Calcula los 4 nodos de Chebyshev del intervalo $[2, \frac{11}{4}]$.

SOLUCIÓN

Comenzamos hallando los 4 nodos de Chebyshev del intervalo referencia, $[-1,1]$, y a continuación, mediante un conveniente isomorfismo afín, determinamos lo pedido.

(i) $[-1,1], N=4$: $\quad x_i = \cos \frac{2i+1}{8}\pi, \quad i=0,1,2,3$:

$$\left\{\cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{3\pi}{8}, \cos\frac{5\pi}{8}, \cos\frac{7\pi}{8}\right\},$$

o si se quiere, refiriendo los ángulos al 1er cuadrante:

$$\left\{\cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{3\pi}{8}, -\cos\frac{3\pi}{8}, -\cos\frac{\pi}{8}\right\}$$

(¡obsérvese la distribución simétrica de los nodos respecto al cero!)

(ii) $[2, \frac{11}{4}]$, $N=4$. Sea $\phi: [-1,1] \to [2, \frac{11}{4}]$ el isomorfismo afín caracterizado por la doble igualdad

$$\phi(-1)=2 \wedge \phi(1)=\frac{11}{4},$$

esto es, si $\phi(x)=\alpha x+\beta$, para ciertos $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, entonces

$$\left|\begin{array}{l} -\alpha+\beta=2 \\ \alpha+\beta=\frac{11}{4} \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} \alpha=\frac{3}{8} \\ \beta=\frac{19}{8} \end{array}\right. .$$

Por tanto,

$$\phi(x)=\frac{3}{8}x+\frac{19}{8}$$

y los 4 nodos de Chebyshev en el intervalo $\left[2,\frac{11}{4}\right]$ son

$$\left\{\frac{3}{8}\cos\frac{\pi}{8}+\frac{19}{8},\ \frac{3}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\frac{19}{8},\ -\frac{3}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\frac{19}{8},\ -\frac{3}{8}\cos\frac{\pi}{8}+\frac{19}{8}\right\}.$$