# Modelos Avanzados de Computación

## Relación de Ejercicios 1

1. Diseñar máquinas de Turing con una cinta para los siguientes lenguajes:

a) Palabras sobre el alfabeto $\{0,1\}$ con el mismo número de ceros que de unos.

$M = (Q, A, B, \delta, q_0, \#, \{q_5\})$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$
- $A = \{0,1\}$
- $B = \{0, 1, \#, X\}$

$\delta(q_0, \#) = (q_5, \#, D)$ → Aceptamos la palabra vacía
$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$
$\delta(q_0, 1) = (q_2, X, D)$
} Leemos el primer símbolo

$\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_3, X, I)$
$\delta(q_1, X) = (q_1, X, D)$
} Si el símbolo leído era un 0, tenemos que buscar un 1

$\delta(q_2, 1) = (q_2, 1, D)$
$\delta(q_2, 0) = (q_3, X, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_2, X, D)$
} Si el símbolo leído era un 1, tenemos que buscar un 0

$\delta(q_3, 0) = (q_3, 0, I)$
$\delta(q_3, 1) = (q_3, 1, I)$
$\delta(q_3, X) = (q_3, X, I)$
$\delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$
} Volvemos al principio de la palabra

$\delta(q_4, X) = (q_4, \#, D)$
$\delta(q_4, 0) = (q_1, X, D)$
$\delta(q_4, 1) = (q_2, X, D)$
} Eliminamos las X del principio de la palabra y leemos el siguiente 0 o 1

$\delta(q_4, \#) = (q_5, \#, D)$ } Si ha habido equilibrio de 0's y 1's, finalizamos aceptando la palabra

**Ejemplo 1:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| #0101# | $q_0$ | ###01# | $q_4$ | ####### | $q_5$ ✓ |
| #X101# | $q_1$ | ###X1# | $q_1$ | | |
| #XX01# | $q_3$ | ###XX# | $q_3$ | | |
| #XX01# | $q_3$ | ###XX# | $q_3$ | | |
| #XX01# | $q_4$ | ###### | $q_4$ | | |

**Ejemplo 2.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| #010# | $q_0$ | ###X# | $q_1$ ✗ |
| #X10# | $q_1$ | | |
| #XX0# | $q_3$ | | |
| #XX0# | $q_4$ | | |
| ###0# | $q_4$ | | |

**Ejemplo 3.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| #111000# | $q_0$ | ##11X00# | $q_4$ | ###1XX0# | $q_4$ | ######### | $q_5$ ✓ |
| #X11000# | $q_2$ | ##X1X00# | $q_2$ | ###XXX0# | $q_2$ | | |
| #X11000# | $q_2$ | ##X1X00# | $q_2$ | ###XXX0# | $q_2$ | | |
| #X11X00# | $q_3$ | ##X1XX0# | $q_3$ | ###XXXX# | $q_3$ | | |
| #X11X00# | $q_4$ | ##X1XX0# | $q_4$ | ######## | $q_4$ | | |

b) $L = \{a^n b^n c^n / n \geq 1\}$

$M = (Q, A, B, \delta, q_0, \#, \{q_6\})$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$
- $A = \{a, b, c\}$
- $B = \{a, b, c, X, Y, \#\}$

$\delta(q_0, a) = (q_1, \#, D)$ } Leemos una "a" al principio

$\delta(q_1, a) = (q_1, a, D)$
$\delta(q_1, b) = (q_2, X, D)$
$\delta(q_1, X) = (q_1, X, D)$
} Tras leer una "a", buscamos leer una "b"

$\delta(q_2, b) = (q_2, b, D)$
$\delta(q_2, c) = (q_3, Y, I)$
$\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, D)$
} Tras leer una "b", buscamos leer una "c"

$\delta(q_3, a) = (q_3, a, I)$
$\delta(q_3, b) = (q_3, b, I)$
$\delta(q_3, X) = (q_3, X, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, I)$
$\delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$
} Volvemos al principio de la palabra

$\delta(q_4, a) = (q_1, \#, D)$
$\delta(q_4, X) = (q_5, X, D)$
} O hay otra "a" o solo quedan X's e Y's

$\delta(q_5, X) = (q_5, X, D)$
$\delta(q_5, Y) = (q_5, Y, D)$
$\delta(q_5, \#) = (q_6, \#, D)$
} Solo quedan X's e Y's, así que las recorremos hasta llegar a #

Ejemplo 1.

| | |
|---|---|
| #abc# | $q_0$ |
| ##bc# | $q_1$ |
| ##Xc# | $q_2$ |
| ##XY# | $q_3$ |
| ##XY# | $q_3$ |
| ##XY# | $q_4$ |
| ##XY# | $q_5$ |
| ##XY## | $q_6$ ✓ |

Ejemplo 2.

| | |
|---|---|
| #abbc# | $q_0$ |
| ##bbc# | $q_1$ |
| ##Xbc# | $q_2$ |
| ##XbY# | $q_3$ |
| ##XbY# | $q_3$ |
| ##XbY# | $q_4$ |
| ##XbY# | $q_4$ ✗ |

c) $\{ww^{-1} / w \in \{0,1\}^*\}$

$M = (Q, A, B, \delta, q_0, \#, \{q_6\})$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$
- $A = \{0, 1\}$
- $B = \{0, 1, \#\}$

$\delta(q_0, \#) = (q_6, \#, D)$ → Aceptamos la palabra vacía
$\delta(q_0, 0) = (q_1, \#, D)$
$\delta(q_0, 1) = (q_2, \#, D)$
} Leemos el primer símbolo

$\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, D)$
$\delta(q_1, \#) = (q_3, \#, I)$
$\delta(q_3, 0) = (q_5, \#, I)$
} Si leemos un "0", vamos hasta el final y vemos si hay un "0"

$\delta(q_2, 0) = (q_2, 0, D)$
$\delta(q_2, 1) = (q_2, 1, D)$
$\delta(q_2, \#) = (q_4, \#, I)$
$\delta(q_4, 1) = (q_5, \#, I)$
} Si leemos un "1", vamos hasta el final y vemos si hay un "1"

$\delta(q_5, 0) = (q_5, 0, I)$
$\delta(q_5, 1) = (q_5, 1, I)$
$\delta(q_5, \#) = (q_0, \#, D)$
} Volvemos al principio de la palabra

Ejemplo 1.

| | |
|---|---|
| #1001# | $q_0$ |
| ##001# | $q_2$ |
| ##001# | $q_2$ |
| ##001# | $q_4$ |
| ##00## | $q_5$ |
| ##00## | $q_5$ |
| ##00## | $q_0$ |
| ###0## | $q_1$ |
| ###0## | $q_1$ |
| ###0## | $q_3$ |
| ###### | $q_5$ |
| ###### | $q_0$ |
| ###### | $q_6$ ✓ |

Ejemplo 2.

| | |
|---|---|
| #1010# | $q_0$ |
| ##010# | $q_2$ |
| ##010# | $q_2$ |
| ##010# | $q_4$ ✗ |

d) $\{wcw / w \in \{0,1\}^*\}$

$M = (Q, A, B, \delta, q_0, \#, \{q_7\})$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$
- $A = \{0, 1, c\}$
- $B = \{0, 1, c, \#, X\}$

$\delta(q_0, 0) = (q_1, \#, D)$
$\delta(q_0, 1) = (q_2, \#, D)$
$\delta(q_0, c) = (q_6, \#, D)$
} Leemos el primer símbolo

$\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, D)$
$\delta(q_1, c) = (q_3, c, D)$
$\delta(q_3, 0) = (q_5, X, I)$
$\delta(q_3, X) = (q_3, X, D)$
} Si leemos un "0", vemos si lo primero que hay tras la "c", sin que ya haya sido leído, es otro "0"

$\delta(q_2, 0) = (q_2, 0, D)$
$\delta(q_2, 1) = (q_2, 1, D)$
$\delta(q_2, c) = (q_4, c, D)$
$\delta(q_4, 1) = (q_5, X, I)$
$\delta(q_4, X) = (q_4, X, D)$
} Si leemos un "1", vemos si lo primero que hay tras la "c", sin que ya haya sido leído, es otro "1"

$\delta(q_5, 0) = (q_5, 0, I)$
$\delta(q_5, 1) = (q_5, 1, I)$
$\delta(q_5, c) = (q_5, c, I)$
$\delta(q_5, X) = (q_5, X, I)$
$\delta(q_5, \#) = (q_0, \#, D)$
} Volvemos al principio de la palabra

$\delta(q_6, X) = (q_6, X, D)$
$\delta(q_6, \#) = (q_7, \#, I)$
} Comprobamos que, tras la "c", solo hay X's

Ejemplo 1.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| #10c10# | $q_0$ | ##0cX0# | $q_5$ | ##cXX# | $q_5$ | ###XX# | $q_7$ ✓ |
| ##0c10# | $q_2$ | ##0cX0# | $q_0$ | ##cXX# | $q_5$ | | |
| ##0c10# | $q_2$ | ###cX0# | $q_1$ | ##cXX# | $q_0$ | | |
| ##0c10# | $q_4$ | ###cX0# | $q_3$ | ###XX# | $q_6$ | | |
| ##0cX0# | $q_5$ | ###cX0# | $q_3$ | ###XX# | $q_6$ | | |

Ejemplo 2.

| | | |
|---|---|---|
| #0c1# | $q_0$ | |
| ##c1# | $q_1$ | |
| ##c1# | $q_3$ | X |

2) Rediseñar las MTs del ejercicio anterior introduciendo las técnicas de programación de almacenamiento de símbolo, multipista o subrutinas.

a) Palabras sobre el alfabeto $\{0,1\}$ con el mismo número de ceros que de unos.

Subrutinas

$M = (Q, A, B, \delta, q_0, \#, \{q_4\})$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $A = \{0,1\}$
- $B = \{0,1,\#,X,Y\}$

•) Subrutina 1:

(3) Diseñar una subrutina que desplace a la derecha todos los símbolos desde la posición actual hasta el primer blanco en la cinta, dejando un espacio en dicha posición en el que se pueda escribir un carácter. Debe de terminar con la cabeza de lectura en la misma posición en la que se empezó. Se supone que el alfabeto de entrada es $A=\{0,1\}$ y el de trabajo $B=\{0,1,\#\}$.

La idea es ir recordando el último símbolo leído e irlo escribiendo en la siguiente casilla.

La subrutina tiene como estado inicial a $q_0$ y como estado final a $q_3$.

$M=(Q,A,B,\delta,q_0,\#,\{q_2\})$

- $Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
- $A=\{0,1\}$
- $B=\{0,1,\#\}$

$\delta(q_0,\#)=(q_3,\#,S)$ → Aceptamos la palabra vacía; Nos quedamos en la misma posición

$\delta(q_0,0)=([q_1,0],\#,D)$
$\delta(q_0,1)=([q_1,1],\#,D)$
} Recordamos el primer símbolo leído y lo sustituimos por un blanco

$\delta([q_1,0],0)=([q_1,0],0,D)$
$\delta([q_1,0],1)=([q_1,1],0,D)$
$\delta([q_1,1],0)=([q_1,0],1,D)$
$\delta([q_1,1],1)=([q_1,1],1,D)$
} Escribimos en la siguiente posición el símbolo leído y guardado anteriormente

$\delta([q_1,0],\#)=(q_2,0,I)$
$\delta([q_1,1],\#)=(q_2,1,I)$
$\delta(q_2,0)=(q_2,0,I)$
$\delta(q_2,1)=(q_2,1,I)$
$\delta(q_2,\#)=(q_3,\#,S)$
} Cuando llegamos al final, devolvemos el cabezal a la posición inicial

(4) Escribir una subrutina que comience en una posición con un cero y se mueva a la derecha de todos los ceros hasta que alcance un uno o un blanco. Se supone que en la cinta solo hay caracteres del conjunto $\{0,1,\#\}$. Si se comienza con un carácter que es distinto de cero, la subrutina de la MT debe de terminar (y pasar a un estado de la MT global). Utilizar dicha subrutina para escribir una MT que acepte todas las cadenas de ceros y unos, que no tengan dos unos consecutivos.

- Subrutina: Tiene como estado inicial a $q_0$ y como estado final a $q_2$.

$\delta(q_0,\#)=(q_2,\#,S)$ → Aceptamos la palabra vacía
$\delta(q_0,0)=(q_1,0,D)$

$\delta(q_1,0)=(q_1,0,D)$
$\delta(q_1,1)=(q_2,1,D)$
$\delta(q_1,\#)=(q_2,\#,S)$

- MT: $M=(Q,A,B,\delta,q_3,\#,\{q_4\})$
  - $Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}$
  - $A=\{0,1\}$
  - $B=\{0,1,\#\}$

$\delta(q_3,0)=(q_0,0,S)$ } Llamamos a la subrutina

$\delta(q_3,1)=(q_2,1,D)$
$\delta(q_2,0)=(q_0,0,S)$
$\delta(q_2,\#)=(q_4,\#,S)$
} Si hemos leído un 1, ya solo podemos leer 0's (luego, llamamos a la subrutina) o terminar

(5) Diseñar una MT con una cinta que, dada una palabra $u$, calcule una palabra formada por todos los símbolos que ocupan las posiciones pares de $u$.

$M=(Q,A,B,\delta,q,\#,\{q_7\})$

- $Q=\{q,q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6,q_7\}$
- $A$
- $B=A\cup\{\#,X,|\}$

$a\in A$

$\delta(q,\#)=(q_7,\#,S)$ → Aceptamos la palabra vacía
$\delta(q,a)=(q_0,a,S)$

$\delta(q_0,a)=(q_0,a,D)$
$\delta(q_0,\#)=(q_1,|,I)$
} Vamos al final y colocamos un "|", el cual actuará como separador

$\delta(q_1,a)=(q_1,a,I)$
$\delta(q_1,\#)=(q_2,\#,D)$
} Vamos al principio

$\delta(q_2,a)=(q_3,a,D)$
$\delta(q_3,a)=([q_4,a],X,D)$
$\delta([q_4,a],b)=([q_4,a],b,D)$ ↳ a=b o a≠b
$\delta([q_4,a],|)=([q_4,a],|,D)$
$\delta([q_4,a],\#)=(q_5,a,I)$
$\delta(q_5,a)=(q_5,a,I)$
$\delta(q_5,|)=(q_5,|,I)$
$\delta(q_5,X)=(q_2,X,D)$
} Nos situamos en una posición par. Almacenamos el símbolo de dicha posición y sustituimos el primer "#" que haya a la derecha de "|" por dicho símbolo

$\delta(q_2,|)=(q_6,\#,I)$ → Para pasar al final en palabras de longitud par
$\delta(q_3,|)=(q_6,\#,I)$ → Para pasar al final en palabras de longitud impar
$\delta(q_6,a)=(q_6,\#,I)$
$\delta(q_6,X)=(q_6,\#,I)$
$\delta(q_6,\#)=(q_7,\#,D)$
} Ponemos como "#" todo lo que se encuentre a la izquierda de "|" (incluyendo este) y finalizamos

(6) Diseñar una MT con una cinta que, dada una palabra $u$, calcule una palabra formada por todos los símbolos que ocupan las posiciones pares de $u$ seguidos por todos los símbolos que ocupan las posiciones impares de $u$. Por ejemplo, para la entrada 0101 calcularía 1100.

Misma idea que en (5)

$M=(Q,A,B,\delta,q,\#,\{q_{11}\})$

- $Q=\{q,q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6,q_7,q_8,q_9,q_{10},q_{11}\}$
- $A\ (a\in A)$
- $B=A\cup\{\#,X,Y,|\}$

$\delta(q,\#) = (q_7,\#,S)$ → Aceptamos la palabra vacía
$\delta(q,a) = (q_0,a,S)$

$\left.\begin{array}{l}\delta(q_0,a) = (q_0,a,D) \\ \delta(q_0,\#) = (q_1,1,I)\end{array}\right\}$ Vamos al final y colocamos un "1", el cual actuará como un separador

$\left.\begin{array}{l}\delta(q_1,a) = (q_1,a,I) \\ \delta(q_1,\#) = (q_2,\#,D)\end{array}\right\}$ Vamos al principio

$$\left.\begin{array}{l}\delta(q_2,a) = (q_3,a,D) \\ \delta(q_3,a) = ([q_4,a],X,D) \\ \delta([q_4,a],b) = ([q_4,a],b,D) \quad \forall a,b \text{ o } a \neq b \\ \delta([q_4,a],1) = ([q_4,a],1,D) \\ \delta([q_4,a],\#) = (q_5,a,I) \\ \delta(q_5,a) = (q_5,a,I) \\ \delta(q_5,1) = (q_5,1,I) \\ \delta(q_5,X) = (q_2,X,D)\end{array}\right\}$$

Nos situamos en una posición par. Almacenamos el símbolo de dicha posición y sustituimos el primer "#" que haya a la derecha de "1" por dicho símbolo

$\delta(q_2,1) = (q_6,1,I)$ → Finalizar selección de símbolos pares en palabras de longitud par
$\delta(q_3,1) = (q_6,1,I)$ → Finalizar selección de símbolos pares en palabras de longitud impar
$\cancel{\delta(q_6,a) = (q_6,\#,I)}$
$\cancel{\delta(q_6,X) = (q_6,\#,I)}$
$\cancel{\delta(q_6,\#) = (q_7,\#,D)}$

Ya hemos colocado todos los símbolos pares. Pasamos a los impares

Igual que en 5

$\left.\begin{array}{l}\delta(q_6,a) = (q_6,a,I) \\ \delta(q_6,X) = (q_6,X,I) \\ \delta(q_6,\#) = (q_7,\#,D)\end{array}\right\}$ Volvemos al principio, situándonos en el primer símbolo impar de la palabra

$$\left.\begin{array}{l}\delta(q_7,X) = (q_7,X,D) \\ \delta(q_7,a) = ([q_8,a],Y,D) \\ \delta([q_8,a],b) = ([q_8,a],b,D) \quad \forall a,b \text{ o } a \neq b \\ \delta([q_8,a],1) = ([q_8,a],1,D) \\ \delta([q_8,a],X) = ([q_8,a],X,D) \\ \delta([q_8,a],\#) = (q_9,a,I) \\ \delta(q_9,a) = (q_9,a,I) \\ \delta(q_9,1) = (q_9,1,I) \\ \delta(q_9,X) = (q_9,X,I) \\ \delta(q_9,Y) = (q_7,Y,D)\end{array}\right\}$$

Nos situamos en una posición impar. Almacenamos el símbolo de dicha posición y sustituimos el primer "#" que haya a la derecha de "1" por dicho símbolo

$$\left.\begin{array}{l}\delta(q_7,1) = (q_{10},\#,I) \\ \delta(q_{10},X) = (q_{10},\#,I) \\ \delta(q_{10},Y) = (q_{10},\#,I) \\ \delta(q_{10},\#) = (q_{11},\#,D)\end{array}\right\}$$

Ponemos como "#" todo lo que se encuentre a la izquierda de "1" (incluyendo este) y finalizamos

Parte nueva para los símbolos impares

7 Describir una MT con una cinta que haciendo uso de subrutinas resuelva el siguiente problema: dada una palabra de entrada $u \in \{0,1\}^*$, calcule una palabra $w$ con el mismo número de ceros y unos que $u$, pero en la que todos los ceros preceden a todos los unos. Por ejemplo, si la entrada es 0110, la salida debe de ser 0011.

$M = (Q, A, B, \delta, q, \#, \{q_6\})$

- $Q = \{q, q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$
- $A = \{0,1\}$
- $B = \{0,1,\#\}$

- Subrutina 1: Localizar el primer "0" que haya tras un "1" y sustituirlo por "#".

$\delta(q,\#) = (q_6,\#,S)$ → Aceptamos la palabra vacía
$\delta(q,0) = (q_0,0,S)$
$\delta(q,1) = (q_0,1,S)$
$\delta(q_0,\#) = (q_0,\#,D)$

$\delta(q_0,0) = (q_0,0,D)$
$\delta(q_0,1) = ([q_1,1],1,D)$
$\delta([q_1,1],1) = ([q_1,1],1,D)$
$\delta([q_1,1],0) = (q_2,\#,I)$

$\delta([q_1,1],\#) = (q_6,\#,I)$
Si una vez leído un "1", llegamos al final de la palabra, entonces es que todos los 0's preceden a los 1's, luego, ya habríamos terminado

- Subrutina 2: Colocar el "0" al principio de la palabra

$\delta(q_2,0) = (q_2,0,I)$
$\delta(q_2,1) = (q_2,1,I)$
$\delta(q_2,\#) = (q_3,0,D)$

- Subrutina 3: Desplazar una posición a la derecha toda la parte de la palabra que se encuentra a la izquierda del símbolo "#".

$\delta(q_3,0) = (q_3,0,D)$
$\delta(q_3,1) = (q_3,1,D)$
$\delta(q_3,\#) = (q_4,\#,I)$

$\delta(q_4,0) = ([q_5,0],\#,D)$
$\delta(q_4,1) = ([q_5,1],\#,D)$
$\delta(q_4,\#) = (q_0,\#,D)$ Si en $q_4$ leemos un "#", es que ya se ha realizado todo el desplazamiento

$\delta([q_5,0],\#) = (q_3,0,I)$
$\delta([q_5,1],\#) = (q_3,1,I)$

8. Diseñar una MT con dos cintas que dada una sucesión de ceros de longitud n en la primera cinta, calcula en la segunda cinta n en binario.

Idea: La cinta de arriba se mueve de izquierda a derecha y la de abajo de derecha a izquierda. Cuando la de arriba se mueva una unidad, vamos sumando 1 en la de abajo (si había un 0 en la última posición, se pone un 1 y si había un 1, se van poniendo 0's hasta el próximo 0 o #, el cual se sustituye por un 1, y luego regresamos al final de la palabra).

$M = (Q, A, B, \delta, q_0, \#, \{q_3\})$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $A = \{0, 1\}$
- $B = \{0, 1, \#\}$

$\delta(q_0, \#, \#) = (q_3, \#, 0, S, S)$ → Aceptamos la palabra vacía

$\delta(q_0, 0, \#) = (q_0, 0, 1, D, S)$ } Al principio, ponemos un 1 en la 2ª cinta

$\delta(q_0, 0, 1) = (q_1, 0, 1, S, S)$

$\delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 0, 0, S, I)$ } Donde haya 1's pone 0's y se mueve la 2ª cinta a la izq.

$\delta(q_1, 0, \#) = (q_2, 0, 1, S, D)$
$\delta(q_1, 0, 0) = (q_2, 0, 1, S, S)$ } Pone un 1 en el próximo 0 o # que se encuentre

$\delta(q_2, 0, 0) = (q_2, 0, 0, S, D)$
$\delta(q_2, 0, 1) = (q_2, 0, 1, S, D)$
$\delta(q_2, 0, \#) = (q_0, 0, \#, D, I)$ } Va hasta el final del número binario situado en la 2ª cinta

} Suma de un 1 al número binario si este acaba en 1

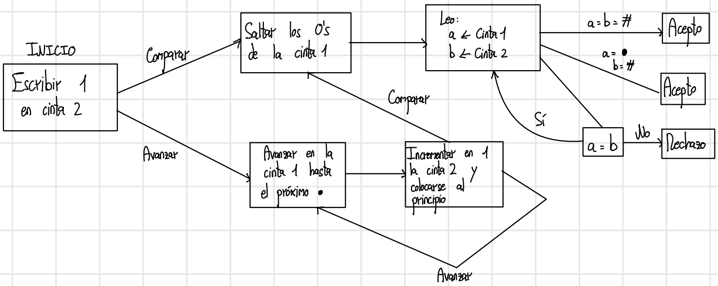
$\delta(q_0, 0, 0) = (q_0, 0, 1, D, S)$ } Suma de un 1 al número binario si este acaba en 0

$\delta(q_0, \#, 0) = (q_3, \#, 0, S, S)$
$\delta(q_0, \#, 1) = (q_3, \#, 1, S, S)$ } Cuando ya hayamos leído todos los 0's de la 1ª cinta, finalizamos

9.

⑮ Describir MTND (con una o varias cintas) que acepten los siguientes lenguajes:

b)




c) Palabras que contienen a un palíndromo de longitud mayor o igual a 5 como subcadena.

MTND con 2 cintas

- Paso 1. La MTND comienza en el estado inicial en la primera posición de la 1ª cinta.
- Paso 2. La MTND usa una 2ª cinta para ver si la subcadena que se está explorando es un palíndromo o no.
- Paso 3. La MTND comienza explorando las subcadenas desde la posición 1 de la 1ª cinta. Dicha exploración se basa en ver si la subcadena es un palíndromo o no, y esto se hace en la 2ª cinta. En cada paso de la exploración, se decide si seguir explorando la subcadena actual o comenzar a explorar una nueva subcadena (vaciando el contenido de la 2ª cinta). Para ver si la subcadena situada en la 2ª cinta es un palíndromo, basta con leer y almacenar un símbolo, cambiarlo por "X" (nos servirá para ver su longitud en el caso de que sea un palíndromo), irse al final y leer el último símbolo, y si ambos coinciden, este último se borra y se repite el proceso símbolo a símbolo. En el momento en que no coincidan, la subcadena deja de ser un palíndromo.
- Paso 4. Si ya hemos explorado todas las subcadenas posibles desde una posición de la 1ª cinta en adelante sin éxito, pasamos a la siguiente posición en la 1ª cinta.
- Paso 5. Si en la 2ª cinta se encuentra un palíndromo de longitud mayor o igual a 5, la MTND acepta la palabra de entrada. Si la MTND llega al final de la 1ª cinta sin éxito, la MTND rechaza la palabra de entrada

d) El lenguaje $L = \{ 0^{2^n}$ tal que $n \geq 0 \}$.

⑯ Da un ejemplo de un problema con una MT no determinista que lo resuelva y para el que dar una MT determinista sea mucho más complicado (la MT no determinista sea más simple que cualquier otra MT determinista que resuelva el mismo problema). ¿Qué ventajas y qué limitaciones presentan las MT no deterministas sobre las deterministas?

⑰ Sea L el lenguaje que contiene una sola palabra: 0 si no hay vida fuera de la tierra y 1 si hay vida fuera de la tierra. ¿Es L calculable por una MT?

L sí es calculable ya que la siguiente MT acepta dicho lenguaje: $L = \{0\} \to M_0$ ó $L = \{1\} \to M_1$

En ambos casos, hay una máquina de Turing que lo acepta $\Rightarrow$ L es calculable (Todo lenguaje finito es calculable)

⑱ Demostrar que los siguientes criterios de aceptación por una máquina de Turing son equivalentes:

(a) M acepta la palabra w si, al tener w como entrada, en un paso de cómputo se llega a un estado de parada.

(b) M acepta la palabra w si, al tener w como entrada, la máquina se para en algún momento (no necesariamente por llegar a un estado de parada).

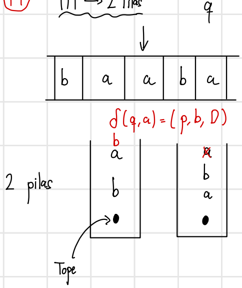
Esto es, demostrar que, si un lenguaje L es aceptado por una máquina de Turing M por alguno de los criterios, existe otra máquina de Turing M' que acepta L por el otro.

$\underbrace{L \text{ es aceptado por una MT por criterio de aceptación}}_{A} \iff \underbrace{L \text{ es aceptado por una MT por criterio de parada}}_{B}$

$A \Rightarrow B$ | $L = L(M)$ por criterio de aceptación. $L = L_p(M)$. $M'$ es igual que $M$ pero si $\delta(q,a) = \emptyset$ y $q \notin F$, $\delta(q,a) = (q_c, a, S)$.

$B \Rightarrow A$ | $L = L(M)$ por criterio de parada. $L = L_a(M')$. Cuando $M$ se detenga, definimos transiciones que lleven $M'$ a un estado de aceptación.

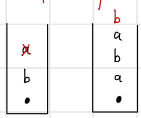
19 MT → 2 Pilas




(Digamos que es como "partir" la MT en dos)

Si se nos quedan vacías, le metemos un # a la pila


$\delta(q,a) = (p,b,I)$



El conjunto de estados de las dos pilas es el mismo que el de la MT

2 Pilas → MT

Borrar de la pila izquierda: Ponemos # y nos desplazamos a la izquierda

(Si es de la pila derecha, hacemos lo mismo pero nos desplazamos a la derecha)

Añadir de la pila izquierda: Ponemos el símbolo añadido y nos desplazamos a la derecha

(Si es de la pila derecha, hacemos lo mismo pero nos desplazamos a la izquierda)

Esto se generaliza fácilmente para $k \geq 2$ pilas.

20 MT → MT Simple

$\boxed{0\ 1\ 1}$

$\underline{*}\ \underline{\uparrow}\ 0\ \underline{*}\ \_\ 1\ \underline{*}\ \_\ 1$

$\underline{*}\ \underline{\uparrow}\ 1\ \underline{*}\ \_\ 1\ \underline{*}\ \_\ 1$

$\_\ \_\ 1\ \_\ \underline{\uparrow}\ 1\ \_\ \_\ 1$

Necesitamos marcar dónde va el cabezal y marcar lo que vamos copiando. Por ello, dejamos dos blancos a la izquierda de cada símbolo.

# Ejercicios Exámenes

① Describir una MT que lea una palabra tipo $ucv$, donde $u, v \in \{0,1\}^*$ y $c$ es un símbolo adicional, y determine si existe un número natural $i$, tal que $v = u^i$.

Sea M una MT con 2 cintas:

- 1ª Cinta: Contiene la entrada $ucv$.
- 2ª cinta: Contendrá la palabra $u^i$.

Funcionamiento:

1) Copiamos $u$ en la 2ª cinta y posicionamos el cabezal de la 1ª cinta al principio de la palabra $v$ y el cabezal de la 2ª cinta al principio de la palabra $u$ que hemos copiado.

2) Comprobamos si $v = u^i$, es decir, si coinciden símbolo a símbolo $v$ y $u^i$ desplazando los cabezales de ambas cintas a la derecha en cada paso:

   2.1) Si leemos # en ambas cintas, M termina y acepta.

   2.2) Si los símbolos en ambas cintas son distintos, M termina y rechaza.

   2.3) Si encontramos # en la 2ª cinta pero no en la 1ª cinta, posicionamos el cabezal de la 1ª cinta al principio de $u$ y volvemos al paso 1.

Ejemplo de Aceptación.

[10c1010] $\underset{1)}{\Rightarrow}$ [10c1010] $\underset{2)}{\Rightarrow}$ [10c1010] $\underset{2.3)}{\Rightarrow}$ [10c1010] $\underset{2)}{\Rightarrow}$ [10c1010#] FIN

[# ··· ···] [10# ···] [10# ···] [1010# ··] [1010# ···] Acepta

Ejemplo de Rechazo

[10c100] $\underset{1)}{\Rightarrow}$ [10c100] $\underset{2)}{\Rightarrow}$ [10c100] $\underset{2.3)}{\Rightarrow}$ [10c100] $\underset{2)}{\Rightarrow}$ [10c100] FIN

[# ···] [10# ···] [10# ···] [1010# ···] [1010# ···] Rechaza

② Describe una MT que sea espacio logarítmica para calcular $f(u) = u^{-1}$, donde $u \in \{0,1\}^*$.

Sea M una MT con 2 cintas:

- 1ª Cinta: Contiene la palabra de entrada $u$.
- 2ª Cinta: Contendrá la palabra de salida $u^{-1}$.

Funcionamiento:

1) Posicionamos el cabezal de la 1ª cinta al final de la palabra $u$.

2) Leemos un símbolo de $u$ en la primera cinta, lo copiamos en la 2ª cinta y desplazamos una posición a la izquierda el cabezal de la 1ª cinta y una posición a la derecha el cabezal de la 2ª cinta.

3) Se repite el paso 2 hasta leer un # en la 1ª cinta, momento en el cual M termina.

Ejemplo.

[100] $\underset{1)}{\Rightarrow}$ [100] $\underset{2)}{\Rightarrow}$ [100] $\underset{2)}{\Rightarrow}$ [100] $\underset{2)}{\Rightarrow}$ [#100] FIN

[###] [###] [0##] [00#] [001#]

3. Diseñar una MT que dado un número $x$ en binario, calcule $3x$.

MT con 2 cintas
- 1ª cinta: Contendrá siempre el número $x$.
- 2ª cinta: Contendrá al final el número $3x$.

$a, b$ pueden ser 0 ó 1, y puede darse $a = b$ ó $a \neq b$.

$\delta(q_0, \#, \#) = (q_f, \#, 0, S, S)$ } Aceptamos la palabra vacía ($\varepsilon = 0$)

$\delta(q_0, a, \#) = (q_1, a, a, D, D)$
$\delta(q_1, \#, \#) = (q_2, \#, \#, I, I)$
} Copiamos $x$ en la 2ª cinta. (las cabezales acaban al final de $x$ en ambas cintas) Pasamos a calcular $x + x = 2x$ en la 2ª cinta.

$\delta(q_2, 0, 0) = (q_2, 0, 0, I, I)$
$\delta(q_2, 1, 0) = (q_2, 0, 1, I, I)$
$\delta(q_2, 0, 1) = (q_2, 0, 1, I, I)$
$\delta(q_2, 1, 1) = (q_3, 1, 0, I, I) \leftarrow$ Acarreo
$\delta(q_2, \#, 0) = (q_2, \#, 0, S, I)$
$\delta(q_2, \#, 1) = (q_2, \#, 1, S, I)$
$\delta(q_2, \#, \#) = (q_4, \#, \#, S, S)$
} Suma sin acarreo

$\delta(q_3, 0, 0) = (q_2, 0, 1, I, I)$
$\delta(q_3, 1, 0) = (q_3, 1, 0, I, I)$
$\delta(q_3, 0, 1) = (q_3, 0, 0, I, I)$
$\delta(q_3, 1, 1) = (q_3, 1, 1, I, I)$
$\delta(q_3, \#, 0) = (q_3, \#, 0, S, I)$
$\delta(q_3, \#, 1) = (q_3, \#, 0, S, I)$
$\delta(q_3, \#, \#) = (q_4, \#, 1, S, S)$
} Suma con acarreo

Subrutina

Suma de dos números en binario, donde el número de la 1ª cinta es menor o igual que el número de la 2ª cinta

$\delta(q_4, \#, \#) = (q_5, \#, \#, D, D)$
$\delta(q_5, \#, a) = (q_5, \#, a, D, D)$
$\delta(q_5, a, b) = (q_5, a, b, D, D)$
$\delta(q_5, \#, \#) = (q_2, X, X, I, I)$
} En la 2ª cinta tenemos calculado $x + x = 2x$. Ahora ponemos los cabezales de cada cinta al final y se calcula $x + 2x = 3x$.

$\delta(q_5, X, X) = (q_f, \#, \#, I, I)$ } Usamos el símbolo "X" para llevar la cuenta, es decir, para saber que ya hemos hecho $x + x = 2x$, colocamos las X's, y tras hacer $x + 2x = 3x$, leemos las X's, las sustituimos por # y finalizamos

4. Diseñar una MT que acepte el lenguaje $L = \{ 0^n c 0^m \mid n, m \text{ no son coprimos entre sí}, n, m > 1 \}$.

$n$ y $m$ NO son coprimos si $\exists q$ número entero (mayor que 1) tal que $q \mid n$ y $q \mid m$.

MT con 3 cintas
- 1ª Cinta: Contendrá $0^n$
- 2ª Cinta: Contendrá $0^m$
- 3ª Cinta: Contendrá $0^q$, $q \in \{2, \dots, m\}$, el cual actuará como un contador que se va a ir incrementando de uno en uno.

$\delta(q_0, 0, \#, \#) = (q_0, 0, \#, \#, D, S, S)$
$\delta(q_0, c, \#, \#) = (q_1, c, \#, \#, D, S, S)$
$\delta(q_1, 0, \#, \#) = (q_1, 0, 0, \#, D, D, S)$
} Copiamos $0^m$ en la 2ª cinta

$\delta(q_1, \#, \#, \#) = (q_2, \#, \#, \#, I, I, S)$
$\delta(q_2, 0, 0, \#) = (q_2, \#, 0, \#, I, I, S)$
$\delta(q_2, c, \#, \#) = (q_2, \#, \#, \#, I, S, S)$
$\delta(q_2, 0, \#, \#) = (q_2, 0, \#, \#, I, S, S)$
$\delta(q_2, \#, \#, \#) = (q_3, \#, \#, \#, D, D, S)$
} Eliminamos la parte $c0^m$ de la 1ª cinta y colocamos los cabezales de la 1ª y la 2ª cinta al principio

$\delta(q_3, 0, 0, \#) = (q_4, 0, 0, 0, S, S, D)$
$\delta(q_4, 0, 0, \#) = (q_5, 0, 0, 0, S, S, I)$
} Escribimos $0^2$ en la 3ª cinta

$\delta(q_5, 0, 0, 0) = (q_5, 0, 0, 0, S, S, I)$
$\delta(q_5, 0, 0, \#) = (q_6, 0, 0, \#, S, S, D)$
} Colocamos el cabezal de la 3ª cinta al principio

$\delta(q_6, 0, 0, 0) = (q_6, 0, 0, 0, D, D, D)$
$\delta(q_6, 0, 0, \#) = (q_5, 0, 0, \#, S, S, I)$
} Vamos recorriendo las 3 cintas simultáneamente, volviendo al principio de la 3ª cinta si es necesario

$\delta(q_6, \#, 0, \#) = (q_7, \#, 0, \#, S, S, I) \leftarrow \boxed{q \mid n}$ Veamos si $q \mid m$

$\delta(q_7, \#, 0, 0) = (q_7, \#, 0, 0, S, S, I)$
$\delta(q_7, \#, 0, \#) = (q_8, \#, 0, \#, S, S, D)$
} Colocamos el cabezal de la 3ª cinta al principio

$\delta(q_8, \#, 0, 0) = (q_8, \#, 0, 0, S, D, D)$
$\delta(q_8, \#, 0, \#) = (q_7, \#, 0, \#, S, S, I)$
} Vamos recorriendo la 2ª y la 3ª cinta simultáneamente, volviendo al principio de la 3ª cinta si es necesario

$\delta(q_8, \#, \#, 0) = (q_9, \#, \#, 0, I, I, S) \leftarrow \boxed{q \mid n \text{ pero } q \nmid m}$

$\delta(q_8, \#, \#, \#) = (q_f, \#, \#, \#, S, S, S) \leftarrow \boxed{q \mid n \text{ y } q \mid m}$ FIN Y ACEPTA

$\delta(q_6, 0, \#, \#) = (q'_7, 0, \#, \#, S, S, I) \leftarrow \boxed{q \mid m}$ Veamos si $q \mid n$

$\delta(q'_7, 0, \#, 0) = (q'_7, 0, \#, 0, S, S, I)$
$\delta(q'_7, 0, \#, \#) = (q'_8, 0, \#, \#, S, S, D)$
} Colocamos el cabezal de la 3ª cinta al principio

$\delta(q'_8, 0, \#, 0) = (q'_8, 0, \#, 0, D, S, D)$
$\delta(q'_8, 0, \#, \#) = (q'_7, 0, \#, \#, S, S, I)$
} Vamos recorriendo la 1ª y la 3ª cinta simultáneamente, volviendo al principio de la 3ª cinta si es necesario

$\delta(q'_8, \#, \#, 0) = (q_9, \#, \#, 0, I, I, S) \leftarrow \boxed{q \mid m \text{ pero } q \nmid n}$

$\delta(q'_8, \#, \#, \#) = (q_f, \#, \#, \#, S, S, S) \leftarrow \boxed{q \mid m \text{ y } q \mid n}$ FIN Y ACEPTA

$$\delta(q_6, \#, 0, 0) = (q_9, \#, 0, 0, S, I, S) \leftarrow \boxed{q \nmid n}$$

$$\delta(q_6, 0, \#, 0) = (q_9, 0, \#, 0, S, I, S) \leftarrow \boxed{q \nmid m}$$

$$\delta(q_9, 0,0,0) = (q_9, 0,0,0, I,I,I)$$
$$\delta(q_9, \#,0,0) = (q_9, \#,0,0, S,I,I)$$
$$\delta(q_9, 0,\#,0) = (q_9, 0,\#,0, S,I,S)$$
$$\delta(q_9, 0,0,\#) = (q_9, 0,0,\#, S,S,I)$$

Colocamos al principio los cabezales de cada cinta

$$\delta(q_9, \#,\#,\#) = (q_{10}, \#,\#,\#, D,D,D)$$
$$\delta(q_{10}, 0,0,0) = (q_{10}, 0,0,0, D,D,D)$$
$$\delta(q_{10}, 0,\#,\#) = (q_{11}, 0,\#,0, I,I,I)$$
$$\delta(q_{10}, \#,0,\#) = (q_{11}, \#,0,0, I,I,I)$$

Incrementamos en uno (añadimos un 0) al contador de la 3ª cinta

$$\delta(q_{11}, 0,0,0) = (q_{11}, 0,0,0, I,I,I)$$
$$\delta(q_{11}, \#,0,0) = (q_{11}, \#,0,0, I,I,I)$$
$$\delta(q_{11}, 0,\#,0) = (q_{11}, 0,\#,0, I,I,I)$$
$$\delta(q_{11}, \#,\#,\#) = (q_6, \#,\#,\#, D,D,D)$$

Colocamos al principio los cabezales de cada cinta y vemos si el nuevo número del contador divide a n y a m

5 Diseñar una MT que acepte el lenguaje $L = \{ x c y \,/\, x, y \text{ son números en binario};\ x > y \}$

MT con 2 cintas:
- 1ª Cinta: Contendrá x
- 2ª Cinta: Contendrá y

$$\delta(q_0, 0, \#) = (q_0, 0, \#, D, S)$$
$$\delta(q_0, 1, \#) = (q_0, 1, \#, D, S)$$
$$\delta(q_0, c, \#) = (q_1, c, \#, D, S)$$
$$\delta(q_1, 0, \#) = (q_1, 0, 0, D, D)$$
$$\delta(q_1, 1, \#) = (q_1, 1, 1, D, D)$$

Copiamos "y" en la 2ª cinta

$$\delta(q_1, \#, \#) = (q_2, \#, \#, I, S)$$
$$\delta(q_2, c, \#) = (q_2, \#, \#, I, S)$$
$$\delta(q_2, *, \#) = (q_2, *, \#, I, S)$$
$$\delta(q_2, \#, \#) = (q_3, \#, \#, S, I)$$

Colocamos el cabezal de la 1ª cinta al principio y eliminamos "c"

$$\delta(q_3, \#, *) = (q_3, \#, *, S, I)$$
$$\delta(q_3, \#, \#) = (q_4, \#, \#, D, D)$$

Colocamos el cabezal de la 2ª cinta al principio

$*$ puede ser 0 ó 1

$*$ y $\bullet$ pueden ser 0 ó 1 (Puede darse $* = \bullet$ ó $* \neq \bullet$)

$$\delta(q_4, *, \bullet) = (q_4, *, \bullet, D, D)$$
$$\delta(q_4, *, \#) = (q_f, *, \#, S, S) \leftarrow |x| > |y|$$
$$\delta(q_4, \#, \#) = (q_5, \#, \#, I, I) \leftarrow |x| = |y|$$

Si $|x| > |y|$, entonces $x > y$, luego, la MT termina y acepta.

$$\delta(q_5, *, \bullet) = (q_5, *, \bullet, I, I)$$
$$\delta(q_5, \#, \#) = (q_6, \#, \#, D, D)$$

Colocamos los cabezales de ambas cintas al principio

$$\delta(q_6, 1, 1) = (q_6, 1, 1, D, D)$$
$$\delta(q_6, 0, 0) = (q_6, 0, 0, D, D)$$
$$\delta(q_6, 1, 0) = (q_f, 1, 0, S, S)$$

Si $|x| = |y|$ y, leyendo ambos números de izquierda a derecha, vemos que x es el primero que en una posición tiene un 1 mientras que y tiene un 0, entonces $x > y$