Modelo Samuelson

Sea Y la renta nacional

I la inversión

C el consumo

Entonces
$$C_n = \alpha Y_{n-1},$$
$$I_n = \beta(Y_{n-1} - Y_{n-2}),$$

y para modificar la evolución introducimos el gasto público G (en principio constante)

$$Y_n = C_n + I_n + G$$

quedando
$$\boxed{Y_{n+2} = \alpha Y_{n+1} + \beta(Y_{n+1} - Y_n) + G,}$$

$$Y_{n+2} - (\alpha+\beta) Y_{n+1} + \beta Y_n = G,$$

Equilibrio económico

Si buscamos Y^* una solución estacionaria

obtenemos

$$(1-\alpha) Y^* = G.$$

•) si $\alpha = 1$ (Gastamos integramente la renta) y

el equilibrio economico no existe.

•) si $\alpha > 1$ entonces el equilibrio economico no tiene sentido pues es negativo

Vamos a suponer $0 < \alpha < 1$. Entonces

$$Y^* = \frac{1}{1-\alpha} G, \quad C^* = \frac{\alpha}{1-\alpha} G, \quad I^* = 0.$$

Es decir el gasto publico se reparte entre la renta y el consumo.

Equilibrio economico Estable.

Se dice que el modelo es estable si independientemente de los datos iniciales

$$Y_n \to Y^*$$

$$C_n \to C^*$$

$$I_n \to I^*.$$

Lema Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ las raices de

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + B = 0.$$

Entonces el modelo es estable si y solo si ambas raices tienen módulo menor que 1.

Dem ⊙ Si λ_1 y λ_2 son reales y distintos

$$I_n = I^* + c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n .$$

$$\text{Estable} \Longleftrightarrow \begin{cases} |\lambda_1| < 1 \\ |\lambda_2| < 1 \end{cases}$$

⊙ Si $\lambda_1 = \lambda_2$ entonces

$$I_n = I^* + (c_1 + n c_2) \lambda_1^n$$

si $|\lambda_1| = 1$ o $|\lambda_1| > 1$, tomo $c_2 = 0$

y no es estable.

si $|\lambda_1| < 1$ entonces

Lema 1 Sea $\alpha \in (0,1)$ entonces

$$n \alpha^n \to 0.$$

⊙ Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y son propiamente complejos

$\lambda_1 = \alpha + i w$, $\lambda_2 = \alpha - i w$ y por tanto

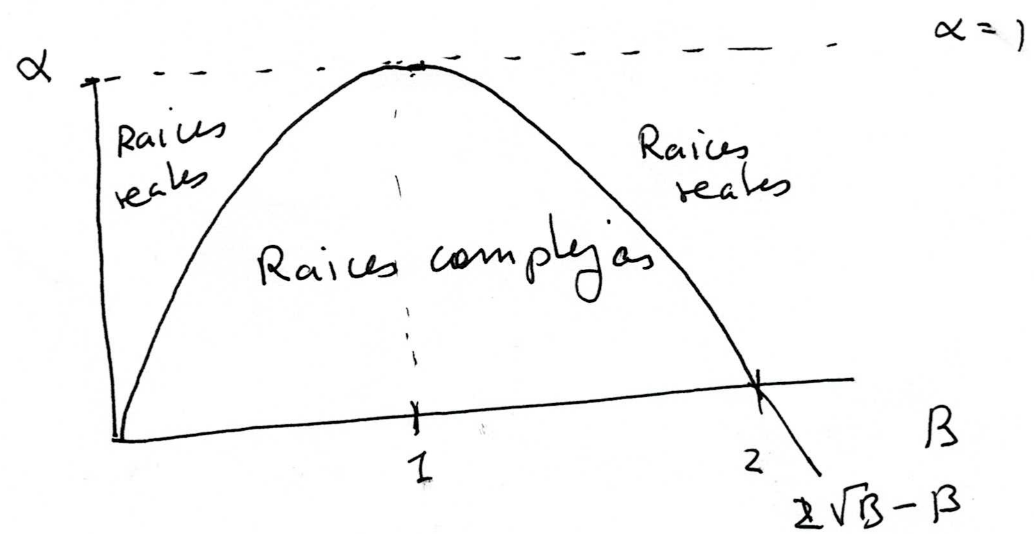
$$I_n = I^* + c_1 \alpha^n \cos(nw) + c_2 \alpha^n \operatorname{sen}(nw),$$

y es similar.

Representacion gráfica del espacio de parámetros.

Sea $\Delta = (\alpha+\beta)^2 - 4\beta$ entonces la existencia de raices reales o complejas depende del signo de Δ.

En principio $\Delta = 0 \iff \alpha = 2\sqrt{\beta} - \beta$



•) Si las raices son reales

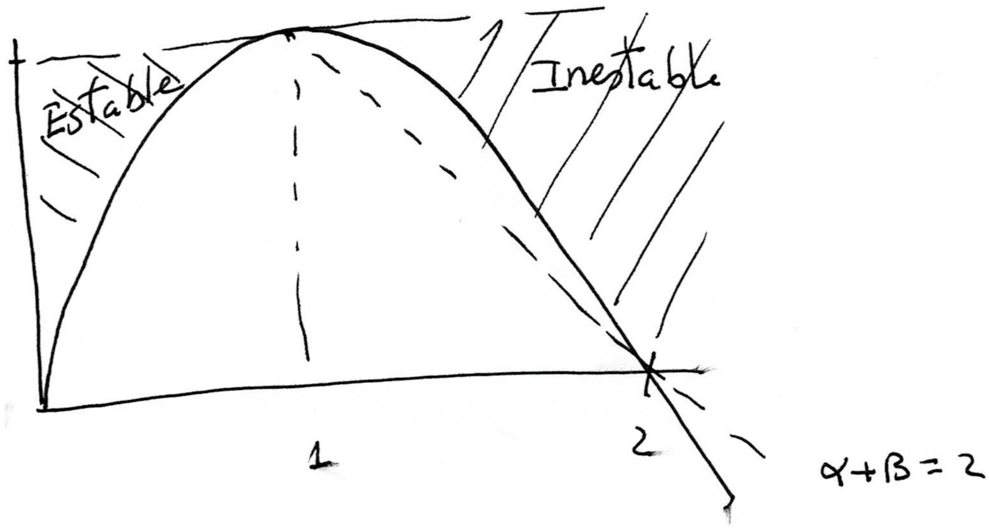
$$\frac{\alpha+\beta \pm \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\beta}}{2}$$

ambas son positivas portanto estable si

$$\alpha+\beta + \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\beta} < 2$$

$$\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\beta} < 2-(\alpha+\beta) \longrightarrow \alpha+\beta<2$$

y elevando al cuadrado $\alpha<1$ (que se tiene)



c) Si las raices son complejas (propiamente)

$$\frac{\alpha+\beta \pm i\sqrt{4\beta-(\alpha+\beta)^2}}{2}$$

$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \beta$ por tanto estable

si $\beta<1$.