17/12/2020

7. (se usó en la demostración de existencia del número de Lebesgue)

(X,d) e. métrico, $A \subset X$. $\delta_A : X \to \mathbb{R}$. $\delta_A(x) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$.

$$\delta_A(x) \le d(x,a) \quad \forall a \in A$$

Veamos que δ_A es lipschitziana. Sean $x,y \in X$. Sea $a \in A$. Por la desigualdad triangular

$$\delta_A(x) \le d(x,a) \le d(x,y) + \underline{\underline{d(y,a)}}$$

Tomando ínfimo cuando $a \in A$ en la desigualdad $\delta_A(x) \le d(x,y) + d(y,a)$ se tiene que $\delta_A(x) \le d(x,y) + \delta_A(y)$.
Cambiando el papel de x,y tendríamos que $\delta_A(y) \le d(x,y) + \delta_A(x)$

$$-d(x,y) \le \delta_A(x) - \delta_A(y) \le d(x,y)$$

$$\uparrow \ \delta_A(y) - \delta_A(x) \le d(x,y)$$

$$\times(-1)$$

$$|\delta_A(x) - \delta_A(y)| \le d(x,y).$$

Por tanto, δ_A es lipschitziana con $K=1$. ∎

8. $X = U \cup V \quad U, V \in T. \quad (Y, T')$

$f : (X, T) \to (Y, T') \qquad f|_U = f \circ i_U : (U, T_U) \to (Y, T')$

$f|_V = f \circ i_V : (V, T_V) \to (Y, T')$

f continua $\Leftrightarrow$ $f|_U, f|_V$ son continuas.

$\Rightarrow$) trivial porque $f|_U = f \circ i_U$ es composición de aplicaciones continuas. Análogamente para $f|_V$.

$\Leftarrow$ Sea $\underline{W' \in T'}$ $\quad f^{-1}(W') = \{x \in X : f(x) \in W'\}$

$U \cup V = X \longrightarrow \quad = \{x \in U : f(x) \in W'\} \cup \{x \in V : f(x) \in W'\}$

$= \underset{\in T_U}{f|_U^{-1}(W')} \cup \underset{\in T_V}{f|_V^{-1}(W')}$

$\underset{\in T_U}{f|_U^{-1}(W')} = A \cap U$, con $A \in T$. Como $U \in T$, $A \cap U \in T$

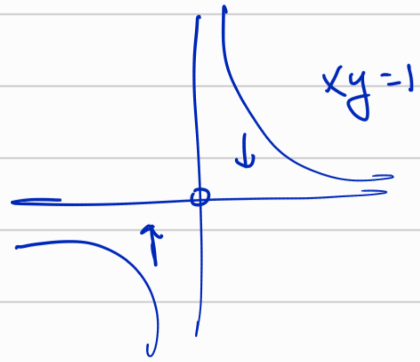
$\Rightarrow f|_U^{-1}(W') \in T$.

Análogamente $f|_V^{-1}(W') \in T$. Entonces

$$f^{-1}(W') = f|_U^{-1}(W') \cup f|_V^{-1}(W') \in T.$$

9. Proyecciones no son cerradas.

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=1\}$



A es cerrado en $(\mathbb{R}^2, T_u)$ pero $\pi_1(A)$ no es cerrado.

$\pi_1(A)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ no es cerrado en $(\mathbb{R},T_u)$ $\quad 0\in\overline{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$.

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (\pi_1\cdot\pi_2)(x,y)=1\} = (\pi_1\cdot\pi_2)^{-1}(\{1\})$$

$\pi_1\cdot\pi_2$ es el producto de las aplicaciones π_1,π_2. Por el ejercicio 3, $\pi_1\cdot\pi_2:(\mathbb{R}^2,T_u)\to(\mathbb{R},T_u)$ es continua y $\{1\}$ es cerrado de $(\mathbb{R},T_u)$.

$A=(\pi_1\cdot\pi_2)^{-1}(\{1\})$ es cerrado por ser la preimagen de un conjunto cerrado por una aplicación continua.

(¿ $B=\{(x,y): y=2x\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}^2,T_u)$? $\quad B=\underbrace{(\pi_2-2\pi_1)}_{\text{continua}}{}^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{cerrado}})$)

10. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monótona, estrictamente creciente y continua. Probar que f es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $f(\mathbb{R})$. ($f(x)=e^x$ no es sobreyectiva $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$).

Si f es estrictamente creciente ($x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$) entonces es inyectiva.

Sabemos que f es continua.

Vamos a probar que f es abierta. Sea $(a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abto.

Veamos que:

$$f((a,b)) = (f(a), f(b)).$$

Si $x \in f((a,b))$, existe $z \in (a,b)$ tal que $a<z<b$ y $f(z)=x$. Entonces $f(a)<f(z)<f(b)$. Por tanto, $f(z) \in (f(a), f(b))$. $\Rightarrow x \in (f(a), f(b))$. Entonces $f((a,b)) \subset (f(a), f(b))$.

Sea $z \in (f(a), f(b))$. Entonces $f(a) < z < f(b)$. Por el teorema del valor intermedio aplicado a $f|_{[a,b]} : [a,b] \to \mathbb{R}$, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = z$. El punto x tiene que ser $\neq a$ porque $f(a) < f(x) = z$. De la misma forma $x \neq b$. Por tanto, $x \in (a,b)$.

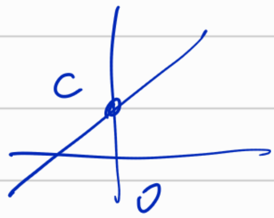
<u>Nota</u>: si f es estrictamente decreciente, también es cierta la propiedad. Solo hay que probar que $f((a,b)) = (f(b), f(a))$.

<u>Nota</u>: si $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ es estrictamente creciente (o decreciente) y continua, entonces es un homeomorfismo. Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces $f|_A : A \to f(A)$ es biyectiva, continua y abierta. Por tanto, $f|_A : A \to f(A)$ es también un homeomorfismo en las topologías inducidas.

11. (a,b), $(-\infty, c)$, $(d, +\infty)$, $\mathbb{R}$ son homeomorfos.

$f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ $\quad f(x) = e^x$ continua y estrictamente creciente.
Por tanto, es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

$\tilde{f}: (0,+\infty) \to (c,+\infty)$ $\qquad f(x) = x + c.$



$f(x)$ es continua, estrictamente creciente

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f} = f|_{(0,+\infty)}$ es un homeomorfismo de $(0,+\infty)$ en $f(0,+\infty) = (c,+\infty)$

$$\mathbb{R} \cong (0,+\infty) \cong (c,+\infty)$$

- $(c,+\infty)$ y $(-\infty, d)$ son homeomorfos.

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (c+d) - x$. f es continua, y estrictamente decreciente. Además si $x > c$ $(x \in (c,+\infty))$, entonces

$c - x < 0$

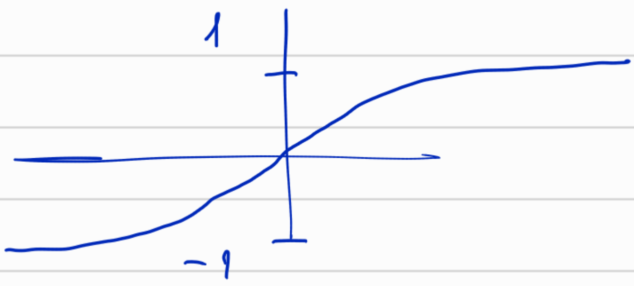
$$f(x) = c - d - x = (c - x) + d$$
$$< +d$$
$$\Rightarrow f(x) \in (-\infty, d)$$

f es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $f((c,+\infty)) = (-\infty, d)$. $\Rightarrow$ $f|_{(c,+\infty)}$ es un homeomorfismo de $(c,+\infty)$ en $f((c,+\infty)) = (-\infty, d)$.

$$(c,+\infty) \cong (-\infty, d).$$

- $f(x) = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ estrictamente creciente

continua, y $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$

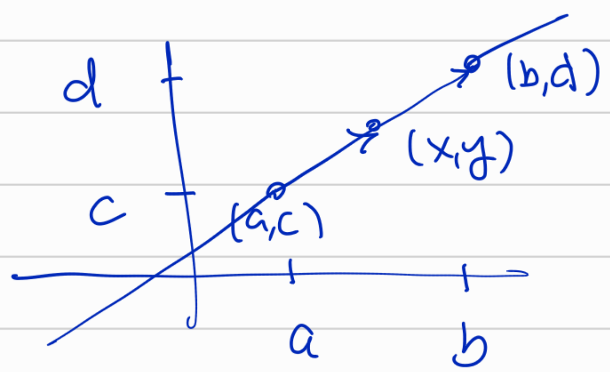


Por 10, $\mathbb{R} \cong (-1,1)$.

En vez de $\tanh(x)$ podéis tomar $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = g(x)$

$g: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y continua. Por 10, su aplicación inversa $g^{-1}(x) = \arctan(x)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Para terminar vamos que (a,b) y (c,d) son homeomorfismos.



$$\frac{y-c}{d-c} = \frac{x-a}{b-a} \qquad y-c = \frac{b-a}{d-c}\cdot(x-a)$$

$$f(x) = c + \frac{b-a}{d-c}\cdot(x-a) \qquad a<b \quad c<d.$$

> 0

$f((a,b)) = (c,d)$

- f es estrictamente creciente y continua $\Rightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeom.
- $f|_{(a,b)}: (a,b) \to (c,d)$ es homeomorfismo.

$$(a,b) \cong (-1,+1) \cong \mathbb{R} \cong (0,+\infty) \cong (c,+\infty) \cong (-\infty,d)$$

12. $\mathbb{R}^n$ $\quad t_v(x) = x + v$. $\quad t_v$ es lipschitziana $\Rightarrow t_v$ continua

$$d(t_v(x), t_v(y)) = \| t_v(x) - t_v(y) \| = \| (x+v) - (y+v) \|$$
$$= \| x - y \| = d(x,y)$$

$(t_v)^{-1} = t_{-v}$ es otra traslación. Por tanto t_v^{-1} es continua.

t_v es biyectiva, continua, y su inversa continua. Por tanto, t_v es un homeomorfismo.

17.