10/12/2020

Problemas tema 2

1. $f:(X,T)\to(Y,T')$. Son equivalentes
   1. f continua $\quad (f^{-1}(U)\in T \ \forall U\in T')$
   2. $f^{-1}(B')\in T \ \forall B'\in \mathcal{B}'$ base
   3. $f^{-1}(S')\in T \ \forall S'\in S'$ subbase.

$1\Rightarrow 2$ inmediato porque $\mathcal{B}'\subset T'$

$2\Rightarrow 3$ Si S' subbase, entonces $S'\subset \mathcal{B}(S')=\mathcal{B}'$

$3\Rightarrow 1$. S' subbase, $\mathcal{B}(S')=\{\bigcap_{j\in J} S_j \ ; \ J$ finito, $S_j\in S\}$ base.

$$\underline{\underline{U'\in T'}} \Rightarrow \underline{\underline{U'=\bigcup_{i\in I} B_i'}}, \quad B_i'\in\mathcal{B}(S')$$

$$\underline{\underline{f^{-1}(U')}}=f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i'\Big)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i') \ \underline{\underline{\in T}}$$

$$B_i'=S_{i_1}'\cap\dots\cap S_{i_k}', \quad \text{con } S_{i_j}\in S$$

$$\to \quad f^{-1}(B_i')=f^{-1}(S_{i_1}\cap\dots\cap S_{i_k})=\underbrace{f^{-1}(S_{i_1})}_{\in T}\cap\dots\cap\underbrace{f^{-1}(S_{i_k})}_{\in T}\in T \quad \forall i$$

Por 3

2. f continua $\Leftrightarrow \overline{f^{-1}(C)}\subset f^{-1}(\overline{C}) \ \forall C\subset Y$.

$\Rightarrow$

Sabemos que f continua $\Leftrightarrow f^{-1}(C)$ es cerrado $\forall C\subset Y$ cerrado.

f continua $\Rightarrow$ para todo $C \subset Y$, $f^{-1}(\bar{C})$ es cerrado. Sabemos que $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\bar{C})$ (porque $C \subset \bar{C}$). Por tanto

$$\underline{\overline{f^{-1}(C)} \subset \overset{\text{cerrado}}{f^{-1}(\bar{C})}} \quad (\overline{f^{-1}(C)} \text{ es el menor cerrado que contiene a } f^{-1}(C))$$

Sup. que $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(\bar{C})$ $\forall C \subset Y$. Veamos que f es continua. Sea $\underline{C \subset Y \text{ cerrado}}$, $C = \bar{C}$ y la hipótesis me dice que $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(\bar{C}) = f^{-1}(C)$

$$\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \underset{\text{siempre es cierto}}{\subset} \overline{f^{-1}(C)}$$

Por tanto $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$ y $\underline{f^{-1}(C) \text{ es cerrado}}$ $\Rightarrow$ f continua.

El apartado 2 se demuestra usando f continua $\Leftrightarrow$ $f(U') \in T$ $\forall U' \in T'$

3. $f, g : (X, T) \to (\mathbb{R}, T_u)$. Continuas, entonces $(f+g) : (X, T) \to (\mathbb{R}, T_u)$ es continua. $\quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$

Veamos que $f+g$ es continua en $x_0 \in X$. ($h : (X, T) \to (Y, T')$ es continua en x_0 si para todo entorno V de $h(x_0)$, existe U entorno de x_0 tal que $f(U) \subset V$).

Sabemos que f, g son continuas en x_0: $\forall \varepsilon > 0$, existen entornos U, V de x_0 tales que que $f(U) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, $g(V) \subset$ $\subset (g(x_0) - \varepsilon, g(x_0) + \varepsilon)$ $\quad (*)$

Si $z \in U \cap V$, entonces $f(z) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ y

$g(z) \in (g(x_0)-\varepsilon, g(x_0)+\varepsilon) \Rightarrow |f(z)-f(x_0)|<\varepsilon, \ |g(z)-g(x_0)|<\varepsilon.$

Por tanto si $z \in U \cap V$

(#) $$|(f+g)(z)-(f+g)(x_0)| \leq |f(z)-f(x_0)| + |g(z)-g(x_0)| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon.$$

→ Sea W un entorno de $(f+g)(x_0)$. Existe entonces $\varepsilon>0$ tal que
→ $((f+g)(x_0)-2\varepsilon, (f+g)(x_0)+2\varepsilon) \subset W$. Tomamos U, V entornos de x_0 que cumplen la propiedad $(*)$. Entonces

$$\underline{\underline{(f+g)(U \cap V)}} \overset{\uparrow (\#)}{\subset} ((f+g)(x_0)-\varepsilon, (f+g)(x_0)+\varepsilon) \subset W.$$

Dado W entorno de $(f+g)(x_0)$, existe un entorno $U \cap V$ de x_0 tal que $(f+g)(U \cap V) \subset W$. Por tanto, $f+g$ es cont. en x_0.

Para $f \cdot g$ la demostración sigue el mismo esquema

4. $f_i \to f$ converge uniformemente si $\forall \varepsilon>0, \exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_i(x), f(x))<\varepsilon \quad \forall i \geq i_0 \ \underline{\underline{\forall x \in X}}$

$f:(X,T) \to (Y,d')$ es continua $\Leftrightarrow$ es continua en x_0 $\forall x_0 \in X$.

Sea W un entorno de $f(x_0)$ en (Y,d'). Como las bolas abiertas centradas en $f(x_0)$ son base de entornos de $f(x_0)$, existe $\varepsilon>0$ tal que $\underline{\underline{B(f(x_0),\varepsilon) \subset W}}$.

Como f_i converge uniformemente a f, dado $\varepsilon/3$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d'(f_i(x), f(x)) < \varepsilon/3$ para todo $i \geq i_0$. Fijamos i_0. Como f_{i_0} es continua en x_0, dado $\varepsilon/3$, existe U entorno de x_0 tal que $f_{i_0}(U) \subset B(f_{i_0}(x_0), \varepsilon/3)$. Entonces, si $z \in U$ $d'(f_{i_0}(z), f_{i_0}(x_0)) < \varepsilon/3$. Por tanto

$$d'(f(z), f(x_0)) \leq d'(f(z), f_{i_0}(z)) + d'(f_{i_0}(z), f_{i_0}(x_0)) + d'(f_{i_0}(x_0), f(x_0))$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Si $z \in U$, entonces $f(z) \in B(f(x_0), \varepsilon) \subset W$. Entonces

$$f(U) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset W.$$

Dado W entorno de $f(x_0)$, existe U entorno de x_0 tal que $f(U) \subset W$. Por tanto f es continua en x_0. Por tanto, f es continua.

5. $f: (X, d) \to (Y, d')$ lipschitziana si existe $K > 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y)$$

$\forall\, x, y \in X$.

Veamos que f es continua para todo $x_0 \in X$.

$$d'(f(x), f(x_0)) \leq K \cdot d(x, x_0) \quad (*)$$

Si $d(x,x_0) < \delta$ $\quad (x \in B(x_0,\delta)) \Rightarrow d'(f(x),f(x_0)) \leq K \cdot d(x,x_0)$

$$< K \cdot \delta$$

$$(f(x) \in B'(f(x_0), K\delta))$$

Si f verifica $(*)$, entonces

$$f(B(x_0,\delta)) \subset B'(f(x_0), K \cdot \delta)$$

Esto automáticamente implica que f es continua en x_0: sea V un entorno de $f(x_0)$ en (Y,d'). Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B'(f(x_0),\varepsilon) \subset W$. Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, se tiene que

$$f(B(x_0,\delta)) \subset B'(f(x_0),\varepsilon) \subset W$$

Es decir, dado W entorno de $f(x_0)$, existe $B(x_0,\delta)$ entorno de x_0 tal que $f(B(x_0,\delta)) \subset W$. Por tanto, f es continua en x_0.

6. (X,d) e. métrico, $x_0 \in X$ punto. $\quad f: X \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = d(x,x_0)$

f es lipschitziana, $\quad \underset{=}{d_u}(t,s) = |t-s| \quad \forall t,s \in \mathbb{R}$

$x,y \in X$. Queremos calcular $K > 0$ para que:

$$d_u(f(x),f(y)) = |d(x,x_0) - d(y,x_0)| \leq K \cdot d(x,y) \qquad K = 1$$

Aplicando la desigualdad triangular (dos veces)

$$d(x,x_0) \leq d(x,y) + d(y,x_0) \Rightarrow d(x,x_0) - d(y,x_0) \overset{(a)}{\leq} d(x,y)$$

$$d(y,x_0) \leq d(y,x) + d(x,x_0) \Rightarrow d(y,x_0) - d(x,x_0) \underset{(b)}{\leq} d(x,y)$$

$$-d(x,y) \overset{(b)}{\leq} d(x,x_0) - d(y,x_0) \overset{(a)}{\leq} d(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{|d(x,x_0) - d(y,x_0)| \leq d(x,y)}$$

Por tanto $d_u(f(x), f(y)) = |d(x,x_0) - d(y,x_0)| \leq d(x,y)$.

f lipschitziana $(K=1)$.