24/09/2020

TEMA 0. ESPACIOS MÉTRICOS

Sea X conjunto no vacío.

Def: una distancia en X es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

D1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$

D2. $d(x,y) = d(y,x), \quad \forall x,y \in X$ (simétrica)

D3. $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y), \quad \forall x,y,z \in X$
(desigualdad triangular)

Nota: $d(x,y) \geq 0$ se obtiene a partir de D1, D2, D3.

$$0 \overset{D1}{=} d(x,x) \overset{D3}{\leq} d(x,y) + d(y,x) \overset{D2}{=} d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y)$$

$\Rightarrow d(x,y) \geq 0$

Ejemplo: si d es distancia en X y $r > 0$, entonces

$rd : X \times X \to \mathbb{R} \qquad (rd)(x,y) = r \cdot d(x,y)$

Entonces rd es una distancia en X

Ejemplo: $\mathbb{R}$. $d(x,y) = |y - x|$ (D3. $|x+y| \le |x| + |y|$)

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$ $\quad \|\cdot\|$ norma $\quad \|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

N1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ Además $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2. $\|tx\| = |t| \cdot \|x\| \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

N3 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

La distancia asociada a la norma es

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Ejemplo: si $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$ norma 2 ó norma Euclídea

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$$

$$\left.\begin{array}{l} \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq n \cdot \|\cdot\|_\infty \\[2ex] \|\cdot\|_\infty \leq \|\ \|_2 \leq n^{1/2} \|\ \|_\infty \end{array}\right\}$$

Nota: Las distancias asociadas a una norma tienen algunas propiedades que no se verifican para distancias más generales (que no proceden de normas)

Ejemplo: sea X un conjunto arbitrario no vacío. Definimos
$d : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

d es una distancia en X (distancia discreta)

D1. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (directamente de la def.)

D2. $d(x,y)=d(y,x)$ (" " " ")

D3 $x,y,z \in X$. Queremos $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

Si $d(x,y)=0 \Rightarrow$ $d(x,y)=0 \leq \underbrace{d(x,z)+d(z,y)}_{\overset{\text{VI}}{0}}$

Si $d(x,y) \neq 0$ $d(x,y)=1 \overset{?}{\leq} \underbrace{d(x,z)+d(z,y)}_{0,\underline{\underline{1}},2}$

Si $d(x,z)+d(z,y)=1$ ó 2 entonces la des. triangular se verifica. Si $d(x,z)+d(z,y)=0 \Rightarrow d(x,z)=d(z,y)=0 \Rightarrow x=z=y$
$\Rightarrow d(x,y)=0$!!

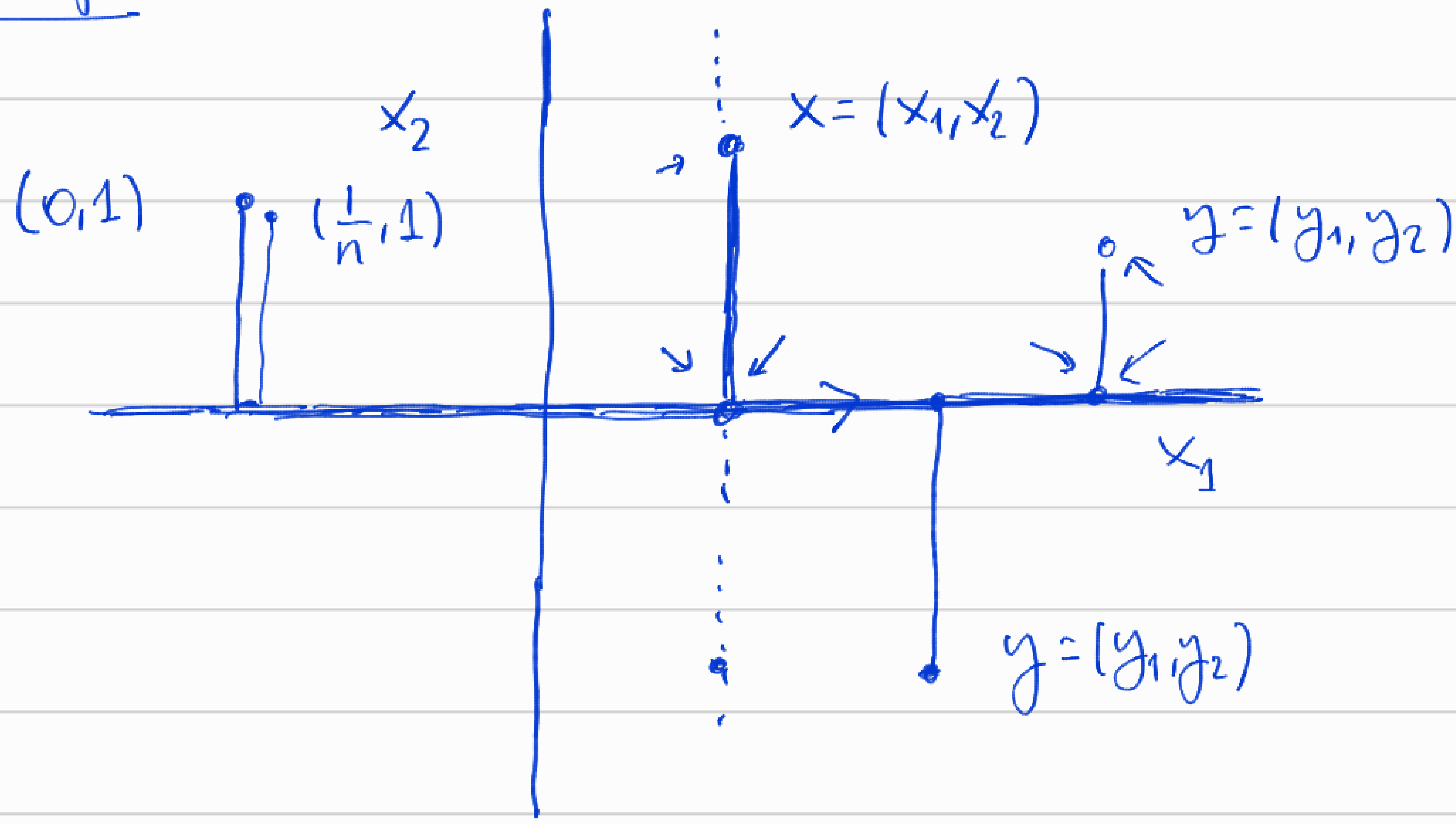
$d(x,z), d(z,y) \geq 0$

Nota: X es conj., d distancia discreta, $\lambda>0$. Entonces λd es una distancia en X

$$(\lambda d)(x,y)=\lambda \cdot d(x,y)=\begin{cases} 0, & x=y \\ \lambda, & x\neq y \end{cases}$$

En la distancia discreta podemos cambiar 1 por cualquier número real positivo λ.

Ejemplo (distancia del río).



$$d(x,y)=\begin{cases} |x_2-y_2| & \text{si } x_1=y_1 \\ |x_2|+|x_1-y_1|+|y_2| & \text{si } x_1\neq y_1 \end{cases}$$

$$d\left((0,1),\left(\tfrac{1}{n},1\right)\right)$$

$$\parallel$$

$$1+\frac{1}{n}+1=2+\frac{1}{n}\geq 2$$

Queremos ver que d es una distancia. $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $z=(z_1,z_2)$

D1. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

$\Leftarrow$ trivial

$$\Rightarrow\ 0=d(x,y)=\begin{cases} |x_2-y_2|, & x_1=y_1 \\ |x_2|+|x_1-y_1|+|y_2|, & x_1\neq y_1 \end{cases}$$

1er caso $\underline{x_1=y_1}$ $\quad |x_2-y_2|=d(x,y)=0 \Rightarrow \underline{x_2=y_2} \Rightarrow x=(x_1,x_2)=(y_1,y_2)=y$

2º caso no puede darse $x_1 \neq y_1 \Rightarrow |x_1 - y_1| > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(x,y) = \underset{\geq 0}{|x_2|} + \underset{> 0}{|x_1 - y_1|} + \underset{\geq 0}{|y_2|} > 0$$

D2. Propiedad simétrica: se sigue de la definición

D3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$x_1 = y_1 \left\langle \begin{array}{ll} y_1 = z_1 & A \\ y_1 \neq z_1 & B \end{array} \right.$ $\qquad$ $x_1 \neq y_1 \left\langle \begin{array}{ll} y_1 = z_1 & C \\ y_1 \neq z_1 & D \end{array} \right.$

Caso A.

$d(x,y) = |x_2 - y_2|$ $\qquad$ $d(x,z) + d(z,y) = |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ es equivalente a $|x_2 - y_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$

$$|x_2 - y_2| = |(x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)| \leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$$

$\boxed{\text{Casos B y C comprobar}}$

Caso D $\quad x_1 \neq y_1 \quad y_1 \neq z_1$

$d(x,y) = |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2|$

$d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + |z_2| + |y_1 - z_1| + |y_2|$

subcasos de D.

D1 $\quad x_1 = z_1 \qquad d(x,z) = |x_2 - z_2|$

D2 $\quad x_1 \neq z_1 \qquad d(x,z) = |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2|$

D2

$$\underbrace{|x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2|}_{d(x,y)} \leq \underbrace{|x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2|}_{d(x,z)} + \underbrace{|z_2| + |y_1 - z_1| + |y_2|}_{d(z,y)}$$

$$|y_1 - x_1| \leq |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1| \quad \text{cierta}$$

$$\leq |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1| + 2|z_2| \qquad |z_2| \geq 0$$

$$|x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| \leq |x_2| + |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1| + |y_2| + 2|z_2|$$

D1. $\quad x_1 \neq y_1 \quad y_1 \neq z_1 \quad \underline{x_1 = z_1}$

$$d(x,y) \qquad\qquad d(x,z) + d(z,y)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$|x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| \qquad |x_2 - z_2| + |y_2| + |z_1 - y_1| + |z_2|$$

$$x_2 = (x_2 - z_2) + z_2 \qquad \underbrace{|x_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2|}$$

$$|x_1 - y_1| = |z_1 - y_1|$$

Partimos de $|x_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2|$ $\leftarrow$

$$\Rightarrow \quad |x_2| + |x_1 - y_1| \leq |x_2 - z_2| + |z_2| + |z_1 - y_1| \qquad x_1 = z_1$$

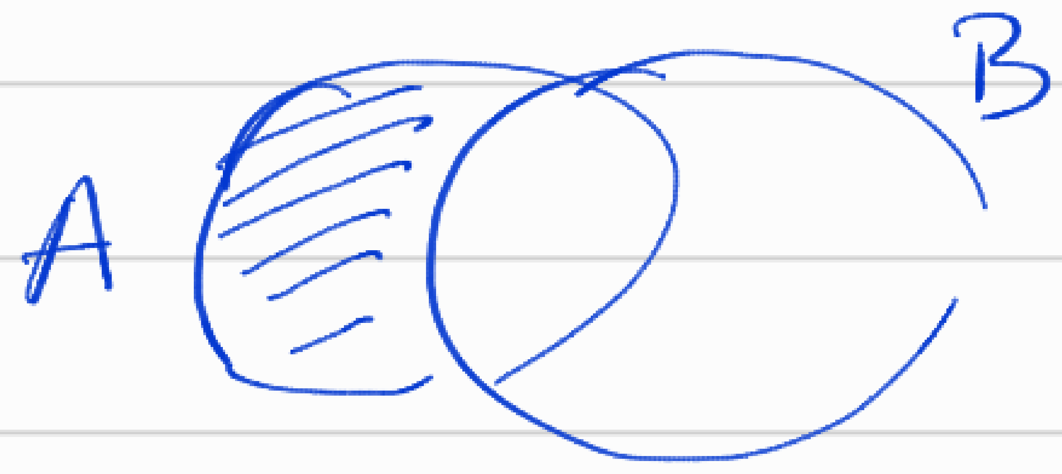
$$\Rightarrow \quad |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| \leq |y_2| + |x_2 - z_2| + |z_2| + |z_1 - y_1|$$

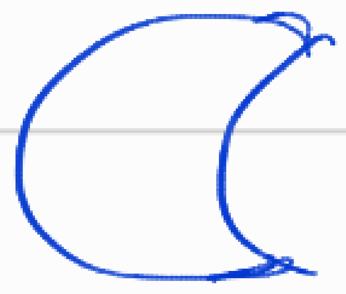
Def: Al par (X, d) formado por un conjunto no vacío y una distancia d se le llama espacio métrico.

Def: Si (X, d) es espacio métrico, $a \in X$, $r > 0$. Definimos

1. $B(a,r) = \{x \in X \,/\, d(x,a) < r\}$ (bola abierta de centro a y radio $r>0$)
2. $\overline{B}(a,r) = \{x \in X \,/\, d(x,a) \leq r\}$ (" cerrada " " " " " ")
3. $S(a,r) = \{x \in X \,/\, d(x,a) = r\}$ (esfera de centro a y radio $r>0$)

Nota: si $A, B \subset X$, $A \setminus B = \{a \in A \,/\, a \notin B\}$



$A \setminus B$ 

$$S(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r)$$

Ejemplo: (X, d) distancia discreta

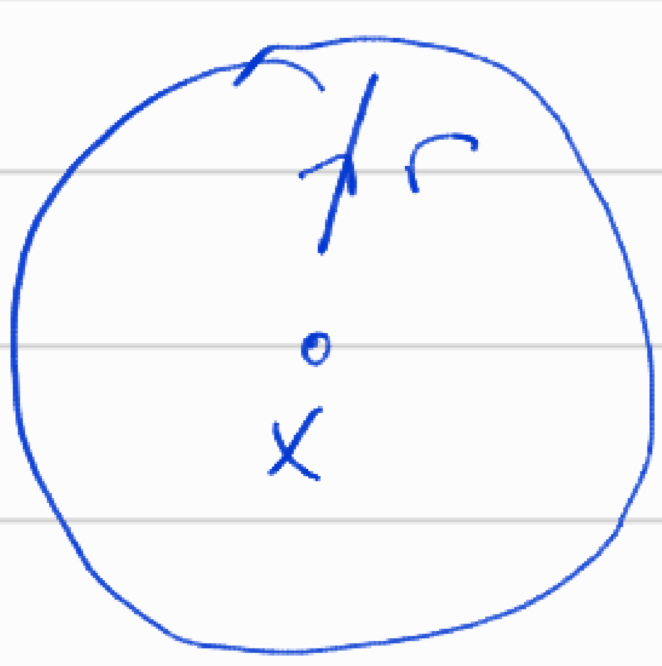
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & r \leq 1 \\ X & r > 1 \end{cases}$$

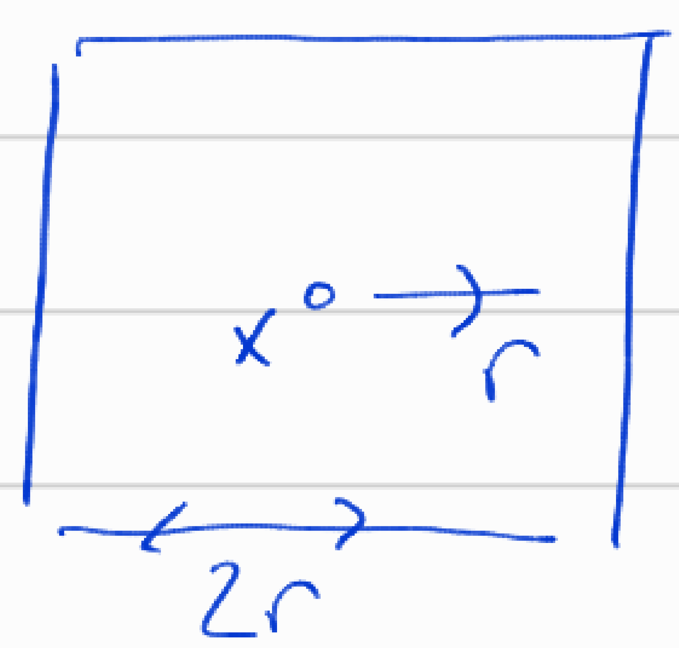
$$\bar{B}(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & r < 1 \\ X, & r \geq 1 \end{cases}$$

$B(x,1) = \{x\}$ $\quad \bar{B}(x,1) = X \Rightarrow S(x,1) = \bar{B}(x,1) \setminus B(x,1) = X \setminus \{x\}$

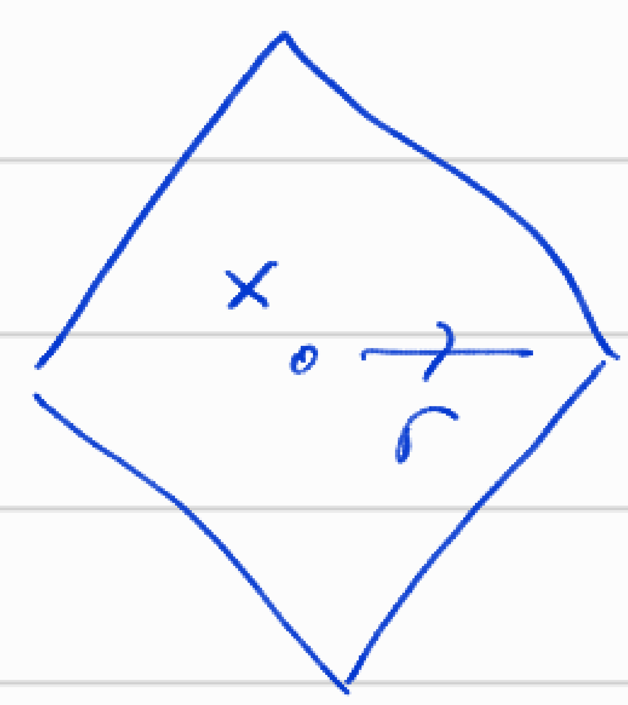
$r \neq 1 \quad B(x,r) = \bar{B}(x,r) \Rightarrow S(x,r) = \bar{B}(x,r) \setminus B(x,r) = \emptyset$



$\|\cdot\|_2$



$\|\cdot\|_\infty$



$\|\cdot\|_1$

Propiedades: 1. $B(a,r) \subset \bar{B}(a,r)$

2. $r < s \Rightarrow B(a,r) \subset B(a,s), \ \bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(a,s)$

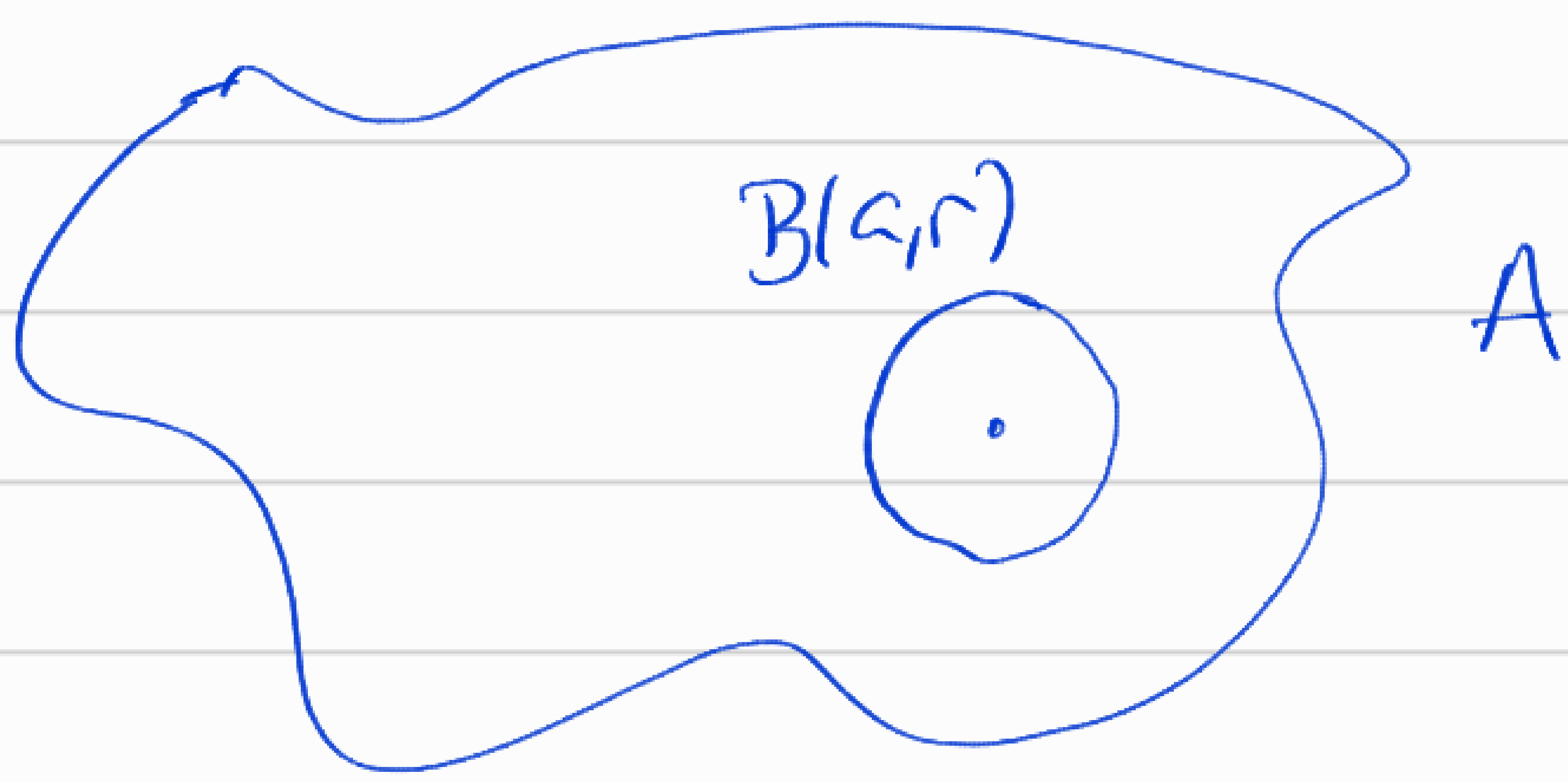
3. Si $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \bar{B}(a,\lambda r) \subset B(a,r)$

3. $x \in \bar{B}(a,\lambda r) \Rightarrow d(a,x) \leq \lambda r \underset{\lambda<1}{<} r \Rightarrow x \in B(a,r)$

$\Rightarrow \bar{B}(a,\lambda r) \subset B(a,r)$ Toda bola abierta contiene a una bola cerrada

Def: Sea (X,d) un espacio métrico. Diremos que $A \subset X$ es abierto en (X,d) si, para todo $a \in A$, $\exists\, r>0$ (depende de a) tal que

$$B(a,r) \subset A$$



Siempre supondremos que $A=\emptyset$ es abierto