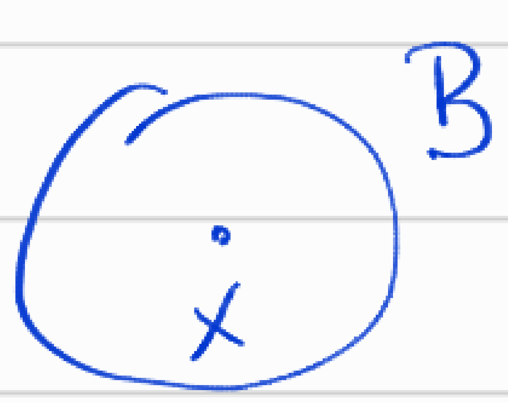
2/10/2020

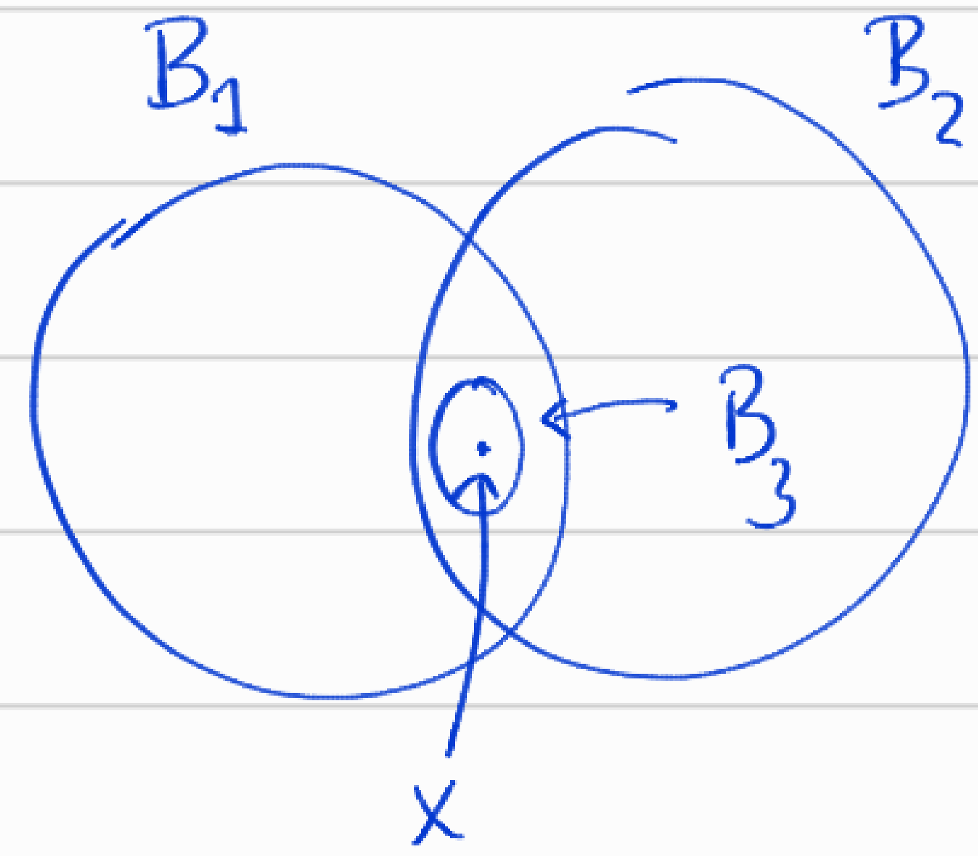
Sea (X,T) un espacio topológico. Una base $\mathcal{B}$ es una colección de conjuntos abiertos $\underline{\mathcal{B} \subset T}$ tal que todo $U \in T$ se puede expresar como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

<u>Ejemplo</u>: Bolas abiertas en (X,d)

<u>Propiedades</u>: Sea (X,T) e.top., $\mathcal{B}$ base de T. Entonces:

1. $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$
2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$





1. $x \in \underline{X \text{ abierto}} \Rightarrow X = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ tal que $\underline{x \in B_{i_0}} = B$.

2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subset T \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in T \xRightarrow[\mathcal{B}\text{ base}]{} x \in B_1 \cup B_2 = \bigcup_{j \in J} B_j \Rightarrow \exists\, j_0 \in J$ tal que $x \in B_{j_0} \subset \bigcup_{j \in J} B_j = B_1 \cap B_2$. Tomando $B_3 = B_{j_0}$ hemos terminado de demostrar la propiedad.

$X \neq \emptyset$ conjunto. Vamos a poner una familia $\mathcal{B}$ de tal modo que $\mathcal{B}$ sea la base de una topología.

<u>Teorema:</u> Sea $X \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{B} \subset P(X)$ tal que

1. $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces la familia

$$T := \{ U \subset X : \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ con } x \in B \subset U \} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología en X y $\mathcal{B}$ es base de T.

<u>Dem:</u> Veamos que T es topología en X

1. $\emptyset \in T$. $X \in T$ (por la propiedad 1: $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ / $x \in B \subset X$)
2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T$. Veamos que $\bigcup_{i \in I} U_i \in T$. Para ello tomamos $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ arbitrario. $\exists i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0} \in T$. Por la definición de T, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T$

3. $U_1, U_2 \in T$. Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$. Si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, tomamos $x \in U_1 \cap U_2$ arbitrario. Existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in B_1 \subset U_1$, $x \in B_2 \subset U_2 \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Por (2), $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$$

$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$.

Sean $U_1, \dots, U_k \in T$. Supongamos que, por inducción, $U_1 \cap \dots \cap U_{k-1} \in T$

$$U_1\cap\dots\cap U_K = \underbrace{(U_1\cap\dots\cap U_{K-1})}_{\in\, T \text{ (inducción)}}\cap \underbrace{U_K}_{\in\, T} \in T.$$

Queremos probar, por último, que $\mathcal{B}$ es base de T. Sea $U\in T$, $U\neq\emptyset$. Por definición de T, para todo $x\in U$, existe $B_x\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B_x\subset U$. Entonces:

$$U=\bigcup_{x\in U} B_x$$

$$\left.\begin{array}{l} B_x\subset U \ \forall x\in U \Rightarrow \bigcup_{x\in U} B_x \subset U \\ \equiv \\ z\in U \Rightarrow z\in B_z\subset \bigcup_{x\in U} B_x \Rightarrow U\subset \bigcup_{x\in U} B_x \\ \equiv \end{array}\right\} \Rightarrow U=\bigcup_{x\in U} B_x$$

Nota: Sea X un conjunto, T_1, T_2 dos topologías en X. Supongamos que $\mathcal{B}$ es base de T_1 y T_2. Entonces $T_1=T_2$.

$$\left.\underbrace{U\in T_1}\ \ U\neq\emptyset \underset{\mathcal{B}\text{ base } T_1}{\Rightarrow} U=\bigcup_{i\in I} B_i \underset{\substack{B_i\in T_2\ (\mathcal{B}\subset T_2)\\ \equiv}}{\Rightarrow} \underbrace{U\in T_2}\ \right| \Rightarrow T_1\subset T_2$$

Aplicando el mismo argumento a $U\in T_2$, probamos que $T_2\subset T_1$. Por tanto, $T_1=T_2$.

Nota: en el teorema anterior, T es única porque $\mathcal{B}$ solo puede ser base de una topología.

Ejemplos: 1. Topología límite inferior o topología de Sorgenfrey

En $\mathbb{R}$ tomamos $\mathcal{B} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$

$\mathcal{B}$ es base de una topología (única) en $\mathbb{R}$, T_S

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\quad x \in [x, x+1) \in \mathcal{B}$
2. $\underbrace{[a_1,b_1)}_{B_1}, \underbrace{[a_2,b_2)}_{B_2} \in \mathcal{B}$. Sea $x \in [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$. Queremos encontrar

$B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

$x \in [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2) \qquad a_1 \leq x < b_1 \qquad a_2 \leq x < b_2$

$$a_3 = \max(a_1,a_2) \leq x < \min(b_1,b_2) = b_3$$

$[a_1,b_1) \cap [a_2,b_2) = [a_3,b_3)$

En $\mathcal{B}$, $\quad B_1 \cap B_2 = B_3 \in \mathcal{B} \implies x \in B_3 = B_1 \cap B_2$

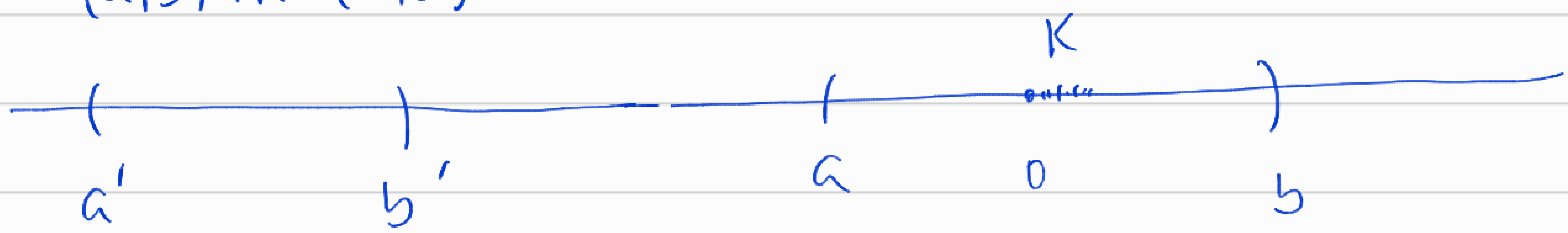
Veremos que $T_S \neq T$

Ejemplo: (Topología de Kuratowski) $\quad K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

En $\mathbb{R}$, definimos $\mathcal{B} = \{(a,b) \setminus K : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\} \cup$

$$\cup\ \{(a,b) : a<b\} \cup \{\emptyset\}$$

$(a',b')\setminus K = (a',b')$



$\mathcal{B}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$ que denotaremos por T_K.

El próximo día compararemos T_S, T_K con la topología usual de $\mathbb{R}$ asociada a la distancia $d(x,y)=|x-y|$