17/12/2020

<u>Def</u>: Un espacio métrico es secuencialmente compacto si toda sucesión admite una subsucesión convergente.

<u>Teorema</u>: sea (X,d) un espacio métrico. Son equivalentes:

1. (X,d) es compacto
2. (X,d) es secuencialmente compacto

<u>Def</u>: una sucesión en un conjunto X es una aplicación $x:\mathbb{N}\to X$.
A la imagen $x(i)$ se la denota x_i.
Una subsucesión de una sucesión es la composición de la aplicación que define la sucesión $x:\mathbb{N}\to X$ con una aplicación $j:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, que es estrictamente creciente ($i_0<i_1$, entonces $\underline{j(i_0)<j(i_1)}$). $j\circ x(i)$ se le denota por x_{i_j} o $x_{i(j)}$.

<u>Dem</u> (teorema): $1\Rightarrow 2$. Supongamos que (X,T_d) es compacto. Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Queremos extraer una subsucesión convergente. Definimos

$$A_j=\overline{\{x_i : i>j\}}$$

Si $j<k$, entonces $\{x_i : i>k\}\subset\{x_i : i>j\}$. Tomando clausuras, $A_k\subset A_j$. Es decir, la sucesión $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados. Como consecuencia de la propiedad de la intersección finita, $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\neq\emptyset$. Tomamos entonces $x\in\bigcap_{j\in J} A_j$.

Veamos que x es el límite de una subsucesión de $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

$x \in A_1 = \overline{\{x_i : i \geq 1\}}$; $B(x,1) \cap \{x_i : i \geq 1\} \neq \phi$. $\exists\, x_{i_1} \in B(x,1) \cap \{x_i : i \geq 1\}$

$x \in A_{i_1} = \overline{\{x_i : i > i_1\}}$; $B(x, \frac{1}{2}) \cap \{x_i : i > i_1\} \neq \phi$ $\exists\, x_{i_2} \in B(x, \frac{1}{2})$ $i_2 > i_1$

$x \in A_{i_2} = \overline{\{x_i : i > i_2\}}$; $B(x, \frac{1}{3}) \cap \{x_i : i > i_2\} \neq \phi$ $\exists\, x_{i_3} \in B(x, \frac{1}{3})$ $i_3 > i_2$

$\vdots$ (por inducción se construyen $x_{i_4}, \dots, x_{i_{k-1}}$).

$x \in A_{i_k}$: $B(x, \frac{1}{k}) \cap \{x_i : i > i_{k-1}\} \neq \phi$, $\exists\, x_{i_k} \in B(x, \frac{1}{k}) \cap \{x_i : i > i_{k-1}\}$

$i_k > i_{k-1}$.

De este modo construimos una subsucesión $\{x_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$x_{i_j} \in B(x, \frac{1}{j}) \qquad (i_j > i_{j-1} \ \forall j)$$

Veamos que $x = \lim_{j \to \infty} x_{i_j}$: sea $U \in \mathcal{N}_x$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$.

Sea $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{1}{j_0}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U$. Entonces $\forall j \geq j_0$

$$x_{i_j} \in B(x, \frac{1}{j}) \subset B(x, \frac{1}{j_0}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U.$$

$2 \Rightarrow 1$. Supongamos que (X, d) es secuencialmente compacto.
Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X.

Veamos en primer lugar que, para espacios métricos secuencialmente compactos, se verifica la propiedad del número de Lebesgue para un recubrimiento: existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $i \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Probamos la existencia del número de Lebesgue razonando por contradicción. Supongamos que no existe tal número de Lebesgue. Entonces, para todo $j \in \mathbb{N}$, existe $x_j \in X$ tal que $B(x_j, \frac{1}{j})$ no está contenida en ningún abierto del recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$. Entonces $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en (X, d). Por hipótesis, como (X, d) es secuencialmente compacto, podemos extraer una subsucesión convergente $\{x_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ a un punto $x \in X$, que pertenece a algún U_{i_0}, con $i_0 \in I$. Esto nos da una contradicción: como U_{i_0} es abierto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$. Como $\{x_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge a x, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$x_{i_j} \in B(x, \varepsilon/2)$ $\forall j \geq j_0$. Si además $\frac{1}{i_j} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces

$$B(x_{i_j}, \frac{1}{i_j}) \overset{(*)}{\subset} B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$$

Esto es una contradicción porque estamos suponiendo que $B(x_{i_j}, \frac{1}{i_j})$ no está contenida en ningún abierto del recubrimiento.

((*) se sigue porque si $z \in B(x_{i_j}, \frac{1}{i_j})$ entonces $d(z, x_{i_j}) < \frac{1}{i_j}$.

Entonces $d(z, x) \leq d(z, x_{i_j}) + d(x_{i_j}, x) < \frac{1}{i_j} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Por tanto, $z \in B(x, \varepsilon)$).

Hemos demostrado entonces la existencia del número de Lebesgue: existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $i \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_i$.

Veamos por último que podemos extraer un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$. Razonamos de nuevo por contradicción. Supongamos que no podemos extraer ningún subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$.

Tomamos $x_1 \in X$ y un índice $i_1 \in I$ tal que $B(x_1, \varepsilon) \subset U_{i_1}$
arbitrario

$\{U_{i_1}\}$ no recubre a X (no existe subrecubrimiento finito de X)

Tomamos $x_2 \notin U_{i_1}$ arbitrario. Tomamos $i_2 \in I$ tal que $B(x_2, \varepsilon) \subset U_{i_2}$.

Tomamos $x_3 \notin (U_{i_1} \cup U_{i_2})$. Tomamos $i_3 \in I$ tal que $B(x_3, \varepsilon) \subset U_{i_3}$

$\vdots$ por inducción

Tomamos $x_k \notin (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{k-1}})$ tal que $B(x_k, \varepsilon) \subset U_{i_k}$

De este modo construimos una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que
$x_k \notin (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{k-1}}) \Rightarrow x_k \notin U_{i_1}$ & $x_k \notin U_{i_2}$ ... & $x_k \notin U_{i_{k-1}}$

$$B(x_1, \varepsilon) \subset U_{i_1} \not\ni x_k \Rightarrow x_k \notin B(x_1, \varepsilon) \Rightarrow d(x_1, x_k) \geq \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$B(x_{k-1}, \varepsilon) \subset U_{i_{k-1}} \not\ni x_k \Rightarrow x_k \notin B(x_{k-1}, \varepsilon) \Rightarrow d(x_{k-1}, x_k) \geq \varepsilon$$

Entonces $d(x_1, x_k), d(x_2, x_k), \dots, d(x_{k-1}, x_k) \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Esto significa que

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon \quad \forall i \neq j. \qquad \#$$

De esta sucesión no se puede extraer ninguna subsucesión convergente (no es una sucesión de Cauchy).

Si $x = \lim_{j\to\infty} x_{i_j}$, entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\underline{d(x, x_{i_j}) < \frac{\varepsilon}{2}}$ para todo $j \geq j_0$. Entonces para $j, k \geq j_0$

$$d(x_{i_j}, x_{i_k}) \leq d(x_{i_j}, x) + d(x, x_{i_k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \; !!$$

contradicción a (#).

Esta contradicción que podemos extraer un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$. Por tanto, (X, T_d) es compacto $\blacksquare$