29/10/2020

# TEMA 2. Aplicaciones entre espacios topológicos

<u>Def</u>: sean $(X,T)$, $(Y,T')$ e top y $f: X \to Y$ una aplicación. Diremos que $f$ es una aplicación continua de $(X,T)$ en $(Y,T')$ si, para todo $U' \in T'$, se tiene $f^{-1}(U') \in T$

<u>Nota</u>: si $f: X \to Y$ es una aplicación entre dos conjuntos y $U' \subset Y$,

$$f^{-1}(U') = \{ x \in X : f(x) \in U' \}$$

$f^{-1}(U')$ es la imagen inversa de $U'$ por $f$. ($f^{-1}$ no es la aplicación inversa de $f$). $f^{-1}$ tiene las siguientes propiedades

- $f^{-1}(U' \cap V') = f^{-1}(U') \cap f^{-1}(V')$
- $f^{-1}(U' \cup V') = f^{-1}(U') \cup f^{-1}(V')$
- $f^{-1}(Y \setminus U') = X \setminus f^{-1}(U')$ $\qquad$ $\left( f^{-1}((U')^c) = f^{-1}(U')^c \right)$
- $f(f^{-1}(U')) \subset U'$

<u>Def</u>. sean $(X,T)$, $(Y,T')$ e top., $f: X \to Y$ aplicación, $x_0 \in X$. Diremos que $f$ es continua en $x_0$ si, para todo entorno $V \in N'_{f(x_0)} = \{$entornos de $f(x_0)$ en $(Y,T')\}$, existe $U \in N_{x_0} = \{$entornos de $x_0$ en $(X,T)\}$ tal que $f(U) \subset V$

<u>Propiedad</u>: sean $(X,T)$, $(Y,T')$ e top, $f: X \to Y$ aplicación. Son equivalentes:

1. $f$ es continua
2. $f$ es continua en $x_0$ para todo $x_0 \in X$

<u>Dem</u>: $1 \Rightarrow 2$ $\quad$ Sea $V \in N'_{f(x_0)}$. Existe $U' \in T'$ tal que $f(x_0) \in U' \subset V$

P.h. $f^{-1}(U') \in T$. $x_0 \in f^{-1}(U')$ $(\Leftrightarrow f(x_0) \in U')$ $\Rightarrow f^{-1}(U') \in N_{x_0}$

Llamamos $U = f^{-1}(U')$. Entonces

$$f(U) = f(f^{-1}(U')) \subset U' \subset V.$$

Entonces $f$ es continua en $x_0$.

$2 \Rightarrow 1$ Sea $U' \in T'$. Queremos ver que $f^{-1}(U') \in T$. Veamos que todo punto de $f^{-1}(U')$ es un punto interior. Sea $x_0 \in f^{-1}(U')$, entonces $f(x_0) \in U'$. Por tanto, $U' \in N'_{f(x_0)}$ $(U' \in T', f(x_0) \in U')$. P.h. existe $U \in N_{x_0}$ tal que $f(U) \subset U'$. Veamos que $U \subset f^{-1}(U')$. Para ver esta propiedad tomamos $x \in U \Rightarrow f(x) \in f(U) \subset U' = x \in f^{-1}(U')$.

Esto demuestra que $x_0$ es punto interior de $f^{-1}(U')$ porque existe $U \in N_{x_0}$ tal que $U \subset f^{-1}(U')$ ∎

<u>Propiedad</u>: Sean $(X, T)$, $(Y, T')$ e. top, $f: X \to Y$, $\mathcal{B}$ base de $T$, $\mathcal{B}'$ base de $T'$. Son equivalentes:

1. $f$ continua
2. Para todo $B' \in \mathcal{B}'$ y para todo $x \in f^{-1}(B')$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset f^{-1}(B')$

<u>Demostración</u>

$1 \Rightarrow 2$ Sea $B' \in \mathcal{B}' \subset T'$. P.h. $f^{-1}(B') \in T \Rightarrow f^{-1}(B') = \bigcup_{i \in J} B_i$

con $B_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall x \in f^{-1}(B')$ existe $B_{i_0}$ al que llamamos $B_x$ tal que $x \in B_x = B_{i_0} \subset \bigcup_{i \in J} B_i = f^{-1}(B')$

$2 \Rightarrow 1$ Sea $U' \in T'$. Como $\mathcal{B}'$ es base de $T'$, $U' = \bigcup_{B'_i \in \mathcal{B}'} B'_i$

$f^{-1}(U') = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B'_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B'_i)$. La propiedad 2 implica que

$f^{-1}(B'_i) \in T$ para todo $i \in I$ $\left( f^{-1}(B'_i) = \bigcup_{x \in f^{-1}(B'_i)} B_x \right) \Rightarrow f^{-1}(U') \in T$

(unión de elementos de $T$).

Nota: 2 es equivalente a "$f^{-1}(B') \in T$ $\forall B \in \mathcal{B}'$". Comprobadlo como ejercicio.

Propiedad: Sean $(X,T)$, $(Y,T')$ e.top, $x_0 \in X$, $\mathcal{B}_{x_0}$ base entornos de $x_0$ en $(X,T)$, $\mathcal{B}'_{f(x_0)}$ es base de entornos de $f(x_0)$ en $(Y,T')$. Son equivalentes:

1. $f$ continua en $x_0$
2. Para todo $V \in \mathcal{B}'_{f(x_0)}$, existe $U \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $f(U) \subset V$.

Dem: $1 \Rightarrow 2$ es inmediato porque $\mathcal{B}_{x_0} \subset \mathcal{N}_{x_0}$, $\mathcal{B}'_{f(x_0)} \subset \mathcal{N}'_{f(x_0)}$

$2 \Rightarrow 1$ Sea $V' \in \mathcal{N}'_{f(x_0)}$. Como $\mathcal{B}'_{f(x_0)}$ es base de entornos de $f(x_0)$ existe $V \in \mathcal{B}'_{f(x_0)}$ tal que $V \subset V'$. P.h. existe $U \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $f(U) \subset V \subset V'$. Ya hemos terminado porque dado $V' \in \mathcal{N}'_{f(x_0)}$, existe $U \in \mathcal{B}_{x_0} \subset \mathcal{N}_{x_0}$ tal que $f(U) \subset V'$ ∎

Ejemplo: Sean $(X,d)$, $(Y,d')$ e. métricos. Sean $T_d$, $T_{d'}$ son las topologías asociadas, $x_0 \in X$. Sean $\mathcal{B}_{x_0} = \{B(x_0,r) : r>0\}$, $\mathcal{B}'_{f(x_0)} = \{B'(f(x_0),r) : r>0\}$. La propiedad anterior me dice que $f : (X,T_d) \to (X,T_{d'})$ es continua en $x_0$ si para todo $B'(f(x_0),\varepsilon) \in \mathcal{B}'_{f(x_0)}$, existe $B(x_0,\varepsilon)$ tal que $f(B(x_0,\delta)) \subset B'(f(x_0),\varepsilon)$.

Esta propiedad es equivalente a: "para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(\underline{B(x_0,\delta)}) \subset \underline{B'(f(x_0),\varepsilon)}$"

Decir que $f(B(x_0,\delta)) \subset B'(f(x_0),\varepsilon)$ es equivalente a decir que:
"$\forall x \in B(x_0,\delta)$, $f(x) \in B'(f(x_0),\varepsilon)$"; y esto es equivalente a
"$\forall x$ tal que $d(x,x_0) < \delta$, se tiene que $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$"

La continuidad en $x_0 \in X$ se puede expresar como: "$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$" (*)

<u>Nota importante</u>: todas las aplicaciones continuas entre espacios métricos usando la caracterización (*) son continuas como aplicaciones entre espacios topológicos (p.e. polinomios, aplicación exponencial, ...)