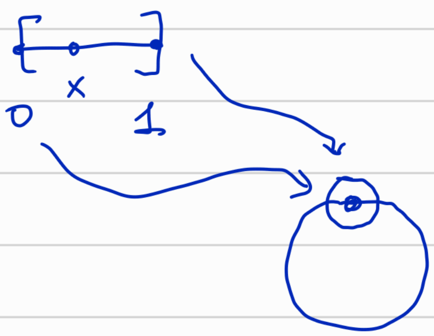
19/11/2020

Espacios cociente



$x, y \in [0,1]$

$$xRy \iff \begin{cases} x = y, \text{ o} \\ x=0, y=1, \text{ ó } x=1, y=0. \end{cases}$$

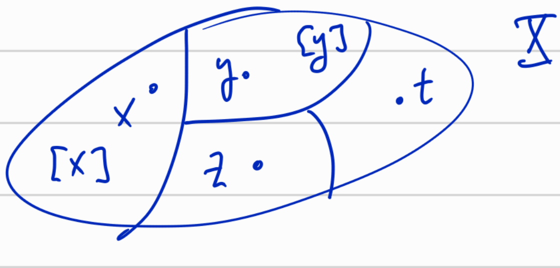
identificando los puntos $0,1 \in [0,1]$ se obtiene una circunferencia

Las clases de equivalencia son $[0]=[1]=\{0,1\}$, $[x]=\{x\}$ $0<x<1$.

Sea (X,T) un e. topológico, R relación de equivalencia en X. R induce una partición de X en clases de equivalencia: dado $x \in X$, la clase de equivalencia de x es:

$$[x] = \{ y \in X : xRy \} \subset X$$

Se tiene $[x]=[y]$ si y solo si xRy. El conjunto de clases de equivalencia es una partición de X



El conjunto cociente es el formado por las clases de equivalencia. Se denota por X/R

En el ejemplo anterior, $X/R = \{[x],[y],[z],[t]\}$

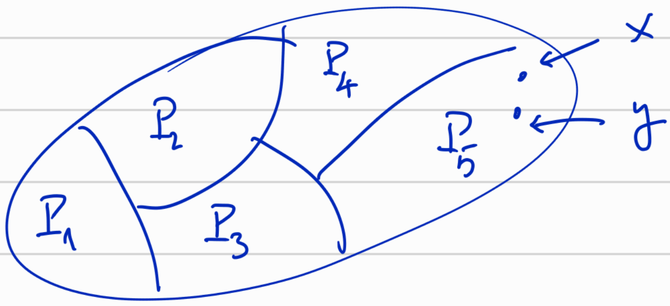
Cualquier relación de equivalencia R en X induce una partición en X formada por las clases de equivalencia.

Recíprocamente, si $\{P_i\}_{i\in I}$ es una partición de X:

1. $\bigcup_{i\in I} P_i = X$
2. $P_i \cap P_j = \phi$ si $i \neq j$

podemos definir una relación de equivalencia R en X de modo que las clases de equivalencia de R sean los conjuntos P_i. Definimos R por

$$x R y \Leftrightarrow \exists\, i_0 \in I \text{ tal que } x, y \in P_{i_0}$$



R cumple trivialmente.

1. xRx
2. $xRy \Rightarrow yRx$
3. $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$

Falta probar que si $x \in P_i$, entonces $[x] = P_i$. $y \in [x] \Leftrightarrow yRx$ $\Leftrightarrow y \in P_i$ Esto demuestra que $[x] = P_i$.

La aplicación proyección $\pi: X \to X/R$ es la definida por $\pi(x) = [x]$.
o proyección canónica

Es sobreyectiva y, en general, no es inyectiva (solo lo es si $[x] = \{x\}$ para todo $x \in X$).

En nuestra situación, tenemos $\pi: (X, T) \to X/R$

<u>Def</u>: dado un e. top. (X, T) y una relación de equivalencia R en X con aplicación proyección $\pi: X \to X/R$, se define la topología cociente en X/R como la topología final para la aplicación $\pi: (X, T) \to X/R$. Se denota por T/R.

Sabemos que

$$T/R = \{ U \subset X/R : \pi^{-1}(U) \in T \}$$

$$\pi^{-1}(U) = \{ x \in X : \pi(x) = [x] \in U \} = \bigcup_{[x] \in U} [x].$$

subconjunto de X

punto de $U \subset X/R$

$$= \bigcup_{\pi(x) \in U} [x].$$

La clase de equivalencia $[x]$ es, al mismo tiempo, un subconjunto de X y un elemento de X/R. A partir, reservaremos la notación $[x]$ para el subconjunto de X y $\pi(x)$ para el punto de X/R.

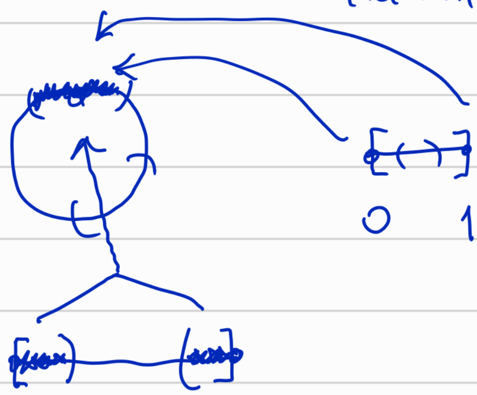
$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\pi(x) \in U} [x].$$

En el ejemplo de la circunferencia

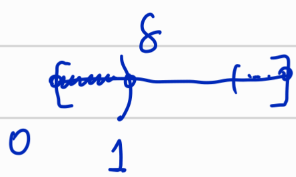
$X=[0,1]$ clase equiv. $=\{\{0,1\}\}\cup\{\{x\}: 0<x<1\}$.

(identificamos 0 y 1)

X/R



Ejemplo: π no es, en general, abierta. $X=[0,1]$. OR1.



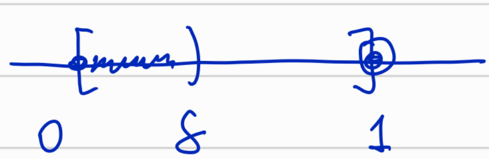
$0<\delta<1$ $\quad [0,\delta)$ es abierto en $[0,1]$.

$[0,\delta) = \underbrace{(-\infty,\delta)}_{\text{abto } \mathbb{R}}\cap[0,1]$

$\pi([0,\delta))$ no es abierto porque si lo fuera, $\pi^{-1}(\pi([0,\delta)))$ sería abierto en $[0,1]$.

$$\pi^{-1}(\pi([0,\delta))) = \bigcup_{\pi(x)\in\pi([0,\delta)) \Leftrightarrow x\in[0,\delta)} [x] = \bigcup_{x\in[0,\delta)}[x] = \underbrace{[0]}_{\{0,1\}} \cup \underbrace{\bigcup_{0<x<\delta}[x]}_{(0,\delta)} = \{0,1\}\cup(0,\delta) = [0,\delta)\cup\{1\}$$

$\pi(x)\in\pi([0,\delta)) \Leftrightarrow xRy$ tal que $y\in[0,\delta)$. Entonces $[x]=[y]$.



¿$[0,\delta)\cup\{1\}$ abto en $[0,1]$?

NO porque $1\notin \operatorname{int}([0,\delta)\cup\{1\})$

Def: Sea X un conjunto, R una relación de equivalencia, $\pi: X \to X/R$ proyección canónica. Diremos que $A \subset X$ es saturado ó R-saturado si $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$.

A R-saturado $\iff \forall x \in A, [x] \subset A$. (*)

En el ejemplo anterior, $\{0\}$ no es R-saturado $\pi(\{0\}) = \{[0]\}$ y $\pi^{-1}(\pi(\{0\})) = [0,1)$. Si $x \in (0,1)$ $\pi^{-1}(\pi(\{x\})) = \{x\}$. Por tanto, $\{x\}$ si es R-saturado.

Demostración de (*). Si A es R-saturado, entonces $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. Si $x \in A$, yRx, entonces $\pi(y) = \pi(x) \in \pi(A) \Rightarrow y \in \pi^{-1}(\pi(A)) = A$ $\Rightarrow y \in A$. Por tanto, $[x] \subset A$.

Supongamos ahora que $\forall x \in A, [x] \subset A$. Vamos a probar que $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$ (A siempre está contenido en $\pi^{-1}(\pi(A))$). Solo hay que probar que $\pi^{-1}(\pi(A)) \subset A$. Sea $y \in \pi^{-1}(\pi(A)) \Rightarrow \pi(y) \in \pi(A) \Rightarrow \exists x \in A$ tal que $\pi(y) = \pi(x) \Rightarrow y \in [x]$, $x \in A$. Por hipótesis $y \in A$. Esto implica que $\pi^{-1}(\pi(A)) \subset A$. $\blacksquare$