15/10/2020 10:00-11:00

$X \neq \emptyset$ $\forall x \in X$, consideramos $M_x \subset P(X)$ que verifica 1-4.

$T = \{U \subset X : \forall x \in U, \exists V \in M_x$ con $V \subset U\} \cup \{\emptyset\}$

es top. en X y además $N_x = \{$entornos de x en $(X,T)\} = M_x$

Falta ver la unicidad: si (X,T') es otro e.top. tal que $N'_x = \{$entornos de x en $(X,T')\} = M_x$. Entonces $T=T'$.

$U \in T' \Leftarrow \forall x \in U, \exists V \in \underset{\substack{\shortparallel \\ M_x = N_x}}{N'_x}$ tal que $V \subset U \Leftrightarrow U \in T$; $T = T'$

$\uparrow$

Lema: Sea (X,T) e.top. Entonces $U \in T$ si y sólo si $\forall x \in U, \exists V \in N_x$ tal que $V \subset U$.

Dem: $\Rightarrow$ $V = U$

$\Leftarrow$ Si $\forall x \in U$, $\exists V_x \in N_x$ con $V_x \subset U$. Como V_x es entorno de x, $\exists A_x \in T$ tal que $A_x \subset V_x$

$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} \underset{\substack{\cap \\ T}}{A_x} \in T$.

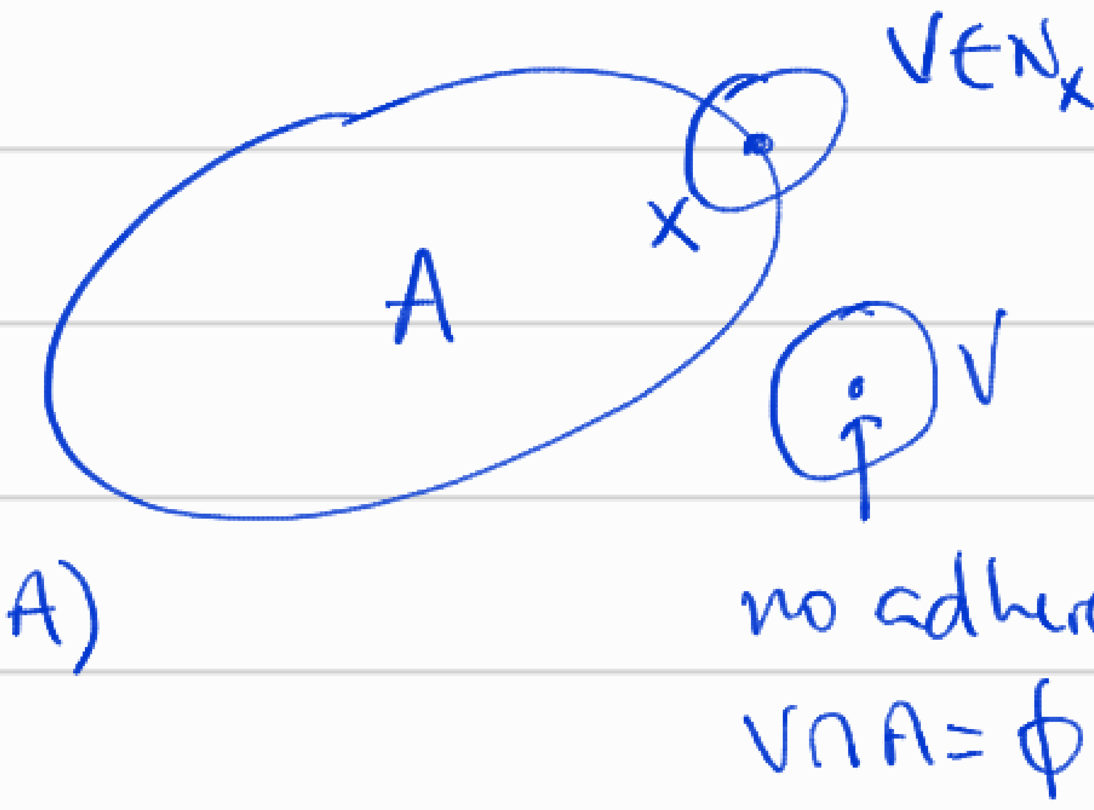
Puntos interiores, adherentes, de acumulación y puntos frontera

Sea (X,T) un e.top. y sea $A \subset X$, $A \neq \emptyset$

Def: diremos que $x \in X$ es un punto adherente de A (a) si $V \cap A \neq \emptyset$ para todo $V \in N_x$.

(un punto $x \in X$ es adherente al conjunto A si todo entorno del punto x corta al conjunto A)

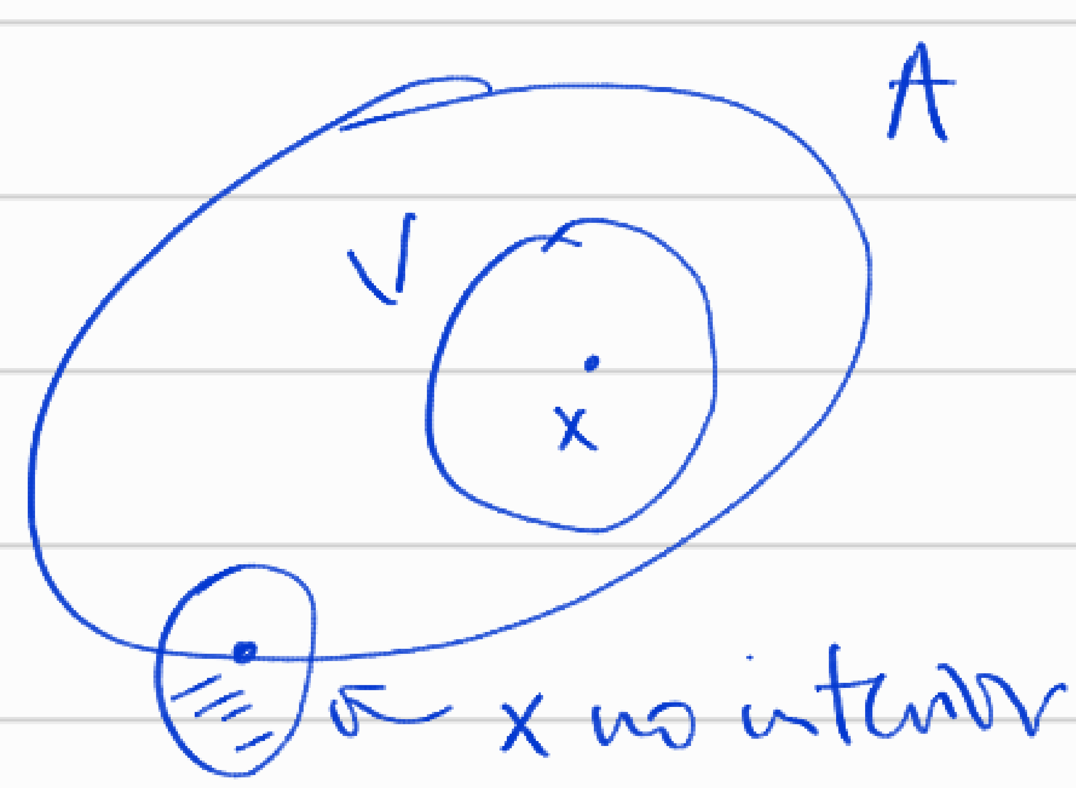
Def: Al conjunto de puntos adherentes de A se le llama la adherencia o clausura de A y se le denota por $\bar{A}$ o $cl(A)$



Nota: $A \subset \bar{A}$. Si $x \in A$, $\underbrace{V \in N_x}_{\text{arbitrario}} \Rightarrow \{x\} \subset V \cap A \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \;\; \forall V \in N_x \Rightarrow x \in \bar{A}$

Def: diremos que $x \in X$ es un punto interior de A si existe $V \in N_x$ tal que $V \subset A$.

Def: al conjunto de puntos interiores de A se le llama el interior de A y se le denota por $int(A)$ o $\mathring{A}$



Nota: $\mathring{A} \subset A$. $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists\, V \in N_x$ tal que $x \in V \subset A \Rightarrow x \in A$

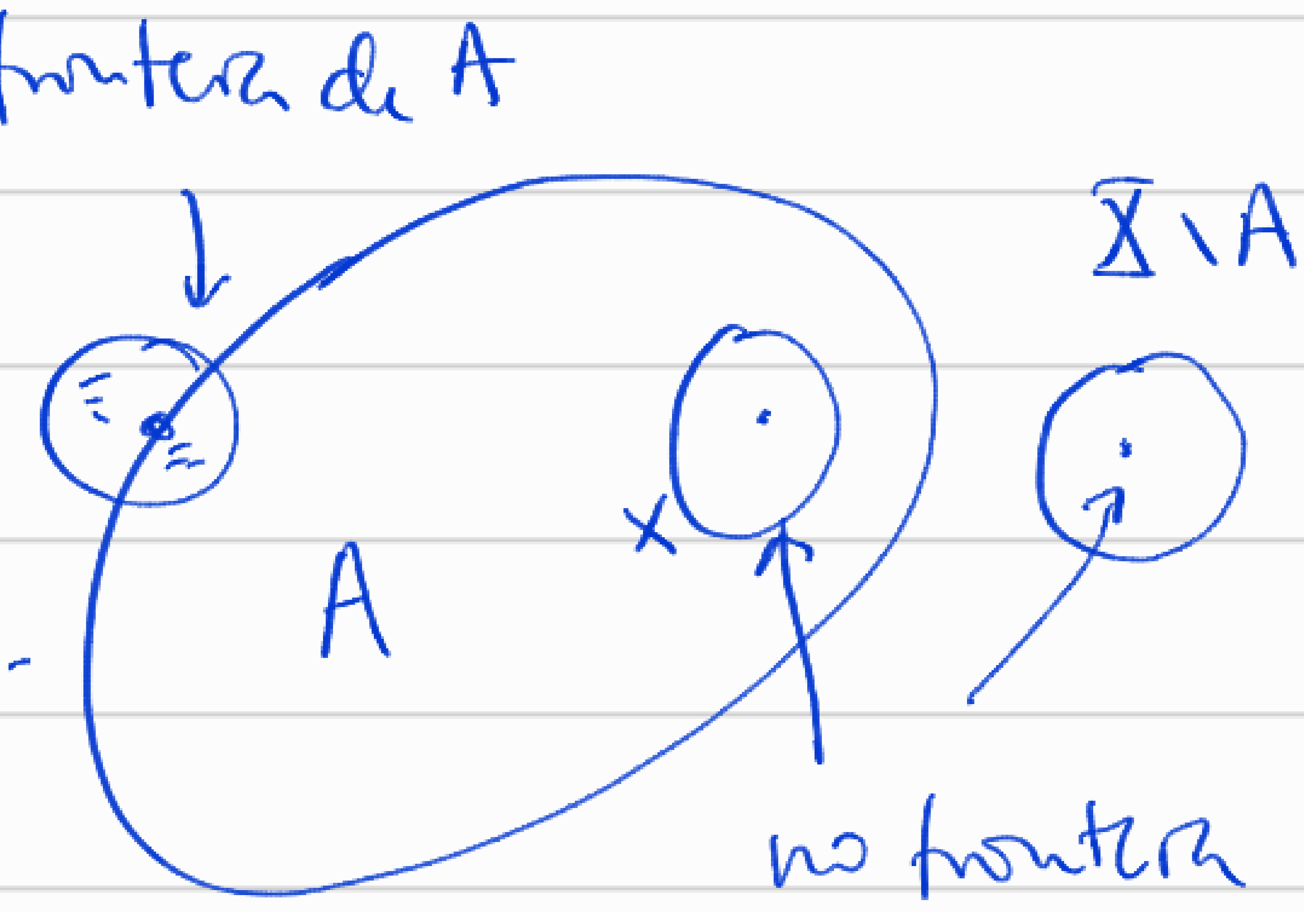
Como $x \in \mathring{A}$ es arbitrario, se tiene que $\mathring{A} \subset A$.

$$\boxed{\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}}$$

Def: diremos que $x \in X$ es un punto frontera de A si $\forall V \in N_x$, se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

(cualquier entorno de x corta a A y corta a $X \setminus A$).

A corta a B si $A\cap B\neq\emptyset$



Def: al conjunto de puntos frontera de A lo llamaremos la frontera de A. Lo denotaremos por $fr(A)$ ó ∂A.

$$x\in\partial A \iff \forall V\in N_x,\ V\cap A\neq\emptyset \text{ y } V\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$$

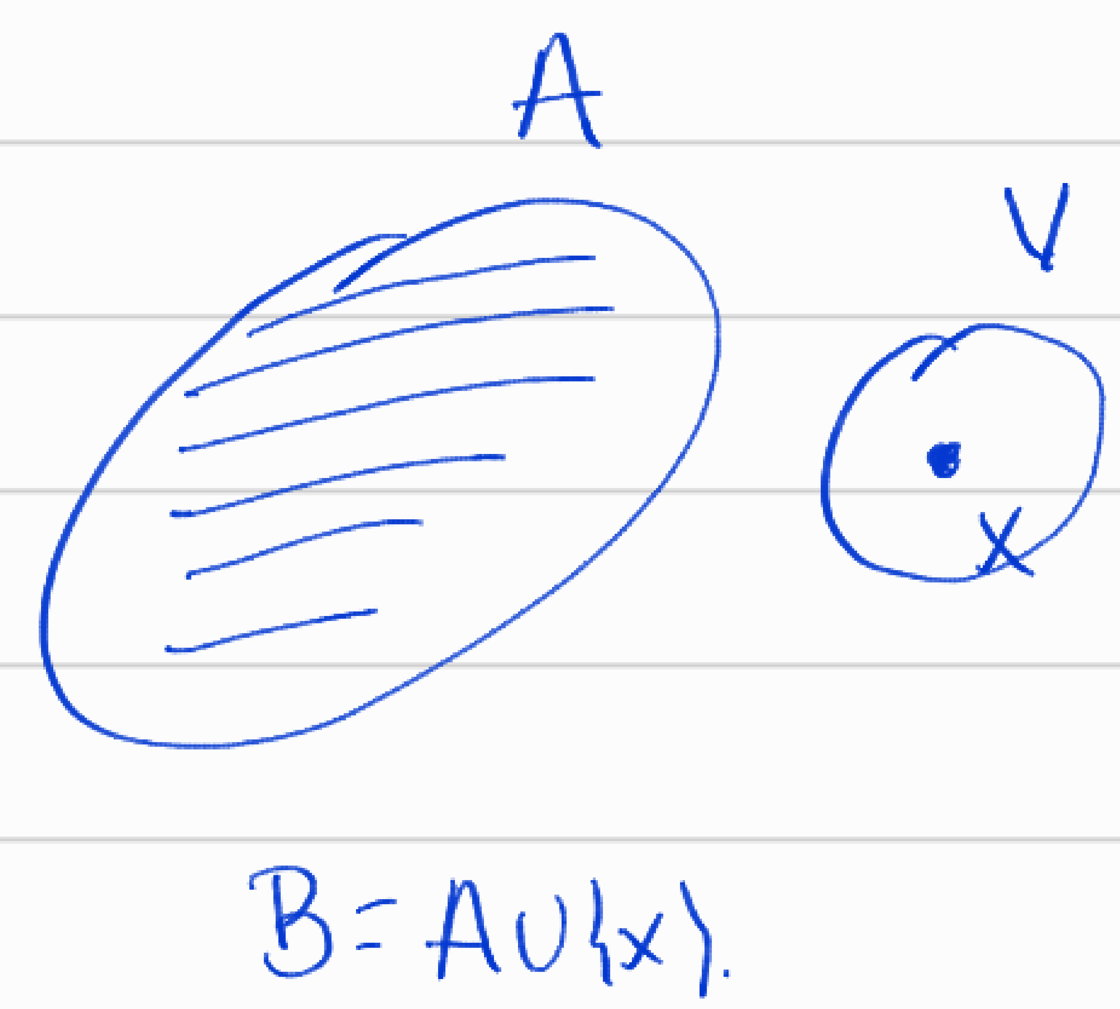
$$\iff x\in\bar{A} \text{ y } x\in\overline{X\setminus A} \iff x\in\bar{A}\cap\overline{(X\setminus A)}$$

Propiedad: $\boxed{\partial A=\bar{A}\cap\overline{(X\setminus A)}}$

Def. $x\in A$ es punto de acumulación de A si $\forall V\in N_x$ se tiene $(V\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset$

(hay puntos de A próximos a x, pero distintos de x. Si $y\in(V\setminus\{x\})\cap A$ $\Rightarrow y\in V\setminus\{x\}\Rightarrow y\neq x$)

x es un punto adherente de B, pero no es punto de acumulación de B porque $V\cap B=\{x\}$ $\Rightarrow (V\setminus\{x\})\cap B=\emptyset$



Def. un punto $x\in A$ es aislado si existe $V\in N_x$ tal que $V\cap A=\{x\}$.

Al conjunto de puntos de acumulación se le denota por A'. A veces se le llama conjunto derivado de A.

Nota: $A' \subset \bar{A}$ $\quad x \in A' \Rightarrow \forall V \in N_x$, se tiene que $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \phi$

$$\Rightarrow \forall V \in N_x \quad V \cap A \supset (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \phi$$

$$\Rightarrow \forall V \in N_x \quad V \cap A \neq \phi \Rightarrow x \in \bar{A}$$

Propiedad: $\mathring{A}$ es un conjunto abierto. Además, si $U \subset A$ es un conjunto abierto, entonces $U \subset \mathring{A}$

($\mathring{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A)

Dem: 1. $\mathring{A}$ es abierto. Para todo $x \in \mathring{A}$, existe $V_x \in N_x$ tal que $V_x \subset A$
Como $V_x \in N_x$, existe U_x abierto tal que $x \in U_x \subset V_x$.
Afirmación: $U_x \subset \mathring{A}$. Si $y \in U_x$, como $U_x \in T$, se tiene que $U_x \in N_y$
$\Rightarrow y \in \underbrace{U_x \subset V_x}_{N_y} \subset A \Rightarrow y \in \mathring{A}$ *

Entonces $\quad \mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} U_x \quad$ (cada U_x verifica $x \in U_x \subset \mathring{A}$)

$$\Rightarrow \mathring{A} \in T \text{ porque } U_x \in T \ \forall x \in \mathring{A}$$

2. Si $U \subset A$ es abierto, entonces $U \subset \mathring{A}$. Tomamos $x \in U$. Como U es abierto, $U \in N_x$. Entonces $x \in \underbrace{U}_{N_x} \subset A$ y $x \in \mathring{A}$. Por tanto, $U \subset \mathring{A}$ ∎

Nota: si no existe $U \in T$ con $U \subset A$, entonces $\mathring{A} = \phi$.

Propiedad: $\bar{A}$ es un conjunto cerrado. Además, si $F \supset A$ es un conjunto cerrado, entonces $\bar{A} \subset F$.

($\bar{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A)

Dem: veamos que $X \setminus \bar{A}$ es un conjunto abierto.

$$x \in X \setminus \bar{A} \iff x \notin \bar{A} \iff \exists V \in N_x \,/\, V \cap A = \phi$$
$$\iff \exists V \in N_x \,/\, V \subset X \setminus A$$
$$\iff x \in \operatorname{int}(X \setminus A)$$

$$\boxed{X \setminus \bar{A} = \operatorname{int}(X \setminus A)}$$

$\bar{A}$ es cerrado porque su complementario es $\operatorname{int}(X \setminus A)$, que es abierto.

Supongamos que F es cerrado y que $A \subset F$. Queremos ver que $\bar{A} \subset F$. Vamos a ver que $X \setminus F \subset X \setminus \bar{A}$. Sea $x \in X \setminus F$. Como $X \setminus F$ es abierto $\exists V \in N_x$ tal que $V \subset X \setminus F \Rightarrow \exists V \in N_x$ tal que $V \cap F = \phi$. Entonces $V \cap A \subset V \cap F = \phi$. Por tanto $V \cap A = \phi$. Entonces $x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in X \setminus \bar{A}$.

Def: Al interior de $X \setminus A$ se le llama el exterior de A, y se le denota por $\operatorname{ext}(A)$ $(= \operatorname{int}(X \setminus A))$.

$$\bar{A} \cap \operatorname{ext}(A) = \phi, \qquad \bar{A} \cup \operatorname{ext}(A) = X \qquad (\operatorname{ext}(A) = X \setminus \bar{A})$$

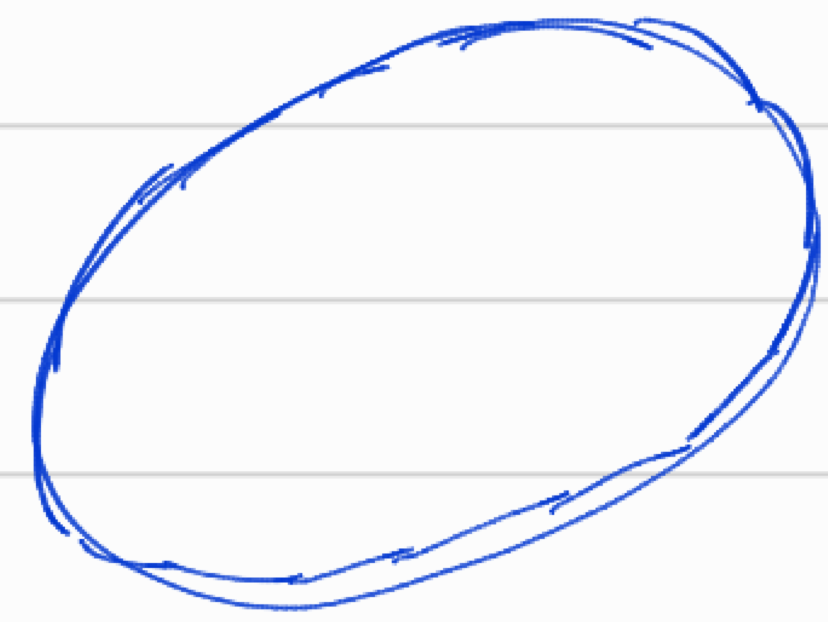
Pregunta: ¿Es ∂A un conjunto cerrado? Sí, porque

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$$

Entonces ∂A es intersección de conjuntos cerrados

$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, $\quad \partial A \subset \bar{A}$ $\qquad$ $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A \cup$ ¿?

<u>Propiedad</u>: $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$; $\mathring{A} \cap \partial A = \phi$ $\qquad$ $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$



<u>Dem</u>: $\mathring{A} \subset \bar{A}$, $\partial A \subset \bar{A} \Rightarrow \mathring{A} \cup \partial A \subset \bar{A}$

$\underline{x \in \bar{A}}$. Entonces $\forall V \in N_x$, $V \cap A \neq \phi$. Tenemos dos posibilidades:

1. $\forall V \in N_x$, $V \cap (X \setminus A) \neq \phi \Rightarrow x \in \partial A$; ó
2. $\exists V \in N_x$ tal que $V \cap (X \setminus A) = \phi \Rightarrow \exists V \in N_x$ tal que $V \subset A \Rightarrow x \in \mathring{A}$

$\bar{A} \subset \partial A \cup \mathring{A}$. Por tanto $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

Además $\mathring{A} \cap \partial A = \phi$

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists V \in N_x \,/\, V \subset A$

$x \in \partial A \Rightarrow \forall V \in N_x$, $\underline{V \cap (X \setminus A) \neq \phi} \Rightarrow \forall V \in N_x$, $\underline{V \not\subset A}$

Un punto $x \in X$ no puede estar simultáneamente en ∂A y en $\mathring{A}$
$\Rightarrow \mathring{A} \cap \partial A = \phi$.

<u>Nota</u>: $\qquad \bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A \qquad \mathring{A} \cap \partial A = \phi \qquad ext(A) = int(X \setminus A)$

$\qquad X = \bar{A} \cup ext(A) \qquad A \cap ext(A) = \phi \qquad = X \setminus \bar{A}$

$X = \mathring{A} \cup \partial A \cup ext(A)$. Además, los tres conjuntos $\mathring{A}, \partial A, ext(A)$ tienen intersección vacía. Es decir, $\{\mathring{A}, \partial A, ext(A)\}$ forman una partición de X.

Si $\partial A = \phi$, entonces $X = \mathring{A} \cup ext(A)$, abiertos disjuntos.

Propiedad: Sea (X,T) e. top. $A \subset X$, $x \in X$. Sea $\mathcal{B}_x$ base de entornos del punto x. Son equivalentes:

1. $x \in \mathring{A}$ $\quad$ ($\exists V \in N_x$ tal que $V \subset A$)
2. $\exists B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset A$.

(Para ver que $x \in \mathring{A}$ basta comprobar la condición que define al punto interior para conjuntos en $\mathcal{B}_x$)

Dem: $(1 \Rightarrow 2)$ $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists V \in N_x$ tal que $V \subset A$. Como $\mathcal{B}_x$ es base de entornos, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset V \subset A$, como queríamos demostrar

$(2 \Rightarrow 1)$. Si existe $B \in \mathcal{B}_x$ con $B \subset A$. Como $B \in \mathcal{B}_x \subset N_x \Rightarrow$ $x \in \mathring{A}$ ■

Ejercicio: Sea $\mathcal{B}$ base de la topología T en X. Sea $x \in X$. Probar que

$$\mathcal{B}(x) = \{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \} \leftarrow$$

es una base de entornos abiertos de x.

Propiedad: Sea (X,T) un e.top. $A \subset X$, $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ base de entornos de x.

1. $x \in \overline{A}$ $\quad$ ($\forall V \in N_x$, $V \cap A \neq \phi$)
2. $\forall B \in \mathcal{B}_x$, $B \cap A \neq \phi$

Dem: $1 \Rightarrow 2$ Si $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{N}_x$ se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$. En particular, si $B \in \mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ y $B \cap A \neq \emptyset$

$2 \Rightarrow 1$. Sea $V \in \mathcal{N}_x$. Como $\mathcal{B}_x$ es base de entornos de x, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset V$. Tenemos entonces que

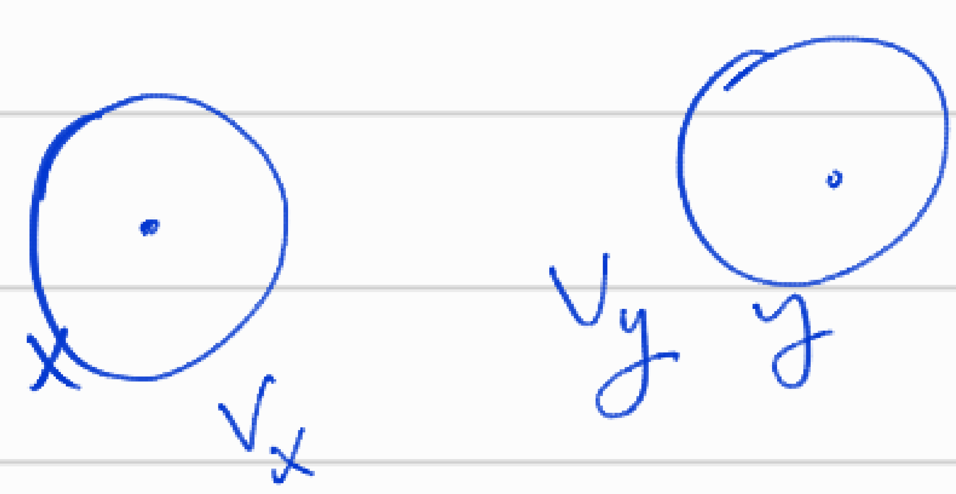
$$\emptyset \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2 cierto}}}{\neq} B \cap A \subset V \cap A \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \qquad \blacksquare$$

Probaremos más propiedades en ejercicios.

— o —

Mañana: axiomas de separación y numerabilidad

T_2 o Hausdorff



$x \neq y$

$$\exists\, V_x \in \mathcal{N}_x,\ V_y \in \mathcal{N}_y \;/\; V_x \cap V_y = \emptyset$$