9/12/2020

Espacios compactos

Def. Sea X un conjunto, $A \subset X$. Diremos que una familia de subconjuntos $\{U_i\}_{i\in I}$ de X es un recubrimiento de A si $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Si $A = X$, entonces $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.

Si (X,T) es un e.top. diremos que un recubrimiento es abierto si $U_i \in T$ $\forall i \in I$.

Def: Sea X conjunto, $A \subset X$, $\{U_i\}_{i\in I}$ recubrimiento de A. Un subrecubrimiento de $\{U_i\}_{i\in I}$ es una subfamilia $\{U_j\}_{j\in J}$, con $J \subset I$, tal que $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.

Diremos que un subrecubrimiento es finito si J es finito.

Def: diremos que un espacio topológico (X,T) es compacto si de todo recubrimiento abierto puede extraerse un subrecubrimiento finito.

Ejemplos: 1. (X, T_{cf}), X infinito, es compacto

$$U_i \in T_{cf} \Leftrightarrow X \setminus U_i \text{ es finito ó } \phi.$$

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un rec. abto. de X. Sea $U_{i_0} \neq \phi$. Entonces $X \setminus U_{i_0}$ es finito e igual a $\{x_1, \dots, x_k\}$. Tomamos U_{i_j}, $j = 1, \dots, k$ tal que $x_j \in U_{i_j}$.

$$X = U_{i_0} \cup (X \setminus U_{i_0}) = U_{i_0} \cup \{x_1, \dots, x_k\} \subset$$

$$\subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

2. Sea (X, T) un e.top., X finito. Entonces (X, T) es compacto.

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ recubrimiento abierto de X. Como $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, elegimos U_{i_j} tal que $x_j \in U_{i_j}$. Entonces

$$X \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

3. Si (X, T) es un e.top. y T tiene una cantidad finita de abiertos, entonces (X, T) es compacto, ya que cualquier recubrimiento abierto solo tiene una cantidad finita de conjuntos distintos.

4. $(\mathbb{R}, T_u)$ no es compacto. $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$. $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento abto. del que no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito. Si $\mathbb{R} \subset \bigcup_{i=1}^{k} (-n_i, n_i)$, tomando $n = \max\{n_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$, se tiene que $\mathbb{R} \subset (-n, n)$!!

5. (X, T_D) es compacto si y sólo si X es finito.
Ya sabemos que si X es finito, entonces (X, T_D) es compacto.
Si suponemos que (X, T_D) es compacto, tomamos $\{U_x : x \in X\}$ donde $U_x = \{x\}$, que es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto, extraemos un subrecubrimiento finito. Existen $x_1, \dots, x_k \in X$ tales que

$$X \subset \mathcal{U}_{x_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{x_k} = \{x_1, \dots, x_k\}$$

Por tanto, X es finito.

<u>Def.</u> Sea (X, T) un e.top., $A \subset X$. Diremos que A es un subconjunto compacto de X si (A, T_A) es un e.top. compacto.

<u>Propiedad.</u> Sea (X, T) un e.top., $A \subset X$. Son equivalentes

1. A es un subconjunto compacto de X ((A, T_A) es compacto)
2. De todo recubrimiento abierto de A por abiertos de (X, T) se puede extraer un subrecubrimiento finito.

<u>Dem:</u> $T_A = \{U \cap A : U \in T\}$

$1 \Rightarrow 2$ Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un rec. de A por abiertos de (X, T)

$$\boxed{A \subset \bigcup_{i \in I} U_i} \qquad \boxed{A \subset B \Leftrightarrow A = A \cap B.}$$

Entonces

$$A = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap U_i)$$

y $A \cap U_i \in T_A \ \forall i \in I$. Por tanto, $\{A \cap U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de A por abiertos de (A, T_A). Como suponemos que (A, T_A) es compacto, existe $J \subset I$ finito tal que $A = \bigcup_{j \in J} U_j \cap A$
Entonces

$$\underline{A} = \bigcup_{j \in J} U_j \cap A \subset \underline{\bigcup_{j \in J} U_j}.$$

Esto demuestra que $1 \Rightarrow 2$.

$2 \Rightarrow 1$. Tomamos un recubrimiento $\{V_i\}_{i \in I}$ de A por abiertos de (A, T_A). Como $V_i \in T_A$ $\forall i \in I$, existe $U_i \in T$ tal que $V_i = U_i \cap A$.

$$A = \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

Esto implica $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de A por abiertos de (X, T). Por 2, existe $J \subset I$ finito tal que

$$A \subset \bigcup_{j \in J} U_j$$

Entonces

$$A = A \cap \left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) = \bigcup_{j \in J} (U_j \cap A) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

y (A, T_A) es compacto $\blacksquare$

<u>Teorema</u>: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces $([a,b], (T_u)_{[a,b]})$ es compacto ($[a,b]$ es un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, T_u)$).

<u>Nota</u>: (a,b), con $a<b$, se puede expresar como

$$(a,b) = \bigcup_{n > \frac{b-a}{2}} \left(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right)$$

$\left\{ \left(a+\frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right) : n > \frac{b-a}{2} \right\}$ es un recubrimiento de (a,b)

por abierto de $(T_u)_{[a,b]}$ del que no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito.

Dem: (teorema). Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $[a,b]$ por abiertos de $(T_u)_{[a,b]}$.

$$s = \sup \{ r\in [a,b] : [a,r] \text{ se puede recubrir por una cantidad finita de conjuntos } U_i \}.$$

- $s>a$. Existe $i_0\in I$ tal que $a\in U_{i_0}$. Existe entorno de a, V, en $(T_u)_{[a,b]}$ tal que $a\in V\subset U_{i_0}$. Sabemos que $\{(a-\varepsilon, a+\varepsilon) : \varepsilon>0\}$ es base de entornos de a en $(\mathbb{R}, T_u)$ y, por tanto $\{(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\cap[a,b] : \varepsilon>0\} = \{[a,a+\varepsilon) : \varepsilon>0\}$ es base de entornos de a en $([a,b], (T_u)_{[a,b]})$. Entonces existe $\varepsilon>0$ tal que

$$[a,a+\varepsilon)\subset V\subset U_{i_0}$$

Esto implica que $[a,r]\subset U_{i_0}$ $\forall\, a<r<a+\varepsilon$. Es decir que $[a,r]$ se puede recubrir por una cantidad finita (uno) de elementos del recubrimiento $\Rightarrow s\geq a+\varepsilon > a$.

- $s=b$. Supongamos que $s<b$. Sea $i_0\in I$ tal que $s\in U_{i_0}$. Como U_{i_0} es abierto, existe $\varepsilon>0$ tal que $[s-\varepsilon, s+\varepsilon]\cap[a,b]\subset U_{i_0}$ ($\{[s-\varepsilon, s+\varepsilon] : \varepsilon>0\}$ es base de entornos de s en $(\mathbb{R}, T_u)$). Como $s-\varepsilon<s$, el conjunto $[a,s-\varepsilon]$ puede recubrirse por una cantidad finita de abiertos $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ ($s=\sup$). Si $[a,s-\varepsilon]$ no puede recubrirse por una cantidad finita de abiertos del recubrimiento, entonces $[a,t]$, con $s-\varepsilon\leq t\leq \varepsilon$, tampoco

puede recubrirse por una cantidad finita. Esto contradice que s sea el supremo del conjunto).

$$[a, s+\varepsilon] = [a, s-\varepsilon] \cup [s-\varepsilon, s+\varepsilon] \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup U_{i_0}$$

Si $s<b$, elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $s+\varepsilon < b$. $\Rightarrow$ $s+\varepsilon \in \{r \in [a,b] :$ $[a,r]$ puede recubrirse por una cantidad finita de elementos de $\{U_i\}_{i \in I}$. $s < s+\varepsilon$!! $s = \sup \{ \ \}$. Esta contradicción demuestra que $s=b$.

- $s \in \{r \in [a,b] : [a,r]$ puede recubrirse por una cantidad finita de elementos $\{U_i\}\}$.