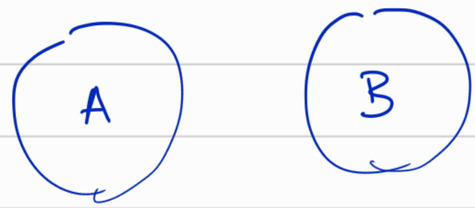
26/11/2020

TEMA 3. CONEXIÓN Y COMPACIDAD

ESPACIOS CONEXOS

Def: un e.top. (X,T) es conexo si no existen dos abiertos $A, B \in T$ tales que: 1) $A,B \neq \emptyset$; 2) $A\cup B = X$; 3) $A\cap B=\emptyset$

X



no conexo

Ejemplo: $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, (T_u)_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})$ no es conexo

$\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. $A=(-\infty,0)$, $B=(0,+\infty)$, $A,B\neq\emptyset$

$A\cup B = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$A\cap B=\emptyset$

$A = [-\infty,0]\cap(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

$\Rightarrow A \in \mathcal{C}_{(T_u)_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}}$

Análogamente para B

$A\in (T_u)_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Leftarrow A = \underset{\substack{\Uparrow \\ T_u}}{(-\infty,0)} \cap (\mathbb{R}\setminus\{0\})$

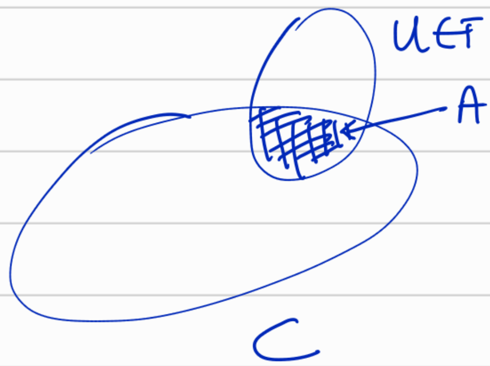
$B\in (T_u)_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Leftarrow B = \underset{\substack{\Uparrow \\ T_u}}{(0,+\infty)} \cap (\mathbb{R}\setminus\{0\})$

Informalmente, (X,T) es conexo si no se puede expresar como unión de conjuntos abiertos disjuntos.

Nota: si $X = A\cup B$ con $A\cap B=\phi$, entonces $A = X\setminus B$ y $B = X\setminus A$. Si $A,B\in T$, entonces $A,B\in G$. Por tanto, en la definición de espacio conexo podemos cambiar abiertos por cerrados. Es decir, un espacio es conexo si no existen dos cerrados F,G tales que 1) $F,G\neq\phi$; 2) $X=F\cup G$; 3) $F\cap G=\phi$.

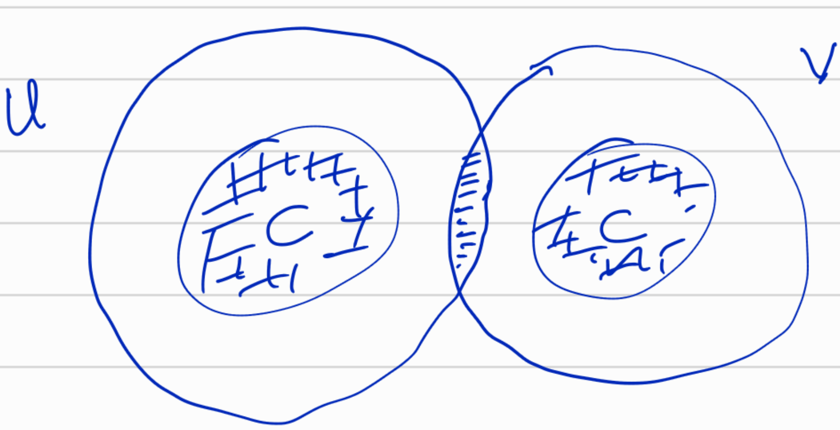
Def: diremos que un subconjunto C de un e. top. (X,T) es conexo si (C,T_C) es conexo.

Si (C,T_C) es conexo $\Rightarrow$ no existen $A,B\in T_C$ tales que $A,B\neq\phi$; $A\cup B=C$; $A\cap B=\phi$. Cualquier $A\in T_C$ es de la forma $U\cap C$, con $U\in T$; además $B\in T_C$ es de la forma $V\cap C$, con $V\in T$.



Si (C,T_C) no es conexo, existen $A,B\in T_C$ tales que $A,B\neq\phi$; $A\cup B=C$; $A\cap B=\phi$. Como $A=U\cap C$, $B=V\cap C$ con $U,V\in T$, entonces.

1. $U\cap C, V\cap C\neq\phi$
2. $(U\cup C)\cup(V\cup C)=C \iff (U\cup V)\cap C=C \iff C\subset U\cup V$.
3. $(U\cap C)\cap(V\cap C)=\phi \iff (U\cap V)\cap C=\phi$

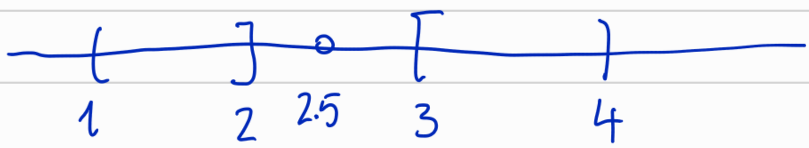


U, V cumplen 1,2,3

Por tanto, (C, T_C) es no conexo si existen $U, V \in T$ tales que 1, 2, 3 se verifican.

Además, (C, T_C) es conexo si no existen $U, V \in T$ tales que 1, 2, 3 se verifican.

Ejemplo: $C = (1,2] \cup [3,4)$ no es subconjunto conexo de $(\mathbb{R}, T_u)$.



$U = (-\infty, 2'5)$, $V = (2'5, +\infty)$ $\in T_u$ y verifican

1. $U \cap C = (1,2] \neq \phi$, $V \cap C = [3,4) \neq \phi$
2. $C = (1,2] \cup [3,4) \subset U \cup V$
3. $U \cap V = \phi \Rightarrow U \cap V \cap C = \phi$

Entonces C no es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R}, T_u)$.

Ejemplos: 1. (X, T_t) $T_t = \{\phi, X\}$. El conjunto (X, T_t) es conexo (no hay dos abiertos no vacíos y distintos en T_t)

2. (X, T_D). Si $\# X = 1 \Rightarrow T_D = \{\phi, X\} = T_t \Rightarrow (X, T_D)$ es conexo.
Si $\# X \geq 2$. Tomamos $x, y \in X$, $x \neq y$. $A = \{x\}$, $B = X \setminus \{x\}$. Entonces $A, B \in T_D$; $x \in A$, $y \in B \Rightarrow A, B \neq \phi$; $A \cup B = X$; $A \cap B = \phi$. Entonces (X, T_D) no es conexo.

Un espacio topológico con la topología discreta es conexo si y solo si tiene un único punto.

3. $(\mathbb{N}, T_{CF})$ es conexo. Si $U, V \in T_{CF}$, $U, V \neq \phi \Rightarrow \mathbb{N}\setminus U, \mathbb{N}\setminus V$ son finitos. Esto significa que $U \cap V \neq \phi$ porque si $U \cap V = \phi$ $\Rightarrow \mathbb{N} = \mathbb{N}\setminus(U\cap V) = (\mathbb{N}\setminus U) \cup (\mathbb{N}\setminus V)$ finito!! Hemos demostrado que dos abiertos no vacíos en T_{CF} tienen intersección no vacía. La propiedad 3 nunca se cumple y, por tanto, $(\mathbb{N}, T_{CF})$ es conexo.

4. Si (X,T) es conexo y $T' \subset T$ (T' es topología más gruesa que T), entonces (X,T') es conexo.

Si (X,T') no es conexo, entonces existen $A', B' \in T'$ tales que $A'B' \neq \phi$, $A' \cup B' = X$, $A' \cap B' = \phi$. Como $T' \subset T$, $A', B' \in T$, esto implica que (X,T) no es conexo

<u>Def</u>: un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si, para todo par de puntos $x, y \in I$, se tiene que $[x,y] \subset I$.

El conjunto $[x,y] = \{x + t(y-x) : 0 \leq t \leq 1\}$. Si $x = y$, entonces $[x,y] = \{x\}$. Si $x < y$, entonces $[x,y] = \{z \in \mathbb{R} : x \leq z \leq y\}$.

<u>Teorema</u>: los únicos subconjuntos conexos de $(\mathbb{R}, T_u)$ son los intervalos.

<u>Dem</u>: supongamos que I no es un intervalo. Existen entonces

$x, y \in I$ con $x<y$. tales que existe $z \in \mathbb{R}$ con $x<z<y$ tal que $z \notin I$.

Sean $U=(-\infty, z)$, $V=(z,+\infty) \in T_u$

1. $U\cap I \neq \emptyset$ $(x \in U\cap I)$; $V\cap I\neq\emptyset$ $(y\in V\cap I)$
2. $U\cup V = \mathbb{R}\setminus\{z\}$, $z\notin I \Rightarrow I\subset U\cup V$
3. $U\cap V=\emptyset \Rightarrow U\cap V\cap I=\emptyset$

27/11/2020

Esto demuestra que I no es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Por tanto, hemos demostrado que si I es conexo, es un intervalo.

Veamos ahora que si I es un intervalo, entonces es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Razonamos por contradicción y suponemos que I no es conexo. Entonces $A, B \in (T_u)_I$ tales $A, B\neq\emptyset$, $I=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$. Como $A,B\neq\emptyset$ y $A\cap B=\emptyset$, podemos tomar $a\in A$, $b\in B$, con $a\neq b$. Intercambiando los conjuntos A y B si es necesario, suponemos $a<b$. Consideramos

$$z=\sup\, [a,b]\cap A \qquad (*)$$

Sabemos que z es límite de puntos de $[a,b]\cap A$. Entonces $z\in\overline{A}$ (en el e. top. $(I,(T_u)_I)$). Como A es cerrado en $(I,(T_u)_I)$, se tiene que $z\in A$. Como $z\in[a,b]\cap A$, z tiene que ser menor que b. ($z\in A$, $b\in B$). Por otra parte, como $A\in(T_u)_I$ y $z\in A$, existe un entorno U de z en $(I,(T_u)_I)$ tal que $z\in U\subset A$. Sabemos que existe $\varepsilon>0$ tal que $(z-\varepsilon, z+\varepsilon)\cap I\subset A$. ($\{(z-r,z+r): r>0\}$ es base de ent. de z en $(\mathbb{R},T_u)$ $\Rightarrow$ $\{(z-r,z+r)\cap I : r>0\}$ es base de ent. de z en $(I,(T_u)_I)$.). Como $z<b$, podemos elegir $\varepsilon>0$

tal que $z+\varepsilon < b$. Esto implica que $[z, z+\varepsilon] \subset A$. Entonces z no es el supremo de $[a,b] \cap A$ (porque el punto $z + \frac{\varepsilon}{2} \in [a,b] \cap A$) Esto es una contradicción. (Realmente llegamos a un absurdo puesto que z no puede ser el supremo). Esto demuestra que I es conexo

Corolario: $(\mathbb{R}, T_u)$ es conexo

Dem: $\mathbb{R}$ es un intervalo

Ejemplo: $(\mathbb{R}, T_S)$ no es conexo. $A = (-\infty, 0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, 0) \in T_S$

$B = [0, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n) \in T_S$. $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$.

Este ejemplo demuestra que (X, T') conexo, $T' \subset T$, no implica que (X, T) sea conexo.

Lema: sea (X, T) un e.top. Son equivalentes:

1. (X, T) es conexo
2. Cualquier aplicación continua de (X, T) en un e.top. discreto es constante
3. Cualquier aplicación continua de (X, T) en $(\{0,1\}, T_D)$

Dem: 1) ⇒ 2) Sea (Y, T_D) un e.top. discreto, y $f: (X, T) \to (Y, T_D)$ una aplicación continua. Si suponemos que f no es constante, existen $y_0, y_1 \in \mathrm{Im}(f)$, $y_0 \neq y_1$. Sean $U = \{y_0\}$, $V = Y \setminus \{y_0\}$. Entonces $U, V \in T_D$ $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = Y$. Si $A = f^{-1}(U)$, $B = f^{-1}(V)$, como f es continua, $A, B \in T$. Además $A, B \neq \emptyset$ ($y_0, y_1 \in \mathrm{Im}(f)$), $A \cup B = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ $= f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(Y) = X$; $A \cap B = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset)$

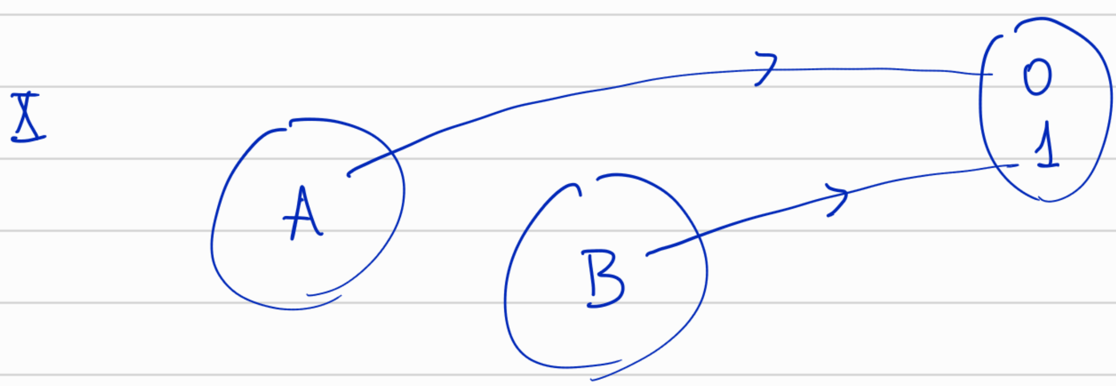
$= \emptyset$. Entonces (X,T) no es conexo !!

$(2) \Rightarrow (3)$ trivial porque (3) es un caso particular de (2).

$(3) \Rightarrow (1)$ Supongamos que (X,T) no es conexo. Existen $A, B \in T$ tales que $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$. Definimos la aplicación $f: X \to \{0,1\}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \in X \setminus A = B \end{cases}$$

(f es la función característica de A). La aplicación f no es constante puesto que $A, B \neq \emptyset$. Veamos que $f: (X,T) \to (\{0,1\}, T_D)$ es continua. Como $T_D = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Como $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{1\}) = A$, $f^{-1}(\{0\}) = B$, $f^{-1}(\{0,1\}) = X$, comprobamos directamente que $f^{-1}(U) \in T$ si $U \in T_D$. Esto es una contradicción, que demuestra $(3) \Rightarrow (1)$. ∎



Corolario: Sea (X,T) un e.top., $A \subset X$ subconjunto conexo. Sea $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset \bar{A}$. Entonces B es un subconjunto conexo de X. En particular, $\bar{A}$ es un subconjunto conexo de X.

Dem: Sea $f: (B, T_B) \to (\{0,1\}, T_D)$ continua. Sabemos que $A \subset B$

Entonces $f \circ i_A = f|_A : (A, \overset{T_A}{\overset{\parallel}{(T_B)_A}}) \to (\{0,1\}, T_D)$ continua. Como A es conexo, el lema anterior nos dice que f es constante. La clausura de A en B, $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B \underset{\substack{\uparrow \\ B \subset \overline{A}}}{=} B$. Como f es continua, $f(\overline{A}^B) \subset \overline{f(A)} = f(A)$ y $f(A)$ es un punto.

Esto implica que $f(B) = f(\overline{A}^B)$ es un punto. Por tanto, f es constante. Por tanto, (B, T_B) es conexo. ∎

<u>Teorema</u>: Sea $f: (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación continua. Si (X, T) es conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de (Y, T').