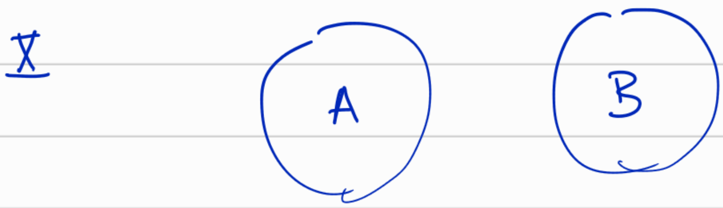
26/11/2020

# TEMA 3. CONEXIÓN Y COMPACIDAD

## ESPACIOS CONEXOS

**Def:** un e.top. $(X,T)$ es conexo si no existen dos abiertos $A, B \in T$ tales que: 1) $A, B \neq \emptyset$; 2) $A \cup B = X$; 3) $A \cap B = \emptyset$




no conexo

**Ejemplo:** $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, (T_u)_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})$ no es conexo

$\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

$A = (-\infty,0)$, $B = (0,+\infty)$, $A, B \neq \emptyset$

$A \cup B = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$A \cap B = \emptyset$

$$A \in (T_u)_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Leftarrow A = \underset{\substack{\Uparrow \\ T_u}}{(-\infty,0)} \cap (\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

$A = (-\infty,0] \cap (\mathbb{R}\setminus\{0\})$

$\Rightarrow A \in C_{(T_u)_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}}$

Análogamente para B

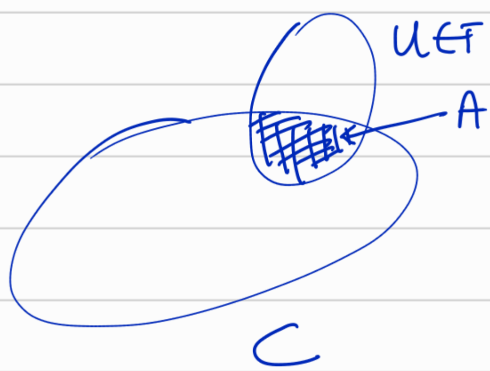
$$B \in (T_u)_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Leftarrow B = \underset{\substack{\Uparrow \\ T_u}}{(0,+\infty)} \cap (\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

Informalmente, $(X,T)$ es conexo si no se puede expresar como unión de conjuntos abiertos disjuntos.

**Nota:** si $X = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$, entonces $A = X \setminus B$ y $B = X \setminus A$. Si $A, B \in T$, entonces $A, B \in G$. Por tanto, en la definición de espacio conexo podemos cambiar abiertos por cerrados. Es decir, un espacio es conexo si no existen dos cerrados $F, G$ tales que 1) $F, G \neq \emptyset$; 2) $X = F \cup G$; 3) $F \cap G = \emptyset$.

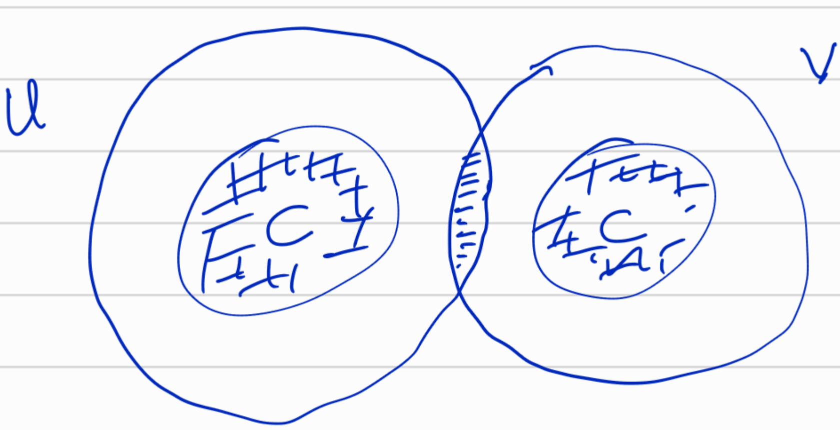
**Def:** diremos que un subconjunto $C$ de un e. top. $(X, T)$ es conexo si $(C, T_C)$ es conexo.

Si $(C, T_C)$ es conexo $\Rightarrow$ no existen $A, B \in T_C$ tales que $A, B \neq \emptyset$; $A \cup B = C$; $A \cap B = \emptyset$. Cualquier $A \in T_C$ es de la forma $U \cap C$, con $U \in T$; además $B \in T_C$ es de la forma $V \cap C$, con $V \in T$.




Si $(C, T_C)$ no es conexo, existen $A, B \in T_C$ tales que $A, B \neq \emptyset$; $A \cup B = C$; $A \cap B = \emptyset$. Como $A = U \cap C$, $B = V \cap C$ con $U, V \in T$, entonces:

1. $U \cap C, V \cap C \neq \emptyset$
2. $(U \cup C) \cup (V \cup C) = C \Leftrightarrow (U \cup V) \cap C = C \Leftrightarrow C \subset U \cup V$.
3. $(U \cap C) \cap (V \cap C) = \emptyset \Leftrightarrow (U \cap V) \cap C = \emptyset$

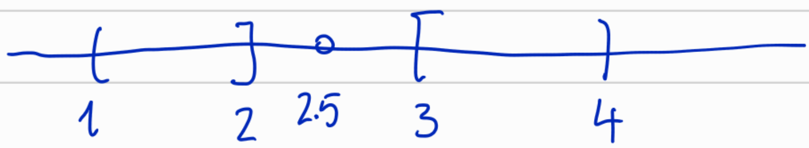



$U, V$ cumplen 1, 2, 3

Por tanto, $(C, T_C)$ es no conexo si existen $U, V \in T$ tales que 1, 2, 3 se verifican.

Además, $(C, T_C)$ es conexo si <u>no</u> existen $U, V \in T$ tales que 1, 2, 3 se verifican.

<u>Ejemplo</u>: $C = (1,2] \cup [3,4)$ no es subconjunto conexo de $(\mathbb{R}, T_u)$.




$U = (-\infty, 2'5)$, $V = (2'5, +\infty) \in T_u$ y verifican

1. $U \cap C = (1,2] \neq \emptyset$, $V \cap C = [3,4) \neq \emptyset$
2. $C = (1,2] \cup [3,4) \subset U \cup V$
3. $U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \cap V \cap C = \emptyset$

Entonces $C$ no es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R}, T_u)$.

<u>Ejemplos</u>: 1. $(\mathbb{X}, T_t)$ $T_t = \{\emptyset, \mathbb{X}\}$. El conjunto $(\mathbb{X}, T_t)$ es conexo (no hay dos abiertos no vacíos y distintos en $T_t$)

2. $(\mathbb{X}, T_D)$. Si $\#\mathbb{X} = 1 \Rightarrow T_D = \{\emptyset, \mathbb{X}\} = T_t \Rightarrow (\mathbb{X}, T_D)$ es conexo. Si $\#\mathbb{X} \geq 2$. Tomamos $x, y \in \mathbb{X}$, $x \neq y$. $A = \{x\}$, $B = \mathbb{X} \setminus \{x\}$. Entonces $A, B \in T_D$; $x \in A$, $y \in B \Rightarrow A, B \neq \emptyset$; $A \cup B = \mathbb{X}$; $A \cap B = \emptyset$. Entonces $(\mathbb{X}, T_D)$ no es conexo.

Un espacio topológico con la topología discreta es conexo si y solo si tiene un único punto.

3. $(\mathbb{N}, T_{CF})$ es conexo. Si $U, V \in T_{CF}$, $U, V \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{N}\setminus U, \mathbb{N}\setminus V$ son finitos. Esto significa que $U \cap V \neq \emptyset$ porque si $U \cap V = \emptyset$ $\Rightarrow \mathbb{N} = \mathbb{N}\setminus(U\cap V) = (\mathbb{N}\setminus U)\cup(\mathbb{N}\setminus V)$ finito !! Hemos demostrado que dos abiertos no vacíos en $T_{CF}$ tienen intersección no vacía. La propiedad 3 nunca se cumple y, por tanto, $(\mathbb{N}, T_{CF})$ es conexo.

4. Si $(X,T)$ es conexo y $T' \subset T$ ($T'$ es topología más gruesa que $T$), entonces $(X,T')$ es conexo.

Si $(X,T')$ no es conexo, entonces existen $A', B' \in T'$ tales que $A', B' \neq \emptyset$, $A' \cup B' = X$, $A' \cap B' = \emptyset$. Como $T' \subset T$, $A', B' \in T$, esto implica que $(X,T)$ no es conexo

<u>Def</u>: un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si, para todo par de puntos $x, y \in I$, se tiene que $[x,y] \subset I$.

El conjunto $[x,y] = \{x + t(y-x) : 0 \le t \le 1\}$. Si $x = y$, entonces $[x,y] = \{x\}$. Si $x < y$, entonces $[x,y] = \{z \in \mathbb{R} : x \le z \le y\}$.

<u>Teorema</u>: los únicos subconjuntos conexos de $(\mathbb{R}, T_u)$ son los intervalos.

<u>Dem</u>: supongamos que $I$ no es un intervalo. Existen entonces

$x, y \in I$ con $x<y$ tales que existe $z \in \mathbb{R}$ con $x<z<y$ tal que $z \notin I$.

Sean $U=(-\infty,z)$, $V=(z,+\infty) \in T_u$


1. $U\cap I \neq \emptyset$ $(x\in U\cap I)$; $V\cap I\neq\emptyset$ $(y\in V\cap I)$
2. $U\cup V=\mathbb{R}\setminus\{z\}$, $z\notin I \Rightarrow I\subset U\cup V$
3. $U\cap V=\emptyset \Rightarrow U\cap V\cap I=\emptyset$

27/11/2020

Esto demuestra que $I$ no es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Por tanto, hemos demostrado que si $I$ es conexo, es un intervalo.

Veamos ahora que si $I$ es un intervalo, entonces es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Razonamos por contradicción y suponemos que $I$ no es conexo. Entonces $A,B\in (T_u)_I$ tales $A,B\neq\emptyset$, $I=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$. Como $A,B\neq\emptyset$ y $A\cap B=\emptyset$, podemos tomar $a\in A$, $b\in B$, con $a\neq b$. Intercambiando los conjuntos $A$ y $B$ si es necesario, suponemos $a<b$. Consideramos

$$z=\sup\, [a,b]\cap A \qquad (*)$$

Sabemos que $z$ es límite de puntos de $[a,b]\cap A$. Entonces $z\in\overline{A}$ (en el e. top. $(I,(T_u)_I)$). Como $A$ es cerrado en $(I,(T_u)_I)$, se tiene que $z\in A$. Como $z\in[a,b]\cap A$, $z$ tiene que ser menor que $b$. ($z\in A$, $b\in B$). Por otra parte, como $A\in(T_u)_I$ y $z\in A$, existe un entorno $U$ de $z$ en $(I,(T_u)_I)$ tal que $z\in U\subset A$. Sabemos que existe $\varepsilon>0$ tal que $(z-\varepsilon,z+\varepsilon)\cap I\subset A$. ($\{(z-r,z+r): r>0\}$ es base de ent. de $z$ en $(\mathbb{R},T_u)$ $\Rightarrow$ $\{(z-r,z+r)\cap I : r>0\}$ es base de ent. de $z$ en $(I,(T_u)_I)$.). Como $z<b$, podemos elegir $\varepsilon>0$

tal que $z+\varepsilon<b$. Esto implica que $[z,z+\varepsilon]\subset A$. Entonces $z$ no es el supremo de $[a,b]\cap A$ (porque el punto $z+\frac{\varepsilon}{2}\in[a,b]\cap A$). Esto es una contradicción. (Realmente llegamos a un absurdo puesto que $z$ no puede ser el supremo). Esto demuestra que $I$ es conexo

<u>Corolario</u>: $(\mathbb{R},T_u)$ es conexo

<u>Dem</u>: $\mathbb{R}$ es un intervalo

<u>Ejemplo</u>: $(\mathbb{R},T_S)$ no es conexo. $A=(-\infty,0)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,0)\in T_S$

$B=[0,+\infty)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,n)\in T_S$. $A,B\neq\emptyset$, $A\cup B=\mathbb{R}$, $A\cap B=\emptyset$.

Este ejemplo demuestra que $(X,T')$ conexo, $T'\subset T$, no implica que $(X,T)$ sea conexo.

<u>Lema</u>: sea $(X,T)$ un e.top. Son equivalentes:

1. $(X,T)$ es conexo
2. Cualquier aplicación continua de $(X,T)$ en un e.top. discreto es constante
3. Cualquier aplicación continua de $(X,T)$ en $(\{0,1\},T_D)$

<u>Dem</u>: 1) ⇒ 2) Sea $(Y,T_D)$ un e.top. discreto, y $f:(X,T)\to(Y,T_D)$ una aplicación continua. Si suponemos que $f$ no es constante, existen $y_0,y_1\in Im(f)$, $y_0\neq y_1$. Sean $U=\{y_0\}$, $V=Y\setminus\{y_0\}$. Entonces $U,V\in T_D$ $U\cap V=\emptyset$, $U\cup V=Y$. Si $A=f^{-1}(U)$, $B=f^{-1}(V)$, como $f$ es continua, $A,B\in T$. Además $A,B\neq\emptyset$ ($y_0,y_1\in Im(f)$), $A\cup B=f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$ $=f^{-1}(U\cup V)=f^{-1}(Y)=X$; $A\cap B=f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cap V)=f^{-1}(\emptyset)$

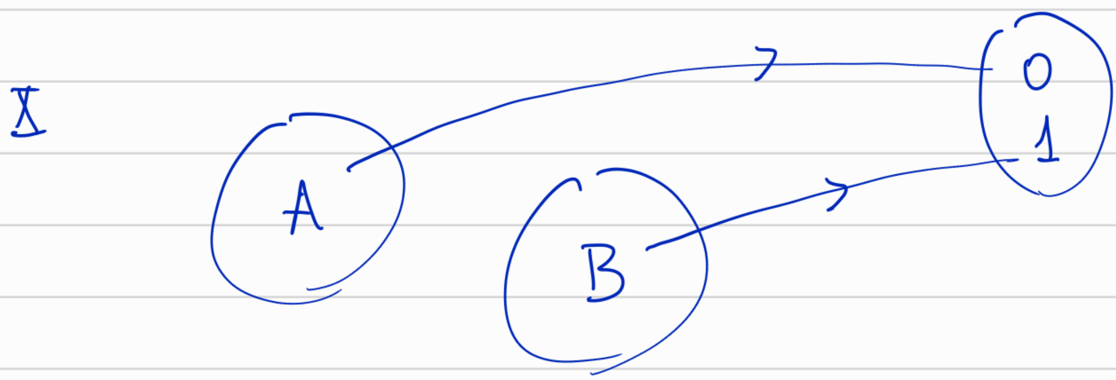
$= \emptyset$. Entonces $(X, T)$ no es conexo !!

$(2) \Rightarrow (3)$ trivial porque $(3)$ es un caso particular de $(2)$.

$(3) \Rightarrow (1)$ Supongamos que $(X, T)$ no es conexo. Existen $A, B \in T$ tales que $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$. Definimos la aplicación $f: X \to \{0,1\}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \in X \setminus A = B \end{cases}$$

($f$ es la función característica de $A$). La aplicación $f$ no es constante puesto que $A, B \neq \emptyset$. Veamos que $f: (X, T) \to (\{0,1\}, T_D)$ es continua. Como $T_D = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Como $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{1\}) = A$, $f^{-1}(\{0\}) = B$, $f^{-1}(\{0,1\}) = X$, comprobamos directamente que $f^{-1}(U) \in T$ si $U \in T_D$. Esto es una contradicción, que demuestra $(3) \Rightarrow (1)$. ∎




Corolario: Sea $(X, T)$ un e.top., $A \subset X$ subconjunto conexo. Sea $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset \overline{A}$. Entonces $B$ es un subconjunto conexo de $X$. En particular, $\overline{A}$ es un subconjunto conexo de $X$.

Dem. Sea $f: (B, T_B) \to (\{0,1\}, T_D)$ continua. Sabemos que $A \subset B$

$$\overset{\mathcal{T}_A}{\shortparallel}$$

Entonces $f\circ i_A = f|_A : (A, (\mathcal{T}_B)_A) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_D)$ continua. Como $A$ es conexo, el lema anterior nos dice que $f$ es constante. La clausura de $A$ en $B$, $\overline{A}^B = \overline{A}\cap B = B$. Como $f$ es continua, $f(\overline{A}^B) \subset \overline{f(A)} = f(A)$ y $f(A)$ es un punto.

$\uparrow$
$B\subset\overline{A}$

Esto implica que $f(B) = f(\overline{A}^B)$ es un punto. Por tanto, $f$ es constante. Por tanto, $(B, \mathcal{T}_B)$ es conexo. ∎

Teorema: Sea $f: (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Si $(X,\mathcal{T})$ es conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de $(Y, \mathcal{T}')$.

2/12/2020

**Teorema:** Sean $(X,T)$, $(Y,T')$ e. top., $f:(X,T)\to(Y,T')$ una aplicación continua. Si $(X,T)$ es conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de $(Y,T')$.

**Corolario:** Si $f:(X,T)\to(Y,T')$ es un homeomorfismo y $(X,T)$ es conexo, entonces $(Y,T')$ es conexo (la conexión es un invariante topológico)

**Dem** (Teorema) Supongamos que $f(X)$ no es un subconjunto conexo de $(Y,T')$. Existen $A',B'\in T'$ tales que $A'\cap f(X), B'\cap f(X)\neq\emptyset$, $f(X)\subset A'\cup B'$, $A'\cap B'\cap f(X)=\emptyset$. Consideramos $A=f^{-1}(A')$, $B=f^{-1}(B')$. Como $f$ es continua y $A',B'\in T'$, entonces $A,B\in T$. $A=f^{-1}(A')\neq\emptyset$ porque $A'\cap f(X)\neq\emptyset$. Del mismo modo, $B=f^{-1}(B')\neq\emptyset$. $f(X)\subset A'\cup B' \Rightarrow X\subset f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B') = A\cup B \Rightarrow X=A\cup B$. Además, $A'\cap B'\cap f(X)=\emptyset \Rightarrow A\cap B=f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B') =\emptyset$ $(f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')=f^{-1}(A'\cap B')$, $A'\cap B'\cap f(X)=\emptyset)$. Por tanto, $(X,T)$ no es conexo. ∎

**Teorema** (Bolzano): Sea $(X,T)$ un e. top. conexo, y sea $f:(X,T)\to(\mathbb{R},T_u)$ una aplicación continua. Sean $x,y\in X$, y $\alpha\in\mathbb{R}$ tales que $f(x)\le\alpha\le f(y)$. Entonces existe $z\in X$ tal que $f(z)=\alpha$.

**Nota:** Al teorema de Bolzano también se le llama el Teorema del valor intermedio.

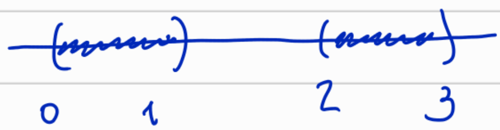
**Dem:** Como $X$ es conexo y $f$ es continua, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R},T_u)$. Entonces $f(X)$ es un intervalo. Como $f(x),f(y)\in f(X)$ Si $f(x)\le\alpha\le f(y)$, entonces $\alpha\in f(X)$. Por tanto, existe $z\in X$ tal que

$f(z)=\alpha$ $\blacksquare$

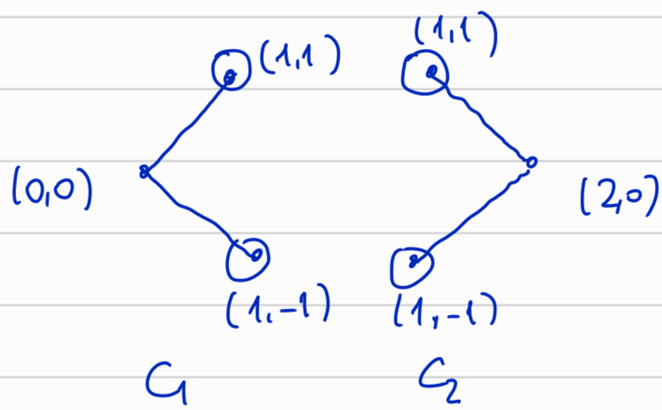
**Ejercicio:** Sea $I=[0,1]$, $f:(I,(T_u)_I)\to(I,(T_u)_I)$ una aplicación continua. Entonces $f$ tiene un punto fijo (existe $x_0\in I$ tal que $f(x_0)=x_0$).

(**Indicación:** aplicar el T. Bolzano a $g(x)=f(x)-x$ $\forall x\in I$).

**Nota:** Ni la unión ni la intersección de conjuntos conexos es conexo.




$(0,1)\cup(2,3)$ no es conexo




$C_1, C_2$ conexos.

$C_1\cap C_2=\{(1,1),(1,-1)\}$ no es conexo.

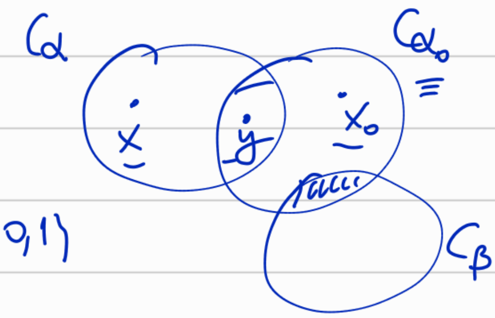
**Proposición:** Sea $(X,T)$ un e.top. $(C_\alpha, C_i\neq\emptyset)$

1. Si $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de subconjuntos conexos de $(X,T)$ tal que existe $\alpha_0\in I$ que verifica $C_{\alpha_0}\cap C_\alpha\neq\emptyset$ $\forall\alpha\in I$. Entonces $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ es un subconjunto conexo de $(X,T)$

2. Si $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de subconjuntos conexos de $(X,T)$ tal que $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha\neq\emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ es un subconjunto conexo de $(X,T)$

3. Si $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos conexos de $(X,T)$ tal que $C_i\cap C_{i+1}\neq\emptyset$ $\forall i\in\mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ es un subconjunto conexo

de $(X,T)$.




__Dem:__ 1. Para probar que $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ es conexo, tomamos una aplicación continua $f:\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha \to \{0,1\}$ ($\{0,1\}$ con la topología discreta). Si probamos que $f$ es constante, entonces $\bigcup_{\alpha} C_\alpha$ es conexo. Entonces $f|_{C_\alpha}: C_\alpha \to \{0,1\}$ es continua ($i_{C_\alpha}: C_\alpha \to \bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ inclusión. $f|_{C_\alpha} = f\circ i_{C_\alpha}$). Como $C_\alpha$ es conexo, entonces $f|_{C_\alpha}$ es constante. Veamos que $f$ es constante. Fijamos $x_0 \in C_{\alpha_0}$. Sea $\underline{\alpha \in I}$ cualquiera y $x\in C_\alpha$. Veamos que $f(x)=f(x_0)$. Esto implicaría que $f$ es constante. Sabemos que $C_\alpha \cap C_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Por tanto existe $y \in C_\alpha \cap C_{\alpha_0}$. Entonces

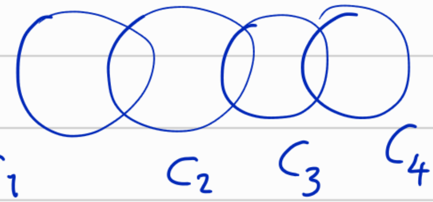
$$f(x)=f(y) \qquad (x,y\in C_\alpha \text{ y } f|_{C_\alpha} \text{ es constante})$$

$$f(x_0)=f(y) \qquad (x_0,y\in C_{\alpha_0} \text{ y } f|_{C_{\alpha_0}} \text{ es constante})$$

$\Rightarrow f(x)=f(y)=f(x_0)$.

2. Supongamos que $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha \neq \emptyset$. Fijamos $\alpha_0 \in I$ cualquiera. Si $\alpha\in I$ entonces $C_\alpha\cap C_{\alpha_0} \supset \bigcap_{\beta\in I} C_\beta \neq \emptyset \Rightarrow C_\alpha \cap C_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Estamos en las hipótesis de (1) y, por tanto, $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ es conexo.

3. $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ $\quad C_i\cap C_{i+1}\neq\emptyset$




Definimos $D_i = \bigcup_{j=1}^{i} C_j$

$D_1 = C_1,\quad D_2 = C_1\cup C_2,\quad D_3 = C_1\cup C_2\cup C_3, \dots$

Si los subconjuntos $D_i$ son conexos, entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} D_i = D_1 \neq \emptyset$. Por (2) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ es conexo. Como $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$, entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ es conexo.

Para terminar, veamos que los conjuntos $D_i$ son conexos. Lo demostramos por inducción.

$D_1 = C_1$ es conexo por hipótesis

$D_2 = C_1\cup C_2$, $\quad C_1, C_2$ conexos y $C_1\cap C_2\neq\emptyset$. Aplicando (1) ó (2), $C_1\cup C_2$ es conexo.

...

Supongamos por inducción que $D_{k-1}$ es conexo.

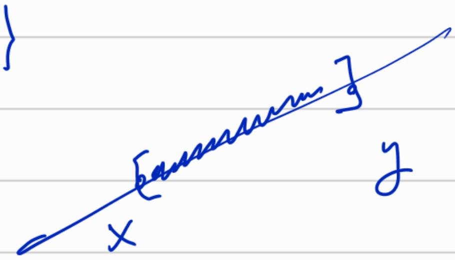
$D_k = C_1\cup\dots\cup C_{k-1}\cup C_k = D_{k-1}\cup C_k \qquad D_{k-1}\cap C_k = (C_1\cup\dots\cup C_{k-1})\cap C_k \supset C_{k-1}\cap C_k \neq\emptyset$

$D_{k-1}, C_k$ conexos, $D_{k-1}\cap C_k\neq\emptyset \Rightarrow D_{k-1}\cup C_k = D_k$ es conexo.

Por tanto, $D_k$ es conexo $\forall k\in\mathbb{N}$. ■

**Ejemplo:** $x, y \in \mathbb{R}^n$, el segmento que une $x$ con $y$ es

$$[x,y] = \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\}$$




$[x,y]$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$.

Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ se define por $\gamma(t) = x + t(y-x)$. $\gamma : ([0,1], (T_u^1)_{[0,1]}) \to (\mathbb{R}^n, T_u^n)$ es continua $(\pi_i \circ \gamma(t) = x_i + t(y_i - x_i))$

$\gamma([0,1]) = [x,y]$ es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R}^n, T_u^n)$ porque $\gamma$ es continua y $([0,1], (T_u^1)_{[0,1]})$ es un e.top. conexo.

Si $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, entonces $[x_1,x_2] \cup [x_2,x_3] \cup [x_3,x_4] \cup \dots \cup [x_{k-1},x_k]$ es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R}^n, T_u)$.

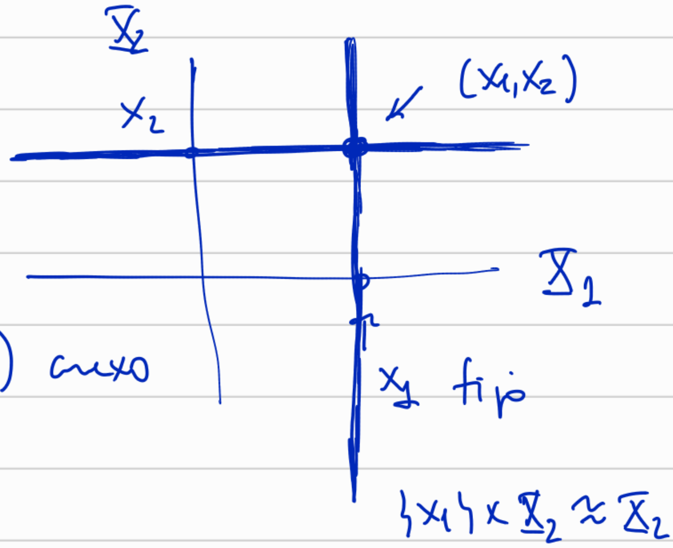

**Teorema:** Sean $(X_1,T_1), \dots, (X_k,T_k)$ e.top. Entonces $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es conexo si y sólo si $(X_i,T_i)$ es conexo para todo $i \in \{1,\dots,k\}$.

**Dem:** Si $X_1 \times \dots \times X_k$ es conexo, entonces $X_i = \underset{\text{cont.}}{\pi_i}(\underset{\text{conexo}}{X_1 \times \dots \times X_k})$ es conexo por ser imagen del espacio conexo $X_1 \times \dots \times X_k$ por la aplicación continua $\pi_i$

Supongamos ahora que $(X_i, T_i)$ es conexo para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.
Probamos que $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es conexo por inducción sobre $k$.

$k=2$. Veamos que $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$ es conexo.

$X_1 \simeq X_1 \times \{x_2\}$




$C_{x_2} = (X_1 \times \{x_2\}) \cup (\{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fijo}}}{x_1}\} \times X_2)$ conexo

$X_1 \times X_2 = \bigcup_{x_2 \in X_2} C_{x_2}$

$\bigcap C_{x_2} \supset \{x_1\} \times X_2 \neq \emptyset$

3/12/2020

$(\mathfrak{X}_1,T_1),\dots,(\mathfrak{X}_K,T_K)$ e.t. conexos, entonces $(\mathfrak{X}_1\times\dots\times\mathfrak{X}_K, T_1\times\dots\times T_K)$ es conexo

Demostración por inducción sobre K.

$K=2$. $(\mathfrak{X}_1,T_1),(\mathfrak{X}_2,T_2)$ conexos $\Rightarrow$ $(\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2, T_1\times T_2)$

Fijamos $x_1\in\mathfrak{X}_1$. Veamos que $\mathfrak{X}_2$ es homeomorfo a $\{x_1\}\times\mathfrak{X}_2$.
Definimos $f:\mathfrak{X}_2\to\{x_1\}\times\mathfrak{X}_2$ por medio de la igualdad $f(x_2)=(x_1,x_2)$.
La aplicación inversa es $g:\{x_1\}\times\mathfrak{X}_2\to\mathfrak{X}_2$ definida por $g(x_1,x_2)=x_2$
Es inmediato que $g\circ f=Id_{\mathfrak{X}_2}$ y que $f\circ g=Id_{\{x_1\}\times\mathfrak{X}_2}$. Por tanto $f^{-1}=g$. Veamos que

$$f:(\mathfrak{X}_2,T_2)\to(\underline{\{x_1\}\times}\mathfrak{X}_2,(T_1\times T_2)_{\{x_1\}\times\mathfrak{X}_2})$$

es un homeomorfismo. Si llamamos $A=\{x_1\}\times\mathfrak{X}_2$, tenemos que $f:(\mathfrak{X}_2,T_2)\to(A,(T_1\times T_2)_A)$ es continua si y solo $i_A\circ f:(\mathfrak{X}_2,T_2)\to$
$\to(\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2, T_1\times T_2)$ es continua. Pero $i_A\circ f$ es continua si y solo si $\pi_1\circ(i_A\circ f)$, $\pi_2\circ(i_A\circ f)$ son continuas.

$$\pi_1(i_A(f(x_2)))=\pi_1(i_A(x_1,x_2))=\pi_1(x_1,x_2)=x_1$$

$\Rightarrow$ $\pi_1\circ i_A\circ f$ es una aplicación constante $\mathfrak{X}_2\to\mathfrak{X}_1$ ($x_1$ es fijo)
$\Rightarrow$ $\pi_1\circ i_A\circ f$ es continua.

$$\pi_2(i_A(f(x_2)))=\pi_2(x_1,x_2)=x_2$$

$\Rightarrow$ $\pi_2\circ i_A\circ f=Id_{\mathfrak{X}_2}$ es una aplicación continua.

Por tanto $i_A\circ f$ es continua y $f$ es continua.

Veamos ahora que $f^{-1} = g$ es continua. La aplicación $g: \{x_1\} \times X_2 \to X_2$ está definida por $g(x_1, x_2) = x_2$. Observamos que $g = \pi_2|_{\{x_1\}\times X_2} = \pi_2 \circ i_{\{x_1\}\times X_2}$ que es continua por ser composición de aplicaciones continuas.

Concluimos que $X_2 \underset{\text{homeomorfos}}{\approx} \{x_1\} \times X_2$

Análogamente, fijando $x_2 \in X_2$, obtenemos que $X_1 \approx X_1 \times \{x_2\}$.
$(f(x_1) = (x_1, x_2))$

Por tanto, $\{x_1\} \times X_2$, $X_1 \times \{x_2\}$ son subconjuntos conexos de $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$

Fijamos $x_1 \in X_1$. Para todo $x_2 \in X_2$ definimos

$$\underline{\underline{C_{x_2} = (\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{x_2\})}}$$

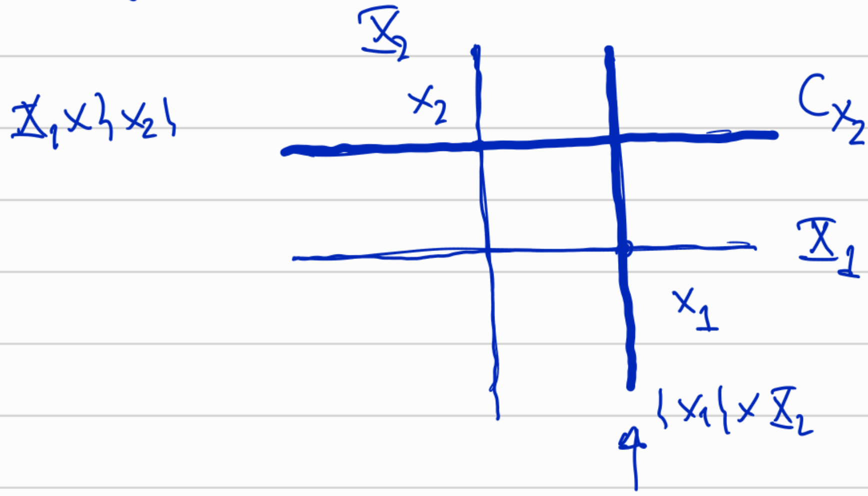
$C_{x_2}$ es conexo por ser unión de conjuntos conexos con intersección no vacía $((x_1, x_2) \in (\{x_1\} \times X_2) \cap (X_1 \times \{x_2\}))$.

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{x_2 \in X_2} C_{x_2}.$$

$\underline{\supseteq \text{ es trivial.}}$ Si $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ entonces $(y_1, y_2) \in X_1 \times \{y_2\} \subset C_{y_2} \subset \bigcup_{x_2 \in X_2} C_{x_2} \Rightarrow \boxed{\subset}$

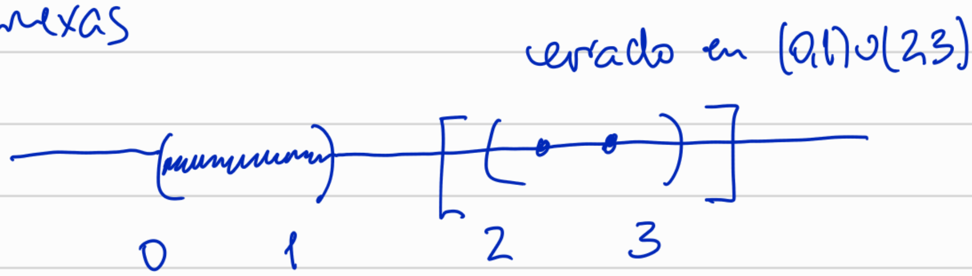
$$\bigcap_{x_2 \in X_2} C_{x_2} \supset \{x_1\} \times X_2 \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{x_2 \in X_2} C_{x_2} \neq \emptyset.$$

Por tanto, $(X_1\times X_2, T_1\times T_2)$ es conexo porque $X_1\times X_2$ es unión de subconjuntos conexos con intersección no vacía.




Supongamos por inducción que $(X_1\times\cdots\times X_{k-1}, T_1\times\cdots\times T_{k-1})$ es conexo. Como $(X_1\times\cdots\times X_k, T_1\times\cdots\times T_k)\cong((X_1\times\cdots\times X_{k-1})\times X_k, (T_1\times\cdots\times T_{k-1})\times T_k)$, que es el producto de dos e.top. conexos, el apartado anterior (caso $k=2$) demuestra que $(X_1\times\cdots\times X_k, T_1\times\cdots\times T_k)$ es conexo. ∎

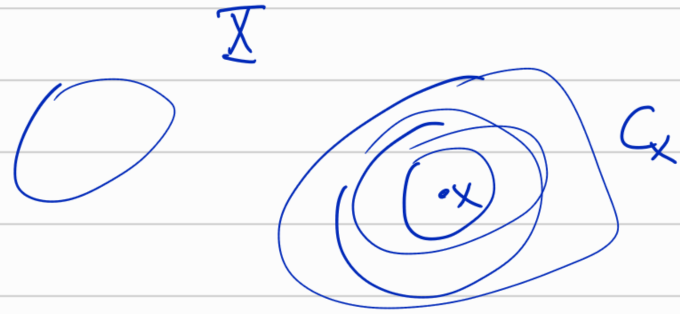
## Componentes conexas




$X=(0,1)\cup(2,3)$ con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$ no es conexo. ($(0,1),(2,3)$ son cerrados de $X$).

**Def:** Sea $(X,T)$ un e.top. y $x\in X$. La componente conexa de $X$ que contiene a $x$ es el conjunto

$$C_x=\bigcup\{A\subset X : A \text{ conexo}, x\in A\}$$




$C_x$ es la unión de todos los subconjuntos conexos de $X$ que contienen al punto $x$.

<u>Propiedades</u>: 1. $C_x$ es conexo y $x \in C_x$

2. Si $A \subset X$ es conexo y $x \in A$, entonces $A \subset C_x$

($C_x$ es el mayor subconjunto conexo que contiene a $x$).

3. $\overline{C_x} = C_x$ ($C_x$ es cerrado)

4. Si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, entonces $C_x = C_y$

5. Si $A$ es abierto y cerrado, y $x \in A$, entonces $C_x \subset A$

<u>Dem</u>: 1. $C_x$ es unión de subconjuntos conexos tales que $x$ pertenece a todos ellos. (intersección no vacía). Por tanto, $C_x$ es conexo. Es trivial que $x \in C_x$.

2. $A$ conexo, $x \in A$, entonces $A \subset C_x$.

$$C_x = \bigcup_{\substack{B \text{ conexo} \\ x \in A}} B \supset A$$

($A$ es miembro de la familia $\{B \subset X : B \text{ conexo}, x \in B\}$.)

3. $\overline{C_x} = C_x$. Observamos que $\boxed{C_x \subset \overline{C_x}}$. Como $C_x$ es conexo, $\overline{C_x}$ también lo es. Por supuesto, $x \in \overline{C_x}$. El apartado 2 garantiza que $\boxed{\overline{C_x} \subset C_x}$. Por tanto, $C_x = \overline{C_x}$

(las componentes conexas son conjuntos cerrados).

4. Si $C_x \cap C_y \neq \phi$, entonces $C_x = C_y$. Si $C_x \cap C_y \neq \phi$, entonces $C_x \cup C_y$ es un subconjunto conexo. $x, y \in C_x \cup C_y$
Por el apartado 2

$$C_x \cup C_y \subset C_x \quad (x \in C_x \cup C_y \text{ conexo})$$
$$C_x \cup C_y \subset C_y \quad (y \in C_x \cup C_y \text{ conexo})$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_y \subset C_x \cup C_y \subset C_x \\ C_x \subset C_x \cup C_y \subset C_y \end{array} \right. \Rightarrow C_x = C_y$$

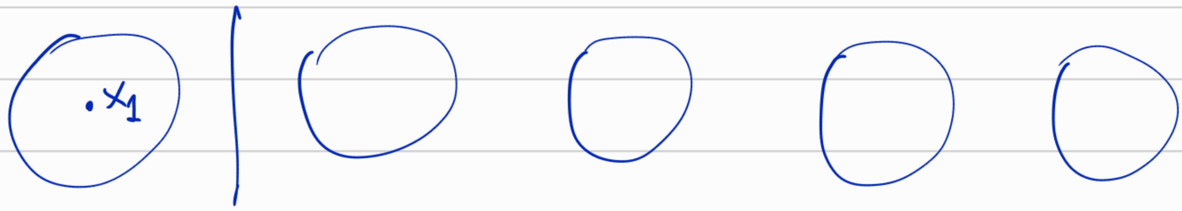
5. $A \in T \cap C_T$ y $x \in A$, entonces $C_x \subset A$.

Observamos que $A \cap C_x \neq \phi$. Si $\boxed{(X \setminus A) \cap C_x \neq \phi,}$ entonces

$C_x$ no es conexo porque $C_x = (A \cap C_x) \cup ((X \setminus A) \cap C_x)$ y $A \cap C_x, (X \setminus A) \cap C_x \in (C_x)_T$ $\underset{\phi}{\#}$ $\underset{\phi}{\#}$
$\Rightarrow C_x$ no es conexo !!
Por tanto, $(X \setminus A) \cap C_x = \phi \Rightarrow C_x \subset X \setminus (X \setminus A) = A$.

Ejemplos: 1. $(X, T_D)$ $x \in X$. $C_x = \{x\}$. ($\{x\}$ es el único conjunto conexo de $(X, T_D)$ que contiene a $x$). En este caso $C_x$ es un conjunto abierto.

2. Sea $(X, T)$ un e. top. Supongamos que $X = C_{x_1} \cup \dots \cup C_{x_k}$ donde $C_{x_i}$ son componentes conexas y $C_{x_i} \cap C_{x_j} = \phi$ $\forall i \neq j$



$C_{x_1} = C_{y_1} \quad \forall y_1 \in C_{x_1}$

$\{C_{x_i} : i=1,\dots,k\}$ es una partición de $X$ en componentes conexas.

En este caso $C_{x_i} = X \setminus \left( \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} C_{x_j} \right) = X \setminus \big( \underbrace{C_{x_1} \cup \dots \cup \widehat{C_{x_i}} \cup \dots \cup C_{x_k}}_{\text{cerrado}} \big)$

$\Rightarrow C_{x_i} \in T$.

3. $(\mathbb{Q}, (T_u)_{\mathbb{Q}})$ $\quad q \in \mathbb{Q} \Rightarrow C_q = \{q\}$ y $C_q$ no es abierto.

4/12/2020

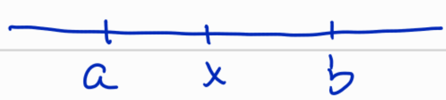
Ejemplo: En $(\mathbb{Q},(T_u)_{\mathbb{Q}})$, $q\in\mathbb{Q}$. $C_q=\{q\}$ no es abierto en $(T_u)_{\mathbb{Q}}$.

Si $A\subset\mathbb{Q}$ y $A$ contiene más de un punto, entonces $A$ no es conexo.
Si $q_1,q_2\in A$, $q_1<q_2$, entonces $\exists\, p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tal que $q_1<p<q_2$.
$(-\infty,p)\cap A$, $(p,+\infty)\cap A$ son abiertos en $(T_u)_A$ disjuntos, no vacíos y $A=(\mathbb{R}\setminus\{p\})\cap A=\big((-\infty,p)\cap A\big)\cup\big((p,+\infty)\cap A\big)$. Por tanto $A$ no es conexo. ($A$ no es un intervalo).

Por tanto, el único conjunto conexo de $(\mathbb{Q},(T_u)_{\mathbb{Q}})$ que contiene a $q$ es $\{q\}$. Es decir $C_q=\{q\}$.

$\{q\}$ no es abto en $(\mathbb{Q},(T_u)_{\mathbb{Q}})$. Si lo fuera, $q$ sería punto interior y existiría $\varepsilon>0$ tal que $\underbrace{(q-\varepsilon,q+\varepsilon)}_{\text{contiene infinitos números racionales.}}\cap\mathbb{Q}\subset\{q\}$.

Ejemplo: $(\mathbb{R},T_S)$, $x\in\mathbb{R}$, $C_x=\{x\}$. (Cualquier conjunto que contenga más de un punto en $(\mathbb{R},T_S)$ es disconexo (no es conexo) $\mathbb{R}=(-\infty,x)\cup[x,+\infty)$, $(-\infty,x)$, $[x,+\infty)\in T_S$). Las componentes conexas no son abiertas.




Teorema: Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$ un homeomorfismo, $x\in X$. Entonces $f(C_x)=C_{f(x)}$.

Dem: $f(C_x)$ es un subconjunto conexo de $(Y,T)$ ($f$ continua y $C_x$ es conexo) y además $f(x)\in f(C_x)$. Entonces $f(C_x)\subset C_{f(x)}$. ($C_{f(x)}$ es el mayor conjunto conexo que contiene a $f(x)$).

Razonamos ahora con la aplicación inversa $f^{-1}$: $f^{-1}(C_{f(x)})$ es un subconjunto conexo de $X$ que contiene a $x$. Por tanto $f^{-1}(C_{f(x)}) \subset C_x$ y $C_{f(x)} \subset f(C_x)$.

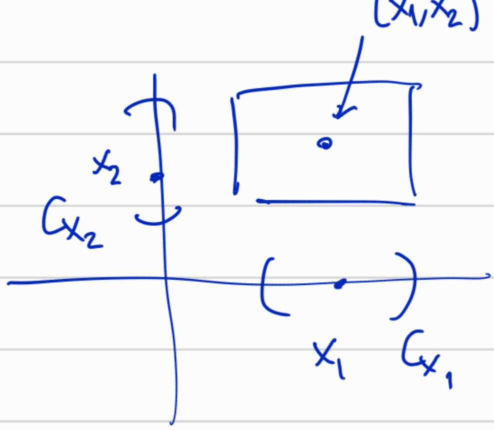
En consecuencia, $f(C_x) = C_{f(x)}$. $\blacksquare$

Si $(X,T)$ tiene $K$ componentes conexas, y $(Y,T') \approx (X,T)$, entonces $(Y,T')$ tiene $K$ componentes conexas.

Corolario: el número de componentes conexas es un invariante topológico.

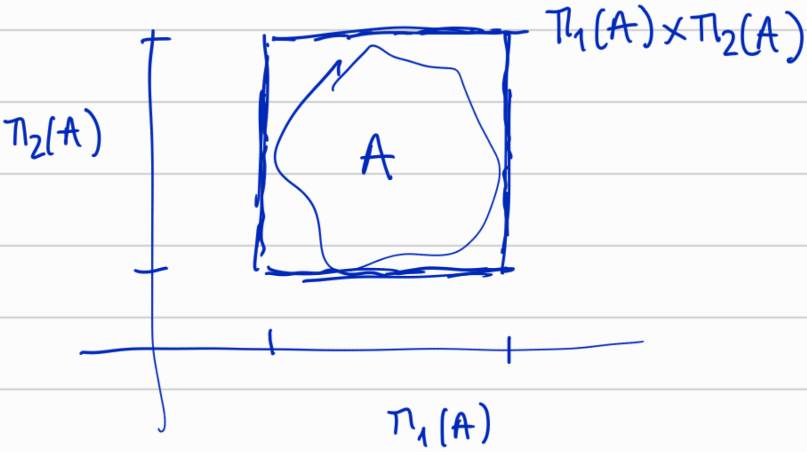
Nota: se puede probar que el cardinal del conjunto de componentes conexas es un invariante topológico.

Teorema: Sean $(X_1,T_1), \dots, (X_k,T_k)$ e.top. $(x_1,\dots,x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$.
Entonces $C_{(x_1,\dots,x_k)} = C_{x_1} \times \dots \times C_{x_k}$




Dem: $C_{x_1}, \dots, C_{x_k}$ conexos, entonces $C_{x_1} \times \dots \times C_{x_k}$ es conexo en $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ y $(x_1,\dots,x_k) \in C_{x_1} \times \dots \times C_{x_k}$.
Por tanto $C_{x_1} \times \dots \times C_{x_k} \subset C_{(x_1,\dots,x_k)}$.
Veamos la inclusión opuesta. Sea $A \subset X_1 \times \dots \times X_k$ un subconjunto conexo tal que $(x_1,\dots,x_k) \in A$. Para cada $i \in \{1,\dots,k\}$, $x_i = \pi_i((x_1,\dots,x_k)) \in \pi_i(A)$ conexo. Por tanto $\pi_i(A) \subset C_{x_i}$. Entonces

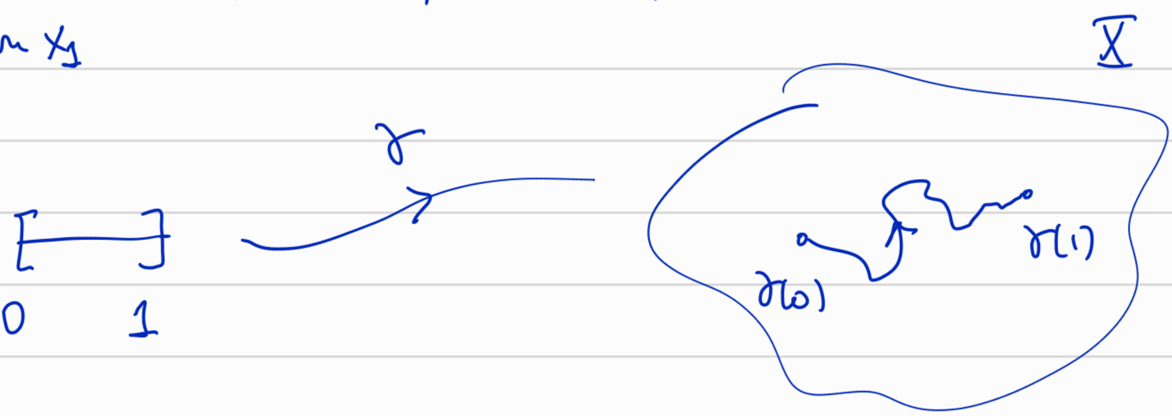
$$A \subset \pi_1(A) \times \cdots \times \pi_k(A) \subset C_{x_1} \times \cdots \times C_{x_k}$$



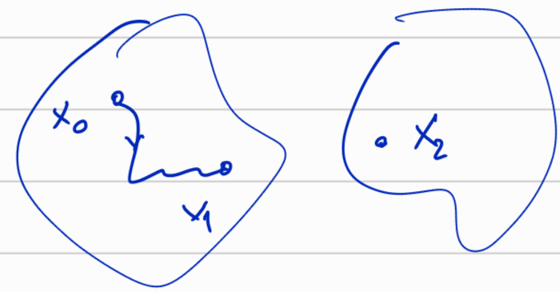

Todo subconjunto conexo $A \subset X_1 \times \cdots \times X_k$ que contenga a $(x_1, \dots, x_k)$ está contenido en $C_{x_1} \times \cdots \times C_{x_k}$. En particular, tomando $A = C_{(x_1, \dots, x_k)}$ tenemos que $C_{(x_1, \dots, x_k)} \subset C_{x_1} \times \cdots \times C_{x_k}$

Por tanto $C_{(x_1, \dots, x_k)} = C_{x_1} \times \cdots \times C_{x_k}$ ∎

Def: un arco en un espacio topológico $(X, T)$ es una aplicación continua $\gamma : ([0,1], (T_u)_{[0,1]}) \to (X, T)$.
El punto $\gamma(0)$ es el origen del arco. El punto $\gamma(1)$ es el extremo del arco. Si $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$, diremos que el arco $\gamma$ conecta o une $x_0$ con $x_1$



Def: un e.top. $(X,T)$ es conexo por arcos si $\forall\, x_0, x_1 \in X$, existe un arco $\gamma_{x_0x_1} : [0,1] \to X$ tal que $\gamma_{x_0x_1}(0) = x_0$, $\gamma_{x_0x_1}(x_1) = 1$.




Proposición: Si $(X,T)$ es conexo por arcos, entonces $(X,T)$ es conexo.

Dem: fijamos $x_0 \in X$. Para cada $x_1 \in X$, existe un arco $\gamma_{x_1} : [0,1] \to X$ tal que $\gamma_{x_1}(0) = x_0$, $\gamma_{x_1}(1) = x_1$

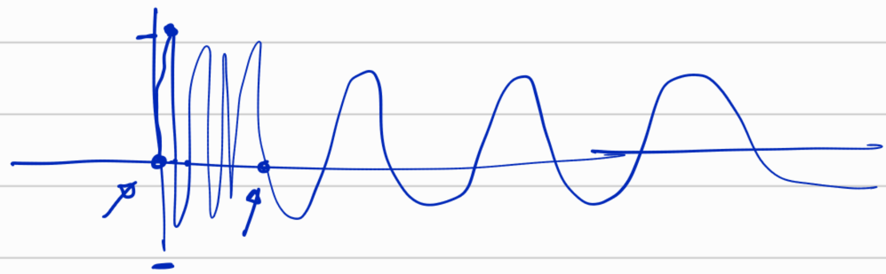

$x_1 = \gamma_{x_1}(1) \in \gamma_{x_1}([0,1]) = C_{x_1}$ conexo ($\gamma$ continua y $[0,1]$ es conexo)

$$X = \bigcup_{x_1 \in X} C_{x_1}, \qquad \underbrace{\bigcap_{x_1 \in X} C_{x_1}}_{\neq \emptyset} \ni x_0 \qquad \left( C_{x_1} = \gamma_{x_1}([0,1]),\ x_0 = \gamma_{x_1}(0) \right)$$

$X$ es unión de conjuntos conexos con intersección no vacía. Por tanto $X$ es conexo. ∎

**Nota:** no todo espacio conexo es conexo por arcos.

$f(x)=\sin(1/x)$ $\qquad$ $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$



$f(x)=1=\sin(1/x) \iff \frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{(1+4k)\pi}{2} \iff x=\frac{2}{(1+4k)\pi}.$

$\text{grafo}(f)=\{(x,f(x)) : x\in(0,+\infty)$ es conexo$\}$.

$(0,0)\in\overline{\text{grafo}(f)}$ $\qquad$ $x_k=\frac{1}{k\pi}\to 0$ $\quad$ $\sin\left(\frac{1}{x_k}\right)=\sin(k\pi)=0.$ $\quad$ $\text{grafo}(f) \ni \underline{\underline{(x_k,0)}}$

Por tanto $\text{grafo}(f)\cup\{(0,0)\}$ es conexo, pero no es conexo por arcos.

**Def:** $C\subset\mathbb{R}^n$ es convexo si $\forall x,y\in C$, $[x\,y]=\{x+t(y-x) : t\in[0,1]\}$ está contenido en $C$.

**Ejemplo:** Si $C\subset\mathbb{R}^n$ es convexo, entonces $C$ es conexo por arcos.

$x,y\in C$, definimos $\gamma_{xy}(t)=x+t(y-x)\in C$ $\forall t\in[0,1]$.

$\gamma_{xy}:([0,1],(T_u)_{[0,1]})\to(\mathbb{R}^n,T_u^n)$

es continua. $\quad$ $\pi_i\circ\gamma_{xy}(t)=x_i+t(y_i-x_i)$ es continua como aplicación de $([0,1],(T_u)_{[0,1]})$ en $(\mathbb{R},T_u)$.

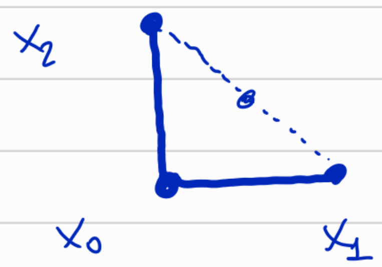
Por tanto, $(C, (T_u)_C)$ es conexo por arcos y, en consecuencia, conexo.

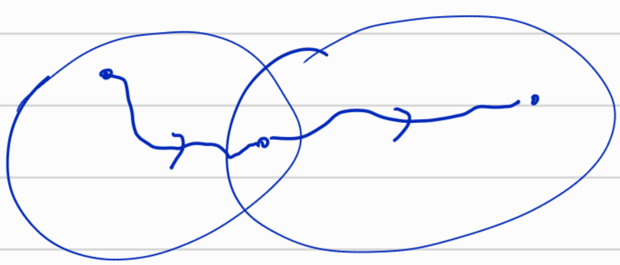
Ejemplo: $x_0 = (0,0)$, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$

$[x_0, x_1] \cup [x_0, x_2]$ es conexo (unión de dos conexos con intersección no vacío) pero no es convexo.

$$(1,0) + t((0,1)-(1,0)) = (1,0) + (-t, t) = (1-t, t)$$

$t = \frac{1}{2}$ $\quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin [x_0, x_1] \cup [x_0, x_2]$.



9/12/2020

# Espacios compactos

**Def.** Sea $X$ un conjunto, $A \subset X$. Diremos que una familia de subconjuntos $\{U_i\}_{i \in I}$ de $X$ es un recubrimiento de $A$ si $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Si $A = X$, entonces $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Si $(X, T)$ es un e. top. diremos que un recubrimiento es abierto si $U_i \in T \; \forall i \in I$.

**Def:** sea $X$ conjunto, $A \subset X$, $\{U_i\}_{i \in I}$ recubrimiento de $A$. Un subrecubrimiento de $\{U_i\}_{i \in I}$ es una subfamilia $\{U_j\}_{j \in J}$, con $J \subset I$, tal que $A \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

Diremos que un subrecubrimiento es finito si $J$ es finito.

**Def:** diremos que un espacio topológico $(X, T)$ es compacto si de todo recubrimiento abierto puede extraerse un subrecubrimiento finito.

**Ejemplos:** 1. $(X, T_{cf})$, $X$ infinito, es compacto

$$U_i \in T_{cf} \iff X \setminus U_i \text{ es finito ó } \phi.$$

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un rec. abto. de $X$. Sea $U_{i_0} \neq \phi$. Entonces $X \setminus U_{i_0}$ es finito e igual a $\{x_1, \dots, x_k\}$. Tomamos $U_{i_j}$, $j = 1, \dots, k$ tal que $x_j \in U_{i_j}$.

$$\mathbb{X} = U_{i_0} \cup (\mathbb{X} \setminus U_{i_0}) = U_{i_0} \cup \{x_1, \dots, x_k\} \subset$$

$$\subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

2. Sea $(\mathbb{X}, T)$ un e.top., $\mathbb{X}$ finito. Entonces $(\mathbb{X}, T)$ es compacto.

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ recubrimiento abierto de $\mathbb{X}$. Como $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_k\}$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, elegimos $U_{i_j}$ tal que $x_j \in U_{i_j}$. Entonces

$$\mathbb{X} \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

3. Si $(\mathbb{X}, T)$ es un e.top. y $T$ tiene una cantidad finita de abiertos, entonces $(\mathbb{X}, T)$ es compacto, ya que cualquier recubrimiento abierto solo tiene una cantidad finita de conjuntos distintos.

4. $(\mathbb{R}, T_u)$ no es compacto. $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$. $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$

es un recubrimiento abto. del que no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito. Si $\mathbb{R} \subset \bigcup_{i=1}^{k} (-n_i, n_i)$, tomando $n = \max\{n_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$, se tiene que $\mathbb{R} \subset (-n, n)$ !!

5. $(\mathbb{X}, T_D)$ es compacto si y sólo si $\mathbb{X}$ es finito.

Ya sabemos que si $\mathbb{X}$ es finito, entonces $(\mathbb{X}, T_D)$ es compacto. Si suponemos que $(\mathbb{X}, T_D)$ es compacto, tomamos $\{U_x : x \in \mathbb{X}\}$ donde $U_x = \{x\}$, que es un recubrimiento abierto de $\mathbb{X}$. Como $\mathbb{X}$ es compacto, extraemos un subrecubrimiento finito. Existen $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{X}$ tales que

$$\mathbb{X} \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k} = \{x_1, \dots, x_k\}$$

Por tanto, $\mathbb{X}$ es finito.

Def: Sea $(\mathbb{X}, T)$ un e.top., $A \subset \mathbb{X}$. Diremos que $A$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{X}$ si $(A, T_A)$ es un e.top. compacto.

Propiedad: Sea $(\mathbb{X}, T)$ un e.top., $A \subset \mathbb{X}$. Son equivalentes

1. $A$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{X}$ ($(A, T_A)$ es compacto)
2. De todo recubrimiento abierto de $A$ por abiertos de $(\mathbb{X}, T)$ se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Dem: $T_A = \{U \cap A : U \in T\}$

$1 \Rightarrow 2$ Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un rec. de $A$ por abiertos de $(\mathbb{X}, T)$

$$\boxed{A \subset \bigcup_{i \in I} U_i} \qquad \boxed{A \subset B \Leftrightarrow A = A \cap B.}$$

Entonces

$$A = A \cap \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap U_i)$$

y $A \cap U_i \in T_A$ $\forall i \in I$. Por tanto, $\{A \cap U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de $A$ por abiertos de $(A, T_A)$. Como suponemos que $(A, T_A)$ es compacto, existe $J \subset I$ finito tal que $A = \bigcup_{j \in J} U_j \cap A$

Entonces

$$A = \bigcup_{j \in J} U_j \cap A \subset \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Esto demuestra que $1 \Rightarrow 2$.

$2 \Rightarrow 1$. Tomamos un recubrimiento $\{V_i\}_{i\in I}$ de $A$ por abiertos de $(A, T_A)$. Como $V_i \in T_A$ $\forall i \in I$, existe $U_i \in T$ tal que $V_i = U_i \cap A$.

$$A = \bigcup_{i\in I} V_i = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap A) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

Esto implica $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de $A$ por abiertos de $(X, T)$. Por 2, existe $J \subset I$ finito tal que

$$A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$$

Entonces

$$A = A \cap \left(\bigcup_{j\in J} U_j\right) = \bigcup_{j\in J}(U_j \cap A) = \bigcup_{j\in J} V_j,$$

y $(A, T_A)$ es compacto ∎

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a<b$. Entonces $([a,b], (T_u)_{[a,b]})$ es compacto ($[a,b]$ es un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, T_u)$).

Nota: $(a,b)$, con $a<b$, se puede expresar como

$$(a,b) = \bigcup_{n > \frac{b-a}{2}} \left(a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right)$$

$\left\{\left(a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right) : n > \frac{b-a}{2}\right\}$ es un recubrimiento de $(a,b)$

por abiertos de $(T_u)_{(a,b)}$ del que no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito.

<u>Dem</u>: (teorema). Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $[a,b]$ por abiertos de $(T_u)_{[a,b]}$.

$$s = \sup\{r\in[a,b] : [a,r] \text{ se puede recubrir por una cantidad finita de conjuntos } U_i\}.$$

- $s>a$. Existe $i_0\in I$ tal que $a\in U_{i_0}$. Existe entorno de $a$, $V$, en $(T_u)_{[a,b]}$ tal que $a\in V\subset U_{i_0}$. Sabemos que $\{(a-\varepsilon, a+\varepsilon) : \varepsilon>0\}$ es base de entornos de $a$ en $(\mathbb{R}, T_u)$ y, por tanto $\{(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\cap[a,b] : \varepsilon>0\} = \{[a,a+\varepsilon) : \varepsilon>0\}$ es base de entornos de $a$ en $([a,b], (T_u)_{[a,b]})$. Entonces existe $\varepsilon>0$ tal que

$$[a,a+\varepsilon)\subset V\subset U_{i_0}$$

Esto implica que $[a,r]\subset U_{i_0}$ $\forall\, a<r<a+\varepsilon$. Es decir que $[a,r]$ se puede recubrir por una cantidad finita (uno) de elementos del recubrimiento $\Rightarrow s\geq a+\varepsilon>a$.

- $s=b$. Supongamos que $s<b$. Sea $i_0\in I$ tal que $s\in U_{i_0}$. Como $U_{i_0}$ es abierto, existe $\varepsilon>0$ tal que $[s-\varepsilon, s+\varepsilon]\cap[a,b]\subset U_{i_0}$ ($\{[s-\varepsilon, s+\varepsilon] : \varepsilon>0\}$ es base de entornos de $s$ en $(\mathbb{R}, T_u)$). Como $s-\varepsilon<s$, el conjunto $[a,s-\varepsilon]$ puede recubrirse por una cantidad finita de abiertos $U_{i_1},\dots,U_{i_k}$ ($s=\sup\{\}$). Si $[a,s-\varepsilon]$ no puede recubrirse por una cantidad finita de abiertos del recubrimiento, entonces $[a,t]$, con $s-\varepsilon\leq t\leq \varepsilon$, tampoco

puede recubrirse por una cantidad finita. Esto contradice que $s$ sea el supremo del conjunto).

$$[a, s+\varepsilon] = [a, s-\varepsilon] \cup [s-\varepsilon, s+\varepsilon] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup U_{i_0}$$

Si $s<b$, elegimos $\varepsilon>0$ tal que $s+\varepsilon<b$. $\Rightarrow$ $s+\varepsilon \in \{r \in [a,b] :$ $[a,r]$ puede recubrirse por una cantidad finita de elementos de $\{U_i\}_{i\in I}$. $s<s+\varepsilon$ !! $s = \sup\{\ \}$. Esta contradicción demuestra que $s=b$.

- $s \in \{r \in [a,b] : [a,r]$ puede recubrirse por una cantidad finita de elementos $\{U_i\}\}$.

10/12/2020

Estábamos probando $[a,b]$ es compacto. Para ello considerábamos un recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$, con $U_i \in (T_u)_{[a,b]}$, el conjunto

$$\{r \in [a,b] : [a,r] \text{ puede recubrirse por finitos } U_i\}$$

y el supremo $s$ de dicho conjunto. Ayer vimos que $s=b$.
Falta ver que $b$ pertenece al conjunto. Para verlo, tomamos $U_{i_0}$ que contiene a $b$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $(b-\varepsilon, b] = (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \cap [a,b] \subset U_{i_0}$. Como $b$ es el supremo del conjunto, o bien $b$ pertenece al conjunto o bien existe $r$ en el conjunto tal que $r \in (b-\varepsilon, b]$. Sabemos que $[a,r] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$ y, por tanto

$$[a,b] = [a,r] \cup [r,b] \subset \underbrace{[a,r]} \cup \underline{(b-\varepsilon,b]} \subset \underbrace{U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}} \cup \underline{U_{i_0}}$$

Por tanto, $[a,b]$ se puede recubrir por una cantidad finita de $U_i$'s.
Es decir, $b \in$ conjunto y podemos extraer un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$ ∎

<u>Nota</u>: $(a,b) = \bigcup_{n \geq n_0} \left(a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right)$. $\qquad [a,b) = \bigcup_{n\geq n_0} \underbrace{\left[a, b-\frac{1}{n}\right)} \in (T_u)_{[a,b)}$

<u>Def</u>: Sea $X$ un conjunto, y sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de $X$. Diremos que $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita si

$$\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$$

para todo $J \subset I$ finito.

Proposición: Sea $(X,T)$ un e.top. Son equivalentes:

1. $(X,T)$ compacto
2. Toda familia de cerrados en $(X,T)$ con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Nota. 2 significa que si $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados tal que $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ $\forall J \subset I$ finito, entonces $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Dem (proposición). $1 \Rightarrow 2$ Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados tal que $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ si $J\subset I$ es finito. Supongamos que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Entonces:

$$X = X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} (X \setminus F_i)$$

y $\{X\setminus F_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $X$. Por ser $X$ compacto, $\exists J\subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{j\in J}(X\setminus F_j) \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{j\in J} F_j$ !! porque $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la prop. de la int. finita. Por tanto, $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

$2 \Rightarrow 1$. Veamos que $(X,T)$ es compacto. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ rec. abto de $X$. Entonces $\{X\setminus U_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados con la propiedad

$$\bigcap_{i\in I}(X\setminus U_i) = X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \emptyset$$

Entonces $\{X \setminus U_i\}_{i\in I}$ tiene intersección no vacía y, por 1, no puede tener la propiedad de la intersección finita. Existe $J \subset I$ finito tal que $\bigcap_{j\in J}(X\setminus U_j) = \emptyset$. Entonces

$$X = X \setminus \left(\bigcap_{j\in J}(X\setminus U_j)\right) = \bigcup_{j\in J}(X\setminus(X\setminus U_j)) = \bigcup_{j\in J} U_j$$

Del recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ hemos extraído un subrec. finito. Por tanto, $(X,T)$ es compacto $\blacksquare$

Consecuencia: Si $(X,T)$ es compacto y $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es decreciente ($F_{i+1}\subset F_i \ \forall i$) de conjuntos cerrados no vacíos, entonces $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Entonces

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \emptyset$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $\quad a_i<b_i$ $\quad$ Si existen $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $\underbrace{a_i\uparrow}$ $\underbrace{b_i\downarrow}$

$$a\leq a_i<b_i\leq b$$

entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}[a_i,b_i]\neq\emptyset$ $\quad$ ($\{[a_i,b_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de cerrados en el espacio compacto $([a,b], (T_u)_{[a,b]})$).

Proposición: Sea $f:(X,T)\to(Y,T')$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Supongamos que $(X,T)$ es compacto. Entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de $(Y,T')$.

Por tanto, si $f$ es homeomorfismo y $(X,T)$ es compacto entonces $(Y,T')$ es compacto.

Dem: Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $f(X)$ por abiertos de $(Y,T')$. $f(X)\subset \bigcup_{i\in I} V_i$. Entonces

$$X\subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$$

Como $f$ es continua y $V_i\in T'$ $\forall i\in I$, $f^{-1}(V_i)\in T$ $\forall i\in I$. Entonces $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ es un rec. abierto de $X$. Como $(X,T)$ es compacto, existe $J\subset I$ finito tal que $X=\bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j)$. Entonces

$$f(X) = f\left(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j)\right) = \bigcup_{j\in J} f(f^{-1}(V_j)) \subset \bigcup_{j\in J} V_j$$

Entonces $\{V_j\}_{j\in J}$ es un subrec. de $f(X)$ finito. Por tanto $f(X)$ es compacto $\blacksquare$

**Proposición:**

1. Si $(X,T)$ es compacto y $A\subset X$ es cerrado, entonces $A$ es un subconjunto compacto de $X$
2. Si $(X,T)$ es un e.top. Hausdorff y $A\subset X$ es un subconjunto compacto, entonces $A$ es cerrado
3. Si $f:(X,T)\to(Y,T')$ es continua, $(X,T)$ es compacto e $(Y,T')$ es Hausdorff, entonces $f$ es cerrada. En particular, si $f$ es biyectiva, es un homeomorfismo.

Dem: 1. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $A$ por conjuntos $U_i \in T$ $\forall i \in I$. $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Por tanto

$$X = A \cup (X \setminus A) \subset \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cup (X \setminus A)$$

Como $X \setminus A \in T$, la familia $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus A\}$ es un rec. abto. de $(X, T)$. Como $(X,T)$ es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito.

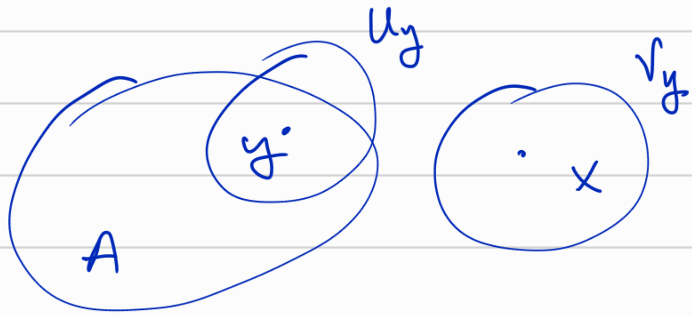
$$X \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus A)$$

Entonces $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$ y $\{U_{i_j}\}_{j \in \{1,\dots,k\}}$ es un subrecubrimiento finito de $A$.

2. [Nota $(X, T_{CF})$ $X$ infinito. Sea $A \subset X$ también infinito. Sabemos que $(X, T_{CF})$ es compacto. $(T_{CF})_A$ es la top. de los complementos finitos en $A$. Por tanto, $(A, (T_{CF})_A)$ es compacto. ¿Es $A$ cerrado en $T_{CF}$? No, si $A \neq X$. $A$ sería un subconjunto compacto no cerrado de un e.top. No obstante, $(X, T_{CF})$ no es Hausdorff ]

Sea $A \subset X$ es un subconjunto compacto de $(X,T)$. Sea $x \notin A$.

$x \in X \setminus A$



Para todo $y \in A$, sean $U_y, V_y \in T$ tales que $y \in U_y$, $x \in V_y$, $U_y \cap V_y = \phi$. Entonces $\{U_y\}_{y \in A}$ es un rec. de $A$ por abiertos de $(X, T)$. Como $A$ es un subconjunto compacto, entonces existen $y_1, \dots y_k \in A$ tales que $A \subset U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_k}$. Definimos $V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_k} \in T$, $x \in V$.

$$A \cap V \subset (U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_k}) \cap V = (U_{y_1} \cap V) \cup \dots \cup (U_{y_k} \cap V)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ V \subset V_{y_i} \ \forall i = 1, \dots, k}}{\subset} (U_{y_1} \cap V_{y_1}) \cup \dots \cup (U_{y_k} \cap V_{y_k}) = \phi$$

$\Rightarrow V \subset X \setminus A \Rightarrow x \in \text{int}(X \setminus A)$. Por tanto $X \setminus A \subset \text{int}(X \setminus A)$. Es decir, $X \setminus A = \text{int}(X \setminus A)$ y, por tanto, $X \setminus A \in T$. Entonces $A$ es cerrado en $(X, T)$.

3. Sea $f: (X, T) \to (Y, T')$ continua, $(X, T)$ compacto, $(Y, T')$ Hausdorff. Sea $C \subset X$ es cerrado. Por 1, $C$ es compacto. Como $f$ es continua, $f(C)$ es compacto en $(Y, T')$. Como $(Y, T')$ es Hausdorff, 2 implica que $f(C)$ es cerrado. Por tanto, $f$ es cerrada ∎

11/12/2020

Ayer vimos: $(\mathbb{X},T)$ compacto, $A\subset\mathbb{X}$ cerrado $\Rightarrow$ $A$ compacto

$(\mathbb{X},T)$ Hausdorff, $A\subset\mathbb{X}$ compacto $\Rightarrow$ $A$ cerrado

Corolario: sea $(\mathbb{X},d)$ un espacio métrico, $A\subset\mathbb{X}$ un subconjunto compacto. Entonces $A$ es cerrado y acotado.

Def: si $(\mathbb{X},d)$ es un espacio métrico, diremos que $A\subset\mathbb{X}$ es acotado si $A$ está contenido en una bola (abierta o cerrada).

Dem (corolario). Sabemos que $(\mathbb{X},T_d)$ es Hausdorff. Por tanto $A$ es cerrado (por ser $A$ compacto). Fijamos $x_0\in\mathbb{X}$ y consideramos

$$A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_0,n)=\mathbb{X}$$

$\{B(x_0,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento de $A$ por abiertos de $(\mathbb{X},T)$.

Por ser $A$ compacto, existen $n_1,\dots,n_k$ tales que $A\subset\bigcup_{j=1}^{k} B(x_0,n_j)$

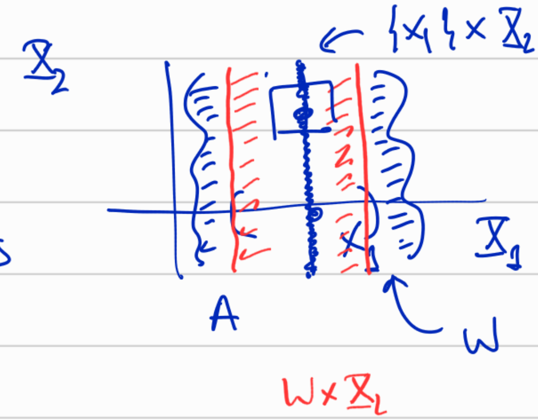
Si $n:=\max\{n_1,\dots,n_k\}$, entonces $A\subset B(x_0,n)$ y $A$ es acotado. $\blacksquare$

Teorema (Tijonov). Sean $(\mathbb{X}_1,T_1),\dots,(\mathbb{X}_k,T_k)$ espacios topológicos. Entonces $(\mathbb{X}_1\times\dots\times\mathbb{X}_k, T_1\times\dots\times T_k)$ es compacto si y sólo si $(\mathbb{X}_i,T_i)$ es compacto para todo $i\in\{1,\dots,k\}$.

La demostración utiliza el siguiente resultado.

Lema (del tubo): sean $(\mathbb{X}_1,T_1)$, $(\mathbb{X}_2,T_2)$ e. topológicos, $(\mathbb{X}_2,T_2)$ compacto.

Sea $x_1 \in X_1$. Sea $A \in T_1 \times T_2$ tal que $\{x_1\} \times X_2 \subset A$. Entonces existe $W \in T_1$ tal que $\{x_1\} \times X_2 \subset W \times X_2 \subset A$



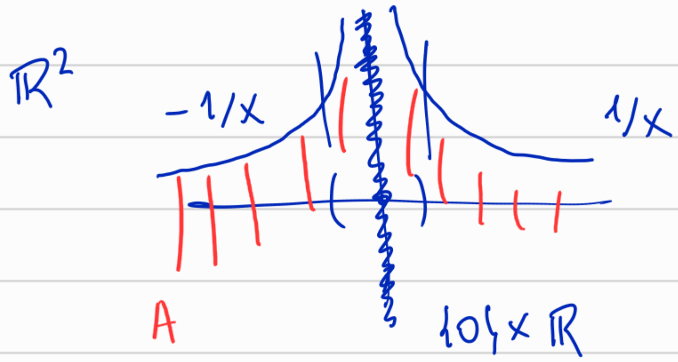

Dem: para todo $x_2 \in X_2$, se tiene que $(x_1, x_2) \in \{x_1\} \times X_2 \subset A \in T_1 \times T_2$.
Podemos encontrar $U_{x_2} \in T_1$, $V_{x_2} \in T_2$ tales que $(x_1, x_2) \in U_{x_2} \times V_{x_2} \subset A$. ←
($\{U \times V : U \in T_1, V \in T_2, (x_1,x_2) \in U \times V\}$ es base de entornos de $(x_1,x_2)$ )

$\{V_{x_2}\}_{x_2 \in X_2}$ es un recubrimiento abierto de $X_2$. Como $X_2$ es compacto, extraemos un subrecubrimiento finito: existe $M \subset X_2$ finito tal que $X_2 \subset \bigcup_{x_2 \in M} V_{x_2}$. Definimos $W = \bigcap_{x_2 \in M} U_{x_2}$ ($W \subset U_{x_2}\ \forall x_2 \in M$)

$$W \times X_2 \subset W \times \Big(\bigcup_{x_2 \in M} V_{x_2}\Big) = \bigcup_{x_2 \in M} (W \times V_{x_2}) \subset \bigcup_{x_2 \in M} (U_{x_2} \times V_{x_2}) \subset A$$

Como $x_1 \in W = \bigcap_{x_2 \in M} U_{x_2}$ ($x \in U_{x_2}\ \forall x_2$), entonces $\{x_1\} \times X_2 \subset W \times X_2 \subset A$. ▨

Nota: si $X_2$ no es compacto no es cierto el lema.




$$A = \begin{cases} x = 0, \text{ó} \\ y < \frac{1}{x} & x > 0, \text{ó} \\ y < -\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

No existe $W$ abto que contiene a $0$ tal que $W \times \mathbb{R} \subset A$

<u>Dem</u> (Teorema Tijonov) Si $(\mathbb{X}_1 \times \cdots \times \mathbb{X}_k, T_1 \times \cdots \times T_k)$ es compacto, entonces $\mathbb{X}_i = \pi_i(\mathbb{X}_1 \times \cdots \times \mathbb{X}_k)$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Por tanto, $\mathbb{X}_i$ es la imagen del espacio compacto $(\mathbb{X}_1 \times \cdots \times \mathbb{X}_k, T_1 \times \cdots \times T_k)$ por la aplicación continua $\pi_i : (\mathbb{X}_1 \times \cdots \times \mathbb{X}_k, T_1 \times \cdots \times T_k) \to (\mathbb{X}_i, T_i)$. Entonces $(\mathbb{X}_i, T_i)$ es compacto.

Supongamos ahora que $(\mathbb{X}_i, T_i)$ es compacto para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Veamos que $(\mathbb{X}_1 \times \cdots \times \mathbb{X}_k, T_1 \times \cdots \times T_k)$ es compacto por inducción sobre $k$.

$k=2$ Veamos que $(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2, T_1 \times T_2)$ es compacto. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto de $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$. Para cada punto $x_1 \in \mathbb{X}_1$ sabemos que $\mathbb{X}_2$ es homeomorfo a $\{x_1\} \times \mathbb{X}_2$. Entonces $\{x_1\} \times \mathbb{X}_2$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$. Como $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de $\{x_1\} \times \mathbb{X}_2$, existe $J(x_1) \subset I$ finito tal que

$$\{x_1\} \times \mathbb{X}_2 \subset \bigcup_{j \in J(x_1)} U_j$$

Utilizamos ahora el lema del tubo para cada punto $x_1 \in \mathbb{X}_1$. Como

$$\{x_1\} \times \mathbb{X}_2 \subset \underbrace{\bigcup_{j \in J(x_1)} U_j}_{A \text{ en el lema del tubo.}} \in T_1 \times T_2,$$

usando el lema existe $W_{x_1} \in T_1$ tal que

$$\{x_1\} \times \mathbb{X}_2 \subset W_{x_1} \times \mathbb{X}_2 \subset \bigcup_{j \in J(x_1)} U_j. \qquad (*)$$

Tenemos entonces que $\{W_{x_1}\}_{x_1 \in X_1}$ es un recubrimiento abierto de $X_1$ ($x_1 \in W_{x_1}$ $\forall x_1 \in X_1$). Como $X_1$ es compacto, existe $M \subset X_1$ finito tal que

$$X_1 \subset \bigcup_{x_1 \in M} W_{x_1}.$$

Entonces

$$X_1 \times X_2 \subset \left(\bigcup_{x_1 \in M} W_{x_1}\right) \times X_2 = \bigcup_{x_1 \in M} \left(W_{x_1} \times X_2\right)$$

$$\overset{(*)}{\subset} \bigcup_{x_1 \in M} \left(\bigcup_{j \in J(x_1)} U_j\right) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

$J = \{j \in I : j \in J(x_1), x_1 \in M\}$ es finito. ($M$ finito y $J(x_1)$ es finito para todo $x_1 \in M$) $\quad \# J = \sum_{x_1 \in M} \# J(x_1)$.

Hemos probado que, de todo recubrimiento abierto de $X_1 \times X_2$, hemos extraído un subrecubrimiento finito. Por tanto, $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$ es compacto.

Supongamos ahora que $(X_1 \times \dots \times X_{k-1}, T_1 \times \dots \times T_{k-1})$ es compacto.

Veamos que $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es compacto. Sabemos que $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k) \cong ((X_1 \times \dots \times X_{k-1}) \times X_k, (T_1 \times \dots \times T_{k-1}) \times T_k)$ (El homeomorfismo es $(x_1, \dots, x_k) \to ((x_1, \dots, x_{k-1}), x_k)$). Por hipótesis de inducción, $(X_1 \times \dots \times X_{k-1}, T_1 \times \dots \times T_{k-1})$ es compacto. Por tanto

$$((X_1 \times \dots \times X_{k-1}) \times X_k, (T_1 \times \dots \times T_{k-1}) \times T_k)$$

es compacto. Como $(\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es homeomorfo al espacio anterior, es también compacto. $\blacksquare$

16/12/2020

El último día probamos el Teorema de Tijonov: $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es compacto si y sólo si $(X_i, T_i)$ es compacto para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

<u>Teorema</u> (Heine-Borel). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $A$ es un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^n, T_u)$ si y sólo si $A$ es cerrado y acotado para la distancia Euclídea.

<u>Dem</u>: En cualquier espacio métrico, si un subconjunto es compacto, es cerrado y acotado. Como $T_u$, la topología usual de $\mathbb{R}^n$, coincide con $T_{d_2}$ ($d_2$ = distancia Euclídea), entonces $A \subset (\mathbb{R}^n, T_u^n)$ compacto implica que $A$ es cerrado, y acotado para $d_2$.
Supongamos que $A$ es cerrado y acotado para $d_2$. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$A \subset \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bola con } d_2}}{\bar{B}(0,r)} \subset [-r,r] \times \dots \times [-r,r].$$

El intervalo $[-r,r]$ es compacto en $(\mathbb{R}, T_u^1)$ y $[-r,r] \times \dots \times [-r,r]$ es compacto en $(\mathbb{R}^n, T_u^1 \times \dots \times T_u^1)$ por el Teorema de Tijonov. Como $T_u^1 \times \dots \times T_u^1 = T_u^n$, entonces $[-r,r] \times \dots \times [-r,r]$ es compacto en $(\mathbb{R}^n, T_u^n)$. Como $A$ es cerrado en $[-r,r] \times \dots \times [-r,r]$, entonces $A$ es compacto. ■

<u>Nota</u>: Es importante que la distancia sea la Euclídea. Por ejemplo, si tomamos $d = \min\{1, d_2\}$, $T_d = T_{d_2}$, pero $d$ es globalmente acotada. Si el Teorema de Heine-Borel fuera cierto para la distancia $d$: $A$ es compacto si $A$ es cerrado y acotado para $d$, esto implicaría que $\mathbb{R}^n$, que es cerrado y acotado para la distancia ($\mathbb{R}^n = \bar{B}_d(0,1)$),

sería compacto.

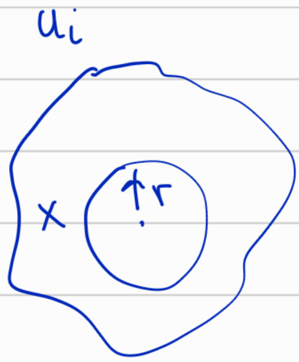
<u>Corolario</u>: Sea $(X,T)$ un e. top. compacto, $f: (X,\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, T_u)$ es continua. Entonces existen $x_{min}, x_{max} \in X$ tales que
$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$
para todo $x \in X$. ($f$ alcanza máximo y mínimo).

<u>Dem</u>: $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Por tanto es cerrado y acotado. Entonces $a = \inf f(X)$, $b = \sup f(X)$ existen por ser $f(X)$ acotado y pertenecen a $f(X)$ por ser $f(X)$ cerrado. Entonces $a = \min f(X)$, $b = \max f(X)$. Elegimos $x_{min}, x_{max} \in X$ tales que $a = f(x_{min})$ $b = f(x_{max})$. Entonces
$$a = f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) = b. \qquad \blacksquare$$

A partir de ahora consideramos espacios métricos.

<u>Teorema</u> (número de recubrimiento de Lebesgue). Si $(X,d)$ es un espacio métrico compacto, y $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de $X$, entonces $r > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $i \in I$ tal que $B(x,r) \subset U_i$.

<u>Dem</u>: la observación fundamental es que $B(x,r) \subset U_i$ si y solo si
$$d(x, X \setminus U_i) = \inf\{d(x,y) : y \in X \setminus U_i\}$$
es mayor o igual que $r$. Si llamamos $f_i(x) = d(x, X \setminus U_i)$ $\forall x \in X$ entonces $B(x,r) \subset U_i$ si y solo si $f_i(x) \geq r$.



Si $B(x,r) \subset U_i$ y $f_i(x) < r$
$\Rightarrow \inf\{d(x,y) : y \in X \setminus U_i\} < r$
$\Rightarrow \exists\, y \in X \setminus U_i$ tal que $d(x,y) < r$
$\Rightarrow \exists\, y \in X \setminus U_i$ tal que $y \in B(x,r)$. !!
$(y \in B(x,r) \not\subset U_i)$

Si $f_i(x) \geq r \Rightarrow \inf\{d(x,y) : y \in X \setminus U_i\} \geq r \Rightarrow d(x,y) \geq r$
$\forall y \in X \setminus U_i \Rightarrow X \setminus B(x,r) \supset X \setminus U_i \Rightarrow B(x,r) \subset U_i$

Como $(X, T_d)$ es compacto, sea $\{U_j\}_{j \in J}$, $J \subset I$ finito, un subrecubrimiento finito de $X$. Cada $f_j(x) = d(x, X \setminus U_j)$ es una aplicación continua por ser lipschitziana ($|f_j(x) - f_j(y)| \leq d(x,y)$). Entonces

$$f = \max_{j \in J} \{f_j\} \qquad (*)$$

es una aplicación continua (el máximo de una familia finita de aplicaciones continuas es continua

$$\max\{f_1, f_2\} = \frac{(f_1 + f_2) + |f_2 - f_1|}{2}$$

es continua por ser suma y composición de aplicaciones continuas. La igualdad $\max\{f_1, \dots, f_k\} = \max\{f_1, \max\{f_2, \dots, f_{k-1}\}\}$ permite probar la continuidad por inducción.).

Como $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, T_u)$ es continua y $f(x) \geq 0$ $\forall x \in X$, entonces $f$ alcanza un mínimo $r \geq 0$. Veamos que $r > 0$. Razonamos por contradicción suponiendo que $r = 0$. Sea $x \in X$ tal que

$$0 = r = f(x) = \max_{j\in J} \{f_j(x)\} \geq f_j(x) \qquad \text{para todo } j \in J.$$

Entonces $f_j(x)=0$ para todo $j\in J$. Entonces $d(x, \mathbb{X}\setminus U_j)=0$ para todo $j \in J$. Veamos que $x\in \mathbb{X}\setminus U_j$: si $x \notin \mathbb{X}\setminus U_j$, entonces $x\in U_j$ y, como $U_j$ es abierto, existe $\delta>0$ tal que $B(x,\delta)\subset U_j$ y $f_j(x)\geq \delta>0$ !!. Por tanto $x\in \mathbb{X}\setminus U_j$ $\forall j\in J$. Entonces $x\notin U_j$ $\forall j\in J$. Esto es imposible porque $\{U_j\}_{j\in J}$ es subrecubrimiento de $\mathbb{X}$. Esta contradicción demuestra que $r>0$.

Si $x\in \mathbb{X}$, entonces $f(x)=f_j(x)$ para algún $j\in \mathbb{X}$ y se tiene que:

$$r\leq f(x)=f_j(x)$$

Por tanto $B(x,r)\subset U_j$. ▨

**Def:** una aplicación $f:(\mathbb{X},d)\to(Y,d')$ entre dos espacios métricos es uniformemente continua si, para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $d(x,y)<\delta$ implica $d'(f(x),f(y))<\varepsilon$.

**Teorema:** una aplicación continua $f:(\mathbb{X},d)\to(Y,d')$ entre dos espacios métricos con $(\mathbb{X},d)$ compacto es uniformemente continua.

**Dem:** sea $\varepsilon>0$. Entonces para todo $y\in Y$, $f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))$ es un conjunto abierto de $(\mathbb{X},d)$ por la continuidad de $f$. La familia $\{f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))\}_{y\in Y}$ es un recubrimiento abierto de $\mathbb{X}$. $(x\in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon/2)))$. Como $(\mathbb{X},d)$ es compacto, existe $\delta>0$ número de Lebesgue asociado al recubrimiento. (para todo $x\in\mathbb{X}$, existe $y\in Y$ tal que $B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))$).

Sean $x, z \in X$ tales que $d(x,z) < \delta$. Entonces existe $y \in Y$ tal que $B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))$. Por tanto $x, z \in B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))$. Entonces $f(x), f(z) \in B(y,\varepsilon/2)$. Es decir, que $d'(f(x),y) < \varepsilon/2$, $d'(f(z),y) < \varepsilon/2$. Por la desigualdad triangular

$$d'(f(x),f(z)) \leq d'(f(x),y) + d'(y,f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Def: Un espacio métrico es secuencialmente compacto si toda sucesión admite una subsucesión convergente.

Teorema: Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Son equivalentes:

1. $(X,d)$ es compacto
2. $(X,d)$ es secuencialmente compacto

17/12/2020

**Def:** Un espacio métrico es secuencialmente compacto si toda sucesión admite una subsucesión convergente.

**Teorema:** Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Son equivalentes:

1. $(X,d)$ es compacto
2. $(X,d)$ es secuencialmente compacto

**Def:** una sucesión en un conjunto $X$ es una aplicación $x: \mathbb{N} \to X$.
A la imagen $x(i)$ se la denota $x_i$.
Una subsucesión de una sucesión es la composición de la aplicación que define la sucesión $x: \mathbb{N} \to X$ con una aplicación $j: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que es estrictamente creciente ($i_0 < i_1$, entonces $j(i_0) < j(i_1)$). $j \circ x(i)$ se le denota por $x_{i_j}$ o $x_{i(j)}$.

**Dem (teorema):** $1 \Rightarrow 2$. Supongamos que $(X, T_d)$ es compacto. Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X$. Queremos extraer una subsucesión convergente. Definimos

$$A_j = \overline{\{x_i : i > j\}}$$

Si $j < k$, entonces $\{x_i : i > k\} \subset \{x_i : i > j\}$. Tomando clausuras, $A_k \subset A_j$. Es decir, la sucesión $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados. Como consecuencia de la propiedad de la intersección finita, $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \neq \emptyset$. Tomamos entonces $x \in \bigcap_{j\in J} A_j$.

Veamos que $x$ es el límite de una subsucesión de $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

$x \in A_1 = \overline{\{x_i : i \geq 1\}}$; $B(x,1) \cap \{x_i : i \geq 1\} \neq \phi$. $\exists\, x_{i_1} \in B(x,1) \cap \{x_i : i \geq 1\}$

$x \in A_{i_1} = \overline{\{x_i : i > i_1\}}$; $B(x, \frac{1}{2}) \cap \{x_i : i > i_1\} \neq \phi$ $\exists\, x_{i_2} \in B(x, \frac{1}{2})$ $i_2 > i_1$

$x \in A_{i_2} = \overline{\{x_i : i > i_2\}}$; $B(x, \frac{1}{3}) \cap \{x_i : i > i_2\} \neq \phi$ $\exists\, x_{i_3} \in B(x, \frac{1}{3})$ $i_3 > i_2$

$\vdots$ (por inducción se construyen $x_{i_4}, \dots, x_{i_{k-1}}$).

$x \in A_{i_k}$ : $B(x, \frac{1}{k}) \cap \{x_i : i > i_{k-1}\} \neq \phi$, $\exists\, x_{i_k} \in B(x, \frac{1}{k}) \cap \{x_i : i > i_{k-1}\}$
$i_k > i_{k-1}$.

De este modo construimos una subsucesión $\{x_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$x_{i_j} \in B(x, \frac{1}{j}) \qquad (i_j > i_{j-1} \ \forall j)$$

Veamos que $x = \lim_{j \to \infty} x_{i_j}$: sea $U \in N_x$, Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U$.

Sea $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{1}{j_0}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U$. Entonces $\forall j \geq j_0$

$$x_{i_j} \in B(x, \frac{1}{j}) \subset B(x, \frac{1}{j_0}) \subset B(x,\varepsilon) \subset U.$$

2 ⇒ 1. Supongamos que $(X, d)$ es secuencialmente compacto. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $X$.

Veamos en primer lugar que, para espacios métricos secuencialmente compactos, se verifica la propiedad del número de Lebesgue para un recubrimiento: existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $i \in I$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U_i$. Probamos la existencia del número de Lebesgue razonando por contradicción. Supongamos que no existe tal número de Lebesgue. Entonces, para todo $j \in \mathbb{N}$, existe $x_j \in X$ tal que $B(x_j, \frac{1}{j})$ no está contenida en ningún abierto del recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$. Entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $(X,d)$. Por hipótesis, como $(X,d)$ es secuencialmente compacto, podemos extraer una subsucesión convergente $\{x_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ a un punto $x \in X$, que pertenece a algún $U_{i_0}$, con $i_0 \in I$. Esto nos da una contradicción: como $U_{i_0}$ es abierto, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U_{i_0}$. Como $\{x_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $x$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$x_{i_j} \in B(x, \varepsilon/2)$ $\forall j \geq j_0$. Si además $\frac{1}{i_j} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces

$$B\left(x_{i_j}, \frac{1}{i_j}\right) \overset{(*)}{\subset} B(x,\varepsilon) \subset U_{i_0}$$

Esto es una contradicción porque estamos suponiendo que $B(x_{i_j}, \frac{1}{i_j})$ no está contenida en ningún abierto del recubrimiento.

($*$ se sigue porque si $z \in B(x_{i_j}, \frac{1}{i_j})$ entonces $d(z, x_{i_j}) < \frac{1}{i_j}$.

Entonces $d(z,x) \leq d(z, x_{i_j}) + d(x_{i_j}, x) < \frac{1}{i_j} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Por tanto, $z \in B(x,\varepsilon)$ ).

Hemos demostrado entonces la existencia del número de Lebesgue: existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $i \in I$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U_i$.

Veamos por último que podemos extraer un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$. Razonamos de nuevo por contradicción. Supongamos que no podemos extraer ningún subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$.

Tomamos $x_1 \in \underset{\text{arbitrario}}{X}$ y un índice $i_1 \in I$ tal que $B(x_1,\varepsilon) \subset U_{i_1}$

$\{U_{i_1}\}$ no recubre a $X$ (no existe subrecubrimiento finito de $X$)

Tomamos $x_2 \notin U_{i_1}$ arbitrario. Tomamos $i_2 \in I$ tal que $B(x_2,\varepsilon) \subset U_{i_2}$.

Tomamos $x_3 \notin (U_{i_1} \cup U_{i_2})$. Tomamos $i_3 \in I$ tal que $B(x_3,\varepsilon) \subset U_{i_3}$

$\vdots$ por inducción

Tomamos $x_k \notin (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{k-1}})$ tal que $B(x_k,\varepsilon) \subset U_{i_k}$

De este modo construimos una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$x_k \notin (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{k-1}}) \Rightarrow x_k \notin U_{i_1}$ & $x_k \notin U_{i_2}$ ... & $x_k \notin U_{i_{k-1}}$

$$B(x_1,\varepsilon) \subset U_{i_1} \not\ni x_k \Rightarrow x_k \notin B(x_1,\varepsilon) \Rightarrow d(x_1,x_k) \geq \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$B(x_{k-1},\varepsilon) \subset U_{i_{k-1}} \not\ni x_k \Rightarrow x_k \notin B(x_{k-1},\varepsilon) \Rightarrow d(x_{k-1},x_k) \geq \varepsilon$$

Entonces $d(x_1,x_k), d(x_2,x_k), \dots, d(x_{k-1},x_k) \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Esto significa que

$$d(x_i,x_j) \geq \varepsilon \qquad \forall i \neq j.$$

#

De esta sucesión no se puede extraer ninguna subsucesión convergente (no es una sucesión de Cauchy).

Si $x = \lim_{j \to \infty} x_{i_j}$, entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\underline{d(x, x_{i_j}) < \frac{\varepsilon}{2}}$ para todo $j \geq j_0$. Entonces para $j, k \geq j_0$

$$d(x_{i_j}, x_{i_k}) \leq d(x_{i_j}, x) + d(x, x_{i_k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \;!!$$

contradicción a (#).

Esta contradicción que podemos extraer un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i \in I}$. Por tanto, $(X, T_d)$ es compacto $\blacksquare$