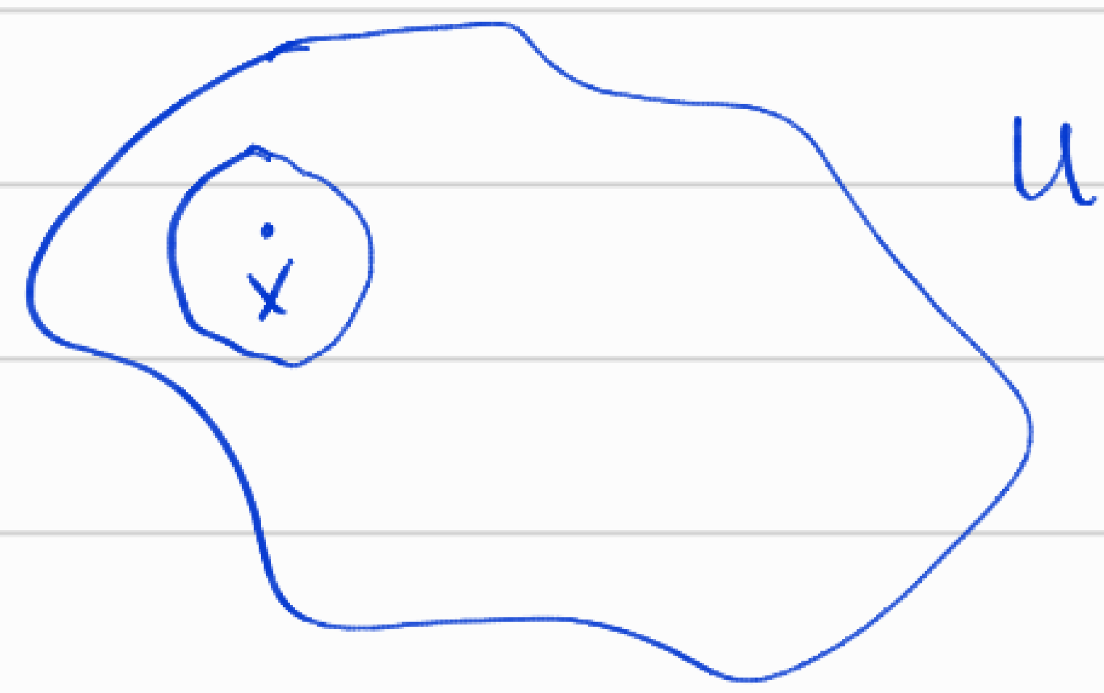
30/09/2020

(X,d) e. métrico, $U \subset X$ es abierto si $\forall x \in U$, $\exists r>0$ tal que $B(x,r) \subset U$



<u>Propiedad</u>: $x \neq y$

Hausdorff.

<u>Def</u>: Sea (X,d) un espacio métrico. La topología inducida por d es la familia $T_d \subset P(X) = \{\text{subconjuntos de } X\}$ formada por los conjuntos abiertos.

<u>Proposición</u>: Si (X,d) es un e. métrico y T_d la topología inducida:
Entonces:

1. $\phi, X \in T_d$
2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T_d \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T_d$
3. $U_1, \dots, U_k \in T_d \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T_d$

<u>Dem</u>: 1. $\phi \in T_d$ por suposición. $X \in T_d$. Sea $x \in X$, sea $r>0$ arbitrario $\Rightarrow B(x,r) \subset X$. Como $x \in X$ es arbitrario $\Rightarrow X \in T_d$

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T_d$. Si $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T_d$.

Si $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. $U_{i_0} \in T_d$

$\Rightarrow \exists\, r>0 \,/\, B(x,r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Como $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ es arbitrario $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T_d$.

3. $U_1,\dots,U_K \in T_d$. Si $U_1\cap\dots\cap U_K = \emptyset \Rightarrow U_1\cap\dots\cap U_K \in T_d$

Si $U_1\cap\dots\cap U_K \neq \emptyset$. Sea $x \in U_1\cap\dots\cap U_K \Rightarrow x \in U_i \ \forall i=1,\dots,K$.
Cada $U_i \in T_d$. Para cada $i\in\{1,\dots,K\}$, existe $r_i>0$ tal que $B(x,r_i)\subset U_i$. Tomando $r=\min\{r_1,\dots,r_K\}$ $(r\le r_i\ \forall i)$ $B(x,r)\subset B(x,r_i)$ $\forall i=1,\dots,K \Rightarrow B(x,r)\subset B(x,r_1)\cap\dots\cap B(x,r_K)\subset U_1\cap\dots\cap U_K$

Como $x\in U_1\cap\dots\cap U_K$ es arbitrario, $U_1\cap\dots\cap U_K\in T_d$.

Def: un conjunto $C\subset X$ es cerrado si $X\setminus C$ es abierto $(X\setminus C\in T_d)$

Def: A la familia de conjuntos cerrados de un espacio métrico la vamos a denotar por C_{T_d}.

Propiedades (ejercicio)

1. $\emptyset, X \in C_{T_d}$.
2. $\{C_i\}_{i\in I}\subset C_{T_d} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} C \in C_{T_d}$
3. $C_1,\dots,C_K\in C_{T_d} \Rightarrow C_1\cup\dots\cup C_K \in C_{T_d}$

2. $\mathbb{X}\setminus \underbrace{\bigcap_{i\in I} G_i} = \bigcup_{i\in I} (\underbrace{\mathbb{X}\setminus G_i}_{T_d})$

3 $\underbrace{\mathbb{X}\setminus(G_1\cup\dots\cup G_k)}_{\in T_d} = (\underline{\mathbb{X}\setminus G_1})\cap\dots\cap(\underline{\mathbb{X}\setminus G_k})$

__Ejemplo:__ La intersección arbitraria de conjuntos abiertos no es, en general, un conjunto abierto.

$\mathbb{X}=\mathbb{R}^2$ $\quad U_i = B(0,1/i)$ $\quad i\in\mathbb{N}$ $\quad B=$ bola con distancia d_2

$$\boxed{\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i = \{0\}}$$
$$\overline{}$$

$0\neq p \Rightarrow d(p,0)=\varepsilon > 1/i_0$

$\Rightarrow p\notin B(0,1/i_0)=U_{i_0}$

$\Rightarrow p\notin \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i$

$\{0\}$ no es abierto en $(\mathbb{R}^2,d_2)$: cualquier $B(0,r)$ contiene al menos al punto $(r/2,0)$ $(B(0,r)\not\subset\{0\})$

Dos distancias pueden definir la misma topología

__Def:__ Sea $\mathbb{X}$ un conjunto no vacío, d, d' distancias en $\mathbb{X}$. Diremos que d, d' son equivalentes si existen $\alpha,\beta>0$ tales que:

$$\beta\cdot d' \leq d \leq \alpha\cdot d' \qquad (\beta\cdot d'(x,y)\leq d(x,y)\leq \alpha\cdot d'(x,y)\ \forall x,y\in\mathbb{X})$$

Teorema: Sea X un conjunto, d, d' distancias equivalentes. Entonces $T_d = T_{d'}$.

Dem: Sean $\alpha, \beta > 0$ tales que $\beta d' \leq d \leq \alpha \cdot d'$.

Sea $r > 0$, $x \in X$. $B'(x,r)$ = bola con distancia d'. Veamos que

$$\underbrace{B(x,\alpha r)}_{r'} \supset B'(x, \underbrace{r}_{r'/\alpha}) \qquad (*) \equiv \quad B(x,r) \supset B'(x, \tfrac{r}{\alpha})$$

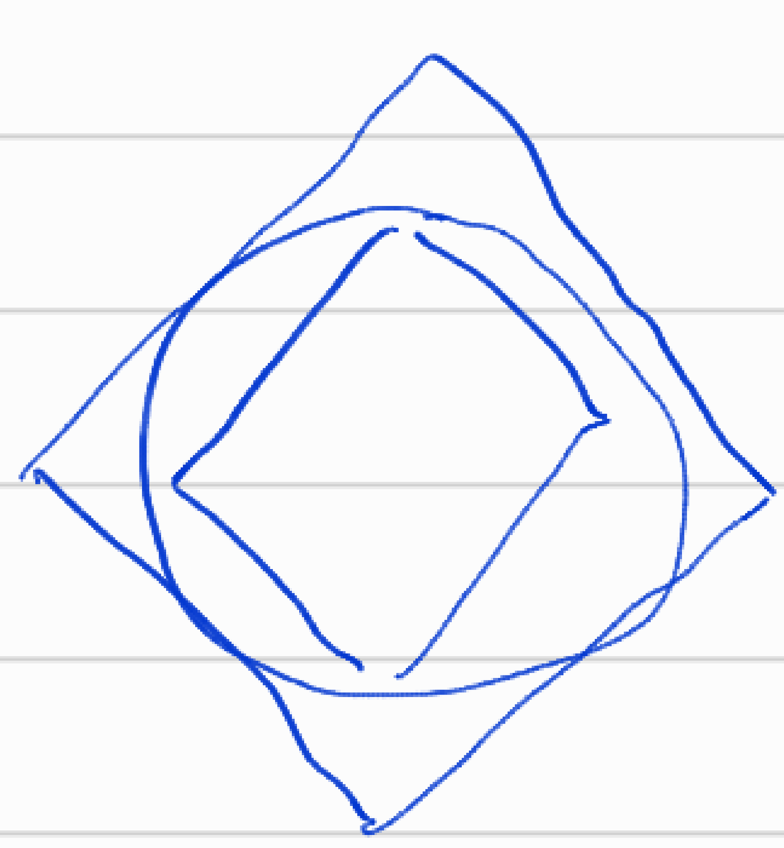
Para demostrar $(*)$ tomamos $z \in B'(x,r) \Rightarrow d'(x,z) < r \Rightarrow$
$d(x,z) \leq \alpha \cdot d'(x,z) < \alpha r \Rightarrow z \in B(x, \alpha r)$

Además $\quad B(x,r) \subset B'(x, \frac{r}{\beta})$

$$z \in B(x,r) \Rightarrow d(x,z) < r \Rightarrow d'(x,z) \leq \frac{d(x,z)}{\beta} < \frac{r}{\beta} \Rightarrow z \in B'(x, \frac{r}{\beta})$$

$$\beta d' \leq d \leq \alpha \cdot d'$$
$$\Downarrow$$
$$B'(x, \frac{r}{\alpha}) \subset B(x,r) \subset B'(x, \frac{r}{\beta})$$

Si dos distancias son equivalentes, las bolas centradas en un punto contienen y están contenidas en bolas centradas en el punto para la otra distancia.



Veamos que $T_d = T_{d'}$. Veamos que $T_d \subset T_{d'}$.

Sea $U \in T_d$. Veamos que $U \in T_{d'}$. Si $U = \emptyset \Rightarrow U \in T_{d'}$. Supongamos que $U \neq \emptyset$. Sea $x \in U \in T_d$. Existe $r > 0$ tal que

$$\boxed{B'(x, \tfrac{r}{\alpha}) \subset \boxed{B(x,r) \subset \boxed{U}}}$$

$x \in U$ arbitrario $\Rightarrow$ $U \in T_{d'}$ $\Rightarrow$ $T_d \subset T_{d'}$

La otra inclusión $T_{d'} \subset T_d$ se prueba análogamente.

Def: una distancia d en X es acotada si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $d \leq \varepsilon$ $(d(x,y) \leq \varepsilon \ \forall x,y \in X)$ |||