TEMA 6: Estimación por intervalos de confianza

6.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y CONCEPTOS BÁSICOS

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

Se trata de usar los datos muestrales para construir un subconjunto del espacio paramétrico para el que podamos afirmar, con un margen de error prefijado, que contiene al verdadero valor del parámetro.

Intervalo de confianza: *Un intervalo aleatorio,* $\Big(I_1(X_1, \ldots, X_n),\ I_2(X_1, \ldots, X_n)\Big)$, *es un intervalo de confianza para* θ *al nivel de confianza* $1-\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ *si*

$$\forall \theta \in \Theta, \quad P_\theta\Big(I_1(X_1, \ldots, X_n) \leq \theta \leq I_2(X_1, \ldots, X_n)\Big) \geq 1-\alpha.$$

Interpretación: Sea cual sea el verdadero valor del parámetro, la probabilidad de que el intervalo lo contenga es, al menos, $1-\alpha$.

Según la definición frecuentista de probabilidad, esto puede interpretarse como que el $(1-\alpha)100\,\%$ de las veces que se observe una muestra de tamaño n, el intervalo concreto obtenido, $(I_1(x_1, \ldots, x_n),\ I_2(x_1, \ldots, x_n))$, contendrá al verdadero valor del parámetro; por tanto, cada vez que tomamos una muestra, tenemos una *confianza* del $(1-\alpha)100\,\%$ de que así ocurre.

Intervalo de confianza de menor longitud esperada uniformemente: *Un intervalo* $\Big(I_1(X_1, \ldots, X_n),\ I_2(X_1, \ldots, X_n)\Big)$, *con nivel de confianza* $1-\alpha$, *es de menor longitud esperada uniformemente a dicho nivel si para cualquier otro intervalo* $\Big(I_1'(X_1, \ldots, X_n),\ I_2'(X_1, \ldots, X_n)\Big)$ *al mismo nivel se tiene:*

$$\forall \theta \in \Theta, \quad E_\theta\left[I_2(X_1, \ldots, X_n) - I_1(X_1, \ldots, X_n)\right] \leq E_\theta\left[I_2'(X_1, \ldots, X_n) - I_1'(X_1, \ldots, X_n)\right].$$

6.2. CONSTRUCCIÓN DE INTERVALOS

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

Intervalos obtenidos mediante la desigualdad de Chebychev: Si $T(X_1, \ldots, X_n)$ es un estimador insesgado de θ con varianza uniformemente acotada ($E_\theta\left[T(X_1, \ldots, X_n)\right] = \theta$, y $Var_\theta\left[T(X_1, \ldots - X_n)\right] \leq c,\ \forall\theta \in \Theta$), para cualquier $k > 0$ se tiene:

$$P_\theta\Big(T(X_1, \ldots - X_n) - k < \theta < \ T(X_1, \ldots - X_n) + k\Big) \geq 1 - \frac{c}{k^2}, \quad \forall\theta \in \Theta,$$

y, por tanto, $(T(X_1, \ldots, X_n) - k, T(X_1, \ldots, X_n) + k)$ es un intervalo de confianza para θ al nivel de confianza $1 - c/k^2$.

Intervalos obtenidos mediante el método pivotal:

Pivote para un parámetro: Función de la muestra y del parámetro, $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta)$, tal que $\forall\theta \in \Theta,\ T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta)$ es una variable aleatoria con distribución independiente de θ.

Descripción del método: Sea $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta)$ un pivote estrictamente monótono en θ:

$i)$ Se buscan dos valores, λ_1 y λ_2 tales que $P_\theta\Big(\lambda_1 < T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) < \lambda_2\Big) \geq 1 - \alpha, \quad \forall\theta \in \Theta.$

$ii)$ Se resuelven en θ las ecuaciones $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) = \lambda_1$ y $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) = \lambda_2$, y las soluciones, $\widehat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n)$ y $\widehat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n)$, proporcionan un intervalo de confianza para θ al nivel $1 - \alpha$:

- T creciente en $\theta \ \rightarrow\ P_\theta\left(\widehat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \widehat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n)\right) \geq 1 - \alpha, \quad \forall\theta \in \Theta$
- T decreciente en $\theta \ \rightarrow\ P_\theta\left(\widehat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \widehat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n)\right) \geq 1 - \alpha, \quad \forall\theta \in \Theta.$

Determinación de pivotes en distribuciones continuas:

- Si X es de tipo continuo con función de distribución F_θ, la siguiente función es un pivote para θ:
$$T(X_1, \ldots, X_n; \theta) = -2\sum_{i=1}^{n} \ln F_\theta(X_i) \ \longrightarrow\ \chi^2(2n).$$
- Si $S(X_1, \ldots, X_n)$ es un estadístico con distribución de tipo continuo y F_θ^S es su función de distribución, la siguiente función constituye un pivote para θ:
$$T(X_1, \ldots, X_n; \theta) = F_\theta^S\big(S(X_1, \ldots, X_n)\big) \ \longrightarrow\ U(0, 1).$$

En cualquiera de los casos, si los pivotes son monótonos en θ, darán lugar a intervalos de confianza para θ.

A1: Intervalos de confianza para la media de una normal con varianza conocida

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2);\ \mu \in \mathbb{R}\}$

PIVOTE : $T(X_1, \ldots, X_n;\ \mu) = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{P_\mu\left(\lambda_1 < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \lambda_2\right)} = P_\mu\left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} - \lambda_1 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P\left(\lambda_1 < Z < \lambda_2\right) = F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) \quad \left(Z \to \mathcal{N}(0,1), \quad F_Z(z) = P(Z \leq z)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) = 1 - \alpha \longrightarrow \left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X} - \lambda_1 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) \text{ IC para } \mu \text{ a nivel } 1 - \alpha}$$

Se busca, entre estos intervalos, el que minimice uniformemente ($\forall \mu \in \mathbb{R}$) *la longitud media:*

$$E_\mu\left[\left(\overline{X} - \lambda_1 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)\right] = (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

Problema A1: *Minimizar la función* $\lambda_2 - \lambda_1$ *con* λ_1, λ_2 *sujetos a* $F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) = 1 - \alpha$.

Solución: Notando $f_Z = F'_Z$ a la función de densidad de la $\mathcal{N}(0,1)$:

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda) = \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda[F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) - (1 - \alpha)]$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda)}{\partial \lambda_1} = -1 - \lambda f_Z(\lambda_1) = 0 \\ \dfrac{\partial F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda)}{\partial \lambda_2} = 1 + \lambda f_Z(\lambda_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_Z(\lambda_1) = f_Z(\lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 = \pm \lambda_2 \quad (f_Z \text{ es simétrica}).$$

Dado que $\lambda_1 = \lambda_2$ no verifica $F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) = 1 - \alpha$, ha de ser $\lambda_1 = -\lambda_2$, y la restricción $F_Z(\lambda_2) - F_Z(-\lambda_2) = 1 - \alpha$ conduce a $\lambda_2 = z_{\alpha/2}$, siendo $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$.

I.C. para μ de menor longitud media uniformemente, a nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_2 = +\infty \Rightarrow \lambda_1 = -z_\alpha \longrightarrow \left(-\infty, \ \overline{X} + z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right). \\ \\ \lambda_1 = -\infty \Rightarrow \lambda_2 = z_\alpha \longrightarrow \left(\overline{X} - z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \ +\infty\right). \end{array}\right.$$

A2: Intervalo de confianza para la media de una normal con varianza desconocida

$(X_1, \dots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2);\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$$\text{PIVOTE}:\ T(X_1, \dots, X_n;\ \mu) = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \longrightarrow t(n-1)$$

$$\forall \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+,\ \underbrace{P_{\mu,\sigma^2}\left(\lambda_1 < \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < \lambda_2\right)} = P_{\mu,\sigma^2}\left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} - \lambda_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \Big(T \to t(n-1),\ F_T(t) = P(T \le t)\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha \ \to \left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{S}{\sqrt{n}},\ \ \overline{X} - \lambda_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \ \text{IC para } \mu \text{ a nivel } 1-\alpha}$$

Se busca entre ellos el que minimice uniformemente ($\forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$) *la longitud media:*

$$E_{\mu,\sigma^2}\left[\left(\overline{X} - \lambda_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right] = (\lambda_2 - \lambda_1) E_{\mu,\sigma^2}\left[S/\sqrt{n}\right].$$

Problema A2: *Minimizar la función* $\lambda_2 - \lambda_1$ *con* λ_1, λ_2 *sujetos a* $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha$.

Solución: Es el Problema A1 con la restricción dada por la función de distribución de una $t(n-1)$; por tanto, λ_1 y λ_2 deben verificar $f_T(\lambda_1) = f_T(\lambda_2)$, donde f_T es la función de densidad de la distribución $t(n-1)$; como esta función es también simétrica, razonando como A1 se tiene $\lambda_1 = -\lambda_2$ y $\lambda_2 = t_{n-1;\ \alpha/2}$, siendo $P(T > t_{n-1;\ \alpha/2}) = \alpha/2$.

I.C. para μ de menor longitud media uniformemente, a nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left(\overline{X} - t_{n-1;\ \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}},\ \ \overline{X} + t_{n-1;\ \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES

$$\begin{cases} \lambda_2 = +\infty \Rightarrow \lambda_1 = -t_{n-1;\ \alpha} \longrightarrow \left(-\infty,\ \overline{X} + t_{n-1;\ \alpha} \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right). \\[2ex] \lambda_1 = -\infty \Rightarrow \lambda_2 = t_{n-1;\ \alpha} \longrightarrow \left(\overline{X} - t_{n-1;\ \alpha} \dfrac{S}{\sqrt{n}},\ +\infty\right). \end{cases}$$

B1: Intervalo de confianza para la varianza de una normal con media conocida

$(X_1, \dots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2);\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$$\text{PIVOTE}: \ T(X_1, \dots, X_n;\ \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} \longrightarrow \chi^2(n)$$

$$\forall \sigma^2 \in \mathbb{R}^+, \quad \underbrace{P_{\sigma^2}\left(\lambda_1 < \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} < \lambda_2\right)} = P_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\lambda_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\lambda_1}\right)$$

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \left(T \to \chi^2(n),\ F_T(t) = P(T \leq t)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha \ \to \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\lambda_2},\ \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\lambda_1}\right) \ \text{IC para } \sigma^2 \text{ a nivel } 1-\alpha}$$

Longitud media $\to E_{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2/\lambda_1 - \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2/\lambda_2\right] = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) E_{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2\right].$

Problema B1: *Minimizar la función* $\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}$ *con* λ_1, λ_2 *sujetos a* $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha$.

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda) = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} + \lambda[F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) - (1-\alpha)] \ \to \ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = -\dfrac{1}{\lambda_1^2} - \lambda f_T(\lambda_1) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \dfrac{1}{\lambda_2^2} + \lambda f_T(\lambda_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f_T(\lambda_1)}{f_T(\lambda_2)} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}.$$

En este caso, la asimetría de la distribución hace que los valores λ_1 y λ_2 no sean los de colas iguales. Sin embargo, la diferencia no es suficientemente importante (sobre todo para grandes muestras), y en la práctica se usa el intervalo de colas iguales: $\lambda_1 = \chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}$ y $\lambda_2 = \chi^2_{n;\ \alpha/2}$, donde $P\left(\chi^2(n) > \chi^2_{n;\alpha/2}\right) = \alpha/2$.

I.C. para σ^2 de menor longitud media uniformemente (≈), a nivel de confianza $1-\alpha$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ \alpha/2}},\ \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}}\right)$$

$$
\textbf{INTERVALOS UNILATERALES}\left\{
\begin{array}{l}
\lambda_2 = +\infty \Rightarrow \lambda_1 = \chi^2_{n;\ 1-\alpha} \ \longrightarrow \left(0,\quad \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ 1-\alpha}}\right) \\[2em]
\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \chi^2_{n;\ \alpha} \ \longrightarrow \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ \alpha}},\quad +\infty\right).
\end{array}
\right.
$$

B2: Intervalo de confianza para la varianza de una normal con media desconocida

$(X_1, \dots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2);\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$$\text{PIVOTE : } T(X_1, \dots, X_n;\ \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \longrightarrow \chi^2(n-1)$$

$$\forall \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+,\quad \underbrace{P_{\mu,\sigma^2}\left(\lambda_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \lambda_2\right)}_{\downarrow} = P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\lambda_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\lambda_1}\right)$$

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \left(T \to \chi^2(n-1),\ F_T(t) = P(T \le t)\right)$$

Se razona como en B1, sustituyendo $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2$ por $(n-1)S^2$ y la distribución $\chi^2(n)$ por $\chi^2(n-1)$.

I.C. para σ^2 de menor longitud media uniformemente (≈), a nivel de confianza $1-\alpha$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES
$$\begin{cases} \lambda_2 = +\infty \Rightarrow \lambda_1 = \chi^2_{n-1;\ 1-\alpha} \longrightarrow \left(0,\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha}}\right) \\[2ex] \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \chi^2_{n-1;\ \alpha} \longrightarrow \left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha}},\ +\infty\right). \end{cases}$$

C1: Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos normales (varianzas conocidas)

$(X_1,\ldots,X_{n_1})$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2);\ \mu_1\in\mathbb{R}\}$

$(Y_1,\ldots,Y_{n_2})$ muestra aleatoria simple de $Y \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2);\ \mu_2\in\mathbb{R}\}$

$(X_1,\ldots,X_{n_1}),\ (Y_1,\ldots,Y_{n_2})$ independientes

$$\text{PIVOTE}:\ T(X_1,\ldots,X_{n_1},Y_1,\ldots,Y_{n_2};\ \mu_1-\mu_2)=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$$\forall\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\ \underbrace{P_{\mu_1,\mu_2}(\lambda_1<T<\lambda_2)}=P_{\mu_1,\mu_2}\left(\overline{X}-\overline{Y}-\lambda_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<\overline{X}-\overline{Y}-\lambda_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P(\lambda_1<Z<\lambda_2)=F_Z(\lambda_2)-F_Z(\lambda_1)\quad \Big(Z\to\mathcal{N}(0,1),\quad F_Z(z)=P(Z\le z)\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_Z(\lambda_2)-F_Z(\lambda_1)=1-\alpha\longrightarrow\left(\overline{X}-\overline{Y}-\lambda_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \ \overline{X}-\overline{Y}-\lambda_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)\ \text{IC para } \mu_1-\mu_2 \text{ a nivel } 1-\alpha}$$

El problema de buscar, entre estos intervalos, el que minimice uniformemente la longitud media es exactamente el Problema A1, y la solución es, por tanto, $\lambda_1=-z_{\alpha/2},\ \lambda_2=z_{\alpha/2}$.

I.C. para $\mu_1-\mu_2$ de menor longitud media uniformemente, a nivel de confianza $1-\alpha$

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}-\overline{Y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES
$$\begin{cases}\lambda_2=+\infty\longrightarrow\left(-\infty,\ \ \overline{X}-\overline{Y}+z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).\\[2ex] \lambda_1=-\infty\longrightarrow\left(\overline{X}-\overline{Y}-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \ +\infty\right).\end{cases}$$

C2: Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos normales (varianzas desconocidas pero iguales)

$(X_1, \ldots, X_{n_1})$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2);\ \mu_1 \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ muestra aleatoria simple de $Y \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2);\ \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(X_1, \ldots, X_{n_1}),\ (Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ independientes

PIVOTE : $T(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2};\ \mu_1 - \mu_2) = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \longrightarrow t(n_1 + n_2 - 2)$

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+,\ \underbrace{P_{\mu_1,\mu_2,\sigma^2}(\lambda_1 < T < \lambda_2)} = P_{\mu_1,\mu_2,\sigma^2}\left(\overline{X} - \overline{Y} - \lambda_2 S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X} - \overline{Y} - \lambda_1 S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \left(T \to t(n_1+n_2-2),\ F_T(t) = P(T \le t)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha \ \to\ \left(\overline{X} - \overline{Y} - \lambda_2 S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},\ \ \overline{X} - \overline{Y} - \lambda_1 S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) \ \text{IC para } \mu_1 - \mu_2 \text{ a nivel } 1 - \alpha}$$

El problema de buscar, entre estos intervalos, el que minimice uniformemente la longitud media es exactamente el Problema A2, y la solución es $\lambda_2 = t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2},\ \ \lambda_1 = -\lambda_2$.

I.C. para $\mu_1 - \mu_2$ de menor longitud media uniformemente, a nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} - t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},\quad \overline{X} - \overline{Y} + t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES
$$\begin{cases} \lambda_2 = +\infty \ \longrightarrow\ \left(-\infty,\ \ \overline{X} - \overline{Y} + t_{n_1+n_n-2;\ \alpha}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right). \\[2ex] \lambda_1 = -\infty \ \longrightarrow\ \left(\overline{X} - \overline{Y} - t_{n_1+n_2-2;\ \alpha}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},\ \ +\infty\right). \end{cases}$$

D1: Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos normales (medias conocidas)

$(X_1, \dots, X_{n_1})$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2);\ \ \sigma_1^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(Y_1, \dots, Y_{n_2})$ muestra aleatoria simple de $Y \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2);\ \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(X_1, \dots, X_{n_1}),\ (Y_1, \dots, Y_{n_2})$ independientes

$$\text{PIVOTE}: \ T(X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2};\ \sigma_1^2/\sigma_2^2) = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1\sigma_1^2} \longrightarrow F(n_2, n_1)$$

$$\forall \sigma_1^2, \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+,\ \underbrace{P_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1 < \frac{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1\sigma_1^2} < \lambda_2\right)} = P_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \lambda_2 \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \big(T \to F(n_2, n_1),\ F_T(t) = P(T \le t)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha \ \rightarrow \left(\lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2},\ \ \lambda_2 \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2}\right) \ \text{IC para } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \text{ a nivel } 1 - \alpha}$$

Se busca, entre todos estos intervalos, el que minimice uniformemente la longitud media, lo que se reduce a *minimizar la función* $\lambda_2 - \lambda_1$ *con* λ_1, λ_2 *sujetos a* $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha$.

Es de nuevo el Problema A1, cuya solución es $f_T(\lambda_2) = f_T(\lambda_1)$, siendo ahora f_T la función de densidad de la $F(n_2, n_1)$. De nuevo, en este caso, la asimetría de la distribución hace que el intervalo de mínima longitud esperada uniformemente no sea el de colas iguales, aunque en la práctica es este último el que suele utilizarse.

I.C. para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ *de menor longitud media uniformemente (≈), a nivel de confianza* $1 - \alpha$

$$\left(F_{n_2,n_1;\ 1-\alpha/2} \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2},\ \ F_{n_2,n_1;\ \alpha/2} \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES

$$\begin{cases} \lambda_2 = +\infty \longrightarrow \left(F_{n_2,n_1;\,1-\alpha} \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2},\ +\infty \right). \\ \\ \lambda_1 = 0 \longrightarrow \left(0,\quad F_{n_2,n_1;\,\alpha} \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2} \right). \end{cases}$$

D2: Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos normales (medias desconocidas)

$(X_1, \dots, X_{n_1})$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2);\ \mu_1 \in \mathbb{R},\ \sigma_1^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(Y_1, \dots, Y_{n_2})$ muestra aleatoria simple de $Y \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2);\ \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(X_1, \dots, X_{n_1}),\ (Y_1, \dots, Y_{n_2})$ independientes

$$\text{PIVOTE}: \ T(X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2};\ \sigma_1^2/\sigma_2^2) = \frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2} \longrightarrow F(n_2 - 1, n_1 - 1)$$

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma_1^2, \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+, \quad \underbrace{P_{\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1 < \frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2} < \lambda_2\right)} = P_{\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1 \frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \lambda_2 \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \big(T \to F(n_2 - 1, n_1 - 1),\ F_T(t) = P(T \leq t)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha \ \to \ \left(\lambda_1 \frac{S_1^2}{S_2^2}, \quad \lambda_2 \frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \ \text{IC para } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \text{ a nivel } 1 - \alpha}$$

El problema de minimizar la longitud de los intervalos se resuelve como en D1, tomando el intervalo de colas iguales.

I.C. para $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ *de menor longitud media uniformemente (≈), a nivel de confianza* $1 - \alpha$

$$\left(F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2}, \quad F_{n_2-1,n_1-1;\ \alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES

$$\begin{cases} \lambda_2 = +\infty, \ \longrightarrow \ \left(F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha} \dfrac{S_1^2}{S_2^2},\ +\infty\right). \\[2ex] \lambda_1 = 0 \ \longrightarrow \ \left(0,\ F_{n_2-1,n_1-1;\ \alpha} \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right). \end{cases}$$