5/11/2020

Contraejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$. En $(\mathbb{R}, T_u)$ cada punto es cerrado.

No es cierto que f continua $\Leftrightarrow$ $f|_{\{x\}}$ es continua

$f|_{\{x\}}: \{x\} \to \mathbb{R}$ siempre es continua por ser constante (independientemente de la topología que pongamos en $\mathbb{R}$).

Si fuera cierto que: "dada $f: (X, T) \to (Y, T')$, $X = \bigcup_{i\in I} C_i$, C_i cerrados de X, f cont. $\Leftrightarrow$ $f|_{C_i}$ es continua", entonces cualquier aplicación $f: (\mathbb{R}, T_u) \to (\mathbb{R}, T_u)$ sería continua.

$f: (X, T) \to (Y, T')$ homeomorfismo si f biyectiva, continua y abierta

(X, T) es homeomorfo a (Y, T') ($(X,T) \cong (Y, T')$) si $\exists\, f: (X, T) \to (Y, T')$ homeomorfismo.

Def: un invariante topológico es una propiedad de un espacio topológico que se conserva por homeomorfismos.

Ejemplos: 1. Sea (X, T) un e.top. Entonces el cardinal de X es un invariante topológico, puesto que $(X,T) \cong (Y, T')$, existe $f: (X,T) \to (Y, T')$ homeomorfismo, que es una aplicación biyectiva. Por tanto $\# X = \# Y$.

$$(\mathbb{R}, T_{CF}) \not\cong (\mathbb{N}, T_{CF})$$

2. La propiedad Hausdorff es un invariante topológico. Supongamos que (X, T) es Hausdorff y que $f: (X, T) \to (Y, T')$ es un homeomorfismo. Veamos que (Y, T') es Hausdorff. Sean $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Como f es biyectiva, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Por supuesto, $x_1 \neq x_2$.

Como (X,T) es Hausdorff, y $x_1 \neq x_2$, existen $V_1 \in N_{x_1}$, $V_2 \in N_{x_2}$ tales que $\phi = V_1 \cap V_2$. Entonces $\phi = f(\phi) = f(V_1 \cap V_2) = f(V_1) \cap f(V_2)$ (f biyectiva). Veamos que $f(V_i)$ es entorno de y_i, $i=1,2$. Esto demostraría que (Y,T') es Hausdorff.

→ V es entorno de $x \in X$ y $f:(X,T) \to (Y,T')$ homeomorfismo, entonces $f(V)$ es entorno de $f(x) \in Y$. Sabemos que $V \in N_x \Rightarrow \exists\, U \in T$ tal que $x \in U \subset V \Rightarrow f(x) \in f(U) \subset f(V)$. Como f es homeomorfismo, es abierta. $\Rightarrow f(U) \in T' \Rightarrow f(U) \in N'_{f(x)}$. Como $f(U) \subset f(V) \Rightarrow f(V) \in N'_{f(x)}$.

$$\underbrace{(\mathbb{R}, T_{CF})}_{\text{no es Hausdorff}} \not\cong \underbrace{(\mathbb{R}, T_u)}_{\text{sí es Hausdorff}}$$

3. Propiedades que son invariantes topológicos.

- AN-I
- AN-II

} ejercicio.

Si $f:(X,T) \to (Y,T')$ es homeomorfismo, $x \in X$.

- Si $\mathcal{B}_x$ es base de entornos de $x \Rightarrow f(\mathcal{B}_x) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}_x\}$ es base de entornos de $f(x)$
- Si $\mathcal{B}$ es base de T, entonces $f(\mathcal{B}) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es base de T'.

Ejemplo: Sea (X,T) un e.top., Y conjunto, $f: X \to Y$. ¿Puedo poner en Y una topología de modo que f sea continua? Sí, la top. trivial T_t en Y. ¿Cuál es la top. en Y con la mayor cantidad posible de abiertos tal que f es continua?

$$T'_f = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$$

$\mathcal{T}_f'$ es topología

- $\underset{\mathcal{T}}{\underset{\Uparrow}{\phi}} = f^{-1}(\phi)$, $\underset{\mathcal{T}}{\underset{\Uparrow}{X}} = f^{-1}(Y) \Rightarrow \phi, Y \in \mathcal{T}_f'$

- Sea $\{V_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}_f' \Rightarrow f^{-1}(V_i) \in \mathcal{T} \ \forall i \in I \underset{\mathcal{T}\ top.}{\Rightarrow} \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) \in \underline{\mathcal{T}}$

$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\underline{\bigcup_{i\in I} V_i}\right)$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{T}_f'$

- $V_1, \dots, V_K \in \mathcal{T}_f' \Rightarrow f^{-1}(V_1 \cap \dots \cap V_K) = \underset{\mathcal{T}}{\underset{\Uparrow}{f^{-1}(V_1)}} \cap \dots \cap \underset{\mathcal{T}}{\underset{\Uparrow}{f^{-1}(V_K)}} \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow V_1 \cap \dots \cap V_K \in \mathcal{T}_f'$.

Si $\mathcal{T}'$ es una topología en Y tal que $f: (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua entonces $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_f$. Si $\underline{V \in \mathcal{T}'}$, como f es continua, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T} \Rightarrow \underline{V \in \mathcal{T}_f'}$

$\mathcal{T}_f'$ = topología final para la aplicación f.

<u>Ejemplo:</u> Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ una familia de e. top., Y conjunto, $f_i: X_i \to Y$ familia de aplicaciones. ¿Existe en Y una topología con la mayor cantidad posible de abiertos que hace continuas a estas aplicaciones?

Sea $\mathcal{T}' = \{V \subset Y : f_i^{-1}(V) \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in I\}$. Veamos que $\mathcal{T}'$ es topología en Y.

- $\phi = f_i^{-1}(\phi)$ $\ X_i = f_i^{-1}(Y)$ $\forall i \in I \Rightarrow \phi, Y \in \mathcal{T}'$
- $\{V_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{T}' \Rightarrow f_i^{-1}(V_j) \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in I, \forall j \in J. \Rightarrow \underline{f_i}^{-1}\left(\underline{\bigcup_{j\in J} V_j}\right) =$

$= \bigcup_{j\in J} \underset{\mathcal{T}_i}{\underset{\Uparrow}{f_i^{-1}(V_j)}} \in \underline{\mathcal{T}_i} \ \underline{\forall i} \Rightarrow \bigcup_{j\in J} V_j \in \mathcal{T}_i$

- $V_1,\dots,V_K \in T' \Rightarrow f_i^{-1}(V_1),\dots,f_i^{-1}(V_K) \in T_i \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow f_i^{-1}(V_1 \cap \dots \cap V_K) = \underset{T_i}{\underset{\cap}{f_i^{-1}(V_1)}} \cap \dots \cap \underset{T_i}{\underset{\cap}{f_i^{-1}(V_K)}} \in T_i \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow V_1 \cap \dots \cap V_K \in T'$

T' es una top. en Y y $f_i : (X_i, T_i) \to (Y, T')$ es cont. $\forall i \in I$

Veamos que, si $\tilde{T}$ es otra topología en Y tal que $f_i : (X_i, T_i) \to (Y, \tilde{T})$ es continua, entonces $\tilde{T} \subset T'$! Si $\underline{\tilde{V} \in \tilde{T}} \Rightarrow f_i^{-1}(\tilde{V}) \in T_i \quad \forall i \in I \underset{\text{def. } T'}{\Rightarrow} \underline{\tilde{V} \in T'}$

Def: A T' se le llama la topología final en Y inducida por la familia de aplicaciones $\{f_i\}_{i\in I}$.

Propiedad. Sea $\{(X_i, T_i)\}_{i \in I}$ familia de e.top., Y conjunto, $f_i : X_i \to Y$ familia de aplicaciones y T' la top. final en Y inducida por $\{f_i\}_{i\in I}$.
Sea (Z, T'') otro espacio topológico, y $g : Y \to Z$ una aplicación

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g \circ f_i"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Entonces $g : (Y, T') \to (Z, T'')$ es continua $\Leftrightarrow$ $g \circ f_i : (X_i, T_i) \to (Z, T'')$ es continua $\forall i \in I$

$\Rightarrow$)) trivial (la comp. de apl. cont. es continua).

$\Leftarrow$) Sabemos que $g \circ f_i$ es cont. $\forall i \in I$. Queremos ver que g es continua. Sea $W \in T''$, $g^{-1}(W) \in T' \Leftrightarrow \underset{(g \circ f_i)^{-1}(W)}{\underset{\shortparallel}{f_i^{-1}(g^{-1}(W))}} \in T_i \quad \forall i \in I$

Como suponemos $(g \circ f_i)$ continua $\Rightarrow (g \circ f_i)^{-1}(W) \in T_i \ \forall i \in I \Rightarrow g^{-1}(W) \in T'$

A esta propiedad se le conoce como propiedad universal de la topología final.

Próximo día $\quad f: X \to (Y, T') \quad$ ¿$\exists$ T en X / f continua?

$f_i: X \to (Y_i, T_i') \quad$ ¿$\exists$ T en X / f_i cont. $\forall i$?