
Tema 1: Introducción a la Inferencia Estadística. Estadísticos muestrales

1. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X . Dar el espacio muestral y calcular la función masa de probabilidad de (X_1, \dots, X_n) en cada uno de los siguientes casos:
 - a) $X \rightarrow \{B(k_0, p); p \in (0, 1)\}$ Binomial
 - b) $X \rightarrow \{\mathcal{P}(\lambda); \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ Poisson
 - c) $X \rightarrow \{BN(k_0, p); p \in (0, 1)\}$ Binomial Negativa
 - d) $X \rightarrow \{G(p); p \in (0, 1)\}$ Geométrica
 - e) $X \rightarrow \{P_N; N \in \mathbb{N}\}$, $P_N(X = x) = \frac{1}{N}$, $x = 1, \dots, N$.
2. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X . Dar el espacio muestral y calcular la función de densidad de (X_1, \dots, X_n) en cada uno de los siguientes casos:
 - a) $X \rightarrow \{U(a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ Uniforme
 - b) $X \rightarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2); \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$ Normal
 - c) $X \rightarrow \{\Gamma(p, a); p, a \in \mathbb{R}^+\}$ Gamma
 - d) $X \rightarrow \{\beta(p, q); p, q \in \mathbb{R}^+\}$ Beta
 - e) $X \rightarrow \{P_\theta; \theta \in \mathbb{R}^+\}$, $f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}$, $0 < x < \theta$.
3. Se miden los tiempos de sedimentación de una muestra de partículas flotando en un líquido. Los tiempos observados son: 11.5, 1.8, 7.3, 12.1 1.8, 21.3, 7.3, 15.2, 7.3, 12.1, 15.2, 7.3, 12.1, 1.8, 10.5, 15.2, 21.3, 10.5, 15.2, 11.5.
 - Construir la función de distribución muestral asociada a a dichas observaciones.
 - Hallar los valores de los tres primeros momentos muestrales respecto al origen y respecto a la media.
 - Determinar los valores de los cuartiles muestrales.
4. Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 40 de una distribución exponencial de media 3, ¿cuál es la probabilidad de que los valores de la función de distribución muestral y la teórica, en $x = 1$, difieran menos de 0.01? Aproximadamente, ¿cuál debe ser el tamaño muestral para que dicha probabilidad sea como mínimo 0.98?
5. Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 50 de una distribución de Poisson de media 2, ¿cuál es la probabilidad de que los valores de la función de distribución muestral y la teórica, en $x = 2$, difieran menos de 0.02? Aproximadamente, ¿qué tamaño muestral hay que tomar para que dicha probabilidad sea como mínimo 0.99?
6. Sea $X \rightarrow B(1, p)$ y (X_1, X_2, X_3) una muestra aleatoria simple de X . Calcular la función masa de probabilidad de los estadísticos \bar{X} , S^2 , $\min X_i$ y $\max X_i$.

7. Obtener la función masa de probabilidad o función de densidad de \bar{X} en el muestreo de una variable de Bernoulli, de una Poisson y de una exponencial.
8. Calcular las funciones de densidad de los estadísticos máx X_i y mín X_i en el muestreo de una variable X con función de densidad:

$$f_{\theta}(x) = e^{\theta-x}, \quad x > \theta.$$

9. El número de pacientes que visitan diariamente una determinada consulta médica es una variable aleatoria con varianza de 16 personas. Se supone que el número de visitas de cada día es independiente de cualquier otro. Si se observa el número de visitas diarias durante 64 días, calcular aproximadamente la probabilidad de que la media muestral no difiera en más de una persona del valor medio verdadero de visitas diarias.
10. Una máquina de refrescos está arreglada para que la cantidad de bebida que sirve sea una variable aleatoria con media 200 ml. y desviación típica 15 ml. Calcular de forma aproximada la probabilidad de que la cantidad media servida en una muestra aleatoria de tamaño 36 sea al menos 204 ml.