5/11/2020

20. $\mathbb{X} \neq \emptyset \quad A \subset \mathbb{X} \quad A \neq \emptyset, \mathbb{X}$

$$\mathcal{B} = \{ A \cup \{x\} : x \in \mathbb{X} \}$$

es base de una topología en $\mathbb{X}$.

- $\mathbb{X} = \bigcup_{x \in \mathbb{X}} \underbrace{A \cup \{x\}}_{\in \mathcal{B}}$. $\mathbb{X}$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

- Sean $A \cup \{x_1\}, A \cup \{x_2\} \in \mathcal{B}$. $(A \cup \{x_1\}) \cap (A \cup \{x_2\}) \overset{?}{\in} \mathcal{B}$.

$$(A \cup \{x_1\}) \cap (A \cup \{x_2\}) = \begin{cases} A \cup \{x_1\}, & \text{si } x_1 = x_2 \\ A, & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

Si $x_1 = x_2 \Rightarrow A \cup \{x_1\} \in \mathcal{B}$

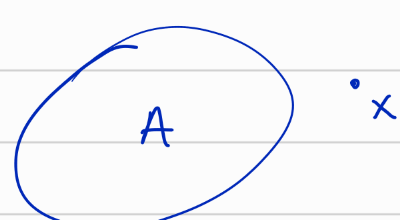
Si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow A = A \cup \{a\} \in \mathcal{B} \quad \forall a \in A$.

Calcular $\text{int}(A)$ y $\bar{A}$.

$\text{int}(A) = A$ porque $A \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$

$\bar{A} = \mathbb{X}$: $A \subset \bar{A}$. Si $x \notin A$, $\mathcal{B}(x) = \{ B \in \mathcal{B} : x \in B \} = \{ A \cup \{x\} \}$

base entornos de x.



$A \cup \{x\}$ es el único conjunto de $\mathcal{B}$ que contiene a x.

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}(x),\ B \cap A \neq \phi.$

Como $\mathcal{B}(x) = \{A \cup \{x\}\}$ y $(A \cup \{x\}) \cap A = A \neq \phi \Rightarrow x \in \bar{A}\ \forall x \notin A.$

Por tanto, $\bar{A} = X$. (A es abierto denso en (X, T)).

21. $(\mathbb{R}, T_{cf})$ $\quad T_{cf} = \{U \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus U \text{ finito}\} \cup \{\phi\}$. Calcular $\bar{A}, \mathring{A}, \partial A$ si $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \{1,2\}$

de:

- $\mathring{A}$ $\quad x \in \underline{\mathring{\mathbb{N}}} \Leftrightarrow \exists U \in N_x$ tal que $U \subset \mathbb{N} \Rightarrow \exists V \in T_{cf}$ tal que $x \in V \subset U \subset \mathbb{N} \Rightarrow \underbrace{\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}}_{\text{infinito}} \subset \mathbb{R} \setminus U \subset \underline{\mathbb{R} \setminus V \text{ finito}}$

  $\mathring{\mathbb{N}} = \phi$. (Todo conjunto de $(\mathbb{R}, T_{cf})$ con complementario infinito tiene interior vacío. Si $\mathbb{R} \setminus A$ es infinito y $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists U \in T$ tal que $x \in U \subset A \Rightarrow \underbrace{\mathbb{R} \setminus A}_{\text{infinito}} \subset \underbrace{\mathbb{R} \setminus U}_{\text{finito}}$)

$\mathring{\mathbb{N}} = \mathring{\mathbb{Z}} = \mathring{\mathbb{Q}} = \text{int}(\{1,2\}) = \phi.$

- $\bar{A}$ = menor conjunto cerrado que contiene a A.

  Si A es finito $\Rightarrow \bar{A} = A$

  Si A es infinito $\Rightarrow \bar{A} = \mathbb{R}$ (el único cerrado que contiene a $A \neq \phi$ es $\mathbb{R}$)

$\bar{\mathbb{N}} = \bar{\mathbb{Z}} = \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \qquad \overline{\{1,2\}} = \{1,2\}.$

- $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ $\qquad \partial \mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \phi = \mathbb{R}$

  $\partial \mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus \phi = \mathbb{R}$

  $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \phi = \mathbb{R}$

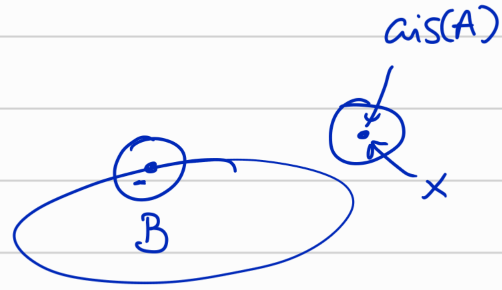
  $\partial \{1,2\} = \{1,2\} \setminus \phi = \{1,2\}.$

22. Grabación

23. Calcular $A' = \{$puntos de acumulación de $A\}$ $\quad ais(A) = \{$aislados de $A\}$.

$x \in A' \iff \forall U \in N_x,\ (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

$x \in ais(A) \iff \exists\, U \in N_x$ tal que $U \cap A = \{x\}$



$A = B \cup \{x\}$.

(a) $(\mathbb{X}, T_t)$ $\quad A \subset \mathbb{X}$ $\quad \# A \geq 2$.

A' $\quad ais(A)$ $\qquad x \in \mathbb{X},\ N_x = \{\mathbb{X}\}$.

$A' = \mathbb{X}$ $\quad$ si $x \in \mathbb{X}$, el único entorno de x es $\mathbb{X}$ y $(\mathbb{X} \setminus \{x\}) \cap A =$
$= A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ porque A contiene 2 o más puntos.

$ais(A) = \emptyset$ $\quad$ Si $x \in \mathbb{X}$, el único entorno de x es $\mathbb{X}$ y $\mathbb{X} \cap A = A$
que contiene al menos dos puntos $\Rightarrow \mathbb{X} \cap A \neq \{x\}$

(b) $(\mathbb{X}, T_D)$ $\quad A \subset \mathbb{X}$

$A' = \emptyset$ $\quad$ porque $\{x\} \in N_x$ y $(\{x\} \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$
$ais(A) = A$. $\quad$ porque $\{x\} \in N_x$ y $\{x\} \cap A = \{x\}$.

(c) $(\mathbb{X}, T_{CF})$ y $A \subset \mathbb{X}$ finito. Si $\mathbb{X}$ es finito, $T_{CF} = T_D$ y estamos en el caso del apartado (b). Suponemos que $\mathbb{X}$ es infinito.

$A' = \phi$ Si $A=\{x_1,\dots,x_k\}$, entonces tomamos como entorno del punto x_1 el conjunto $X\setminus\{x_2,\dots,x_k\}\in T_{CF}$, $x_1\in X\setminus\{x_2,\dots,x_k\}$.

$X\setminus\{x_2,\dots,x_k\}\in N_{x_1}$

$$\Big(\underbrace{(X\setminus\{x_2,\dots,x_k\})\setminus\{x_1\}}_{}\Big)\cap A=\phi$$

$$(X\setminus A)\cap A$$

$\Rightarrow x_1\notin A'$. De la misma forma se demuestra que $x_2,\dots,x_k\notin A'$.

$ais(A)=A$. $x_1\in ais(A)$ porque $\underbrace{(X\setminus\{x_2,\dots,x_k\})}_{\in N_{x_1}}\cap A=\{x_1\}$.

De la misma forma se demuestra que $x_2,\dots,x_k$ son puntos aislados

(d) $(\mathbb{R},T_S)$ $\mathcal{B}_S=\{[a,b): a<b,\ a,b\in\mathbb{R}\}$ $A=(0,1]$

$x\in A' \iff \forall U\in N_x,\ (U\setminus\{x\})\cap A\neq\phi$.

$\iff \forall U\in\mathcal{B}_S(x),\ (U\setminus\{x\})\cap A\neq\phi$ $\mathcal{B}_S(x)=\{B\in\mathcal{B}_S : x\in B\}$.

$\iff \forall U\in\mathcal{B}_x,\ (U\setminus\{x\})\cap A\neq\phi$.

(demostración como en el ejercicio 11).

Podemos tomar como base de entornos de x en $(\mathbb{R},T_S)$ la familia

$$\mathcal{B}_x=\{[x,x+r): r>0\}.$$

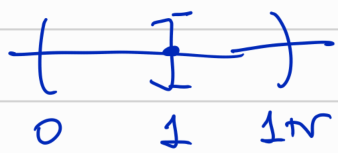
$A=(0,1]$ $x\in A$ $\underline{0<x<1}\Rightarrow$

$$[x,x+r)\cap(0,1]=\begin{cases}[x,x+r) & x+r\leq 1\\ [x,1] & x+r>1\end{cases}$$

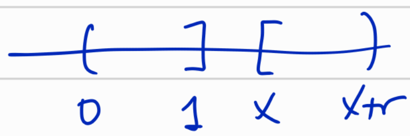
$$([x,x+r)\setminus\{x\})\cap(0,1]=\begin{cases}(x,x+r)\subset(0,1] & \text{si } x+r\leq 1\\ (x,1] & \text{si } x+r>1\end{cases}\neq\phi$$

- Si $x\in(0,1)$, entonces $x\in A'$.

- $1\notin A'$ porque $([1,1+r)\setminus\underset{=}{\{1\}})\cap(0,1]=\phi$ $\left((0,1]\cap[1,1+r)=\phi\right)$



- $x>1\Rightarrow x\notin A'$



- Si $x=0$ $\quad([0,r)\setminus\{0\})\cap(0,1]\neq\phi\Rightarrow 0\in A'$.

- Si $x<0$ $\quad([x,0)\setminus\{x\})\cap(0,1]=\phi\Rightarrow x\notin A'$.

Por tanto $\quad A'=[0,1)$ $\qquad(A=(0,1])$

———— ∘ ————

ais(A). $\quad x\in \text{ais}(A)\Leftrightarrow\exists B\in\mathcal{B}_x$ tal que $B\cap A=\{x\}$.

Si $x\in\text{ais}(A)\Rightarrow\exists r>0$ tal que $[x,x+r)\cap(0,1]=\{x\}$.

Si $0<x<1\Rightarrow[x,x+r)\cap(0,1]=\begin{cases}[x,x+r) & x+r\leq 1\\ [x,1] & \text{si } x+r>1\end{cases}$ contiene

más puntos además de $x\Rightarrow x\notin\text{ais}(A)$.

Si $x=1 \Rightarrow \underset{N_1}{\underset{\cap}{[1,2)}} \cap (0,1] = \{1\} \Rightarrow 1 \in ais(A)$.

$A = (0,1] \Rightarrow A' = [0,1)$ $\quad ais(A) = \{1\}$.

24. Grabación