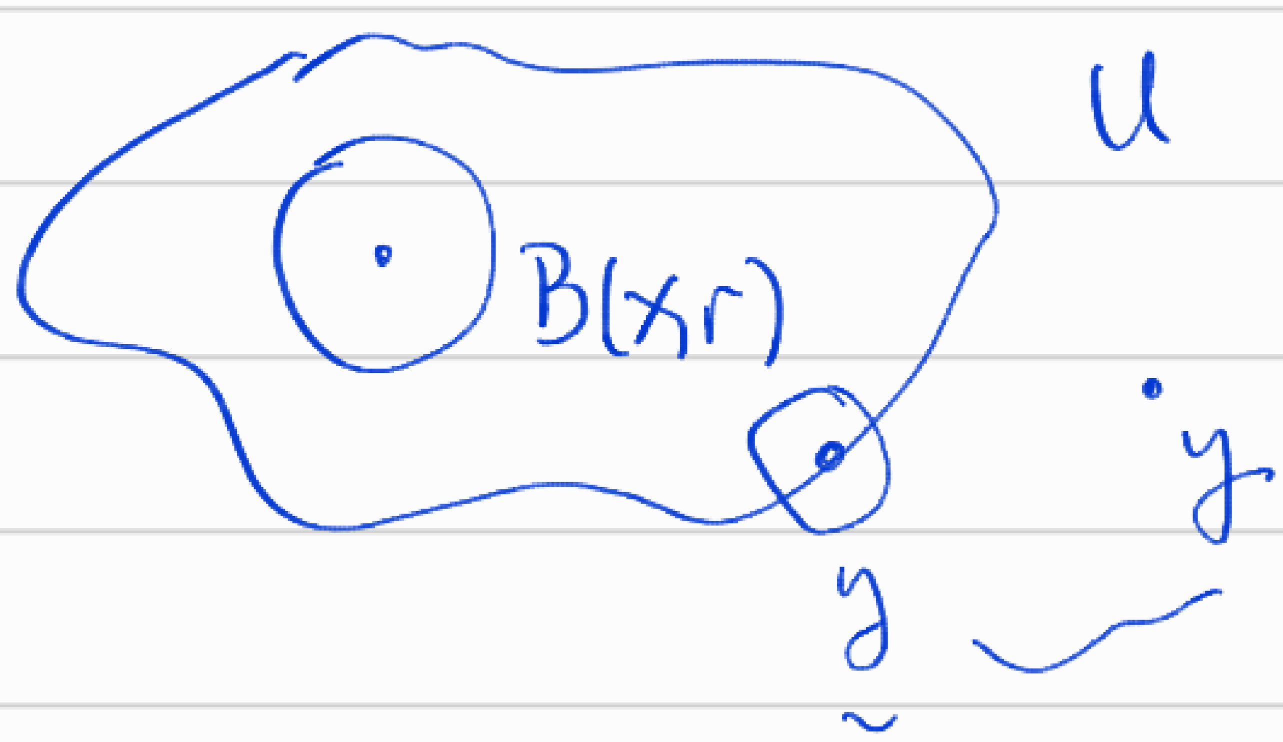
25/09/2020

Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que $A\subset X$ es abierto si $\forall a\in A$, $\exists r>0$ (depende de a) tal que $B(a,r)\subset X$

$A=\emptyset$ es abto. por convenio

Def: Sea (X,d) un e. métrico, $C\subset X$ es cerrado si su complementario $X\setminus C$ es abierto

Def: Sea (X,d) un e. métrico, $x\in X$. Diremos que un conjunto U es entorno de x si $\exists r>0$ tal que $B(x,r)\subset U$.

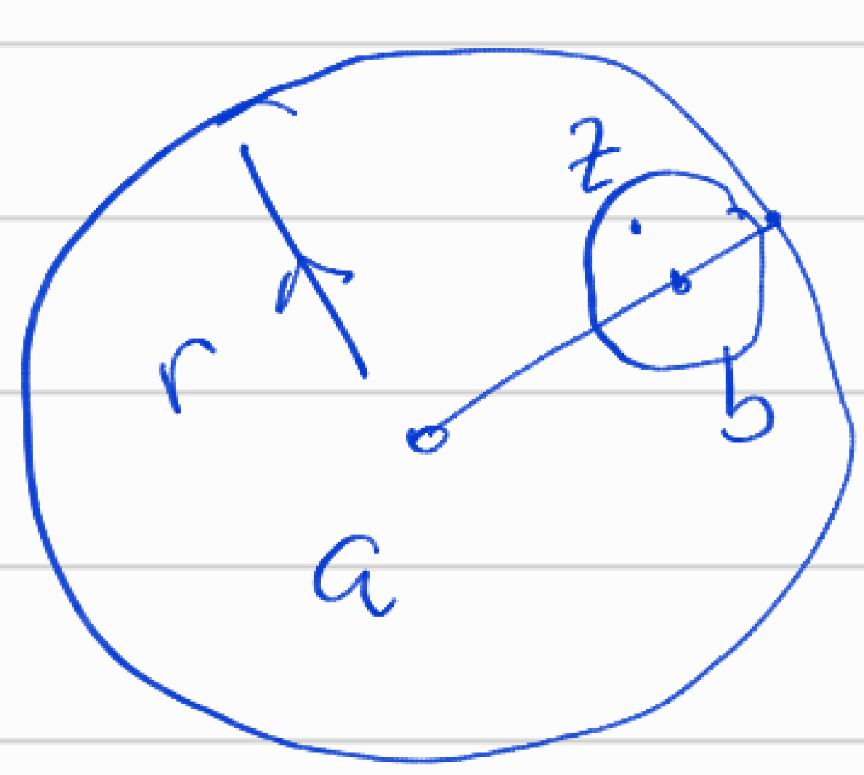


$x\in B(x,r)\subset U$

U no entorno de y

Propiedad: una bola abierta en un espacio métrico es un conjunto abierto.

Dem: sea $B(a,r)$ una bola en (X,d). Sea $b\in B(a,r)$. Queremos encontrar $s>0$ tal que $B(b,s)\subset B(a,r)$



Tomamos $s = r - d(a,b) > 0$ $\quad (d(a,b) < r \iff b \in B(a,r))$. Comprobamos que $B(b,s) \subset B(a,r)$. Tomamos $z \in B(b,s)$ $(d(z,b) < s)$. Para comprobar que $z \in B(a,r)$ calculamos $d(z,a)$

$$d(z,a) \leq d(z,b) + d(a,b) < s + d(a,b) = (r - d(a,b)) + d(a,b) = r$$

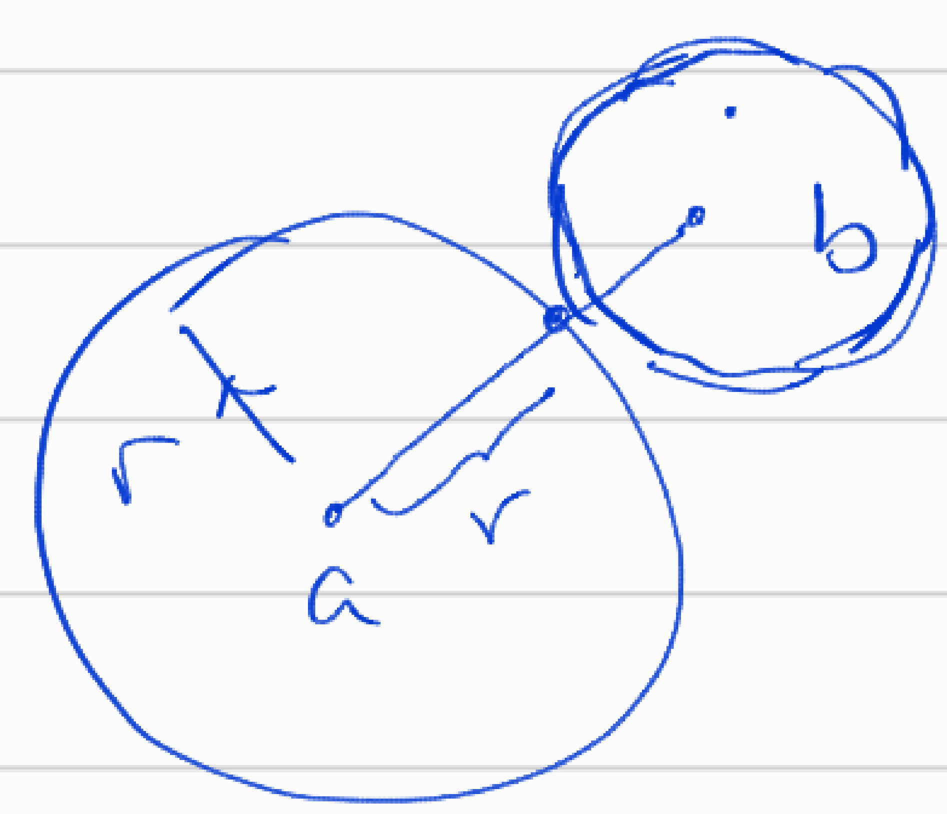
$\Rightarrow z \in B(a,r)$

Como z es arbitrario, $B(b,s) \subset B(a,r)$. Como $b \in B(a,r)$ es arbitrario, tenemos $B(a,r)$ es un conjunto abierto.

Propiedad: Una bola en un espacio métrico es un conjunto cerrado.

Dem: $\bar{B}(a,r) \subset X$. (X,d) e. métrico. Veamos que $X \setminus \bar{B}(a,r)$ es un conjunto abierto. $\bar{B}(a,r) = \{x \in X \,/\, d(a,x) \leq r\} \Rightarrow X \setminus \bar{B}(a,r) = \{x \in X \,/\, d(x,a) > r\}$

Queremos ver que $X \setminus \bar{B}(a,r)$ es abierto.
Tomamos $b \in X \setminus \bar{B}(a,r)$ $(d(a,b) > r)$
Definimos $s = d(a,b) - r > 0$. Vamos a comprobar que $B(b,s) \subset X \setminus \bar{B}(a,r)$. Sea $x \in B(b,s)$ $(d(x,b) < s)$. Comprobamos que $x \in X \setminus \bar{B}(a,r)$ $(d(x,a) > r)$.



$$\rightarrow d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < d(a,x) + s$$

$$\Rightarrow \quad r = d(a,b) - s < d(a,x)$$

Como $x \in B(b,s)$ es arbitrario, $B(b,s) \subset X \setminus \bar{B}(a,r)$

Como $b \in \mathbb{X} \setminus \bar{B}(a,r)$ es arbitrario, entonces $\mathbb{X} \setminus \bar{B}(a,r)$ es abierto $\Rightarrow$ $\bar{B}(a,r)$ es cerrado.

<u>Ejercicio:</u> 1. Los conjuntos formados por un punto son cerrados en un espacio métrico.

2. $S(a,r) = \bar{B}(a,r) \setminus B(a,r)$ es un conjunto cerrado.

<u>Ejemplo:</u> sea $\mathbb{X}$ un conjunto no vacío y d la distancia discreta.

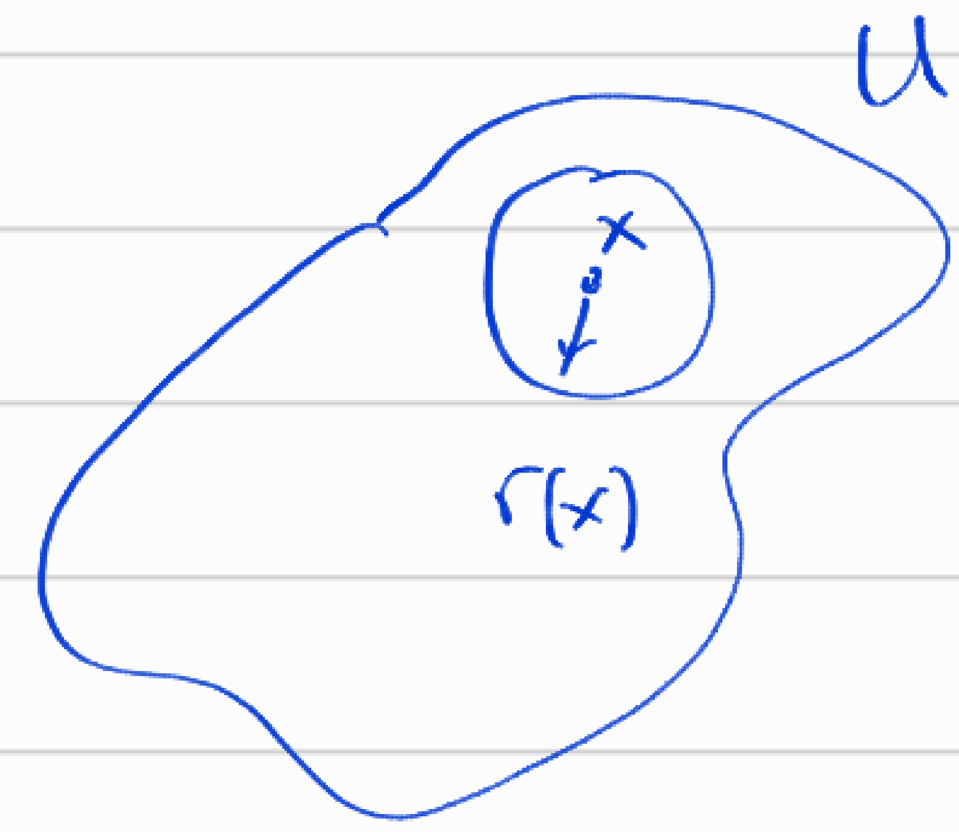
Sea $U \subset \mathbb{X}$ un conjunto arbitrario, $U \neq \phi$, $x \in U$. ¿$\exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$? Tomando $r \in (0,1]$, $B(x,r) = \{x\}$

$$x \in B(x,r) = \{x\} \subset U.$$

Como $x \in U$ es arbitrario $\Rightarrow$ U es abierto.

En un espacio métrico discreto, todos los conjuntos son abiertos. Como los conjuntos cerrados son los complementarios de los conjuntos abiertos, todos los conjuntos son cerrados

<u>Proposición:</u> Sea $(\mathbb{X}, d)$ un e. métrico, $U \subset \mathbb{X}$ abierto no vacío. Entonces U es unión de bolas abiertas.



<u>Dem:</u> $\forall x \in U$, existe $r(x) > 0$ tal que

$$B(x, r(x)) \subset U$$

Así obtenemos la familia $\{B(x,r(x)) \,/\, x\in U\}$

$$B(x,r(x))\subset U \quad \forall x\in U \Rightarrow \boxed{\bigcup_{x\in U} B(x,r(x))\subset U}$$

Si $z\in U \Rightarrow z\in B(z,r(z))\subset \bigcup_{x\in U} B(x,r(x)) \Rightarrow$ $\boxed{U\subset \bigcup_{x\in U} B(x,r(x))}$

z arbitrario

Por tanto: $$U=\bigcup_{x\in U} B(x,r(x))$$ □

Pregunta: ¿Es todo conjunto abierto de (X,d) unión de bolas cerradas? SÍ

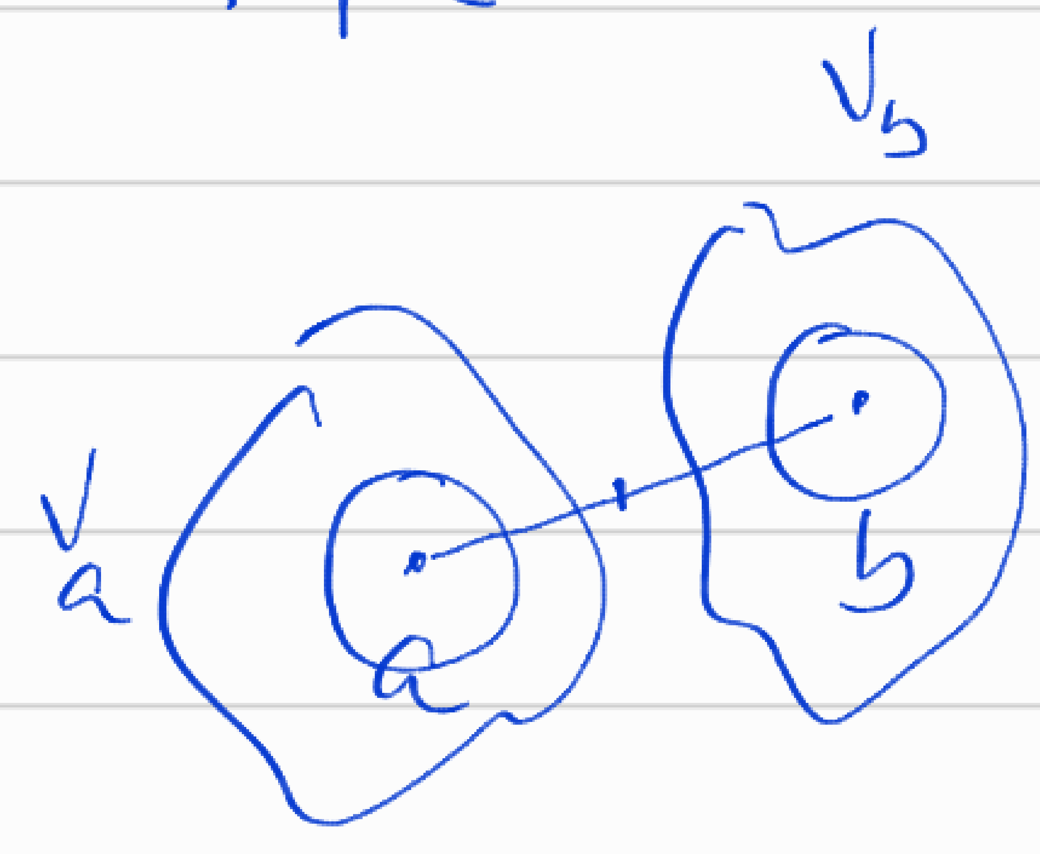
Sea U abto. Sea $x\in U$. Existe $r(x)>0$ tal que $B(x,r(x))\subset U$

$$\bar{B}\left(x,\frac{r(x)}{2}\right)\subset B(x,r(x))\subset U$$

Se puede probar que: $$\boxed{U=\bigcup_{x\in U}\bar{B}\left(x,\frac{r(x)}{2}\right).}$$

Proposición: sea (X,d) un espacio métrico; sean $a,b\in X$, $a\neq b$. Existen entornos V_a, V_b de a,b, respectivamente, tales que $V_a\cap V_b=\emptyset$

Dem: (V_x es entorno de x si $\exists\, r>0$ tal que $B(x,r)\subset V_x$)



Las bolas abiertas que contienen a x son entornos de x ($x \in B(a,s)$. Sabemos que $\exists\, r > 0 \,/\, B(x,r) \subset B(a,s)$)

Hemos probado que las bolas abiertas son entorno de cada uno de sus puntos

Sea $r = d(a,b) > 0$ $(a \neq b)$. Tomamos $V_a = B(a, \frac{r}{2})$, $V_b = B(b, \frac{r}{2})$

Veamos que $V_a \cap V_b = \phi$. Supongamos que no lo es: sea $x \in V_a \cap V_b$

$x \in V_a = B(a, r/2) \Rightarrow d(x,a) < r/2$
$x \in V_b = B(b, r/2) \Rightarrow d(x,b) < r/2$

$$r = d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \quad !!$$

Esta contradicción viene de suponer que $V_a \cap V_b \neq \phi$. Por tanto $V_a \cap V_b = \phi$ $\square$

HAUSDORFF