Introducción a la lógica difusa II

Juan Luis Castro

Conjuntos (clásicos o crisps) asociados a un subconjunto difuso

A subconjunto difuso de X $\rightarrow$ $A \equiv \mu_A : X \rightarrow [0,1]$

- **Soporte:** conjuntos de elementos con grado de pertenencia distinto de cero

  $Sop(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$ $\equiv$ $Sop(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\}$

- **Núcleo**: Conjunto de elementos cuyo grado de pertenencia es máximo

  $Núcleo(A) = \{x \in X \mid \forall y \in X, \mu_A(x) \geq \mu_A(y)\}$

- **α-corte:** Conjunto de elementos cuyo grado de pertenencia es mayor que α

  $\alpha\text{-corte}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}$

Propiedades de subconjuntos difusos

- Altura: Grado de pertenencia más grande de los elementos del conjunto

  $Altura(A) = \sup \{\mu_A(x) \,/\, x \in X\}$

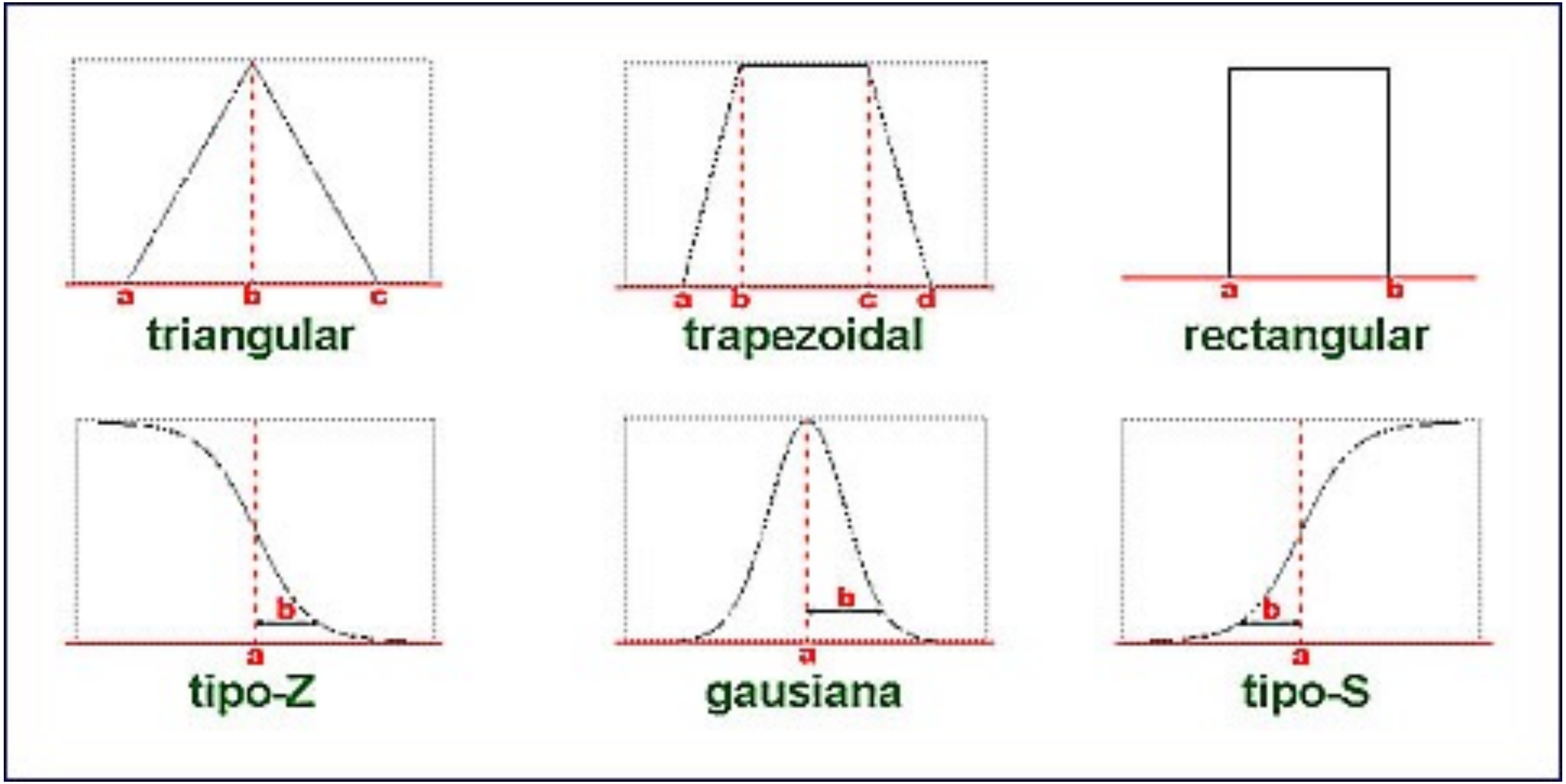
- Conjunto Difuso Normal: Conjunto difuso cuya altura es igual a 1

  A es normal $\Leftrightarrow Altura(A)=1$

- Conjunto Difuso Convexo: Conjunto difuso con función de pertenencia convexa

- Inclusión: $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X,\ \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

Tipos estándares de conjuntos difusos



Generalizaciones del conectivo "Y"

- T-normas: T: [0,1]x[0,1] → [0,1] $T[\mu_A(a),\mu_B(b)]$ = grado de verdad de "a es A y b es B"

- Conmutativa: T(x,y) = T(y,x)
- Asociativa: T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)
- No dcreciente: T(x,y)>=T(z,v), si x>=z y y>=v
- 1 es neutro: T(x,1) = x

- 0 es absorvente: T(x,0) = 0
- T(x,y) ≤ Min(x,y)

t-normas usualmente utilizadas

Mínimo: $T(a,b) = \min(a,b)$ Mayor t-norma, Positiva ($T(a,b)=0 \Longrightarrow a=0$ o $b=0$)

Producto: $T(a,b) = a \cdot b$ Separa puntos: Si $b \neq c$, entonces $T(a,,b) \neq T(a,c)$

Diferencia acotada: $T(a,b)=\max(0, a+b-1)$ No positiva si $a+b \leq 1$, $T(a,b)=0$

t-norma drástica: $T(a,b) = a$, si $b=1$ Menor t-norma

$=b$, si $a=1$

$=0$, en otro caso

Para cada t-norma T; t-norma drástica $\leq T(a,b) \leq \min(a,b)$

t-norma drástica $\leq$ Diferencia acotada $\leq$ Producto $\leq$ Mínimo

Generalizaciones del conectivo “0”

t-conormas (S-normas): S: $[0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$

$S(\mu_A(a),\mu_B(b))$ = grado de verdad de “a es A o b es B”

Conmutativa: $S(x,y) = S(y,x)$

Asociativa: $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$

No decreciente: $S(x,y)>=S(z,v)$, si $x>=z$ y $y>=v$

0 es neutro: $S(x,0) = x$

----

1 es absorvente: $S(x,1) = 1$

$S(x,y) \geq \max(x,y)$

Dualidad:

- Si T es t-norma, entonces $S_T(x,y)=1-T(1-x,1-y)$ es una t-conoma (t-conorma dual de T, S_T=dual(T))
- Si S es t-conorma, entonces $T_S(x,y)=1-S(1-x,1-y)$ es una t-noma (t-norma dual de S, T_S=dual(S))
- Leyes de De Morgan: S= dual(dual(S)) y T=dual(dual(S))

t-conormas usualmente utilizadas

Máximo: $S(a,b) = \max(a,b)$

Menor t-conorma, $S(a,b)=1 \Longrightarrow a=1$ o $b=1$

Suma probabilística: $S(a,b) = a+b-a \cdot b$

Separa puntos: Si $b \neq c$, entonces $S(a,b) \neq S(a,c)$

Suma acotada: $S(a,b) = \min(1, a+b)$

$S(a,b)=1$ sin que $a=1$ o $b=1$, (si $a+b \geq 1$, $S(a,b)=1$)

t-conorma drástica: $S(a,b) = a$, si $b=0$

$= b$, si $a=0$

$= 1$, en otro caso

Mayor t-conorma, no continua

Para cada t-conorma S; max $\leq S(a,b) \leq$ t-conorma drástica

Máximo $\leq$ Suma probabilística $\leq$ Suma acotada $\leq$ t-conorma drástica

Sistemas basados en reglas difusas. Modelo Mamdani

Interpretación

Si X_1 es A_1^1 y …. y X_n es A_n^1 , entonces Y es $B^{1.}$ y … y Si X_1 es A_1^k y …. y X_n es A_n^k , entonces Y es B^k	$\longrightarrow$	X_1 es A_1^1 y …. y X_n es A_n^1 e Y es $B^{1.}$ ó … ó X_1 es A_1^k y …. y X_n es A_n^k e Y es B^k

Reglas difusas: modelo general

Reglas del tipo si-entonces:

R: Si X_1 es A_1 y …. y X_n es A_n , entonces Y es B

donde A_i es una etiqueta lingüística representada como un subconjunto difuso del dominio de X_i

A_i: Dominio(X_i) $\rightarrow$ [0,1]

$A_i(x)$="grado en que x es A_i"

Matching de una entrada con una regla

Grado en que se da el antecedente: Se fija una t-norma T

Si $X_1=x_1,\ldots, X_n=x_n$:

$A_i(x_i)$="grado en que x_i es A_i"="grado en que es cierto X_i es A_i"

$\boxed{\mathbf{T(A_1(x_1),\ldots, A_n(x_n))}}$="grado en que es cierto X_1 es A_1 y .... y X_n es A_n"

Si T=Mínimo, Matching$(X_1=x_1,\ldots, X_n=x_n;R) = \min(A_1(x_1),\ldots, A_n(x_n))$

Si T=Producto, Matching $(X_1=x_1,\ldots, X_n=x_n;R) = A_1(x_1) * \ldots * A_n(x_n)$

Disparando la regla difusa, modelo Mamdani

Se fija una t-norma T2

Si X_1 es A_1 y …. y X_n es A_n , entonces Y es B

$X_1=x_1,\dots, X_n=x_n$

Y es B'

-

X_1 es A_1 y …. y X_n es A_n e Y es B

$X_1=x_1,\dots, X_n=x_n$

Y es B'

M = Matching($X_1=x_1,\dots, X_n=x_n$;R)

B'(y)= T2(M,B(y))

Si T2=Mínimo: B'(y) = min(M,B(y))

Si T2=Producto: B'(y) = M * B(y))

Salida difusa del sistema, Agregación (Modelo Mamdani)

Se fija una t-conorma S

X_1 es A_1^1 y …. y X_n es A_n^1 e Y es B^1 → Y es $B^{1'}$

ó

…

ó

X_1 es A_1^k y …. y X_n es A_n^k e Y es B^k → Y es $B^{k'}$

$\left.\begin{array}{l} Y \text{ es } B^{1'} \\ \vdots \\ Y \text{ es } B^{k'} \end{array}\right\}$ Y es B'

$B'(y) = S(B^{1'}(y),\ldots,B^{k'}(y))$

Desfuzzificación

Y es B' $\longrightarrow$ $Y = y_0$

- Centro de gravedad (centroide): $y_0 = (\int_Y y \cdot \mu B'(y)\, dy) / (\int_Y \mu B'(y)\, dy)$

- Media de los máximos (MoM):

$y_1 = \text{Inf}\,\{ z \,/\, \mu B'(z) = \text{Sup}\ \mu_{B'}(y)\},$
$y_2 = \text{Sup}\,\{ z \,/\, \mu B'(z) = \text{Sup}\ \mu_{B'}(y)\},$

$$y0 = (y1+y2) / 2$$

Sistema basados en reglas difusas para problemas de clasificación

Características: $X_1,\dots, X_n$

¿Clase? $C_1,..,C_l$

Dominio(Y) = $\{C_1,..,C_l\}$

Si X_1 es A_1^1 y …. y X_n es A_n^1 , entonces Clase es $C^{O(1)}$.

y

…

y

Si X_1 es A_1^k y …. y X_n es A_n^k , entonces Clase es $C^{O(k)}$

Clase es $C^{O(i)}$

Y es $\{C^{O(ii)})$

MoM da como respuesta la clase con mayor grado