



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de
Telecomunicación

Facultad de Ciencias

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Análisis de Redes Convolucionales y Técnicas de Explicabilidad para Arquitecturas Neuronales Profundas de Segmentación de Instancias

Presentado por:

Juan Manuel Rodríguez Gómez

Tutores:

Pablo Mesejo Santiago

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Francisco Javier Merí de la Maza

Departamento de Análisis Matemático

Mentora:

Marilyn Bello García

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Curso académico 2024-2025

Análisis de Redes Convolucionales y Técnicas de Explicabilidad para Arquitecturas Neuronales Profundas de Segmentación de Instancias

Juan Manuel Rodríguez Gómez

Juan Manuel Rodríguez Gómez. *Análisis de Redes Convolucionales y Técnicas de Explicabilidad para Arquitecturas Neuronales Profundas de Segmentación de Instancias.*

Trabajo de Fin de Grado. Curso académico 2024-2025.

Responsables de tutorización

Pablo Mesejo Santiago
Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Responsable de mentorización

Francisco Javier Merí de la Maza
Departamento de Análisis Matemático

Facultad de Ciencias

Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D. Juan Manuel Rodríguez Gómez,

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2024-2025, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 23 de octubre de 2024.

Fdo: Juan Manuel Rodríguez Gómez

Dedicado a mi querida familia, que ha sido mi constante fuente de apoyo y paciencia, a mi pareja, por su amor y comprensión incondicionales, y a mi leal compañero de cuatro patas, cuya presencia y fidelidad han sido una constante alegría y consuelo en los momentos más estresantes de este viaje. Este logro no es solo mío, sino también vuestro.

Agradecimientos

Este trabajo es el fruto de un viaje de constante aprendizaje y desafío, y como tal, hay muchas personas a las que me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento.

En primer lugar, agradezco a mis tutores, Francisco Javier Meri de la Maza y Pablo Mesejo Santiago, así como a mi mentora, Marilyn Bello García, cuya guía experta y apoyo han sido esenciales desde la concepción hasta la realización de este proyecto. Sus valiosos consejos, pautas y explicaciones han sido fundamentales para la correcta evolución de este trabajo.

A mis padres, Ana María y Juan Manuel, y a mi hermana y su pareja, Ana Belén y Carlos, por su amor y apoyo incondicional. Su confianza incansable en mí y su capacidad para hacerme ver el lado positivo en cada situación han sido mi refugio y fortaleza durante todo el proceso de esta carrera y, en particular, en la ejecución de este proyecto.

A mi pareja, Nerea, por estar siempre a mi lado, ofreciéndome su infinita paciencia, comprensión y ánimo en los momentos más difíciles de este camino. No hay mayor fortuna que recorrer este camino contigo, y cada logro es aún más valioso porque lo comparto a tu lado.

A mis compañeros de clase, que han compartido conmigo las alegrías y las dificultades de esta etapa académica. Quiero mencionar especialmente a Álex, Álvaro, Higinio, Jesús, Manu y Mónica. Juntos, hemos superado obstáculos y compartido conocimientos, haciendo que cada desafío fuera más llevadero.

Y finalmente, a Iron, mi fiel compañero de cuatro patas, cuya presencia y compañía leal han sido un dulce consuelo en los largos días de estudio y trabajo.

A todos vosotros, os dedico este logro como una pequeña muestra de mi gran aprecio.

Resumen

PALABRAS CLAVE: Modelización Matemática, Invarianza a Traslaciones, Invarianza frente a Deformaciones, Redes de Dispersión, Teoría de Marcos, Transformada de Ondículas, Ondículas, Aprendizaje Automático, Visión por Computador, Aprendizaje Profundo, Redes Neuronales Convolucionales, Extracción de Características, Segmentación de Instancias, Mask R-CNN, IA Explicable, Grad-CAM.

Por un lado, el propósito matemático principal del trabajo detallado a continuación es desarrollar en detalle una modelización matemática general de las redes neuronales convolucionales, de manera que se adapte muchas de las arquitecturas más comúnmente utilizadas para este tipo de redes. Además, utilizando esta modelización general, se demostrará una de las propiedades principales de las redes neuronales convolucionales enfocadas en la extracción de características, la invarianza vertical a traslaciones.

Las redes neuronales convolucionales han llevado a resultados innovadores en numerosas tareas prácticas de Aprendizaje Automático. Muchas de estas aplicaciones realizan primero la extracción de características y luego introducen los resultados en un clasificador entrenable. Su buen rendimiento en este tipo de tareas puede comprobarse empíricamente. Sin embargo, su modelización matemática y la justificación teórica de por qué son buenos para estas tareas sigue siendo un estudio de caso abierto.

El análisis matemático de las redes neuronales convolucionales para la extracción de características fue iniciado por Mallat en su trabajo *Group Invariant Scattering* en 2012 [Mal12]. Específicamente, Mallat consideró las llamadas redes de dispersión basadas en una transformada de ondículas seguida del módulo como función de activación no-lineal en cada capa de la red, y demostró la invarianza a traslaciones (asintóticamente en el parámetro de escala de ondículas) y la invarianza frente a pequeñas deformaciones del extracto de características correspondiente.

La parte matemática de este trabajo se basa en el artículo *A Mathematical Theory of Deep Convolutional Neural Networks for Feature Extraction* presentado por Thomas Wiatowski y Helmut Bölcskei en 2017 [WB18]. Este generaliza los resultados de Mallat desarrollando una teoría que abarca transformaciones convolucionales generales, o en términos más técnicos, marcos semi-discretos generales (incluyendo ondículas, curvículas, crestículas, filtros aprendidos, etc.), funciones de activación no-lineales Lipschitz-continuas generales (por ejemplo, unidades lineales rectificadas, sigmoides logísticos desplazados, tangentes hiperbólicas y funciones de módulo) y operadores de pooling Lipschitz-continuos generales que emulan, por ejemplo, el submuestreo y el pooling promedio. Además, todos estos elementos pueden ser diferentes en las distintas capas de la red. Para la modelización matemática del extracto de características resultante, se demuestra un resultado de invarianza a la traslación de naturaleza vertical en el sentido de que las características se vuelven progresivamente más invariantes a la traslación con el aumento de la profundidad de la red.

Resumen

Por otro lado, la parte informática de este trabajo se centra en la segmentación de instancias, un proceso clave para detectar objetos en una escena y generar máscaras que permitan extraer con precisión dichos objetos. Este proceso implica dos etapas: primero, la detección de la región rectangular que contiene el objeto y, posteriormente, la generación de una máscara que segmenta el objeto detectado, definiendo con precisión sus contornos. En este contexto, la arquitectura Mask R-CNN ha demostrado ser particularmente efectiva para esta tarea, proporcionando resultados prometedores en la segmentación de instancias [HGDG17]. Sin embargo, como muchas redes neuronales profundas, Mask R-CNN presenta limitaciones en términos de interpretabilidad, es decir, la dificultad para comprender las razones detrás de sus decisiones.

Con el objetivo de mejorar la interpretabilidad de Mask R-CNN, este trabajo propone la aplicación de Grad-CAM [SCD⁺17], un método de interpretabilidad post-hoc que permite visualizar las regiones de una imagen que influyen más en las decisiones de la red. La implementación de Grad-CAM sobre Mask R-CNN, basada en adaptaciones propuestas en investigaciones previas [XJ21], [XVM⁺21], y [XVM⁺22], busca facilitar la comprensión de los procesos de inferencia de esta arquitectura neuronal. De este modo, en este trabajo se pretende dotar de explicabilidad a un modelo que de otro modo sería una caja negra.

Summary

KEYWORDS: Mathematical Modeling, Translation Invariance, Deformation Invariance, Scattering Networks, Frame Theory, Wavelet Transform, Wavelets, Machine Learning, Computer Vision, Deep Learning, Convolutional Neural Networks, Feature Extraction, Instance Segmentation, Mask R-CNN, Explainable AI, Grad-CAM.

On one hand, the main mathematical purpose of the work detailed below is to develop a comprehensive mathematical modeling of convolutional neural networks, adapting to many of the most commonly used architectures for this type of network. Additionally, using this general modeling, one of the main properties of convolutional neural networks focused on feature extraction, namely translation invariance, will be demonstrated.

Convolutional neural networks have led to groundbreaking results in numerous practical machine learning tasks. Many of these applications first perform feature extraction and then feed the results into a trainable classifier. Their good performance in such tasks can be empirically verified. However, their mathematical modeling and theoretical justification for their effectiveness in these tasks remain an open area of research.

The mathematical analysis of convolutional neural networks for feature extraction was initiated by Mallat in his work Group Invariant Scattering in 2012 [Mal12]. Specifically, Mallat considered the so-called scattering networks based on a wavelet transform followed by the modulus as a non-linear activation function in each layer of the network, and demonstrated translation invariance (asymptotically in the wavelet scale parameter) and invariance against small deformations of the corresponding feature extractor.

The mathematical part of this work builds on the article A Mathematical Theory of Deep Convolutional Neural Networks for Feature Extraction by Thomas Wiatowski and Helmut Bölcskei, presented in 2017 [WB18]. This work generalizes Mallat's results by developing a theory that encompasses general convolutional transformations, or in more technical terms, general semi-discrete frames (including wavelets, curvelets, ridgelets, learned filters, etc.), general Lipschitz-continuous non-linear activation functions (e.g., rectified linear units, shifted logistic sigmoids, hyperbolic tangents, and modulus functions), and general Lipschitz-continuous pooling operators that emulate, for example, subsampling and averaging. Moreover, all these elements can differ across the network's layers. For the mathematical modeling of the resulting feature extractor, a vertical translation invariance result is demonstrated, meaning that the features become progressively more invariant to translation as the network depth increases.

On the other hand, the computational part of this work focuses on instance segmentation, a key process for detecting objects in a scene and generating masks that precisely extract these objects. This process involves two stages: first, detecting the rectangular region containing the object, and then generating a mask that segments the detected object, accurately defining

Summary

its contours. In this context, the Mask R-CNN architecture has proven to be particularly effective for this task, providing promising results in instance segmentation [HGDG17]. However, like many deep neural networks, Mask R-CNN faces challenges in terms of interpretability, meaning the difficulty in understanding the reasoning behind its decisions.

To improve the interpretability of Mask R-CNN, this work proposes the application of Grad-CAM [SCD⁺17], a post-hoc interpretability method that allows for visualizing the regions of an image that most influence the network's decisions. The implementation of Grad-CAM on Mask R-CNN, based on adaptations proposed in previous research [XJ21], [XVM⁺21], and [XVM⁺22], aims to enhance the understanding of the inference processes of this neural architecture. Thus, this work intends to provide explainability to a model that would otherwise be a black box.

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	VII
Summary	IX
Índice de figuras	XV
Índice de tablas	XVII
I. Análisis de Redes Convolucionales	1
1. Introducción	3
2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión	9
2.1. Evolución matemática: De Fourier a Littlewood-Paley	9
2.1.1. La transformada de Fourier y sus limitaciones	9
2.1.2. Ondículas como alternativa a la transformada de Fourier	12
2.1.3. La transformada de Littlewood-Paley	16
2.1.4. Convenciones para futuras secciones	20
2.2. El operador de dispersión sobre un camino ordenado	21
2.2.1. Obtención de coeficientes invariantes por traslaciones	21
2.2.2. El operador módulo	23
2.2.3. El propagador de dispersión	24
2.2.4. La transformada de dispersión	26
2.3. Propagación de la dispersión y conservación de la norma	28
2.3.1. Proceso iterativo del propagador de la dispersión	28
2.3.2. Comparativa con una red neuronal convolucional	28
2.3.3. No-expansividad en la distancia entre funciones	30
2.3.4. Conservación de la norma	31
2.4. Invarianza horizontal por traslaciones	36
2.4.1. No-expansividad en conjuntos de caminos	36
2.4.2. Demostración de la invarianza por traslaciones	39
2.5. Invarianza frente a pequeñas deformaciones	44
2.5.1. Cotas superiores en comutadores de dispersión	44
2.5.2. Demostración de la invarianza frente a pequeñas deformaciones	46
3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión	51
3.1. Resumen de la teoría de Mallat sobre redes de dispersión	51
3.1.1. Definición del vector de características en redes de dispersión	51
3.1.2. Marcos semi-discretos	53

Índice general

3.1.3. Relación entre la arquitectura de redes de dispersión y las características extraídas	54
3.2. Construcción del extractor de características convolucional general	56
3.2.1. Diferencias y similitudes con las redes de dispersión	56
3.2.2. Operadores de pooling	58
3.3. Invarianza vertical por traslaciones	66
4. Conclusiones y Trabajos Futuros	75
II. Técnicas de Explicabilidad para Arquitecturas Neuronales Profundas de Segmentación de Instancias	77
5. Introducción	79
5.1. Descripción del problema	79
5.2. Motivación	79
5.3. Objetivos	79
5.4. Planificación y estimación de costes	79
6. Fundamentos Teóricos	81
6.1. Aprendizaje Automático	82
6.1.1. Aprendizaje supervisado	82
6.1.2. Aprendizaje no supervisado	82
6.1.3. Problemas de clasificación	82
6.1.4. Problemas de regresión	82
6.1.5. Gradiente descendente	82
6.1.6. Gradiente descendente estocástico	82
6.2. Aprendizaje Profundo	82
6.2.1. Redes neuronales	82
6.2.2. Back-propagation	82
6.2.3. Aprendizaje supervisado	82
6.3. Visión por Computador	82
6.4. Redes neuronales convolucionales	82
6.4.1. Capa convolucional	82
6.4.2. Capa de pooling	82
6.4.3. Capa fully-connected	82
6.4.4. Capa dropout	82
6.4.5. Optimizador Adam	82
6.4.6. Batch normalization	82
6.4.7. Proceso de entrenamiento	82
6.5. Data augmentation	82
6.6. Fine-tuning	82
6.7. Explicabilidad en redes neuronales convolucionales	82
6.7.1. Explicaciones basadas en eliminación	82
6.7.2. Explicaciones basadas en gradientes	82
6.7.3. Explicaciones basadas en propagación	82
7. Estado del Arte	83

8. Métodos Propuestos	85
8.1. Mask R-CNN	85
8.2. GradCAM	85
9. Implementación	87
9.1. Diseño del software	87
9.2. Entorno de ejecución	87
10. Experimentación	89
10.1. Datos empleados	89
10.2. Protocolo de validación experimental	89
10.3. Métricas empleadas	89
10.4. Experimentos realizados	89
10.5. Resultados obtenidos	89
10.6. Discusión de los resultados obtenidos	89
11. Conclusiones y Trabajos Futuros	91
Bibliografía	93

Índice de figuras

1.1.	Dígitos manuscritos del conjunto de datos MNIST [LC98]. Ejemplo de invarianza por traslaciones. A pesar de la variación en la ubicación del dígito manuscrito 5 en las imágenes de la izquierda y la derecha, este se identifica de manera consistente. Imagen extraída de [KA18].	3
1.2.	EDígitos manuscritos del conjunto de datos MNIST [LC98]. Jemplo de invarianza frente a pequeñas deformaciones. A pesar de las variaciones en la forma de los dígitos manuscritos, estos se identifican correctamente. Imagen extraída de [LYP16].	4
1.3.	Dígitos manuscritos del conjunto de datos MNIST [LC98]. Ejemplos de fallos de predicción causados por deformaciones en los dígitos. Las deformaciones pueden llevar a confusiones entre diferentes clases, como se observa en las imágenes donde la predicción (Pred) y la etiqueta real (GT) no coinciden. Por este motivo, nos centramos en pequeñas deformaciones, para no alterar la identidad del objeto en la imagen. Imagen extraída de [ZKS ⁺ 19].	5
2.1.	Stéphane Mallat, reconocido matemático e investigador, cuyos trabajos en teoría de ondículas y redes neuronales convolucionales han marcado importantes avances en el campo del Procesamiento de Señales y Aprendizaje Profundo. Imagen extraída de [Ins24].	10
2.2.	Representación gráfica de la función base de Haar. Imagen extraída de [Wik24].	13
2.3.	Filtro generado por el soporte de una ondícula para detectar bordes (1) verticales, (2) horizontales y (3) diagonales. Imagen elaborada por el autor.	14
2.4.	Ejemplo de aplicación de la base de Haar a una imagen (arriba izquierda). Los filtros destacan los bordes en tres direcciones: horizontal (arriba derecha), vertical (abajo izquierda) y diagonal (abajo derecha). Imagen extraída de [Jor24].	15
2.5.	Como se observa en el caso de la izquierda, la ondícula está afectada por una escala más pequeña, lo que le permite detectar cambios en la señal con mayor precisión a frecuencias más altas a lo largo del tiempo mediante la convolución. En contraste, en el caso de la derecha, la ondícula está sujeta a una escala mayor, lo que reduce su capacidad para detectar con precisión las variaciones en la señal. Imagen extraída de [Wor24].	17
2.6.	Un propagador de dispersión U_J aplicado a un punto de una señal $f(x)$ calcula $(U[\lambda_1]f)(x) = (f * \psi_{\lambda_1})(x) $. En la capa $m = 0$, se promedian los coeficientes que dieron 0 (por tener $2^j < 2^{-J}$), obteniendo como salida $(S_J[\emptyset]f)(x) = (f * \phi_{2^J})(x)$ (ver flecha negra). Luego, se aplica U_J a cada coeficiente $(U[\lambda_1]f)(x)$ del paso anterior, calculando así $(U[\lambda_1, \lambda_2]f)(x)$ y obteniendo como salida $(S_J[\lambda_1]f)(x) = ((U[\lambda_1]f) * \phi_{2^J})(x)$ en la capa $m = 1$. Repitiendo este proceso de forma recursiva para cada coeficiente $(U[p]f)(x)$ se va obteniendo $(S_J[p]f)(x) = ((U[p]f)(x) * \phi_{2^J})$ como salida de cada capa. Imagen extraída de [BM13].	29

Índice de figuras

3.1.	Thomas Wiatowski, destacado investigador en el campo de las Redes Neuronales Profundas y el Procesamiento de Señales, cuya tesis doctoral y diversos artículos han contribuido significativamente a la comprensión matemática de las redes convolucionales. Imagen extraída de [Wia24].	52
3.2.	Helmut Bölcskei, profesor destacado en ciencias matemáticas de la información, cuyas investigaciones en Procesamiento de Señales, Aprendizaje Automático y Sistemas Inalámbricos han sido ampliamente reconocidas. Sus contribuciones teóricas han influido en diversos campos de la ingeniería y la matemática aplicada. Imagen extraída de [Bö24].	53
3.3.	Partición del plano de frecuencias \mathbb{R}^2 inducida por un marco semi-discreto de ondículas direccionales , con $K = 12$ direcciones. Imagen extraída de [WB18]. .	55
3.4.	Arquitectura de red de dispersión basada en filtros de ondículas y la no-linealidad del módulo. Los elementos del vector de características $\Phi_W(f)$ se indican en las puntas de las flechas. Imagen extraída de [WB18].	56
3.5.	Arquitectura de red subyacente al extractor de características convolucional general. El índice $\lambda_n^{(k)}$ corresponde al k -ésimo átomo $g_{\lambda_n^{(k)}}$ del marco Ψ_n asociado a la capa n -ésima de la red. La función χ_n es el átomo generador de salida de la capa n -ésima. Imagen extraída de [WB18].	61
3.6.	Dígitos manuscritos del conjunto de datos MNIST [LC98]. Para tareas prácticas de Aprendizaje Automático (por ejemplo, clasificación de señales), a menudo deseamos que el vector de características $\Phi_\Omega(f)$ sea invariante a la ubicación espacial de los dígitos dentro de la imagen f . El Teorema 3.1 establece que las características $\Phi_\Omega^n(f)$ se vuelven más invariantes por traslaciones conforme aumenta el índice de la capa n . Imagen extraída de [WB18].	71
3.7.	Dígitos manuscritos del conjunto de datos MNIST [LC98]. Si f representa la imagen del dígito 5 en (a), entonces, con una función τ seleccionada apropiadamente, la función $T_\tau f = f(\cdot - \tau(\cdot))$ modela imágenes del 5 basadas en diferentes estilos de escritura como en (b) y (c). Imagen extraída de [WB18]. .	74

Índice de tablas

Parte I.

Análisis de Redes Convolucionales

1. Introducción

Las redes neuronales convolucionales se han establecido como una herramienta preeminente en el ámbito de la Inteligencia Artificial, específicamente en el campo del Aprendizaje Profundo. Esta rama del Aprendizaje Automático ha experimentado un crecimiento sustancial en investigación y publicaciones, especialmente debido a la eficacia notable de las redes neuronales convolucionales en el Procesamiento de Imágenes para tareas tales como clasificación, segmentación y generación de imágenes. Por ello, en este trabajo se busca profundizar en la modelización matemática de estas redes para entender mejor sus propiedades teóricas y validar una de sus capacidades más cruciales: la invarianza por traslaciones.

En el contexto del Aprendizaje Automático y la Visión por Computador, un desafío fundamental es la clasificación y detección de objetos en imágenes. Definimos así la invarianza como la habilidad de identificar un objeto en una imagen a pesar de cambios en su apariencia, como rotaciones, deformaciones leves o traslaciones. Esta característica es vital ya que asegura que la identidad del objeto se mantiene constante a pesar de estas variaciones.

Específicamente, la invarianza por traslaciones se describe como la capacidad de reconocer un objeto en cualquier lugar de la imagen (véase Figura 1.1). Esta propiedad es esencial y sabemos que las redes neuronales convolucionales la cumplen.

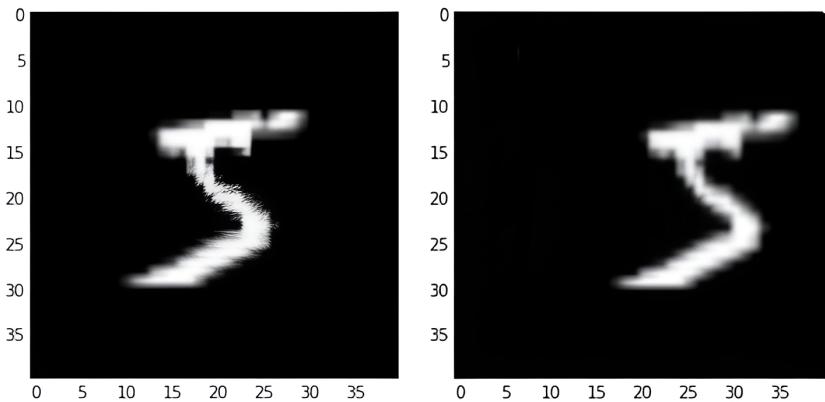


Figura 1.1.: Dígitos manuscritos del conjunto de datos MNIST [LC98]. Ejemplo de invarianza por traslaciones. A pesar de la variación en la ubicación del dígito manuscrito 5 en las imágenes de la izquierda y la derecha, este se identifica de manera consistente. Imagen extraída de [KA18].

Definición 1.1. Sea $(T_t f)(x) := f(x - t)$ la traslación de $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ por $t \in \mathbb{R}^d$, donde

1. Introducción

$L^2(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert (espacio vectorial completo con producto interno que induce una norma). Decimos que un operador $\Phi : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}$ es *invariante por traslaciones* si $\Phi(T_t f) = \Phi(f)$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y para todo $t \in \mathbb{R}^d$.

Adicionalmente, la invarianza frente a pequeñas deformaciones (difeomorfismos) también es una propiedad cumplida por las redes neuronales convolucionales, permitiendo que un objeto sea identificado correctamente a pesar de cambios menores en su forma (véase Figura 1.2 y Figura 1.3).

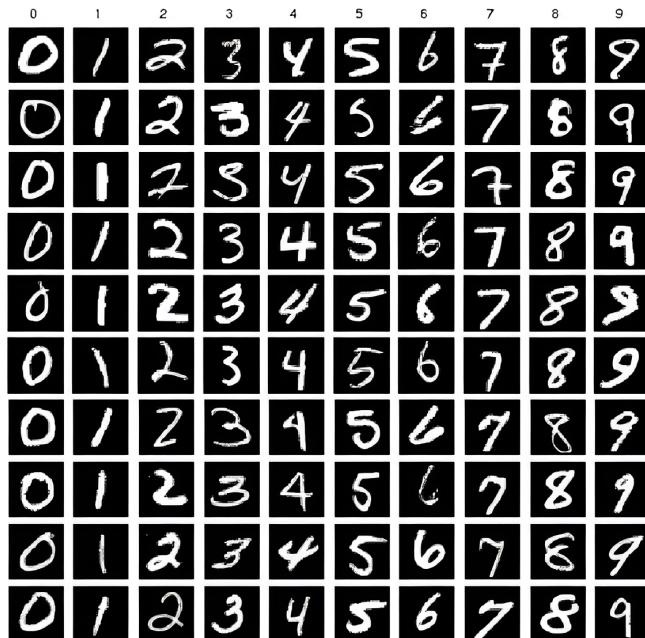


Figura 1.2.: EDígitos manuscritos del conjunto de datos MNIST [LC98]. Jemplo de invarianza frente a pequeñas deformaciones. A pesar de las variaciones en la forma de los dígitos manuscritos, estos se identifican correctamente. Imagen extraída de [LYP16].

Definición 1.2. Decimos que una función diferenciable $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es un *difeomorfismo* si f es una biyección y su inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ también es diferenciable.

En el siguiente apartado se analizará el caso del módulo de la transformada de Fourier de una función f , empleándolo como un ejemplo de un operador que mantiene la invarianza por traslaciones. Sin embargo, se observará que las inestabilidades que surgen frente a deformaciones en las frecuencias altas nos llevan a descartarlo como una opción viable para la modelización de las redes neuronales convolucionales, ya que no garantiza la Lipschitz-continuidad ante difeomorfismos. Es bien sabido que las inestabilidades a las deformaciones

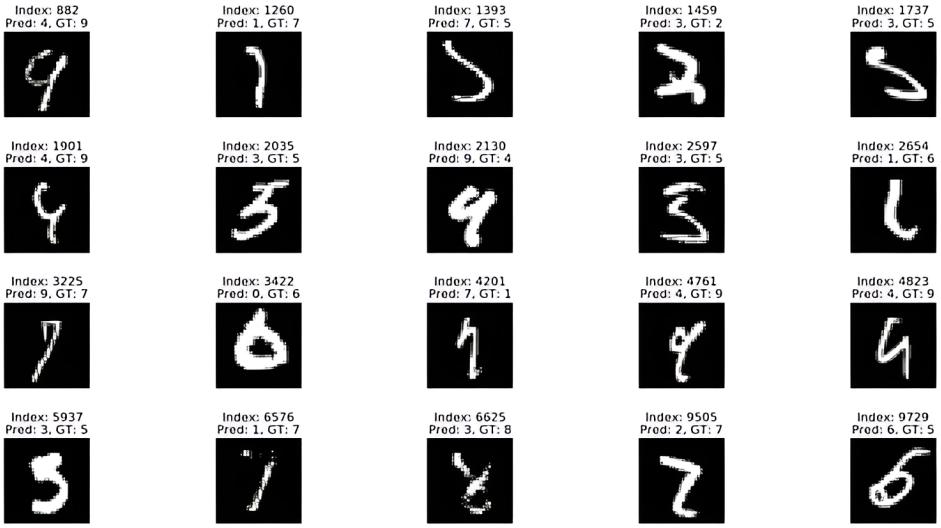


Figura 1.3.: Dígitos manuscritos del conjunto de datos MNIST [LC98]. Ejemplos de fallos de predicción causados por deformaciones en los dígitos. Las deformaciones pueden llevar a confusiones entre diferentes clases, como se observa en las imágenes donde la predicción (Pred) y la etiqueta real (GT) no coinciden. Por este motivo, nos centramos en pequeñas deformaciones, para no alterar la identidad del objeto en la imagen. Imagen extraída de [ZKS⁺19].

aparecen a altas frecuencias [Hö71]. La mayor dificultad es mantener la Lipschitz-continuidad en dichas altas frecuencias.

Para preservar la estabilidad en $L^2(\mathbb{R}^d)$ queremos que Φ sea no-expansivo.

Definición 1.3. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Decimos que un operador $\Phi : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}$ es *no-expansivo* si:

$$\forall f, h \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|\Phi(f) - \Phi(h)\| \leq \|f - h\|,$$

donde $\|f\| := (\int |f(x)|^2 dx)^{1/2}$ denota la norma de f en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Este estudio se centrará en funciones $L^2(\mathbb{R}^d)$, donde se buscará desarrollar un operador que sea Lipschitz-continuo bajo la influencia de difeomorfismos y que conserve información esencial de alta frecuencia para distinguir entre distintos tipos de señales. Dentro de este marco, vamos a encargarnos de verificar la Lipschitz-continuidad relativa a la acción de pequeños difeomorfismos cercanos a las traslaciones. Dichos difeomorfismos transformarán un punto $x \in \mathbb{R}^d$ en $x - \tau(x)$, donde τ es el campo de desplazamiento. Denotaremos $(T_\tau f)(x) := f(x - \tau(x))$ como la acción del difeomorfismo $\mathbb{1} - \tau$ sobre f .

Es importante recordar que la condición de Lipschitz se define como:

Definición 1.4. Sea $f : M \rightarrow N$ una función entre dos espacios métricos M y N con sus respectivas distancias d_M y d_N . Decimos que f satisface la condición de Lipschitz si:

$$\exists C > 0 \quad \text{tal que} \quad d_N(f(x), f(y)) \leq Cd_M(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

En nuestro caso particular, dado que el espacio de partida es $L^2(\mathbb{R}^d)$ y las funciones que vamos a comparar son f y $T_\tau f$, sabemos que $\|\Phi(f) - \Phi(T_\tau f)\|$ estará limitada por $\|f\| d(\mathbb{1}, \mathbb{1} - \tau)$. Por lo tanto, necesitamos establecer una medida de distancia entre $\mathbb{1}$ y $\mathbb{1} - \tau$.

Definición 1.5. Se define una *distancia entre $\mathbb{1} - \tau$ y $\mathbb{1}$* en cualquier subconjunto compacto Ω de \mathbb{R}^d como:

$$d_\Omega(\mathbb{1}, \mathbb{1} - \tau) = \sup_{x \in \Omega} |\tau(x)| + \sup_{x \in \Omega} |(J\tau)(x)| + \sup_{x \in \Omega} |(H\tau)(x)|,$$

donde $|\tau(x)|$ denota la norma euclídea en \mathbb{R}^d , $|(J\tau)(x)|$ la norma del supremo de la matriz Jacobiana, y $|(H\tau)(x)|$ la norma del supremo del tensor Hessiano.

Dado que trabajaremos con funciones que son invariantes por traslaciones, la condición de Lipschitz no dependerá de la magnitud máxima de la traslación $\|\tau\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\tau(x)|$. Por esta razón, omitiremos este término. De este modo, podemos formular finalmente la condición de Lipschitz que un operador debe cumplir en nuestro caso:

Definición 1.6. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Un operador invariante por traslaciones $\Phi : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}$ se dice *Lipschitz-continuo* por la acción de los difeomorfismos C^2 si para cualquier compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ existe una constante $c > 0$ tal que para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ con soporte en Ω y para todo $\tau \in C^2(\mathbb{R}^d)$ se cumple:

$$\|\Phi(f) - \Phi(T_\tau f)\| \leq c \|f\| (\|J\tau\|_\infty + \|H\tau\|_\infty), \tag{1.1}$$

donde $\|J\tau\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |(J\tau)(x)|$ y $\|H\tau\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |(H\tau)(x)|$.

La continuidad Lipschitz de (1.1) implica que Φ es invariante por traslaciones globales, pero dicha condición es mucho más fuerte: (1.1) garantiza que Φ se ve poco afectada por los términos de primer y segundo grado de difeomorfismos que son traslaciones locales.

Tras haber introducido las principales herramientas con las que trabajaremos, veremos en las próximas secciones cómo la solución al problema implicará el uso de transformadas de ondículas. No obstante, esto introduce nuevos desafíos, como el hecho de que estas transformadas no son invariantes bajo traslaciones. Para lograr dicha invarianza, será necesario combinar la transformada con un operador no-lineal que nos permita obtener coeficientes invariantes. Este operador se construirá mediante una serie de convoluciones con operadores no-lineales y no comutativos, donde cada uno calculará el módulo de la transformada de ondículas. Este nuevo operador podrá interpretarse como la modelización matemática de una red neuronal

convolucional, pero no de cualquiera en general, sino un tipo particular, con el operador módulo como función de activación tras cada capa convolucional y sin ninguna capa de pooling).

Una vez realizada la modelización anterior, el objetivo de este trabajo será generalizar la teoría de Mallat sobre redes de dispersión considerando redes convolucionales más generales, con diferentes tipos de filtros convolucionales, funciones de activación no-lineales y operadores de pooling. Finalmente, estudiaremos su invarianza vertical por translaciones, en el sentido de que las características se vuelven progresivamente más invariantes a las translaciones a medida que aumenta la profundidad de la red.

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

Nuestro primer objetivo será abordar la formulación matemática de una red neuronal convolucional con el operador módulo como función de activación tras cada capa convolucional y sin ninguna capa de pooling. Para ello, necesitamos definir un operador, al que llamaremos propagador de dispersión, que se aplicará de manera recursiva en una cascada de convoluciones. También discutiremos los desafíos asociados con la elección de un operador que sea continuo de acuerdo con la condición de Lipschitz bajo la acción de difeomorfismos y que sea invariante bajo traslaciones. Esto ayudará a evitar problemas como la inestabilidad de altas frecuencias que puede surgir en las señales afectadas por difeomorfismos.

En segundo lugar, exploraremos posibles soluciones para prevenir la aparición de estas inestabilidades, utilizando bases derivadas de la transformada de ondículas de Littlewood-Paley. Con esta opción, conseguiremos un operador Lipschitz-continuo bajo la acción de difeomorfismos.

A continuación, nuestro objetivo será obtener coeficientes que permanezcan invariantes ante traslaciones. Para lograrlo, será necesario emplear un operador no-lineal, como es el módulo.

Una vez hayamos definido un operador que cumpla con todas las propiedades mencionadas, presentaremos el propagador de dispersión. Este será el resultado de aplicar dicho operador en cadena a lo largo de un “camino” de frecuencias y rotaciones, lo que nos permitirá describir matemáticamente una red neuronal convolucional con el operador módulo como función de activación tras cada capa convolucional y sin ninguna capa de pooling.

Este capítulo se basa en la investigación de Mallat (véase [Figura 2.1](#)), siguiendo como referencia su trabajo, [\[Mal12\]](#) y [\[Malo8\]](#), junto con las contribuciones de otros autores que serán citados de forma adecuada.

2.1. Evolución matemática: De Fourier a Littlewood-Paley

2.1.1. La transformada de Fourier y sus limitaciones

El Análisis de Fourier ha sido históricamente esencial en el campo del Procesamiento de Señales, lo que sugiere que la transformada de Fourier podría ser un excelente punto de inicio para desarrollar un propagador de dispersión, dado su reconocido poder en este ámbito. La idea principal detrás de la transformada de Fourier es representar funciones no periódicas, que sin embargo tienen un área definida bajo su curva, mediante la suma de senos y cosenos, cada uno ponderado por una función específica que asigna su importancia en cada momento.

Definición 2.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, donde $L^1(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < \infty \right\}$. Se define la *transformada de Fourier* de f como la función:

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión



Figura 2.1.: Stéphane Mallat, reconocido matemático e investigador, cuyos trabajos en teoría de ondículas y redes neuronales convolucionales han marcado importantes avances en el campo del Procesamiento de Señales y Aprendizaje Profundo. Imagen extraída de [Ins24].

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) [\cos(\langle x, \omega \rangle) - i \sin(\langle x, \omega \rangle)] dx,$$

donde $\langle x, y \rangle$ denota el producto escalar entre $x, y \in \mathbb{R}^d$.

La [Definición 2.1](#) se extiende en el sentido usual a $L^2(\mathbb{R}^d)$ ([\[Rud91\]](#), Teorema 7.9).

Una de las características más notables de la transformada de Fourier es su capacidad para reconstruir una función a partir de su representación en el dominio de las frecuencias sin ninguna pérdida de datos. Esto hace posible operar en el denominado dominio de Fourier, también llamado dominio de frecuencia, donde la función transformada depende únicamente de la variable de frecuencia ω . Posteriormente, es factible retornar al dominio original de la función utilizando la transformada inversa de Fourier, también sin incurrir en pérdidas de información.

Esta característica inicialmente resulta bastante ventajosa, ya que permite manejar la información en un dominio más simple y deducir resultados que se pueden revertir al dominio original de la señal sin comprometer la integridad de la información. Además, en el análisis de señales, es común utilizar el módulo de la transformada de Fourier para simplificar el análisis al evitar las fases complejas. Por lo tanto, el primer operador que vamos a evaluar es el módulo de la transformada de Fourier.

Definición 2.2. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Definimos el operador $\Phi : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}$, $\Phi(f) := |\widehat{f}|$, como el *módulo de la transformada de Fourier*.

Primero, para determinar si este operador es adecuado para nuestros objetivos, necesitamos confirmar que sea invariante por traslaciones.

Lema 2.1. *El operador $\Phi(f) = |\widehat{f}|$ es invariante por traslaciones.*

Demostración. Para cada $t \in \mathbb{R}^d$, consideramos la traslación $(T_t f)(x) = f(x - t)$. Se tiene que:

$$\widehat{(T_t f)}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} (T_t f)(x) e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - t) e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} dx.$$

Realizando el cambio de variable $y = x - t$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x - t) e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i \langle (y+t), \omega \rangle} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i \langle y, \omega \rangle} e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dy \\ &= e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i \langle y, \omega \rangle} dy \\ &= e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} \widehat{f}(\omega) \end{aligned}$$

Por tanto, $|\widehat{(T_t f)}(\omega)| = |e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle}| |\widehat{f}(\omega)| = |\widehat{f}(\omega)|$. Esto demuestra que el operador $\Phi(f) = |\widehat{f}|$ es invariante por traslaciones. \square

No obstante, solo asegurar la invarianza por traslaciones no es adecuado. También es crucial que nuestro operador mantenga su invarianza cuando se enfrenta a pequeñas deformaciones o difeomorfismos. Por lo tanto, un operador $\Phi(f)$ se considerará estable ante deformaciones si cumple con la [Definición 1.6](#).

Sin embargo, como ya hemos comentado anteriormente, las deformaciones conducen a instabilidades bien conocidas en altas frecuencias [[Hö71](#)]. Esto se ilustra con un pequeño operador de escala, $(T_\tau f)(x) = f(x - \tau(x)) = f((1 - \epsilon)x)$, para $\tau(x) = \epsilon x$, con $0 < \epsilon \ll 1$, $\|J\tau(x)\|_\infty = \epsilon$ y $\|H\tau(x)\|_\infty = 0$. Con esto, la condición de Lipschitz para el módulo de la transformada de Fourier nos daría la existencia de una constante $c > 0$ de modo que la desigualdad que se tendría que cumplir para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y cada $0 < \epsilon \ll 1$ sería:

$$|| |\widehat{f}| - |\widehat{T_\tau f}| || \leq c \|f\| (\|J\tau\|_\infty + \|H\tau\|_\infty) = c \|f\| \epsilon. \quad (2.1)$$

Esto implica encontrar una constante $c > 0$ que satisfaga la desigualdad para cualquier valor de ϵ . A continuación, veremos un ejemplo sencillo con una función unidimensional para mayor claridad. Si $f(x) = e^{i\langle x, \xi \rangle} \Theta(x)$, entonces escalar por $1 - \epsilon$ traslada la frecuencia central

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

ξ a $(1 - \epsilon)\xi$. Si Θ es regular con un decaimiento rápido (es decir, tiende a cero rápidamente a medida que x se aleja del origen), entonces:

$$|| |\widehat{f}| - |\widehat{T_\tau f}| || \sim |\xi| ||\Theta||\epsilon = |\xi| ||f||\epsilon$$

Dado que $|\xi|$ puede ser arbitrariamente grande, $\Phi(f) = |\widehat{f}|$ no satisface la condición de continuidad de Lipschitz al escalar frecuencias altas, ya que no es posible encontrar una constante $c > 0$ tal que la desigualdad (2.1) se cumpla para cualquier valor de ϵ .

Para abordar el problema del módulo de la transformada de Fourier, sustituiremos las ondas sinusoidales por funciones localizadas que presenten un soporte más amplio en las altas frecuencias, lo que resultará más eficaz para nuestros objetivos. Estas funciones son conocidas como ondículas.

2.1.2. Ondículas como alternativa a la transformada de Fourier

Las ondículas (*wavelets* en inglés) son funciones matemáticas que permiten descomponer señales en diferentes niveles de detalle y resolución, ofreciendo una representación localizada tanto en tiempo como en frecuencia. A diferencia de las ondas sinusoidales utilizadas en la transformada de Fourier, las ondículas son de duración finita y pueden adaptarse mejor a cambios locales de una señal, es decir, permanecen estables frente a pequeñas deformaciones. Cada ondícula se define por una función madre que se desplaza y escala para cubrir la totalidad de la señal, proporcionando una descomposición jerárquica que es útil para detectar detalles específicos y discontinuidades en las señales y las imágenes. Esto hace que sean especialmente útiles para la compresión de imágenes, el análisis de texturas y la detección de bordes. Introduciremos la transformada de ondículas y veremos cómo, a través de convoluciones con bases de ondículas, se obtienen coeficientes que son robustos ante la acción de difeomorfismos.

A diferencia de las bases de Fourier, las bases de ondículas ofrecen representaciones dispersas de señales con regiones que son solo parcialmente regulares, permitiendo capturar características como transiciones y singularidades. En imágenes, los coeficientes más grandes de las ondículas se concentran alrededor de zonas con esquinas o texturas irregulares.

Como ejemplo, consideraremos la base de Haar, que aunque no será utilizada para construir nuestro propagador de dispersión, puede servir para ilustrar mejor el concepto de las ondículas. La explicación que sigue está inspirada en [Malo8].

La base de Haar se define a partir de la siguiente función:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq t < 1, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos visualizar una representación gráfica de esta en [Figura 2.2.](#)

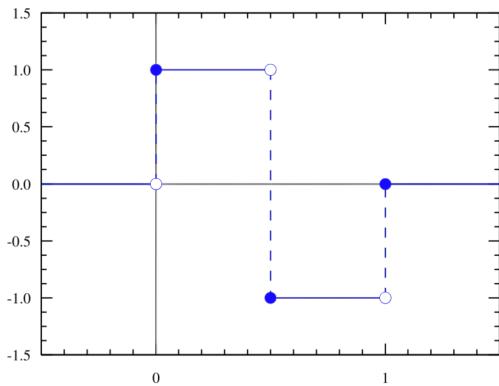


Figura 2.2.: Representación gráfica de la función base de Haar. Imagen extraída de [\[Wik24\]](#).

Denominamos a esta ondícula como ondícula madre, ya que, a partir de ella, es posible generar la base ortonormal:

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

del espacio $L^2(\mathbb{R})$ de señales con energía finita (es decir, señales cuya integral del cuadrado de su valor absoluto es finita).

De este modo, cualquier señal f con energía finita puede ser expresada mediante los coeficientes que se obtienen al calcular el producto interno en $L^2(\mathbb{R})$ con la base mencionada anteriormente:

$$\langle f, \psi_{j,n} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,n}(t) dt.$$

Y así, dicha señal puede reconstruirse realizando la suma sobre su base ortonormal:

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}.$$

Esto nos permite, al igual que con el módulo de la transformada de Fourier, trabajar en un dominio más simple donde es posible procesar la información de forma más eficiente, y luego reconstruir la señal a partir de los coeficientes sin perder ningún detalle.

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

Una de las características de la base de Haar es que sus coeficientes más altos se concentran en las zonas donde hay cambios abruptos de la señal, como bordes, esquinas o texturas en imágenes. Esto ocurre porque en esos casos es posible encontrar un elemento de la base de Haar cuyo soporte coincide con el intervalo donde ocurre el cambio, generando así un coeficiente de ondícula diferente de cero.

En el caso específico de las imágenes, las bases ortonormales de ondículas pueden ser construidas a partir de las correspondientes bases ortonormales en señales unidimensionales. Para capturar las variaciones en la imagen, utilizaremos tres ondículas, cada una diseñada para identificar los cambios en direcciones horizontales, verticales y diagonales de la imagen. Así, si denominamos a las ondículas como $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$ y $\psi^3(x)$, con $x \in \mathbb{R}^2$, siendo estas dilatadas por un factor 2^j , con $j \in \mathbb{Z}$, y trasladadas por $2^j n$, con $n \in \mathbb{Z}^2$, entonces podemos construir una base ortonormal para el espacio $L^2(\mathbb{R})$:

$$\left\{ \psi_{j,n}^k(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi^k \left(\frac{x - 2^j n}{2^j} \right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2, 1 \leq k \leq 3}$$

El soporte de la ondícula $\psi_{j,n}^k(x)$ tiene la forma de un cuadrado cuya dimensión es proporcional a la escala 2^j (véase Figura 2.3). Para representar imágenes con N píxeles, las bases de ondículas bidimensionales se discretizan y definen una base ortonormal.

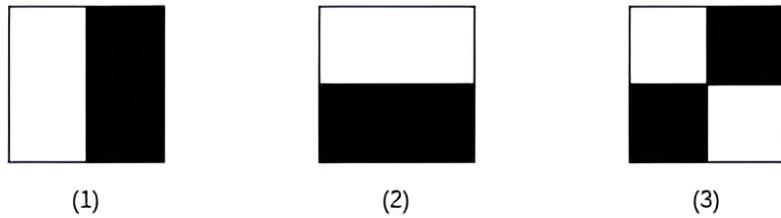


Figura 2.3.: Filtro generado por el soporte de una ondícula para detectar bordes (1) verticales, (2) horizontales y (3) diagonales. Imagen elaborada por el autor.

Al igual que en el caso unidimensional, los coeficientes de las ondículas $\langle f, \psi_{j,n}^k \rangle$ serán pequeños si $f(x)$ es regular, y serán grandes cerca de los cambios abruptos de frecuencia, como en los bordes o esquinas de las imágenes (véase Figura 2.4).

Para avanzar en la definición del propagador de dispersión, la elección de la ondícula madre y la base ortogonal asociada estarán sujetas a cambios por escalados y rotaciones. Por lo tanto, introducimos la siguiente definición:

Definición 2.3. Una *ondícula madre escalada por un factor 2^j* , con $j \in \mathbb{Z}$, y *rotada por $r \in G$* , siendo G el grupo finito de rotaciones, se define como:

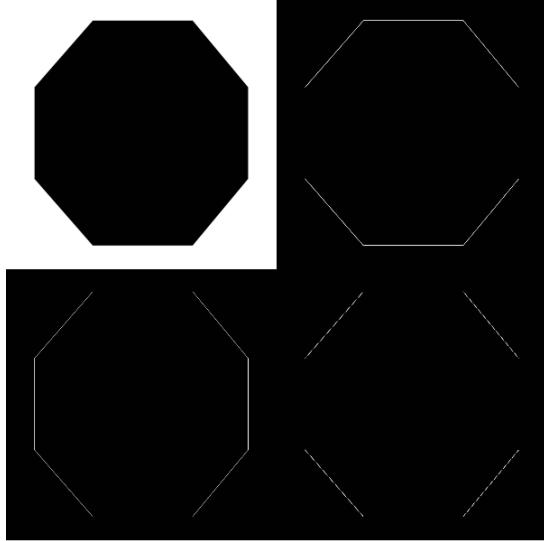


Figura 2.4.: Ejemplo de aplicación de la base de Haar a una imagen (arriba izquierda). Los filtros destacan los bordes en tres direcciones: horizontal (arriba derecha), vertical (abajo izquierda) y diagonal (abajo derecha). Imagen extraída de [Jor24].

$$\psi_{2^j r}(x) = 2^j \psi(2^j r^{-1} x).$$

Su transformada de Fourier es:

$$\widehat{\psi}_{2^j r}(\omega) = \widehat{\psi}(2^{-j} r^{-1} \omega).$$

La transformada de dispersión que utilizaremos contará con una base de ondículas generada por una ondícula madre del siguiente tipo:

$$\psi(x) = e^{i\langle x, \eta \rangle} \Theta(x),$$

donde $\Theta(x)$ es una función real con soporte en una bola de baja frecuencia centrada en $x = 0$, con radio del orden de π .

La transformada de Fourier de esta función se puede escribir como:

$$\widehat{\psi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \eta \rangle} \Theta(x) e^{-2\pi i\langle x, \omega \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(x) e^{-2\pi i\langle x, \omega - \eta \rangle} dx = \widehat{\Theta}(\omega - \eta),$$

lo que significa que $\widehat{\psi}(\omega)$ está centrada en una bola con el mismo radio, pero ubicada en $\omega = \eta$. Tras el escalado y la rotación, esto resulta en:

$$\widehat{\psi}_\lambda(\omega) = \widehat{\Theta}(\lambda^{-1}\omega - \eta),$$

donde $\lambda = 2^j r \in 2^{\mathbb{Z}} \times G$. En consecuencia, $\widehat{\psi}_\lambda(\omega)$ tiene soporte en una bola centrada en $\lambda^{-1}\eta$ con radio proporcional a $|\lambda| = 2^j$.

2.1.3. La transformada de Littlewood-Paley

Después de conocer más a fondo las ondículas y su funcionamiento, presentamos la *transformada de ondículas de Littlewood-Paley*, que utilizaremos para construir el propagador de dispersión. Su expresión es la siguiente:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (W[\lambda]f)(x) = f * \psi_\lambda(x) = \int f(u)\psi_\lambda(x-u)du,$$

donde $*$ denota la operación de convolución.

Calculamos ahora su transformada de Fourier, teniendo en cuenta el *teorema de convolución de la transformada de Fourier*:

Teorema 2.1. *Sean f y g dos funciones integrables. Si:*

$$h(x) = (f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy,$$

entonces:

$$\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega),$$

y:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} d\omega.$$

De este modo, obtenemos que:

$$\widehat{(W[\lambda]f)}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{\psi}_\lambda(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{\psi}(\lambda^{-1}\omega).$$

Considerando que si f es real, su transformada coincide con el conjugado complejo $\widehat{f}(-\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)}$, podemos observar que:

- Si $\widehat{\psi}(\omega)$ y f son reales, entonces $W[-\lambda]f = \overline{W[\lambda]f}$. Además, al denominar por G^+ el cociente de G sobre $\{-1, 1\}$, donde r y $-r$ son equivalentes, basta calcular $W[2^j r]f$ para las rotaciones positivas de G^+ .

- En caso de que f sea compleja, se necesitaría calcular $W[2^j r]f$ para todo $r \in G$.

Podemos comprender que, a menor sea el factor de escala que afecta a la ondícula, más comprimida estará, y viceversa. Esto nos permite establecer una relación entre la frecuencia y la escala (véase [Figura 2.5](#)):

- Una escala pequeña implica una ondícula más comprimida, lo que permite detectar rápidamente los cambios en la señal, resultando en frecuencias más altas.
- En cambio, una escala mayor produce una ondícula más dilatada, donde solo se detectarán los cambios más abruptos, y las frecuencias resultantes serán más bajas.



[Figura 2.5.](#): Como se observa en el caso de la izquierda, la ondícula está afectada por una escala más pequeña, lo que le permite detectar cambios en la señal con mayor precisión a frecuencias más altas a lo largo del tiempo mediante la convolución. En contraste, en el caso de la derecha, la ondícula está sujeta a una escala mayor, lo que reduce su capacidad para detectar con precisión las variaciones en la señal. Imagen extraída de [\[Wor24\]](#).

Con la transformada de Littlewood-Paley sucede algo similar: a una cierta escala 2^J (con $J \in \mathbb{Z}$ fijo), solo se conservan las ondículas afectadas por un factor de escala $2^j > 2^{-J}$. Esto genera un umbral a partir del cual la base ortonormal de ondículas no podría identificar cambios de frecuencia. Por lo tanto, surge la necesidad de promediar las bajas frecuencias que no son captadas por estas ondículas en un dominio proporcional al factor 2^J :

$$A_J f = f * \phi_{2^J}, \quad \text{con} \quad \phi_{2^J}(x) = 2^{-J} \phi(2^{-J}x),$$

donde ϕ es una función fija, de la cual dependerá la transformada de ondículas.

Si f es una función real, la transformada de ondículas se expresa de la siguiente forma:

$$W_J f = \{A_J f, (W[\lambda]f)_{\lambda \in \Lambda_J}\},$$

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

es decir, se compone del promedio de todas las ondículas de la base que no tienen soporte en la escala fija 2^J , junto con el conjunto de coeficientes resultantes de convolucionar cada elemento de la base con la señal f para escalas $2^j > 2^{-J}$. Para esto, indexamos por $\Lambda_J = \{\lambda = 2^j r : r \in G^+, 2^j > 2^{-J}\}$.

Su norma sería:

$$\|W_J f\|^2 = \|A_J f\|^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda_J} \|W[\lambda]f\|^2. \quad (2.2)$$

Si $J = \infty$, entonces todas las ondículas de la base tendrían coeficientes distintos de cero, por lo que:

$$W_\infty f = \{W[\lambda]f\}_{\lambda \in \Lambda_\infty},$$

$$\text{con } \Lambda_\infty = 2^\mathbb{Z} \times G^+.$$

La norma en este caso sería:

$$\|W_\infty f\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda_\infty} \|W[\lambda]f\|^2.$$

Si f es compleja, se incluyen todas las rotaciones, obteniendo $W_J f = \{A_J f, (W[\lambda]f)_{\lambda, -\lambda \in \Lambda_J}\}$ y $W_\infty f = \{W[\lambda]f\}_{\lambda, -\lambda \in \Lambda_\infty}$.

La siguiente proposición establece una condición estándar de Littlewood-Paley para que W_J sea unitario:

Proposición 2.1. *Para cualquier $J \in \mathbb{Z}$ o $J = \infty$, W_J es unitario en el espacio de funciones reales o complejas de $L^2(\mathbb{R}^d)$ si, y solo si, para casi todo $\omega \in \mathbb{R}^d$ se cumple:*

$$\beta \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 = 1 \quad y \quad |\widehat{\phi}(\omega)|^2 = \beta \sum_{j=-\infty}^0 \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2, \quad (2.3)$$

donde $\beta = 1$ para funciones complejas y $\beta = \frac{1}{2}$ para funciones reales.

Demostración. Si f es una función compleja, entonces tenemos $\beta = 1$, y vamos a demostrar que (2.3) es equivalente a:

$$\forall J \in \mathbb{Z}, \quad |\widehat{\phi}(2^J\omega)|^2 + \sum_{j>-J, r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 = 1. \quad (2.4)$$

Partiendo de (2.3) con $\beta = 1$, se obtiene:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 = 1 \quad \text{y} \quad |\widehat{\phi}(\omega)|^2 = \sum_{j=-\infty}^0 \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2.$$

Sumando $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2$ en la segunda ecuación, obtenemos:

$$|\widehat{\phi}(\omega)|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 = 1.$$

Por otro lado, si nos dirigimos a la expresión que buscamos demostrar, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \forall J \in \mathbb{Z}, \quad & |\widehat{\phi}(2^J \omega)|^2 + \sum_{j>-J, r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 = 1 \iff \\ \iff \forall J \in \mathbb{Z}, \quad & |\widehat{\phi}(2^J \omega)|^2 = \sum_{j=-\infty}^{-J} \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2. \end{aligned}$$

Con lo cual, si demostramos esta última equivalencia, tendremos que (2.3) y (2.4) son equivalentes cuando $\beta = 1$. Así:

$$|\widehat{\phi}(2^J \omega)|^2 = \sum_{j=-\infty}^0 \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}2^J \omega)|^2 = \sum_{j=-\infty}^0 \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{J-j}r^{-1}\omega)|^2 = \sum_{j=-\infty}^{-J} \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2.$$

De esta manera, queda demostrado que las ecuaciones (2.3) y (2.4) son equivalentes, considerando que $\beta = 1$.

Como $(\widehat{W[2^j r]} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) \widehat{\psi}_{2^j r}(\omega)$, entonces multiplicando la ecuación (2.4) por $|\widehat{f}(\omega)|^2$, obtenemos:

$$\forall J \in \mathbb{Z}, \quad |\widehat{\phi}(2^J \omega)|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 + \sum_{j>-J, r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 = |\widehat{f}(\omega)|^2.$$

Si ahora integramos en ambos miembros sobre \mathbb{R}^d , obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(|\widehat{\phi}(2^J \omega)|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 + \sum_{j>-J, r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 \right) d\omega = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

Aplicando la *fórmula de Plancherel*, que nos indica que para el caso de \mathbb{R}^d se cumple la igualdad $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega$, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(|\phi(2^J x)|^2 |f(x)|^2 + \sum_{j>-J, r \in G} |\psi(2^{-j} r^{-1} x)|^2 |f(x)|^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx.$$

Si ahora tomamos en cuenta la ecuación (2.2), obtenemos que la expresión anterior es equivalente a:

$$\|A_J f\|^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda_J} \|W[\lambda]f\|^2 = \|W_J f\|^2 = \|f\|^2,$$

que es válido para todo J , y en particular también para $J = \infty$.

Recíprocamente, si $\|W_J f\|^2 = \|f\|^2$, entonces (2.4) se cumple para casi todo ω . De no ser así, podríamos construir una función f no nula cuya transformada de Fourier \widehat{f} tuviera soporte en una región de ω donde (2.4) no se verificaría. En ese caso, al aplicar la fórmula de Plancherel, obtendríamos que $\|W_J f\|^2 \neq \|f\|^2$, lo cual contradice la hipótesis. Dado que (2.4) es equivalente a lo demostrado anteriormente, queda probado el resultado para el caso en que f es compleja.

Si ahora f es real, entonces $|\widehat{f}(\omega)| = |\widehat{f}(-\omega)|$, lo que implica que $\|W[2^j r]f\| = \|W[-2^j r]f\|$. Por lo tanto, $\|W_J f\|$ permanece constante si restringimos r a G^+ , y al multiplicar ψ por $\sqrt{2}$ obtenemos la condición (2.3) con $\beta = \frac{1}{2}$.

□

2.1.4. Convenciones para futuras secciones

Llegados a este punto, ya contamos con la transformada de ondículas que utilizaremos para la construcción del propagador de dispersión. A continuación, definimos algunas propiedades que impondremos a los elementos que la componen y que usaremos de ahora en adelante:

- $\widehat{\psi}$ es una función real que satisface la condición (2.3), lo que implica que $\widehat{\psi}(0) = \int \psi(x) dx = 0$ y $|\widehat{\psi}(r\omega)| = |\widehat{\psi}(\omega)|$, $\forall r \in G$.
- $\widehat{\phi}(\omega)$ es real y simétrica, por lo que ϕ también lo es, y $\phi(rx) = \phi(x)$, $\forall r \in G$.
- Las derivadas de ϕ pertenecen a $L^1(\mathbb{R}^d)$.

A continuación, introducimos algo de notación que utilizaremos de ahora en adelante:

2.2. El operador de dispersión sobre un camino ordenado

- Se denota $(g \circ f)(x) := f(gx)$ a la acción de un elemento del grupo $g \in G$.
- Un operador R parametrizado por p es denotado por $R[p]$ y $R[\Omega] := \{R[p]\}_{p \in \Omega}$.

Un cambio de variable en la integral de la transformada de ondículas nos muestra que si f se escala y rota, $(2^l g) \circ f = f(2^l gx)$, con $2^l g \in 2^{\mathbb{Z}} \times G$, entonces la transformada de ondículas se escala y rota de acuerdo a:

$$W[\lambda](2^l g \circ f) = 2^l g \circ (W[2^{-l} g \lambda]f).$$

Como ϕ es invariante a rotaciones en G , podemos comprobar que A_J commuta con las rotaciones de G :

$$A_J(g \circ f) = g \circ (A_J f), \forall g \in G.$$

2.2. El operador de dispersión sobre un camino ordenado

2.2.1. Obtención de coeficientes invariantes por traslaciones

La transformada de Littlewood-Paley discutida anteriormente cumple con la propiedad de ser Lipschitz-continua bajo difeomorfismos, ya que las ondículas que emplea están localizadas y son regulares. No obstante, todavía no es invariante a traslaciones, pues cuando se traslada f , también se traslada $W[\lambda]f = f * \psi_\lambda$. El siguiente objetivo es calcular coeficientes que permanezcan invariables frente a traslaciones, que permanezcan estables bajo la acción de difeomorfismos y que retengan la información en altas frecuencias que proporcionan las ondículas. Reuniendo todas estas propiedades, podemos conformar el operador adecuado que permitirá la construcción del propagador de dispersión.

Los coeficientes que se mantienen invariables bajo traslaciones serán obtenidos a través de la acción de un operador no-lineal, lo cual nos lleva al siguiente lema:

Lema 2.2. Si $U[\lambda]$ es un operador definido en $L^2(\mathbb{R}^d)$, no necesariamente lineal pero que commuta con traslaciones, entonces $\int_{\mathbb{R}^d} (U[\lambda]f)(x) dx$ es invariante a traslaciones si es finito.

Demostración. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{R}^d$ y $(T_t f)(x) = f(x - t)$ una traslación de f . Como $U[\lambda]f$ commuta con traslaciones, se tiene que:

$$(U[\lambda](T_t f))(x) = U[\lambda](f(x - t)) = (U[\lambda]f)(x - t) = (T_t(U[\lambda]f))(x)$$

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

Vamos a comprobar ahora que si $\int_{\mathbb{R}^d} (U[\lambda]f)(x)dx$ es finito, entonces la integral es invariante a traslaciones. En otras palabras, queremos comprobar que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (U[\lambda](T_tf))(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} (U[\lambda]f)(x)dx$$

Para ello, si tenemos en cuenta la conmutatividad del operador $U[\lambda]$, se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (U[\lambda](T_tf))(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} U[\lambda](f(x-t))dx = \int_{\mathbb{R}^d} (U[\lambda]f)(x-t)dx.$$

Y tras esto, basta tener en cuenta el cambio de variable $y = x - t$, con Jacobiano igual a uno, y se tendría en la expresión anterior:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (U[\lambda]f)(x-t)dx = \int_{\mathbb{R}^d} (U[\lambda]f)(y)dy.$$

Por lo que la integral es invariante por traslaciones. □

En nuestro caso, $W[\lambda]f = f * \psi_\lambda$ es un ejemplo trivial de este lema, ya que es un operador que conmuta con traslaciones y $\int_{\mathbb{R}^d} (f * \psi)(x)dx = 0$, debido a que $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx = 0$.

Para lograr un operador no trivial $U[\lambda]f$ que sea invariante a traslaciones, necesitamos combinar $W[\lambda]$ con un operador no-lineal adicional $M[\lambda]$, llamado *operador de demodulación*. Este operador de demodulación convierte $W[\lambda]f$ en una función de frecuencia más baja cuya integral es diferente de cero. Además, la elección de $M[\lambda]$ debe preservar la continuidad de Lipschitz bajo la acción de los difeomorfismos. En resumen, buscamos un operador no-lineal que produzca coeficientes invariantes bajo traslaciones, no triviales, y que también conserve la Lipschitz-continuidad.

A continuación, mostramos un ejemplo para ilustrar mejor este concepto.

Si la ondícula madre es de la forma $\psi(x) = e^{i\langle x, \eta \rangle} \Theta(x)$, entonces los elementos de la base resultan ser $\psi_\lambda(x) = e^{i\lambda\langle x, \eta \rangle} \Theta_\lambda(x)$, por lo tanto:

$$(W[\lambda]f)(x) = f * \psi_\lambda(x) = (f * e^{i\lambda\langle x, \eta \rangle} \Theta_\lambda)(x) = e^{i\lambda\langle x, \eta \rangle} ((f^\lambda * \Theta_\lambda)(x)), \quad (2.5)$$

con $f^\lambda(x) = e^{-i\lambda\langle x, \eta \rangle} f(x)$.

Para lograr un operador invariante a traslaciones, es posible eliminar el término de modulación $e^{i\lambda\langle x, \eta \rangle}$ mediante una función $M[\lambda]$. Por ejemplo:

$$(M[\lambda]h)(x) = e^{-i\lambda\langle x, \eta \rangle} e^{-i\Phi(\widehat{h}(\lambda\eta))} h(x),$$

donde $\Phi(\widehat{h}(\lambda\eta))$ es la fase compleja de $\widehat{h}(\lambda\eta)$. Este registro de fase no-lineal asegura que $M[\lambda]$ permanece invariante bajo traslaciones, dado que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (M[\lambda](W[\lambda]f))(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\lambda\langle x, \eta \rangle} e^{-i\Phi(\widehat{W[\lambda]f})} \left(e^{i\lambda\langle x, \eta \rangle} \left(((e^{-i\lambda\langle x, \eta \rangle} f) * \Theta_\lambda)(x) \right) \right) dx \\ &= e^{-i\Phi(\widehat{f}(\lambda\eta)\widehat{\psi}_\lambda(\lambda\eta))} \int_{\mathbb{R}^d} ((e^{-i\lambda\langle x, \eta \rangle} f) * \Theta_\lambda)(x) dx \\ &= e^{-i\Phi(\widehat{f}(\lambda\eta)\widehat{\psi}_\lambda(\lambda\eta))} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\lambda\langle x, \eta \rangle} f(x) dx \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_\lambda(x) dx \\ &= e^{-i\Phi(\widehat{f}(\lambda\eta)\widehat{\psi}_\lambda(\lambda\eta))} \cdot \widehat{f}(\lambda\eta) \cdot \widehat{\Theta}_\lambda(0) \\ &= |\widehat{f}(\lambda\eta) \cdot \widehat{\Theta}_\lambda(0)| \\ &= |\widehat{f}(\lambda\eta)| |\widehat{\Theta}_\lambda(0)| \\ &= |\widehat{f}(\lambda\eta)| |\widehat{\Theta}(0)| \end{aligned}$$

Como podemos observar, la integral resulta ser no trivial y, por otro lado, obtenemos el módulo de la transformada de Fourier que, como se discutió en el [Lema 2.1](#), es invariante por traslaciones. Sin embargo, este operador no será utilizado para nuestros fines, ya que, además de ser complejo, no cumple con las condiciones de invarianza bajo la acción de difeomorfismos.

2.2.2. El operador módulo

En nuestro caso, para garantizar la Lipschitz-continuidad bajo difeomorfismos, es necesario que $M[\lambda]$ commute con estos, y que además sea no-expansivo, asegurando así la estabilidad en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Se demuestra que, en tales condiciones, $M[\lambda]$ debe ser un operador de punto a punto [[Bru12](#)], lo que implica que el operador $(M[\lambda]h)(x)$ que buscamos dependería únicamente del valor de h en el punto x .

Para obtener mejores propiedades, vamos a imponer que $\|M[\lambda]h\| = \|h\|$, $\forall h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, lo que implica que $|M[\lambda]h| = |h|$, ya que:

$$\begin{aligned} \|M[\lambda]h\| = \|h\| &\iff \left(\int_{\mathbb{R}^d} |(M[\lambda]h)(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\iff \int_{\mathbb{R}^d} |(M[\lambda]h)(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^2 dx \end{aligned}$$

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

$$\begin{aligned} &\iff \int_{\mathbb{R}^d} \left(|(M[\lambda]h)(x)|^2 - |h(x)|^2 \right) dx = 0 \\ &\iff |(M[\lambda]h)(x)|^2 - |h(x)|^2 = 0 \\ &\iff |(M[\lambda]h)(x)| = |h(x)|. \end{aligned}$$

Para alcanzar la conclusión sugerida por el autor [Mal12], se ha supuesto que $|(M[\lambda]h)(x)| \geq |h(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, lo que junto con el hecho de que ambas funciones en el integrando son positivas, nos da el resultado esperado.

Con el fin de cumplir con todas las restricciones establecidas, aplicaremos el operador $M[\lambda]h = |h|$, el cual elimina cualquier variación en la fase, tal como se indica en [BM13]. Así, de acuerdo con la ecuación (2.5), este módulo convierte $W[\lambda]f$ en una señal con una frecuencia más baja que la original:

$$M[\lambda](W[\lambda]f) = |W[\lambda]f| = |f^\lambda * \Theta_\lambda|.$$

Vamos a ilustrar con un ejemplo cómo, cuando dos señales interfieren al aplicar este operador, la frecuencia resultante es más baja que cualquiera de las frecuencias originales:

Si $f(x) = \cos(\xi_1 x) + a \cos(\xi_2 x)$, donde $\xi_1 > 0$ y $\xi_2 > 0$ están en la banda de frecuencia de $\widehat{\psi}_\lambda$, entonces, aplicando el operador módulo obtenemos:

$$|(f * \psi_\lambda)(x)| = 2^{-1} \left| \widehat{\psi}_\lambda(\xi_1) + a \widehat{\psi}_\lambda(\xi_2) e^{i(\xi_2 - \xi_1)x} \right|,$$

que oscila en la frecuencia de interferencias $|\xi_2 - \xi_1|$, que es menor que $|\xi_1|$ y $|\xi_2|$.

De este modo, dado cómo hemos construido el operador $U[\lambda]f$, la integral $\int_{\mathbb{R}^d} (U[\lambda]f)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} |(f * \psi_\lambda)(x)| dx$ se mantiene invariante por traslaciones, aunque elimina las frecuencias altas de $|f * \psi_\lambda|$. Para recuperar estas frecuencias, el propagador de dispersión calcula los coeficientes de ondículas para cada $U[\lambda]f$, es decir, $\{U[\lambda]f * \psi_{\lambda'}\}_{\lambda'}$. Nuevamente, los coeficientes invariantes por traslaciones se calculan con el módulo $U[\lambda'](U[\lambda]f) = |(U[\lambda]f) * \psi_{\lambda'}|$, e integrando $\int_{\mathbb{R}^d} (U[\lambda'](U[\lambda]f))(x) dx$.

Tomando como ejemplo el caso anterior, $f(x) = \cos(\xi_1 x) + a \cos(\xi_2 x)$, con $a < 1$, si $|\xi_2 - \xi_1| \ll |\lambda|$, con $|\xi_2 - \xi_1|$ dentro del soporte de $\widehat{\psi}_{\lambda'}$, entonces $U[\lambda'](U[\lambda]f)$ es proporcional a $a \cdot |\psi_\lambda(\xi_1)| \cdot |\psi_{\lambda'}(\xi_2 - \xi_1)|$. La segunda ondícula $\widehat{\psi}_{\lambda'}$ capta las interferencias creadas por el módulo, entre las frecuencias de las componentes de f y el soporte de $\widehat{\psi}_\lambda$.

2.2.3. El propagador de dispersión

Estamos ya en condiciones de definir el propagador de dispersión.

2.2. El operador de dispersión sobre un camino ordenado

Definición 2.4. Una secuencia de elementos ordenados $p = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ con $\lambda_k \in \Lambda_\infty = 2^\mathbb{Z} \times G^+$ se conoce como *camino*. El camino vacío se representa por $p = \emptyset$.

Definición 2.5. Un *propagador de dispersión* es un producto por un camino ordenado de operadores no comutativos de la forma $U[\lambda]f = M[\lambda](W[\lambda]f) = |f * \psi_\lambda| = |\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\psi_\lambda(x-u)du|$, con $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Es decir:

$$U[p]f = U[\lambda_m] \cdots U[\lambda_2]U[\lambda_1],$$

con $U[\emptyset] = Id$.

El operador $U[p]$ está bien definido en $L^2(\mathbb{R}^d)$ porque $\|U[\lambda]f\| = \|f\| \leq \|\psi_\lambda\|_1 \|f\|$, para todo $\lambda \in \Lambda_\infty$, donde $\|f\|_1 := \int |f(x)|dx$ denota la norma de f en $L^1(\mathbb{R}^d)$.

El propagador de dispersión es por tanto una cascada de convoluciones y módulos:

$$U[p]f = \left| |f * \psi_{\lambda_1}| * \psi_{\lambda_2} | \cdots * \psi_{\lambda_m} \right|$$

Cada $U[\lambda]$ filtra la frecuencia del componente en la banda cubierta por $\widehat{\psi}_\lambda$ y lo aplica en un espacio de frecuencias menores utilizando el módulo.

A continuación probaremos algunas propiedades de los caminos de frecuencias tal como los describimos previamente. Para ello, comenzamos con algunas definiciones útiles:

Definición 2.6. Definimos la *rotación y reescalado de un camino* p por $2^l g \in 2^\mathbb{Z} \times G$ como $(2^l g)p = (2^l g\lambda_1, 2^l g\lambda_2, \dots, 2^l g\lambda_m)$.

Definición 2.7. La *concatenación de dos caminos* p y p' se define por:

$$p + p' = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{m'}).$$

En particular, $p + \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda)$.

Con esta notación, presentamos la siguiente proposición:

Proposición 2.2. Sean p y p' dos caminos, se cumple que:

$$U[p + p'] = U[p']U[p].$$

Demostración. Como $p + p' = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{m'})$, siguiendo la definición de $U[p]$, se tiene que:

$$U[p + p'] = U[\lambda'_{m'}] \cdots U[\lambda'_2]U[\lambda'_1]U[\lambda_m] \cdots U[\lambda_2]U[\lambda_1] = U[p']U[p].$$

□

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

En la [Subsección 2.1.3](#) mencionábamos que si la función f es compleja, entonces la transformada de ondículas es $W_\infty = \{W[\lambda]f\}_{\lambda, -\lambda \in \Lambda_\infty}$. Sin embargo, en este caso, debido a que el módulo $U[\lambda_1]f = |W[\lambda_1]f|$ es una función real, solo sería necesario calcular las siguientes transformadas para $\lambda_k \in \Lambda_\infty$. Por lo tanto, los propagadores de dispersión de funciones complejas se definirán en caminos positivos $p = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ y caminos “negativos” $-p = (-\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. Si f es real, entonces $W[-\lambda_1]f = W[\lambda_1]\bar{f}$, por lo que $U[-\lambda_1]f = U[\lambda_1]f$ y, por lo tanto, $U[-p]f = U[p]f$.

Con el objetivo de simplificar los cálculos, todos los resultados siguientes serán considerados sobre propagadores de dispersión, restringidos a caminos positivos, aplicados a funciones reales. Estos resultados se aplicarían de igual forma a funciones complejas incluyendo caminos negativos.

2.2.4. La transformada de dispersión

En este momento, disponemos de un operador $U[\lambda]$ que satisface todas las condiciones que deseábamos, por lo que podemos avanzar hacia la modelización matemática de una red neuronal convolucional.

Definición 2.8. Sea \mathcal{P}_∞ el conjunto de todos los caminos finitos. Definimos la *transformada de dispersión* de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ para cualquier camino $p \in \mathcal{P}_\infty$ como:

$$(\bar{S}f)(p) = \int_{\mathbb{R}^d} (U[p]f)(x) dx.$$

$\bar{S}f$ es invariante por traslaciones, ya que hemos visto que el operador $U[p]$ asegura que la integral sea finita, y, por lo tanto, sea invariante por traslaciones.

Esta última definición tiene varias similitudes con el módulo de la transformada de Fourier. Sin embargo, a diferencia de la transformada de Fourier, la transformada de dispersión es Lipschitz-continua bajo la acción de los difeomorfismos, ya que se basa en iteraciones de transformadas de ondículas y módulos que, como mencionamos previamente, son estables ante la acción de dichos difeomorfismos.

No obstante, para problemas de clasificación, se suele preferir generar descriptores pequeños que sean invariantes por traslaciones frente a una escala predefinida 2^J , manteniendo las frecuencias superiores a 2^{-J} , lo que nos permite ver esta variabilidad espacial. Esto se logra convolucionando la transformada con una ventana escalada a la frecuencia deseada, en este caso $\phi_{2^J}(x) = 2^{-J}\phi(2^{-J}x)$.

Definición 2.9. Sea $J \in \mathbb{Z}$ y \mathcal{P}_J el conjunto de caminos finitos $p = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, con $\lambda_k \in \Lambda_J$ y $|\lambda_k| = 2^k > 2^{-J}$. Definimos una *transformada de dispersión de ventana* para todo $p \in \mathcal{P}_J$ como:

$$(S_J[p]f)(x) = ((U[p]f) * \phi_{2^J})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (U[p]f)(u) \phi_{2^J}(x-u) du,$$

donde la convolución con ϕ_{2^J} localiza el propagador de dispersión en dominios proporcionales a 2^J :

$$(S_J[p]f)(x) = (||| f * \psi_{\lambda_1} | * \psi_{\lambda_2} | \cdots * \psi_{\lambda_m} | * \phi_{2^J}) (x).$$

En particular, $S_J[\emptyset]f = f * \phi_{2^J}$.

Esto define una familia infinita de funciones indexadas por \mathcal{P}_J , denotada por:

$$S_J[\mathcal{P}_J]f := \{S_J[p]f\}_{p \in \mathcal{P}_J}.$$

Si observamos, para cada camino p , $(S_J[p]f)(x)$ es una función que actúa sobre la ventana centrada en la posición x , cuyo tamaño corresponde a intervalos de dimensión 2^J . En el caso de funciones complejas, solamente necesitaríamos incluir en \mathcal{P}_J los caminos negativos, y si f es real, $S_J[-p]f = S_J[p]f$. En la [Sección 2.3](#) se puede verificar que para ondículas adecuadas, $\|f\|^2 = \sum_{p \in \mathcal{P}_J} \|S_J[p]f\|^2$.

Sin embargo, la energía de la señal se concentra en un conjunto mucho más pequeño de caminos de frecuencias descendentes $p = (\lambda_k)_{k \leq m}$, en el cual $|\lambda_{k+1}| \leq |\lambda_k|$. Esto es debido a que el propagador $U[\lambda]$ reduce progresivamente la energía de la señal a frecuencias más bajas, hasta que en cierto punto es nula.

Ahora examinemos la relación entre este propagador de ventana y el que se definió originalmente en la [Definición 2.8](#). Como $\phi(x)$ es continua en 0, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, se tiene que su transformada de dispersión de ventana converge punto a punto a la transformada de dispersión cuando la escala 2^J tiende a infinito:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{J \rightarrow \infty} 2^J (S_J[p]f)(x) &= \lim_{J \rightarrow \infty} 2^J ((U[p]f) * \phi_{2^J})(x) \\ &= \lim_{J \rightarrow \infty} 2^J \int_{\mathbb{R}^d} (U[p]f)(u) \phi_{2^J}(x - u) du \\ &= \lim_{J \rightarrow \infty} 2^J \int_{\mathbb{R}^d} (U[p]f)(u) 2^{-J} \phi(2^{-J}(x - u)) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (U[p]f)(u) \phi(0) du \\ &= \phi(0) \int_{\mathbb{R}^d} (U[p]f)(u) du \\ &= \phi(0)(\bar{S}f)(p). \end{aligned}$$

Además de la convergencia puntual, es importante notar que, mientras que hasta ahora hemos trabajado exclusivamente en $L^2(\mathbb{R}^d)$, el operador aquí presentado se encuentra en $L^1(\mathbb{R}^d)$. No obstante, en la Sección 3.2 de [\[Mal12\]](#), se demuestra que el operador $(\bar{S}f)(p)$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y para todo camino p , pertenece a $L^2(\mathbb{R}^d)$. Además, se proporciona una condición suficiente que garantiza la convergencia uniforme del operador de dispersión de

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

ventana $S_J f$ en $\bar{S}f$. Sin embargo, la demostración del recíproco no se da, aunque aparece en numerosos ejemplos. Debido a la falta de tiempo y complejidad técnica de esa sección, hemos citado dicha referencia para justificar por qué el operador está definido en $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2.3. Propagación de la dispersión y conservación de la norma

2.3.1. Proceso iterativo del propagador de la dispersión

A partir de este punto, denotamos por $S_J[\Omega] := \{S_J[p]\}_{p \in \Omega}$ y $U[\Omega] := \{U[p]\}_{p \in \Omega}$ a la familia de operadores indexados por el conjunto de caminos $\Omega \subset \mathcal{P}_\infty$. De esta manera, un dispersor de ventanas S_J se puede calcular iterando en el propagador de un paso definido anteriormente como:

$$U_J f = \{A_J f, (U[\lambda]f)_{\lambda \in \Lambda_J}\},$$

donde $A_J f = f * \phi_{2J}$ y $U[\lambda]f = |f * \psi_\lambda|$.

Al calcular $U_J f$, aplicando nuevamente U_J a cada coeficiente $U[\lambda]f$, se genera una familia infinita más extensa de funciones. Esta descomposición continua de forma recursiva aplicando U_J a cada $U[p]f$.

Con base en la [Proposición 2.2](#), se sabe que $U[\lambda]U[p] = U[p + \lambda]$, y $A_J U[p] = S_J[p]$, lo que da lugar a:

$$U_J U[p] = \{S_J[p]f, (U[p + \lambda]f)_{\lambda \in \Lambda_J}\}.$$

Por lo tanto, podemos analizar el comportamiento de la transformada de dispersión de ventana según la longitud m del camino que se está utilizando. Sea Λ_J^m el conjunto de caminos de longitud m con, $\Lambda_J^0 = \emptyset$, entonces:

$$U_J(U[\Lambda_J^m]f) = \{S_J[\Lambda_J^m]f, U[\Lambda_J^{m+1}]f\}. \quad (2.6)$$

Del hecho de que $\mathcal{P}_J = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Lambda_J^m$, es posible calcular $S_J[\mathcal{P}_J]f$ a partir de $f = U[\emptyset]f$, realizando iteraciones sucesivas del cálculo de $U_J(U[\Lambda_J^m]f)$ cuando m va desde 0 hasta infinito (véase [Figura 2.6](#)).

2.3.2. Comparativa con una red neuronal convolucional

Las operaciones de la transformada de dispersión de ventana descritas siguen la estructura general de la red neuronal convolucional introducida por LeCun [\[LBH15\]](#), donde las redes

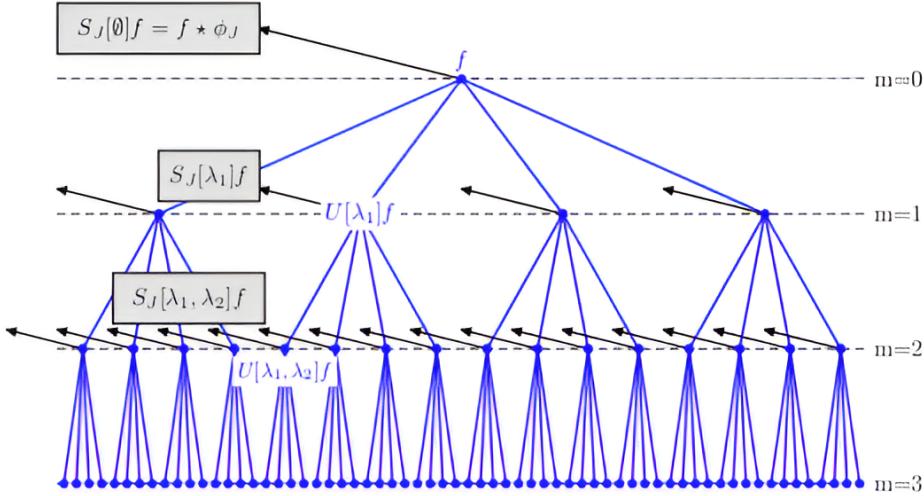


Figura 2.6.: Un propagador de dispersión U_J aplicado a un punto de una señal $f(x)$ calcula $(U[\lambda_1]f)(x) = |(f * \psi_{\lambda_1})(x)|$. En la capa $m = 0$, se promedian los coeficientes que dieron 0 (por tener $2^j < 2^{-J}$), obteniendo como salida $(S_J[\emptyset]f)(x) = (f * \phi_{2^J})(x)$ (ver flecha negra). Luego, se aplica U_J a cada coeficiente $(U[\lambda_1]f)(x)$ del paso anterior, calculando así $(U[\lambda_1, \lambda_2]f)(x)$ y obteniendo como salida $(S_J[\lambda_1]f)(x) = ((U[\lambda_1]f) * \phi_{2^J})(x)$ en la capa $m = 1$. Repitiendo este proceso de forma recursiva para cada coeficiente $(U[p]f)(x)$ se va obteniendo $(S_J[p]f)(x) = ((U[p]f)(x) * \phi_{2^J})$ como salida de cada capa. Imagen extraída de [BM13].

neuronales convolucionales se describen como una cascada de convoluciones (la transformada de ondículas $W[\lambda]$) y funciones de activación no-lineales (el operador $M[\lambda]$), las cuales se representan en nuestro caso como módulos de números complejos. Cabe destacar que no se incluyen las capas de pooling en esta modelización.

Además, si p es un camino de longitud m , entonces a $(S_J[p]f)(x)$ se le denomina *coeficiente de orden m a escala 2^J* y es equivalente al tensor que corresponde a los mapas de activación en la red neuronal convolucional tras la convolución con el kernel de la capa m .

Sin embargo, como diferencia a destacar en esta comparativa, sabemos que las redes neuronales convolucionales han sido muy efectivas en tareas de reconocimiento de imágenes, donde se usan kernels que se aprenden mediante la técnica de back-propagation al entrenar la red. Sin embargo, las ondículas son fijas y no se aprenden.

Por otro lado, fuera del contexto de las redes neuronales convolucionales, cabe destacar que esta modelización se puede relacionar también con algoritmos clásicos de Visión por Computador, como SIFT [Low04], el cual se emplea para identificar puntos de interés en imágenes. De esta forma, usando las ondículas adecuadas, los coeficientes de primer orden $S[\lambda_1]f$ serían equivalentes a los coeficientes obtenidos con este algoritmo.

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

2.3.3. No-expansividad en la distancia entre funciones

El propagador $U_J f = \{A_J f, (|W[\lambda]f|)_{\lambda \in \Lambda_J}\}$ es no-expansivo, ya que la transformada de ondículas W_J es unitaria según la [Proposición 2.1](#), y el módulo es no-expansivo en el sentido de que $| |a| - |b| | \leq |a - b|$ para cualquier $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Esto se cumple tanto si f es una función real o como si es una función compleja. En consecuencia:

$$\|U_J f - U_J h\|^2 = \|A_J f - A_J h\|^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda_J} \| |W[\lambda]f| - |W[\lambda]h| \|^2 \leq \|W_J f - W_J h\|^2 \leq \|f - h\|^2.$$

Dado que W_J es unitaria, si tomamos $h = 0$, se verifica que $\|U_J f\| = \|f\|$, lo que confirma que el operador U_J preserva la norma.

Para cualquier conjunto de caminos Ω , las normas de $S_J[\Omega]f$ y $U[\Omega]f$ son:

$$\|S_J[\Omega]f\|^2 = \sum_{p \in \Omega} \|S_J[p]f\|^2 \quad y \quad \|U[\Omega]f\|^2 = \sum_{p \in \Omega} \|U[p]f\|^2.$$

Puesto que $S_J[\mathcal{P}_J]$ itera en U_J , que es no-expansivo, la siguiente proposición muestra que $S_J[\Omega]f$ también es no-expansivo.

Proposición 2.3. *La transformada de dispersión de ventana es no-expansiva:*

$$\forall (f, h) \in L^2(\mathbb{R}^d)^2, \quad \|S_J[\mathcal{P}_J]f - S_J[\mathcal{P}_J]h\| \leq \|f - h\|$$

Demostración. Dado que U_J es no-expansivo, partiendo de la ecuación (2.6) que indica:

$$U_J(U[\Lambda_J^m]f) = \{S_J[\Lambda_J^m]f, (U[\Lambda_J^{m+1}]f)_{\lambda \in \Lambda_J}\},$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \|U[\Lambda_J^m]f - U[\Lambda_J^m]h\|^2 &\geq \|U_J(U[\Lambda_J^m]f) - U_J(U[\Lambda_J^m]h)\|^2 \\ &= \|S_J[\Lambda_J^m]f - S_J[\Lambda_J^m]h\|^2 + \|U[\Lambda_J^{m+1}]f - U[\Lambda_J^{m+1}]h\|^2. \end{aligned}$$

Al sumar en m cuando m tiende a infinito, obtenemos:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|U[\Lambda_J^m]f - U[\Lambda_J^m]h\|^2 \geq \sum_{m=0}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^m]f - S_J[\Lambda_J^m]h\|^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \|U[\Lambda_J^{m+1}]f - U[\Lambda_J^{m+1}]h\|^2,$$

que equivale a:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|U[\Lambda_J^m]f - U[\Lambda_J^m]h\|^2 - \sum_{m=0}^{\infty} \|U[\Lambda_J^{m+1}]f - U[\Lambda_J^{m+1}]h\|^2 \geq \sum_{m=0}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^m]f - S_J[\Lambda_J^m]h\|^2.$$

Si ahora nos fijamos en el lado izquierdo de la desigualdad, se cancelan todos los términos salvo $m = 0$, y, como $\Lambda_J^0 = \emptyset$, se tiene que:

$$\|U[\Lambda_J^0]f - U[\Lambda_J^0]h\|^2 = \|U[\emptyset]f - U[\emptyset]h\|^2 = \|f - h\|^2.$$

Por otro lado, para el miembro derecho de la desigualdad anterior, obtenemos que:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^m]f - S_J[\Lambda_J^m]h\|^2 = \|S_J[\mathcal{P}_J]f - S_J[\mathcal{P}_J]h\|^2.$$

Finalmente, se ha demostrado que:

$$\|S_J[\mathcal{P}_J]f - S_J[\mathcal{P}_J]h\|^2 \leq \|f - h\|^2,$$

y, por lo tanto, que la transformada de dispersión de ventana es no-expansiva. \square

2.3.4. Conservación de la norma

En la Subsección 2.2.3 se obtuvo que cada coeficiente $U[\lambda]f = |f * \psi_\lambda|$ capturaba la energía de f en una banda de frecuencia cubierta por $\widehat{\psi}_\lambda$, propagando dicha energía hacia frecuencias menores. El siguiente resultado prueba que toda la energía del propagador de dispersión alcanza la frecuencia mínima 2^{-J} y es atrapada por el filtro de paso bajo ϕ_{2^J} . Como la energía se aproxima a 0 al aumentar la longitud del camino, el teorema que demostraremos implica que $\|S_J[\mathcal{P}_J]f\| = \|f\|$. Este resultado también es válido para funciones complejas al incorporar caminos negativos.

Para la demostración de la conservación de la norma de la transformada de dispersión de ventana necesitamos unos resultados previos:

Lema 2.3. *Sea h una función tal que $h \geq 0$. Entonces, para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, se cumple que:*

$$(|f * \psi_\lambda| * h) \geq \sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} |f * \psi_\lambda * h_\eta| \quad \text{con} \quad h_\eta = h(x)e^{i\langle x, \eta \rangle}.$$

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

Demostración.

$$\begin{aligned}
(|f * \psi_\lambda| * h)(x) &= \int \left| \int f(v) \psi_\lambda(u-v) dv \right| h(x-u) du \\
&= \int \left| \int f(v) \psi_\lambda(u-v) e^{i\langle(x-u),\eta\rangle} h(x-u) dv \right| du \\
&\geq \left| \int \int f(v) \psi_\lambda(u-v) e^{i\langle(x-u),\eta\rangle} h(x-u) du dv \right| \\
&= \left| \int f(v) \int \psi_\lambda(x-v-u') h(u') e^{i\langle u',\eta\rangle} du' dv \right| \\
&= \left| \int f(v) (\psi_\lambda * h_\eta)(x-v) dv \right| \\
&= |f * \psi_\lambda * h_\eta|,
\end{aligned}$$

donde se ha usado el cambio de variable $u' = x - u$, con Jacobiano igual a uno. \square

A continuación definimos el concepto de *ondícula admisible*.

Definición 2.10. Una ondícula de dispersión ψ se considera *admisible* si existe un valor $\eta \in \mathbb{R}^d$ y una función $\rho \geq 0$, con $|\widehat{\rho}(\omega)| \leq |\widehat{\phi}(2\omega)|$ y $\widehat{\rho}(0) = 1$, tal que la función:

$$\widehat{\Psi}(\omega) = |\widehat{\rho}(\omega - \eta)|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} k \left(1 - \left| \widehat{\rho}(2^{-k}(\omega - \eta)) \right|^2 \right)$$

satisface:

$$\alpha = \inf_{1 \leq |\omega| \leq 2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{r \in G} \widehat{\Psi}(2^{-j}r^{-1}\omega) \left| \widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega) \right|^2 > 0. \quad (2.7)$$

Con esta definición en mente podemos comprobar que se da el siguiente lema que demuestra que el propagador dispersa la energía progresivamente hacia bajas frecuencias.

Lema 2.4. Si se satisface (2.7) y:

$$\|f\|_w^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r \in G^+} j \|W[2^j r]f\|^2 < \infty,$$

entonces:

$$\frac{\alpha}{2} \|U[\mathcal{P}_J]f\|^2 \geq \max(J+1, 1) \|f\|^2 + \|f\|_w^2. \quad (2.8)$$

2.3. Propagación de la dispersión y conservación de la norma

La demostración de este lema se puede encontrar en ([Mal12], Apéndice A). No ha sido incluida en este trabajo debido a su elevada complejidad técnica.

Con estos resultados, estamos listos para enunciar el teorema principal de esta sección, el cual nos proporcionará la conservación de la norma del operador de dispersión de ventana.

Teorema 2.2. *Si la ondícula es admisible, entonces, para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, se cumple que:*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2 = 0,$$

y:

$$\|S_J[\mathcal{P}_J]f\| = \|f\|.$$

Demostración. Esta prueba se divide en dos partes, la primera de las cuales consistirá en demostrar que la condición (2.8) implica que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 = 0$.

La clave radica en el [Lema 2.3](#), que proporciona una cota inferior para $|f * \psi_\lambda|$ convolucionada con una función positiva. Como:

$$\|U[\mathcal{P}_J]f\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2,$$

si $\|f\|_w < \infty$ entonces (2.8) implica que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f\| = 0$. Este resultado se extiende a $L^2(\mathbb{R}^d)$ por densidad. Como $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\widehat{\phi}(0) = 1$, cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ satisface $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|f - f_n\| = 0$, donde $f_n = f * \phi_{2^n}$ y $\phi_{2^n} = 2^{-n}\phi(2^{-n}x)$. Se demuestra por tanto que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f_n\| = 0$ viendo que $\|f_n\|_w < \infty$. De hecho:

$$\|W[2^j r]f_n\|^2 = \int \left(|\widehat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\phi}(2^n \omega)|^2 |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 \right) d\omega \leq C 2^{-2n-2j} \int |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

porque llega un punto donde ψ desaparece, entonces $|\widehat{\psi}(\omega)| = O(|\omega|)$, y las derivadas de ϕ están en $L^1(\mathbb{R}^d)$, lo que implica que $|\omega| |\widehat{\phi}(\omega)|$ está acotado, luego, $\|f_n\|_w < \infty$.

Como $U[\Lambda^m]$ es no-expansivo, se tiene $\|U[\Lambda_J^m]f - U[\Lambda_J^m]f_n\| \leq \|f - f_n\|$, por lo que:

$$\|U[\Lambda_J^m]f\| \leq \|f - f_n\| + \|U[\Lambda_J^m]f_n\|.$$

Ya que $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|f - f_n\| = 0$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f_n\| = 0$, tenemos que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 = 0$$

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

La segunda parte de esta prueba consiste en demostrar que las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 = 0 \iff \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2 = 0 \iff \|S_J[\mathcal{P}_J]f\|^2 = \|f\|^2.$$

Primero probamos que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 = 0 \iff \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2 = 0.$$

Como $\|U_J h\| = \|h\|$, para todo $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y $U_J(U[\Lambda_J^n]f) = \{S_J[\Lambda_J^n]f, U[\Lambda_J^{n+1}]f\}$, se tiene que:

$$\|U[\Lambda_J^n]f\|^2 = \|U_J(U[\Lambda_J^n]f)\|^2 = \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2 + \|U[\Lambda_J^{n+1}]f\|^2. \quad (2.9)$$

Sumando en $m \leq n < \infty$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} \|U[\Lambda_J^n]f\|^2 &= \sum_{n=m}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2 + \sum_{n=m}^{\infty} \|U[\Lambda_J^{n+1}]f\|^2 \\ &\iff \sum_{n=m}^{\infty} \|U[\Lambda_J^n]f\|^2 - \sum_{n=m}^{\infty} \|U[\Lambda_J^{n+1}]f\|^2 = \sum_{n=m}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2. \end{aligned}$$

En el lado izquierdo, los términos se cancelan salvo cuando $n = m$, lo que nos lleva a:

$$\|U[\Lambda_J^m]f\|^2 = \sum_{n=m}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2.$$

Tomando límites cuando $m \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2.$$

Por otro lado, sumando en la ecuación (2.9) para $0 \leq n < m$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m-1} \|U[\Lambda_J^n]f\|^2 &= \sum_{n=0}^{m-1} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \|U[\Lambda_J^{n+1}]f\|^2 \\ \iff \sum_{n=0}^{m-1} \|U[\Lambda_J^n]f\|^2 - \sum_{n=0}^{m-1} \|U[\Lambda_J^{n+1}]f\|^2 &= \sum_{n=0}^{m-1} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2 \end{aligned}$$

Como los términos del lado izquierdo se cancelan salvo cuando $n = 0$, considerando que $f = U[\Lambda_J^0]f$, llegamos a:

$$\|f\|^2 = \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2.$$

Si ahora tomamos el límite cuando $m \rightarrow \infty$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|f\|^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{m-1} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2 \\ \iff \|f\|^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2 \\ \iff \|f\|^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 + \|S_J[\mathcal{P}_J]f\|^2. \end{aligned}$$

De manera que se puede observar claramente que:

$$\|f\|^2 = \|S_J[\mathcal{P}_J]f\|^2 \iff \lim_{m \rightarrow \infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 = 0.$$

Con lo que queda probado el teorema. □

Esta demostración muestra que el propagador dispersa gradualmente la energía hacia frecuencias más bajas. La energía de $U[p]f$ se concentra principalmente en los caminos de frecuencia decreciente $p = (\lambda_k)_{k \leq m}$, donde $|\lambda_{k+1}| < |\lambda_k|$.

El decaimiento de $\sum_{n=m}^{\infty} \|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2$ sugiere que podemos descartar caminos de longitud superior a un cierto $m > 0$. En problemas de clasificación, se suele limitar el camino a $m = 3$ debido al decaimiento exponencial de $\|S_J[\Lambda_J^n]f\|^2$, por ejemplo, en tareas de tratamiento de imágenes y audio.

Este último teorema requiere además de una transformada de ondículas unitaria y admisible que cumpla con la condición de Littlewood-Paley $\beta \sum_{(j,r) \in \mathbb{Z} \times G} |\widehat{\psi}(2^j r \omega)|^2 = 1$.

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

También se necesita la existencia de una función $\rho \geq 0$ y un parámetro $\eta \in \mathbb{R}^d$, con $|\widehat{\rho}(\omega)| \leq |\widehat{\phi}(2\omega)|$, tal que:

$$\sum_{(j,r) \in \mathbb{Z} \times G} |\widehat{\psi}(2^j r \omega)|^2 |\widehat{\rho}(2^j r \omega - \eta)|^2,$$

sea lo suficientemente grande para garantizar que $\alpha > 0$. Esto se puede deducir de lo explicado a partir de la Definición 2.3 de la Subsección 2.1.2, con $\psi(x) = e^{i\langle x, \eta \rangle} \Theta(x)$ y $\widehat{\psi} = \widehat{\Theta}(\omega - \eta)$, donde tanto $\widehat{\Theta}$ como $\widehat{\rho}$ tienen su energía concentrada en los mismos dominios de frecuencias bajas.

2.4. Invarianza horizontal por traslaciones

2.4.1. No-expansividad en conjuntos de caminos

Vamos a demostrar en primer lugar que $\|S_J[\mathcal{P}_J]f - S_J[\mathcal{P}_J]h\|$ es no-expansivo cuando incrementa J , y que converge cuando $J \rightarrow \infty$. Esto establece una distancia límite que, como veremos a continuación, es invariante por traslaciones.

Vamos a necesitar el siguiente lema:

Lema 2.5. *Para las ondículas que cumplen con la propiedad mencionada en la Proposición 2.1, y para toda función real $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y todo $q \in \mathbb{Z}$, se tiene que:*

$$\|f * \phi_{2^J}\|^2 + \sum_{-q \geq l > -J} \sum_{r \in G^+} \|f * \psi_{2^l r}\|^2 = \|f * \phi_{2^q}\|^2.$$

Demostración. En primer lugar, vamos a ver que de la Proposición 2.1 se deduce la siguiente relación:

$$|\widehat{\phi}(2^J \omega)|^2 + \sum_{-q \geq l > -J} \sum_{r \in G^+} |\widehat{\psi}(2^{-r} \widehat{\omega})|^2 = |\widehat{\phi}(2^J \omega)|^2.$$

Para ello, de la expresión:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j} r^{-1} \omega)|^2 = 1 \quad y \quad |\widehat{\phi}(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^0 \sum_{r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j} r^{-1} \omega)|^2,$$

tenemos de manera análoga a cómo vimos en la demostración de la Proposición 2.1 que:

$$\forall J \in \mathbb{Z}, \quad |\widehat{\phi}(2^J \omega)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j > -J, r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j} r^{-1} \omega)|^2 = 1.$$

Y partiendo del sumatorio obtenemos lo siguiente:

$$|\widehat{\phi}(2^J\omega)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{-q \geq j > -J, r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j > -q, r \in G} |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 = |\widehat{\phi}(2^q\omega)|^2.$$

Ahora multiplicamos esta expresión por $|\widehat{f}(\omega)|^2$, obteniendo:

$$|\widehat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\phi}(2^J\omega)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{-q \geq j > -J, r \in G} |\widehat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 = |\widehat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\phi}(2^q\omega)|^2.$$

Integrando en ω :

$$\begin{aligned} \int |\widehat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\phi}(2^J\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2} \sum_{-q \geq j > -J, r \in G} \int |\widehat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\psi}(2^{-j}r^{-1}\omega)|^2 d\omega \\ = \int |\widehat{f}(\omega)|^2 |\widehat{\phi}(2^q\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar el [Teorema 2.1](#), lo que nos da que la expresión anterior es equivalente a:

$$\int |(f * \phi_{2^J})(x)|^2 dx + \sum_{-q \geq j > -J, r \in G} \int |(f * \psi_{2^j r})(x)|^2 dx = \int |(f * \phi_{2^q})(x)|^2 dx.$$

Al tener en cuenta que f es una función real, podemos afirmar que $\|f * \psi_{2^j r}\| = \|f * \psi_{2^{j-r}}\|$. Junto con la definición de norma en $L^2(\mathbb{R}^d)$, se tiene que:

$$\|f * \phi_{2^J}\|^2 + \sum_{-q \geq l > -J} \sum_{r \in G^+} \|f * \psi_{2^l r}\|^2 = \|f * \phi_{2^q}\|^2.$$

□

Proposición 2.4. Para todo $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $J \in \mathbb{Z}$ se cumple que:

$$\|S_{J+1}[\mathcal{P}_{J+1}]f - S_{J+1}[\mathcal{P}_{J+1}]h\| \leq \|S_J[\mathcal{P}_J]f - S_J[\mathcal{P}_J]h\|. \quad (2.10)$$

Demostración. En primer lugar, vamos a transformar la condición que queremos demostrar en (2.10) a otra equivalente y que será más fácil de probar.

Si recordamos la definición de \mathcal{P}_J , este es un conjunto de caminos finitos $p = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ tal que $\lambda_k \in \Lambda_J$ y $|\lambda_k| = 2^k > 2^{-J}$. Luego, todo camino $p' \in \mathcal{P}_{J+1}$ puede ser únicamente

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

escrito como una extensión de un camino $p \in \mathcal{P}_J$, donde p es el prefijo más grande de p' que pertenece a \mathcal{P}_J , y $p' = p + q$ para algún $q \in \mathcal{P}_{J+1}$. De hecho, podemos definir el conjunto de todas las extensiones de $p \in \mathcal{P}_J$ en \mathcal{P}_{J+1} como:

$$\mathcal{P}_{J+1}^p = \{p\} \cup \{p + 2^{-J}r + p''\}_{r \in G^+, p'' \in \mathcal{P}_{J+1}}.$$

Esto define una partición disjunta de $\mathcal{P}_{J+1} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}_J} \mathcal{P}_{J+1}^p$. Debemos probar que dichas extensiones son no-expansivas, es decir:

$$\sum_{p' \in \mathcal{P}_{J+1}^p} \|S_{J+1}[p']f - S_{J+1}[p']h\|^2 \leq \|S_J[p]f - S_J[p]h\|^2. \quad (2.11)$$

Observamos que la condición (2.11) es equivalente a (2.10) al sumar sobre todo $p \in \mathcal{P}_J$. Por lo tanto, al demostrar (2.11), obtendremos el resultado que buscamos.

Vamos a usar el [Lema 2.5](#) con la función $g = U[p]f - U[p]h$ junto con que $U[p]f * \phi_{2^J} = S_J[p]f$. De esta forma se tiene:

$$\|g * \phi_{2^{J+1}}\|^2 + \sum_{r \in G^+} \|g * \psi_{2^{-J}r}\|^2 = \|g * \phi_{2^J}\|^2.$$

Así, sustituyendo el valor de g por el que hemos definido antes y aplicando la propiedad distributiva de la convolución, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \| (U[p]f * \phi_{2^J}) - (U[p]h * \phi_{2^J}) \|^2 \\ &= \| (U[p]f * \phi_{2^{J+1}}) - (U[p]h * \phi_{2^{J+1}}) \|^2 + \sum_{r \in G^+} \| (U[p]f * \psi_{2^{-J}r}) - (U[p]h * \psi_{2^{-J}r}) \|^2. \end{aligned}$$

Esto equivale a:

$$\|S_J[p]f - S_J[p]h\|^2 = \|S_{J+1}[p]f - S_{J+1}[p]h\|^2 + \sum_{r \in G^+} \| (U[p]f * \psi_{2^{-J}r}) - (U[p]h * \psi_{2^{-J}r}) \|^2.$$

Aplicando que $|U[p]f * \psi_{2^{-J}r}| = U[p + 2^{-J}r]f$ y la propiedad de la norma, que establece que $\|g - h\| \geq \| |g| \| - \| |h| \|$, se obtiene:

$$\|S_J[p]f - S_J[p]h\|^2 \geq \|S_{J+1}[p]f - S_{J+1}[p]h\|^2 + \sum_{r \in G^+} \|U[p + 2^{-J}r]f - U[p + 2^{-J}r]h\|^2.$$

Como $S_{J+1}[\mathcal{P}_{J+1}](U[p + 2^{-J}r]f) = \{S_{J+1}[p + 2^{-J}r + p'']\}_{p'' \in \mathcal{P}_{J+1}}$ y $S_{J+1}[\mathcal{P}_{J+1}]f$ es no expansiva por la [Proposición 2.3](#), podemos aplicar la desigualdad anterior para obtener:

$$\begin{aligned} & \|S_J[p]f - S_J[p]h\|^2 \\ & \geq \|S_{J+1}[p]f - S_{J+1}[p]h\|^2 + \sum_{p'' \in \mathcal{P}_{J+1}} \sum_{r \in G^+} \|S_{J+1}[p + 2^{-J}r + p'']f - S_{J+1}[p + 2^{-J}r + p'']h\|^2. \end{aligned}$$

En particular:

$$\|S_J[p]f - S_J[p]h\|^2 \geq \sum_{p'' \in \mathcal{P}_{J+1}} \sum_{r \in G^+} \|S_{J+1}[p + 2^{-J}r + p'']f - S_{J+1}[p + 2^{-J}r + p'']h\|^2,$$

lo que prueba [\(2.11\)](#). □

2.4.2. Demostración de la invarianza por traslaciones

La proposición anterior nos demuestra que $\|S_J[\mathcal{P}_J]f - S_J[\mathcal{P}_J]h\|$ es positivo y no creciente cuando J aumenta, y converge. Dado que $S_J[\mathcal{P}_J]$ es no-expansivo, su límite también lo será:

$$\forall f, h \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \lim_{J \rightarrow \infty} \|S_J[\mathcal{P}_J]f - S_J[\mathcal{P}_J]h\| \leq \|f - h\|.$$

Para ondículas de dispersión admisibles que satisfacen la condición [\(2.7\)](#), el [Teorema 2.2](#) asegura que si $\|S_J[\mathcal{P}_J]f\| = \|f\|$, entonces $\lim_{J \rightarrow \infty} \|S_J[\mathcal{P}_J]f\| = \|f\|$.

En el siguiente teorema que enunciemos, se demostrará que el límite es invariante por traslaciones, pero antes necesitamos dos resultados previos:

Lema 2.6. *Sea $K : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ un operador tal que, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $(Kf)(x) = \int f(u)k(x, u)du$ verificando que:*

$$\int |k(x, u)|dx \leq C,$$

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

y:

$$\int |k(x, u)| du \leq C,$$

con $C > 0$. Entonces $\|K\| \leq C$, donde $\|K\|$ es la norma en $L^2(\mathbb{R}^d)$ de K .

Este lema es conocido como el *lema de Schur*. En este caso, se presenta como un lema auxiliar que será utilizado para la demostración del siguiente resultado, por lo que no incluiremos su prueba.

Lema 2.7. Existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\tau \in C^2(\mathbb{R}^d)$ con $\|J\tau\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ se cumple que:

$$\|T_\tau(A_J f) - A_J f\| \leq C \|f\| 2^{-J} \|\tau\|_\infty.$$

Demostración. El operador norma de $k_J = T_\tau A_J - A_J$ se calcula aplicando el **Lema 2.6** a su kernel:

$$k_J(x, u) = \phi_{2^J}(x - \tau(x) - u) - \phi_{2^J}(x - u).$$

Si observamos la expresión anterior, cuando $x = 0 = u$, tenemos que:

$$k_J(0, 0) = \phi_{2^J}(0) - \phi_{2^J}(0) = 0.$$

Si ahora calculamos su polinomio de Taylor de primer orden centrado en el $(0, 0)$, se obtiene:

$$k_J(x, u) = k_J(0, 0) + \int_0^1 (J\phi_{2^J})(x - t\tau(x) - u) \tau(x) dt.$$

Si ahora calculamos el módulo obtenemos que:

$$\begin{aligned} |k_J(x, u)| &= \left| k_J(0, 0) + \int_0^1 (J\phi_{2^J})(x - t\tau(x) - u) \tau(x) dt \right| \\ &\leq |k_J(0, 0)| + \left| \int_0^1 (J\phi_{2^J})(x - t\tau(x) - u) \tau(x) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 (J\phi_{2^J})(x - t\tau(x) - u) \tau(x) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |(J\phi_{2^J})(x - t\tau(x) - u) \tau(x)| dt \end{aligned}$$

2.4. Invarianza horizontal por traslaciones

$$\begin{aligned} &= |\tau(x)| \int_0^1 |(J\phi_{2^J})(x - t\tau(x) - u)| dt \\ &\leq \|\tau\|_\infty \int_0^1 |(J\phi_{2^J})(x - t\tau(x) - u)| dt \end{aligned}$$

Si ahora integramos en u y aplicamos el conocido teorema de Fubini para intercambiar las integrales del lado derecho de la desigualdad obtenemos:

$$\begin{aligned} \int |k_J(x, u)| du &\leq \|\tau\|_\infty \int_0^1 \int_0^1 |(J\phi_{2^J})(x - t\tau(x) - u)| dt du \\ &= \|\tau\|_\infty \int_0^1 \int |(J\phi_{2^J})(x - t\tau(x) - u)| du dt. \end{aligned}$$

Por otro lado, vamos a comprobar que:

$$(J\phi_{2^J})(x) = 2^{-2^J}(J\phi)(2^{-J}x).$$

Para esto, recordemos que $\phi_{2^J}(x) = 2^{-J}\phi(2^{-J}x)$, por lo que:

$$(J\phi_{2^J})(x) = J(2^{-J}\phi(2^{-J}x)) = 2^{-2^J}(J\phi)(2^{-J}x).$$

De esta manera, al realizar un cambio de variable $u' = x - t\tau(x) - u$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int |k_J(x, u)| du &\leq \|\tau\|_\infty 2^{-2^J} \int |(J\phi)(2^{-J}u')| du' \\ &= 2^{-J} \|\tau\|_\infty \|J\phi\|_1. \end{aligned}$$

Si ahora realizamos un procedimiento análogo, pero integrando en x en lugar de u , obtenemos:

$$\int |k_J(x, u)| dx \leq \|\tau\|_\infty \int_0^1 \int |(J\phi_{2^J})(x - t\tau(x) - u)| dx dt.$$

Aplicamos ahora un cambio de variable $v = x - t\tau(x)$ y determinamos su Jacobiano:

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

$$\begin{aligned} Jv &= J(x - t\tau(x)) \\ &= J(x) - J(t\tau(x)) \\ &= \text{Id} - tJ(\tau(x)) \\ &= \text{Id} - t(J\tau)(x). \end{aligned}$$

Establecemos una cota para el determinante del Jacobiano:

$$|Jv| = (1 - t(J\tau)(x))^d \geq (1 - \|J\tau\|_\infty)^d \geq 2^{-d}.$$

Aplicando ahora el cambio de variable a la integral:

$$\begin{aligned} \int |k_J(x, u)| dx &\leq \|\tau\|_\infty 2^d \int_0^1 \int |(J\phi_{2^J})(v - u)| dv dt \\ &= 2^{-J} \|\tau\|_\infty \|J\phi\|_1 2^d \\ &= 2^{-J+d} \|\tau\|_\infty \|J\phi\|_1. \end{aligned}$$

Entre las cotas superiores obtenidas, esta última es la mayor, por lo que aplicamos el [Lema 2.6](#) y concluimos la demostración:

$$\|T_\tau A_J - A_J\| \leq 2^{-J+d} \|\tau\|_\infty \|J\phi\|_1.$$

□

Con esto, ya contamos con las herramientas necesarias para presentar y demostrar el resultado principal de esta sección, que asegura que el operador de dispersión de ventana que estamos desarrollando, y que modeliza una red neuronal convolucional, es invariante por traslaciones.

Teorema 2.3. *Para ondículas de dispersión admisibles, se verifica que:*

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{J \rightarrow \infty} \|S_J[\mathcal{P}_J]f - S_J[\mathcal{P}_J](T_tf)\| = 0.$$

Demostración. Fijamos $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Teniendo en cuenta la comutatividad $S_J[\mathcal{P}_J](T_tf) = T_t(S_J[\mathcal{P}_J]f)$ y usando la definición $S_J[\mathcal{P}_J]f = A_J(U[\mathcal{P}_J]f)$, obtenemos:

$$\|S_J[\mathcal{P}_J](T_t f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| = \|T_t(A_J(U[\mathcal{P}_J]f)) - A_J(U[\mathcal{P}_J]f)\| \leq \|T_t A_J - A_J\| \|U[\mathcal{P}_J]f\|.$$

Aplicando el [Lema 2.7](#) con $\tau = t$, tenemos que $\|\tau\|_\infty = |t|$, y así:

$$\|T_t A_J - A_J\| \leq C 2^{-J} |t|,$$

con $C \in \mathbb{R}$. Usando esta última desigualdad, obtenemos:

$$\|S_J[\mathcal{P}_J](T_t f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| \leq \|T_t A_J - A_J\| \|U[\mathcal{P}_J]f\| \leq C 2^{-J} |t| \|U[\mathcal{P}_J]f\|.$$

Dado que se cumple la condición de admisibilidad (2.7), según (2.8) en el [Lema 2.4](#), para $J > 1$ tenemos que:

$$\frac{\alpha}{2} \|U[\mathcal{P}_J]f\|^2 \leq (J+1) \|f\|^2 + \|f\|_w^2.$$

Y de esta forma, podemos obtener una cota superior para la norma de $\|U[\mathcal{P}_J]f\|$:

$$\|U[\mathcal{P}_J]f\|^2 \leq ((J+1) \|f\|^2 + \|f\|_w^2) 2^{\alpha-1}$$

Si $\|f\|_w < \infty$, entonces tenemos:

$$\|S_J[\mathcal{P}_J](T_t f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\|^2 \leq ((J+1) \|f\|^2 + \|f\|_w^2) C^2 2^{\alpha-1} 2^{-2J} |t|^2.$$

Tomando límite en ambos lados cuando J tiende a infinito, obtenemos:

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|S_J[\mathcal{P}_J](T_t f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\|^2 \leq \lim_{J \rightarrow \infty} ((J+1) \|f\|^2 + \|f\|_w^2) C^2 2^{\alpha-1} 2^{-2J} |t|^2 = 0.$$

Por tanto, $\lim_{J \rightarrow \infty} \|S_J[\mathcal{P}_J](T_t f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| = 0$.

Finalmente, demostraremos que el límite anterior se verifica para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, utilizando un argumento similar al del [Teorema 2.2](#). Dado que cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ puede approximarse como el límite de una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $\|f_n\|_w < \infty$, y considerando que $S_J[\mathcal{P}_J]$ no expande y T_t es unitario, usando la desigualdad triangular obtenemos que:

$$\|T_t(S_J[\mathcal{P}_J]f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| \leq \|T_t(S_J[\mathcal{P}_J]f_n) - S_J[\mathcal{P}_J]f_n\| + 2\|f - f_n\|.$$

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

De esta forma, al hacer que n tienda a infinito, se concluye que:

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|T_t(S_J[\mathcal{P}_J]f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| = 0.$$

□

2.5. Invarianza frente a pequeñas deformaciones

2.5.1. Cotas superiores en conmutadores de dispersión

Un difeomorfismo de \mathbb{R}^d lo suficientemente cercano a una traslación mapea x a $x - \tau(x)$, donde $\tau(x)$ es un campo de desplazamiento tal que $\|J\tau\|_\infty < 1$. La acción del difeomorfismo sobre $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ se define como $(T_\tau f)(x) = f(x - \tau(x))$. El máximo incremento de τ lo denotaremos por $\|\Delta\tau\|_\infty := \sup_{(x,u) \in \mathbb{R}^{2d}} |\tau(x) - \tau(u)|$.

Sea S_J un operador de dispersión de ventana calculado con una ondícula de dispersión que cumple la condición (2.7). Nuestro objetivo es establecer una cota superior para $\|S_J[\mathcal{P}_J](T_\tau f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\|$ en términos de una norma de dispersión mixta $(\ell^1, L^2(\mathbb{R}^d))$:

$$\|U[\mathcal{P}_J]f\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \|U[\Lambda_J^n]f\|.$$

De esta forma, veremos que el operador de dispersión de ventana es Lipschitz-continuo bajo la acción de difeomorfismos.

Denotaremos por $\mathcal{P}_{J,m}$ al subconjunto de \mathcal{P}_J de caminos de longitud estrictamente menor que m , y $(a \vee b) := \max(a, b)$. También denotaremos la norma suprema de un operador lineal A en $L^2(\mathbb{R}^d)$ por $\|A\|$ y al conmutador de dos operadores A y B por $[A, B] := AB - BA$.

Para alcanzar nuestro objetivo en esta sección, necesitamos dos lemas previos:

Lema 2.8. *Para cualquier operador L en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, se cumple que:*

$$\|[S_J[\mathcal{P}_J], L]f\| \leq \|U[\mathcal{P}_J]f\|_1 \|[U_J, L]\|.$$

Demostración. Si A y B son dos operadores, denotaremos $\{A, B\}$ como el operador definido por $\{A, B\}f = \{Af, Bf\}$. Introducimos un operador de módulo de ondícula sin promediar:

$$V_J f = \{|W[\lambda]f| = |f * \psi_\lambda|\}_{\lambda \in \Lambda_J}, \quad \text{con} \quad \Lambda_J = \{2^j r : j > -J, r \in G^+\},$$

2.5. Invarianza frente a pequeñas deformaciones

y $U_J = \{A_J, V_J\}$. El propagador V_J genera todos los caminos $V_J(U[\Lambda_J^n]f) = U[\Lambda_J^{n+1}]f$ para cualquier $n \geq 0$. Dado que $U[\Lambda_J^0] = \text{Id}$, se deduce que $V_J^n = U[\Lambda_J^n]$. Para verificar la desigualdad que queremos, demostraremos que:

$$[S_J[\mathcal{P}_{J,m}], L] = \sum_{n=0}^m K_{m-n} V_J^n,$$

donde $K_n = \{[A_J, L], S_J[\mathcal{P}_{J,n-1}][V_J, L]\}$ satisface que:

$$\|K_n\| \leq \| [U_J, L] \|.$$

Dado que $V_J^n f = U[\Lambda_J^n]f$, esto implica que para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\|[S_J[\mathcal{P}_{J,m}], L]f\| \leq \sum_{n=0}^m \|K_{m-n}\| \|V_J^n f\| \leq \| [U_J, L] \| \sum_{n=0}^{m-1} \|U[\Lambda_J^n]f\|,$$

y haciendo que m tienda a infinito en esta última expresión, demostraríamos la desigualdad buscada.

La propiedad $[S_J[\mathcal{P}_{J,m}], L] = \sum_{n=0}^m K_{m-n} V_J^n$ se demuestra comenzando por mostrar que:

$$S_J[\mathcal{P}_{J,m}]L = \{LA_J, S_J[\mathcal{P}_{J,m-1}]LV_J\} + K_m,$$

donde $K_m = \{[A_J, L], S_J[\mathcal{P}_{J,m-1}][V_J, L]\}$. En efecto, dado que $V_J^n = U[\Lambda_J^n]$, tenemos $A_J V_J^n = S_J[\Lambda_J^n]$ y $\mathcal{P}_{J,m} = \bigcup_{n=0}^{m-1} \Lambda_J^n$, lo que lleva a que $S_J[\mathcal{P}_{J,m}] = \{A_J V_J^n\}_{0 \leq n < m}$. Esto implica que:

$$\begin{aligned} S_J[\mathcal{P}_{J,m}]L &= \{A_J V_J^n L\}_{0 \leq n < m} \\ &= \{LA_J + [A_J, L], A_J V_J^{n-1} LV_J + A_J V_J^{n-1} [V_J, L]\}_{1 \leq n < m} \\ &= \{LA_J, S_J[\mathcal{P}_{J,m-1}]LV_J\} + \{[A_J, L], S_J[\mathcal{P}_{J,m-1}][V_J, L]\} \\ &= \{LA_J, S_J[\mathcal{P}_{J,m-1}]LV_J\} + K_m. \end{aligned}$$

Una sustitución de $S_J[\mathcal{P}_{J,m-1}]L$ en $S_J[\mathcal{P}_{J,m}]L = \{LA_J, S_J[\mathcal{P}_{J,m-1}]LV_J\} + K_m$ mediante la expresión derivada con esta misma fórmula nos da:

$$S_J[\mathcal{P}_{J,m}]L = \{LA_J, LA_J V_J, S_J[\mathcal{P}_{J,m-2}]LV_J^2\} + K_{m-1} V_J + K_m.$$

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

Con m sustituciones, obtenemos:

$$S_J[\mathcal{P}_{J,m}]L = \{LA_JV_J^n\}_{0 \leq n < m} + \sum_{n=0}^m K_{m-n}V_J^n = LS_J[\mathcal{P}_{J,m}] + \sum_{n=0}^m K_{m-n}V_J^n.$$

Vemos así que $[S_J[\mathcal{P}_{J,m}], L] = \sum_{n=0}^m K_{m-n}V_J^n$. Finalmente veamos que $\|K_m\| \leq \|U_J, L\|$, con $K_m = \{[A_J, L], S_J[\mathcal{P}_{J,m-1}][V_J, L]\}$. Dado que $S_J[\mathcal{P}_J]$ es no-expansivo, su restricción $S_J[\mathcal{P}_{J,m}]$ también lo es. Como $U_J = \{A_J, V_J\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|K_m f\|^2 &= \|U_J, L\|^2 + \|S_J[\mathcal{P}_{J,m-1}][V_J, L]f\|^2 \\ &\leq \|U_J, L\|^2 + \|V_J, L\|^2 \\ &= \|U_J, L\|^2 \\ &\leq \|U_J, L\|^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

□

Lema 2.9. Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $J \in \mathbb{Z}$, y todo $\tau \in C^2(\mathbb{R}^d)$, con $\|J\tau\|_\infty \leq \frac{1}{2}$, se cumple que:

$$\|[W_J, T_\tau]\| \leq C \left(\|J\tau\|_\infty \left(\log \left(\frac{\|\Delta\tau\|_\infty}{\|J\tau\|_\infty} \vee 1 \right) \right) + \|H\tau\|_\infty \right).$$

La demostración de este último lema se puede encontrar en ([Mal12], Apéndice E). No ha sido incluida en este trabajo debido a su elevada complejidad técnica.

2.5.2. Demostración de la invarianza frente a pequeñas deformaciones

Ya disponemos de todos los elementos necesarios para formular y probar el resultado clave de esta sección. Este resultado demuestra que el operador de dispersión de ventana que estamos construyendo, el cual recordamos que simula el comportamiento de una red neuronal convolucional, es Lipschitz-continuo bajo la acción de difeomorfismos, o dicho de otra forma, es invariante frente a pequeñas deformaciones.

Teorema 2.4. Existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, con $\|U[\mathcal{P}_J]f\|_1 < \infty$, y todo $\tau \in C^2(\mathbb{R}^d)$, con $\|J\tau\|_\infty \leq \frac{1}{2}$, se cumple que:

$$\|S_J[\mathcal{P}_J](T_\tau f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| \leq C\|U[\mathcal{P}_J]f\|_1 K(\tau),$$

con:

$$K(\tau) = 2^{-J} \|\tau\|_\infty + \|J\tau\|_\infty \left(\log \left(\frac{\|\Delta\tau\|_\infty}{\|J\tau\|_\infty} \vee 1 \right) \right) + \|H\tau\|_\infty,$$

y para todo $m \geq 0$:

$$\|S_J[\mathcal{P}_{J,m}](T_\tau f) - S_J[\mathcal{P}_{J,m}]f\| \leq Cm\|f\|K(\tau). \quad (2.12)$$

Demostración. Sea $[S_J[\mathcal{P}_J], T_\tau] = S_J[\mathcal{P}_J]T_\tau - T_\tau S_J[\mathcal{P}_J]$. Tenemos que:

$$\|S_J[\mathcal{P}_J](T_\tau f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| \leq \|T_\tau(S_J[\mathcal{P}_J]f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| + \|[S_J[\mathcal{P}_J], T_\tau]f\|.$$

El primer término a la derecha satisface:

$$\|T_\tau(S_J[\mathcal{P}_J]f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| \leq \|T_\tau A_J - A_J\| \|U[\mathcal{P}_J]f\|.$$

Dado que:

$$\|U[\mathcal{P}_J]f\| = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|U[\Lambda_J^m]f\|,$$

tenemos que:

$$\|T_\tau(S_J[\mathcal{P}_J]f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| \leq \|T_\tau A_J - A_J\| \|U[\mathcal{P}_J]f\|_1.$$

Dado que $S_J[\mathcal{P}_J]$ itera sobre U_J , que es no-expansivo, el [Lema 2.8](#) demuestra la siguiente cota superior en los conmutadores de dispersión:

$$\|[S_J[\mathcal{P}_J], L]f\| \leq \|U[\mathcal{P}_J]f\|_1 \| [U_J, L] \|,$$

siendo L un operador en $L^2(\mathbb{R}^d)$. El operador $L = T_\tau$ también cumple con la siguiente propiedad:

$$\|[U_J, T_\tau]\| \leq \|[W_J, T_\tau]\|.$$

De hecho, $U_J = MW_J$, donde $M\{h_J, (h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_J}\} = \{h_J, (|h_\lambda|)_{\lambda \in \Lambda_J}\}$ es un operador módulo no-expansivo. Dado que $MT_\tau = T_\tau M$, tenemos que:

$$\|[U_J, T_\tau]\| = \|M_J[W_J, T_\tau]\| \leq \|[W_J, T_\tau]\|.$$

2. Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

De esta forma, obtenemos:

$$\|S_J[\mathcal{P}_J](T_\tau f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| \leq \|U[\mathcal{P}_J]f\|_1 (\|T_\tau A_J - A_J\| + \|[W_J, T_\tau]\|).$$

El [Lema 2.7](#) muestra que $\|T_\tau A_J - A_J\| \leq C2^{-J}\|\tau\|_\infty$, que junto con esta última desigualdad, implican:

$$\|S_J[\mathcal{P}_J](T_\tau f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\| \leq C\|U[\mathcal{P}_J]f\|_1 \left(2^{-J}\|\tau\|_\infty + \|[W_J, T_\tau]\|\right). \quad (2.13)$$

Para demostrar la desigualdad principal de este teorema, la dificultad radica en calcular una cota superior de $\|[W_J, T_\tau]\|$, y por tanto de $\|[W_J, T_\tau]\|^2 = \|[W_J, T_\tau]^*[W_J, T_\tau]\|$, donde A^* representa el adjunto de un operador A . Aplicando dicho conmutador a f resulta:

$$[W_J, T_\tau]f = \{[A_J, T_\tau]f, ([W[\lambda], T_\tau]f)_{\lambda \in \Lambda_J}\},$$

y su norma es:

$$\|[W_J, T_\tau]f\|^2 = \|[A_J, T_\tau]f\|^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda_J} \|[W[\lambda], T_\tau]f\|^2.$$

De esto se obtiene que:

$$[W_J, T_\tau]^*[W_J, T_\tau] = [A_J, T_\tau]^*[A_J, T_\tau] + \sum_{\lambda \in \Lambda_J} [W[\lambda], T_\tau]^*[W[\lambda], T_\tau].$$

El [Lema 2.9](#) demuestra que la norma del operador $[W_J, T_\tau]^*[W_J, T_\tau]$ está acotada superiormente ya que que:

$$\|[W_J, T_\tau]\| \leq C \left(\|J\tau\|_\infty \left(\log \left(\frac{\|\Delta\tau\|_\infty}{\|J\tau\|_\infty} \vee 1 \right) \right) + \|H\tau\|_\infty \right),$$

con $C > 0$ constante. Sustituyendo esta cota superior en (2.13) se demuestra la desigualdad principal del teorema. Se puede comprobar que dicha desigualdad se mantiene válida cuando se reemplaza \mathcal{P}_J por el subconjunto de caminos de longitud menor que m : $\mathcal{P}_{J,m} = \bigcup_{n < m} \Lambda_J^n$ si reemplazamos $\|U[\mathcal{P}_J]f\|_1$ por $\|U[\mathcal{P}_{J,m}]f\|_1$. La desigualdad (2.12) se deduce de:

$$\|U[\mathcal{P}_{J,m}]f\|_1 = \sum_{n=0}^{m-1} \|U[\Lambda_J^n]f\| \leq m\|f\|.$$

Esto se obtiene observando que:

$$\|U[\Lambda_J^n]f\| \leq \|U[\Lambda_J^{n-1}]f\| \leq \|f\|,$$

ya que $U[\Lambda_J^n]f$ se calcula aplicando el operador U_J , que preserva la norma, sobre $U[\Lambda_J^{n-1}]f$. \square

Este teorema demuestra que la distancia $\|S_J[\mathcal{P}_J](T_\tau f) - S_J[\mathcal{P}_J]f\|$ generada por la acción del difeomorfismo T_τ está acotada por un término de traslación proporcional a $2^{-J}\|\tau\|_\infty$ y un error de deformación proporcional a $\|J\tau\|_\infty$. Este error de deformación resulta del conmutador de la transformada de ondículas $[W_J, T_\tau]$. Concluimos así que nuestro operador de dispersión de ventana es invariante frente a pequeñas deformaciones.

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

Este capítulo está dedicado a extender y generalizar la teoría de redes de dispersión propuesta inicialmente por Stéphane Mallat. Mientras que el enfoque original de Mallat se centraba en el uso de ondículas y una arquitectura basada en convoluciones seguidas del operador módulo, aquí buscamos una formulación más general que permita mayor flexibilidad en la construcción de redes neuronales convolucionales para la extracción de características.

Comenzamos revisando los conceptos fundamentales de la teoría de Mallat. En particular, recordamos cómo las redes de dispersión logran invarianza por traslaciones utilizando transformadas de ondículas, y cómo la aplicación recursiva del módulo tras cada convolución juega un papel clave en esta arquitectura. Esto sirve de base para construir una teoría más general que capture las características esenciales de las redes convolucionales.

Posteriormente, formalizamos el concepto de un extractor de características convolucional general, que introduce varios tipos de no-linealidades y filtros más allá de las ondículas, abarcando funciones como las rectificadas lineales (ReLU) y sigmoides, así como diferentes tipos de operadores de pooling. Este extractor general es más flexible que el planteamiento original de Mallat y permite modelar arquitecturas más complejas que se utilizan habitualmente en redes neuronales profundas.

Finalmente, analizamos la invarianza vertical por traslaciones, una propiedad esencial en redes profundas, que permite que las características extraídas en capas superiores sean progresivamente más invariantes frente a traslaciones. Esto se demuestra formalmente en este capítulo, proporcionando una comprensión matemática sólida sobre cómo el pooling y la profundidad de la red influyen en dicha invarianza.

Este capítulo se basa en la investigación de Wiatowski (véase [Figura 3.1](#)) y Bölcskei (véase [Figura 3.2](#)), siguiendo como referencia su trabajo, [WB18], junto con las contribuciones de otros autores que serán citados de forma adecuada.

3.1. Resumen de la teoría de Mallat sobre redes de dispersión

3.1.1. Definición del vector de características en redes de dispersión

Comenzamos haciendo un resumen de las redes de dispersión, introducidas en [Mal12] por Mallat y vistas en el [Capítulo 2](#). Dichas redes de dispersión son una arquitectura multinivel que involucra una transformada de ondículas seguida de la no-linealidad del módulo, sin aplicar posteriormente pooling. En particular, en [Definición 2.9](#) se definió el vector de características $\Phi_W(f)$ de la señal $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ como el conjunto:

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión



Figura 3.1.: Thomas Wiatowski, destacado investigador en el campo de las Redes Neuronales Profundas y el Procesamiento de Señales, cuya tesis doctoral y diversos artículos han contribuido significativamente a la comprensión matemática de las redes convolucionales. Imagen extraída de [\[Wia24\]](#).

$$\Phi_W(f) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi_W^n(f), \quad (3.1)$$

donde $\Phi_W^0(f) := \{f * \psi_{(-J,0)}\}$, y :

$$\Phi_W^n(f) := \left\{ (U[\underbrace{\lambda^{(j)}, \dots, \lambda^{(p)}}_{n \text{ índices}}]f) * \psi_{-J,0} \right\}_{\lambda^{(j)}, \dots, \lambda^{(p)} \in \Lambda_W \setminus \{-J,0\}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, con:

$$U[\lambda^{(j)}, \dots, \lambda^{(p)}]f := \underbrace{\left| \cdots \left| |f * \psi_{\lambda^{(j)}}| * \psi_{\lambda^{(k)}} \right| \cdots * \psi_{\lambda^{(p)}} \right|}_{n\text{-convoluciones seguidas de módulo}}.$$

Aquí, el conjunto de índices Λ_W se define como:

$$\Lambda_W := \{(-J,0)\} \cup \{(j,k) \mid j \in \mathbb{Z}, j > -J, k \in \{0, \dots, K-1\}\},$$



Figura 3.2.: Helmut Bölcskei, profesor destacado en ciencias matemáticas de la información, cuyas investigaciones en Procesamiento de Señales, Aprendizaje Automático y Sistemas Inalámbricos han sido ampliamente reconocidas. Sus contribuciones teóricas han influido en diversos campos de la ingeniería y la matemática aplicada. Imagen extraída de [Bö24].

e incluye los pares de escala j y direcciones k (de hecho, k es el índice de la dirección descrita por la matriz de rotación r_k), y:

$$\psi_\lambda(x) := 2^{dj} \psi(2^j r_k^{-1} x), \quad (3.2)$$

donde $\lambda = (j, k) \in \Lambda_W \setminus \{(-J, 0)\}$ representa ondículas direccionalles [Malo8], [AMVAo8], [Lee96], asociadas con la ondícula madre compleja $\psi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Los r_k , con $k \in \{0, \dots, K-1\}$, son elementos de un grupo finito de rotación G (si d es par, G es un subgrupo del grupo ortogonal especial $SO(d) := \{A \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid A^T A = E \text{ y } \det(A) = 1\}$, donde $E \in \mathbb{R}^{d \times d}$ denota la matriz identidad; si d es impar, G es un subgrupo del grupo ortogonal $O(d) := \{A \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid A^T A = E\}$; en este trabajo, nos hemos restringido anteriormente a $d = 1$ para una mejor comprensión). El índice $(-J, 0) \in \Lambda_W$ está asociado con el filtro paso-bajo $\psi_{(-J, 0)} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, y $J \in \mathbb{Z}$ corresponde a la escala más gruesa resuelta por las ondículas direccionalles (3.2).

3.1.2. Marcos semi-discretos

Definición 3.1. Sea $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ un conjunto de funciones indexado por un conjunto numerable Λ . La colección:

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

$$\Psi_\Lambda := \{T_b(Ig_\lambda)\}_{b \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \Lambda},$$

es un *marco semi-discreto* para $L^2(\mathbb{R}^d)$ si existen constantes $A, B > 0$ tales que:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}^d} |\langle f, T_b(Ig_\lambda) \rangle|^2 db = \sum_{\lambda \in \Lambda} \|f * g_\lambda\|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (3.3)$$

donde $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx$, con $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, e $(If)(x) = \overline{f(-x)}$ denota la involución. Las funciones $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ son llamadas los *átomos* del marco Ψ_Λ y a los valores $\langle f, T_b(Ig_\lambda) \rangle = (f * g_\lambda)(b)$ se les denominan *coeficientes* del marco Ψ_Λ . Si $A = B$, el marco se denomina *marco ajustado*. Un marco ajustado con $A = 1$ se llama un *marco de Parseval*.

Se puede pensar en los marcos semi-discretos como marcos invariantes a traslaciones, con un parámetro de traslación continuo, y en el conjunto indexado numerable Λ como una colección de escalas, direcciones o desplazamientos de frecuencia, de ahí el término semi-discreto.

La familia de funciones $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_W}$ forma un marco de Parseval semi-discreto, definido como:

$$\Psi_{\Lambda_W} := \{T_b(I\psi_\lambda)\}_{b \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \Lambda_W},$$

para $L^2(\mathbb{R}^d)$ [Malo8], [AAG93], [Kai94], y se satisface:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_W} \int_{\mathbb{R}^d} |\langle f, T_b(I\psi_\lambda) \rangle|^2 db = \sum_{\lambda \in \Lambda_W} \|f * \psi_\lambda\|^2 = \|f\|^2,$$

para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, donde $\langle f, T_b(I\psi_\lambda) \rangle = (f * \psi_\lambda)(b)$ son los coeficientes del marco subyacente. Nótese que, para un $\lambda \in \Lambda_W$, existe un continuo de coeficientes de marco debido a que el parámetro de traslación $b \in \mathbb{R}^d$ no está muestreado. Véase Figura 3.3 para una ilustración en el dominio de la frecuencia de un marco semi-discreto de ondículas direccionales. Véase también ([WB18], Apéndice A) para una revisión breve de la teoría general de marcos semi-discretos, así como ([WB18], Apéndice B) y ([WB18], Apéndice C), donde se recogen ejemplos estructurados de marcos en 1-D y 2-D, respectivamente.

3.1.3. Relación entre la arquitectura de redes de dispersión y las características extraídas

La arquitectura correspondiente al extractor de características Φ_W en la ecuación (3.1), ilustrada en Figura 3.4, es conocida como red de dispersión (*scattering network* en inglés) [Mal12], y emplea el marco Ψ_{Λ_W} y la no-linealidad del módulo $|\cdot|$ en cada capa de la red, pero no incluye pooling. Para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\Phi_W^n(f)$ en (3.1) corresponde a las características de

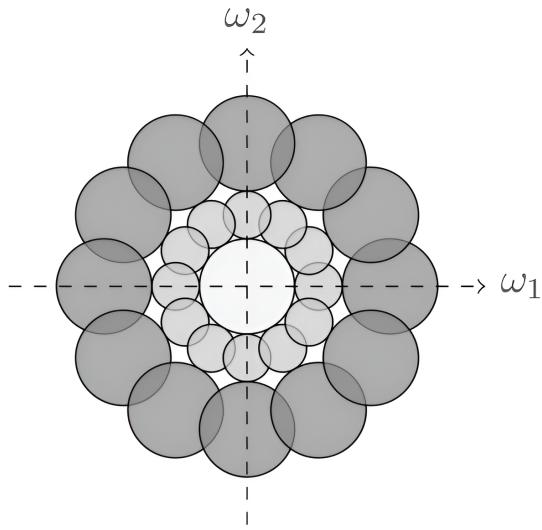


Figura 3.3.: Partición del plano de frecuencias \mathbb{R}^2 inducida por un marco semi-discreto de ondículas direccional, con $K = 12$ direcciones. Imagen extraída de [WB18].

la función f generadas en la capa n -ésima de la red (véase Figura 3.4).

En el Teorema 2.3 demostramos que el extractor de características Φ_W es invariante por traslaciones en el sentido de:

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|\Phi_W(T_t f) - \Phi_W(f)\| = 0, \quad (3.4)$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $t \in \mathbb{R}^d$. Este resultado de invariancia es asintótico en el parámetro de escala $J \in \mathbb{Z}$ y no depende de la profundidad de la red, es decir, garantiza la invariancia total por traslaciones en cada capa de la red.

Además, en el Teorema 2.4 vimos que Φ_W también es estable con respecto a deformaciones de la forma $(T_\tau f)(x) := f(x - \tau(x))$, siendo $\tau \in C^2(\mathbb{R}^d)$ el campo de desplazamiento.

En la práctica, la clasificación de señales basada en redes de dispersión se lleva a cabo de la siguiente manera. Primero, la función f y los átomos de marco de ondículas $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_W}$ se discretizan en vectores de dimensión finita. La red de dispersión resultante calcula entonces el vector de características $\Phi_W(f)$, cuya dimensión suele reducirse mediante un paso de mínimos cuadrados ortogonales [CCG91], y luego se introduce en un clasificador entrenable, como un SVM. Los resultados más avanzados de las redes de dispersión se han reportado en varias tareas de clasificación, como reconocimiento de dígitos manuscritos [BM13], discriminación de texturas [BM13], [Sif14], y clasificación de géneros musicales [AM14].

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

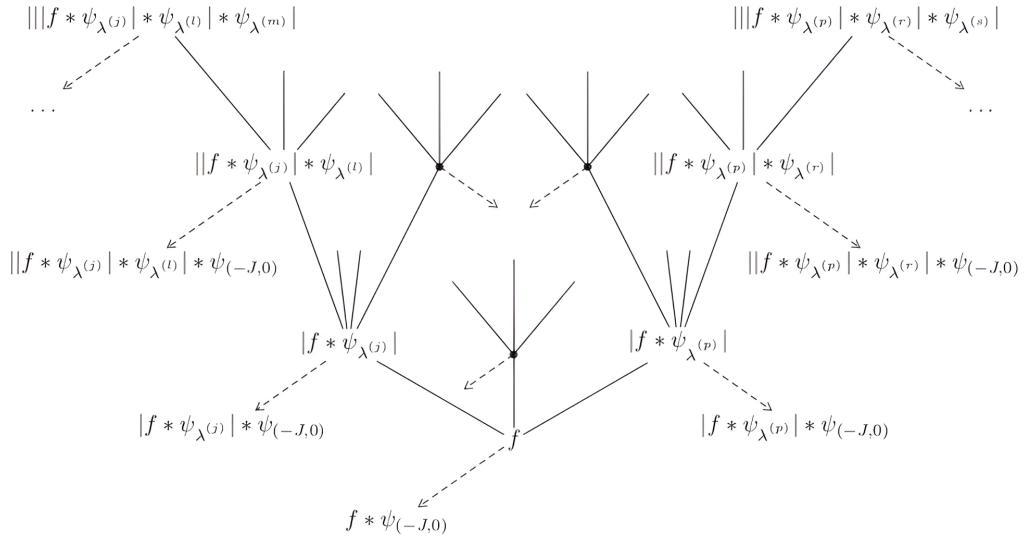


Figura 3.4.: Arquitectura de red de dispersión basada en filtros de ondículas y la no-linealidad del módulo. Los elementos del vector de características $\Phi_W(f)$ se indican en las puntas de las flechas. Imagen extraída de [WB18].

3.2. Construcción del extractor de características convolucional general

3.2.1. Diferencias y similitudes con las redes de dispersión

Como se mencionó previamente, las redes de dispersión siguen la arquitectura de las redes neuronales convolucionales [BCV13], [LBD⁺90], [LKF10], en el sentido de que utilizan convoluciones en cascada (con átomos $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_W}$ del marco de ondículas Ψ_{Λ_W} y no-linealidades como la función de módulo), pero sin aplicar un proceso de pooling. Las redes neuronales convolucionales generales estudiadas en la literatura exhiben características adicionales, tales como:

- Se emplea una amplia variedad de filtros, que incluyen tanto filtros aleatorios [HLo6], [RHBL07] como filtros aprendidos en un marco supervisado [JKRL09], o no supervisado [RHBL07], [RPCLO6].
- También se usan una variedad de funciones no-lineales, como las tangentes hiperbólicas [JKRL09], [RHBL07], unidades lineales rectificadas (ReLU) [GBB11], [NH10], y las sigmoides logísticas [MDH11], [GB10].
- Tras la aplicación de una convolución seguida de una no-linealidad, normalmente se emplea un operador de pooling, que puede ser submuestreo [PCDo8], pooling prome-

dio [HLo6], [JKRL09], o max-pooling [SWPo5], [MLo6].

- Los filtros, las no-linealidades y los operadores de pooling pueden variar entre capas dentro de la misma red [LBH15], [GBC16].

Como se mencionó previamente, el objetivo de este trabajo es desarrollar una teoría matemática de las redes neuronales convolucionales para la extracción de características, abarcando todos los aspectos mencionados anteriormente (exceptuando el max-pooling), y considerando que los operadores de pooling analizados son emulaciones en tiempo continuo de operadores de pooling en tiempo discreto.

Formalmente, en comparación con las redes de dispersión, en la capa n -ésima de la red, reemplazamos la operación módulo-ondícula $|f * \psi_\lambda|$ por una convolución con los átomos $g_{\lambda_n} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ de un marco semi-discreto general $\Psi_{\Lambda_n} := \{T_b(Ig_{\lambda_n})\}_{b \in \mathbb{R}^d, \lambda_n \in \Lambda_n}$ para $L^2(\mathbb{R}^d)$, con un conjunto de índices numerable Λ_n , seguido de una no-linealidad $M_n : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ que cumple con la condición de Lipschitz $\|M_n f - M_n h\| \leq L_n \|f - h\|$, para todo $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y $M_n f = 0$ para $f = 0$. El resultado de esta no-linealidad, $M_n(f * g_{\lambda_n})$, se somete luego a un proceso de pooling según:

$$f \mapsto S_n^{d/2} P_n(f)(S_n \cdot), \quad (3.5)$$

donde $S_n \geq 1$ es el factor de pooling y $P_n : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ satisface la condición de Lipschitz $\|P_n f - P_n h\| \leq R_n \|f - h\|$, para todo $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y $P_n f = 0$ cuando $f = 0$. A continuación, comentamos los elementos individuales en nuestra arquitectura con más detalle. Los átomos del marco g_{λ_n} son arbitrarios y, por lo tanto, también pueden estructurarse como:

- Curvículas (*curvelets* en inglés): Funciones matemáticas diseñadas para representar eficientemente estructuras curvadas dentro de una señal o imagen, lo que las hace especialmente útiles en la detección de bordes suaves o curvaturas. Al igual que las ondículas, las curvículas se definen mediante una función madre que se traslada, rota y escala para cubrir toda la señal, pero con una mayor sensibilidad a las direcciones curvadas, lo que las convierte en una herramienta eficaz para analizar imágenes con detalles geométricos más complejos, como imágenes médicas o astronómicas.
- Crestículas (*ridgelets* en inglés): Funciones matemáticas que se utilizan para detectar estructuras lineales y crestas en imágenes. Están optimizadas para representar eficientemente señales o imágenes con discontinuidades lineales, como bordes o contornos alargados. Las crestículas son especialmente útiles en la compresión de imágenes y en aplicaciones donde las estructuras lineales juegan un papel clave, como en el análisis de imágenes de radar y tomografía.

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

- Ondículas (*wavelets* en inglés): Ya vistas en profundidad en [Capítulo 2](#), donde los átomos g_{λ_n} se obtienen a partir de una ondícula madre mediante operaciones de escalado y rotación.
- Etc.

Véase ([WB18], Apéndice D) para una discusión detallada de varios ejemplos relevantes de no-linealidades (por ejemplo, unidades lineales rectificadas, sigmoides logísticos desplazados, tangentes hiperbólicas y, por supuesto, la función del módulo) que encajan en nuestro marco teórico.

3.2.2. Operadores de pooling

A continuación, explicamos cómo el operador de pooling en tiempo continuo (3.5) emula el pooling en tiempo discreto mediante submuestreo [PCDo8] o pooling promedio [HLo6], [JKRL09]. Consideremos una señal de tiempo discreto unidimensional $f_d \in \ell^2(\mathbb{Z}) := \{f_d : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_d[k]|^2 < \infty\}$. El submuestreo por un factor $S \in \mathbb{N}$ en tiempo discreto se define por ([Vai93]), Sección 4):

$$f_d \mapsto h_d := f_d[S \cdot],$$

y equivale simplemente a retener cada muestra S -ésima de f_d . La transformada de Fourier en tiempo discreto de h_d se expresa como una suma de copias trasladadas y dilatadas de \widehat{f}_d , según ([Vai93]), Sección 4):

$$\widehat{h}_d(\theta) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_d[k] e^{-2\pi i k \theta} = \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} \widehat{f}_d\left(\frac{\theta - k}{S}\right). \quad (3.6)$$

Las copias trasladadas de \widehat{f}_d en (3.6) son una consecuencia de la periodicidad 1 de la transformada discreta de Fourier. Por lo tanto, emulamos la operación de submuestreo en tiempo discreto en un tiempo continuo mediante la operación de dilatación:

$$f \mapsto h := S^{d/2} f(S \cdot), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (3.7)$$

lo cual, en el dominio de frecuencia, equivale a la dilatación según $\widehat{h} = S^{-d/2} \widehat{f}(S^{-1} \cdot)$. El escalamiento por $S^{d/2}$ en (3.7) asegura la unitariedad de la operación de submuestreo en tiempo continuo. La operación general en (3.7) se ajusta a nuestra definición de pooling general, ya que puede recuperarse de (3.5) simplemente tomando P como el mapeo de identidad (que es, por supuesto, Lipschitz-continuo con constante $R = 1$ y satisface $Idf = 0$ para $f = 0$).

3.2. Construcción del extractor de características convolucional general

A continuación, consideramos el pooling promedio. En tiempo discreto, el pooling promedio se define como:

$$f_d \mapsto h_d := (f_d * \phi_d)[S \cdot], \quad (3.8)$$

para el kernel de promedio $\phi_d \in \ell^2(\mathbb{Z})$ típicamente con soporte compacto y el factor de promedio $S \in \mathbb{N}$. Tomando ϕ_d como una función de caja de longitud S equivale a calcular promedios locales de S muestras consecutivas. Los promedios ponderados se obtienen identificando los pesos deseados con el kernel de promedio ϕ_d . La operación (3.8) se puede emular en tiempo continuo según:

$$f \mapsto S^{d/2}(f * \phi)(S \cdot), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (3.9)$$

con la ventana de promedio $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Observemos que (3.9) se puede derivar de (3.5) tomando $P(f) = f * \phi$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Gracias a la *desigualdad de Young*, la cual establece que para funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, tal que $\|g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} = \|\tilde{g}\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}$ y $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$, con $1 \leq p, q, r \leq \infty$ y $\tilde{g}(x) = g(x^{-1})$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, se cumple que $f * g$ existe y satisface que $\|f * g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}$, podemos ver también que la convolución con ϕ es Lipschitz-continua con constante de Lipschitz $R = \|\phi\|_1$ y satisface trivialmente $Pf = 0$ para $f = 0$. En el resto de este trabajo, nos referiremos a la operación en (3.5) como *pooling de Lipschitz a través de dilatación* para indicar que (3.5) equivale esencialmente a la aplicación de un mapeo Lipschitz-continuo seguido de una dilatación en tiempo continuo. Sin embargo, cabe destacar que la operación dada en (3.5) no será unitaria en general.

A continuación, definimos los términos y recopilamos los resultados preliminares necesarios para el análisis del extractor de características convolucional general considerado. Los componentes básicos de esta red son las ternas (Ψ_n, M_n, P_n) asociadas con las capas individuales n de la red y denominadas *módulos*.

Definición 3.2. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $\Psi_n = \{T_b(Ig_{\lambda_n})\}_{b \in \mathbb{R}^d, \lambda_n \in \Lambda_n}$ un marco semi-discreto para $L^2(\mathbb{R}^d)$ y sea $M_n : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ y $P_n : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ operadores Lipschitz-continuos con $M_n f = 0$ y $P_n f = 0$ para $f = 0$, respectivamente. Entonces, la secuencia de ternas:

$$\Omega := ((\Psi_n, M_n, P_n))_{n \in \mathbb{N}},$$

se denomina *secuencia de módulos*.

La siguiente definición introduce el concepto de caminos en conjuntos de índices, el cual nos será útil para formalizar la red de extracción de características. La idea de este formalismo es análoga al que hicimos en la Subsección 2.2.3.

Definición 3.3. Sea $\Omega = ((\Psi_n, M_n, P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de módulos, sean $\{g_{\lambda_n}\}_{\lambda_n \in \Lambda_n}$ los

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

átomos del marco Ψ_n , y sea $S_n \geq 1$ el factor de pooling, de acuerdo a (3.5), asociado a la capa n -ésima de la red. Definimos el operador U_n asociado a la capa n -ésima de la red como $U_n : \Lambda_n \times L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$, tal que:

$$U_n(\lambda_n, f) := U_n[\lambda_n]f := S_n^{d/2} P_n(M_n(f * g_{\lambda_n})) (S_n \cdot). \quad (3.10)$$

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto $\Lambda_1^n := \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \times \Lambda_n$. Una secuencia ordenada $q = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_1^n$ se llama un *camino*. Para el camino vacío $e := \emptyset$ establecemos $\Lambda_1^0 := \{e\}$ y $U_0[e]f := f$, para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

El operador U_n está bien definido, es decir, $U_n[\lambda_n]f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ para todo $(\lambda_n, f) \in \Lambda_n \times L^2(\mathbb{R}^d)$, gracias a que:

$$\begin{aligned} \|U_n[\lambda_n]f\|^2 &= S_n^d \int_{\mathbb{R}^d} |P_n(M_n(f * g_{\lambda_n})) (S_n x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |P_n(M_n(f * g_{\lambda_n})) (y)|^2 dy \\ &= \|P_n(M_n(f * g_{\lambda_n}))\|^2 \leq R_n^2 \|M_n(f * g_{\lambda_n})\|^2 \quad (3.11) \\ &\leq L_n^2 R_n^2 \|f * g_{\lambda_n}\|^2 \leq B_n L_n^2 R_n^2 \|f\|^2. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Para la desigualdad en (3.11), utilizamos la Lipschitz-continuidad de P_n de acuerdo a $\|P_n f - P_n h\|^2 \leq R_n^2 \|f - h\|^2$, con $P_n h = 0$ para $h = 0$, obteniendo $\|P_n f\|^2 \leq R_n^2 \|f\|^2$. Argumentos similares nos llevan a la primera desigualdad en (3.12). El último paso en (3.12) se debe a:

$$\|f * g_{\lambda_n}\|^2 \leq \sum_{\lambda'_n \in \Lambda_n} \|f * g_{\lambda'_n}\|^2 \leq B_n \|f\|^2,$$

que resulta de la condición de marco (3.3) en Ψ_n . También necesitaremos la extensión del operador U_n a caminos $q \in \Lambda_1^n$ según:

$$\begin{aligned} U[q]f &= U[(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)]f \\ &:= U_n[\lambda_n] \cdots U_2[\lambda_2] U_1[\lambda_1]f, \end{aligned} \quad (3.13)$$

con $U[e]f := f$. Notemos que la operación multietapa (3.13) está nuevamente bien definida ya que:

$$\|U[q]f\|^2 \leq \left(\prod_{k=1}^n B_k L_k^2 R_k^2 \right) \|f\|^2, \quad (3.14)$$

3.2. Construcción del extractor de características convolucional general

para $q \in \Lambda_1^n$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, lo cual se deduce de la aplicación repetida de (3.12).

En las redes de dispersión, un átomo ψ_λ , $\lambda \in \Lambda_W$, del marco de ondículas Ψ_{Λ_W} , es decir, el filtro paso-bajo $\psi_{(-J,0)}$, se utiliza para generar las características extraídas según (3.1) (véase Figura 3.4). Siguiendo esta construcción, designamos uno de los átomos en cada marco de la secuencia de módulos $\Omega = ((\Psi_n, M_n, P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ como el *átomo generador de salida* $\chi_{n-1} := g_{\lambda_n^*}, \lambda_n^* \in \Lambda_n$, de la capa $(n-1)$ -ésima. Los átomos $\{g_{\lambda_n}\}_{\lambda_n \in \Lambda_n \setminus \{\lambda_n^*\}} \cup \{\chi_{n-1}\}$ en Ψ_n se usan entonces a través de dos capas consecutivas en el sentido de que $\chi_{n-1} = g_{\lambda_n^*}$ genera la salida en la capa $(n-1)$ -ésima, y los $\{g_{\lambda_n}\}_{\lambda_n \in \Lambda_n \setminus \{\lambda_n^*\}}$ propagan las señales de la capa $(n-1)$ -ésima a la capa n -ésima según (3.10) (véase Figura 3.5).

Obsérvese que esta teoría no requiere que los átomos generadores de salida sean filtros de paso bajo. A partir de ahora, con un pequeño abuso de notación, escribiremos Λ_n para $\Lambda_n \setminus \{\lambda_n^*\}$. Finalmente, cabe destacar que extraer características en cada capa de red usando un átomo generador de salida puede considerarse como el uso de conexiones de salto de capa [HZRS15], que omiten capas de red más abajo y luego alimentan las señales propagadas al vector de características.

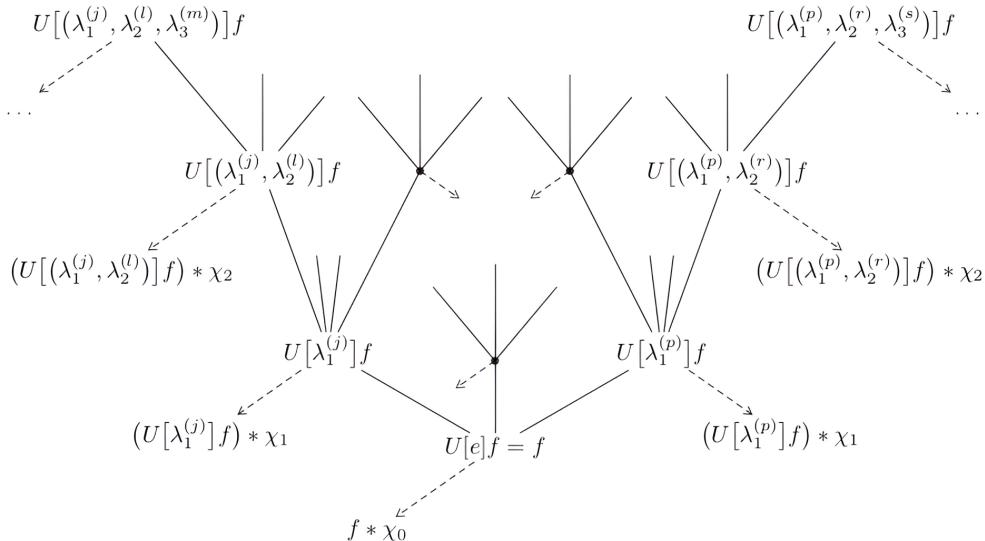


Figura 3.5.: Arquitectura de red subyacente al extractor de características convolucional general. El índice $\lambda_n^{(k)}$ corresponde al k -ésimo átomo $g_{\lambda_n^{(k)}}$ del marco Ψ_n asociado a la capa n -ésima de la red. La función χ_n es el átomo generador de salida de la capa n -ésima. Imagen extraída de [WB18].

Ya estamos listos para definir el extractor de características Φ_Ω basado en la secuencia de módulos Ω .

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

Definición 3.4. Sea $\Omega = ((\Psi_n, M_n, P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de módulos. El *extractor de características* Φ_Ω basado en Ω mapea $L^2(\mathbb{R}^d)$ a su vector de características:

$$\Phi_\Omega(f) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi_\Omega^n(f), \quad (3.15)$$

donde $\Phi_\Omega^n(f) := \{(U[q]f) * \chi_n\}_{q \in \Lambda_1^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

El conjunto $\Phi_\Omega^n(f)$ en la ecuación (3.15) corresponde a las características de la función f generadas en la capa n -ésima de la red (véase Figura 3.5), donde $n = 0$ corresponde a la raíz de la red. El extractor de características $\Phi_\Omega : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow (L^2(\mathbb{R}^d))^Q$, con $Q := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_1^n$, está bien definido, es decir, $\Phi_\Omega(f) \in (L^2(\mathbb{R}^d))^Q$, para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, bajo una condición técnica sobre la secuencia de módulos Ω , formalizada a continuación.

Proposición 3.1. Sea $\Omega = ((\Psi_n, M_n, P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de módulos. Denotemos las cotas superiores del marco Ψ_n por $B_n > 0$ y las constantes de Lipschitz de los operadores M_n y P_n por $L_n > 0$ y $R_n > 0$, respectivamente. Si:

$$\max\{B_n, B_n L_n^2 R_n^2\} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.16)$$

entonces el extractor de características $\Phi_\Omega : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow (L^2(\mathbb{R}^d))^Q$ está bien definido, es decir, $\Phi_\Omega(f) \in (L^2(\mathbb{R}^d))^Q$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Tenemos que demostrar que $\Phi_\Omega(f) \in (L^2(\mathbb{R}^d))^Q$, para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Esto se logrará demostrando un resultado aún más fuerte:

$$\|\Phi_\Omega(f)\| \leq \|f\|, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (3.17)$$

lo que, dado que $\|f\| < \infty$, demuestra nuestra afirmación inicial. Para simplificar la notación, definimos $f_q := U[q]f$, para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Debido a (3.14) y (3.16), tenemos que $\|f_q\| \leq \|f\| < \infty$, y por lo tanto $f_q \in L^2(\mathbb{R}^d)$. La idea clave de la prueba es similar a la demostración de la Proposición 2.3, y se basa en emplear de manera meticulosa un argumento de series telescópicas. Comenzamos escribiendo:

$$\begin{aligned} \|\Phi_\Omega(f)\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q \in \Lambda_1^n} \|f_q * \chi_n\|^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \underbrace{\sum_{q \in \Lambda_1^n} \|f_q * \chi_n\|^2}_{:= a_n}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

El paso clave es demostrar que a_n puede ser acotado superiormente de la siguiente forma:

$$a_n \leq b_n - b_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.19)$$

con $b_n := \sum_{q \in \Lambda_1^n} \|f_q\|^2$, y usar este resultado en un argumento de series telescopicas como sigue:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n &\leq \sum_{n=0}^N (b_n - b_{n+1}) \\ &= (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_N - b_{N+1}) \\ &= b_0 - \underbrace{b_{N+1}}_{\geq 0} \\ &\leq b_0 = \sum_{q \in \Lambda_1^0} \|f_q\|^2 = \|U[e]f\|^2 = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Tenemos que (3.18) implica (3.17). Comenzamos observando que (3.19) se lee como:

$$\sum_{q \in \Lambda_1^n} \|f_q * \chi_n\|^2 \leq \sum_{q \in \Lambda_1^n} \|f_q\|^2 - \sum_{q \in \Lambda_1^{n+1}} \|f_q\|^2, \quad (3.20)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Procedemos a examinar el segundo término en el lado derecho de (3.20). Cada camino:

$$\tilde{q} \in \Lambda_1^{n+1} = \underbrace{\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n}_{=\Lambda_1^n} \times \Lambda_{n+1},$$

de longitud $n+1$, puede descomponerse en un camino $q \in \Lambda_1^n$ de longitud n y un índice $\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}$, según $\tilde{q} = (q, \lambda_{n+1})$. Por (3.13), tenemos que:

$$U[\tilde{q}] = U[(q, \lambda_{n+1})] = U_{n+1}[\lambda_{n+1}]U[q],$$

lo que implica:

$$\sum_{\tilde{q} \in \Lambda_1^{n+1}} \|f_{\tilde{q}}\|^2 = \sum_{q \in \Lambda_1^n} \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} \|U_{n+1}[\lambda_{n+1}]f_q\|^2. \quad (3.21)$$

Sustituyendo el segundo término en el lado derecho de (3.20) por (3.21), obtenemos:

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

$$\sum_{q \in \Lambda_1^n} \|f_q * \chi_n\|^2 \leq \sum_{q \in \Lambda_1^n} \left(\|f_q\|^2 - \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} \|U_{n+1}[\lambda_{n+1}]f_q\|^2 \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

lo que puede reescribirse como:

$$\sum_{q \in \Lambda_1^n} \left(\|f_q * \chi_n\|^2 + \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} \|U_{n+1}[\lambda_{n+1}]f_q\|^2 \right) \leq \sum_{q \in \Lambda_1^n} \|f_q\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.22)$$

A continuación, observemos que el segundo término dentro de la suma del lado izquierdo de (3.22) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} \|U_{n+1}[\lambda_{n+1}]f_q\|^2 &= \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} \int_{\mathbb{R}^d} |(U_{n+1}[\lambda_{n+1}]f_q)(x)|^2 dx \\ &= \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} S_{n+1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |P_{n+1}(M_{n+1}(f_q * g_{\lambda_{n+1}}))(S_{n+1}x)|^2 dx \\ &= \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} \int_{\mathbb{R}^d} |P_{n+1}(M_{n+1}(f_q * g_{\lambda_{n+1}}))(y)|^2 dy \\ &= \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} \|P_{n+1}(M_{n+1}(f_q * g_{\lambda_{n+1}}))\|^2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Nótese que $f_q \in L^2(\mathbb{R}^d)$, como se ha establecido antes, y $g_{\lambda_{n+1}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ por suposición, cumplen que $(f_q * g_{\lambda_{n+1}}) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gracias a la desigualdad de Young. Usamos la condición de Lipschitz de M_{n+1} y P_{n+1} , es decir, $\|M_{n+1}(f_q * g_{\lambda_{n+1}}) - M_{n+1}h\| \leq L_{n+1}\|f_q * g_{\lambda_{n+1}} - h\|$, y $\|P_{n+1}(f_q * g_{\lambda_{n+1}}) - P_{n+1}h\| \leq R_{n+1}\|f_q * g_{\lambda_{n+1}} - h\|$, junto con $M_{n+1}h = 0$ y $P_{n+1}h = 0$ para $h = 0$, para acotar por encima el término de dentro de la suma en (3.23) de acuerdo con:

$$\begin{aligned} \|P_{n+1}(M_{n+1}(f_q * g_{\lambda_{n+1}}))\| &\leq R_{n+1}^2 \|M_{n+1}(f_q * g_{\lambda_{n+1}})\|^2 \\ &\leq L_{n+1}^2 R_{n+1}^2 \|f_q * g_{\lambda_{n+1}}\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sustituyendo el segundo término dentro de la suma en el lado izquierdo de (3.22) por la cota superior resultante de la inserción de (3.24) en (3.23), obtenemos:

$$\sum_{q \in \Lambda_1^n} \left(\|f_q * \chi_n\|^2 + L_{n+1}^2 R_{n+1}^2 \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} \|f_q * g_{\lambda_{n+1}}\|^2 \right)$$

3.2. Construcción del extractor de características convolucional general

$$\leq \sum_{q \in \Lambda_1^n} \max \left\{ 1, L_{n+1}^2 R_{n+1}^2 \right\} \left(\|f_q * \chi_n\|^2 + \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} \|f_q * g_{\lambda_{n+1}}\|^2 \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.25)$$

Dado que las funciones $g_{\lambda_{n+1}}$ y χ_n son átomos del marco semi-discreto Ψ_{n+1} para $L^2(\mathbb{R}^d)$ y que $f_q \in L^2(\mathbb{R}^d)$, como se estableció previamente, tenemos que:

$$\|f_q * \chi_n\|^2 + \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} \|f_q * g_{\lambda_{n+1}}\|^2 \leq B_{n+1} \|f_q\|^2,$$

lo que al usarse en (3.25) resulta:

$$\begin{aligned} & \sum_{q \in \Lambda_1^n} \left(\|f_q * \chi_n\|^2 + \sum_{\lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}} \|U_{n+1}[\lambda_{n+1}] f_q\|^2 \right) \\ & \leq \sum_{q \in \Lambda_1^n} \max \left\{ 1, L_{n+1}^2 R_{n+1}^2 \right\} B_{n+1} \|f_q\|^2 \\ & = \sum_{q \in \Lambda_1^n} \max \left\{ B_{n+1}, B_{n+1} L_{n+1}^2 R_{n+1}^2 \right\} \|f_q\|^2, \end{aligned} \quad (3.26)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Finalmente, invocando la suposición:

$$\max \{B_n, B_n L_n^2 R_n^2\} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

en (3.26), obtenemos (3.22), lo cual completa la demostración. \square

Dado que la condición (3.16) es de gran importancia, la formalizamos de la siguiente manera.

Definición 3.5. Sea $\Omega = ((\Psi_n, M_n, P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de módulos, con cotas superiores del marco $B_n > 0$ y constantes de Lipschitz $L_n, R_n > 0$ para los operadores M_n y P_n , respectivamente. La condición:

$$\max \{B_n, B_n L_n^2 R_n^2\} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.27)$$

se denomina *condición de admisibilidad*. Las secuencias de módulos que satisfacen (3.27) se denominan *admisibles*.

La condición (3.27) se cumple fácilmente en la práctica. Para demostrar esto, primero observamos que B_n está determinado por el marco Ψ_n (por ejemplo, el marco de ondículas direccionales visto en la Sección 3.1 tiene $B = 1$). L_n está definido por la no-linealidad M_n

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

(por ejemplo, la función módulo $M = |\cdot|$ tiene $L = 1$, véase ([WB18], Apéndice D)), y R_n depende del operador P_n dado en (3.5) (por ejemplo, hacer submuestreo equivale a $P = Id$ y tiene $R = 1$). Obviamente, la condición (3.27) se cumple si:

$$B_n \leq \min \left\{ 1, L_n^{-2} R_n^{-2} \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

lo cual se puede satisfacer normalizando adecuadamente los elementos del marco Ψ_n . Véase ([WB18], Apéndice A, Proposición 3), donde se establece que las correspondientes técnicas de normalización no afectan ni a la invarianza vertical por traslaciones ni a la invarianza frente a pequeñas deformaciones.

3.3. Invarianza vertical por traslaciones

El siguiente teorema establece que, bajo condiciones de decaimiento muy leves en las transformadas de Fourier $\widehat{\chi}_n$ de los átomos generadores de salidas χ_n , el extractor de características Φ_Ω presenta invarianza vertical por traslaciones, en el sentido de que las características se vuelven más invariantes a medida que la profundidad de la red aumenta. Este resultado concuerda con observaciones en la literatura de Aprendizaje Profundo, por ejemplo, en [HLo6], [SWPo5] y [MLo6], donde se argumenta que las salidas generadas en capas más profundas tienden a ser más invariantes a traslaciones.

Teorema 3.1. *Sea $\Omega = ((\Psi_n, M_n, P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de módulos admisible, sea $S_n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, el factor de pooling en (3.10), y supongamos que los operadores $M_n : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ y $P_n : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ commutan con el operador de traslación T_t , es decir:*

$$M_n(T_t f) = T_t(M_n f), \quad P_n(T_t f) = T_t(P_n f), \quad (3.28)$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{R}^d$, y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

(1) *Las características $\Phi_\Omega^n(f)$ generadas en la capa n -ésima de la red satisfacen:*

$$\Phi_\Omega^n(T_t f) = T_{t/(S_1 \dots S_n)}(\Phi_\Omega^n(f)), \quad (3.29)$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{R}^d$, y $n \in \mathbb{N}$, donde $T_t(\Phi_\Omega^n(f))$ se refiere a la aplicación por elementos de T_t , es decir, $T_t(\Phi_\Omega^n(f)) := \{T_t h \mid \forall h \in \Phi_\Omega^n(f)\}$.

(II) *Si, además, existe una constante $K > 0$ (que no depende de n) tal que las transformadas de Fourier $\widehat{\chi}_n$ de los átomos generadores de salidas χ_n satisfacen la condición de decaimiento:*

$$|\widehat{\chi}_n(\omega)| |\omega| \leq K, \quad c.p.d. \omega \in \mathbb{R}^d, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.30)$$

entonces:

$$\|\Phi_\Omega^n(T_t f) - \Phi_\Omega^n(f)\| \leq \frac{2\pi|t|K}{S_1 \dots S_n} \|f\|, \quad (3.31)$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $t \in \mathbb{R}^d$.

Demostración. Comenzamos probando (I). El paso clave para establecer (3.29) es demostrar que el operador U_n , $n \in \mathbb{N}$, definido en (3.10), satisface la relación:

$$U_n[\lambda_n](T_t f) = T_{t/S_n}(U_n[\lambda_n]f), \quad (3.32)$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{R}^d$ y $\lambda_n \in \Lambda_n$. Con la definición de $U[q]$ en (3.13), esto se convierte en:

$$U[q](T_t f) = T_{t/(S_1 \dots S_n)}(U[q]f), \quad (3.33)$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{R}^d$ y $q \in \Lambda_1^n$. La identidad (3.29) es una consecuencia directa de (3.33) y la covarianza de traslación del operador de convolución:

$$\begin{aligned} \Phi_\Omega^n(T_t f) &= \{(U[q](T_t f)) * \chi_n\}_{q \in \Lambda_1^n} \\ &= \left\{ \left(T_{t/(S_1 \dots S_n)}(U[q]f) \right) * \chi_n \right\}_{q \in \Lambda_1^n} \\ &= T_{t/(S_1 \dots S_n)} \{(U[q]f) * \chi_n\}_{q \in \Lambda_1^n} \\ &= T_{t/(S_1 \dots S_n)} \Phi_\Omega^n(f), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall t \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Para establecer (3.32), primero definimos el operador unitario:

$$D_n : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), \quad D_n f := S_n^{d/2} f(S_n \cdot),$$

y observamos que:

$$\begin{aligned} U_n[\lambda_n](T_t f) &= S_n^{d/2} P_n(M_n((T_t f) * g_{\lambda_n}))(S_n \cdot) \\ &= D_n \left(P_n(M_n((T_t f) * g_{\lambda_n})) \right) \\ &= D_n \left(P_n(M_n(T_t(f * g_{\lambda_n}))) \right) \\ &= D_n \left(P_n(T_t(M_n(f * g_{\lambda_n}))) \right) \quad (3.34) \\ &= D_n \left(T_t(P_n(M_n(f * g_{\lambda_n}))) \right), \quad (3.35) \end{aligned}$$

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $t \in \mathbb{R}^d$, donde en (3.34) y (3.35) usamos:

$$M_n T_t = T_t M_n, \quad \text{y} \quad P_n T_t = T_t P_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}^d$, respectivamente. Luego, usando:

$$\begin{aligned} D_n(T_t f) &= S_n^{d/2} f(S_n \cdot -t) \\ &= S_n^{d/2} f(S_n(\cdot - t/S_n)) \\ &= T_{t/S_n}(D_n f), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

en (3.35) resulta que:

$$\begin{aligned} U_n[\lambda_n](T_t f) &= D_n\left(T_t(P_n(M_n(f * g_{\lambda_n})))\right) \\ &= T_{t/S_n}\left(D_n(P_n(M_n(f * g_{\lambda_n})))\right) \\ &= T_{t/S_n}(U_n[\lambda_n]f), \end{aligned}$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $t \in \mathbb{R}^d$. Esto completa la prueba de (I).

A continuación, probamos (II). Para facilitar la notación, nuevamente, definimos $f_q := U[q]f$, para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Gracias a (3.14) y la condición de admisibilidad (3.27) tenemos que $\|f_q\| \leq \|f\| < \infty$, y por lo tanto, $f_q \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Primero escribimos:

$$\|\Phi_\Omega^n(T_t f) - \Phi_\Omega^n(f)\|^2 = \|T_{t/(S_1 \dots S_n)}(\Phi_\Omega^n(f)) - \Phi_\Omega^n(f)\|^2 \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{q \in \Lambda_1^n} \|T_{t/(S_1 \dots S_n)}(f_q * \chi_n) - (f_q * \chi_n)\|^2 \\ &= \sum_{q \in \Lambda_1^n} \|M_{-t/(S_1 \dots S_n)}(\widehat{f_q * \chi_n}) - (\widehat{f_q * \chi_n})\|^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde en (3.36) usamos (3.29), y en (3.37) aplicamos la la relación $\widehat{T_t f} = M_{-t} \widehat{f}$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\forall t \in \mathbb{R}^d$, junto con la *fórmula de Parseval* (nótese que $(f_q * \chi_n) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gracias a la desigualdad de Young), la cual establece que, para funciones $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, se tiene $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)} d\omega$, y en el caso particular $g = f$, se tiene que $\|f\| = \|\widehat{f}\|$.

El paso clave ahora es establecer la cota superior:

$$\|M_{-t/(S_1 \cdots S_n)}(\widehat{f_q * \chi_n}) - (\widehat{f_q * \chi_n})\|^2 \leq \frac{4\pi^2|t|^2 K^2}{(S_1 \cdots S_n)^2} \|f_q\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.38)$$

donde $K > 0$ corresponde a la constante en la condición de decaimiento (3.30). Tenemos que:

$$\sum_{q \in \Lambda_1^n} \|f_q\|^2 \leq \sum_{q \in \Lambda_1^{n-1}} \|f_q\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.39)$$

lo cual sigue de (3.19) gracias a:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{q \in \Lambda_1^{n-1}} \|f_q * \chi_{n-1}\|^2 = a_{n-1} \leq b_{n-1} - b_n \\ &= \sum_{q \in \Lambda_1^{n-1}} \|f_q\|^2 - \sum_{q \in \Lambda_1^n} \|f_q\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Iterando en (3.39) obtenemos:

$$\sum_{q \in \Lambda_1^n} \|f_q\|^2 \leq \sum_{q \in \Lambda_1^{n-1}} \|f_q\|^2 \leq \cdots \leq \sum_{q \in \Lambda_1^0} \|f_q\|^2 = \|U[e]f\|^2 = \|f\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.40)$$

La identidad (3.37) junto con las desigualdades (3.38) y (3.40) implican directamente que:

$$\|\Phi_\Omega^n(T_t f) - \Phi_\Omega^n(f)\|^2 \leq \frac{4\pi^2|t|^2 K^2}{(S_1 \cdots S_n)^2} \|f\|^2, \quad (3.41)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Falta probar (3.38). Para esto, primero vemos que:

$$\begin{aligned} &\|M_{-t/(S_1 \cdots S_n)}(\widehat{f_q * \chi_n}) - (\widehat{f_q * \chi_n})\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle / (S_1 \cdots S_n)} - 1 \right|^2 |\widehat{\chi_n}(\omega)|^2 |\widehat{f_q}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Dado que $|e^{-2\pi i x} - 1| \leq 2\pi|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

$$|e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle / (S_1 \cdots S_n)} - 1|^2 \leq \frac{4\pi^2 |\langle t, \omega \rangle|^2}{(S_1 \cdots S_n)^2} \leq \frac{4\pi^2 |t|^2 |\omega|^2}{(S_1 \cdots S_n)^2}, \quad (3.43)$$

donde en el último paso aplicamos la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, la cual establece que para funciones $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ se cumple que $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$. Sustituyendo (3.43) en (3.42) obtenemos:

$$\begin{aligned} \|M_{-t/(S_1 \cdots S_n)}(\widehat{f_q * \chi_n}) - (\widehat{f_q * \chi_n})\|^2 &\leq \frac{4\pi^2 |t|^2}{(S_1 \cdots S_n)^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^2 |\widehat{\chi_n}(\omega)|^2 |\widehat{f_q}(\omega)|^2 d\omega \\ &\leq \frac{4\pi^2 |t|^2 K^2}{(S_1 \cdots S_n)^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f_q}(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$= \frac{4\pi^2 |t|^2 K^2}{(S_1 \cdots S_n)^2} \|\widehat{f_q}\|^2 = \frac{4\pi^2 |t|^2 K^2}{(S_1 \cdots S_n)^2} \|f_q\|^2, \quad (3.45)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde en (3.44) usamos la condición de decaimiento (3.30), y en el último paso, usamos de nuevo la fórmula de Parseval. Esto establece (3.38), y se completa así la prueba de (II). \square

Comenzamos notando que todas las no-linealidades puntuales $M_n : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ satisfacen la comutatividad en (3.28). Una gran clase de no-linealidades ampliamente utilizadas en la literatura de Aprendizaje Profundo, como las unidades lineales rectificadas, tangentes hiperbólicas, sigmoides logísticas desplazadas y la función módulo (empleada en [Mal12]), son de hecho puntuales y, por lo tanto, cubiertas por el Teorema 3.1. Además, $P = \text{Id}$ como en el submuestreo trivialmente satisface (3.28). El pooling promedio $Pf = f * \phi$, con $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, satisface (3.28) como consecuencia de que el operador de convolución commuta con el operador de traslación T_t .

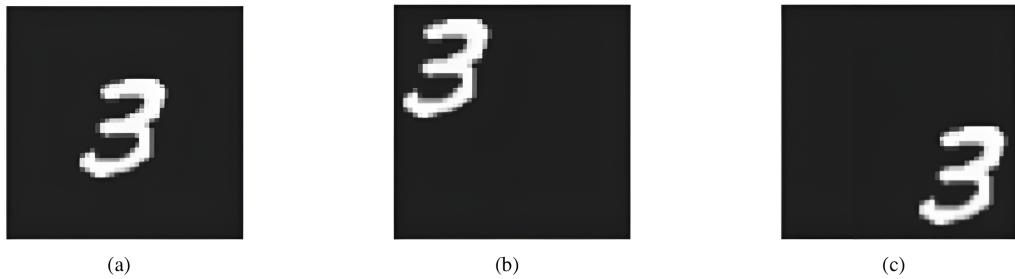
Notamos que la condición (3.30) se puede cumplir fácilmente tomando los átomos generadores de salida $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ satisfaciendo:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \{\|\chi_n\|_1 + \|J\chi_n\|_1\} < \infty.$$

La cota en (3.31) muestra que podemos controlar explícitamente la cantidad de invarianza por traslaciones mediante los factores de pooling S_n . Este resultado está en línea con observaciones hechas en la literatura de Aprendizaje Profundo, véase, por ejemplo, [HLo6], [SWPo5], [MLo6], donde se argumenta informalmente que el pooling es crucial para obtener por traslaciones de las características extraídas. Además, la condición $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 \cdots S_n = \infty$ (fácilmente cumplida tomando $S_n > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$) garantiza, gracias a (3.31), una total invarianza por traslaciones asintótica según:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_\Omega^n(T_t f) - \Phi_\Omega^n(f)\| = 0, \quad (3.46)$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $t \in \mathbb{R}^d$. Esto significa que las características $\Phi_\Omega^n(T_t f)$, correspondientes a las versiones desplazadas $T_t f$ del dígito manuscrito 3 en [Figura 3.6](#) (b) y (c), se parezcan cada vez más a las características $\Phi_\Omega^n(f)$, correspondientes al dígito manuscrito 3 sin desplazar en [Figura 3.6](#) (a), a medida que aumenta la profundidad de la red. En términos simples, el operador de desplazamiento T_t es progresivamente absorbido por Φ_Ω^n a medida que $n \rightarrow \infty$, con el límite superior (3.31) cuantificando esta absorción.



[Figura 3.6](#).: Dígitos manuscritos del conjunto de datos MNIST [[LC98](#)]. Para tareas prácticas de Aprendizaje Automático (por ejemplo, clasificación de señales), a menudo deseamos que el vector de características $\Phi_\Omega(f)$ sea invariante a la ubicación espacial de los dígitos dentro de la imagen f . El [Teorema 3.1](#) establece que las características $\Phi_\Omega^n(f)$ se vuelven más invariantes por traslaciones conforme aumenta el índice de la capa n . Imagen extraída de [[WB18](#)].

En contraste, el resultado de invarianza por traslaciones (3.4) desarrollado en la [Sección 2.4](#) es asintótico en el parámetro de escala de ondícula J , y no depende de la profundidad de la red, es decir, garantiza plena invarianza por traslaciones en cada capa de la red. Para diferenciar, nos referimos a (3.4) como invarianza horizontal por traslaciones y a (3.46) como invarianza vertical por traslaciones.

Destacamos que la invarianza vertical por traslaciones es una propiedad estructural. Específicamente, si P_n es unitario (como, por ejemplo, en el caso del submuestreo, donde P_n simplemente equivale al mapeo identidad), entonces también lo es la operación de pooling en (3.5) debido a:

$$\|S_n^{d/2} P_n(f)(S_n \cdot)\|^2 = S_n^d \int_{\mathbb{R}^d} |P_n(f)(S_n x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |P_n(f)(x)|^2 dx = \|P_n(f)\|^2 = \|f\|^2,$$

donde utilizamos el cambio de variable $y = S_n x$, $\frac{dy}{dx} = S_n^d$. En cuanto al pooling promedio, como se mencionó anteriormente, los operadores $P_n(f) = f * \phi_n$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, no son, en general, unitarios, pero aún así obtenemos invarianza por traslaciones como consecuencia

3. Generalización de la Teoría de Mallat sobre Redes de Dispersión

de propiedades estructurales, a saber, la covarianza de traslación del operador de convolución combinada con la dilatación unitaria según (3.7).

Finalmente, señalamos que en la práctica, en ciertas aplicaciones, en realidad es la covarianza de traslación en el sentido de $\Phi_{\Omega}^n(T_t f) = T_t(\Phi_{\Omega}^n(f))$, para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $t \in \mathbb{R}^d$, lo que es deseable, como por ejemplo, en la detección de landmarks faciales, donde el objetivo es estimar la posición absoluta de landmarks faciales en imágenes. En tales aplicaciones, las características en las capas más cercanas a la raíz de la red son más relevantes, ya que son menos invariantes a la traslación y más covariantes a la traslación. En [WTS⁺16] se proporciona evidencia numérica detallada de esto último. Presentamos a continuación la declaración formal de nuestra covarianza de traslación.

Corolario 3.1. *Sea $\Omega = ((\Psi_n, M_n, P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de módulos admisible, sea $S_n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, el factor de pooling en (3.10), y supongamos que los operadores $M_n : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ y $P_n : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ commutan con el operador de traslación T_t en el sentido de (3.28). Si, además, existe una constante $K > 0$ (que no depende de n) tal que las transformadas de Fourier $\widehat{\chi}_n$ de los átomos generadores de salida χ_n satisfacen la condición de decaimiento (3.30), entonces:*

$$\|\Phi_{\Omega}^n(T_t f) - T_t(\Phi_{\Omega}^n(f))\| \leq 2\pi|t|K|1/(S_1 \cdots S_n) - 1|\|f\|,$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $t \in \mathbb{R}^d$.

Demostración. La idea principal de la demostración es (similar a la demostración de (II) en el Teorema 3.1) acotar la desviación de la covarianza perfecta en el dominio de la frecuencia. Para simplificar la notación, de nuevo, sea $f_q := U[q]f$, para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Gracias a (3.14) y la condición de admisibilidad (3.27), tenemos que $\|f_q\| \leq \|f\| < \infty$, y así $f_q \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Primero escribimos:

$$\|\Phi_{\Omega}^n(T_t f) - T_t(\Phi_{\Omega}^n(f))\|^2 = \|T_{t/(S_1 \cdots S_n)}\Phi_{\Omega}^n(f) - T_t(\Phi_{\Omega}^n(f))\|^2 \quad (3.47)$$

$$= \sum_{q \in \Lambda_1^n} \|(T_{t/(S_1 \cdots S_n)} - T_t)(f_q * \chi_n)\|^2 \\ = \sum_{q \in \Lambda_1^n} \|(M_{-t/(S_1 \cdots S_n)} - M_{-t})(\widehat{f_q * \chi_n})\|^2, \quad (3.48)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde en (3.47) usamos (3.29), y en (3.48) empleamos la fórmula de Parseval (nótese que $(f_q * \chi_n) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gracias a la desigualdad de Young) junto con la relación:

$$\widehat{T_t f} = M_{-t} \widehat{f}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall t \in \mathbb{R}^d.$$

El paso clave es entonces establecer la siguiente cota superior:

$$\|(M_{-t/(S_1 \cdots S_n)} - M_{-t})(\widehat{f_q * \chi_n})\|^2 \leq 4\pi^2 |t|^2 K^2 |1/(S_1 \cdots S_n) - 1|^2 \|f_q\|^2, \quad (3.49)$$

donde $K > 0$ corresponde a la constante en la condición de decaimiento (3.30). Argumentos similares a los que conducen a (3.41) completan la prueba. Solo queda demostrar (3.49):

$$\begin{aligned} & \|(M_{-t/(S_1 \cdots S_n)} - M_{-t})(\widehat{f_q * \chi_n})\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle / (S_1 \cdots S_n)} - e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} \right|^2 |\widehat{\chi}_n(\omega)|^2 |\widehat{f}_q(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dado que $|e^{-2\pi i x} - e^{-2\pi i y}| \leq 2\pi|x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\left| e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle / (S_1 \cdots S_n)} - e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} \right|^2 \leq 4\pi^2 |t|^2 |\omega|^2 |1/(S_1 \cdots S_n) - 1|^2, \quad (3.51)$$

donde, nuevamente, empleamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sustituyendo (3.51) en (3.50), y empleando argumentos similares a los que conducen a (3.45), obtenemos (3.49), concluyendo así la demostración. \square

El [Corolario 3.1](#) muestra que, en ausencia de pooling, es decir, tomando $S_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se obtiene una covarianza de traslación completa en cada capa de la red. Esto demuestra que el pooling es necesario para lograr invarianza vertical por traslaciones, ya que de otro modo, las características permanecen completamente covariantes a las traslaciones, independientemente de la profundidad de la red. Finalmente, observamos que las redes de dispersión vistas en el [Capítulo 2](#) (que no emplean operadores de pooling) se vuelven invariantes horizontalmente por traslaciones al permitir que el parámetro de escala de la ondícula J tienda a infinito.

Para concluir, cabe destacar que en ([WB18], Sección IV-B), se demuestra también que el extractor de características convolucional general Φ_Ω es invariante frente a pequeñas deformaciones, es decir, se proporciona una cota de sensibilidad frente a deformaciones en señales de banda limitada $f \in L_R^2(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \text{supp}(\widehat{f}) \subseteq B_R(0)\}$, siendo $B_R(0)$ la bola abierta de radio R centrada en 0, definidas como:

$$(T_{\tau, \omega} f)(x) := e^{2\pi i \omega(x)} f(x - \tau(x)),$$

donde se incluyen distorsiones no lineales y modulaciones no deseadas que afectan a la señal original (véase [Figura 3.7](#)). Debido a la complejidad técnica de esta sección y a la falta de tiempo, no se ha incluido en este trabajo.

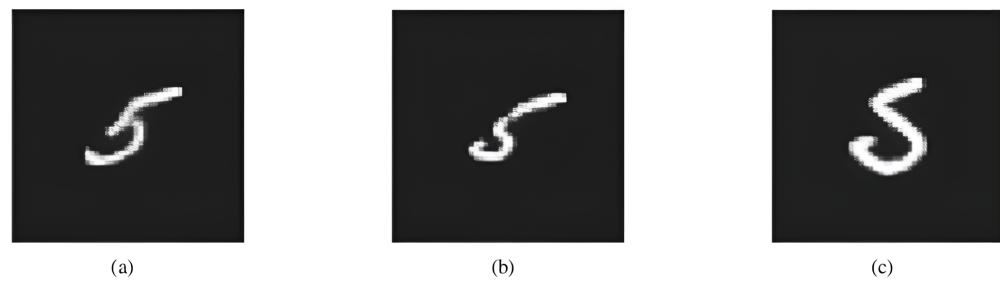


Figura 3.7.: Dígitos manuscritos del conjunto de datos MNIST [LC98]. Si f representa la imagen del dígito 5 en (a), entonces, con una función τ seleccionada apropiadamente, la función $T_\tau f = f(\cdot - \tau(\cdot))$ modela imágenes del 5 basadas en diferentes estilos de escritura como en (b) y (c). Imagen extraída de [WB18].

4. Conclusiones y Trabajos Futuros

En este trabajo, hemos abordado el estudio de las redes neuronales convolucionales desde una perspectiva teórica, centrándonos en su modelización matemática. A lo largo de los capítulos, hemos seguido un enfoque que busca fundamentar matemáticamente el funcionamiento de las redes neuronales convolucionales, tomando como punto de partida la teoría de Mallat y su aplicación en redes de dispersión.

En el primer capítulo, establecimos el marco teórico básico para entender la invarianza por traslaciones y la invarianza frente a pequeñas deformaciones. Esto nos llevó a considerar la necesidad de un operador que pudiera aplicarse de manera recursiva en las redes neuronales, manteniendo ciertas propiedades fundamentales.

En el segundo capítulo, se comenzó demostrando que los operadores derivados de la transformada de Fourier no son adecuados para nuestro propósito, debido a la falta de Lipschitz-continuidad bajo la acción de difeomorfismos. Por lo tanto, exploramos alternativas más viables, como las ondículas, especialmente la transformadas de Littlewood-Paley. Luego profundizamos en la teoría de Mallat sobre redes de dispersión, donde demostramos cómo las ondículas, combinadas con el operador módulo, pueden ser utilizadas para generar coeficientes invariantes por traslaciones. Se presentó un análisis riguroso sobre la propagación de la dispersión y la conservación de la norma en estas redes. Además, abordamos la estabilidad frente a pequeñas deformaciones y la importancia de la no-expansividad en la distancia entre funciones, destacando cómo las redes de dispersión mantienen la estabilidad bajo estas condiciones, lo que resulta esencial para aplicaciones de reconocimiento de patrones y clasificación.

Finalmente, en el tercer capítulo, extendimos la teoría de Mallat para cubrir arquitecturas convolucionales más generales. Aquí introdujimos un extracto de características convolucional que es capaz de capturar invarianza vertical por traslaciones, lo que refleja las observaciones experimentales en las aplicaciones prácticas de las redes neuronales convolucionales.

Con estas conclusiones, hemos logrado cumplir con los objetivos planteados al inicio del trabajo: proporcionar una modelización matemática general de las redes neuronales convolucionales y demostrar la invarianza por traslaciones en un marco teórico sólido. Respecto a la invarianza frente a pequeñas deformaciones, sí se demostró para redes de dispersión, pero no se ha hecho formalmente para la modelización general. Este recorrido, además de haber permitido un análisis profundo de las redes neuronales convolucionales desde un enfoque matemático, me ha proporcionado una mejor comprensión de conceptos fundamentales como las transformadas de ondículas, los marcos semi-discretos, etc.

Este trabajo también ha sido una oportunidad para profundizar en áreas clave del Procesamiento de Señales y la Visión por Computador, conectando de manera natural los conocimientos adquiridos durante el grado. El proceso de investigación me ha permitido aprender a leer y analizar publicaciones matemáticas especializadas, una habilidad que considero esen-

4. Conclusiones y Trabajos Futuros

cial para futuras investigaciones en este campo.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en este trabajo, los trabajos futuros podrían ser:

- Demostrar rigurosamente que $(\bar{S}f)(p)$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y para todo camino p , pertenece a $L^2(\mathbb{R}^d)$.
- Demostrar la condición suficiente que garantiza la convergencia uniforme del operador de dispersión de ventana $S_J f$ en $\bar{S}f$.
- Demostrar que el propagador dispersa la energía progresivamente hacia bajas frecuencias ([Lema 2.4](#)).
- Demostrar la estabilidad de la transformada de ondículas W_J frente a pequeñas deformaciones ([Lema 2.9](#)).
- Demostrar la invarianza frente a pequeñas deformaciones del extracto de características convolucionales general.

Parte II.

Técnicas de Explicabilidad para Arquitecturas Neuronales Profundas de Segmentación de Instancias

5. Introducción

5.1. Descripción del problema

5.2. Motivación

5.3. Objetivos

5.4. Planificación y estimación de costes

6. *Fundamentos Teóricos*

6. Fundamentos Teóricos

6.1. Aprendizaje Automático

- 6.1.1. Aprendizaje supervisado
- 6.1.2. Aprendizaje no supervisado
- 6.1.3. Problemas de clasificación
- 6.1.4. Problemas de regresión
- 6.1.5. Gradiente descendente
- 6.1.6. Gradiente descendente estocástico

6.2. Aprendizaje Profundo

- 6.2.1. Redes neuronales
- 6.2.2. Back-propagation
- 6.2.3. Aprendizaje supervisado

6.3. Visión por Computador

6.4. Redes neuronales convolucionales

- 6.4.1. Capa convolucional
- 6.4.2. Capa de pooling
- 6.4.3. Capa fully-connected
- 6.4.4. Capa dropout
- 6.4.5. Optimizador Adam
- 6.4.6. Batch normalization
- 6.4.7. Proceso de entrenamiento

6.5. Data augmentation

6.6. Fine-tuning

6.7. Explicabilidad en redes neuronales convolucionales

- 6.7.1. Explicaciones basadas en eliminación
- 6.7.2. Explicaciones basadas en gradientes
- 6.7.3. Explicaciones basadas en propagación

7. Estado del Arte

8. Métodos Propuestos

8.1. Mask R-CNN

8.2. GradCAM

9. Implementación

9.1. Diseño del software

9.2. Entorno de ejecución

10. Experimentación

10.1. Datos empleados

10.2. Protocolo de validación experimental

10.3. Métricas empleadas

10.4. Experimentos realizados

10.5. Resultados obtenidos

10.6. Discusión de los resultados obtenidos

11. Conclusiones y Trabajos Futuros

Bibliografía

- [AAG93] S. T. Ali, J. P. Antoine, y J. P. Gazeau. Continuous frames in hilbert spaces. *Annals of Physics*, 222(1):1–37, 1993.
- [AM14] J. Andén y S. Mallat. Deep scattering spectrum. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 62(16):4114–4128, 2014.
- [AMVAo8] J. P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, y S. T. Ali. Two-dimensional wavelets and their relatives. *Cambridge University Press*, 2008.
- [BCV13] Y. Bengio, A. Courville, y P. Vincent. Representation learning: A review and new perspectives. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 35(8):1798–1828, 2013.
- [BM13] J. Bruna y S. Mallat. Invariant scattering convolution networks. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 35(8):1872–1886, 2013.
- [Bru12] J. Bruna. Operators commuting with diffeomorphisms. Technical report, CMAP Tech. Report, 2012.
- [Bö24] H. Bölskei. Eth zurich - prof. dr. helmut bölskei. <https://ee.ethz.ch/the-department/faculty/professors/person-detail.MTA1NTk5.TGlzdC80MTEsMTA1ODA0MjU5.html>, 2024.
- [CCG91] S. Chen, C. Cowan, y P. M. Grant. Orthogonal least squares learning algorithm for radial basis function networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2(2):302–309, 1991.
- [GB10] X. Glorot y Y. Bengio. Understanding the difficulty of training deep feedforward neural networks. *Proc. of International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS)*, páginas 249–256, 2010.
- [GBB11] X. Glorot, A. Bordes, y Y. Bengio. Deep sparse rectifier neural networks. *Proc. of International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS)*, páginas 315–323, 2011.
- [GBC16] I. Goodfellow, Y. Bengio, y A. Courville. *Deep Learning*. MIT Press, 2016.
- [HGDG17] K. He, G. Gkioxari, P. Dollár, y R. Girshick. Mask r-cnn. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, páginas 2961–2969, 2017.
- [HLo6] F. J. Huang y Y. LeCun. Large-scale learning with svm and convolutional nets for generic object categorization. *Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, páginas 284–291, 2006.
- [HZRS15] K. He, X. Zhang, S. Ren, y J. Sun. Deep residual learning for image recognition. *Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, páginas 770–778, 2015.
- [Hö71] L. Hörmander. Fourier integral operators. i. *Acta Mathematica*, 127(1):79–183, 1971.
- [Ins24] Prairie Institute. Stéphane Mallat — Prairie institute. <https://prairie-institute.fr/charles/mallat-stephane/>, 2024.
- [JKRLO9] K. Jarrett, K. Kavukcuoglu, M. Ranzato, y Y. LeCun. What is the best multi-stage architecture for object recognition? *Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, páginas 2146–2153, 2009.
- [Jor24] P. Jorgensen. Haar Wavelet. <https://homepage.divms.uiowa.edu/~jorgen/Haar.html>, 2024.
- [KA18] E. Kauderer-Abrams. Quantifying translation-invariance in convolutional neural networks. *CoRR*, abs/1801.01450, 2018.

Bibliografía

- [Kai94] G. Kaiser. *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhäuser, 1994.
- [LBD⁺90] Y. LeCun, B. Boser, J. Denker, D. Henderson, R. Howard, W. Hubbard, y L. Jackel. Handwritten digit recognition with a back-propagation network. *Proc. of International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS)*, páginas 396–404, 1990.
- [LBH15] Y. LeCun, Y. Bengio, y G. Hinton. Deep learning. *Nature*, 521:436–444, 2015.
- [LC98] Y. LeCun y C. Cortes. The mnist database of handwritten digits. <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>, 1998.
- [Lee96] T. Lee. Image representation using 2d gabor wavelets. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(10):959–971, 1996.
- [LKF10] Y. LeCun, K. Kavukcuoglu, y C. Farabet. Convolutional networks and applications in vision. *Proc. of IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, páginas 253–256, 2010.
- [Low04] D. G. Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60, 2004.
- [LYP16] S. Lim, S. Young, y R. Patton. An analysis of image storage systems for scalable training of deep neural networks. *ResearchGate*, 2016.
- [Malo8] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Elsevier, 3rd ed. edición, 2008.
- [Mal12] S. Mallat. Group invariant scattering. *Comm. Pure Appl. Math.*, 65(10):1331–1398, 2012.
- [MDH11] A. Mohamed, G. E. Dahl, y G. Hinton. Acoustic modeling using deep belief networks. *IEEE Trans. Audio, Speech, and Language Process.*, 20:14–22, Jan. 2011.
- [ML06] J. Mutch y D. Lowe. Multiclass object recognition with sparse, localized features. *Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, páginas 11–18, 2006.
- [NH10] V. Nair y G. Hinton. Rectified linear units improve restricted boltzmann machines. *Proc. of International Conference on Machine Learning (ICML)*, páginas 807–814, 2010.
- [PCD08] N. Pinto, D. Cox, y J. DiCarlo. Why is real-world visual object recognition hard. *PLoS Computational Biology*, 4(1):151–156, 2008.
- [RHBL07] M. A. Ranzato, F. J. Huang, Y. Boureau, y Y. LeCun. Unsupervised learning of invariant feature hierarchies with applications to object recognition. *Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, páginas 1–8, 2007.
- [RPCLo06] M. Ranzato, C. Poultney, S. Chopra, y Y. LeCun. Efficient learning of sparse representations with an energy-based model. *Proc. of International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS)*, páginas 1137–1144, 2006.
- [Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw.Hill, 2nd ed. edición, 1991.
- [SCD⁺17] R. R. Selvaraju, M. Cogswell, A. Das, R. Vedantam, D. Parikh, y D. Batra. Grad-cam: Visual explanations from deep networks via gradient-based localization. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, páginas 618–626, 2017.
- [Sif14] L. Sifre. Rigid-motion scattering for texture classification. *Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique Paris-Saclay*, 2014.
- [SWP05] T. Serre, L. Wolf, y T. Poggio. Object recognition with features inspired by visual cortex. *Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, páginas 994–1000, 2005.
- [Vai93] P. P. Vaidyanathan. *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice Hall, 1993.
- [WB18] T. Wiatowski y H. Bölcskei. A mathematical theory of deep convolutional neural networks for feature extraction. *IEEE Transactions on Information Theory*, 63:1845–1866, 2018.

- [Wia24] T. Wiatowski. Mins - eth zurich: Thomas wiatowski. <https://www.mins.ee.ethz.ch/people/show/withomas>, 2024.
- [Wik24] Wikipedia. Ondícola de Haar — Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Ond%C3%ADcola_de_Haar, 2024.
- [Wor24] Math Works. Continuous wavelet transform and scale-based analysis. <https://www.mathworks.com/help/wavelet/gs/continuous-wavelet-transform-and-scale-based-analysis.html>, 2024.
- [WTS⁺16] T. Wiatowski, M. Tschannen, A. Stanić, P. Grohs, y H. Bölcskei. Discrete deep feature extraction: A theory and new architectures. *Proc. of International Conference on Machine Learning (ICML)*, páginas 2149–2158, 2016.
- [XJ21] A. I. Xavier y J. Jeng. Mask-gradcam: Object identification and localization of visual presentation for deep convolutional network. *2021 6th International Conference on Inventive Computation Technologies (ICICT)*, páginas 1171–1178, January 2021.
- [XVM⁺21] A. I. Xavier, C. Villavicencio, J. J. Macrohon, J. Jeng, y J. Hsieh. Object identification and localization using grad-cam++ with mask regional convolution neural network. *Electronics*, 10(13):1541, 2021.
- [XVM⁺22] A. I. Xavier, C. Villavicencio, J. J. Macrohon, J. Jeng, y J. Hsieh. Object detection via gradient-based mask r-cnn using machine learning algorithms. *Machines*, 10(5):340, 2022.
- [ZKS⁺19] Z. Zhao, A. Kleinhans, G. Sandhu, I. Patel, y K. P. Unnikrishnan. Capsule networks with max-min normalization. *arXiv preprint arXiv:1903.09662*, 2019.