2/12/2020

Teorema: Sean (X,T), (Y,T') e. top., $f:(X,T)\to(Y,T')$ una aplicación continua. Si (X,T) es conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de (Y,T').

Corolario: Si $f:(X,T)\to(Y,T')$ es un homeomorfismo y (X,T) es conexo, entonces (Y,T') es conexo (la conexión es un invariante topológico)

Dem (Teorema) Supongamos que $f(X)$ no es un subconjunto conexo de (Y,T'). Existen $A',B'\in T'$ tales que $A'\cap f(X)$, $B'\cap f(X)\neq\phi$, $f(X)\subset A'\cup B'$, $A'\cap B'\cap f(X)=\phi$. Consideramos $A=f^{-1}(A')$, $B=f^{-1}(B')$. Como f es continua y $A',B'\in T'$, entonces $A,B\in T$. $A=f^{-1}(A')\neq\phi$ porque $A'\cap f(X)\neq\phi$. Del mismo modo, $B=f^{-1}(B')\neq\phi$. $f(X)\subset A'\cup B' \Rightarrow X\subset f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B') = A\cup B \Rightarrow X=A\cup B$. Además, $A'\cap B'\cap f(X)=\phi \Rightarrow A\cap B=f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')=\phi$ $(f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B')=f^{-1}(A'\cap B')$, $A'\cap B'\cap f(X)=\phi)$. Por tanto, (X,T) no es conexo. ∎

Teorema (Bolzano): Sea (X,T) un e. top. conexo, y sea $f:(X,T)\to(\mathbb{R},T_u)$ una aplicación continua. Sean $x,y\in X$, y $\alpha\in\mathbb{R}$ tales que $f(x)\leq\alpha\leq f(y)$. Entonces existe $z\in X$ tal que $f(z)=\alpha$.

Nota: Al teorema de Bolzano también se le llama el Teorema del valor intermedio.

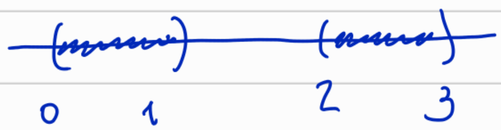
Dem: Como X es conexo y f es continua, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R},T_u)$. Entonces $f(X)$ es un intervalo. Como $f(x),f(y)\in f(X)$ y $f(x)\leq\alpha\leq f(y)$, entonces $\alpha\in f(X)$. Por tanto, existe $z\in X$ tal que

$f(z)=\alpha$ $\blacksquare$

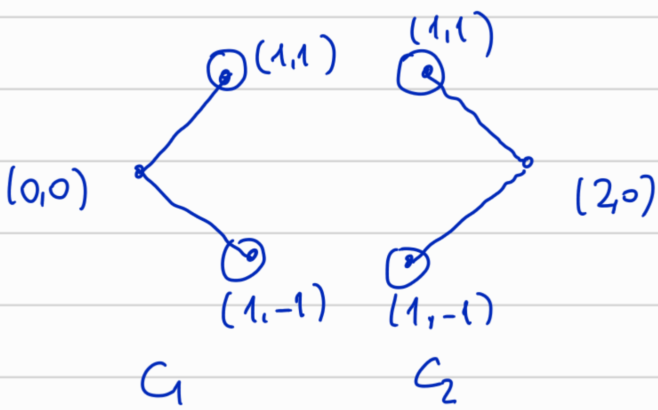
Ejercicio: sea $I=[0,1]$, $f:(I,(T_u)_I)\to(I,(T_u)_I)$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo (existe $x_0\in I$ tal que $f(x_0)=x_0$).

(**Indicación:** aplicar el T. Bolzano a $g(x)=f(x)-x \quad \forall x\in I$).

Nota: Ni la unión ni la intersección de conjuntos conexos es conexo.



$(0,1)\cup(2,3)$ no es conexo



C_1, C_2 conexos.

$C_1\cap C_2=\{(1,1),(1,-1)\}$ no es conexo.

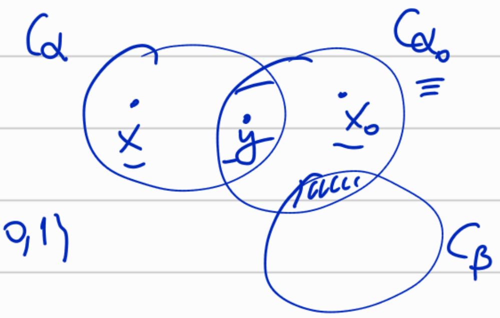
Proposición: Sea (X,T) un e.top. ($C_\alpha, C_i\neq\emptyset$)

1. Si $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de subconjuntos conexos de (X,T) tal que existe $\alpha_0\in I$ que verifica $C_{\alpha_0}\cap C_\alpha\neq\emptyset \quad \forall\alpha\in I$. Entonces $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ es un subconjunto conexo de (X,T)

2. Si $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de subconjuntos conexos de (X,T) tal que $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha\neq\emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ es un subconjunto conexo de (X,T)

3. Si $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos conexos de (X,T) tal que $C_i\cap C_{i+1}\neq\emptyset \quad \forall i\in\mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ es un subconjunto conexo

de (X, T).



Dem: 1. Para probar que $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ es conexo, tomamos una aplicación continua $f: \bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha \to \{0,1\}$ ($\{0,1\}$ con la topología discreta). Si probamos que f es constante, entonces $\bigcup_\alpha C_\alpha$ es conexo. Entonces $f|_{C_\alpha}: C_\alpha \to \{0,1\}$ es continua ($i_{C_\alpha}: C_\alpha \to \bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ inclusión. $f|_{C_\alpha} = f\circ i_{C_\alpha}$). Como C_α es conexo, entonces $f|_{C_\alpha}$ es constante. Veamos que f es constante. Fijamos $x_0 \in C_{\alpha_0}$. Sea $\alpha\in I$ cualquiera y $x\in C_\alpha$. Veamos que $f(x) = f(x_0)$. Esto implicaría que f es constante. Sabemos que $C_\alpha \cap C_{\alpha_0} \neq \phi$. Por tanto existe $y \in C_\alpha \cap C_{\alpha_0}$. Entonces

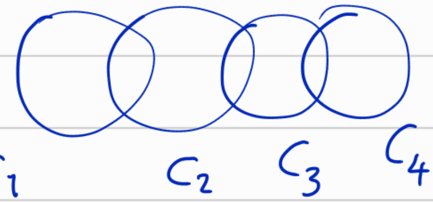
$f(x) = f(y)$ $\quad$ ($x, y \in C_\alpha$ y $f|_{C_\alpha}$ es constante)

$f(x_0) = f(y)$ $\quad$ ($x_0, y \in C_{\alpha_0}$ y $f|_{C_{\alpha_0}}$ es constante)

$\Rightarrow f(x) = f(y) = f(x_0)$.

2. Supongamos que $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha \neq \phi$. Fijamos $\alpha_0 \in I$ cualquiera. Si $\alpha\in I$ entonces $C_\alpha \cap C_{\alpha_0} \supset \bigcap_{\beta\in I} C_\beta \neq \phi \Rightarrow C_\alpha\cap C_{\alpha_0} \neq \phi$. Estamos en las hipótesis de (1) y, por tanto, $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ es conexo.

3. $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ $\quad C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$



Definimos $D_i = \bigcup_{j=1}^{i} C_j$

$D_1 = C_1,\ D_2 = C_1 \cup C_2,\ D_3 = C_1 \cup C_2 \cup C_3, \ldots$

Si los subconjuntos D_i son conexos, entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} D_i = D_1 \neq \emptyset$. Por (2) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ es conexo. Como $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$, entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ es conexo.

Para terminar, veamos que los conjuntos D_i son conexos. Lo demostramos por inducción.

$D_1 = C_1$ es conexo por hipótesis

$D_2 = C_1 \cup C_2$, $\quad C_1, C_2$ conexos y $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Aplicando (1) ó (2), $C_1 \cup C_2$ es conexo.

...

Supongamos por inducción que D_{k-1} es conexo.

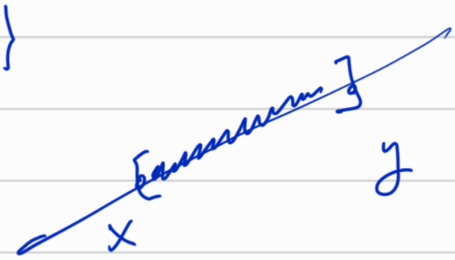
$D_k = C_1 \cup \cdots \cup C_{k-1} \cup C_k = D_{k-1} \cup C_k \qquad D_{k-1} \cap C_k = (C_1 \cup \cdots \cup C_{k-1}) \cap C_k \supset C_{k-1} \cap C_k \neq \emptyset$

D_{k-1}, C_k conexos, $D_{k-1} \cap C_k \neq \emptyset \Rightarrow D_{k-1} \cup C_k = D_k$ es conexo.

Por tanto, D_k es conexo $\forall k \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Ejemplo: $x, y \in \mathbb{R}^n$, el segmento que une x con y es

$$[x,y] = \{ x + t(y-x) : t \in [0,1] \}$$



$[x,y]$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$.

Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ se define por $\gamma(t) = x + t(y-x)$. $\gamma : ([0,1], (T_u^1)_{[0,1]}) \to (\mathbb{R}^n, T_u^n)$ es continua $(\pi_i \circ \gamma(t) = x_i + t(y_i - x_i))$

$\gamma([0,1]) = [x,y]$ es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R}^n, T_u^n)$ porque γ es continua y $([0,1], (T_u^1)_{[0,1]})$ es un e.top. conexo.

Si $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, entonces $[x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4] \cup \dots \cup [x_{k-1}, x_k]$ es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R}^n, T_u)$.

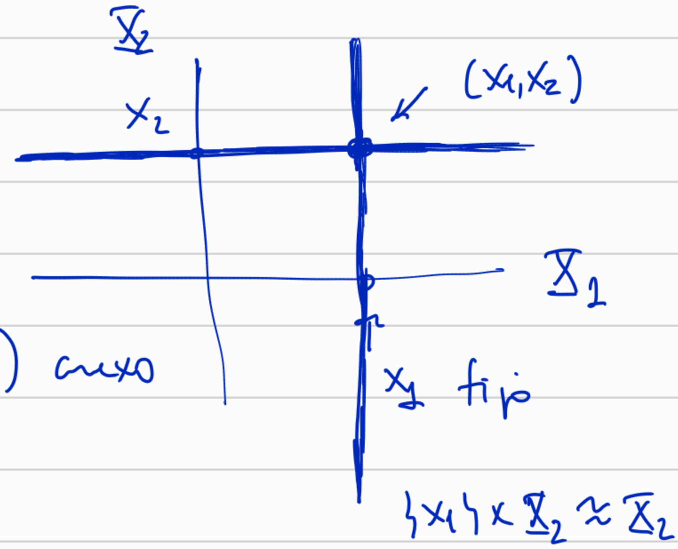
Teorema: Sean $(X_1, T_1), \dots, (X_k, T_k)$ e.top. Entonces $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es conexo si y sólo si (X_i, T_i) es conexo para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Dem: Si $X_1 \times \dots \times X_k$ es conexo, entonces $X_i = \underset{\text{cont.}}{\pi_i}(\underset{\text{conexo}}{X_1 \times \dots \times X_k})$ es conexo por ser imagen del espacio conexo $X_1 \times \dots \times X_k$ por la aplicación continua π_i

Supongamos ahora que (X_i, T_i) es conexo para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.
Probamos que $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es conexo por inducción sobre k.

$k=2$. Veamos que $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$ es conexo.

$X_1 \simeq X_1 \times \{x_2\}$



$C_{x_2} = (X_1 \times \{x_2\}) \cup (\underbrace{\{x_1\}}_{\text{fijo}} \times X_2)$ conexo

$X_1 \times X_2 = \bigcup_{x_2 \in X_2} C_{x_2}$

$\bigcap C_{x_2} \supset \{x_1\} \times X_2 \neq \emptyset$