Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 20/21)

Ejercicios tema 2

1 Encuentra ecuaciones en diferencias homogéneas cuyas soluciones sean.

a) $2^{n-1} - 5^{n+1}$.

b) $3\cos(\frac{n\pi}{2}) - \sin(\frac{n\pi}{2})$.

c) $(n+2)5^n \sin(\frac{n\pi}{4})$.

d) $(c_1 + c_2 n + c_3 n^2)7^n$.

e) $1 + 3n - 5n^2 + 6n^3$.

2 Calcula la solución de la ecuación

$$x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$$

con condiciones iniciales $x_0 = 1, x_1 = 0$.

3 Un productor fija el precio de su producto haciendo la media de los precios de los dos años anteriores. Si los precios de los dos primeros años son p_0, p_1, calcula el precio a largo plazo.

4 *a*) Dado un número real α, determina una expresión para la sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ que verifica

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_{n+1} + x_n, \quad n \geqslant 0 \\ x_0 &= 1, \quad x_1 = \alpha \end{aligned}$$

b) Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n\geqslant 0}$ definida por

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{1+y_n}, \quad n \geqslant 0, \\ y_0 &= 1. \end{aligned}$$

Demuestra que, para todo $n \geqslant 0$, puede escribirse

$$y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}},$$

donde $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ es una de las sucesiones del apartado (a).

c) Utiliza el apartado (a), para obtener el comportamiento asintótico de la sucesión $\{y_n\}_{n\geqslant 0}$.

5 A partir de la solución de una EDL de orden 2 adecuada, determina en función de a el valor del determinante tridiagonal siguiente:

$$D_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$$

6 Considera la ecuación en diferencias $y_{n+2} + p_1 y_{n+1} + p_2 y_n = g(n)$, donde $p_1^2 < 4p_2$ y $0 < p_2 < 1$. Demuestra que si $\{y_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ e $\{y_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ son dos soluciones de la ecuación, entonces $y_n^{(1)} - y_n^{(2)} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

7 Consideremos la ecuación en diferencias de segundo orden

$$x_{n+2} + p_1\, x_{n+1} + p_0\, x_n = 0. \tag{1}$$

a) Demuestra que todas las soluciones de la ecuación (1) convergen hacia 0 si y sólo si se verifica $|p_1| < 1+p_0 < 2$.

b) Utiliza la condición del apartado anterior para estudiar el comportamiento, en función del parámetro $\mu > 0$, de las soluciones de la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} - x_{n+1} + \frac{1-\mu}{\mu}\, x_n = 0.$$

8 La sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0} = \{1, 2, 5, 12, 29, \ldots\}$ es solución de cierta ecuación en diferencias lineal homogénea de orden 2 con coeficientes constantes.

a) Deduce dicha ecuación en diferencias.

b) Da una expresión de la solución general de la ecuación en diferencias.

c) Deduce de forma razonada el valor, si existe, de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

9 Sea $\{x_n\}$ solución de $x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$. Se define la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ con $s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$. Encuentra una ecuación de tercer orden $s_{n+3} + A_2 s_{n+2} + A_1 s_{n+1} + A_0 s_n = 0$ que sea satisfecha por $\{s_n\}$ ¿qué relación hay entre las raíces de los dos polinomios característicos?

a) Calcula

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

si $x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 0, \quad x_0 = x_1 = 1$

b) Encuentra una fórmula para las medias aritméticas de los números de Fibonacci,

$$\bar{f}_n = \frac{(f_0 + f_1 + \ldots + f_n)}{n+1}.$$

Calcula $\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{f}_n}{f_n}$.

10 Se parte de dos números a y b y se calcula su media aritmética m. A continuación se calcula la media aritmética de b y m, y así sucesivamente. Por ejemplo,

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{13}{8}, \ldots$$

Demuestra que la sucesión resultante es convergente y expresa su límite en función de a y b. ¿Bajo qué condiciones sobre a y b se obtiene una sucesión monótona?

11 Dados dos números reales x_0, x_1, se construye una sucesión $\{x_n\}$ donde el término general se obtiene restando los dos números anteriores, es decir, $x_2 = x_1 - x_0, x_3 = x_2 - x_1$ y así sucesivamente.

a) Escribe la ecuación en diferencias y da una expresión de la solución general.

b) Calcula la solución particular con condiciones iniciales $x_0 = 2, x_1 = 1$ y comprueba que es periódica, calculando el periodo.

c) Para una ley de recurrencia general a dos pasos $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$, con $a, b \in \mathbb{R}$, demuestra que la existencia de una solución periódica de periodo mínimo $N = 3$ implica que todas las soluciones son periódicas del mismo periodo. ¿Será cierta esta propiedad si $N = 2$?

12 *a*) Encuentra una ecuación en diferencias del tipo

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0\,, \tag{2}$$

que tenga una solución no nula $\{x_n\}_n$ que cumpla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 2\,.$$

b) Encuentra otra ecuación del tipo (2) y que tenga una solución $\{x_n\}_n$ que sea acotada pero no convergente.

13 Dada la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} - \alpha(1+\beta)x_{n+1} + \alpha\beta x_n = 1, \qquad \alpha, \beta > 0$$

a) Determina la solución de equilibrio.

b) Determina condiciones sobre α y β, para que las soluciones de la ecuación converjan a la solución de equilibrio.

c) Determina condiciones sobre α y β, para que todas las soluciones de la ecuación oscilen en torno a la solución de equilibrio pero no converjan a ella.

14 Calcula las condiciones que deben cumplir los parámetros reales a y b para que las sumas parciales de las soluciones de la ecuación

$$x_{n+2} + (a-b)x_{n+1} + (a+b)x_n = 0$$

sean convergentes. Representa gráficamente tales condiciones en el plano de parámetros (a, b).

Nota: Las sumas parciales de una sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ se definen como $S_n = x_0 + \ldots + x_n$.

15 En este ejercicio consideramos la ecuación en diferencias *no autónoma*

$$y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = n\,, \qquad n \geq 0\,. \tag{3}$$

a) Encuentra una solución particular del tipo $y_n^* = A + Bn$.

b) Demuestra que la sucesión $\{y_n\}$ es una solución de (3) si y sólo $z_n = y_n - y_n^*$ resuelve la ecuación homogénea

$$z_{n+2} - z_{n+1} + z_n = 0\,, \qquad\qquad n \geq 0\,.$$

c) Encuentra la solución $\{y_n\}$ de (3) que cumple $y_0 = 0,\ y_1 = 1/2$.

16 Se considera la ecuación lineal en diferencias de orden tres,

$$4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 1 \tag{4}$$

a) ¿Admite la ecuación (4) algún punto de equilibrio o solución constante?

b) Resuelve (4) dando una expresión del término general de las soluciones reales.

c) Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{1}{3}$, para cualquier $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ solución de la equación (4).

17 Se consideran las funciones de oferta y demanda

$$O(p) = a + b\,p, \quad D(p) = c - d\,p.$$

Se modifica el modelo de la telaraña de acuerdo a la ley (Goodwin, 1941)

$$O(p_n^e) = D(p_n)$$

donde p_n^e es el precio esperado para el año n y viene dado por

$$p_n^e = p_{n-1} + \rho(p_{n-1} - p_{n-2}),$$

con $\rho > 0$ un parámetro (si $\rho = 0$ se vuelve al modelo de la telaraña).

a) Demuestra que p_n cumple una ecuación del tipo

$$p_{n+2} + a_1 p_{n+1} + a_0 p_n = k$$

que tiene como solución constante al precio de equilibrio.

b) Se supone $b = d = 1$. Calcula las soluciones y describe el comportamiento de los precios a largo plazo. ¿Son las predicciones idénticas a las que produciría el modelo simple de la telaraña?

18 Consideremos el modelo de Samuelson modificado

$$\begin{array}{rcl} Y_n & = & C_n + I_n \\ C_n & = & b\,I_{n-1} \\ I_n & = & C_n - k\,C_{n-1} + G, \end{array}$$

donde Y_n, C_n, I_n son la renta, consumo e inversión anual respectivamente, G es el gasto público, que se supone constante y $0 < b < 1$, $k > 0$. Escribe la ley de recurrencia que cumplen las inversiones anuales I_n y calcula condiciones sobre los parámetros k, b para que haya convergencia.

19 Consideramos el sistema de Samuelson modificado

$$\begin{array}{rcl} Y_n & = & \alpha C_n + \beta I_n \\ C_n & = & Y_{n-1} \\ I_n & = & k(C_n - C_{n-1}) + G, \end{array}$$

donde Y_n, C_n, I_n son la renta, consumo e inversión anual respectivamente, G es el gasto público, que se supone constante. Los parámetros $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ están ligados a impuestos al consumo y la inversión que se destinan a ayuda exterior (los números $1 - \alpha$ y $1 - \beta$ representan las partes proporcionales de consumo e inversión destinadas a dicha ayuda). Calcula las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros para que haya convergencia a un único equilibrio.