Modelos matemáticos II: material de apoyo

Juan Calvo, Departamento de Matemática Aplicada

Universidad de Granada

Curso 2022-2023

- **La braquistócrona.** Curva que minimiza el tiempo que tarda un movil en deslizarse de un extremo a otro de la mísma bajo la acción de la gravedad (sin rozamiento).
- **La catenaria.** Curva que adopta un cable colgante sujeto por sus dos extremos bajo la acción de la gravedad.
- **Líneas geodésicas.** Curvas de mínima longitud que unen dos puntos dados sobre una superficie.
- **Superficies de revolución de área mínima.** Curva plana con extremos fijos que genera la superficie de revolución con menor área posible.
- **Problema isoperimétrico.** Determinar la figura plana con mayor área cuyo borde tiene una longitud fijada de antemano.

Teorema de derivación bajo el signo integral

[2]Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:

(i) Para todo $t \in I$, la función $y \mapsto f(t,y)$ es integrable en $\mathbb{R}$.
(ii) Para todo $y \in \mathbb{R}$, la función $t \mapsto f(t,y)$ es derivable en I.
(iii) Existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable tal que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\right| \leq g(y) \quad \forall t \in I\,, \forall y \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)\,dy$ es derivable en I y

$$F'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,y)\,dy \quad \forall t \in I\,.$$

(López-Soler, apuntes de la asignatura)

Utilizamos este resultado en el cálculo de la primera variación de un funcional.

Caso particular de la ecuación de Euler-Lagrange

Si F no depende de x,

$$\frac{d}{dx}(F_p) = \frac{d}{dx}(F_p(y(x), y'(x)) = F_{py}y' + F_{pp}y''$$

Multiplicando la ecuación de Euler-Lagrange por y', resulta

$$\frac{d}{dx}[F(y, y') - y'F_p(y, y')] = 0.$$

$$F(y(x), y'(x)) - y'(x)F_p(y(x), y'(x)) = C \in \mathbb{R}$$

Consideramos todas las curvas planas que unen los puntos $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$ con $x_0 < x_1$, que se expresan como grafos $x \mapsto (x, y(x))$.

Área de la superficie de revolución generada al rotar la curva en torno al eje x:

$$A[y] = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \,.$$

Obviando el factor 2π,

$$F(x, y, p) = y\sqrt{1 + p^2} \in C^2([x_0, x_1] \times \mathbb{R}^2), \quad F_p = \frac{yp}{\sqrt{1 + p^2}} \,.$$

Superficies de revolución de área mínima

La ecuación de Euler-Lagrange

$$\sqrt{1+(y'(x))^2} - \frac{d}{dx}\left[\frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}\right] = 0$$

se puede reducir a

$$\frac{y'(x)\sqrt{K_1}}{\sqrt{y^2(x)-K_1}} = 1, \quad K_1 > 0\,.$$

$$y(x) = \sqrt{K_1}\cosh(z(x)) \implies \sqrt{K_1}z'(x) = 1,$$

$$x - x_0 = \int_{x_0}^{x} \sqrt{K_1}z'(s)\,ds = \sqrt{K_1}\left[\operatorname{arch}\left(\frac{y(x)}{\sqrt{K_1}}\right) - \operatorname{arch}\left(\frac{y_0}{\sqrt{K_1}}\right)\right]$$

$$y(x) = \sqrt{K_1}\cosh\left(\tfrac{x-x_0}{\sqrt{K_1}} + \operatorname{arch}\left(\tfrac{y_0}{\sqrt{K_1}}\right)\right),$$

ajustar K_1 para cumplir $y(x_1) = y_1$.

La formulación alternativa de la ecuación de Euler-Lagrange

$$y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2} - \frac{y(x)(y'(x))^2}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} = C$$

se reescribe como $y(x) = K_1\sqrt{1+(y'(x))^2}, \quad K_1 \in \mathbb{R}$. Admite soluciones $y(x) = cte.$, validas para $y_0 = y_1$.

Otros casos: usamos $t \mapsto (x(t), \tilde{y}(t))$, $\tilde{y}(t) = y(x(t))$; por tanto

$$\tilde{y}(t) = K_1\sqrt{1+\left(\frac{\frac{d\tilde{y}}{dt}(t)}{\frac{dx}{dt}(t)}\right)^2}.$$

Ponemos $\displaystyle \frac{\frac{d\tilde{y}}{dt}(t)}{\frac{dx}{dt}(t)} = \sinh t \implies \tilde{y}(t) = K_1 \cosh t$. Además,

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{\frac{d\tilde{y}}{dt}(t)}{\sinh t} = K_1 \implies x(t) = K_1 t + x_0.$$

Ejemplo de funcional que no alcanza su mínimo

$$\mathcal{F}[y] = \int_{-1}^{1} ((y'(t))^2 - 1)^2 \, dt \quad (\geq 0)$$

definido sobre

$$\mathcal{D} = \{ y \in C^1([-1,1]) / y(-1) = y(1) = 1 \} .$$

Tomando aproximaciones al valor absoluto, deducimos que $\inf_{\mathcal{D}} \mathcal{F} = 0$. Pero el ínfimo no se alcanza en $\mathcal{D}$:
$\mathcal{F}[y] = 0 \implies (y'(t))^2 = 1 \ \forall t \in [-1,1]$. Se obtiene entonces

$$y(t) = t + cte \quad \text{ó} \quad y(t) = -t + cte,$$

que no pertenecen a $\mathcal{D}$.

Teorema de Weierstrass

Sea $K \subset \mathbb{R}^d$ compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f alcanza su mínimo.

Se define $\alpha := \inf_K f \, (> -\infty)$.

Se toma $\{x_n\} \subset K$ tal que $\{f(x_n)\} \searrow \alpha$ (sucesión minimizante).

Por la compacidad, existe $\bar{x} \in K$ y una parcial $\{x_{n_k}\} \to \bar{x}$.

Por la continuidad, $\{f(x_{n_k})\} \to f(\bar{x}) = \alpha$.

El método directo del cálculo de variaciones

Dado X un espacio topológico IAN, diremos que $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferior (l.s.c.) si, para toda $\{x_n\} \subset X$ tal que $x_n \to x$, se cumple que $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$.

Teorema de Weierstrass, generalización

Sea X espacio topológico IAN y compacto. Sea $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R}$ semicontinuo inferior. Entonces $\mathcal{F}$ alcanza su mínimo.

Se pone $\alpha := \inf_X \mathcal{F} \in \mathbb{R}$ si $\mathcal{F}$ está acotado inferiormente (en otro caso $\alpha := -\infty$). Se toma una sucesión minimizante $\{x_n\} \subset X$, $\mathcal{F}(x_n) \searrow \alpha$. Por la compacidad, existe $\{x_{n_k}\} \to \bar{x}$ tal que $\mathcal{F}(x_{n_k}) \to \alpha$. Entonces

$$\alpha = \lim \mathcal{F}(x_{n_k}) = \liminf \mathcal{F}(x_{n_k}) \geq \mathcal{F}(\bar{x}) > -\infty.$$

Por tanto $\mathcal{F}$ está acotado inferiormente en X, su ínfimo es un mínimo y se alcanza en $\bar{x}$.

Grafos de área mínima

Superficie descrita como grafo: $(x, y) \mapsto (x, y, u(x, y))$, donde $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio.

Borde fijado: $u_{|\partial\Omega} = \varphi(x, y) \in \mathbb{R}$ dada.

Área asociada definida para $\mathcal{D} = \{u \in C^1(\Omega) / u_{|\partial\Omega} = \varphi\}$,

$$\mathcal{A}[u] = \int_\Omega \sqrt{1 + (u_x)^2 + (u_y)^2}\, dxdy$$

(aquí $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, etc)

La ecuación de Euler-Lagrange se reescribe como

$$u_{xx}(1 + u_y^2) + u_{yy}(1 + u_x^2) - 2u_x u_y u_{xy} = 0\,.$$

Desplazamientos de una membrana elástica

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio acotado, representa la membrana en reposo.

$u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ desplazamiento vertical bajo perturbaciones.

- Densidad de masa de la membrana $\rho(x) > 0$, $x \in \Omega$
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fuerza vertical aplicada
- Tensión de la membrana $\tau(x)$, $x \in \Omega$, tiende a restituirla al equilibrio. Trabajo proporcional a la variación de área.
- El medio opone una resistencia al movimiento proporcional a la magnitud del desplazamiento. La constante de proporcionalidad es el coeficiente de elasticidad $a(x)$, $x \in \Omega$.

Trabajamos en $\mathcal{D} = \{u \in C^1([0, T] \times \Omega)/u(t, \cdot)_{|\partial\Omega} = 0\}$.

Optimización con restricciones en dimensión finita

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Sean las $m < d$ ligaduras $\phi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$.

Condición de transversalidad: $\operatorname{Ran} [\partial_{x_j} \phi_i(x)]_{i,j} = m$.

Multiplicadores de Lagrange

Sean $f, \phi_1, \ldots, \phi_n$ funciones de clase C^1. Definimos

$$S := \{x \in \Omega / \phi_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m\} .$$

Si x^0 es un extremo de f en S, y si se cumple la condición de transversalidad en x^0, entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla \left(f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i \right)_{|x^0} = 0 .$$

Optimización con ligaduras de tipo geodésico

Consideramos $I = [x_0, x_1]$, $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}^d$.
Sea $\mathcal{F}[\tilde{y}] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))\, dx$.
Sean $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^d$ dominios, $F \in C^2(I \times D_1 \times D_2)$.
Sean las $m < d$ ligaduras $\Phi_i \in C^1(I \times D_1)$, $i = 1, \ldots, m$.

Dados $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^d$, se considera $\mathcal{F}$ definido sobre

$$\begin{aligned} \mathcal{D} := \{\tilde{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^d) / \tilde{y}(x_0) = y_0,\ \tilde{y}(x_1) = y_1, \\ \Phi_i(x, \tilde{y}(x)) = 0, i = 1, \ldots, m\}\ . \end{aligned}$$

Condición de transversalidad: Ran $[\partial_{y_j} \Phi_i(\tilde{y})]_{i,j} = m$ en I.

Sea $\tilde{y} \in \mathcal{D} \cap C^2(I, \mathbb{R}^d)$ un extremo relativo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ que cumple la condición de transversalidad. Entonces existen $\lambda_i \in C^1(I, \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, m$ tales que $\tilde{y}$ es un extremal del funcional determinado por $F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i \Phi_i$.

El resultado se extiende a ligaduras que dependan de $\tilde{y}'$.

Péndulo con un extremo fijo

Masa m, longitud 1, barra rígida anclada al origen.

Trayectoria parametrizada: $t \mapsto (x(t), y(t))$

Acción $\mathcal{A}[x,y] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2}[(x'(t))^2 + (y'(t))^2] - m\,g\,y(t)\,dt$ definida sobre $\mathcal{D} = \{(x,y) \in C^1([t_0,t_1])^2 / x^2(t) + y^2(t) = 1\}$

El cambio $x(t) = \sin(\theta(t)),\ y(t) = \cos(\theta(t))$ lleva a

$$\begin{cases} m\theta'' \cos\theta - m(\theta')^2 \sin\theta = 2\lambda(t)\sin\theta \\ -m\theta'' \sin\theta - m(\theta')^2\cos\theta = 2\lambda(t)\cos\theta + mg \end{cases}$$

La ecuación del péndulo: $\theta'' + g\sin\theta = 0$

Optimización con ligaduras de tipo isoperimétrico

Consideramos $I = [x_0, x_1]$, $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}^d$.
Sea $\mathcal{F}[\tilde{y}] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))\, dx$.
Sean $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^d$ dominios, $F \in C^2(I \times D_1 \times D_2)$.
Sean las m ligaduras $\Phi_i \in C^1(I \times D_1 \times D_2)$, $i = 1, \ldots, m$.

Dados $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^d$, dados $l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{R}$, se considera $\mathcal{F}$ sobre

$$\mathcal{D} := \Big\{ \tilde{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^d) / \tilde{y}(x_0) = y_0,\ \tilde{y}(x_1) = y_1,\\ \int_I \Phi_i(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))\, dx = l_i, i = 1, \ldots, m \Big\}\ .$$

Sea $\tilde{y} \in \mathcal{D} \cap C^2(I, \mathbb{R}^d)$ un extremo relativo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$.
Entonces existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ tales que $\tilde{y}$ es un extremal del funcional determinado por $F^* = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i \Phi_i$.

El problema isoperimétrico (o de Dido)

Curvas cerradas parametrizadas, $s \in [0,1]$, $s \mapsto (x(s), y(s))$ de clase C^1, con condiciones periódicas:

$$x(0) = x(1),\ y(0) = y(1), \quad x'(0) = x'(1),\ y'(0) = y'(1) \quad (pbc)$$

Funcional área $\mathcal{A}[x,y] = \frac{1}{2}\int_0^1 x(s)y'(s) - x'(s)y(s)\, ds$

a maximizar sobre

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in C^1([0,1])^2/(pbc),\ \int_0^1 \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}\, ds = L \right\}$$

Configuración de la cadena colgante de dos extremos

Altura de la cadena: $y : [0, L] \to \mathbb{R}$.

Si la densidad es uniforme, la enería potencial viene dada por (salvo constantes)

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^L y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

a minimizar sobre

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^1([0, L])/y(0) = y_0,\, Y(L) = y_1,\, \int_0^L \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = l \right\}$$

siendo $l > L$ la longitud de la cadena.

Ecuación de Euler-Lagrange:

$$\sqrt{1 + (y'(x))^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{(y(x) + \lambda)y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}\right).$$

Alternativa de Fredhölm en dimensión finita

Sean $A \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^d$. Consideramos $Ax = b$.

- Si $\mathrm{Ker}\, A^T = \{0\}$, entonces el sistema $Ax = b$ tiene solución única.
- En otro caso, el sistema $Ax = b$ tiene solución si y sólo si b es ortogonal a $\mathrm{Ker}\, A^T$ (en cuyo caso hay infinitas soluciones)

$$\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Im}\, A^T)^\perp, \quad \mathrm{Ker}\, A^T = (\mathrm{Im}\, A)^\perp$$

Alternativa de Fredhölm para problemas de contorno

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = r(x), \quad y(x_0) = y(x_1) = 0$$

Supongamos que $0 < p \in C^1([x_0, x_1])$, $q, r \in C([x_0, x_1])$.
Consideramos el problema homogéneo asociado,
$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0$ con condiciones $y(x_0) = y(x_1) = 0$.

1. Si el problema homógeno sólo admite la solución trivial, entonces el problema completo tiene solución única.
2. Si el problema homógeno admite soluciones no triviales, entonces el problema completo tiene solución (en su caso inifinitas) si y sólo si $\forall \psi$ solución del problema homogéneo,
$$\int_{x_0}^{x_1} r(x)\psi(x)\,dx = 0$$

$$y(x) = \lambda\phi_1(x) + \mu\phi_2(x) + \frac{1}{p(x_0)}\int_{x_0}^{x} r(z)(-\phi_1(x)\phi_2(z) + \phi_2(x)\phi_1(z))\,dz$$

Alternativa de Fredhölm para problemas de contorno

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = r(x), \quad y(x_0) = y(x_1) = 0$$

Supongamos que $0 < p \in C^1([x_0, x_1])$, $q, r \in C([x_0, x_1])$. Consideramos el problema homogéneo asociado, $(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0$ con condiciones $y(x_0) = y(x_1) = 0$.

1. Si el problema homógeno sólo admite la solución trivial, entonces el problema completo tiene solución única.
2. Si el problema homógeno admite soluciones no triviales, entonces el problema completo tiene solución (en su caso inifinitas) si y sólo si $\forall \psi$ solución del problema homogéneo,
$$\int_{x_0}^{x_1} r(x)\psi(x)\,dx = 0$$

$$y(x) = \lambda\phi_1(x) + \mu\phi_2(x) + \frac{1}{p(x_0)}\int_{x_0}^{x} r(z)(-\phi_1(x)\phi_2(z) + \phi_2(x)\phi_1(z))\,dz$$

Oscilador armónico forzado: Tacoma Narrows

(University of Washington Libraries)

Ejercicio

Determinar el número de extremales, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, de

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^{4\pi} (y'(x))^2 - \alpha(y(x) - \sin(8x))^2 \, dx$$

sobre $\mathcal{D} = C_0^2([0, 4\pi])$.

Las extremales cumplen

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha y(x) = \alpha \sin(8x) \\ y(0) = 0 \\ y(4\pi) = 0 \end{cases}$$

Se discute mediante la alternativa de Fredholm, a partir del número de soluciones y_h del problema homogéneo asociado.

Ejercicio

Si $\alpha = 0$, la única solución es $y_h(x) = 0$. Por tanto, el problema completo tiene solución única (hay una única extremal).

Si $\alpha < 0$, de nuevo la única solución es $y_h(x) = 0$.

Si $\alpha > 0$, la solución general del problema homogéneo es

$$y_h(x) = A\cos(\sqrt{\alpha}x) + B\sin(\sqrt{\alpha}x)\,.$$

La única solución compatible con las condiciones de contorno es $y_h(x) = 0$, salvo que $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\ \ldots$, en cuyo caso para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $y_h(x) = B\sin(nx/4)$, $B \in \mathbb{R}$.

Denotamos $\alpha_n = n^2/16$, $n \in \mathbb{N}$. Para estos valores de α, existen soluciones del problema completo (infinitas) si y sólo si

$$\int_0^{4\pi} \sin(nx/4)\sin(8x)\,dx = 0\,.$$

Ejercicio

Denotamos $\alpha_n = n^2/16$, $n \in \mathbb{N}$. Para estos valores de α, existen soluciones del problema completo (infinitas) si y sólo si

$$\int_0^{4\pi} \sin(nx/4)\sin(8x)\,dx = 0\,.$$

$$\sin(\theta)\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2}(\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)).$$

Tanto $\cos((8 - n/4)x)$ como $\cos((8 + n/4)x)$ tienen media cero sobre $[0, 4\pi]$, salvo si $n = 32$.

- Si $\alpha \neq \alpha_n$, sólo hay un extremal.
- Si $\alpha = \alpha_{32}$, no hay extremales.
- Si $\alpha = \alpha_n$ con $n \neq 32$, hay infinitos extremales.

Espectro de los problemas de Sturm–Liouville

$I = [x_0, x_1],\ 0 < p \in C^1(I),\ 0 < r \in C(I),\ q \in C(I).$

Los valores propios λ del problema

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0$$

con condiciones de contorno *separadas* constituyen una sucesión creciente $\lambda_n \nearrow +\infty$.

Las funciones propias asociadas ϕ_n (una por cada λ_n salvo constantes) satisfacen:

1. ϕ_n tiene $n-1$ ceros en (x_0, x_1),
2. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} r(x)\phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = 0$ para $n \neq m$.

Sturm–Liouville: caracterización variacional

El mínimo de

$$\mathcal{F}[y] = \int_I \left(p(x)(y'(x))^2 - q(x)(y(x))^2 \right) \, dx$$

sobre

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ y \in C_0^1(I) / \int_I r(x) y^2(x) \, dx = 1 \right\}$$

es el primer valor propio del problema

$$\begin{cases} (p(x)y'(x))' + q(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y(x_1) = 0 \end{cases}$$

y se alcanza sobre la primera función propia normalizada, Φ_1.

Sturm–Liouville: caracterización variacional

El mínimo de

$$\mathcal{F}[y] = \int_I \Big(p(x)(y'(x))^2 - q(x)(y(x))^2 \Big) \, dx$$

sobre

$$\mathcal{D}_n = \Big\{ y \in C_0^1(I) / \int_I r(x) y^2(x) \, dx = 1,$$

$$\int_I r(x)\Phi_1(x) y(x) \, dx = \cdots = \int_I r(x)\Phi_{n-1}(x) y(x) \, dx = 0 \Big\}$$

es el n-ésimo valor propio del problema

$$\begin{cases} (p(x)y'(x))' + q(x)y(x) + \lambda r(x) y(x) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y(x_1) = 0 \end{cases}$$

y se alcanza sobre la n-ésima función propia normalizada, Φ_n.

Sistemas ortonormales en L^2

Consideramos $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$.

$$L^2(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} / f \text{ es medible}, \int_I |f|^2 \, dx < \infty \right\}$$

es un espacio de Hilbert con producto escalar y norma

$$\langle f, g \rangle := \int_I f(x) g(x) \, dx, \quad \|f\|_2 := \left(\int_I |f|^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

Definición (sistema ortonormal de L^2)

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(I)$ tal que:

1. $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$.
2. $\|f_n\|_2 = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$

Dadas $f \in L^2(I)$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(I)$ un sistema ortonormal, la expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n, \quad \text{con } c_n = \langle f, f_n \rangle$$

es la serie de Fourier (generalizada) de f respecto del sistema $\{f_n\}$, y los c_n son los coeficientes de Fourier del desarrollo.

Desigualdad de Bessel: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq \|f\|_2^2$

Identidad de Parseval

Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(I)$ es un sistema ortonormal completo, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \|f\|_2^2$.

Series de Fourier en L^2

Dadas $f \in L^2(I)$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(I)$ un sistema ortonormal, la expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n, \quad \text{con } c_n = \langle f, f_n \rangle$$

es la serie de Fourier (generalizada) de f respecto del sistema $\{f_n\}$, y los c_n son los coeficientes de Fourier del desarrollo.

Dada $f \in L^2(I)$, su serie de Fourier respecto de un sistema ortonormal completo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(I)$ converge hacia f (con respecto a la norma de $L^2(I)$). Es decir,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n, \quad \text{con } c_n = \langle f, f_n \rangle$$

como funciones de $L^2(I)$.

El sistema trigonométrico

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_0(x) & = & 1 \\ f_{2n-1}(x) & = & \cos(nx) \\ f_{2n}(x) & = & \sin(nx) \end{array} \right. , n \in \mathbb{N}$$

proporciona un sistema ortogonal y completo en $L^2(0, 2\pi)$

Recuérdese que

$$\sin(\theta)\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2}(\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)),$$

$$\cos(\theta)\ \cos(\varphi) = \frac{1}{2}(\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)),$$

$$\sin(\theta)\ \cos(\varphi) = \frac{1}{2}(\sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi)).$$

El sistema trigonométrico en $I = [0, L]$

$$\begin{cases} f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \\ f_{2n-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \quad , n \in \mathbb{N} \\ f_{2n}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \end{cases}$$

proporciona un sistema ortonormal y completo en $L^2(I)$

Serie de Fourier asociada

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right)$$

$$a_n := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx, \; b_n := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx$$

El desarrollo de Fourier en $I = [x_0, x_1]$ toma la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n(x - x_0)}{x_1 - x_0}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n(x - x_0)}{x_1 - x_0}\right)\right)$$

con los coeficientes

$$a_n := \frac{2}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n(x - x_0)}{x_1 - x_0}\right) \, dx,$$

$$b_n := \frac{2}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n(x - x_0)}{x_1 - x_0}\right) \, dx$$

M-test de Weierstrass

Dada una sucesión de funciones $f_n : I \to \mathbb{R}$ y una sucesión de constantes positivas M_n tales que $|f_n(x)| \leq M_n \, \forall x \in I$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{converge uniformemente sobre } I.$$

- Si $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < +\infty$, entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente sobre I.
- Si f y f' son continuas a trozos en $[0, L]$ y además $f(0) = f(L)$, entonces:
  1. la serie de Fourier de f converge hacia $f(x)$ en los puntos $x \in [0, L]$ donde f es continua
  2. y converge hacia $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$ en los puntos de discontinuidad.

M-test de Weierstrass

Dada una sucesión de funciones $f_n : I \to \mathbb{R}$ y una sucesión de constantes positivas M_n tales que $|f_n(x)| \leq M_n \, \forall x \in I$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{converge uniformemente sobre } I.$$

- Si $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < +\infty$, entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente sobre I.
- Si f y f' son continuas a trozos en $[0, L]$ y además $f(0) = f(L)$, entonces:
  1. la serie de Fourier de f converge hacia $f(x)$ en los puntos $x \in [0, L]$ donde f es continua
  2. y converge hacia $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$ en los puntos de discontinuidad.

Criterios de convergencia para series de Fourier

M-test de Weierstrass

Dada una sucesión de funciones $f_n : I \to \mathbb{R}$ y una sucesión de constantes positivas M_n tales que $|f_n(x)| \leq M_n \, \forall x \in I$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{converge uniformemente sobre } I.$$

- Si $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < +\infty$, entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente sobre I.
- Si f y f' son continuas a trozos en $[0, L]$ y además $f(0) = f(L)$, entonces:
  1. la serie de Fourier de f converge hacia $f(x)$ en los puntos $x \in [0, L]$ donde f es continua
  2. y converge hacia $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$ en los puntos de discontinuidad.

Criterios de convergencia para series de Fourier

- Si f es continua y f' es continua a trozos en $[0, L]$, y además $f(0) = f(L)$, entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente sobre I.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$, si

- $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge puntualmente hacia $f : \Omega \to \mathbb{R}$,
- $\partial_{x_1} f_n \in C^{(}\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $\sum_{n=0}^{\infty} \partial_{x_1} f_n$ converge uniformemente en Ω,

entonces existe $\partial_{x_1} f = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_{x_1} f_n$.

- Si $f \in C^1([0, L])$, f'' es continua a trozos y además $f(0) = f(L)$, $f'(0) = f'(L)$, entonces la serie de Fourier de f se puede derivar término a término. La serie así construída converge uniformemente en I hacia f'.

Algunos resultados chocantes sobre la convergencia de las series de Fourier

- (Weierstrass) Función continua no derivable en ningún punto:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),\ a \in (0,1),\ b \text{ entero impar},\ ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

- (Kolmogorov) Función de L^1 para la que su serie de Fourier no converge en ningún punto.
- (Carleson–Hunt) Si $f \in L^p(-\pi, \pi)$ para algún $1 < p \leq \infty$ y es 2π-periódica, entonces su serie de Fourier asociada converge a.e. $x \in (-\pi, \pi)$.
- (Katznelson) Dado $E \subset [-\pi, \pi]$ de medida cero, existe una función continua y 2π-periódica sobre $[-\pi, \pi]$ tal que su serie de Fourier asociada diverge $\forall x \in E$.

Desarrollos en cosenos y senos

Sea $f \in C([0, L])$ con f' continua a trozos. Entonces

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx$$

converge uniformemente hacia f en $[0, L]$.

Sea $f \in C([0, L])$ con $f(0) = f(L) = 0$ y con f' continua a trozos. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx$$

converge uniformemente hacia f en $[0, L]$.

Problema mixto para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } [0,\infty) \times [0,L] \\ u(0,x) = \varphi(x) & \text{en } [0,L] \\ u_t(0,x) = \psi(x) & \text{en } [0,L] \\ u(t,0 = u(t,L) = 0 & \text{en } [0,\infty) \end{cases} \tag{1}$$

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

- $\varphi \in C^2([0,L])$ tiene derivada tercera continua a trozos.
- $\psi \in C^1([0,L])$ tiene derivada segunda continua a trozos.
- $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi''(0) = \varphi''(L) = 0$ y $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

Entonces el problema (1) tiene solución única.

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada mediante

$$S : \Omega \to \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Dada $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, se define

$$\int_{\mathcal{S}} f \, d\sigma := \int_{\Omega} (f \circ S)(x, y) \sqrt{g} \, d(x, y), \quad \sqrt{g} = |S_x \wedge S_y|$$

Dado $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, se define el flujo de F a través de $\mathcal{S}$ como

$$\int_{\mathcal{S}} F \cdot n \, d\sigma, \quad n \, \text{normal exterior a } \mathcal{S}.$$

Fórmula de Green

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con frontera regular, dadas f, g regulares,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} fg \, n \cdot e_i \, d\sigma,$$

siendo n el normal exterior a $\partial\Omega$ y e_i el i-ésimo vector de la base canónica.

Integración en superficies

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada mediante

$$S : \Omega \to \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Dada $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, se define

$$\int_{\mathcal{S}} f\, d\sigma := \int_{\Omega} (f \circ S)(x, y) \sqrt{g}\, d(x, y), \quad \sqrt{g} = |S_x \wedge S_y|$$

Dado $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, se define el flujo de F a través de $\mathcal{S}$ como

$$\int_{\mathcal{S}} F \cdot n\, d\sigma, \quad n \text{ normal exterior a } \mathcal{S}.$$

Teorema de la divergencia

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con frontera regular, dado $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ regular,

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div} F\, dx$$

siendo n el normal exterior a $\partial\Omega$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto. En lo sucesivo las derivadas se consideran en sentido débil.

$$H^1(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega)/\nabla f \in (L^2(\Omega))^d\}.$$

Es un subespacio de $L^2(\Omega)$, completo para la norma

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_2 + \sum_{i=1}^{d} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_2$$

y el producto escalar asociado

$$\langle f, g\rangle_{H^1} = \langle f, g\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{d} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2}.$$

A veces se usa la norma equivalente dada por

$$\left(\int_\Omega f^2\, dx + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

Espacios de Sobolev

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto. En lo sucesivo las derivadas se consideran en sentido débil. Dado $m \in \mathbb{N}$,

$$H^m(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega)/D^\alpha f \in L^2(\Omega)\, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}$$

$$= \{f \in H^{m-1}(\Omega)/\nabla f \in (H^{m-1}(\Omega))^d\}$$

es un espacio de Hilbert con norma

$$\|f\|_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha f\|_2$$

y el producto escalar asociado

$$\langle f, g\rangle_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g\rangle_{L^2}\,.$$

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto con frontera regular, la aplicación

$$Tr : C_c^1(\mathbb{R}^d) \to L^2(\partial\Omega)$$

$$f \mapsto Tr\, f = f_{|\partial\Omega}$$

es lineal. Por densidad se puede extender a un operador lineal acotado:

$$Tr : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

Fórmula de Green en $H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = -\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} fg\, n \cdot e_i\, d\sigma \quad \forall f, g \in H^1(\Omega),$$

siendo n el normal exterior a $\partial\Omega$ y e_i el i-ésimo vector de la base canónica.

Fórmula de Green en $H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = -\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} fg\, n \cdot e_i\, d\sigma \quad \forall f, g \in H^1(\Omega),$$

siendo n el normal exterior a $\partial\Omega$ y e_i el i-ésimo vector de la base canónica.

Caso particular relevante: si $f, g \in H^2(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega \Delta f\, g\, dx = -\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g\, dx + \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial f}{\partial \eta}\, d\sigma,$$

donde $\dfrac{\partial f}{\partial \eta} := n \cdot \nabla f$.

Desigualdad de Poincaré

$H_0^1(\Omega) :=$ clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ con respecto a $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$

Si $\partial\Omega$ es acotado y regular, entonces

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega)/f_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

Si Ω es acotado, entonces existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|f\|_2 \leq C\|\nabla f\|_2 \quad \forall f \in H_0^1(\Omega).$$

Por tanto, para $f \in H_0^1(\Omega)$, $f \mapsto \|\nabla f\|_2$ es una norma equivalente a $\|f\|_{H^1}$.

El espacio H^{-1}

$H^{-1}(\Omega) :=$ dual topológico de $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$.

Sea (a,b) un intervalo acotado. Dado $F \in H^{-1}(a,b)$, existen $f_1, f_2 \in L^2(a,b)$ (*no son únicas*) tales que

$$F[u] = \int_a^b f_1 u + f_2 u' \, dx \quad \forall u \in H_0^1(a,b)$$

y además $\|F\|_{H^{-1}} = \max\{\|f_1\|_2, \|f_2\|_2\}$.

Se suele identificar F con $f_1 - f_2'$ (en sentido distribucional). Se puede escoger $f_1 = 0$ en virtud de la desigualdad de Poincaré.

El teorema de Lax–Milgram

- Sea H un espacio de Hilbert
- Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$
  1. bilineal
  2. continua: $|a(u, v)| \leq C\|u\|_H\| v\|_H$ para cierta $C > 0$
  3. coerciva: $a(v, v) \geq \alpha\| v\|_H^2$ para cierto $\alpha > 0$
- Sea $F \in H^*$.

- Existe un único $u \in H$ tal que

$$a(u, \varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H.$$

- $F \mapsto u$ es lineal y continua de H^* en H
- Si $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, entonces

$$u = \mathrm{argmin}_{\varphi \in H} J(\varphi), \quad J(\varphi) = \frac{1}{2}a(\varphi, \varphi) - F(\varphi).$$