8/01/2020

Ejercicios Tema 3

16-17 no se harán en clase

1. $X \neq \emptyset$, $T \subset T'$ dos topologías.

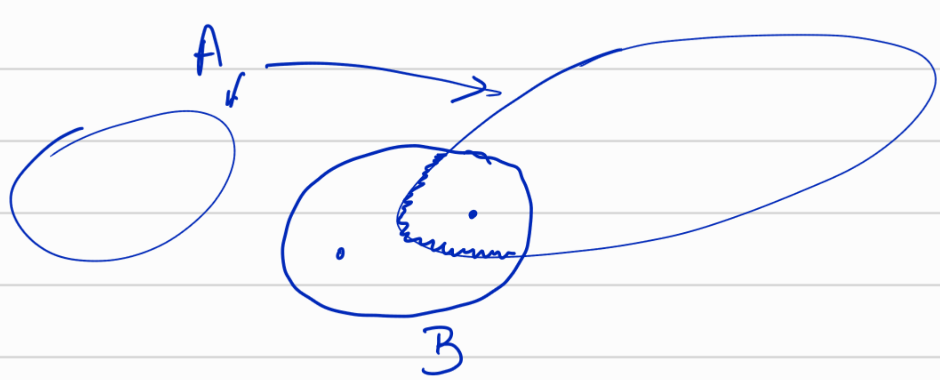
(X,T') conexo $\Rightarrow$ (X,T) conexo

es equivalente a (X,T) no conexo $\Rightarrow$ (X,T') no conexo: si (X,T) no es conexo, existen $A, B \in T$, $A, B \neq \emptyset$, tales que $X = A \cup B$, $\emptyset = A \cap B$. Como $T \subset T'$ $\Rightarrow$ $\underline{A, B \in T'}$. $X = A \cup B$, $\emptyset = A \cap B$ $\Rightarrow$ (X,T') no conexo.

Si (X,T) es conexo, ¿es (X,T') conexo? <u>NO</u>: si $T' = T_D$ y X contiene más de un punto, (X,T') no es conexo. Si $T = T_t$, entonces (X,T) es conexo.

2. (X,T) e.top. $A \subset X$. $B \subset X$ conexo tal que $B \cap A \neq \emptyset$, $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

Probar que $B \cap \partial A \neq \emptyset$



$\rightarrow$ $X = \mathrm{int}(A) \cup \partial A \cup \mathrm{ext}(A)$

$\mathrm{ext}(A) = \mathrm{int}(X \setminus A) \in T$

$\mathrm{int}(A) \in T$

Si suponemos que $B \cap \partial A = \emptyset$

$$B = B \cap X = B \cap (\mathrm{int}(A) \cup \partial A \cup \mathrm{ext}(A))$$
$$= (B \cap \mathrm{int}(A)) \cup \underbrace{(B \cap \partial A)}_{= \emptyset} \cup (B \cap \mathrm{ext}(A))$$

$$= (B \cap \mathrm{int}(A)) \cup (B \cap \mathrm{ext}(A))$$

Si $B \cap \mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ y $B \cap \mathrm{ext}(A) \neq \emptyset$, llegamos a contradicción porque B es conexo.

$$\emptyset \neq B \cap A \subset B \cap \overline{A} = B \cap (\mathrm{int}(A) \cap \partial A) = (B \cap \mathrm{int}(A)) \cup \underbrace{(B \cap \partial A)}_{= \emptyset}$$

$$= B \cap \mathrm{int}(A)$$

$$\Rightarrow B \cap \mathrm{int}(A) \neq \emptyset$$

$$\emptyset \neq B \cap (X \setminus A) \subset B \cap (\overline{X \setminus A}) = B \cup (\underbrace{\mathrm{int}(X \setminus A)}_{= \mathrm{ext}(A)} \cup \underbrace{\partial (X \setminus A)}_{= \partial A})$$

$$= (B \cap \mathrm{ext}(A)) \cup \underbrace{(B \cap \partial A)}_{= \emptyset}$$

$$= B \cap \mathrm{ext}(A)$$

$$\Rightarrow B \cap \mathrm{ext}(A) \neq \emptyset$$

3. $X = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n \right) \cup R_\infty$

$R_n = \{ y = 1/n \}$ $\qquad R_\infty = \{ y = 0 \}$

1. Componentes conexas de X. $\quad \underline{p \in X} \quad \underline{C_p}$

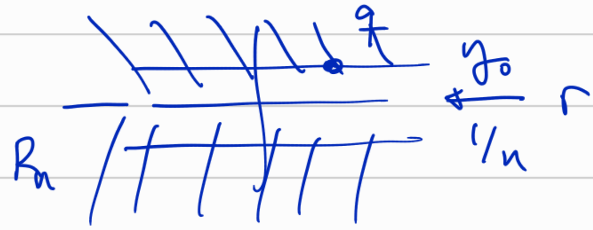
R_n es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$ y R_∞ es conexo.

$$\left.\begin{array}{ll} f_n : \mathbb{R} \to X & f_n(x) = (x, 1/n) \\ f_\infty : \mathbb{R} \to X & f_\infty(x) = (x, 0) \end{array}\right\} \text{ continuas.}$$

$\Rightarrow$ $\quad R_n = f_n(\mathbb{R}) \quad R_\infty = f_\infty(\mathbb{R})$ conexos (imágenes de conjuntos conexos por apl. continuas).

Sea $p \in X$, C_p la componente conexa de X que contiene a p.

1. Si $p \in R_n$. Como R_n es conexo, $R_n \subset C_p$. Si $C_p \neq R_n$, existe $q \in C_p \setminus R_n$ $\quad q = (x_0, y_0)$ con $y_0 \neq 1/n \Rightarrow y_0 > 1/n$ ó $y_0 < 1/n$.
Si $y_0 > 1/n$ tomamos $r \in \mathbb{R}$ $\quad y_0 > r > 1/n$, $\; r \neq 1/m \;\; \forall m \in \mathbb{N}$



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > r\}$
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < r\}$

$$\left.\begin{array}{ll} q \in A \cap C_p & (y_0 > r) \\ R_n \subset B \cap C_p & (1/n < r) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A \cap C_p \neq \emptyset \\ B \cap C_p \neq \emptyset \end{array} \qquad \begin{array}{l} A, B \in T_u \\ A \cap B = \emptyset \end{array}$$

$$C_p = \underset{\substack{\neq \\ \emptyset}}{(A \cap C_p)} \cup \underset{\substack{\neq \\ \emptyset}}{(B \cap C_p)} \qquad A \cap C_p,\ B \cap C_p \in (T_u)_{C_p}$$

$\Rightarrow C_p$ no conexo $\Rightarrow \nexists\, q \in C_p \setminus R_n \Rightarrow C_p = R_n$

Si $y_0 < 1/n$, se toma $r \in \mathbb{R}$: $y_0 < r < 1/n$, $r \neq 1/m\ \forall m \in \mathbb{N}$, y se razona igual.

2. Si $p \in R_\infty = \{y = 0\}$. Como R_∞ es conexo y $p \in R_\infty \Rightarrow R_\infty \subset C_p$.
Si $C_p \setminus R_\infty \neq \emptyset$, existe $q \in C_p \setminus R_\infty$. $q = (x_0, y_0)$, $y_0 \neq 0$. Existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < y_0$, $r \neq 1/m\ \forall m \in \mathbb{N}$. Razonamos como antes: $A = \{y > r\}$, $B = \{y < r\}$ $\quad C_p = \underset{\ni\, q}{(A \cap C_p)} \cup \underset{\supset R_\infty}{(B \cap C_p)}$.

$\Rightarrow C_p$ no conexo $\Rightarrow C_p = R_\infty$.

Las componentes conexas de X son $\{R_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{R_\infty\}$.

2. ¿Son las componentes conexas de $\mathbb{X}$ conjuntos abiertos?

R_n es abierta en $\mathbb{X}$ $\qquad R_n = \Big(\overbrace{\mathbb{R}\times\left(\frac{1}{n}-\varepsilon, \frac{1}{n}+\varepsilon\right)}^{T_u}\Big)\cap \mathbb{X} \in T$

$$\frac{1}{m}\notin \left(\frac{1}{n}-\varepsilon, \frac{1}{n}+\varepsilon\right) \quad \forall m\in\mathbb{N},\ m\neq n.$$

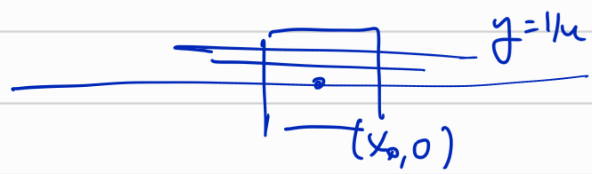
$$\mathbb{R}\times\left(\frac{1}{n}-\varepsilon, \frac{1}{n}+\varepsilon\right)$$

R_∞ no es abierta. $p\in R_\infty$. Si R_∞ es abierta, existe $W\in T_u$ tal que $p\in W\cap\mathbb{X}\subset R_\infty\cap\mathbb{X}$. Si $p=(x_0,y_0)$ ($y_0=0$), W contiene un conjunto de la forma $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\times(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ (bolas en $\mathbb{R}^2$ con distancia d_∞ centradas en (x_0,y_0) son base de entornos de (x_0,y_0)).

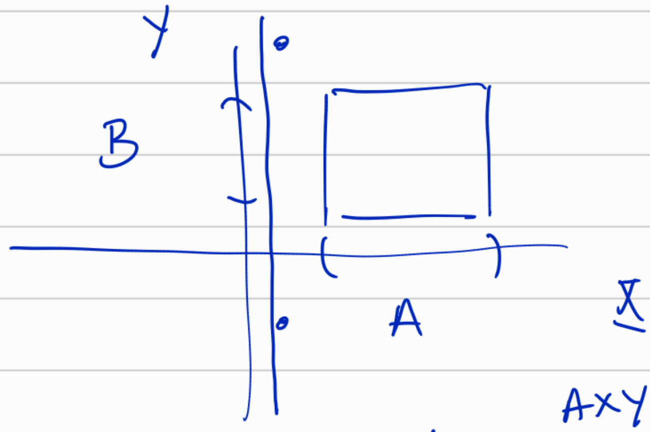
$$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\times(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)\subset W\cap\mathbb{X}\subset R_\infty\cap\mathbb{X}$$

El intervalo $(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)=(-\varepsilon,\varepsilon)$ contiene algún $1/n$, con $n\in\mathbb{N}$

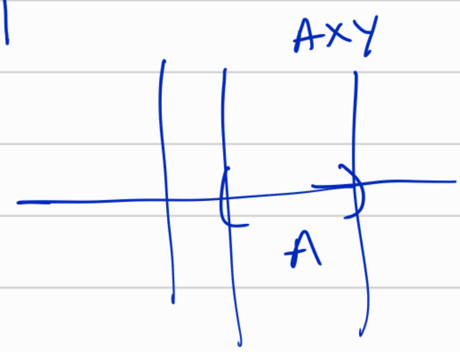
$\Rightarrow$ $\underline{(x_0,1/n)}\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)\subset \underline{R_\infty\cap\mathbb{X}}$!! ($1/n\neq 0$).



4. X, Y conexos, $A \subsetneq X$, $B \subsetneq Y \Rightarrow X \times Y \setminus A \times B$ conexo



(Si $B = Y$ $\quad A \times B = A \times Y$



$X \times Y \setminus (A \times Y) = (X \setminus A) \times Y$

$\uparrow$

no conexo.)

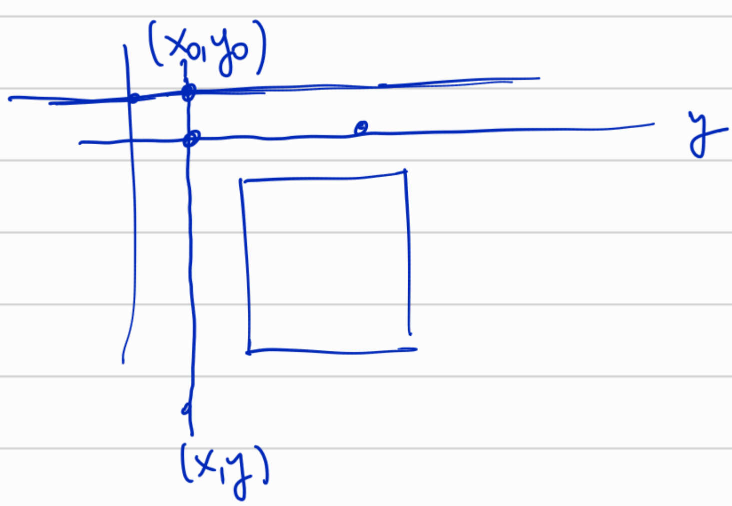
Tomamos $x_0 \in X \setminus A$, $y_0 \in Y \setminus B$.

Sea $(x,y) \in X \times Y \setminus A \times B \Rightarrow (x,y) \notin A \times B \Rightarrow x \notin A$ y/o $y \notin B$.

Si $x \notin A$, Tomamos $C_{(x,y)} = \left(\{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\} \right) \cup \left(\{x\} \times Y \right)$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cap$

$\{x\} \times Y \subset X \times Y \setminus A \times B \qquad\qquad X \times Y \setminus A \times B$



$$C_{(x,y)} = (\{x_0\}\times Y) \cup (X \times \{y_0\}) \cup (\{x\}\times Y)$$

conexos $(\cong X, Y)$

$\underbrace{\{x_0\}\times Y}$ $\cup$ $\underbrace{X\times\{y_0\}}$ es conexo $\quad (x_0,y_0) \in (\{x_0\}\times Y) \cap (X \times \{y_0\})$

$C_{(x,y)}$ es conexo porque $\{x_0\}\times Y \cup X\times\{y_0\}$ es conexo, $\{x\}\times Y$ es conexo y $(x,y_0) \in (\{x_0\}\times Y \cup X\times\{y_0\}) \cap (\{x\}\times Y)$

Si $y \notin B$, tomamos $C_{(x,y)} = (\{x_0\}\times Y \cup X\times\{y_0\}) \cup (X \times \{y\})$

Razonando igual que antes, $C_{(x,y)}$ es conexo.

$$X\times Y \setminus A\times B = \bigcup_{(x,y)\in X\times Y\setminus A\times B} C_{(x,y)}$$

unión de conjuntos conexos

$$(x_0,y_0) \in \bigcap_{(x,y)\in X\times Y\setminus A\times B} C_{(x,y)} \neq \emptyset$$

$\Rightarrow$ $X\times Y \setminus A\times B$ es conexo.