12/11/2020

$(X_1,T_1),\dots,(X_k,T_k) \rightsquigarrow (X_1\times\dots\times X_k,\ T_1\times\dots\times T_k)$

$\pi_i : X_1\times\dots\times X_k \to X_i$ continuas

$$\begin{tikzcd}
(Z,T') \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_i\circ f"'] & (X_1\times\dots\times X_k,\ T_1\times\dots\times T_k) \arrow[d, "\pi_i"] \\
 & (X_i,T_i)
\end{tikzcd}$$

f continua $\iff$ $\pi_i\circ f$ continua.

<u>Ejemplo:</u> $(X_1,d_1),\dots,(X_k,d_k)$ $\quad T_{d_1},\dots,T_{d_k}$

¿ $(X_1\times\dots\times X_k,\ T_{d_1}\times\dots\times T_{d_k})$ es metrizable ?

Si $x=(x_1,\dots,x_k)$, $y=(y_1,\dots,y_k)$, definimos

$$\left.\begin{aligned}
d_\infty(x,y) &= \max\{d_i(x_i,y_i) : i\in\{1,\dots,k\}\}\\
d_1(x,y) &= d_1(x_1,y_1)+\dots+d_k(x_k,y_k)\\
d_2(x,y) &= \left(d_1(x_1,y_1)^2+\dots+d_k(x_k,y_k)^2\right)^{1/2}
\end{aligned}\right\}\ \text{distancias en } X_1\times\dots\times X_k$$

d_1, d_2, d_∞ son equivalentes.

$$d_1 \le \sqrt{k}\cdot d_2 \le k\cdot d_\infty \le k\cdot d_1$$

Por tanto d_1, d_2, d_∞ generan la misma topología.

Sea $x=(x_1,\dots,x_k)\in X_1\times\dots\times X_k$ y sea $r>0$.

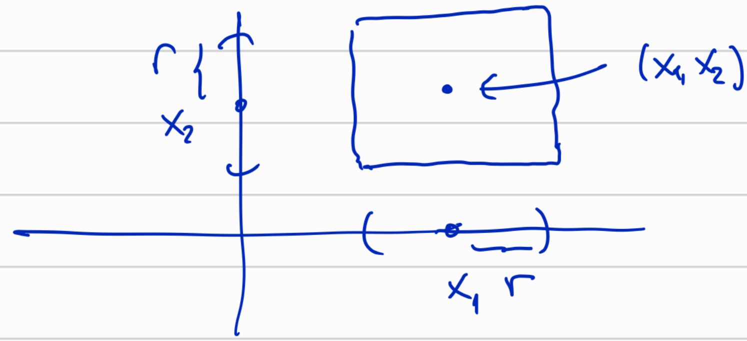
$$B_{d_\infty}(x,r) = \{y \in \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k : d_\infty(x,y) < r\}$$

$\forall i \in \{1,\dots,k\}$ $\quad B_{d_i}(x_i,r) = \{y_i \in \mathbb{X}_i : d_i(x_i,y_i) < r\}$

Veamos que:

$$B_{d_\infty}(x,r) = B_{d_1}(x_1,r) \times \dots \times B_{d_k}(x_k,r_k) \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} y \in B_{d_\infty}(x,r) &\iff d_\infty(x,y) < r \iff d_i(x_i,y_i) < r \ \forall i \in \{1,\dots,k\} \\ &\iff y_i \in B_{d_i}(x_i,r) \ \forall i \in \{1,\dots,d\} \\ &\iff y = (y_1,\dots,y_k) \in B_{d_1}(x_1,r) \times \dots \times B_{d_k}(x_k,r_k) \end{aligned}$$



Vamos a utilizar esta propiedad para probar que la topología en $\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k$ asociada a d_∞, T_{d_∞}, es igual a la topología producto $T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$.

Sea $U \in T_{d_\infty}$. $\Rightarrow \forall x \in U$, $\exists r > 0$ tal que $B_{d_\infty}(x,r) \subset U$

$$\Rightarrow \underbrace{B_{d_1}(x_1,r)}_{\in T_{d_1}} \times \dots \times \underbrace{B_{d_k}(x_k,r)}_{\in T_{d_k}} = B_{d_\infty}(x,r) \subset U.$$

Si $B_x = B_{d_1}(x_1,r) \times \dots \times B_{d_k}(x_k,r)$, entonces $B_x \in T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$
Hemos probado que, $\forall x \in U$, $\exists B_x \in T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Entonces

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x \in T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}.$$

Acabamos $T_{d_\infty} \subset T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$

Para probar la inclusión opuesta tomamos $V \in T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$. Sea $x \in V$, $x = (x_1, \dots, x_k)$. Como $\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_k : U_i \in T_i \ \forall i\}$ es base de $T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$, existen $U_1, \dots, U_k$ ($U_i \in T_i \ \forall i$) tales que

$$x \in U_1 \times \dots \times U_k \subset V$$

Por tanto $x_i \in U_i \ \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Como $U_i \in T_{d_i}$, y las bolas abiertas en X_i forman base de T_i, existe $r_i > 0$ tal que

$$B_{d_i}(x_i, r_i) \subset U_i$$

$\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Sea $r = \min\{r_1, \dots, r_k\} > 0$. Se tiene $B_{d_i}(x_i, r) \subset B_{d_i}(x_i, r_i)$
Por tanto

$$B_{d_\infty}(x,r) = B_{d_1}(x_1,r) \times \dots \times B_{d_k}(x_k,r) \subset B_{d_1}(x_1,r_1) \times \dots \times B_{d_k}(x_k,r_k)$$
$$\subset U_1 \times \dots \times U_k \subset V.$$

Si llamamos $\underline{r_x = r}$, hemos probado que para cada $x \in V$, existe $r_x > 0$ tal que

$$B_{d_\infty}(x, r_x) \subset V$$

Esto implica que

$$V = \bigcup_{x \in V} \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{T}_{d_\infty}}}{B_{d_\infty}(x, r_x)} \in \mathcal{T}_{d_\infty}$$

Esto significa que $\mathcal{T}_{d_1} \times \dots \times \mathcal{T}_{d_k} \subset \mathcal{T}_{d_\infty}$

Por tanto $\mathcal{T}_{d_1} \times \dots \times \mathcal{T}_{d_k} = \mathcal{T}_{d_\infty}$ y $X_1 \times \dots \times X_k$ es metrizable ∎

<u>Ejemplo</u>: En $\mathbb{R}^n$ la topología asociada a $\|\cdot\|_2$ es la topología usual, generalmente denotada por $\mathcal{T}_u$. A veces, cuando sea necesario indicar que es la topología usual de $\mathbb{R}^n$, la denotaremos por $\mathcal{T}_u^n$.

$\mathcal{T}_u^n$ es la top. asociada a $\|\cdot\|_2$ o a cualquier distancia equivalente, p.e. $\|\cdot\|_\infty$ o $\|\cdot\|_1$.

Si en $\mathbb{R}$ tomamos la distancia usual $d(x,y) = |y-x|$, y $\underline{\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_u^1}$ entonces

$$\mathcal{T}_u^k = \mathcal{T}_{d_\infty} = \mathcal{T}_d \times \dots \times \mathcal{T}_d = \mathcal{T}_u^1 \times \dots \times \mathcal{T}_u^1$$

$d_\infty((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = \max\{d(x_i, y_i) : i \in \{1, \dots, k\}\}$ es la distancia ∞ en $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d_\infty((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) &= \max\{d(x_i, y_i) ; i \in \{1, \dots, k\}\} \\ &= \max\{|x_i - y_i|, i \in \{1, \dots, k\}\} \end{aligned}$$

es equivalente a la distancia Euclídea en $\mathbb{R}^k \Rightarrow \mathcal{T}_{d_\infty} = \mathcal{T}_u^k$

$$T_u^K = T_u^1 \times \cdots \times T_u^1$$

La topología usual de $\mathbb{R}^K$, T_u^K, es la topologíc producto $T_u^1 \times \cdots \times T_u^1$ donde T_u^1 es la top. usual de $\mathbb{R}$.

<u>Ejercicio:</u> Sean $(X_1, T_1), \ldots, (X_K, T_K)$ e.top. $K \geq 2$. Consideramos

$$(X_1 \times \cdots \times X_K, T_1 \times \cdots \times T_K)$$

Tomamos $(X_1 \times \cdots \times X_{K-1}, T_1 \times \cdots \times T_{K-1})$, (X_K, T_K) y calculamos su espacio producto topológico.

$$((X_1 \times \cdots \times X_{K-1}) \times X_K, (T_1 \times \cdots \times T_{K-1}) \times T_K)$$

Consideramos la aplicación $f: X_1 \times \cdots \times X_K \to (X_1 \times \cdots \times X_{K-1}) \times X_K$ definida por:

$$f((x_1, \ldots, x_{K-1}, x_K)) = ((x_1, \ldots, x_{K-1}), x_K)$$

La aplicación f es biyectiva. Probar que es un homeomorfismo.

<u>Propiedad:</u> Sean $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_K$ bases de $(X_1, T_1), \ldots, (X_K, T_K)$. Entonces $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_K$ es una base de $(X_1 \times \cdots \times X_K, T_1 \times \cdots \times T_K)$.

<u>Dem:</u> Sea $U \in T_1 \times \cdots \times T_K$. Sea $x \in U$. Como $\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_K : U_i \in T_i, i = 1, \ldots, K\}$ es base de $T_1 \times \cdots \times T_K$, existen $U_1 \in T_1, \ldots, U_K \in T_K$ tales que

$$x \in U_1 \times \cdots \times U_K \subset U$$

$\Rightarrow$ si $x = (x_1, \ldots, x_K)$, entonces $\underline{x_i} \in \underline{U_i}$ $\forall i$. Como $\mathcal{B}_i$ es base de T_i

existe $B_i \in \mathcal{B}_i$ tal que $x_i \in B_i \subset U_i$ $\forall i$. Entonces

$$x = (x_1, \dots, x_k) \in \underbrace{B_1 \times \dots \times B_k}_{} \subset U_1 \times \dots \times U_k \subset U$$

Llamamos $B_x = B_1 \times \dots \times B_k$. Hemos probado que, dado $U \in T_1 \times \dots \times T_k$, y $x \in U$, existe $B_x \in \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_k$ tal que $x \in B_x \subset U$. Esto implica que:

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x$$

$\Rightarrow$ U es unión de elementos de $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_k$. Por tanto $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_k$ es base de $T_1 \times \dots \times T_k$ $\blacksquare$