m.a.

p.o. $\longrightarrow$ base de S $\rightsquigarrow$

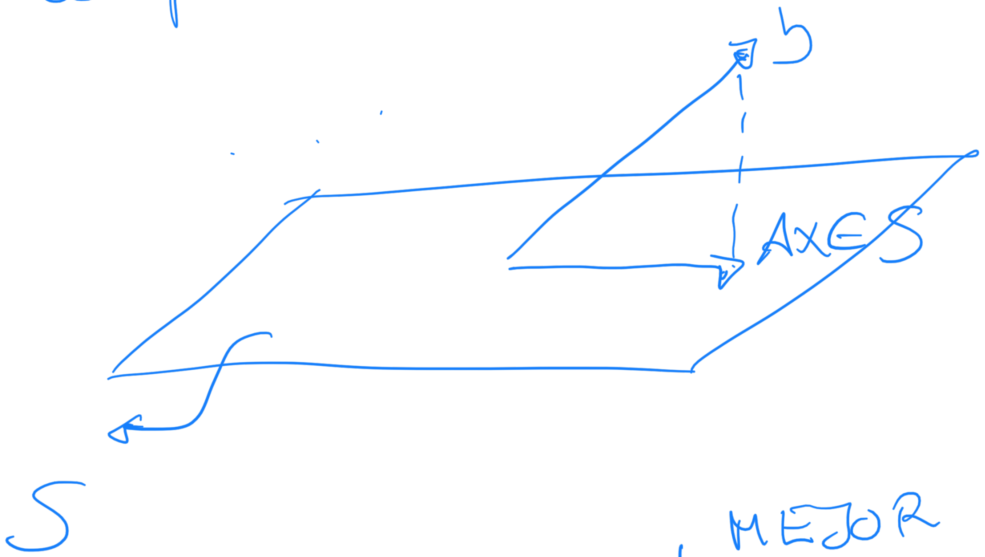
sust. gen. ec. ampliadas

$A^TAx = A^Tb \rightsquigarrow \underline{Ax}$ solución

$\langle c_j, b - \sum_{i=1}^{N} x_i c_i \rangle = 0 \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{N} x_i c_i$ solución

$j = 1, \dots, N$

$A = [c_1 | \cdots | c_N]$



CÁLCULO DE | MEJOR APROXIMACIÓN

PROYECCIÓN ORTOGONAL

(1) (El complemento ortogonal de un subespacio vectorial está determinado por una base)

S subespacio vectorial de $\mathbb{R}^M$ | $i=1,\dots,N \Rightarrow \langle x, v_i\rangle = 0$ (1)

$x\in\mathbb{R}^M$, $\{v_1,\dots,v_N\}$ base S | $\overset{?}{\Rightarrow}$ $x\in S^\perp = \{y\in\mathbb{R}^M : s\in S \Rightarrow \langle s,y\rangle = 0\}$

En efecto: sea $s\in S$; entonces, existen $\alpha_1,\dots,\alpha_N\in\mathbb{R}$ tales que

$$s=\sum_{i=1}^N \alpha_i v_i .$$

Entonces

$$\langle x,s\rangle = \langle x, \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \underbrace{\langle x, v_i\rangle}_{0 \text{ por } (1)} = 0 .$$

Pero $s\in S$ es un vector arbitrario, luego $x\in S^\perp$.

2 (Un primer ejemplo de cálculo de proyección ortogonal, simple pero representable gráficamente). Halla la proyección ortogonal del vector $b = [1,1,1]^T$ sobre el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{[x,y,z]^T \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

Solución

En primer lugar busco una base de S y como está dado a partir de unas ec. implícitas (cartesianas), resuelvo el correspondiente S.E.L. homogéneo:

$z = 0$ ESCALONADO | incóg. principal: z
| incóg. libres: x, y

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \rightsquigarrow \text{base} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$P_S(b) = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad ¿x_1, x_2?$$

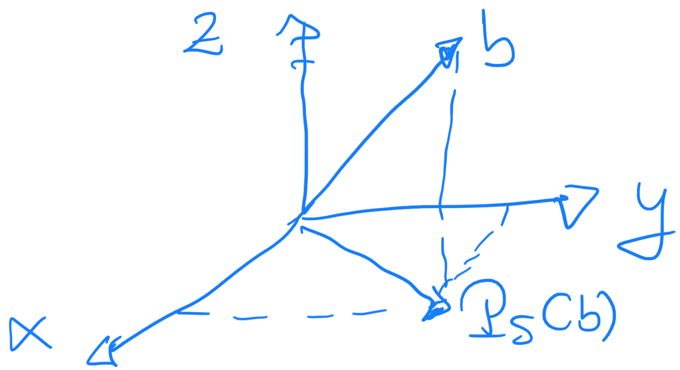
$$\left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Bigg| \quad \left\langle \begin{bmatrix}1-x_1\\1-x_2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \text{idem}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Bigg| \quad \left\langle \text{idem}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\begin{array}{l} 1 - x_1 = 0 \\ 1 - x_2 = 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$P_S(b) = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$



3) Determina la mejor aproximación del vector $b=[1,1,0,1]^T$ en el subespacio S de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$S=\left\{[x,y,z,w]^T\in\mathbb{R}^4:\ \begin{array}{r} x-y+z+w=0 \\ y+w=0 \end{array}\right\}$$

Solución

Lo vamos a resolver siguiendo los dos procedimientos. En todo caso, debemos comenzar encontrando una base de S.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{escalonada} \quad \Bigg| \begin{array}{l} \text{variables principales: } x,y \\ \quad \text{"} \quad \text{secundarias: } z,w \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} x=-2\beta-\alpha \\ y=-\beta \\ z=\alpha \\ w=\beta \end{array}\right. \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R}) \rightsquigarrow \text{base}=\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Procedimiento 1

$$P_S(b) = x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \quad \text{idem} \quad , \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\langle \begin{bmatrix} 1 + x_1 + 2x_2 \\ 1 + x_2 \\ -x_1 \\ 1 - x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \quad \text{idem} \quad , \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{l} -1 - x_1 - 2x_2 - x_1 = 0 \\ -2 - 2x_1 - 4x_2 - 1 - x_2 + 1 - x_2 = 0 \end{array}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \quad \Bigg| \quad x_1 = x_2 = -\frac{1}{4}$$
$$x_1 + 3x_2 = -1$$

$$\Downarrow$$

$$P_S(b) = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

Procedimiento 2

$$A^T A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^T b \qquad \text{(ecuaciones normales)}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= -1 \\ 2x_1 + 6x_2 &= -2 \end{aligned}\right| \quad x_1 = x_2 = -\frac{1}{4}$$

$$P_S(b) = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$