
Tema 2: Distribuciones en el muestreo de poblaciones normales

- Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 5 de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(2.5, 36)$. Calcular:
 - Probabilidad de que la cuasivarianza muestral esté comprendida entre 1.863 y 2.674.
 - Probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 1.3 y 3.5, supuesto que la cuasivarianza muestral está entre 30 y 40.
- La longitud craneal en una determinada población humana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 185.6 mm. y desviación típica 12.78 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria simple de tamaño 20 de esa población tenga media mayor que 190 mm.?
- ¿De que tamaño mínimo habría que seleccionar una muestra de una variable con distribución normal $\mathcal{N}(\mu, 4)$ para poder afirmar, con probabilidad mayor que 0.9, que la media muestral diferirá de la poblacional menos de 0.1?
- Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable con distribución normal. Calcular la probabilidad de que la cuasivarianza muestral sea menor que un 50 % de la varianza poblacional para $n = 16$ y para $n = 1000$.
- Sean S_1^2 y S_2^2 las cuasivarianzas muestrales de dos muestras independientes de tamaños $n_1 = 5$ y $n_2 = 4$ de dos poblaciones normales con la misma varianza. Calcular la probabilidad de que S_1^2/S_2^2 sea menor que 5.34 o mayor que 9.12.
- Se consideran dos poblaciones de bombillas cuyas longitudes de vida siguen una ley normal con la misma media y desviaciones típicas 425 y 375 horas, respectivamente. Con objeto de realizar un estudio comparativo de ambas poblaciones, se considera una muestra aleatoria simple de 10 bombillas en la primera población y una de tamaño 6 en la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral del primer grupo menos la del segundo sea menor que la observada en dos realizaciones muestrales que dieron 1325 horas y 1215 horas, respectivamente?
- Sean X_1, \dots, X_n, X_{n+1} variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y sean \bar{X} y S^2 la media y cuasivarianza muestral de (X_1, \dots, X_n) . Calcular la distribución de

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

- Sean (X_1, \dots, X_n) , (Y_1, \dots, Y_m) muestras aleatorias simples independientes de poblaciones $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ y $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, respectivamente. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$ las medias y cuasivarianzas de las dos muestras. Calcular la distribución de

$$\frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}} \sqrt{\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m}}.$$