Tema 6

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS DE CONFIANZA

6.1. Planteamiento del problema y conceptos básicos

En primer lugar se recuerda que el problema que se esta intentando resolver es la inferencia del parámetro, ó parámetros, desconocido de una familia de funciones paramétricas, a la cual pertenece la distribución de la variable aleatoria bajo estudio.

Hasta ahora se ha afrontado dicha inferencia mediante una estimación puntual. Sin embargo, existe otra forma de resolver dicho problema, mediante la inferencia por intervalos de confianza, es decir, en lugar de dar un valor para el parámetro, se da un intervalo, que contiene al parámetro con una cierta probabilidad.

Definición: Sea X una variable aleatoria con distribución en la familia $\{F_\theta : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k\}$ y sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de X. Sea $\mathcal{X}^n$ es espacio muestral de los posibles valores de la muestra.

Sea S una función definida:

$$S : \mathcal{X}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\Theta) \quad \text{independiente de } \theta.$$

A $S(X_1, \ldots, X_n)$ se le denomina *conjunto aleatorio.*

Existe cierta similitud entre la definición de estimador y la de conjunto aleatorio, pero la principal diferencia es que fijada una muestra, $x_1, \ldots, x_n$, $T(x_1, \ldots, x_n)$ es una valor concreto mientras que $S(x_1, \ldots, x_n)$ es un conjunto que es un subespacio del espacio paramétrico.

En el caso particular en que el conjunto aleatorio sea un intervalo, $S(X_1, \ldots, X_n) = (I_1(X_1, \ldots, X_n), I_2(X_1, \ldots, X_n))$, se le denomina *intervalo aleatorio.*

Definición: Un intervalo aleatorio $(I_1(X_1, \ldots, X_n), I_2(X_1, \ldots, X_n))$, se dice que es un *intervalo de confianza* para el parámetro θ al nivel de confianza $1-\alpha$ si

$$\forall \theta \in \Theta \quad P_\theta[I_1(X_1,\ldots,X_n) \leq \theta \leq I_2(X_1,\ldots,X_n)] \geq 1-\alpha$$

es decir, sea cual sea el valor del parámetro la probabilidad de que el intervalo aleatorio contenga al parámetro es mayor o igual que $1-\alpha$.

Según la definición frecuentista de probabilidad, esto puede interpretarse como que el $(1-\alpha)100\,\%$ de las veces que se observe una muestra de tamaño n, el intervalo concreto obtenido, $(I_1(x_1,\ldots,x_n), I_2(x_1,\ldots,x_n))$, contendrá al verdadero valor del parámetro; por tanto, cada vez que tomamos una muestra, tenemos una confianza del $(1-\alpha)100\,\%$ de que así ocurre. En general conviene tomar un valor de α pequeño, para que la probabilidad de que el intervalo contenga al verdadero valor del parámetro sea casi 1.

Los intervalos de confianza se pueden dividir en dos grupos:

- Intervalos de confianza bilaterales: Son aquellos donde los dos extremos del intervalo toman valores finitos,

$$S(X_1,\ldots,X_n) = (I_1(X_1,\ldots,X_n), I_2(X_1,\ldots,X_n))\,.$$

- Intervalos de confianza unilaterales: Son aquellos donde uno de los extremos del intervalo no toma un valor finito,

$$S(X_1,\ldots,X_n) = (-\infty, I_2(X_1,\ldots,X_n)) \text{ ó } S(X_1,\ldots,X_n) = (I_1(X_1,\ldots,X_n), +\infty)\,.$$

A partir de los intervalos de confianza unilaterales se pueden obtener cotas de confianza para un nivel de confianza fijado:

- Cota superior de confianza: A partir del intervalo unilateral

$$\forall \theta \in \Theta \quad P_\theta[-\infty < \theta \leq I_2(X_1,\ldots,X_n)] \geq 1-\alpha$$

se obtiene $P_\theta[I_2(X_1,\ldots,X_n) \geq \theta] \geq 1-\alpha$, por lo tanto $I_2(X_1,\ldots,X_n)$ es una cota de confianza superior al nivel de confianza $1-\alpha$.

- Cota inferior de confianza: A partir del intervalo unilateral

$$\forall \theta \in \Theta \quad P_\theta[I_1(X_1,\ldots,X_n) \leq \theta < +\infty] \geq 1-\alpha$$

se obtiene $P_\theta[I_1(X_1,\ldots,X_n) \leq \theta] \geq 1-\alpha$, por lo tanto $I_1(X_1,\ldots,X_n)$ es una cota de confianza inferior al nivel de confianza $1-\alpha$.

Ejemplo: Sea $X_1 \ldots, X_n$ una m.a.s. de $X \rightsquigarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2), \mu \in \mathbb{R}\}$. Construir un intervalo de confianza para μ al nivel de confianza $1-\alpha$ de la forma $(\bar{X} - C_1, \bar{X} + C_2)$. Repetir la construcción del intervalo bajo la hipótesis de que σ^2 es desconocida.

En el ejemplo anterior se ha obtenido un intervalo de confianza para μ al nivel de confianza $1-\alpha$, imponiendo cierta estructura en el mismo. Pero no es la única opción de intervalo de confianza en dicho caso. Por ejemplo, si se considera $1-\alpha = 0.95$, $(\bar{X} \mp 2\sigma_0/\sqrt{n})$ es otro intervalo de confianza al mismo nivel. Sin embargo, el obtenido en el ejemplo, $(\bar{X} \mp 1.96\sigma_0/\sqrt{n})$ sería un intervalo más informativo debido a que su amplitud, ó longitud, es menor.

Por tanto sería conveniente establecer criterios para comparar entre distintos intervalos de confianza, al mismo nivel de confianza, y poder determinar que intervalo es el óptimo.

6.1.1. Intervalos de menor longitud esperada

Como se ha visto anteriormente, una forma de comparar intervalos de confianza puede ser mediante la longitud de los mismos, entendiendo por longitud la amplitud del intervalo:

$$L = I_2(X_1, \ldots, X_n) - I_1(X_1, \ldots, X_n).$$

Por su definición, la longitud es una variable aleatoria, por lo tanto, para ser más exactos se utilizará la longitud esperada, que proporciona un valor numérico con el que poder comparar los intervalos.

Definición: Se dice que un intervalo de confianza, $(I_1(x_1, \ldots, x_n), I_2(x_1, \ldots, x_n))$, al nivel de confianza $1-\alpha$, tiene *menor longitud esperada uniforme* si para cualquier otro intervalo de confianza, $(I_1'(x_1, \ldots, x_n), I_2'(x_1, \ldots, x_n))$, al mismo nivel de confianza, se tiene que

$$\forall \theta \in \Theta \; E_\theta[I_2(X_1, \ldots, X_n) - I_1(X_1, \ldots, X_n)] \leq E_\theta[I_2'(X_1, \ldots, X_n) - I_1'(X_1, \ldots, X_n)].$$

En general no tiene porque existir un intervalo de confianza con mínima longitud esperada uniformemente para todos los valores del parámetro. Además, de existir, puede variar al cambiar el parámetro.

6.2. Métodos de construcción

Una vez dada la definición de intervalo de confianza y estudiado algún criterio que permita compara entre dos intervalos con el mismo nivel de confianza, es necesario el estudio de métodos de construcción de intervalos de confianza. En este tema se van a estudiar dos métodos distintos entre los que existen. El primero de ellos va a poder usarse bajo condiciones muy generales, aunque tendrá proporcionará intervalos de longitud muy amplia. El segundo es más restrictivo en sus hipótesis pero puede proporcionar intervalos con mínima longitud esperada uniformente y es el que hoy en día está implementado en los paquetes estadísticos para determinar los intervalos de confianza bajo normalidad.

6.2.1. Intervalos de confianza obtenidos mediante la desigualdad de Chebychev

La desigualdad de Chebychev dice que para cualquier v.a. X de segundo orden se verifica:

$$P\left[|X - E[X]| < k\right] \geq 1 - \frac{Var(X)}{k^2}, \quad \forall k > 0$$

A partir de esta desigualdad se puede obtener un I.C. para cualquier parámetro de la siguiente forma. Sea $T(X_1, \ldots, X_n)$ un estimador insesgado del parámetro θ con varianza uniformemente acotada, ($E_\theta[T(X_1, \ldots, X_n)] = \theta$ y $Var_\theta[T(X_1, \ldots, X_n)] \leq c$, $\forall \theta \in \Theta$). Si le aplicamos la desigualdad de Chebychev se tiene:

$$P\left[|T(X_1, \ldots, X_n) - E_\theta[T(X_1, \ldots, X_n)]| < k\right] \geq 1 - \frac{Var_\theta(T(X_1, \ldots, X_n))}{k^2}, \quad \forall k > 0$$

Como el estimador es insesgado y tiene varianza uniformente acotada operando adecuadamente se tiene,

$$P\left[T(X_1, \ldots, X_n) - k < \theta < T(X_1, \ldots, X_n) + k\right] \geq 1 - \frac{c}{k^2}, \quad \forall k > 0$$

Por lo tanto, fijado un nivel de confianza $1 - \alpha$, se obtiene el intervalo de confianza para θ,

$$\left(T(X_1, \ldots, X_n) - \sqrt{\frac{c}{\alpha}}, T(X_1, \ldots, X_n) + \sqrt{\frac{c}{\alpha}}\right).$$

En general la ventaja que tiene este método es que se puede aplicar a cualquier variable, ya que no se le impone nada a ella, pero tiene el inconveniente de que suele proporcionar intervalos muy grandes.

Ejemplo: Obtener, utilizando la desigualdad de Chebychev, un intervalo de confianza para la media poblacional, μ, basado en una muestra de tamaño n de una variable aletoria cuya varianza, σ^2, es conocida.

6.2.2. Método de la cantidad pivotal

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de $X \rightsquigarrow F \in \{F_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$. Sea $\mathcal{X}^n$ el espacio muestral.

Definición: Una función de la muestra y del parámetro, $T : \mathcal{X}^n \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$, que sea una variable aleatoria cuya distribución es independiente del parámetro, θ, se denomina *función pivote.*

Teorema: Sea $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ una función pivote. Si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ es estrictamente monótona en θ.

2. Sea Λ la imagen de T. $\forall \lambda \in \Lambda$, $T(X_1, \ldots, X_n; \theta) = \lambda$ tiene solución en θ.

Entonces, se puede construir un intervalo de confianza para θ a cualquier nivel de confianza.

Descripción del método: Fijado un nivel de confianza $1 - \alpha$, con $0 < \alpha < 1$, se quiere construir un intervalo $(I_1(X_1, \ldots, X_n), I_2(X_1, \ldots, X_n))$ tal que:

$$P_\theta[I_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < I_2(X_1, \ldots, X_n)] \geq 1 - \alpha$$

es decir, un intervalo de confianza al nivel establecido. Sea $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ una función pivote en las condiciones del teorema anterior. Entonces se buscan dos valores $\lambda_1(\alpha)$ y $\lambda_2(\alpha)$ tales que:

$$P_\theta[\lambda_1(\alpha) < T(X_1, \ldots, X_n; \theta) < \lambda_2(\alpha)] \geq 1 - \alpha.$$

Por cierta hipótesis realizada, se tiene garantizada la existencia de solución, en θ, para el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} T(X_1, \ldots, X_n; \theta) = \lambda_1(\alpha) \\ T(X_1, \ldots, X_n; \theta) = \lambda_2(\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Solución: } \left\{\begin{array}{l} \hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n) \\ \hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n) \end{array}\right.$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que la función pivote T, fijada la muestra, es estrictamente monótona, se tiene:

- Si T es creciente:

$$\begin{aligned} &P\theta[\lambda_1(\alpha) < T(X_1, \ldots, X_n, \theta) < \lambda_2(\alpha)] = \\ &P_\theta[\hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n)] \geq 1 - \alpha \ \forall \theta \in \Theta \end{aligned}$$

  es decir, el intervalo de confianza, al nivel de confianza $1 - \alpha$, viene determinado por $(\hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n), \hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n))$.

- Si T es decreciente:

$$\begin{aligned} &P\theta[\lambda_1(\alpha) < T(X_1, \ldots, X_n, \theta) < \lambda_2(\alpha)] = \\ &P_\theta[\hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n)] \geq 1 - \alpha \ \forall \theta \in \Theta \end{aligned}$$

  es decir, el intervalo de confianza, al nivel de confianza $1 - \alpha$, viene determinado por $(\hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n), \hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n))$.

Determinación de pivotes en distribuciones continuas

- Si X es de tipo continuo con función de distribución F_θ, la siguiente función es un pivote para θ:

$$T(X_1,\dots,X_n;\theta) = -2\sum_{i=1}^{n} \ln F_\theta(X_i) \rightsquigarrow \chi^2(2n).$$

- Si $S(X_1,\dots,X_n)$ es un estadístico con distribución de tipo continuo y F_θ^S es su función de distribución, la siguiente función constituye un pivote para θ:

$$T(X_1,\dots,X_n;\theta) = F_\theta^S(S(X_1,\dots,X_n)) \rightsquigarrow U(0,1).$$

Ejemplo: Sea X una variable con función de densidad $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$ $0 < x < 1$. Determinar un intervalo de confianza para θ utilizando el método de la cantidad pivotal.

6.3. Intervalos de confianza para los parámetros de una población normal

En esta sección vamos a determinar los intervalos de confianza para los parámetros de una población normal usando el método de construcción el del pivote y como criterio de selección el de menor longitud esperada uniforme.

6.3.1. Intervalos de confianza para la media, μ, de una normal con varianza conocida, σ_0^2.

Sea $(X_1,...,X_n)$ una muestra aleatoria simple de la una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma_0^2)$. Consideramos como función pivote

$$T(X_1,\dots,X_n;\mu) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Efectivamente es una función de la muestra y el parámetro con distribución independiente de μ. Además dicha función cumple todas las condiciones del teorema estudiado en el método del pivote o de la cantidad pivotal:

1. $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}$ es estrictamente decreciente en μ.

2. $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} = \lambda \Rightarrow \mu = \bar{X} - \lambda\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$.

Por lo tanto, aplicando el método obtenemos un intervalo de confianza para μ al nivel de confianza $1-\alpha$:

$$\left(\bar{X}-\lambda_2\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\,,\,\bar{X}-\lambda_1\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

donde λ_1 y λ_2 verifican

$$P_\mu\left(\lambda_1<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}<\lambda_2\right)=1-\alpha,$$

o equivalentemente

$$P(\lambda_1<Z<\lambda_2)=1-\alpha\Leftrightarrow F_Z(\lambda_2)-F_Z(\lambda_1)=1-\alpha\quad(F_Z(z)=P[Z\leq z]).$$

Ahora debemos buscan entre todos estos intervalos el que tenga menor longitud esperada uniforme, es decir que minimize ($\forall\mu\in\mathbb{R}$) la longitud media:

$$E_\mu\left[\left(\bar{X}-\lambda_1\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)-\left(\bar{X}-\lambda_2\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)\right]=(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

bajo la restricción $F_Z(\lambda_2)-F_Z(\lambda_1)=1-\alpha$. Una forma de resolver este problema es aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange y, por lo tanto, minimizar la siguiente función:

$$F(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_2-\lambda_1-\lambda[F_Z(\lambda_2)-F_Z(\lambda_1)-(1-\alpha)]$$

donde no se ha considerado la parte constante de la longitud media por no afectar al procedimiento de minimización.

Derivando y resolviendo el sistema de ecuaciones normales al que se llega se obtiene como solución $f_Z(\lambda_1)=f_Z(\lambda_2)$, donde se ha denotado por f_Z a la función de densidad de la normal estándar. Por lo tanto, λ_1 y λ_2 deben ser dos valores de la $\mathcal{N}(0,1)$ que tengan el mismo valor en su función de densidad. Teniendo en cuenta la simetría de la densidad normal eso sólo puede ocurrir si $\lambda_1=\lambda_2$ ó si $\lambda_1=-\lambda_2$. La primera de dichas opciones se descarta por no verificar la restricción ($F_Z(\lambda_1)-F_Z(\lambda_1)=0\neq 1-\alpha$). Así que la única posible solución al problema de minimización planteado es $\lambda_1=-\lambda_2$. Si ahora tenemos en cuenta la restricción $F_Z(\lambda_2)-F_Z(\lambda_1)=1-\alpha$ se tiene que

$$\lambda_1=-z_{\alpha/2}\quad\text{y }\lambda_2=z_{\alpha/2}$$

siendo $P[Z>z_{\alpha/2}]=\alpha/2$.

De esta forma se ha obtenido el intervalo de confianza para μ de menor longitud media uniformemente, al nivel de confianza $1-\alpha$:

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\,,\,\bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Ejemplo: Comparar este intervalo con el que se obtuvo como ejemplo utilizando la desigualdad de Chebychev.

Intervalos de confianza unilaterales

Para obtener intervalos de confianza unilaterales, como ya se ha visto anteriormente, uno de los extremos se considera que no toma un valor finito.

- Si $\lambda_1 = -\infty$, entonces λ_2 debe verificar

  $$P(-\infty < Z < \lambda_2) = 1-\alpha \Rightarrow P(Z < \lambda_2) = 1-\alpha \Rightarrow P(Z > \lambda_2) = \alpha \Rightarrow \lambda_2 = z_\alpha$$

  y el intervalo quedaría

  $$\left(\bar{X} - z_\alpha\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, +\infty\right).$$

- Si $\lambda_2 = +\infty$, entonces λ_1 debe verificar

  $$P(\lambda_1 < Z < +\infty) = 1-\alpha \Rightarrow P(Z > \lambda_1) = 1-\alpha \Rightarrow P(Z > -\lambda_1) = \alpha \Rightarrow \lambda_1 = -z_\alpha$$

  y el intervalo quedaría

  $$\left(-\infty, \bar{X} + z_\alpha\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$$

Como es evidente estos intervalos cumplen tener nivel de confianza $1-\alpha$, pero su longitud no es finita.

6.3.2. Intervalos de confianza para la media, μ, de una normal con varianza desconocida, σ^2.

Sea $(X_1, ..., X_n)$ una muestra aleatoria simple de la una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Consideramos como función pivote

$$T(X_1, \ldots, X_n; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow t(n-1)$$

Dicha función, al igual que en el caso analizado anteriormente, cumple todas las condiciones para poder aplicar el método de la cantidad pivotal. Así que, siguiendo un procedimiento análogo y teniendo en cuenta que la distribución t de Student tiene las mismas propiedades de simetría con respecto al origen que la $\mathcal{N}(0,1)$, se llega a que el intervalo de confianza para μ de menor longitud media uniformemente, al nivel de confianza $1-\alpha$ es:

$$\left(\bar{X} - t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\, , \, \bar{X} + t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

Intervalos de confianza unilaterales

Al igual que antes, los intervalos unilaterales son:

- Para $\lambda_1 = -\infty$
$$\left(\bar{X} - t_{n-1;\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}, +\infty\right).$$
- Para $\lambda_2 = +\infty$
$$\left(-\infty, \bar{X} + t_{n-1;\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

6.3.3. Intervalos de confianza para la varianza, σ^2, de una normal con media conocida, μ_0.

Sea $(X_1, ..., X_n)$ una muestra aleatoria simple de la una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$. Consideramos como función pivote

$$T(X_1, \ldots, X_n; \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n)$$

Dicha función tiene distribución independiente de σ^2 y cumple todas las condiciones del teorema estudiado en el método del pivote o de la cantidad pivotal:

1. $\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2}$ es estrictamente decreciente en σ^2.
2. $\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} = \lambda \Rightarrow \sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\lambda}$.

Por lo tanto, aplicando el método obtenemos un intervalo de confianza para σ^2 al nivel de confianza $1-\alpha$:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\lambda_2}\, , \, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\lambda_1}\right)$$

donde λ_1 y λ_2 verifican

$$P_{\sigma^2}\left(\lambda_1 < \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} < \lambda_2\right) = 1-\alpha,$$

o equivalentemente

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = 1-\alpha \Leftrightarrow F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1-\alpha \quad (T \rightsquigarrow \chi^2(n),\ F_T(t) = P[T \leq t]).$$

Ahora debemos buscan entre todos estos intervalos el que tenga menor longitud esperada uniforme, es decir que minimize ($\forall \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$) la longitud media:

$$E_{\sigma^2}\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\lambda_1}\right) - \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\lambda_2}\right)\right] = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) E_{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2\right]$$

bajo la restricción $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1-\alpha$. Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange se debe minimizar la siguiente función:

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) - \lambda[F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) - (1-\alpha)]$$

donde no se ha considerado la parte constante de la longitud media por no afectar al procedimiento de minimización.

Derivando y resolviendo el sistema de ecuaciones normales al que se llega se obtiene como solución

$$\frac{f_T(\lambda_1)}{f_T(\lambda_2)} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2},$$

donde se ha denotado por f_T a la función de densidad de la distribución $\chi^2(n)$. En este caso, la asimetría de la distribución hace que los valores λ_1 y λ_2 no sean los de colas iguales. Sin embargo, la diferencia no es suficientemente importante (sobre todo para grandes muestras), y en la práctica se usa el intervalo de colas iguales:

$$\lambda_1 = \chi^2_{n;1-\alpha/2} \quad \text{y } \lambda_2 = \chi^2_{n;\alpha/2}$$

siendo $P[\chi^2_n > \chi^2_{n;\alpha/2}] = \alpha/2$.

De esta forma se ha obtenido un intervalo de confianza para σ^2, al nivel de confianza $1-\alpha$:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}}\right)$$

Intervalos de confianza unilaterales

Para obtener intervalos de confianza unilaterales, como ya se ha visto anteriormente, uno de los extremos se considera que no toma un valor finito. En este caso hay que tener en cuenta la distribución χ^2 sólo está definida en $\mathbb{R}^+$, con lo que el mínimo valor que se puede considerar para el extremo inferior del intervalo es el 0.

- Si $\lambda_1 = 0$, entonces λ_2 debe verificar

  $$P(0 < T < \lambda_2) = 1-\alpha \Rightarrow P(T < \lambda_2) = 1-\alpha \Rightarrow P(T > \lambda_2) = \alpha \Rightarrow \lambda_2 = \chi^2_{n;\alpha}$$

  y el intervalo quedaría

  $$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\alpha}}, +\infty \right).$$

- Si $\lambda_2 = +\infty$, entonces λ_1 debe verificar

  $$P(\lambda_1 < T < +\infty) = 1-\alpha \Rightarrow P(T > \lambda_1) = 1-\alpha \Rightarrow \lambda_1 = \chi^2_{n;1-\alpha}$$

  y el intervalo quedaría

  $$\left(0, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;1-\alpha}} \right).$$

6.3.4. Intervalos de confianza para la varianza, σ^2, de una normal con media desconocida, μ.

Sea $(X_1, ..., X_n)$ una muestra aleatoria simple de la una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Consideramos como función pivote

$$T(X_1, \ldots, X_n; \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$$

Dicha función, al igual que en el caso analizado anteriormente, cumple todas las condiciones para poder aplicar el método de la cantidad pivotal. Así que, siguiendo un procedimiento análogo y teniendo en cuenta que la distribución que se tiene es la misma salvo por los grados de libertar ($\chi^2(n-1)$), se llega a que un intervalo de confianza para σ^2, al nivel de confianza $1-\alpha$ es:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} \right)$$

Intervalos de confianza unilaterales

Al igual que antes, los intervalos unilaterales son:

- Para $\lambda_1 = 0$

  $$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha}}, +\infty \right).$$

- Para $\lambda_2 = +\infty$

  $$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha}} \right).$$

6.4. Intervalos de confianza para los parámetros de dos poblaciones normales

Ahora vamos a determinar los intervalos de confianza para los parámetros de dos poblaciones normales, basados en muestras aleatorias simples de las variables bajo estudio, usando el mismo método y criterio que en la sección anterior.

6.4.1. Intervalos de confianza para la diferencia de medias, $\mu_1-\mu_2$ de dos normales con varianzas conocidas, σ_1^2, σ_2^2.

Sea $(X_1, ..., X_{n_1})$ una muestra aleatoria simple de la una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y sea $(Y_1, ..., Y_{n_2})$ una muestra aleatoria simple de la una variable $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Asumimos σ_1^2 y σ_2^2 conocidas. En este caso consideramos como función pivote

$$T(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}; \mu_1 - \mu_2) = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Esta función cumple, además de tener distribución independiente de $\mu_1 - \mu_2$:

1. $\dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ es estrictamente decreciente en $\mu_1 - \mu_2$.

2. $\dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \lambda \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = \bar{X} - \bar{Y} - \lambda\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}.$

Por lo tanto, aplicando el método obtenemos un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ al nivel de confianza $1 - \alpha$:

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - \lambda_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} - \lambda_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

donde λ_1 y λ_2 verifican

$$P_{\mu_1,\mu_2}\left(\lambda_1 < \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < \lambda_2\right) = 1 - \alpha,$$

o equivalentemente

$$P(\lambda_1 < Z < \lambda_2) = 1 - \alpha \Leftrightarrow F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) = 1 - \alpha \quad (F_Z(z) = P[Z \leq z]).$$

El problema de buscar, entre estos intervalos, el que minimice uniformemente la longitud media es exactamente equivalente al caso del intervalo de confianza para μ con σ^2 conocida estudiado en la sección 6.3.1. y la solución es por tanto:

$$\lambda_1 = -z_{\alpha/2} \quad \text{y } \lambda_2 = z_{\alpha/2}$$

siendo $P[Z > z_{\alpha/2}] = \alpha/2$.

De esta forma se obtiene que el intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ de menor longitud media uniformemente, al nivel de confianza $1 - \alpha$, es:

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,,\, \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

Intervalos de confianza unilaterales

Análogamente, los intervalos de confianza unilaterales son:.

- Si $\lambda_1 = -\infty$, entonces el intervalo quedaría

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, +\infty \right).$$

- Si $\lambda_2 = +\infty$, entonces el intervalo quedaría

$$\left(-\infty, \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right).$$

6.4.2. Intervalos de confianza para la diferencia de medias, $\mu_1 - \mu_2$ de dos normales con varianzas desconocidas e iguales, σ^2.

Sea $(X_1, ..., X_{n_1})$ una muestra aleatoria simple de la una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ y sea $(Y_1, ..., Y_{n_2})$ una muestra aleatoria simple de la una variable $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$. En este caso se ha asumido que las varianzas de ambas distribuciones son desconocidas pero iguales. La función pivote a considerar en este caso es

$$T(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}; \mu_1 - \mu_2) = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1 + n_2 - 2)$$

donde $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

Esta función, al igual que en el caso analizado anteriormente, cumple todas las condiciones para poder aplicar el método de la cantidad pivotal. Así que, siguiendo un procedimiento análogo y, al igual que en el caso analizado en la sección 6.3.2., teniendo en cuenta que la distribución t de Student tiene las mismas propiedades de simetría con respecto al origen que la $\mathcal{N}(0,1)$, se llega a que el intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ de menor longitud media uniformemente, al nivel de confianza $1-\alpha$ es:

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\,,\ \bar{X} - \bar{Y} + t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

Intervalos de confianza unilaterales

Los intervalos de confianza unilaterales son:.

- Si $\lambda_1 = -\infty$, entonces el intervalo quedaría

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - t_{n_1+n_2-2;\alpha}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, +\infty\right).$$

- Si $\lambda_2 = +\infty$, entonces el intervalo quedaría

$$\left(-\infty, \bar{X} - \bar{Y} + t_{n_1+n_2-2;\alpha}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right).$$

6.4.3. Intervalos de confianza para el cociente de varianzas, σ_1^2/σ_2^2 de dos normales con medias conocidas, μ_1, μ_2.

Sea $(X_1, ..., X_{n_1})$ una muestra aleatoria simple de la una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y sea $(Y_1, ..., Y_{n_2})$ una muestra aleatoria simple de la una variable $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Asumimos μ_1 y μ_2 conocidas y consideramos como función pivote:

$$T(X_1, \ldots, X_n; \sigma_1^2/\sigma_2^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \mu_2)^2/n_2\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2/n_1\sigma_1^2} \rightsquigarrow \mathcal{F}(n_2, n_1).$$

Dicha función tiene distribución independiente de σ_1^2/σ_2^2 y cumple todas las condiciones del teorema estudiado en el método del pivote o de la cantidad pivotal:

1. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \mu_2)^2/n_2\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2/n_1\sigma_1^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \mu_2)^2/n_2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2/n_1}\,\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ es estrictamente creciente en σ_1^2/σ_2^2.

2. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=\lambda \Rightarrow \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=\lambda\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}.$

Por lo tanto, aplicando el método obtenemos un intervalo de confianza para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ al nivel de confianza $1-\alpha$:

$$\left(\lambda_1\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}\,,\ \lambda_2\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}\right)$$

donde λ_1 y λ_2 verifican

$$P_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1<\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1\sigma_1^2}<\lambda_2\right)=1-\alpha,$$

o equivalentemente

$$P(\lambda_1<T<\lambda_2)=1-\alpha\Leftrightarrow F_T(\lambda_2)-F_T(\lambda_1)=1-\alpha\quad (T\rightsquigarrow F(n_2,n_1),\ F_T(t)=P[T\leq t]).$$

El problema de buscar, entre estos intervalos, el que minimice uniformemente la longitud media es exactamente equivalente al caso del intervalo de confianza para μ con σ^2 conocida estudiado en la sección 6.3.1. cuya función a minimizar era $\lambda_2-\lambda_1$ bajo la restricción $F_T(\lambda_2)-F_T(\lambda_1)=1-\alpha$, cuya solución vimos que era $f_T(\lambda_2)=f_T(\lambda_1)$ sólo que siendo ahora f_T la función de densidad de la distribución F de Snedecor que tiene las mismas propiedades de asimetría que la χ^2 de Pearson. Por ello, al igual que en los casos estudiado en los intervalos para varianzas de una población normal, el intervalo de mímima longitud esperada uniformemente no es de colas iguales pero en la práctica suele utilizarse el que sí las tiene, es decir:

$$\lambda_1=F_{n_2,n_1;1-\alpha/2}\quad \text{y } \lambda_2=F_{n_2,n_1;\alpha/2}$$

siendo $P[F_{n_2,n_1}>F_{n_2,n_1;\alpha/2}]=\alpha/2$.

De esta forma se ha obtenido un intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2, al nivel de confianza $1-\alpha$:

$$\left(F_{n_2,n_1;1-\alpha/2}\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}\,,\ F_{n_2,n_1;\alpha/2}\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}\right)$$

Intervalos de confianza unilaterales

Para obtener intervalos de confianza unilaterales, como ya se ha visto anteriormente, uno de los extremos se considera que no toma un valor finito. En este caso, de nuevo, hay que tener en cuenta la distribución F sólo está definida en $\mathbb{R}^+$, con lo que el mínimo valor que se puede considerar para el extremo inferior del intervalo es el 0.

- Si $\lambda_1 = 0$, entonces λ_2 debe verificar

  $$P(0 < T < \lambda_2) = 1-\alpha \Rightarrow P(T < \lambda_2) = 1-\alpha \Rightarrow P(T > \lambda_2) = \alpha \Rightarrow \lambda_2 = F_{n_2,n_1;\alpha}$$

  y el intervalo quedaría

  $$\left(0\,,\ F_{n_2,n_1;\alpha}\,\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}\right).$$

- Si $\lambda_2 = +\infty$, entonces λ_1 debe verificar

  $$P(\lambda_1 < T < +\infty) = 1-\alpha \Rightarrow P(T > \lambda_1) = 1-\alpha \Rightarrow \lambda_1 = F_{n_2,n_1;1-\alpha}$$

  y el intervalo quedaría

  $$\left(F_{n_2,n_1;1-\alpha}\,\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}\,,\ +\infty\right).$$

6.4.4. Intervalos de confianza para el cociente de varianzas, σ_1^2/σ_2^2 de dos normales con medias desconocidas, μ_1, μ_2.

Sea $(X_1, ..., X_{n_1})$ una muestra aleatoria simple de la una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ y sea $(Y_1, ..., Y_{n_2})$ una muestra aleatoria simple de la una variable $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$. La función pivote a considerar en este caso es

$$T(X_1, \ldots, X_n; \sigma_1^2/\sigma_2^2) = \frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2} \rightsquigarrow F(n_2-1, n_1-1).$$

Esta función, al igual que en el caso analizado anteriormente, cumple todas las condiciones para poder aplicar el método de la cantidad pivotal. Así que, siguiendo un procedimiento análogo al caso analizado en la sección anterior se llega a que un intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2, al nivel de confianza $1-\alpha$ es:

$$\left(F_{n_2-1,n_1-1;1-\alpha/2}\,\frac{S_1^2}{S_2^2}\,,\ F_{n_2-1,n_1-1;\alpha/2}\,\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$$

Intervalos de confianza unilaterales

Los intervalos de confianza unilaterales, como en el caso anterior, son:.

- Si $\lambda_1 = 0$, entonces el intervalo quedaría

  $$\left(0\,,\ F_{n_2-1,n_1-1;\alpha}\,\frac{S_1^2}{S_2^2}\right).$$

- Si $\lambda_2 = +\infty$, entonces el intervalo quedaría

  $$\left(F_{n_2-1,n_1-1;1-\alpha}\,\frac{S_1^2}{S_2^2}\,,\ +\infty\right).$$