Tema 7: Contraste de hipótesis

1. Se toma una observación de una variable con distribución de Poisson para contrastar que la media vale 1 frente a que vale 2.

   a) Construir un test no aleatorizado con nivel de significación 0.05 para el contraste planteado. Calcular las probabilidades de cometer error de tipo 1 y de tipo 2, el tamaño y la potencia del test frente a la hipótesis alternativa.

   b) ¿Cómo debe aleatorizarse el test para alcanzar el tamaño 0.05? ¿Cuál es la potencia de este test?

2. Una urna contiene 10 bolas, blancas y negras. Para contrastar que el número de bolas blancas es 5 frente a que dicho número es 6 o 7, se extraen tres bolas con reemplazamiento y se rechaza H_0 sólo si se obtienen 2 o 3 bolas blancas. Calcular el tamaño de este test y la potencia frente a las alternativas.

3. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro λ. Encontrar el test más potente de tamaño α para resolver el problema de contraste

$$\begin{aligned} H_0 &: \lambda = \lambda_0 \\ H_1 &: \lambda = \lambda_1 \end{aligned}$$

   Aplicación: En una centralita telefónica el número de llamadas por minuto sigue una distribución de Poisson. Si en cinco minutos se han recibido 12 llamadas, ¿puede aceptarse que el número medio de llamadas por minuto es 1.5, frente a que dicho número es 2, al nivel de significación 0.05? Calcular la potencia del test obtenido.

4. Dada una muestra de tamaño n de una variable con distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$, deducir el test más potente de tamaño arbitrario para contrastar hipótesis simples sobre μ.

5. Dada una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con distribución $U(-\theta, \theta)$, deducir el test más potente de tamaño α para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$ y calcular su potencia. ¿Cuál es el test óptimo fijado un nivel de significación arbitrario?

6. Deducir el test más potente de tamaño arbitrario para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$, basándose en una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2}, \quad x > \theta.$$

   Deducir el test óptimo para un nivel de significación arbitrario.

7. Construir el test de Neyman-Pearson de tamaño α para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$, basándose en una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{x \ln \theta}, \quad 1 < x < \theta.$$

   Deducir el test óptimo para un nivel de significación arbitrario.

8. Sea X una observación de una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, \quad x > 0.$$

Construir el test de razón de verosimilitudes de tamaño α arbitrario para contrastar

$$\begin{array}{l} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0. \end{array}$$

9. En base a una observación de $X \to \{B(n,p);\ p \in (0,1)\}$, deducir el test de razón de verosimilitudes para contrastar la hipótesis de que el parámetro p no supera un determinado valor, p_0.

10. Sea X una variable con función de densidad

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1.$$

Basándose en una observación de X, deducir el test de razón de verosimilitudes de tamaño arbitrario para contrastar

$$\begin{array}{l} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0. \end{array}$$

11. Un fabricante de coches asegura que la distancia media recorrida con un galón de gasolina es al menos 30 millas. Probados 9 coches de esta fábrica, la distancia media recorrida con un galón de gasolina ha sido 26 millas, y la suma de los cuadrados 6106 millas al cuadrado.

    a) Suponiendo que la distancia recorrida por estos coches con un galón de gasolina tiene distribución normal, contrastar la hipótesis del fabricante a partir de estos datos, a nivel de significación 0.01.

    a) ¿Qué conclusión se obtendría de estos mismos datos, al mismo nivel de significación, si se sabe que la desviación típica de la variable considerada es 5.5?

12. Un fabricante de baterías asegura que la desviación típica del tiempo de vida de las mismas es, a lo sumo, 70 horas. Una muestra de 26 baterías tomadas al azar ha dado una cuasidesviación típica de 84 horas. Haciendo las hipótesis adecuadas de normalidad, ¿proporcionan los datos evidencia para rechazar la hipótesis del fabricante al nivel 0.02?

13. Un profesor asegura que tiene un nuevo método de enseñanza mejor que el usado tradicionalmente. Para comprobar si tiene razón se selecciona de forma aleatoria e independiente dos grupos de alumnos, A y B, utilizándose el nuevo método con el grupo A y el tradicional con el B. A final de curso se hace un examen a los alumnos, obteniéndose las siguientes puntuaciones:

    Grupo A: 6, 5, 4, 7, 3, 5.5, 6, 7, 6

Grupo B: 5, 4, 5, 6, 4, 6, 5, 3, 7

Supuesto que las puntuaciones de cada grupo tienen distribución normal, ¿proporcionan estos datos evidencia para rechazar el nuevo método a nivel de significación 0.05?

14. A partir de las siguientes observaciones de muestras independientes de dos poblaciones normales, contrastar, al nivel de significación 0.01, si la media de la primera población supera en al menos una unidad la media de la segunda.

    MUESTRA 1: 132, 139, 126, 114, 122, 132, 141, 126.

    MUESTRA 2: 124, 141, 118, 116, 114, 132, 145, 123, 121.

15. Una central lechera recibe diariamente leche de dos granjas A y B. Para comparar la calidad de los productos recibidos se ha medido el contenido en grasa en muestras de leche tomadas al azar de cada una de las granjas, con los siguientes resultados:

	Contenido en grasa (%)					
Granja A	14	12	15	15	11	16
Granja B	20	18	18	19	15	

    a) ¿Puede suponerse, a nivel de significación 0.05, que el contenido medio en grasa de la leche de las dos granjas es el mismo? Especificar las hipótesis bajo las que se resuelve este problema.

    b) Calcular un intervalo de confianza, a nivel de confianza 0.9, para la varianza del contenido en grasa de la leche de la granja B. A partir de dicho intervalo, deducir si puede aceptarse que la varianza de esta población es igual a 3. Especificar el problema de contraste y el test utilizado; calcular su tamaño.