4/12/2020

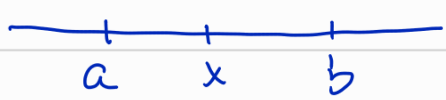
<u>Ejemplo</u>: En $(\mathbb{Q}, (T_u)_{\mathbb{Q}})$, $q \in \mathbb{Q}$. $C_q = \{q\}$ no es abierto en $(T_u)_{\mathbb{Q}}$.

Si $A \subset \mathbb{Q}$ y A contiene más de un punto, entonces A no es conexo. Si $q_1, q_2 \in A$, $q_1 < q_2$, entonces $\exists\, p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $q_1 < p < q_2$. $(-\infty, p) \cap A$, $(p, +\infty) \cap A$ son abiertos en $(T_u)_A$ disjuntos, no vacíos y $A = (\mathbb{R} \setminus \{p\}) \cap A = ((-\infty, p) \cap A) \cup ((p, +\infty) \cap A)$. Por tanto A no es conexo. (A no es un intervalo).

Por tanto, el único conjunto conexo de $(\mathbb{Q}, (T_u)_{\mathbb{Q}})$ que contiene a q es $\{q\}$. Es decir $C_q = \{q\}$.

$\{q\}$ no es abto en $(\mathbb{Q}, (T_u)_{\mathbb{Q}})$. Si lo fuera, q sería punto interior y existiría $\varepsilon > 0$ tal que $\underbrace{(q-\varepsilon, q+\varepsilon)}_{\text{contiene infinitos números racionales}} \cap \mathbb{Q} \subset \{q\}$.

<u>Ejemplo</u>: $(\mathbb{R}, T_S)$, $x \in \mathbb{R}$, $C_x = \{x\}$. (Cualquier conjunto que contenga más de un punto en $(\mathbb{R}, T_S)$ es disconexo (no es conexo) $\mathbb{R} = (-\infty, x) \cup [x, +\infty)$, $(-\infty, x)$, $[x, +\infty) \in T_S$). Las componentes conexas no son abiertas.



<u>Teorema</u>: Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ un homeomorfismo, $x \in X$. Entonces $f(C_x) = C_{f(x)}$.

<u>Dem</u>: $f(C_x)$ es un subconjunto conexo de (Y, T) (f continua y C_x es conexo) y además $f(x) \in f(C_x)$. Entonces $f(C_x) \subset C_{f(x)}$. ($C_{f(x)}$ es el mayor conjunto conexo que contiene a $f(x)$).

Razonamos ahora con la aplicación inversa f^{-1}: $f^{-1}(C_{f(x)})$ es un subconjunto conexo de X que contiene a x. Por tanto $f^{-1}(C_{f(x)}) \subset C_x$ y $C_{f(x)} \subset f(C_x)$.

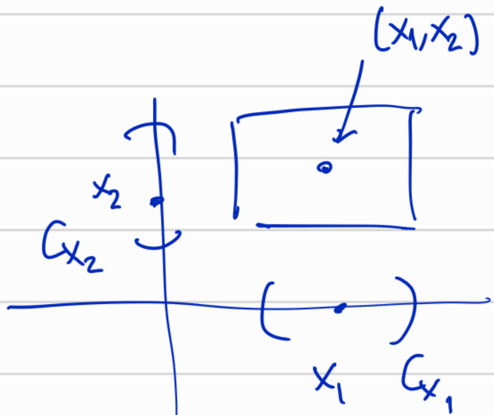
En consecuencia, $f(C_x) = C_{f(x)}$. ∎

Si (X,T) tiene K componentes conexas, y $(Y,T') \approx (X,T)$, entonces (Y,T') tiene K componentes conexas.

Corolario: el número de componentes conexas es un invariante topológico.

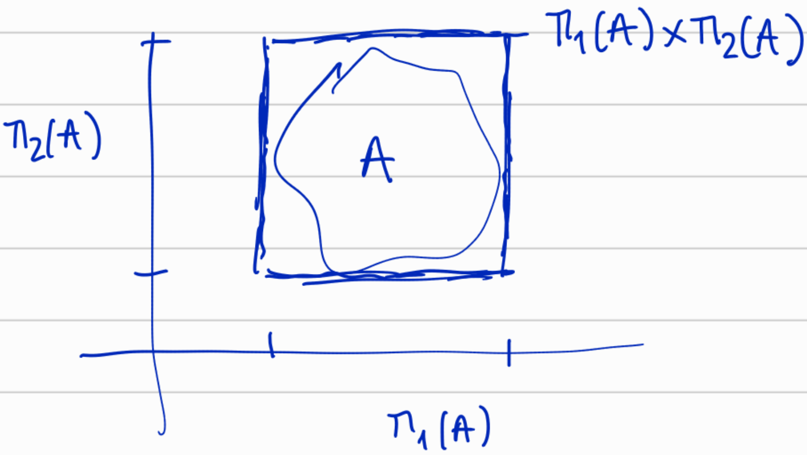
Nota: se puede probar que el cardinal del conjunto de componentes conexas es un invariante topológico.

Teorema: Sean $(X_1,T_1),\dots,(X_k,T_k)$ e.top. $(x_1,\dots,x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$.
Entonces $C_{(x_1,\dots,x_k)} = C_{x_1} \times \dots \times C_{x_k}$



Dem: $C_{x_1},\dots,C_{x_k}$ conexos, entonces $C_{x_1} \times \dots \times C_{x_n}$ es conexo en $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ y $(x_1,\dots,x_k) \in C_{x_1} \times \dots \times C_{x_k}$.
Por tanto $C_{x_1} \times \dots \times C_{x_k} \subset C_{(x_1,\dots,x_n)}$.
Veamos la inclusión opuesta. Sea $A \subset X_1 \times \dots \times X_k$ un subconjunto conexo tal que $(x_1,\dots,x_k) \in A$. Para cada $i \in \{1,\dots,k\}$, $x_i = \pi_i((x_1,\dots,x_k)) \in \pi_i(A)$ conexo. Por tanto $\pi_i(A) \subset C_{x_i}$. Entonces

$$A \subset \pi_1(A)\times\cdots\times\pi_k(A) \subset C_{x_1}\times\cdots\times C_{x_k}$$

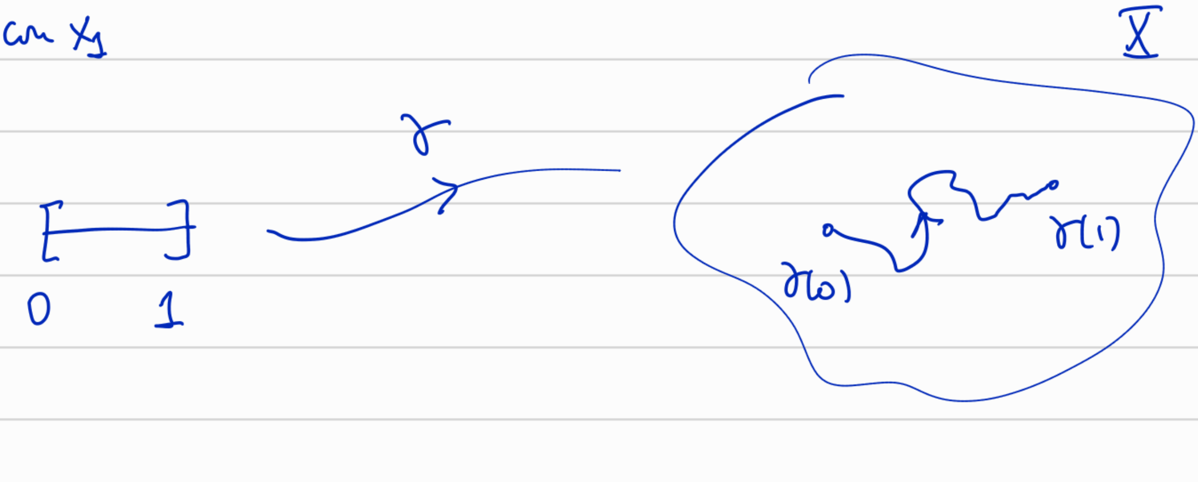


Todo subconjunto conexo $A\subset X_1\times\cdots\times X_k$ que contenga a $(x_1,\dots,x_k)$ está contenido en $C_{x_1}\times\cdots\times C_{x_k}$. En particular, tomando $A=C_{(x_1,\dots,x_k)}$ tenemos que $C_{(x_1,\dots,x_k)}\subset C_{x_1}\times\cdots\times C_{x_k}$

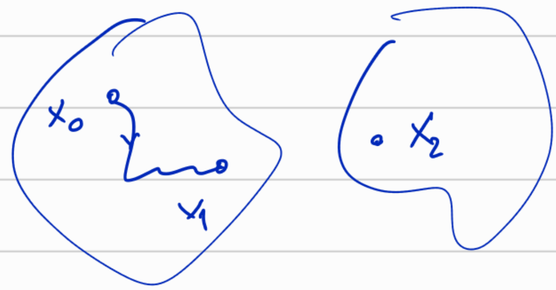
Por tanto $C_{(x_1,\dots,x_k)} = C_{x_1}\times\cdots\times C_{x_k}$ $\blacksquare$

<u>Def</u>: un arco en un espacio topológico (X,T) es una aplicación continua $\gamma:([0,1],(T_u)_{[0,1]})\to(X,T)$.

El punto $\gamma(0)$ es el origen del arco. El punto $\gamma(1)$ es el extremo del arco. Si $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(1)=x_1$, diremos que el arco γ conecta o une x_0 con x_1



Def: un e.top. (X,T) es conexo por arcos si $\forall x_0, x_1 \in X$, existe un arco $\gamma_{x_0x_1} : [0,1] \to X$ tal que $\gamma_{x_0x_1}(0) = x_0$, $\gamma_{x_0x_1}(x_1) = 1$.



Proposición: Si (X,T) es conexo por arcos, entonces (X,T) es conexo.

Dem: fijamos $x_0 \in X$. Para cada $x_1 \in X$, existe un arco $\gamma_{x_1} : [0,1] \to X$ tal que $\gamma_{x_1}(0) = x_0$, $\gamma_{x_1}(1) = x_1$

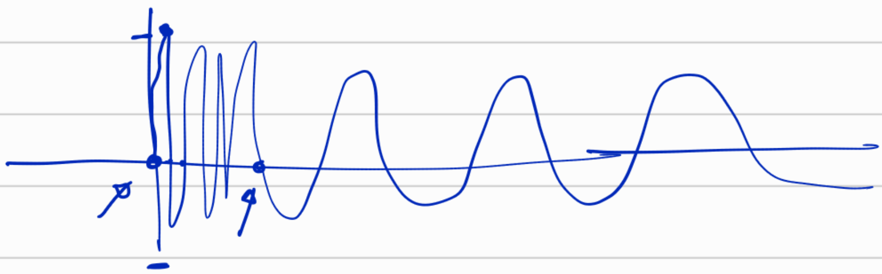
$x_1 = \gamma_{x_1}(1) \in \gamma_{x_1}([0,1]) = C_{x_1}$ conexo (γ continua y $[0,1]$ es conexo)

$$X = \bigcup_{x_1 \in X} C_{x_1}, \qquad \underbrace{\bigcap_{x_1 \in X} C_{x_1}}_{\neq \emptyset} \ni x_0 \qquad (C_{x_1} = \gamma_{x_1}([0,1]),\ x_0 = \gamma_{x_1}(0))$$

X es unión de conjuntos conexos con intersección no vacía. Por tanto X es conexo. ∎

Nota: no todo espacio conexo es conexo por arcos.

$f(x) = \sin(1/x)$ $\quad f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$



$f(x) = 1 = \sin(1/x) \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{(1+4k)\pi}{2} \iff x = \frac{2}{(1+4k)\pi}$.

$\text{grafo}(f) = \{(x, f(x)) : x \in (0,+\infty)$ es conexo$\}$.

$(0,0) \in \overline{\text{grafo}(f)}$ $\quad x_k = \frac{1}{k\pi} \to 0 \quad \sin(\frac{1}{x_k}) = \sin(k\pi) = 0$. $\quad \text{grafo}(f) \ni \underline{\underline{(x_k, 0)}}$

Por tanto $\text{grafo}(f) \cup \{(0,0)\}$ es conexo, pero no es conexo por arcos.

Def: $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si $\forall x, y \in C$, $[x y] = \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\}$ está contenido en C.

Ejemplo: Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces C es conexo por arcos

$x, y \in C$, definimos $\gamma_{xy}(t) = x + t(y-x) \in C \quad \forall t \in [0,1]$.

$\gamma_{xy} : ([0,1], (T_u)_{[0,1]}) \to (\mathbb{R}^n, T_u^n)$

es continua. $\quad \pi_i \circ \gamma_{xy}(t) = x_i + t(y_i - x_i)$ es continua como aplicación de $([0,1], (T_u)_{[0,1]})$ en $(\mathbb{R}, T_u)$.

Por tanto, $(C, (\mathcal{T}_u)_C)$ es conexo por arcos y, en consecuencia, conexo.

Ejemplo: $x_0 = (0,0)$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$

$[x_0,x_1] \cup [x_0,x_2]$ es conexo (unión de dos conexos con intersección no vacío) pero no es convexo.

$$(1,0) + t((0,1)-(1,0)) = (1,0) + (-t,t) = (1-t,t)$$

$t = \frac{1}{2}$ $\quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin [x_0,x_1] \cup [x_0,x_2]$.