Relación 2b: A* y heurísticas

IA DG ADEMAT 21/22

1. Ejercicio 1: Consideramos en un grafo dirigido con pesos un nodo origen O y un nodo destino G. Llamamos c a la función de coste, definida para cualquier par de nodos conectados en el grafo. Sea h una función heurística en el grafo con respecto al nodo de destino G. Denotamos como h^* a la función que, para cualquier nodo N del grafo proporciona el coste óptimo de llegar desde N hasta G.

   Se dice que h es *admisible* si para cualquier nodo N del grafo, se tiene que $h(N) \leq h^*(N)$. Es decir, si h nunca sobreestima el coste de llegar al óptimo.

   Se dice que h es *monótona* o *consistente* si $h(G) = 0$ y, para cualquier nodo P del grafo, y para cualquier nodo H hijo de P, se tiene que $h(P) - h(H) \leq c(P, H)$. Es decir, lo que decrece la heurística entre padre e hijo nunca sobrepasa el coste real de moverse del padre al hijo.

   Probar que:

   a) Si h es admisible, entonces el algoritmo A^*, si encuentra un camino de O a G, el coste de dicho camino es óptimo.

   b) Si h es monótona, cuando el algoritmo A^* genera un nodo que ya estaba en cerrados, esa nueva ocurrencia del nodo no puede mejorar el coste de la primera ocurrencia.

   c) Toda heurística monótona es admisible. En consecuencia, cuando una heurística es monótona, se puede aplicar el A* para encontrar el camino óptimo y no es necesario revisar los cerrados cuando salen repetidos.

   d) Si h no es admisible, el algoritmo A^* seguirá encontrando un camino de O a G si dicho camino existe, pero dicho camino no será necesariamente óptimo en coste.

   e) Si h es admisible pero no monótona, el algoritmo A^* puede generar nodos que ya estaban cerrados pero que tengan un mejor coste que el cerrado actual. En consecuencia, para garantizar que se encuentra el camino óptimo es necesario reemplazar dicho cerrado y, recursivamente, todos aquellos nodos que hayan sido expandidos a partir de dicho cerrado.

2. Ejercicio 2: Responde a las siguientes cuestiones:

   a) Prueba que la heurística constantemente 0 es monótona y admisible. En consecuencia, la búsqueda de costo uniforme, si encuentra un camino de O a G, el coste de dicho camino es óptimo. Además, la búsqueda de costo uniforme no necesita revisar los cerrados para encontrar el óptimo.

b) Asumiendo que los costes de cualquier movimiento son mayores o iguales que 1, la distancia de Manhattan (a G) es una heurística monótona y admisible en un mundo cuadriculado con 4 movimientos (norte, sur, este y oeste).

c) La distancia euclídea (a G) (=distancia aérea) es una heurística monótona y admisible en grafos que representan distancias por carretera entre ciudades.

d) ¿La distancia de Manhattan o la euclídea en un mundo cuadrado con 8 movimientos serían monótonas y/o admisibles? ¿cuál sería una heurística monótona y admisible apropiada en este mundo?

(Pista: si, por ejemplo, el objetivo está en $(0, 0)$, como me puedo mover en diagonal, tiene a la misma distancia el nodo (n, n) que el $(0, n)$ y el $(n, 0)$, los tres nodos serían igual de "prometedores").