TEMA 4

Lógica proposicional

Ejercicio 4.1. Halla las subfórmulas de las siguientes fórmulas:

1. $a \wedge \neg b \to c \vee (e \wedge a)$
2. $c \wedge (a \vee b) \to \neg a \vee b$
3. $\neg(a \to b) \to a \wedge \neg(a \wedge b)$
4. $a \wedge (a \vee b \to d) \wedge (d \to \neg a)$
5. $(a \wedge c) \vee b \to d \wedge (d \to \neg a)$
6. $\neg a \to (b \to a) \wedge \neg(a \wedge b)$
7. $(a \wedge \neg(b \to c \vee e)) \vee a$
8. $b \wedge (a \vee b) \to d \wedge \neg(d \to \neg a)$
9. $b \wedge a \to (\neg b \to d \wedge \neg(d \to \neg a))$
10. $\neg(b \to a) \wedge \neg(a \wedge b) \to \neg a \vee b$

Ejercicio 4.2. Construye el árbol de formación de las fórmulas del ejercicio 4.1:

Ejercicio 4.3. Si en un determinado mundo v, α y β son verdaderas y γ es falsa, ¿cuál es el valor de verdad en dicho mundo de las siguientes proposiciones?

1. $\alpha \vee \gamma$
2. $\alpha \wedge \gamma$
3. $\neg\alpha \wedge \neg\gamma$
4. $\alpha \leftrightarrow \neg\beta \vee \gamma$
5. $\beta \vee \neg\gamma \to \alpha$
6. $\beta \vee \alpha \to (\beta \to \neg\gamma)$
7. $(\beta \leftrightarrow \neg\alpha) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \gamma)$
8. $(\beta \to \alpha) \to ((\alpha \to \neg\gamma) \to (\neg\gamma \to \beta))$

Ejercicio 4.4. Si $\alpha \to \beta$ es verdadera en un mundo v, ¿qué puedes deducir sobre el valor de verdad en dicho mundo de las siguientes proposiciones?

1. $\alpha \vee \gamma \to \beta \vee \gamma$
2. $\alpha \wedge \gamma \to \beta \wedge \gamma$
3. $\neg\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha \vee \beta$

Ejercicio 4.5. Si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es falsa en un mundo v, ¿qué puedes deducir sobre el valor de verdad en dicho mundo de las siguientes proposiciones?

1. $\alpha \wedge \beta$
2. $\alpha \vee \beta$
3. $\alpha \to \beta$
4. $\alpha \wedge \gamma \leftrightarrow \beta \wedge \gamma$

Ejercicio 4.6. El mismo ejercicio anterior suponiendo $\alpha \to \beta$ verdadera.

Ejercicio 4.7. Clasifica las siguientes proposiciones:

1. $\alpha \leftrightarrow \alpha \vee \alpha$
2. $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $(\alpha \to \beta) \wedge \beta \to \alpha$
4. $\neg\alpha \to \alpha \wedge \beta$
5. $\alpha \wedge \neg(\alpha \vee \beta)$
6. $\neg\alpha \leftrightarrow (\alpha \to \neg\alpha)$
7. $(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$

Ejercicio 4.8. El señor Pérez, empadronador de la isla de Tururulandia, del planeta Logos, tiene como objetivo el censar la población de dicha isla. La tarea no es fácil debido al hecho de que la población se divide en dos grupos bien distintos: los veraces y los mendaces. Los veraces siempre dicen la verdad, mientras que un mendaz sólo es capaz de producir mentiras. El gobierno de la isla encarga como trabajo al señor Pérez la ardua tarea de contar los veraces y mendaces de la isla. He aquí algunos de los muchos problemas con los que se encontró nuestro empadronador.

1. Llama a la puerta de una casa, en la que sabía a ciencia cierta que vivía un matrimonio, y el marido abre la puerta para ver quien es. El empadronador le dice: "necesito información sobre usted y su esposa. ¿Cuál de ustedes, si alguno lo es, es veraz y cuál un embustero?", a lo que el hombre de la casa respondió: "ambos somos embusteros", cerrando la puerta de golpe. ¿Qué es el marido y qué es la mujer?

2. La segunda casa que visita también está habitada por un matrimonio. Al llamar a la puerta y formular la misma pregunta que antes, el marido responde: "Por lo menos uno de nosotros es un embustero", cerrando a continuación la puerta. ¿Qué es el marido y qué es la mujer?

3. Visita una tercera casa, y en las mismas condiciones de antes, recibe la respuesta: "Si yo soy veraz, entonces mi mujer también lo es". ¿Qué es el marido y qué es la mujer?

4. En la última casa que visita, pues ya estaba cansado de devanarse los sesos, la respuesta es: "Yo soy lo mismo que mi mujer". ¿Qué es el marido y qué es la mujer?

Ejercicio 4.9. Existe todo un grupo de islas de veraces y mendaces en el Pacífico Sur del planeta Logos. Esta es la historia de Eloísa, una matemática, que vivía en dichas islas felizmente casada con Pedro, un bebedor empedernido. El matrimonio marchaba bien pero Pedro era demasiado inquieto. Por ejemplo, Eloísa llegaba al hogar a la hora de la cena, pero cuando el día era agradable, Pedro se había ido a otra isla en busca de una taberna donde libar el vino de unas cuantas botellas. Por lo tanto ella tenía que remar de una isla a otra hasta encontrar a Pedro y llevarlo a casa. Siempre que Pedro desembarcaba en una isla todos los nativos se enteraban. Por ello lo primero que hacía su Eloísa al llegar a una isla era tratar de averiguar por medio de los nativos si Pedro había llegado a la isla. Lo que dificultaba la tarea era que algunos nativos eran veraces y otros mendaces. A continuación exponemos algunas de las cosas que les ocurrieron.

1. En una ocasión, Eloísa llegó a una isla en busca de Pedro y encontró a dos nativos, A y B. Les preguntó si Pedro había llegado a la isla. Obtuvo las siguientes respuestas:
   A: Si B y yo somos veraces, entonces Pedro está en la isla.
   B: Si A y yo somos veraces, entonces Pedro está en la isla.
   ¿Está Pedro en la isla?.

2. En otra oportunidad, dos nativos A y B formularon los siguientes enunciados:
   A: Si alguno de los dos es veraz, entonces Pedro está en esta isla.
   B: Eso es verdad.
   ¿Está Pedro en la isla?.

3. No recuerdo bien los detalles del siguiente incidente. Recuerdo que Eloísa se encontró con dos nativos A y B y que A dijo: "B es veraz y Pedro está en la isla". Pero no recuerdo exactamente lo que dijo B. O dijo: "A es un embustero y Pedro no está en esta isla". O dijo: "A es un embustero y Pedro está en esta isla". ¡Ojalá pudiera recordarlo! Lo que sí recuerdo es que Eloísa pudo averiguar si Pedro estaba en la isla. ¿Estaba Pedro en la isla?

4. En otro extraño incidente, cuando Eloísa llegó a una isla buscando a Pedro, se encontró con cinco nativos, A, B, C, D y E, quienes adivinaron su propósito y le sonrieron con picardía al verla. Formularon los siguientes enunciados:
   A: Pedro está en esta isla.

B: Pedro no está en esta isla.
C: Pedro estuvo aquí ayer.
D: Pedro no está aquí hoy y no estuvo aquí ayer.
E: O D es un embustero o C es veraz.
Eloísa meditó durante un rato pero no logró nada. ¿Podría alguno de ustedes decir algo, por favor?, suplicó Eloísa. En ese momento A dijo: "O E es un embustero o C es veraz". ¿Está Pedro en la isla?.

Ejercicio 4.10. Estudia si las siguientes equivalencias son ciertas o no. Justifica la respuesta.

1. $a \to b \equiv \neg a \to \neg b$
2. $a \leftrightarrow b \equiv \neg a \leftrightarrow \neg b$.
3. $(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \vee (b \to c)$.
4. $(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \wedge (b \to c)$.
5. $a \to (b \vee c) \equiv (a \to b) \vee (a \to c)$.
6. $a \to (b \to c) \equiv (a \wedge b) \to c$

Ejercicio 4.11. Estudia si el siguiente conjunto de proposiciones es satisfacible o insatisfacible:

$$\Gamma = \{c \to (a \vee b),\ b \to (c \to a),\ d \wedge \neg(c \to a)\}$$

Ejercicio 4.12. Determina utilizando el teorema de la deducción y polinomios de Gegalkine si son o no tautologías las siguientes fórmulas:

1. $(\beta \to \alpha \vee \gamma) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to ((\gamma \to \beta) \to \gamma))\big)$
2. $(\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \beta)) \to \alpha)$
3. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
4. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
5. $(\beta \to \gamma) \to (\neg(\alpha \to \gamma) \to \neg(\alpha \to \beta))$
6. $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)$
7. $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$
8. $\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$
9. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta)$
10. $(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

Ejercicio 4.13. Estudia cuáles de las siguientes consecuencias lógicas son ciertas:

1. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash \neg a \wedge \neg c$
2. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash \neg a \to \neg c$
3. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash a \leftrightarrow \neg b$
4. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash b \to c$

Ejercicio 4.14. Utiliza el algoritmo de Davis-Putnam y resolución para determinar si son o no tautologías las fórmulas del ejercicio 4.12

Ejercicio 4.15. Utiliza el algoritmo de Davis-Putnam para estudiar las consecuencias que aparecen en el ejercicio 4.13. Para aquellas que sean falsas encuentra un mundo que las falsee. Para las ciertas encuentra una demostración lineal por resolución de la conclusión a partir de las premisas y otra demostración lineal de la cláusula vacía a partir de las premisas y la negación de la conclusión.

Ejercicio 4.16. Estudia si las siguientes afirmaciones son ciertas o no utilizando el agoritmo de Davis-Putnam. En caso de no serlo, encuentra un mundo en que sean falsas. Para las ciertas encuentra una demostración lineal por resolución de la conclusión a partir de las premisas y otra demostración lineal de la cláusula vacía a partir de las premisas y la negación de la conclusión.

1. $\{a \to b,\ a \to \neg b\} \vDash \neg a$
2. $\{a \to b,\ a \vee b\} \vDash b.$
3. $\{a \to \neg b,\ a \wedge b\} \vDash c.$
4. $\{a \vee b,\ \neg a \vee \neg b\} \vDash a \leftrightarrow \neg b.$
5. $\{a \leftrightarrow \neg b,\ a \to c\} \vDash b \vee c.$
6. $\{(a \wedge b) \leftrightarrow c,\ \neg c\} \vDash \neg a \wedge \neg b.$
7. $\{\neg(a \wedge b \wedge c),\ (a \wedge c) \vee (b \wedge c)\} \vDash a \to \neg b.$
8. $\{b \to (c \vee a),\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)\} \vDash b \leftrightarrow (c \vee d).$
9. $\{(a \wedge b) \to c,\ c \to (a \vee d)\} \vDash b \to (\neg a \to c).$
10. $\{(a \vee c) \to \neg a,\ c \to \neg a,\ b \to \neg a\} \vDash \neg a.$
11. $\{(a \wedge b) \to c,\ c \to d,\ b \wedge \neg d\} \vDash \neg a.$
12. $\{(a \to b) \vee (c \to d),\ \neg a \to a,\ \neg c \to c\} \vDash b \vee d.$
13. $\{a \to (b \vee c),\ c \to d,\ \neg b \vee d\} \vDash \neg(a \wedge \neg d).$
14. $\{(b \to a) \wedge b,\ c \to d,\ b \to c\} \vDash a \vee d.$
15. $\{(a \wedge b) \to c,\ (\neg a \wedge \neg b) \to d,\ a \leftrightarrow b\} \vDash c \vee d.$
16. $\{a \to (b \vee c),\ d \vee \neg c,\ b \vee d\} \vDash a \to d.$
17. $\{(\neg b \wedge \neg c) \to \neg a,\ a \to b,\ a \leftrightarrow c\} \vDash b \vee c.$
18. $\{a \to (a \to b),\ (b \vee c) \to a,\ c \to (a \vee b)\} \vDash b.$
19. $\{(a \wedge \neg b) \to \neg c,\ (\neg a \wedge b) \to d,\ \neg a \vee \neg b,\ e \to (a \wedge \neg d)\} \vDash \neg e.$
20. $\{c \to d,\ a \vee b,\ \neg(\neg a \to d),\ \neg a \to b\} \vDash b \wedge \neg c.$