=2-y-z$$

$$(x,y,z)=(2-\lambda-\mu,\lambda,\mu),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1=(2,0,0) \\ P_2=(1,1,0) \\ P_3=(1,0,1) \end{array}\right\}\text{Respecto a } \mathcal{R}_0$$

$$S=\langle P_1, P_2, P_3\rangle$$

Calculemos el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_0$ a $\mathcal{R}$:

$$M(Id_{\mathbb{R}^3};B,B_0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M(Id_{\mathbb{R}^3};B_0,B)=M(Id_{\mathbb{R}^3};B,B_0)^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0'P_0}=(0,0,0)-(-1,1,2)=(1,-1,-2)$$

Calculemos $\overrightarrow{P_0'P_0}$ en función de $\mathcal{R}$:

$$(1,-1,-2) = \lambda(2,-1,-2) + \mu(1,0,-2) + \gamma(1,-1,-1)$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\lambda + \mu + \gamma = 1 \\ -\lambda \qquad - \gamma = -1 \\ -2\lambda - 2\mu - \gamma = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \\ \gamma = 2 \end{array}\right.$$

$$\left(\overrightarrow{P_0'P_0}\right)_{\mathcal{R}} = (-1,1,2)$$

Por tanto, la ecuación del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_0$ a $\mathcal{R}$ es:

$$P_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Aplicando el cambio a los puntos $\{P_1, P_2, P_3\}$ tenemos que:

$$(P_1)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(P_2)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(P_3)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego, en el sistema de referencia $\mathcal{R}$:

$$S = \langle (P_1)_{\mathcal{R}}, (P_2)_{\mathcal{R}}, (P_3)_{\mathcal{R}} \rangle = (3,-1,-2) + L\left(\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}\right) =$$
$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\right\}$$

(23) Estudiar la intersección y la suma de dos rectas afines en un espacio afín.

Pendiente.

(24) Probar que en un plano afín dos rectas son, o bien iguales, o paralelas y distintas, o se cortan en un único punto.

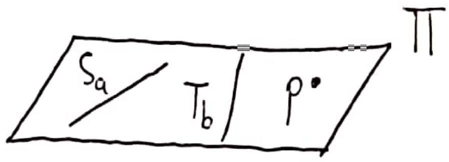
Pendiente.

(25) Se consideran las rectas S_a y T_b de $\mathbb{R}^3$ siguientes:

$$S_a = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} x - 2z = a \\ y + z = 3 \end{matrix} \right\},$$

$$T_b = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{matrix} x + z = 1 \\ y - 2z = b \end{matrix} \right\},$$

donde a y b son parámetros reales. ¿Qué condiciones deben de cumplir a y b para que S_a y T_b estén dentro de un mismo plano afín, es decir, sean coplanarias? Calcular los valores de a y b para que el plano que contiene a S_a y T_b pase por $p = (1,1,1)$.



Podemos reescribir $S_a = p_a + L(\{\overrightarrow{p_a q}\})$, $p_a \in S_a$, $\forall q \in S_a$, y $T_b = p_b + L(\{\overrightarrow{p_b q}\})$, $p_b \in T_b$, $\forall q \in T_b$. Debe verificarse que $\vec{S_a}, \vec{T_b} \subset \Pi$, donde Π es un plano afín, y para ello:

1) $\vec{S_a} \subset \vec{\Pi}$ y $\vec{T_b} \subset \vec{\Pi} \Rightarrow S_a$ y T_b son paralelas a Π.

2) $p_a, p_b \in \Pi \Rightarrow S_a$ y $T_b \subset \Pi$.

Basta con tomar $\Pi = \langle (1,1,1), P_a, P_b \rangle$. Obtengamos P_a y P_b:

$$\begin{cases} x-2z=a \\ y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a+2z \\ y=3-z \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(a+2\lambda, 3-\lambda, \lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\lambda=0 \Rightarrow P_a=(a,3,0)$$

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y-2z=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=b+2z \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(1-\mu, b+2\mu, \mu),\ \mu\in\mathbb{R}$$

$$\mu=0 \Rightarrow P_b=(1,b,0)$$

Como $\Pi = \langle (1,1,1),(a,3,0),(1,b,0)\rangle$ es un plano afín, se cumple que:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow ab-3\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{ab\neq 3}$$

En caso de que $ab\neq 3$, podremos definir $\underline{\Pi=(1,1,1)+L(\{(a-1,2,-1),(0,b-1,-1)\})}$.

26 Sea S una recta afín y T un subespacio afín con $\dim(T)\geq 2$ en un espacio afín A. Probar que se da una y solo una de las siguientes posibilidades:

a) $S\cap T=\emptyset$.

b) $S\cap T$ es un único punto.

c) $S\subseteq T$.

Claramente, a) y b) son incompatibles puesto que, si $p\in S\cap T$, con $p\neq\emptyset$, entonces $S\cap T\neq\emptyset$ y si $S\cap T=\emptyset$, entonces $\nexists p\in S\cap T$.

Veamos que a) y c) son incompatibles. Si $S \subseteq T$, con $S \neq \emptyset$, entonces para todo $p \in S$, $p \in T$, luego, $S \cap T = S \neq \emptyset$.

Finalmente, veamos que b) y c) son incompatibles. Como S es una recta afín, si $S \subseteq T$, entonces existe más de un punto perteneciente a la intersección $S \cap T$.

(27) Sean S y T dos hiperplanos afines en un espacio afín A de dimensión $n \geq 2$. Probar que se da una y solo una de las siguientes posibilidades:

a) $S \cap T = \emptyset$ y los hiperplanos afines son paralelos.

b) $\dim(S \cap T) = n-2$.

c) $S = T$.

Claramente, a) y c) son incompatibles puesto que, si $S = T$, entonces $S \cap T = S \cap S = S \neq \emptyset$ y si $S \cap T = \emptyset$, entonces $S \neq T$.

Veamos que a) y b) son incompatibles. Si $\dim(A) > 2$, entonces $\dim(S \cap T) > 1 \neq 0$, luego, $S \cap T \neq \emptyset$.

Finalmente, veamos que b) y c) son incompatibles. Como S y T son hiperplanos, entonces $\dim(S) = \dim(T) = n-1$, luego, $\dim(S \cap T) = n-2$ pero esto no se da si $S = T$ ya que $\dim(S \cap T) = \dim(S \cap S) = \dim(S) = n-1$.

(28) Sea A un espacio afín con $\dim(A) \geq 3$. Decidir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Tres planos afines distintos no se cortan, o bien su intersección es un punto o una recta afín. Verdadero

b) Dos planos afines distintos son paralelos o su intersección contiene al menos una recta afín. Falso

c) Dos rectas afines $S = p + L(u)$ y $T = q + L(v)$ en A se cruzan si, y solo si, los vectores $\{u, v, \vec{pq}\}$ son linealmente independientes. Verdadero

(29) En cada uno de estos casos, decidir de forma razonada si f es o no una aplicación afín.

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x,y^3,x+y)$.

Tomemos $p_0=(0,0)$. $\vec{f}_{p_0}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ viene dada por:

$$\vec{f}_{p_0}(x,y)=\overrightarrow{f(p_0)f(p_0+(x,y))}=\overrightarrow{(0,0)f(x,y)}=f(x,y)$$

Probemos que f no es lineal. Sean $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ y $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$. Tenemos que:

$$f(\lambda(x,y)+\mu(x',y'))=f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y')=(\lambda x+\mu x',(\lambda y+\mu y')^3,\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y')\ (*)$$

$$f(\lambda(x,y)+\mu(x',y'))=\lambda f(x,y)+\mu f(x',y')=\lambda(x,y^3,x+y)+\mu(x',y'^3,x'+y')=$$
$$=(\lambda x+\mu x',\lambda y^3+\mu y'^3,\lambda x+\lambda y+\mu x'+\mu y')\neq(*)$$

Luego, $\vec{f}_{p_0}=f$ no es lineal. En conclusión, f no es afín.

b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(x+y,x-z+1)$.

Tomemos $p_0=(0,0,0)$. $\vec{f}_{p_0}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ viene dada por:

$$\vec{f}_{p_0}(x,y,z)=\overrightarrow{f(p_0)f(p_0+(x,y,z))}=\overrightarrow{(0,1)f(x,y,z)}=(x+y,x-z).$$

Probemos que $\vec{f}_{p_0}$ es lineal. Sean $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ y $\underset{(x,y,z)}{v_1},\underset{(x',y',z')}{v_2}\in\mathbb{R}^3$. Tenemos que:

$$\lambda\vec{f}_{p_0}(v_1)+\mu\vec{f}_{p_0}(v_2)=\lambda(x+y,x-z)+\mu(x'+y',x'-z')=$$
$$=(\lambda(x+y)+\mu(x'+y'),\lambda(x-z)+\mu(x'-z'))=((\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y'),(\lambda x+\mu x')+(\lambda z-\mu z')$$
$$=\vec{f}_{p_0}(\lambda v_1+\mu v_2).$$

Luego, $\vec{f}_{p_0}$ es lineal. En conclusión, f es una aplicación afín con lineal asociada $\vec{f}=\vec{f}_{p_0}$.

c) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x, y, z^5 - 1)$.

Tomemos $p_0 = (0,0,0)$. $\overrightarrow{f}_{p_0}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ viene dada por:

$$\overrightarrow{f}_{p_0}(x,y,z) = \overrightarrow{f(p_0)\, f(p_0 + (x,y,z))} = \overrightarrow{(0,0,-1)\, f(x,y,z)} = (x, y, z^5)$$

Probemos que $\overrightarrow{f}_{p_0}$ es lineal. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v_1 = (x,y,z)$, $v_2 = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.
Tenemos que:

$$\lambda \overrightarrow{f}_{p_0}(v_1) + \mu \overrightarrow{f}_{p_0}(v_2) = \lambda(x, y, z^5) + \mu(x', y', z'^5) = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z^5 + \mu z'^5) =$$
$$= \overrightarrow{f}_{p_0}(\lambda v_1 + \mu v_2).$$

Luego, $\overrightarrow{f}_{p_0}$ es lineal. En conclusión, f es una aplicación afín con lineal asociada $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}_{p_0}$.

d) $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(A) = \text{traza}(A) + 1$.

Tomemos $p_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{f}_{p_0}: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dada por:

$$\overrightarrow{f}_{p_0}(A) = \overrightarrow{f(p_0)\, f(p_0 + A)} = \overrightarrow{1\, f(A)} = \text{traza}(A)$$

Claramente, $\overrightarrow{f}_{p_0}$ es lineal. En conclusión, f es una aplicación afín con lineal asociada $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}_{p_0}$.

e) $f: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(p(x)) = \text{grado}(p(x))$.

Tomemos $p_0 = 0$. $\overrightarrow{f}_{p_0}: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dada por:

$$\overrightarrow{f}_{p_0}(p(x)) = \overrightarrow{f(p_0)\, f(p_0 + p(x))} = \overrightarrow{0\, f(p(x))} = \text{grado}(p(x)).$$

Probemos que $\overrightarrow{f}_{p_0}$ no es lineal. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}[x]$. Tenemos que:

$$\overrightarrow{f}_{p_0}(\lambda p_1(x) + \mu p_2(x)) = \text{grado}(\lambda p_1(x) + \mu p_2(x)) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right. \quad \times \text{ En general}$$
$$\lambda \overrightarrow{f}_{p_0}(p_1(x)) + \mu \overrightarrow{f}_{p_0}(p_2(x)) = \lambda\, \text{grado}(p_1(x)) + \mu\, \text{grado}(p_2(x))$$

Luego, $\vec{f}_{p_0}$ no es lineal. En conclusión, f no es afín.

(30) (Producto de aplicaciones afines). Sean A_1, A_2, A_1' y A_2' espacios afines y $f_i : A_i \longrightarrow A_i'$ una aplicación afín para cada $i=1,2$. Demostrar que la aplicación $f_1 \times f_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_1' \times A_2'$ dada por $(f_1 \times f_2)(p_1, p_2) = (f_1(p_1), f_2(p_2))$ es una aplicación afín y $\overrightarrow{f_1 \times f_2} = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2$.

Pendiente.

(31) Se considera la aplicación $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x,y,z) = (2x-y+3z-1, -x-y+z+1).$$

a) Demostrar que f es una aplicación afín y calcular $\vec{f}$.

Tomemos $p_0 = (0,0,0)$. $\vec{f}_{p_0} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ viene dada por:

$$\vec{f}_{p_0}(x,y,z) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_0+(x,y,z))} = \overrightarrow{(-1,1)f(x,y,z)} = (2x-y+3z, -x-y+z)$$

Claramente, $\vec{f}_{p_0}$ es lineal. En conclusión, f es una aplicación afín con lineal asociada $\vec{f} = \vec{f}_{p_0}$.

b) Estudiar si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Tomemos $\mathcal{R} = \{(0,0,0); B_0 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\} = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ sistema de referencia de $\mathbb{R}^3$. Definamos $f(p_j) = q_j, \forall p_j \in \mathcal{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0,0) = (-1,1) \\ f(1,0,0) = (1,0) \\ f(0,1,0) = (-2,0) \\ f(0,0,1) = (2,2) \end{array}\right\} = \{(-1,1),(1,0),(-2,0),(2,2)\}$$

Tenemos que:

$$rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{Los vectores no son afínmente independientes} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{f \text{ no es inyectiva}} \Rightarrow \underline{f \text{ no es biyectiva}}$$

$$\langle \underbrace{\{(-1,1),(1,0),(-2,0),(2,2)\}}_{\dim = 2} \rangle = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underline{f \text{ es sobreyectiva}}$$

c) Dadas las rectas afines $S = (1,1,2) + L(\{(2,0,1)\})$ y $T = (0,1,1) + L(\{(1,0,-1)\})$, calcular $f(S) \cap f(T)$.

Tenemos que $S = \langle \{(1,1,2),(3,1,3)\} \rangle$ y $T = \langle \{(0,1,1),(1,1,0)\} \rangle$.
Apliquemos f a los puntos de las rectas:

$$\underline{\text{Recta } S}: \begin{cases} P_1 = (1,1,2) \\ P_2 = (3,1,3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1,1,2) = (6,1) \\ f(3,1,3) = (13,0) \end{cases}$$

$$\underline{\text{Recta } T}: \begin{cases} P_1' = (0,1,1) \\ P_2' = (1,1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0,1,1) = (1,1) \\ f(1,1,0) = (0,-1) \end{cases}$$

Luego, $f(S) = (6,1) + L(\{(7,-1)\})$ y $f(T) = (1,1) + L(\{(-1,-2)\})$. Calculemos las ecuaciones implícitas de $f(S)$ y $f(T)$:

$$rg\begin{pmatrix} x-6 & 7 \\ y-1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x-6 & 7 \\ y-1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x-7y+13=0$$

$$rg\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ y-1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ y-1 & -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x+y+1=0$$

En conclusión:

$$\boxed{f(S)\cap f(T)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \begin{array}{l}-x-7y+13=0\\-2x+y+1=0\end{array}\right\}=\left\{\left(\tfrac{4}{3},\tfrac{5}{3}\right)\right\}}$$

d) Calcular $f^{-1}(\{(1,1)\})$.

Tenemos que:

$$\boxed{f^{-1}(\{(1,1)\})=(0,1,1)}$$

32 Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los planos:

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ -x-y+z=1\},\quad S'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y+z=-1\},$$

y las rectas:

$$T=(0,0,1)+L(\{(1,1,0)\}),\quad T'=(0,0,-1)+L(\{(1,1,0)\}).$$

Justifica que existe una afinidad $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que $f(S)=S'$ y $f(T)=T'$. Determina la expresión matricial de f en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

Durante todo el ejercicio trabajaremos en $\mathcal{R}_0$. Comencemos calculando la posición relativa de S y T para compararlas con las de S' y T'.

Unas ecuaciones paramétricas de T son $(x,y,z)=(0,0,1)+(1,1,0)\lambda$. Teniendo en cuenta que la ecuación implícita de S es $-x-y+z=1$, tenemos que:

$$S\cap T=\{(\lambda,\lambda,1):\ -\lambda-\lambda+1=1\Rightarrow\lambda=0\}=L(\{\overbrace{(0,0,1)}^{P_0}\})\Rightarrow\dim(S\cap T)=1$$

$$\dim(S)+\dim(T)=\dim(S\cap T)+\dim(S\vee T)\Rightarrow\dim(S\vee T)=3\Rightarrow S\vee T=\mathbb{R}^3$$

Análogamente, para S' y T' tenemos que:

$$T' = \{(\lambda,\lambda,-1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$S' \cap T' = \{(\lambda,\lambda,-1) : \lambda + \lambda - 1 = -1 \Rightarrow \lambda = 0\} = L(\{\overbrace{(0,0,-1)}^{q_0}\}) \Rightarrow \dim(S' \cap T') = 1$$

$$\dim(S') + \dim(T') = \dim(S' \cap T') + \dim(S' \vee T') \Rightarrow \dim(S' \vee T') = 3 \Rightarrow S' \vee T' = \mathbb{R}^3$$

Luego, la aplicación debe cumplir 3 condiciones:

1) $f(S \cap T) = S' \cap T' \Rightarrow f(p_0) = q_0$

2) f aplica el sistema de referencia de T en otro de T' $\Rightarrow$
$\Rightarrow \{p_0, p_1 = (1,1,1)\} \longrightarrow \{q_0 = f(p_0), q_1 = f(p_1)\}$

3) f aplica el sistema de referencia de S en otro de S' $\Rightarrow$
$\Rightarrow \{p_0, p_2 = (1,-1,1), p_3 = (-1,0,0)\} \longrightarrow \{q_0 = f(p_0), q_2 = f(p_2), q_3 = f(p_3)\}$.

Nuestro objetivo es buscar los q_j que verifiquen las condiciones anteriores para que, por el Teorema Fundamental de la Geometría Afín, encontremos la única aplicación $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(p_j) = q_j$, $j = 0,1,2,3$.

Observemos que $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ y $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ son sistemas de referencia de $\mathbb{R}^3$, luego, existen múltiples elecciones de los puntos. En nuestro caso, tomemos $q_1 = (1,1,-1) \in T'$, $q_2 = (1,-1,-1) \in S'$, $q_3 = (-1,0,0) \in S'$. Solo queda construir la afinidad.

Tomemos el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{R} = \{(0,0,1); B = \{(1,1,0),(1,-1,0),(-1,0,-1)\}\}$. Sabemos que existe un único isomorfismo de $\mathbb{R}^3$, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(v_j) = u_j$, $j = 1,2,3$, $v_j \in B_0$, $u_j \in B$.

$$M(\vec{f}; B, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$M(f;\mathcal{R},\mathcal{R}_0)=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline 0&1&1&-1\\0&1&-1&0\\-1&0&0&-1\end{array}\right)$$

Por tanto:

$$M(f;\mathcal{R}_0)=M(f;\mathcal{R}_0,\mathcal{R}_0)=M(f;\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R}_0,\mathcal{R})=$$

$$=M(f;\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(Id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline 0&1&1&-1\\0&1&-1&0\\-1&0&0&-1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline 0&1&1&-1\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{array}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline 0&1&0&0\\0&0&1&0\\-2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$M(f;\mathcal{R}_0)=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline 0&1&0&0\\0&0&1&0\\-2&0&0&1\end{array}\right)$$

33) Determinar la expresión matricial en el sistema de referencia usual de la aplicación afín $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ que tiene como puntos fijos a los del plano afín $x+y-z=-2$, y tal que $f(0,0,0)=(1,2,-1)$. ¿Es f un isomorfismo afín?

Llamemos $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=-2\}\Rightarrow S=\{(\lambda+\mu,-\mu,\lambda+2)\in\mathbb{R}^3 : \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}\Rightarrow S=(0,0,2)+L(\{(1,0,1),(1,-1,0)\})$. Un sistema de referencia en S viene dado por $\{P_1=(0,0,2),\ P_2=(0,0,2)-(1,0,1)=(-1,0,1),\ P_3=(0,0,2)+(1,-1,0)=(1,-1,2)\}$. Si llamamos $P_0=(0,0,0)$, entonces $\{P_0,P_1,P_2,P_3\}$ son afinmente independientes, luego, $\mathcal{R}=\{(0,0,0);B=\{(0,0,2),(-1,0,1),(1,-1,2)\}\}$ es un sistema de referencia en $\mathbb{R}^3$.

Por el Teorema Fundamental de la Geometría Afín, existe $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ afín tal que $f(p_0) = (1,2,-1)$ y $f(p_j) = p_j$, $j = 1,2,3$. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{f}(v_1) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_1)} = (-1,-2,3) \\ \vec{f}(v_2) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_2)} = (-2,-2,2) \\ \vec{f}(v_3) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_3)} = (0,-3,3) \end{array}\right\} \Rightarrow M(\vec{f}; B, B_0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $f(p_0)_{\mathcal{R}_0} = (1,2,-1)$, entonces:

$$M(f; \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Luego:

$$M(f; \mathcal{R}_0) = M(f; \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = M(f; \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{M(f; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{array}\right)}$$

Como $\det\left(M(\vec{f}; \mathcal{R}_0)\right) = 3 \neq 0$, $\vec{f}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, luego, f es un isomorfismo afín.

(34) Consideremos el sistema de referencia afín en $\mathbb{R}^2$ dado por $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$. Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la única aplicación afín tal que:

$$f(1,1) = (-1,3) \;,\; f(2,1) = (-1,4) \;,\; f(2,2) = (-3,7).$$

a) Obtener la expresión matricial de f con respecto a $\mathcal{R}$. Calcular $f(4,4)$.

Tenemos que $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,1),(2,2)\} = \{(1,1) ; B = \{(1,0),(1,1)\}\}$.

Calculemos $M(f;\mathcal{R}_0)$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}(v_1) &= \overrightarrow{f(1,1)\,f(2,1)} = (-1,4)-(-1,3) = (0,1) \\ \vec{f}(v_2) &= \overrightarrow{f(1,1)\,f(2,2)} = (-3,7)-(-1,3) = (-2,4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(\vec{f}; B, B_0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f(p_0)_{\mathcal{R}_0} = f(1,1)_{\mathcal{R}_0} = (-1,3)$$

$$M(f;\mathcal{R},\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$M(f;\mathcal{R}_0) = M(f;\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2};\mathcal{R},\mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Por tanto, para calcular $M(f;\mathcal{R})$:

$$M(f;\mathcal{R}) = M(Id_{\mathbb{R}^2};\mathcal{R}_0,\mathcal{R})\cdot M(f;\mathcal{R}_0)\cdot M(Id_{\mathbb{R}^2};\mathcal{R},\mathcal{R}_0) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{M(f;\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -4 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right)}$$

Finalmente, calculemos $f(4,4)$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -4 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 4 \\ 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline -32 \\ 22 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{f(4,4)_{\mathcal{R}} = (-32, 22)}$$

b) Obtener la expresión matricial de f y $f \circ f$ con respecto a $\mathcal{R}_0$.

En el apartado a) ya calculamos $M(f; \mathcal{R}_0)$:

$$\boxed{M(f; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{array}\right)}$$

Para calcular $M(f \circ f; \mathcal{R}_0)$:

$$M(f \circ f; \mathcal{R}_0) = M(f; \mathcal{R}_0) \cdot M(f; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M(f \circ f; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -2 & -6 \\ -3 & 3 & 7 \end{array}\right)}$$

c) Determinar el conjunto de puntos fijos de f.

Para determinar el conjunto de puntos fijos de f:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -4 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline -x-6y-4 \\ x+4y+2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x-6y = 4 \\ x+3y = -2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} x = -2-3\lambda \\ y = \lambda \end{array}\right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego:

$$\boxed{P_f = \{ p \in \mathbb{R}^2 : f(p) = p \} = \{ (-2-3\lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \mathbb{R} \}}$$

35) Sea $f: A \longrightarrow A$ un endomorfismo afín y $S = p_0 + \vec{S}$ un subespacio afín. Se dice que S es invariante por f si $f(S) \subseteq S$. Demostrar que S es invariante por f si, y solo si, $\vec{f}(\vec{S}) \subseteq \vec{S}$ y $\overrightarrow{p_0 f(p_0)} \in \vec{S}$.

Pendiente.

36) Determinar el conjunto de puntos fijos de la aplicación afín $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y,z) = \left(x + 3y + \frac{3}{2}, -2y - \frac{3}{2}, -4x - 4y - z - 2\right).$$

Supongamos que estamos en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$. Tenemos que:

$$M(f; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3/2 & 1 & 3 & 0 \\ -3/2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

Para determinar el conjunto de puntos fijos de f:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3/2 & 1 & 3 & 0 \\ -3/2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \\ z \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x + 3y + \frac{3}{2} \\ -2y - \frac{3}{2} \\ -4x - 4y - z - 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \\ z \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3y + \frac{3}{2} = 0 \\ -3y - \frac{3}{2} = 0 \\ -4x - 4y - 2z - 2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\lambda}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \lambda \end{array}\right. , \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego:

$$P_f = \{p \in \mathbb{R}^3 : f(p) = p\} = \left\{\left(\frac{\lambda}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda\right) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

(37) Consideremos los subespacios afines de $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y+z=2\},\quad T=(0,-1,0)+L(\{(1,1,1)\}).$$

Comprueba que S y T son suplementarios (o complementarios) afines. Calcula la proyección y simetría afines $\pi_{S,T}$, $\sigma_{S,T}$ sobre S en la dirección de T, dando sus ecuaciones matriciales respecto del sistema de referencia canónico $\mathcal{R}_0=\{(0,0,0);B_0\}$ (B_0 base canónica de $\mathbb{R}^3$) de $\mathbb{R}^3$. Haz lo mismo para $\pi_{T,S}$, $\sigma_{T,S}$.

Es claro que $\vec{T}=L(\{(1,1,1)\})$ y $\vec{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}=$
$=L(\{(1,1,0),(1,0,-1)\})$. Luego, como $rg\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=3$, $B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,-1)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{S}\oplus\vec{T}=\mathbb{R}^3$, es decir, S y T son suplementarios afines en $\mathbb{R}^3$.

Vamos a calcular la proyección afín $\pi_{S,T}$. Vamos a trabajar en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$. Tenemos que:

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y+z=2\}\Rightarrow \vec{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}$$

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : rg\begin{pmatrix}x&1\\y+1&1\\z&1\end{pmatrix}=1\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{array}{l}x-y-1=0\\x-z=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{T}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{array}{l}x-y=0\\x-z=0\end{array}\right\}$$

Denotemos $(a,b,c)=\pi_{S,T}(x,y,z)$. Tenemos que:

1) $(a,b,c)\in S\Rightarrow a-b+c=2$

2) $\overrightarrow{(x,y,z)(a,b,c)}\in\vec{T}\Rightarrow\begin{cases}a-x-b+y=0\\a-x-c+z=0\end{cases}$

Resolviendo el sistema, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2+y-z \\ b = 2-x+2y-z \\ c = 2-x+y \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \pi_{S,T}(x,y,z) = (2+y-z,\ 2-x+2y-z,\ 2-x+y) \\ M(\pi_{S,T};\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}}$$

Calculemos la simetría $\sigma_{S,T}$. Sabemos que $\sigma_{S,T}(p) = p + 2\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)}$. Escribiendo $p=(x,y,z)$, tenemos que:

$$\sigma_{S,T}(x,y,z) = 2\pi_{S,T}(x,y,z) - (x,y,z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \sigma_{S,T}(x,y,z) = (4+2y-2z,\ 4-2x+3y-2z,\ 4-2x+2y-z) \\ M(\sigma_{S,T};\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \end{array}}$$

El procedimiento es análogo para calcular $\pi_{T,S}$ y $\sigma_{T,S}$.

38) Probar que la aplicación afín $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (1-2x, 3-2y)$ es una homotecia. Calcular su centro y su razón.

Se puede apreciar a simple vista que $f(x,y) = (1,3) + f_0(x,y)$, donde f_0 es una aplicación lineal tal que $f_0(x,y) = -2(x,y)$.

De esto deducimos que f es afín con $\vec{f} = f_0$ y $p_0 = f(0,0) = (1,3)$. Como $\vec{f} = -2\,Id_{\mathbb{R}^2}$, f es una homotecia de razón -2 cuyo centro (a,b) satisface que:

$$f(a,b) = (a,b) \iff (1-2a, 3-2b) = (a,b) \iff (a,b) = \left(\tfrac{1}{3}, 1\right)$$

Por tanto:

$$\boxed{f = h_{\left(\frac{1}{3},1\right),-2}}$$

(39) Calcular explícitamente una homotecia en $\mathbb{R}^3$ de centro (a,b,c) y razón $r \neq 0,1$.

La homotecia buscada, $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, debe satisfacer:

1) $h(a,b,c) = (a,b,c)$.
2) $\vec{h} = r \cdot Id_{\mathbb{R}^3}$

Si tomamos $p_0 = (0,0,0)$ y escribimos $h(p_0) = (a',b',c')$, tenemos que:

$$h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$h(x,y,z) = (a',b',c') + r \cdot (x,y,z)$$

Como $h(a,b,c) = (a,b,c)$, tenemos que:

$$(a',b',c') + r \cdot (a,b,c) = (a,b,c) \iff (a',b',c') = (r-1) \cdot (a,b,c)$$

Por tanto:

$$h_{(a,b,c),r} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$h_{(a,b,c),r}(x,y,z) = (r-1)(a,b,c) + r(x,y,z)$$

(40) Sea $f: A \to A$ un endomorfismo afín de un plano afín. Supongamos que existen tres rectas afines S_1, S_2 y S_3 en A de las que no hay dos paralelas, y tales que $f(S_i) = S_i$ para cada $i = 1,2,3$. Demostrar que f es la identidad o una homotecia de razón $\lambda \neq 1$.

Escribamos $S_j = p_j + L(\{v_j\})$, $j = 1,2,3$. Tenemos que $f(S_j) = S_j =$
$= f(p_j) + L(\{\vec{f}(v_j)\}) = p_j + L(\{v_j\}) \Rightarrow \vec{f}(v_j) = r_j v_j$, $r_j \neq 0$, $j = 1,2,3$.

Como las rectas no son paralelas dos a dos, tenemos que:

1) $\{v_1, v_2\}$ son linealmente independientes y forman una base de $\vec{A}$.

2) $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Por tanto:

$$r_3(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = r_3 v_3 = \vec{f}(v_3) = \vec{f}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \vec{f}(v_1) + \lambda_2 \vec{f}(v_2) = \lambda_1 r_1 v_1 + \lambda_2 r_2 v_2,$$

de donde $r_3\lambda_1 = r_1\lambda_1$, $r_3\lambda_2 = r_2\lambda_2 \Rightarrow r := r_1 = r_2 = r_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- Si $r \neq 1 \Rightarrow \vec{f} = r \cdot Id_{\vec{A}} \Rightarrow f$ es una homotecia de razón r y centro $a \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

- Si $r = 1 \Rightarrow f$ es una traslación t_v, $v \in \vec{A}$. Al ser $t_v(S_j) = S_j = P_j + L(\{v_j\})$, deducimos que $P_j + v \in S$ o, equivalentemente, $v = \mu_j v_j$, $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2,3$. Como cada pareja de vectores $\{v_i, v_j\}$ son linealmente independientes $\Rightarrow \mu_j = 0$, $j = 1,2,3 \Rightarrow v = \vec{0} \Rightarrow f = Id_A$.

(41) Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Una homotecia $h \neq Id_A$ queda determinada por la imagen de dos puntos.

b) Si A es una recta afín y $f: A \to A$ es una aplicación afín, entonces, o bien f es constante, o es una traslación, o es una homotecia.

c) Las constantes, las traslaciones y las homotecias son los únicos endomorfismos afines $f: A \to A$ tales que $f(S)$ es paralelo a S, para todo subespacio afín S de A.

Pendiente.

(42) Decidir de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La composición de una traslación t y de una homotecia $h \neq Id_A$ es una homotecia. En caso afirmativo, calcular el centro y la razón de la homotecia resultante. Verdadero

Tomemos una traslación t y una homotecia h de A. Recordemos que $\vec{h} = r \cdot Id_{\vec{A}}$ y $\vec{t} = Id_{\vec{A}}$, luego, $\overrightarrow{h \circ t} = r \cdot Id_{\vec{A}} \Rightarrow \underbrace{h \circ t}_{f}$ es una homotecia.

Si llamamos c al centro de la homotecia $\underbrace{h \circ t}_{f}$, tenemos que:

$$c = q + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{q f(q)}, \quad q \in A \text{ punto arbitrario}$$

Si escribimos $h = h_{a,r}$ y $t = t_v$ y tomamos $q = a + (-v)$, tenemos que:

$$c = (a+(-v)) + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{(a+(-v)) f(a+(-v))} = (a+(-v)) + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{(a+(-v))\, h(t(a+(-v)))} =$$

$$= (a+(-v)) + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{(a+(-v))\, h(a)} = (a+(-v)) + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{(a+(-v))\, a} =$$

$$= (a+(-v)) + \frac{1}{1-r} v$$

Por tanto:

$$c = a + \frac{r}{1-r} v$$

b) La composición de dos homotecias es una homotecia. De ser así, calcular la razón de la homotecia resultante. Cuando esta sea distinta de 1, calcular también su centro. Verdadero

Tomemos $h_1 = h_{a_1, r_1}$ y $h_2 = h_{a_2, r_2}$. Discutiremos los casos $r := r_1 r_2 \neq 1$ y $r := r_1 r_2 = 1$.

•) <u>Si $r \neq 1$</u> $\Rightarrow$ $\overrightarrow{h_2 \circ h_1} = \vec{h}_2 \circ \vec{h}_1 = (r_2 \, Id_{\vec{A}}) \circ (r_1 \, Id_{\vec{A}}) = r \, Id_{\vec{A}}$ y, por tanto, $h := h_2 \circ h_1$ es una homotecia de razón r. Calculemos el centro c de h:

$$c = q + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{q h(q)} \, , \; \forall q \in A \text{ punto arbitrario}$$

Tomando $q = a_1$:

$$c = a_1 + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{a_1 h(a_1)} = a_1 + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{a_1 h_2(a_1)} = a_1 + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{a_1 (a_2 + r_2 \overrightarrow{a_2 a_1})} =$$

$$= a_1 + \frac{1}{1-r} \left(\overrightarrow{a_1 a_2} + r_2 \overrightarrow{a_2 a_1} \right) = a_1 + \frac{1 - r_2}{1 - r_1 r_2} \overrightarrow{a_1 a_2}$$

•) <u>Si $r = 1$</u> $\Rightarrow$ $t := h_2 \circ h_1$ satisface que $\vec{t} = Id_{\vec{A}}$ $\Rightarrow$ t es una traslación en A, donde el vector de traslación v se calcula como:

$$v = \overrightarrow{q t(q)} \, , \; \forall q \in A \text{ punto arbitrario}$$

c) Si $f: A \longrightarrow A'$ es una aplicación afín y $p, q, r \in A$ son tres puntos alineados (esto es, contenidos en una línea recta), entonces $f(p), f(q), f(r)$ son tres puntos alineados de A'.

Pendiente.

d) Si A es un espacio afín y $\dim(A) = n$, entonces existe un isomorfismo afín $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Pendiente.

e) Toda aplicación afín de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n'}$ es diferenciable. Además, todo isomorfismo afín de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.

Pendiente.

f) Si una aplicación afín $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene al menos 4 puntos fijos afínmente independientes, entonces es la identidad.

Pendiente.

43) En un espacio afín A se consideran $(n+1)$ puntos, $\{p_0, \dots, p_n\} \subseteq A$, y fijemos $O \in A$. Se define el baricentro de estos puntos como:

$$b = O + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overrightarrow{Op_j}$$

Probar que b no depende del punto O fijado. Probar además que si $f: A \to A'$ es afín, entonces $f(b)$ es el baricentro de $\{f(p_0), \dots, f(p_n)\}$.

Sea $O' \in A$. Tenemos que:

$$b' = O' + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overrightarrow{O'p_j} = (O + \overrightarrow{OO'}) + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Op_j}) =$$

$$= O + \left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'O} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overrightarrow{Op_j}\right) = O + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overrightarrow{Op_j} = b$$

Luego, b no depende del punto O fijado. Por otro lado:

$$f\left(O + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overrightarrow{Op_j}\right) = f(O) + \vec{f}\left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overrightarrow{Op_j}\right) = f(O) + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \vec{f}(\overrightarrow{Op_j})$$

Luego:

$$f\left(O + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overrightarrow{Op_j}\right) = f(O) + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overrightarrow{f(O)f(p_j)},$$

es decir, $f(b)$ es el baricentro de $\{f(p_0), \dots, f(p_n)\}$.

(44) Probar que los puntos medios de los lados de un triángulo $\{a,b,c\}$ (tres puntos afínmente independientes) en un espacio afín A forman un triángulo cuyos lados son paralelos a los de $\{a,b,c\}$ y cuyo baricentro es el mismo que el de $\{a,b,c\}$.

Los lados de $\{a,b,c\}$ son, por definición, las rectas $\langle\{a,b\}\rangle$, $\langle\{a,c\}\rangle$ y $\langle\{b,c\}\rangle$. Por definición, los puntos medios de los lados del triángulo son:

$$m_{ab} = O + \frac{1}{2}(\vec{Oa} + \vec{Ob})$$

$$m_{ac} = O + \frac{1}{2}(\vec{Oa} + \vec{Oc})$$

$$m_{bc} = O + \frac{1}{2}(\vec{Ob} + \vec{Oc})$$

donde $O \in A$ es un punto arbitrario. Por tanto:

$$\overrightarrow{m_{ab}m_{ac}} = \frac{1}{2}(\vec{Oa}+\vec{Oc}) - \frac{1}{2}(\vec{Oa}+\vec{Ob}) = \frac{1}{2}(\vec{Oc}-\vec{Ob}) = \vec{bc}$$

$$\overrightarrow{m_{ab}m_{bc}} = \frac{1}{2}(\vec{Ob}+\vec{Oc}) - \frac{1}{2}(\vec{Oa}+\vec{Ob}) = \frac{1}{2}(\vec{Oc}-\vec{Oa}) = \vec{ac}$$

Como $\{a,b,c\}$ son afínmente independientes, los vectores $\{\vec{bc}, \vec{ac}\}$ son linealmente independientes, luego, $\{m_{ab}, m_{ac}, m_{bc}\}$ son afínmente independientes y determinan un triángulo cuyos lados son las rectas $\langle\{m_{ab}, m_{ac}\}\rangle$, $\langle\{m_{ab}, m_{bc}\}\rangle$ y $\langle\{m_{ac}, m_{bc}\}\rangle$ cuyos vectores directores son:

$$\overrightarrow{m_{ab}m_{ac}} = \vec{bc}, \quad \overrightarrow{m_{ab}m_{bc}} = \vec{ac}, \quad \overrightarrow{m_{ac}m_{bc}} = \vec{ab}$$

que, claramente, coinciden respectivamente con los de los lados $\langle\{b,c\}\rangle$, $\langle\{a,c\}\rangle$ y $\langle\{a,b\}\rangle$, luego:

$$\langle\{m_{ab}, m_{ac}\}\rangle \parallel \langle\{b,c\}\rangle, \quad \langle\{m_{ab}, m_{bc}\}\rangle \parallel \langle\{a,c\}\rangle, \quad \langle\{m_{ac}, m_{bc}\}\rangle \parallel \langle\{a,b\}\rangle$$

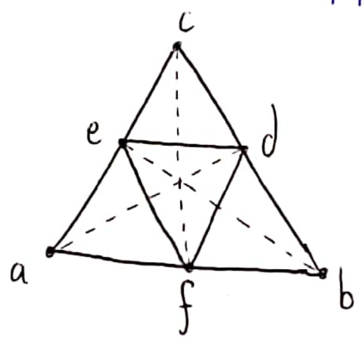
El baricentro de $\{m_{ab}, m_{ac}, m_{bc}\}$ es:

$$0 + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{0m_{ab}} + \overrightarrow{0m_{ac}} + \overrightarrow{0m_{bc}}\right) = 0 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{0a}+\overrightarrow{0b}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{0a}+\overrightarrow{0c}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{0b}+\overrightarrow{0c})\right) =$$

$$= 0 + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{0a} + \overrightarrow{0b} + \overrightarrow{0c}\right)$$

Luego, los baricentros de $\{m_{ab}, m_{ac}, m_{bc}\}$ y $\{a,b,c\}$ coinciden.

(45) Sea $\{a,b,c\}$ un triángulo. Probar que las paralelas a dos de los lados que pasan por el baricentro dividen al tercer lado en tres segmentos de la misma longitud (Si tres puntos p, q, r están alineados, diremos que los segmentos $[p,q]$, $[q,r]$ tienen la misma longitud si $\overrightarrow{pq} = \pm\overrightarrow{qr}$).



Tenemos que:

$$d = c + \frac{1}{2}\overrightarrow{cb}$$

$$e = c + \frac{1}{2}\overrightarrow{ca}$$

$$f = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}$$

Para probar que las rectas que pasan por a,b y por e,d, respectivamente, son paralelas, comprobemos que $\overrightarrow{ab} \parallel \overrightarrow{ed}$:

$$\overrightarrow{ed} = d - e = \cancel{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} - \cancel{c} - \frac{1}{2}\overrightarrow{ca} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ab} - \overrightarrow{ca}) = \frac{1}{2}\left(b - c - (a-c)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(b - \cancel{c} - a + \cancel{c}) = \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} \Rightarrow \overrightarrow{ed} \parallel \overrightarrow{ab}$$

El proceso es análogo para el resto de lados. Sea v el baricentro del triángulo $\{a,b,c\}$ y v' el baricentro del triángulo $\{d,e,f\}$. Probemos que $v=v'$:

$$v' = d+\frac{1}{3}(\overrightarrow{de}+\overrightarrow{df}) = c+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{ba}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ca}\right)$$
$$v = c+\frac{1}{3}(\overrightarrow{ca}+\overrightarrow{cb})$$

$$v'=v \iff \cancel{c}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ab}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{ba}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ca}\right) = \cancel{c}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{ca}+\overrightarrow{cb}) \iff$$

$$\iff \frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{6}(a-b+a-c) = \frac{1}{3}(a-c+b-c) \iff$$

$$\iff \frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{6}(2a-b-c) = \frac{1}{3}(a+b-2c) \iff$$

$$\iff \frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a-\frac{1}{6}b-\frac{1}{6}c = \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c \iff$$

$$\iff \left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}a\right)+\left(\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}b+\frac{1}{6}b\right)-\left(\frac{2}{3}c+\frac{1}{2}c+\frac{1}{6}c\right)=0 \iff$$

$$\iff \overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc}=0$$

46 Sea $\{a,b,c\}$ un triángulo en un espacio afín A con baricentro o. Demostrar que la homotecia $h=h_{o,-1/2}$ lleva cada vértice de $\{a,b,c\}$ en el punto medio de su lado opuesto.

Veamos que $h(c)=m_{ab}$, $h(b)=m_{ac}$ y $h(a)=m_{bc}$. Fijemos $O\in A$ y recordemos que $o=O+\frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc})$. Tenemos que:

$$h(c) = o-\frac{1}{2}\overrightarrow{oc} = \left(O+\frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc})\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\left(O+\frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc})\right)c}\right) =$$

$$= \left(O+\frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc})\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{c\left(O+\frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc})\right)}\right) =$$

$$= \left(O+\frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc})\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{cO}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc})\right) =$$

(Análogo para h(a) y h(b))

$$= \left(O+\frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc})\right)+\frac{1}{6}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}-2\overrightarrow{Oc}) = O+\frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}) = m_{ab}$$

47) Dado un triángulo $\{a,b,c\}$ y $\{a',b',c'\} = \{m_{ab}, m_{ac}, m_{bc}\}$ el triángulo formado por los puntos medios de sus lados, describir las siguientes aplicaciones afines:

a) $h_{b',2} \circ h_{a,3/4} \circ h_{c,2/3}$.

b) $h_{a',-1} \circ h_{b',-1} \circ h_{c',-1}$.

c) $h_{a',-1} \circ h_{b',-1}$.

Pendiente.

48) Una cuaterna de puntos $\{a,b,c,d\}$ se dice un cuadrilátero si no contiene tres puntos alineados. Si, además, sus lados opuestos $\langle\{a,b\}\rangle, \langle\{d,c\}\rangle$ y $\langle\{a,d\}\rangle, \langle\{b,c\}\rangle$ son paralelos, entonces la cuaterna se dice ser un paralelogramo. Probar que si $\{a,b,c,d\}$ es un paralelogramo, entonces $\vec{ab} = \vec{dc}$ y $\vec{bc} = \vec{ad}$.

Como $\{a,b,c,d\}$ es un paralelogramo:

$$\vec{ab} = \lambda \vec{dc}$$
$$\vec{bc} = \mu \vec{ad}$$

donde $\lambda, \mu \neq 0 \in \mathbb{R}$, ya que los puntos son distintos dos a dos. Tenemos que $\vec{ac} = \vec{ab} + \vec{bc} = \lambda\vec{dc} + \mu\vec{ad}$ y, también, $\vec{ac} = \vec{ad} + \vec{dc}$. Como los vectores $\{\vec{ad}, \vec{dc}\}$ son linealmente independientes, ya que $\{a,b,c,d\}$ es un cuadrilátero (los puntos $\{a,c,d\}$ no están alineados), entonces $\lambda = \mu = 1$, luego, $\vec{ab} = \vec{dc}$ y $\vec{bc} = \vec{ad}$.