MODELOS AVANZADOS DE COMPUTACIÓN

Relación 2

1. Sobre el alfabeto $A = \{a, b, c\}$, calcular las palabras $C(143)$ y $C(100)$. Calcular los enteros $N(aabc)$ y $N(bac)$.

2. Discutir la posibilidad de asignar un número natural a cada máquina de Turing con independencia del alfabeto de entrada.

3. Construir una máquina de Turing que, dada una entrada w, la convierte en la salida $w111w$.

4. Un enumerador es una máquina de Turing con varias cintas que no recibe entrada y que produce en la cinta de salida una secuencia de palabras

$$u_1 * u_2 * u_3 * \cdots,$$

donde $*$ es un símbolo adicional que separa las palabras. Podemos suponer que la cinta de salida siempre se mueve a derecha y nunca sobreescribe sobre lo ya escrito. El conjunto de palabras que enumera en la cinta de salida es lo que se conoce como el lenguaje aceptado por el enumerador. Conviene observar que un enumerador puede aceptar un conjunto infinito de palabras, así que la máquina estaría indefinidamente en movimiento escribiendo las palabras. El resultado que relaciona ambas máquinas es el siguiente:

Un lenguaje es recursivamente enumerable si, y sólo si, es aceptado por un enumerador, es decir, existe un enumerador cuya salida son todas las palabras del lenguaje.

Vemos, por tanto, que los enumeradores y las máquinas de Turing son conceptos computacionalmente equivalentes. De hecho, también podemos dar una caracterización de los lenguajes recursivos en función de ser aceptado por un enumerador:

Un lenguaje es recursivo si, y sólo si, es aceptado por un enumerador que enumera sus palabras en ***orden***.

El orden considerado aquí es el orden total definido por

$$x \leq y \text{ si y solo si } \begin{cases} |x| < |y|, & \text{ó} \\ |x| = |y| & \text{y } x \text{ precede a } y \text{ en orden alfabético.} \end{cases}$$

Describir de manera informal enumeradores que produzcan como salida una lista que contenga todas las palabras de los siguientes lenguajes (se supone que los números se escriben en binario):

(a) El conjunto de los cuadrados perfectos.

(b) El conjunto de todos los naturales primos .

(c) El conjunto de todos los números naturales n tales que la MT cuya descripción es la palabra w_n acepta la palabra w_n como entrada (w_n es la palabra sobre $\{0, 1\}$ cuyo número asociado es n).

5. Sean $L_1, \ldots, L_k$ ($k \geq 2$) un conjunto de lenguajes sobre el alfabeto A tales que:

   (a) Para cada $i \neq j$, tenenos que $L_i \cap L_j = \emptyset$.

   (b) $\bigcup_{i=1}^{k} L_i = A^*$.

   (c) $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, el lenguaje L_i es r.e.

   Demostrar que $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, el lenguaje L_i es recursivo.

6. Sea L un lenguaje recursivamente enumerable, pero no recursivo. Considérese el lenguaje

$$L' = \{0w \mid w \in L\} \cup \{1w \mid w \notin L\}$$

   ¿Puede asegurarse que L' o su complementario son recursivos, recursivamente enumerables o no recursivamente enumerables?

7. Estudiar si las clases de lenguajes recursivos y recursivamente enumerables son cerradas para las siguientes operaciones:

   (a) Unión.

   (b) Intersección.

   (c) Concatenación.

   (d) Clausura.

   (e) Homomorfismo.

   (f) Homomorfismo inverso.

   Nota: Una clase de lenguajes $\mathcal{A}$ es *cerrada* para una operación si siempre que se lleve a cabo la operación con un lenguaje de $\mathcal{A}$ el resultado también pertenece a dicha clase, $\mathcal{A}$

8. Demostrar que el problema de la parada, determinar el conjunto de parejas (M, w) tales que la MT M para cuando tiene a w como entrada, es semidecidible pero no decidible.

9. (MANUAL) Demostrar que determinar si una MT acepta al menos un palíndromo no es decidible pero sí semidecidible.

10. Supongamos que tenemos MT con dos tipos de estados: *campana* y *silbato*. Determinar que saber si una MT entrará alguna vez en un estado *silbato* es indecidible. ¿Es semidecidible?

11. (MANUAL) Demostrar que es indecidible (no recursivo) saber si una MT termina escribiendo un 1 cuando comienza con una cinta completamente en blanco.

12. Determinar si los siguientes problemas son decidibles, semidecidibles o no semidecidibles:

    (a) Determinar si el lenguaje de una MT contiene, al menos, dos palabras distintas.

    (b) Determinar si el lenguaje reconocido por una MT es finito.

    (c) (MANUAL) Determinar si el lenguaje reconocido por una MT es infinito.

    (d) Determinar si el lenguaje de una MT es independiente del contexto.

13. Sea L el lenguaje formado por pares de códigos de MT más un entero (M_1, M_2, k) tales que $L(M_1) \cap L(M_2)$ contiene, al menos, k palabras. Demostrar que L es semidecidible pero no decidible.

14. Demostrar que los siguientes lenguajes son recursivos:

    (a) El conjunto de las MT M tales que al comenzar con la cinta en blanco, en algún momento escribirán un símbolo no blanco en la cinta.

    (b) El conjunto de las MT que nunca se mueven a la izquierda.

    (c) El conjunto de los pares (M, w) tales que M, al actuar sobre la entrada w, nunca lee una casilla de la cinta más de una vez.

15. Indicar si los siguientes problemas son decidibles, semidecidibles o no semidecidibles:

    (a) (MANUAL) Determinar si una MT se para para cualquier entrada.

    (b) Determinar si una MT no se para para ninguna entrada.

    (c) Determinar si una MT se para, al menos, para una entrada.

    (d) Determinar si una MT no se para, al menos, para una entrada.

16. Supongamos que tenemos 4 lenguajes L_1, L_2, L_3, L_4 de tal manera que existe una reducción de L_1 a L_2, de L_2 a L_3 y de L_4 a L_3. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indicar si para todos los casos son CIERTAS, para todos los casos son FALSAS o si son POSIBLES (en algunos casos son ciertas y, en otros, son falsas).

    (a) L_1 es recursivamente enumerable pero no recursivo, y L_3 es recursivo

(b) L_1 no es recursivo y L_4 no es recursivamente enumerable

(c) El complementario de L_1 no es recursivamente enumerable, pero el complementario de L_2 es recursivamente enumerable

(d) El complementario de L_2 no es recursivo, pero el complementario de L_3 es recursivo

(e) Si L_1 es recursivo, entonces el complementario de L_2 es recursivo

(f) Si L_3 es recursivo, entonces el complementario de L_4 es recursivo

(g) Si L_3 es recursivamente enumerable, entonces la unión de L_2 y L_4 es recursivamente enumerable.

(h) Si L_3 es recursivamente enumerable, entonces la intesección de L_2 y L_4 es recursivamente enumerable

17. Sea el problema de determinar si una máquina de Turing acepta a lo más 100 palabras. Determinar si es decidible, semidecidible o no semidecidible. Justificar la respuesta.

18. Determinar cuáles de los siguientes problemas son decidibles, semidecidibles o no semidecidibles:

    (a) Saber si una MT para una entrada 0011 no va a usar más de 10 casillas de la cinta.

    (b) Dadas dos MT saber si aceptan el mismo lenguaje

19. Determinar cuáles de los siguientes problemas son decidibles, semidecidibles o no semidecidibles:

    (a) Dada una MT M y una palabra u, saber si la MT acepta la palabra u en un número de pasos menor o igual a $|u|$.

    (b) Dada una MT determinar si no acepta la palabra vacía.

20. Determinar cuales de los siguientes problemas son decidibles, semidecidibles o no semidecidibles (se supone que las MTs tienen a $\{0, 1\}$ como alfabeto de entrada):

    (a) Dadas dos máquinas de Turing, M_1 y M_2, determinar si existe, al menos, una palabra aceptada simultáneamente por ambas máquinas.

    (b) (MANUAL) Dada una MT, determinar si para toda palabra de entrada no realiza más de 5 movimientos.

    (c) Determinar si una MT no es determinista.

    (d) (MANUAL) Dada una MT, determinar si ninguna de las palabras que acepta es un palíndromo.

Justifica las respuestas.

21. Se considera el siguiente problema: dadas dos máquinas de Turing, determinar si aceptan el mismo lenguaje. Razonar si éste problema es decidible, semidecidible o no semidecidible.

22. Determinar, justificando las respuestas, cuáles de los siguientes problemas son decidibles, semidecidibles o no semidecidibles:

    (a) Dada una máquina de Turing y una palabra de entrada determinar si visita menos de 10 casillas distintas de la cinta de lectura.

    (b) Dadas dos Máquinas de Turing, determinar si el conjunto de las palabras aceptadas a la vez por ambas máquinas de Turing es finito.

23. Indica cuáles de los siguientes problemas son decidibles, semidecidibles o no semidecidibles:

    (a) Determinar si el lenguaje aceptado por una MT es regular.

    (b) Dadas dos MTs determinar si hay una palabra que es aceptada por las dos MT y además es un palíndromo.

24. Indica cuáles de los siguientes problemas son decidibles, semidecidibles o no semidecidibles:

    (a) Dada una MT determinar si todos sus estados son accesibles (se puede llegar a ellos para un cálculo para alguna entrada).

    (b) Dada una MT determinar si su número de estados es menor o igual a 5.

25. Demuestra que el Problema de la Correspondencia de Post con un alfabeto A que tiene un sólo elemento es decidible.