Incertidumbre 3: Razonamiento Probabilístico

Representación Numérica de la Incertidumbre: Probabilidad

- **La Teoría de la Probabilidad (TProb)**
  - Es un área de las Matemáticas que ha sido aplicada a problemas de razonamiento con incertidumbre
  - Es una teoría elegante, bien entendida y con mucha historia (formalizaciones a partir de mediados del siglo XVII)
  - Asigna valores numéricos (llamados probabilidades) a las proposiciones.
  - Nos dice, dadas las probabilidades de ciertas proposiciones, y algunas relaciones entre ellas como asignar probabilidades a las proposiciones relacionadas
  - Relación con la LPO:
    - En la LPO las proposiciones son ciertas o falsas.
    - Con la Tprob las proposiciones son también ciertas o falsas pero se tiene un grado de creencia en la certeza o falsedad.

¿Qué son las Probabilidades?

- **A pesar de su larga historia los valores numéricos que representan las probabilidad no tiene una interpretación única.**
- **Algunas Interpretaciones:**
  - Frecuentista: Es el valor, cuando el número de pruebas tiende a infinito, de la frecuencia de que ocurra algún evento
  - Subjetiva: Es un grado de creencia acerca de un evento incierto
- **Aún así:**
  - Existe un consenso sobre el modelo matemático que soporta la Teoría

Los Valores Numéricos de la Probabilidad

- **Denotaremos por P(A) a la probabilidad de la proposición A**
  - A="El paciente tiene sarampión"
  - A="Mañana saldrá el sol" ...
- **Los valores de la Probabilidad satisfacen un conjunto de axiomas:**
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - P(Proposición Verdadera)=1
  - $P(A \vee B)=P(A)+P(B)$
    - Siempre que A y B sean disjuntos, es decir $\neg(A \wedge B)$
- **A partir de ellos se puede demostrar por ejemplo:**
  - $P(\neg A)=1-P(A)$
  - P(Proposición Falsa)=0
  - $P(A \vee B)=P(A)+P(B)-P(A \wedge B)$

Variables Aleatorias

- **Muchas veces tenemos un evento con un conjunto de resultados:**
  - Completo

    Se conocen todos los posibles resultados
  - Mutuamente excluyente

    No se pueden dar dos resultados distintos simultáneamente.

  Ejemplos
    - Si tiramos una moneda, el resultado es cara o cruz
    - Si tiramos un dado, se producen seis resultados distintos
    - La temperatura de un paciente puede estar en un conjunto de intervalos: <36.5, 36.5-37.4, 37.5-38.4, 38.5-39.4, >39.4
- **En lugar de tener una proposición para cada resultado se introduce el concepto de Variable aleatoria**
- **Se permiten proposiciones de la forma Variable = resultado**
  - Por ejemplo, si M="Resultado de tirar una moneda con valores posibles cara y cruz" se permiten las proposiciones:
    - M=cara y M=Cruz y podemos hablar de
    - P(M=cara) y P(M=cruz) que representan la probabilidad de obtener una cara y una cruz respectivamente

Variables Aleatorias

- **Por consistencia, se puede considerar que todas las proposiciones son variables aleatorias que toman dos valores verdadero o falso**
  - Por ejemplo, dada la proposición “Tiene Sarampión”
    - Construimos la variable aleatoria Sarampión que toma los valores verdadero y falso
  - Y representamos la probabilidad de que un paciente tenga Sarampión P(“Tiene Sarampión”) como P(Sarampión =verdadero)
- **Abreviaturas**
  - Se suele escribir P(M=cara) como P(cara), cuando está claro que nos referimos a la variable aleatoria M.
  - Si una variable aleatoria como Sarampión toma únicamente los valores verdadero o falso se suele escribir P(Sarampión =verdadero) como P(sarampión) y P(Sarampión =falso) como P(¬ sarampión)

Distribuciones de Probabilidad

- **Dada una Variable Aleatoria nos gustaría conocer la probabilidad para cada valor que pueda tomar**
- **Esta descripción se llama distribución de probabilidad (Dprob) de la variable aleatoria y consiste en listar los valores de probabilidad para cada valor de la variable**
- **Ejemplo:**
  - Distribución de probabilidad de la variable Llueve

Variable

Valores

Llueve	P(Llueve)
Verdadero	0.1
Falso	0.9

Probabilidades

Proposiciones más Complejas

- **Podemos estar interesados en estudiar varias variables en conjunto.**
  - Por ejemplo
    - P(Sarampión=verdadero $\wedge$ Fiebre=verdadero) que es la probabilidad de que el paciente tenga sarampión y fiebre
  - Generalmente lo escribiremos como:
    - P(sarampión$\wedge$ fiebre) o P(sarampión, fiebre)
- **Para ello se necesita asignar probabilidades a cada posible combinación de los valores de las variables.**
- **El listado de todos esos valores se llama la distribución conjunta del conjunto de variables**

Ejemplo de distribución conjunta

- **Distribución conjunta de las variables Llueve y EnCalle P(Llueve, EnCalle):**

Llueve	EnCalle	P(Llueve,EnCalle)
Verdadero	Verdadero	0.01
Verdadero	Falso	0.09
Falso	Verdadero	0.2
Falso	Falso	0.7

- **También se puede escribir como:**

Llueve	EnCalle	P(Llueve,EnCalle)
llueve	encalle	0.01
llueve	¬encalle	0.09
¬ llueve	encalle	0.2
¬ llueve	¬encalle	0.7

- **Recuerda a la tabla de la verdad lógica excepto que:**
  - Describe las probabilidad para cada combinación de valores de las variables
  - Generalmente dichos valores no se pueden calcular a partir de sus componentes

La Importancia de la Distribución Conjunta

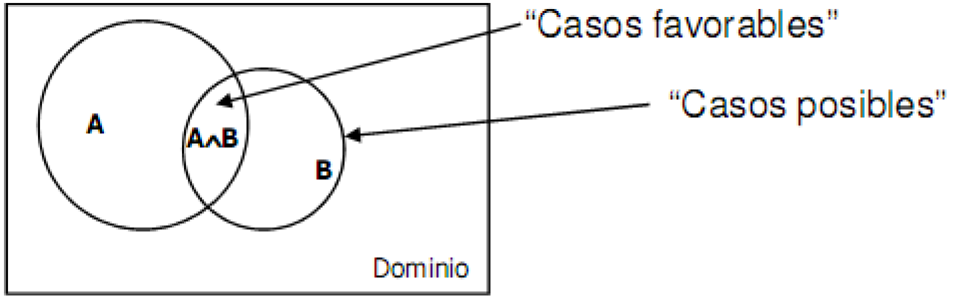
- **La distribución conjunta contiene todo lo que se necesita saber acerca de un conjunto de variables aleatorias.**
- **En particular, la distribución de cada variable individual se puede calcular a partir de la distribución conjunta (y se llama distribución marginal)**
  - Ejemplo: Supongamos las variables aleatorias: Llueve y EnCalle con distribución conjunta P(Llueve,EnCalle)

llueve	encalle	0.01
llueve	¬encalle	0.09
¬ llueve	encalle	0.2
¬ llueve	¬encalle	0.7

- Entonces $P(llueve)= P(llueve \wedge enCalle)+ P(llueve \wedge \neg enCalle)=0.01+0.09=0.1.$
- De forma similar $P(\neg llueve)= 0.9$
- También podemos calcular la probabilidad de disyunciones: $P(llueve \vee enCalle)=0.01+0.09+0.2= 0.3$

Probabilidad Condicional

- **Escribiremos P(A|B) para representar la probabilidad de A dado B. Esta probabilidad se llama probabilidad condicional.**
- **Lo podemos interpretar como mi grado de creencia en A cuando todo lo que sé es B.**
  - O de forma alternativa, de los casos en los que se da B, ¿en que proporción se da A?



Probabilidad Condicional
Representación gráfica

- **Se define como:**
  - $P(A|B)=P(A \wedge B)/P(B)$ (Asumiendo $P(B)\neq 0$) o equivalentemente
  - $P(A \wedge B)= P(A|B)P(B)$ (Regla del Producto)

Distribución Condicional

- **Nos permite conocer la probabilidad de que se tomen unos determinados valores por un conjunto de variables aleatorias cuando se saben los valores que han tomado otras.**
  - Ejemplo: P(Llueve|enCalle)

Llueve	P(Llueve|enCalle)
llueve	0.05
¬ llueve	0.95

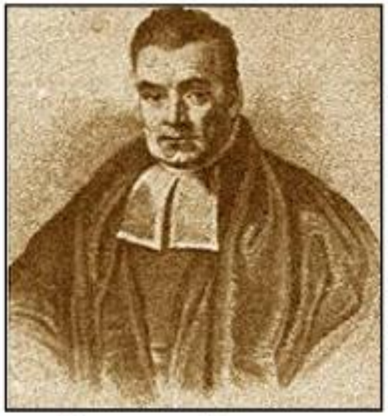
  - Ejemplo: P(Llueve| ¬ enCalle)

Llueve	P(Llueve| ¬enCalle)
llueve	0.11
¬ llueve	0.89

  - Nótese que Llueve|enCalle y Llueve| ¬ enCalle son variables aleatorias

Razonamiento con Probabilidades: La Regla de Bayes

- **Propuesta en 1763 por el Reverendo T. Bayes**
  - $P(A|B)= P(B|A) P(A) / P(B)$
  - Es una consecuencia de la regla del producto:
    - $P(A|B)P(B) = P(A,B) = P(B|A)P(A)$



Thomas Bayes

- **De forma intuitiva:**
  - La probabilidad de una hipótesis A dada una evidencia B: $P(A|B)$ es proporcional a probabilidad de la hipótesis $P(A)$ multiplicada por el grado en que la hipótesis predice los datos $P(B|A)$
- **Aplicabilidad**
  - En muchos problemas dado un conjunto de datos (evidencia) B tenemos que seleccionar la hipótesis A más probable mediante $P(A|B)$

Regla de Bayes: Forma General

- **Forma general de la Regla de Bayes**
  - Si se tiene un conjunto de proposiciones $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ completas y mutuamente excluyente se tiene:

$$P(A_i|B)= \frac{P(B|A_i)\, P(A_i)}{P(B|A_1)\, P(A_1)+\ldots\, P(B|A_n)\, P(A_m)}$$

O lo que es lo mismo, si tiene una variable aleatoria A con valores $a_1, a_2, \ldots, a_m$

$$P(a_i|B)= \frac{P(B|a_i)\, P(a_i)}{P(B|a_1)\, P(a_1)+\ldots\, P(B|a_n)\, P(a_m)}$$

La Regla de Bayes: Ejemplo

- **Intentemos resolver un caso real con probabilidades:**
  - Se pretende determinar la presencia o no de una enfermedad con un test.
    - En este caso:
      - Hipótesis (A): Enfermedad (variable aleatoria con dos valores verdadero y falso)
      - Evidencia (B): Test (variable aleatoria con dos valores positivo y negativo)
    - Se tiene:
      - $P(a)=1/10000$ (Prevalencia)
      - $P(b|a)=0.99$ (Sensibilidad)
      - $P(\neg b| \neg a)=0.99$ (Especificidad)
    - Aplicando la Regla de Bayes:

      $$P(a|b)= P(b|a)\ \ P(a)\ \ /(P(b|a)\ \ P(a)\ \ + P(b|\neg a)\ \ P(\neg a))=$$
      $$0.99 \times 0.0001/ (\ 0.99 \times 0.0001 + (1\text{-}0.99)\times(1\text{-}0.0001))=$$
      $$(1/102)=0.0098$$
      $$P(\neg a\ |b)=1\text{-}\ 0.0098=0.9902$$
    - Al elegir la hipótesis más probable debemos concluir que con este test si el resultado es positivo lo más probable es que el paciente no esté enfermo!

La Regla de Bayes: Ejemplo

- **Continuamos con el ejemplo:**
  - ¿Y si hay varios tests $B_1,B_2,\ldots,B_m$?
    - Supondremos que cada test $B_1,B_2,\ldots,B_m$ es una variable aleatoria con dos resultados: positivo y negativo.
  - Entonces si queremos calcular la probabilidad de que el paciente esté enfermo necesitamos calcular:

$$P(A|\ B_1,B_2,\ldots,B_m)=P(B_1,B_2,\ldots,B_m|\ A)P(A)/P(B_m,B_m,\ldots,B_m)$$

  - Si al paciente se le hace un conjunto de 30 pruebas y por simplificar se supone que cada una da como resultado sí o no.
    - Entonces para almacenar la tabla de probabilidad conjunta $P(B_1,B_2,\ldots,B_m|\ A)$ se necesitan guardar unos 2^{30} números reales (unos 8 DVD's por paciente).
    - ¿De donde sacamos los números ? ¿Cómo estimar los números a partir de casos (en la Tierra hay 2^{32} personas aproximadamente)?
    - ¿Cómo hacemos los cálculos computacionalmente eficientes?

Independencia: ¿Una Solución?

- **Independencia**
  - Decimos que dos proposiciones A_1 y A_2 son independientes si el conocimiento de una no cambia la probabilidad de la otra
    - Por ejemplo si
      - A_1="Es rubio" , A_2="Tiene la piel clara" ,A_3="Lloverá mañana"
      - A_1 y A_3 son independientes A_1 y A_2 no.
  - Formalmente A_1,A_2 son independientes si $P(A_1|A_2)=P(A_1)$
    o de forma equivalente: $P(A_2|A_1)=P(A_2)$
    o utilizando la regla del producto $P(A_1 \wedge A_2)= P(A_1)\ P(A_2)$
  - Entonces $P(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n)= P(A_1)\ P(A_2) ...\ P(A_n)$
    Para especificar la distribución conjunta de n variables se necesitan o(n) números en lugar de $o(2^n)$
  - Dos variables aleatorias son independientes si el conocimento del valor que toma una no cambia la probabilidad de los valores de la otra: $P(A_1=c|A_2=d) = P(A_1=c)$

Independencia Condicional

- **Pero...**
  - La condición de independencia es muy restrictiva.
  - Por ejemplo, los resultados de los tests en medicina no suelen ser independientes.
- **Independencia condicional**
  - Se dice que dos proposiciones A_1,A_2 son independientes dada una tercera B si cuando B está presente el conocimiento de una no influye en la probabilidad de la otra: $P(A_1|A_2,B)=P(A_1|B)$

    o de forma equivalente: $P(A_2|A_1,B)=P(A_2|B)$

    o de forma equivalente: $P(A_1 \wedge A_2 |B)= P(A_1|B)\ P(A_2|B)$
    - Ejemplo:
      - A_1="Tengo congestión nasal" A_2="Tengo fiebre" A_3="Tengo gripe"
      - A_1 y A_2 son dependientes pero son independientes si se conoce A_3.
  - Ahora se tiene: $P(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n |B)=P(A_1|B)\ P(A_2|B) \ldots P(A_n|B)$
    - Tenemos o(n) números en lugar de o(2^n)

Independencia Condicional

- **Finalizamos el ejemplo:**
  - ¿Y si hay varios tests $B_1,B_2,\ldots,B_m$?
  - Como vimos, para calcular la probabilidad de que el paciente esté enfermo hay que calcular:

    $P(A|\ B_1,B_2,\ldots,B_m)=P(B_1,B_2,\ldots,B_m|\ A)P(A)/P(B_m,B_m,\ldots,B_m)$
  - Si los tests $B_1,B_2,\ldots,B_m$ son independientes dada la enfermedad A (aproximación que suele dar buenos resultados):

    $P(B_1,B_2,\ldots,B_m|A)=P(B_1|A)\ P(B_2|A)\ \ldots\ P(B_m|\ A)$
  - El problema a resolver ya es abordable:

    Basta calcular:

    $P(A|\ B_1,B_2,\ldots,B_m)=P(B_1|A)\ P(B_2|A)\ldots P(B_m|\ A)P(A)/P(B_m,B_m,\ldots,B_m)$

    $P(\neg A|\ B_1,B_2,\ldots,B_m)=P(B_1|\neg A)\ P(B_2|\neg A)\ldots P(B_m|\neg A)\ P(\neg A)$ $/P(B_m,B_m,\ldots,B_m)$

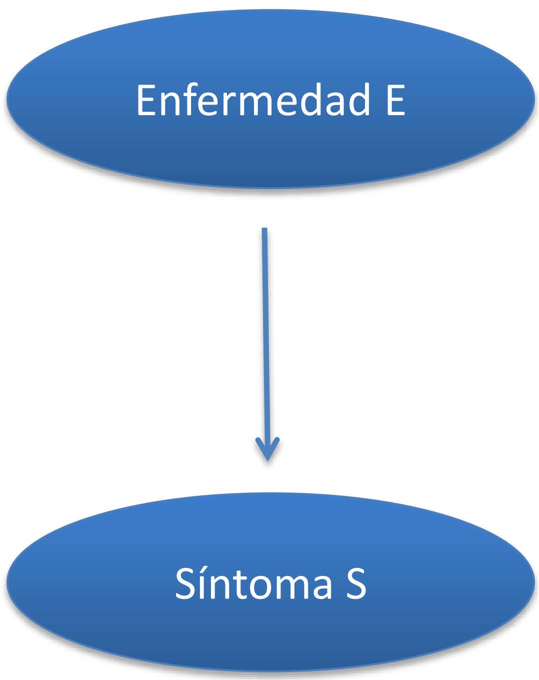
    con $P(B_m,B_m,\ldots,B_m)= P(B_1|A)\ P(B_2|A)\ldots P(B_m|\ A)P(A)+$ $P(B_1|\neg A)\ P(B_2|\neg A)\ldots P(B_m|\neg A)\ P(\neg A)$

Representación de la Independencia: Redes Bayesianas

- **La clave hacer factible la inferencia con probabilidades es la introducción explícita de la independencia entre variables**
- **El modelo más extendido de representación de independencias lo constituye las Redes Bayesianas.**
- **En este modelo se representa de forma explícita la dependencia entre variables mediante un grafo**
- **Los nodos del grafo se corresponden con variables y las dependencias se representan mediante arcos entre ellas**

Aplicación Regla de Bayes

- Ejemplo simple

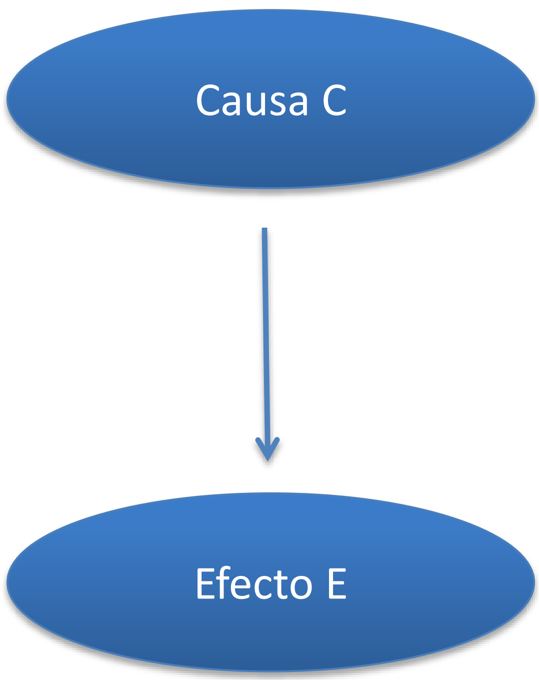


Tenemos un conocimiento sobre la probabilidad de E (P(E), probabilidad a priori). Indago y descubro que se da S. Conociendo P(S/E) y P(S/¬E), ¿que probabilidad hay ahora (P(E/S) probabilidad a posteriori) de que se de E?

$$P(E|S) = \frac{P(S|E).P(E)}{P(S|E).P(E)+P(S|\neg E).P(\neg E)}$$

Aplicación Regla de Bayes

- **Caso simple: Probabilidad inducida por un efecto**



Se conoce P(C), P(E|C) y P(E|¬C), ¿Puedo calcular P(C|E)?

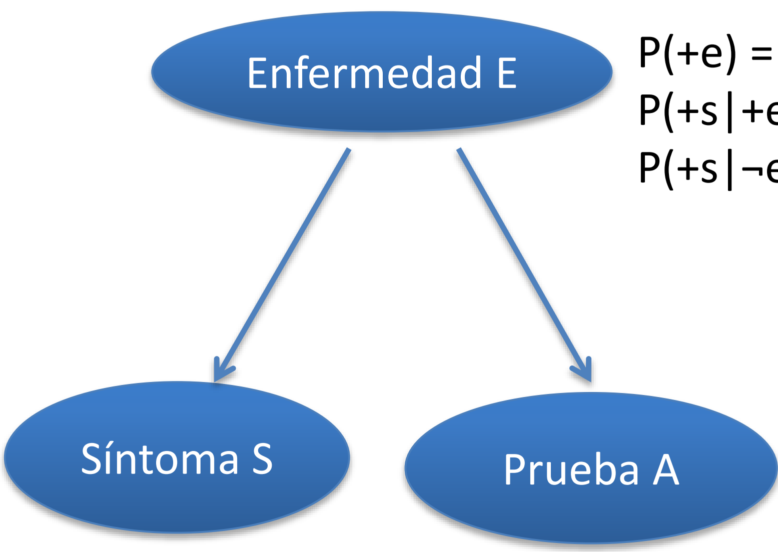
$$P(C|E) = \frac{P(E|C)*P(C)}{P(E|C)*P(C)+P(E|\neg C)*P(\neg C)}$$

Aplicación Regla de Bayes

- **Probabilidad inducida a una variable por varias efectos** (suponiendo independencia entre ellos cuando se condiciona a la variable)

ENFERMEDAD (E): presente (+e), ausente (¬e)
SÍNTOMA (S): presente (+s), ausente (¬s)
PRUEBA ANALÍTICA (A): positivo (+a), negativo (¬a)

Grafo dirigido acíclico



P(+e) = 0’002 → probabilidad a priori
P(+s|+e) = 0’93 P(+a|+e) = 0’995 → prob de los efectos si +e
P(+s|¬e) = 0’01 P(+a|¬e) = 0’003 → prob de los efectos si -e

P(+e|+s,+a)= P(+e,+s,+a) / P(+s,+a) ecuación cálculo
P(+e,+s,+a) = P(+e).P(+s|+e).P(+a|+e) = 0,00185
P(¬e,+s,+a) = P(¬e).P(+s|¬e).P(+a|¬e) = 0,00003
P(+s,+a) = P(+e,+s,+a) + P(¬e,+s,+a) = 0,00188
P(+e|+s,+a)= P(+e,+s,+a) / P(+s,+a) = 0,984

Red causal

- **Probabilidad inducida por varias factores** (independientes entre si) **y varios efectos** (independientes cuando se condiciona a la variable entre si, y con los factores)

  Paludismo (X): presente +x, ausente –x

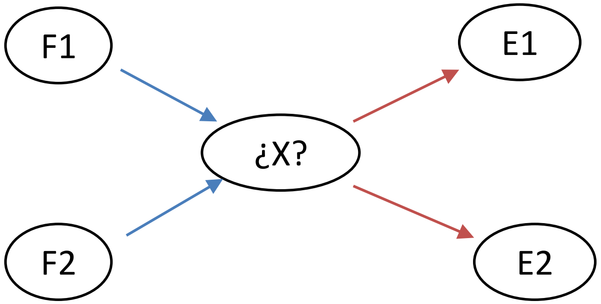
  Zona de origen (F1): alto riesgo f_1^+, riesgo medio f_1^0, riesgo bajo f_1^-

  Tipo sanguíneo (F2): mayor inmunidad f_2^+, menor inmunidad f_1^-

  Gota gruesa (E1): positivo e_1^+, negativo e_1^-

  Fiebre (E2): presente e_2^+, ausente e_2^-

- Grafo dirigido acíclico



Red Causal: conocimiento

Distribución de probabilidad de los factores

$P(f_1+) = 0,1$
$P(f_1 0) = 0,1$
$P(f_1-) = 0,8$

$P(f_2+)=0,6$
$P(f_2-)=0,4$

Distribución de probabilidad condicionada de la variable con respecto a los factores

$P(+x/f_1,f_2)$	f_1+	$f_1 0$	f_1-
f_2+	0,015	0,003	0,0003
f_2-	0,022	0,012	0,0008

Distribución de probabilidad condicionada de los efectos con respecto a la variable

$P(+e_1 \mid +x) = 0,992$
$P(+e_2 \mid +x) = 0,98$

$P(+e_1 \mid -x) = 0,006$
$P(+e_2 \mid -x) = 0,017$

Red causal: Inferencia

$P(f_1,f_2,x,e_1,e_2) = P(f_1)*P(f_2)*P(x|f_1,f_2)*P(e_1|x)*P(e_2|x)$

- Ejemplo: calcular $P(+x|f_1^0,f_2^-, e_1^-, e_2^+)$
  - $P(f_1^0,f_2^-,+x, e_1^-, e_2^+) = P(f_1^0)*P(f_2^-)*P(+x|f_1^0,f_2^-)*P(e_1^- |+x)*P(e_2^+|+x) =$
    $= 0{,}1*0{,}4*0{,}012*0{,}008*0{,}98 = 0{,}00000376$
  - $P(f_1^0,f_2^-,-x, e_1^-, e_2^+) = P(f_1^0)*P(f_2^-)*P(-x| f_1^0,f_2^-)*P(e_1^- |-x)*P(e_2^+|-x) =$
    $= 0{,}1*0{,}4*0{,}988*0{,}994*0{,}017 = 0{,}00066780$
  - $P(f_1^0,f_2^-, e_1^-, e_2^+) = P(f_1^0,f_2^-,+x, e_1^-, e_2^+) + P(f_1^0,f_2^-,-x, e_1^-, e_2^+)= 0{,}00067156$
  - $P(+x|f_1^0,f_2^-, e_1^-, e_2^+) = P(f_1^0,f_2^-,+x, e_1^-, e_2^+) / P(f_1^0,f_2^-, e_1^-, e_2^+) =$
    $= 0{,}00000376 / 0{,}00067156 = 0{,}0055989 \approx 0{,}0056$

Red causal: deducciones

$P(+x,f_1,f_2)$	f_1^+	f_1^0	f_1^-				
f_2^+	0,0009	0,00018	0,000144	0,001224	$P(+x, f_2^+)$	0,00204	$P(+x\|f_2^+)$
f_2-	0,00088	0,00048	0,000256	0,001616	$P(+x, f_2-)$	0,00404	$P(+x\|f_2-)$
	0,00178	0,00066	0,0004	0,00284	$P(+x)$		
	$P(+x, f_1^+)$	$P(+x, f_1^0)$	$P(+x, f_1^-)$				
	0,0178	0,0066	0,0005				
	$P(+x\|f_1^+)$	$P(+x\|f_1^0)$	$P(+x\|f_1^-)$				

- **Probabilidad a priori:** $P(+x) = 0,00284$
- **Probabilidad tras conocer los factores:** $P(+x|f_1^0,f_2^-) = 0,012$
  $P(+x|f_1^0) = 0,0066$ si desconozco el valor de F2
  $P(+x|f_2^-) = 0,0040$ si desconozco el valor de F1
- **Probabilidad tras añadir conocimiento sobre los efectos:** $P(+x|f_1^0,f_2^-,\neg e_1,e_2) = 0,0056$
  Si desconozco el valor de F1 y de E2, ¿$P(+x|f_2^-,\neg e_1)$?

Red causal: deducciones

$P(+x,f_1,f_2)$	f_1^+	f_1^0	f_1^-				
f_2^+	0,0009	0,00018	0,000144	0,001224	$P(+x, f_2^+)$	0,00204	$P(+x\|f_2^+)$
f_2-	0,00088	0,00048	0,000256	0,001616	$P(+x, f_2\text{-})$	0,00404	$P(+x\|f_2\text{-})$
	0,00178	0,00066	0,0004	0,00284	$P(+x)$		
	$P(+x, f_1^+)$	$P(+x, f_1^0)$	$P(+x, f_1^-)$				
	0,0178	0,0066	0,0005				
	$P(+x\|f_1^+)$	$P(+x\|f_1^0)$	$P(+x\|f_1^-)$				

$= P(+x,f_1^+, f_2^+) + P(+x,f_1^+, f_2^-)$

$= P(+x|f_1^0,f_2^+) * P(f_1^0) * P(f_2^+)$

- **Probabilidad a priori:** $P(+x) = 0{,}00284$
- **Probabilidad tras conocer los factores:** $P(+x|f_1^0,f_2^-) = 0{,}012$

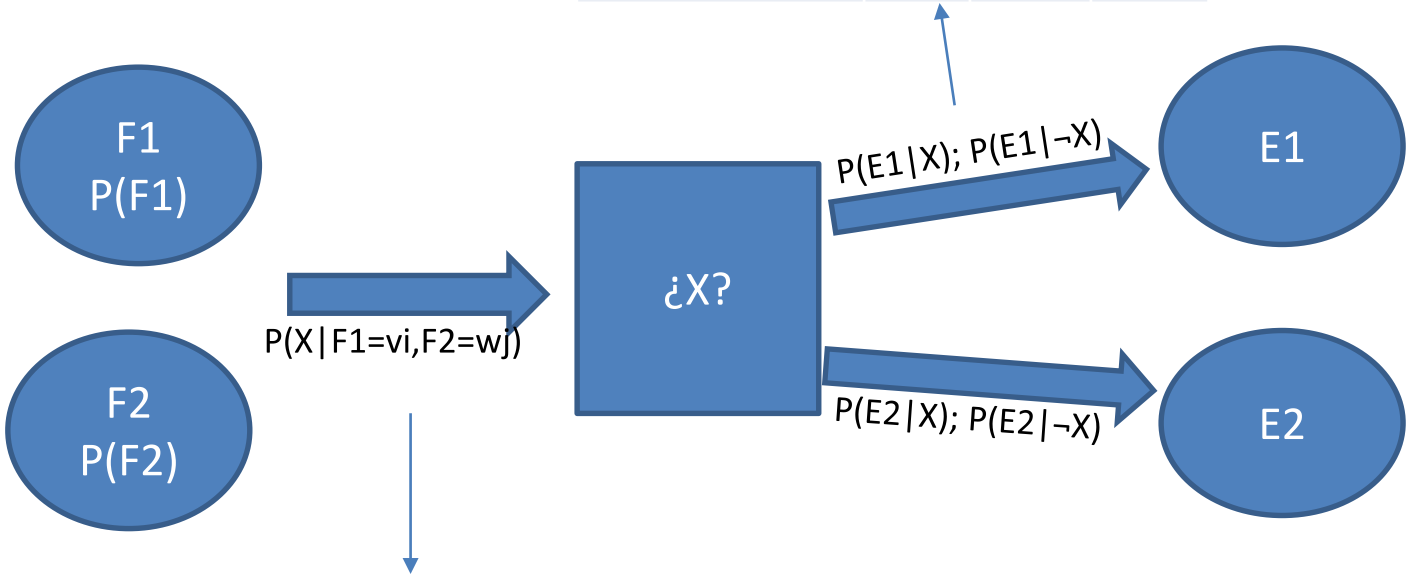
  $P(+x|f_1^0) = 0{,}0066$ si desconozco el valor de F2

  $P(+x|f_2^-) = 0{,}0040$ si desconozco el valor de F1
- **Probabilidad tras añadir conocimiento sobre los efectos:** $P(+x|f_1^0,f_2^-,\neg e_1,e_2) = 0{,}0056$

  Si desconozco el valor de F1 y de E2, ¿$P(+x|f_2^-,\neg e_1)$?

En forma de SE (conocimiento)

	w_1	…	w_k
P(E1=w_i|X)			
P(E1=w_i|¬X)			



	F1=u_1	**…**	**F1=u_s**
F2=v_1			
……			
F2=v_r			

P(X|F1=u_s,F2=v_1)

En forma de SE (inferencia)

- Probabilidad a priori

P(X a_priori) $= \boldsymbol{P(X)} = \sum \boldsymbol{P(X, F1 = ui, F2 = vj)}$

$P(X,F1=u_i,F2=v_j) = P(F1=u_i)*P(F2=v_j)*P(X|F1=u_i,F2=v_j)$

- Probabilidad a posteriori tras factores *F1=u,F2=v*

P(X a_posteriori_factores) = **P(X|F1=u,F2=v)**

- Probabilidad a posteriori tras factores y efectos E1=w,E2=z

P(X a_posteriori_factores_efectos) = P(X|F1=u,F2=v,E1=w,E2=z)

Cx= P(F1=u)*P(F2=v)*P(X|F1=u,F2=v)*P(E1=w|X)*P(E2=z|X) = P(X,F1=u,F2=v,E1=w,E2=z)

C¬x=P(F1=u)*P(F2=v)*P(¬X|F1=u,F2=v)*P(E1=w|¬X)*P(E2=z|¬X)=P(¬X,F1=u,F2=v,E1=w,E2=z)

C= Cx + C¬x = P(F1=u,F2=v,E1=w,E2=z)

P(X a_posteriori_factores_efectos) = Cx /C

Resumen de representaciones numéricas

- **Grados de certidumbre en Mycin**
  - Asigna:Un número entre -1 y 1 a cada regla
  - Mide: La incertidumbre asociada a cada regla
  - Aplicaciones: Sistemas Expertos
  - Ventajas: El número de parámetros necesario es razonable
  - Inconvenientes: Débil representación de la independencia, Incoherencias
- **Lógica difusa**
  - Asigna:Un número entre 0 y 1 a cada proposición
  - Mide: La verdad asociada a cada proposición
  - Aplicaciones: Sistemas Expertos, Control
  - Ventajas: Proporciona una forma de razonar con la vaguedad asociadas al lenguaje natural
  - Inconvenientes: Tiene muchas elecciones arbitrarias (combinación de grados de creencia, inferencia, etc.)

Resumen de representaciones numéricas

- **Probabilidad**
  - Asigna:Un número entre 0 y 1 a cada proposición
  - Mide: La incertidumbre asociada a dicha proposición
  - Aplicaciones: Sistemas Expertos, Clasificación
  - Ventajas: Sistema formalmente probado y robusto
  - Inconvenientes: Se necesita mucha información

IMPRECISIÓN EN LAS AFIRMACIONES VS IMPRECISIÓN EN EL CONOCIMIENTO DE LA VERACIDAD

Conocimiento verdad / Afirmaciones	PRECISO	IMPRECISO: RETRACTABLE	IMPRECISO: BASADA EN ESTADISTICA	IMPRECISO: BASADO EN CREENCIAS
PRECISAS	LÓGICA CLASICA	- LÓGICA POR DEFECTO - HIPOTESIS DEL MUNDO CERRADO	PROBABILIDAD	FACTORES DE CERTEZA
IMPRECISAS	LÓGICA DIFUSA	LÓGICA DIFUSA POR DEFECTO	LÓGICA DIFUSA PROBABILISTICA	LÓGICA DIFUSA CON FACTORES DE CERTEZA