Tema 4: Estimación puntual. Insesgadez y mínima varianza

1. Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra de una variable $X \to \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2);\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$. Probar que

$$T(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \overline{X} \leq 0 \\ 0 & \overline{X} > 0 \end{cases}$$

   es un estimador insesgado de la función paramétrica $\Phi(-\mu\sqrt{n}/\sigma)$, siendo Φ la función de distribución de la $\mathcal{N}(0,1)$.

2. Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \to \{B(1,p);\ p \in (0,1)\}$ y sea $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   a) Probar que si $k \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$, el estadístico

$$\frac{T(T-1)\cdots(T-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$$

   es un estimador insesgado de p^k. ¿Es este estimador el UMVUE?

   b) Probar que si $k > n$, no existe ningún estimador insesgado para p^k.

   c) ¿Puede afirmarse que $\frac{T}{n}\left(1 - \frac{T}{n}\right)^2$ es insesgado para $p(1-p)^2$?

3. Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable $X \to \{\mathcal{P}(\lambda);\ \lambda > 0\}$. Encontrar, si existe, el UMVUE para λ^s, siendo $s \in \mathbb{N}$ arbitrario.

4. Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable con distribución uniforme discreta en los puntos $\{1, \dots, N\}$, siendo N un número natural arbitrario. Encontrar el UMVUE para N.

5. Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X cuya función de densidad es de la forma

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}, \quad 0 < x < \theta$$

   Calcular, si existe, el UMVUE para θ.

6. Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2}, \quad x > \theta$$

   Calcular, si existen, los UMVUE para θ y para $1/\theta$.

7. Sea $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \mathbb{R}\}$ siendo P_θ una distribución con función de densidad

$$f_\theta(x) = e^{\theta - x}, \quad x \geq \theta.$$

Dada una muestra aleatoria simple de tamaño arbitrario, encontrar los UMVUE de θ y de e^θ.

8. Sea X la variable que describe el número de fracasos antes del primer éxito en una sucesión de pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $\theta \in (0,1)$, y sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de X.

   a) Probar que la familia de distribuciones de X es regular y calcular la función de información asociada a la muestra.

   b) Especificar la clase de funciones paramétricas que admiten estimadores eficientes y los correspondientes estimadores.

   c) Calcular la varianza de cada estimador eficiente y comprobar que coincide con la correspondiente cota de Fréchet-Cramér-Rao.

   d) Calcular, si existen, los UMVUE para $P_\theta[X = 0]$ y para $E_\theta[X]$ y decir si son eficientes.

9. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con distribución exponencial.

   a) Probar que la familia de distribuciones de X es regular.

   b) Encontrar la clase de funciones paramétricas que admiten estimador eficiente y el estimador correspondiente. Calcular la varianza de estos estimadores.

   c) Basándose en el apartado anterior, encontrar el UMVUE para la media de X.

   d) Dar la cota de Fréchet-Cramér-Rao para la varianza de estimadores insesgados y regulares de λ^3. ¿Es alcanzable dicha cota?

10. Sea X una variable aleatoria con función de densidad de la forma

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta - 1}, \quad 0 < x < 1.$$

   a) Sabiendo que $\mathrm{E}_\theta[\ln X] = -\dfrac{1}{\theta}$ y $\mathrm{Var}_\theta[\ln X] = \dfrac{1}{\theta^2}$, comprobar que esta familia de distribuciones es regular.

   b) Basándose en una muestra aleatoria simple de X, dar la clase de funciones paramétricas con estimador eficiente, los estimadores y su varianza.