Tema 2: ED de orden superior

ED lineal de coeficientes constantes

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = b(n)$$

$a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ $\quad$ $b(n)$ función de n

orden k $\quad$ $a_k \neq 0$

$b(n) \equiv 0$ ED homogénea

$b(n) \not\equiv 0$ ED completa

ED homogénea

(1) $a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$

$S = \{$ sucesiones con coef en $\mathbb{R}\}$

es un espacio vectorial

$\{x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots\}$

$\{1, 0, \ldots\}, \{0, 1, \ldots\}, \{0, 0, 1, 0, \ldots\}$

...

dim infinita

$\Sigma = \{$ soluciones de (1)$\}$

subespacio vectorial

* $\{x_n\}, \{y_n\} \in \Sigma \Rightarrow \{x_n + y_n\} \in \Sigma$

$a_k(x_{n+k} + y_{n+k}) + \cdots + a_1(x_{n+1} + y_{n+1}) + a_0(x_n + y_n)$

$= \underline{a_k x_{n+k} + \cdots + a_1 x_{n-1} + a_0 x_n} +$

$+ \underline{a_k y_{n+k} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n} = 0$

$* \ \{x_n\} \in \Sigma \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \{\alpha x_n\} \in \Sigma$

$$a_k(\alpha x_{n+k}) + \cdots + a_1(\alpha x_{n+1}) + a_0 \alpha x_n =$$

$$= \alpha(\underbrace{a_k x_{n+k} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n}) = 0$$

$$\boxed{\dim \Sigma = K}$$

$$\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^K \qquad \text{isomorfismo}$$

$$\{x_n\} \longrightarrow \underbrace{(x_0, x_1, \ldots x_{K-1})}$$

$\forall (x_0, x_1, \ldots, x_{K-1}) \in \mathbb{R}^K \quad \exists \{x_n\} \in \Sigma$ sol.

$$\rightarrow \boxed{x_{n+k} = -\frac{1}{a_k}\left(a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n\right)} \quad \forall n$$

$$\underline{x_k} = -\frac{1}{a_k}\left(a_{k-1} x_{k-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 x_0\right) \qquad n = 0$$

$x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$

$\{x_n\}, \{\bar{x}_n\} \in \Sigma \quad (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = (\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_{k-1})$

Si conseguimos K soluciones de (1) independientes

$\{\{x_n^{(1)}\}, \ldots, \{x_n^{(k)}\}\}$

serán base de Σ

Sistema fundamental de soluciones

$\{x_n\}$ cualquier solución de (1)

$$x_n = c_1 x_n^{(1)} + c_2 x_n^{(2)} + \cdots + c_k x_n^{(k)} \qquad \forall n$$

$a x_{n+1} + b x_n = 0 \qquad a \neq 0 \qquad$ Orden 1

$$x_{n+1} = -\frac{b}{a} x_n$$

$$\boxed{x_n = x_0\left(-\frac{b}{a}\right)^n \quad \text{solución general}}$$

¿Qué tiene que cumplir λ para que $\{\lambda^n\}$ sea una solución de (1)?

$$(1) \quad \boxed{a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0}$$

Sustituimos $x_n = \lambda^n$ en (1)

$$a_k \lambda^{n+k} + a_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \dots + a_1 \lambda^{n+1} + a_0 \lambda^n = 0$$

$$\underset{\neq 0}{\lambda^n} \underbrace{\left(a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \right)}_{p(\lambda)} = 0$$

$p(\lambda)$ polinomio característico

$$\boxed{\{\lambda^n\} \text{ es una sol de (1)} \iff \lambda \text{ es una raíz de } p(\lambda)}$$

[Sistema homogéneo
SCD ($|A| \neq 0$)]
$\Downarrow$
$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_k = 0$

① Raíces reales y distintas

Si $p(\lambda)$ tiene k raíces reales y distintas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

$\Rightarrow \{\lambda_1^n\}, \{\lambda_2^n\}, \dots \{\lambda_k^n\}$ soluciones de (1) l. i.

$$c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n = 0 \quad \forall n \overset{?}{\Longrightarrow} c_1 = 0, \dots c_k = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll}
n=0 & c_1 + c_2 + \dots + c_k = 0 \\
n=1 & c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + \dots + c_k \lambda_k = 0 \\
n=2 & c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2 + \dots + c_k \lambda_k^2 = 0 \\
\vdots & \qquad \vdots \\
n=k-1 & c_1 \lambda_1^{k-1} + c_2 \lambda_2^{k-1} + \dots + c_k \lambda_k^{k-1} = 0
\end{array}\right\} \text{S.E.L}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

$\lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$

det. Vandermonde

Ejemplo 1

$x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0 \quad (*)$

$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 \longrightarrow \lambda = -2$ y $\lambda = 3$ raíces

$\{(-2)^n\}$ y $\{3^n\}$ son soluciones de $(*)$ l.i

Solución general:

$$x_n = c_1 (-2)^n + c_2 \cdot 3^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 2

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ Fibonacci

$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Solución general

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

número de oro

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{x_0 = 1, \quad x_1 = 1}$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \longrightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ x_1 = 1 \longrightarrow c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} c_1 = 0.723606 \\ c_2 = 0.276393 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ c_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{array}\right.$$

② Raíces múltiples

$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

$\lambda = 2$ doble

$\{2^n\}$ una solución

¡Falta otra!

$\{n \cdot 2^n\}$

solución general:

$x_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 n 2^n$

$= (c_1 + c_2 n) \cdot 2^n$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

λ raíz doble de $p(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$

raíz de $p'(\lambda) = \underline{a_k k \lambda^{k-1} + a_{k-1}(k-1)\lambda^{k-2} + \dots + a_1}$

λ^n una sol de (1)

$\boxed{n\lambda^n}$ otra sol de (1)

$$a_k(n+k)\lambda^{n+k} + a_{k-1}(n+k-1)\lambda^{n+k-1} + \dots + a_1(n+1)\lambda^{n+1} + a_0\lambda^n =$$

$$= \lambda^n\Big(n\underbrace{(a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)}_{p(\lambda)\,=0} + \underbrace{a_k k\lambda^k + a_{k-1}(k-1)\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda}_{\lambda\cdot p'(\lambda)\,=0}\Big)$$

$= 0 \quad \Rightarrow \{n\lambda^n\}$ es otra solución

$\{\lambda^n\}$ y $\{n\lambda^n\}$ l.i. $\quad \Big[\; c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n = 0 \;\; \forall n$

$$\left.\begin{array}{ll} n=0 & c_1 = 0 \\ n=1 & c_1\lambda + c_2\lambda = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array}$$

> Si λ es una raíz de $p(\lambda)$ con multiplicidad $m \Rightarrow$
>
> $\Rightarrow \{\lambda^n\}, \{n\lambda^n\}, \{n^2\lambda^n\}, \dots, \{n^{m-1}\lambda^n\}$ son soluciones de (1) l.i.

Ejemplo

$$x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \longrightarrow \lambda = -1 \text{ triple}$$

Sistema fundamental de soluciones

$$\{ (-1)^n, \; n(-1)^n, \; n^2(-1)^n \}$$

Solución general:

$$x_n = c_1(-1)^n + c_2\, n(-1)^n + c_3\, n^2(-1)^n$$

$$= (c_1 + c_2 n + c_3 n^2)(-1)^n$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

③ Raíces complejes

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad 1+i$$

$$\theta = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\left\{ \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right),\ \sqrt{2}^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} n\right) \right\}$$

Solución general

$$x_n = c_1 \cdot 2^{n/2} \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) + c_2 \cdot 2^{n/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} n\right) =$$

$$= 2^{n/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} n\right)\right)$$

$\lambda = a+bi$ raíz de $p(\lambda)$ $\quad \lambda = a-bi$ también lo es

$(a+bi)^n \quad (a-bi)^n$ son soluciones de (1)

¡No son reales!

$$\frac{1}{2}\left((a+bi)^n + (a-bi)^n\right) = \operatorname{Re}\left((a+bi)^n\right) \qquad \text{solución de (1)}$$

$$\frac{1}{2i}\left((a+bi)^n - (a-bi)^n\right) = \operatorname{Im}\left((a+bi)^n\right) \qquad \text{" " "}$$

$$a+bi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

r = módulo
θ = argumento

$$(a+bi)^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

$\{ r^n \cos(n\theta),\ r^n \operatorname{sen}(n\theta) \}$ soluciones reales de (1) y son l. i.

Sucesiones y Operador Shift.

Espacio de Sucesiones

$$S := \{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \}$$ sucesiones reales.

$S^{\mathbb{C}}$ sucesiones complejas

Operador Shift $T : S \to S$

$$Tx(n) = x(n+1)$$

$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$\pi_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$$

$\pi_\lambda(n) = \lambda^n$ <u>Nota</u>: ·) $0^0 = 1$.

·) $T\pi_\lambda = \lambda \pi_\lambda$

·) $\operatorname{Ker} T = \mathbb{R}\, \pi_0$ $\pi_0 = (1, 0, 0, \dots)$

·) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ $\pi_\lambda \in S^{\mathbb{C}}$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, es un valor propio de T, π_λ es un vector propio.

Algebra generada por un Operador. (Anillo)

Notación

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(x)$ = anillo de Polinomios en x.

El producto es el "producto formal"

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(T)$ = Anillo generado por T

$$\left\{ a_0 I + a_1 T^2 + \dots + a_k T^k : \ a_0, a_1, \dots a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

El producto es la composición.

<u>Nota</u>

$$T^k = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{k \text{ veces}}$$

$$T^k T^p = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{k \text{ veces}} \circ \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{p \text{ veces}}$$

$$= \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{k+p \text{ veces}} = T^p \circ T^k$$

Como los generadores conmutan el anillo es conmutativo.

La aplicación

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(x) \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(T)$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k \longrightarrow L_p = a_0 I + a_1 T + \dots + a_k T^k$$

Es un morfismo de Anillos.

Lema 1 $\quad L_p \Pi_\lambda = P(\lambda)\Pi_\lambda$

La ecuación lineal de orden k, planteamiento funcional.

Si tomamos la ecuación

$$\circledast \quad a_k x(n+k) + a_{k-1} x(n+k-1) + \dots\dots + a_1 x(n+1) + a_0 x(n) = b(n)$$

asociado al polinomio característico

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

entonces la ecuación $\circledast$ se escribe como

$$L_p x = b$$

donde L_p es el operador asociado a P. (Pag 2)

Sea $\sigma = \{\text{Raices de } P\}$, entonces

$$\Sigma = \{\text{Conjunto de las soluciones de la homogenea}\}$$

$$= \operatorname{Ker} L.$$

Lema (Caso no resonante)

Sea $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\sigma$ entonces la ecuación

$L x = \Pi_\lambda$ tiene una solución particular

de la forma $c\Pi_\lambda$

<u>Dem</u> Usando el Lema 1 (Pag 3)

$$L_p \, c\Pi_\lambda = c\, P(\lambda)\, \Pi_\lambda$$

y usando que $\lambda \notin \sigma$ $P(\lambda) \neq 0$ y por tanto puedo tomar $c = \frac{1}{P(\lambda)}$.

<u>Aplicación</u> Calcula todas las soluciones de

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 2^n + 3^n. \qquad (*1)$$

vamos primero a obtener una solución particular de

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 2^n \qquad (*2)$$

y de

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 3^n \qquad (*3)$$

Sumando las soluciones particulares de $(*2)$ y $(*3)$ obtenemos una solución particular de $(*1)$.

Para resolver $(*2)$ observamos que tenemos

$$Lx = \Pi_2$$

donde L es el operador asociado a $P(x) = x^2 + 2x + 1$

y como $\sigma = \{-1\}$ es no resonante.

Busco por tanto una solución del tipo

$x = c\,2^n$ de donde usando (∗2)

$$c\,2^{n+2} + 2c\,2^{n+1} + c\,2^n = 2^n$$

y portanto $9c = 1$ y tenemos una solución

particular

$$x_n = \frac{1}{9} 2^n$$

Si usamos (∗3) en lugar de (∗2) obtenemos

La solución particular

$$x_n = \frac{1}{16} 3^n$$

De donde la solución particular de (∗1)

$$x_n = \frac{1}{9} 2^n + \frac{1}{16} 3^n$$

de aqui añadiendo las de la homogenea $(-1)^n$

$n(-1)^n$

queda

$$\boxed{x_n = \frac{1}{9} 2^n + \frac{1}{16} 3^n + c_1 (-1)^n + c_2 n (-1)^n}$$

volviendo al caso general $\circledast$ en pag 3

se obtiene lo siguiente

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \setminus \sigma$ y b una

combinación lineal de $\pi_{\lambda_1}, \pi_{\lambda_2}, \dots, \pi_{\lambda_r}$

entonces

$$Lx = b$$

tiene una solución particular que es también

una combinación lineal de $\pi_{\lambda_1}, \pi_{\lambda_2}, \dots, \pi_{\lambda_r}$.

Estudio del caso resonante.

Si $\lambda \in \sigma$, $L\pi_\lambda = 0$ y por tanto π_λ es solución de la correspondiente homogénea.

Es por tanto que hay que tomar algo diferente para resolver

$$Lx = \pi_\lambda .$$

Sea $D\pi_\lambda(n) = n\lambda^{n-1}$ (derivada) se tiene entonces:

Lema

$$L D\pi_\lambda = P'(\lambda)\pi_\lambda + P(\lambda) D\pi_\lambda \quad (*4)$$

Nota Esta expresión se obtiene al derivar con respecto a λ.

consecuencia: Si $\lambda \in \sigma \cap \mathbb{R}$ es una raiz simple una solución particular de

$$Lx = \pi_\lambda$$

es de la forma $x = c\, D\pi_\lambda$.

Nota: $D\Pi_\lambda(n) = n\lambda^{n-1}$ y $n\lambda^n$ son colineales

$$\lambda(n\lambda^{n-1}) = n\lambda^n$$

portanto busca una solución de la forma $cn\lambda^{n-1}$ y $cn\lambda^n$ es equivalente.

Aplicación: Resolver

$$x_{n+1} = 2x_n + 2^n$$

Ordenamos $x_{n+1} - 2x_n = 2^n$ $\quad P(\lambda) = \lambda - 2 \quad \sigma = \{2\}$

$$Lx = \Pi_2$$

~~Como~~ y portanto es un caso resonante puedo buscar una solución particular de la forma

$cn2^{n-1}$ o bien $cn2^n$.

$$c(n+1)2^{\cancel{n}+1} = 2cn\cancel{2^n} + \cancel{2^n}$$

$$2c = 1$$

y portanto

$$x_n = \frac{1}{2} n 2^n + c_1 2^n.$$

Consecuencia 2 de (*4). (Caso no resonante)

$$L D\Pi_\lambda = P'(\lambda)\Pi_\lambda + P(\lambda) D\Pi_\lambda$$

Si $P(\lambda) \neq 0$ entonces

$$x = \frac{1}{P(\lambda)} D\Pi_\lambda$$

resuelve $\quad Lx = \frac{P'(\lambda)}{P(\lambda)} \Pi_\lambda + D\Pi_\lambda$

Por tanto si pretendemos resolver

$$Lx = D\Pi_\lambda = \underbrace{D\Pi_\lambda - \frac{P'(\lambda)}{P(\lambda)}\Pi_\lambda}_{\text{solución obtenida de } D\Pi_\lambda} + \underbrace{\frac{P'(\lambda)}{P(\lambda)}\Pi_\lambda}_{\text{solución obtenida de } \Pi_\lambda}$$

luego si $\lambda \notin \sigma$ y $Lx =$ combinación lineal de Π_λ y $D\Pi_\lambda$

Tenemos una solución particular que es combinación lineal de π_λ y $D\pi_\lambda$.

$$E_\lambda^1 = \langle \pi_\lambda, D\pi_\lambda \rangle = \{(a_0 + a_1 n)\lambda^n\}$$

"Si $\lambda \notin \sigma$ y $b \in E_\lambda^1$ existe una solución en E_λ^1"

Aplicación: Suma la serie finita

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}.$$

Dem Sea $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$ entonces

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} + x_n, \quad x_0 = 0$$

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\, n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ y está en $E^1_{1/2}$

luego hay una solución en $E^1_{1/2}$ pues $\frac{1}{2} \notin \sigma = \{1\}$.

Tomo $\quad c_1 n\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = c_1 \frac{n}{2^n} + c_2 \frac{1}{2^n}$

y me queda.

$$c_1 \frac{n+1}{2^{n+1}} + c_2 \frac{1}{2^{n+1}} = c_1 \frac{n}{\cancel{2^n}} + c_2 \frac{1}{\cancel{2^n}} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$c_1 \frac{(n+1)}{2} + \frac{c_2}{2} = c_1 n + c_2 + n + 1$$

$$-c_1 \frac{n}{2} - \frac{c_2}{2} = n + 1$$

luego $\quad c_1 = -2 \quad , \quad c_2 = -2 \quad$ y por tanto

$$x_n = -2\frac{n}{2^n} - 2\frac{1}{2^n} + C'$$

solución de la homogenea.

$$x_0 = -2 + C' \quad y \quad C = 2$$

$$\boxed{x_n = -2\frac{n}{2^n} - 2\frac{1}{2^n} + 2}$$

Caso general

$$D^k \pi_\lambda(n) = n(n-1) \quad (n-k+1)\lambda^{n-k}$$

$$E_\lambda^k = \langle \pi_\lambda, D\pi_\lambda, \dots, D^k\pi_\lambda \rangle$$

$$= \left\{ Q(\lambda)\lambda^n : \begin{array}{l} \text{donde } Q \text{ polinomio} \\ \text{de grado} \leq k \end{array} \right\}$$

Caso no resonante: Si $\lambda \notin \sigma \cap \mathbb{R}$ y $b \in E_\lambda^k$ entonces existe una solución particular en E_λ^k.

Caso resonante: Si $\lambda \in \sigma$ y ν es su multiplicidad si $b \in E_\lambda^k$ entonces existe una solución particular en $E_\lambda^{k+\nu}$.

Teoría general de Coeficientes indeterminados.

Aplicación Buscamos una solución particular de

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = n(1+3^n) = n + n3^n$$

En este caso

$$P(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$$

por tanto $\lambda=1$ es doble ($\nu=2$)

Entonces $n\in E_1^1$ Resonante E_1^3

$$n3^n\in E_3^1 \text{ No resonante } E_3^1$$

En el primer caso tomo an^3+bn^2+cn+d

En el segundo caso $(en+f)3^n$

y por tanto Buscaríamos una solución en

$$x_p=an^3+bn^2+cn+d+(en+f)3^n$$

Nota Observar que $cn+d$ esta en las soluciones de la homogénea luego el sistema será compatible indeterminado o si se quiere partir de uno mas simple tomar $c=0, d=0$.

Aplicación: ¿Donde habría que buscar según esta teoría una solución particular de

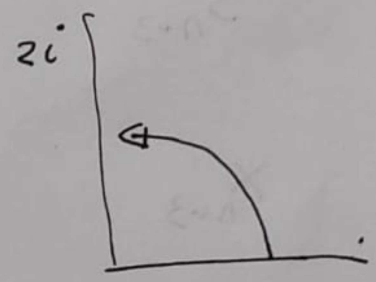
$$x_{n+2} + 4x_n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + 2^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

entonces

$$\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 1^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \in \overset{\circ}{E}_{1,\frac{\pi}{4}}$$

y se corresponde con $\lambda = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$



$$2^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \in \overset{\circ}{E}_{2,\frac{\pi}{2}}$$

y se corresponde con $\lambda = 2i$

El polinomio tiene por raices $\lambda^2 + 4 = 0$

$$\lambda = \pm 2i$$

y por tanto el segundo es resonante.

La solución habría que buscarla en

$$x_p(n) = c_1 \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{4}\right) +$$

$$\left(c_3 n + c_4\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \left(c_5 + n\, c_6\right)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Al igual que antes c_4 y c_5 se pueden tomar cero simplificando la ecuación.