Único prerrequisito: Teoría de conjuntos (Álgebra I)

De Morgan $\quad (A\cup B)^c = A^c\cap B^c \qquad \left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c \quad (*)$

$(A\cap B)^c = A^c\cup B^c \qquad \left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcup_i A^c$

$A\subset X \Rightarrow A^c = X\setminus A = \{x\in X \,/\, x\notin A\}$

$(*) \quad X\setminus\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcap_i (X\setminus A_i)$

$A\subset B \Rightarrow A^c\supset B^c$

$\subset$ (contenido o igual: ($\subseteq$) otras signaturas)

$\subsetneq$ (contenido estrictamente)

$f: X\to Y$ aplicación

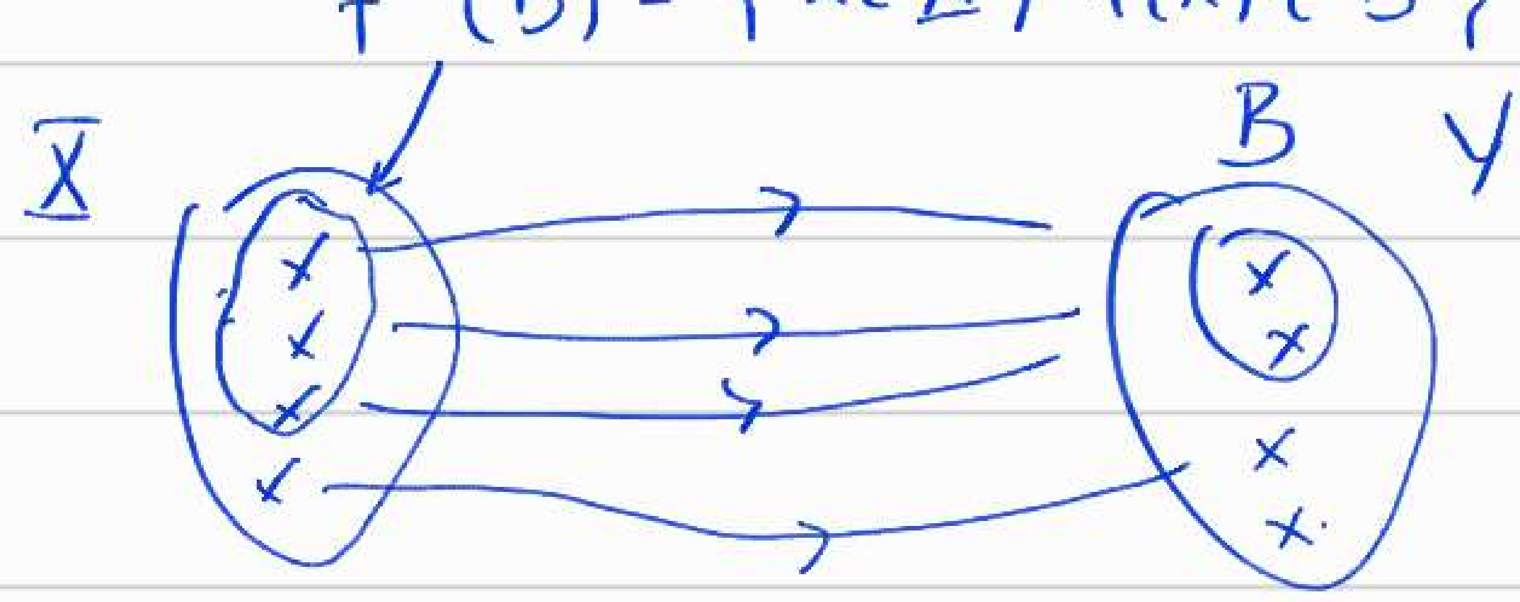
El símbolo f^{-1} se usa para dos conceptos distintos:

1. Si f es biyectiva, f^{-1} es la aplicación inversa

$f(x)=y \qquad f^{-1}(y)=x$

2. Imagen inversa de un conjunto: si $B\subset Y$

$f^{-1}(B) = \{x\in X \,/\, f(x)\in B\}$



$f^{-1}(B)$

Si f es biyectiva, entonces $\underline{f^{-1}(B)} = \{x\in X/\underbrace{f(x)}_{y}\in B\} = \{\underbrace{f^{-1}(y)}_{x}/\ y\in B\}$

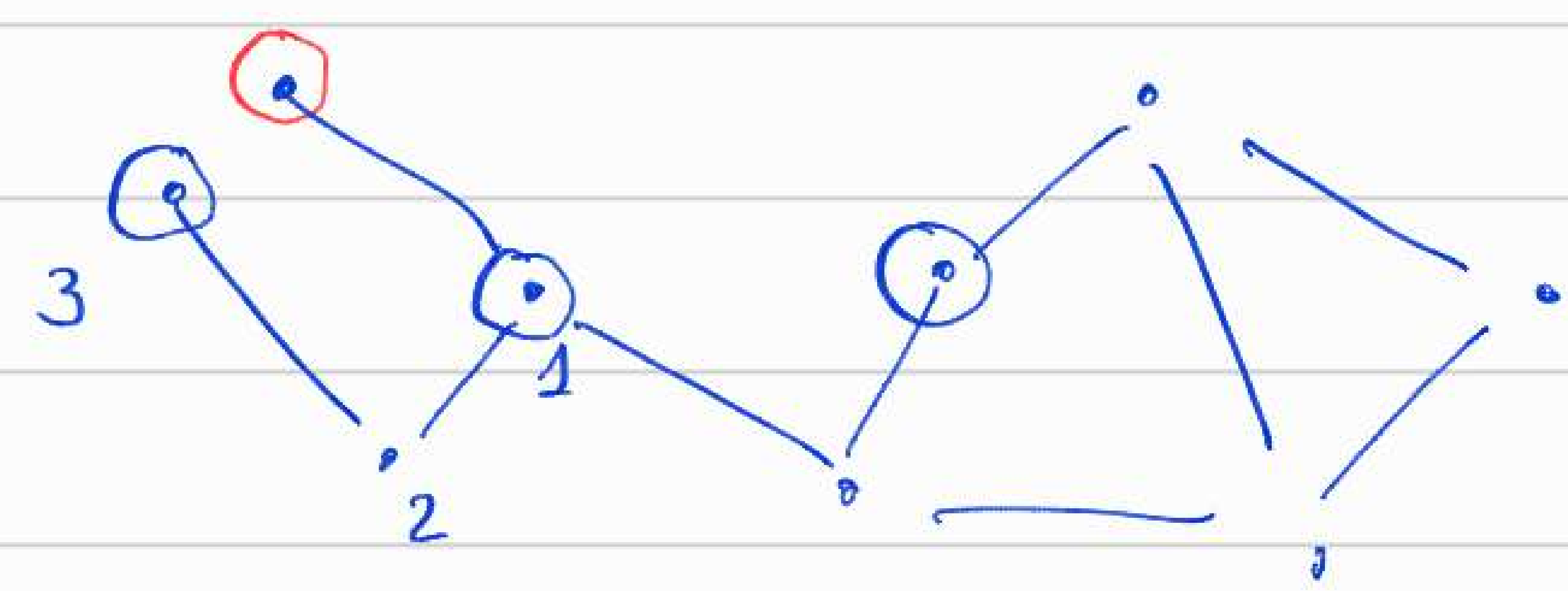
$=$ imagen de B por $f^{-1} = \underline{f^{-1}(B)}$

X conjunto no vacío. Si $x, y \in X$, ¿están próximos?

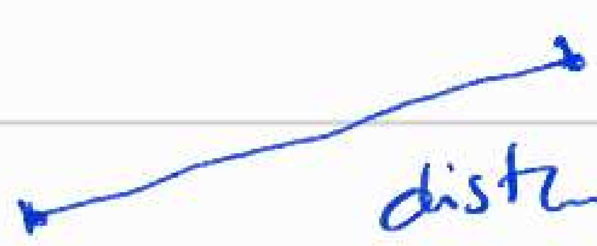
1. distancia

$|x-y|$ = distancia en $\mathbb{R}$.

2.



$d(x,y)$



distancia Euclídea

La distancia permite definir la noción de proximidad.
Hay distancias que definen la misma noción de proximidad

$d(x,y) < 10 \iff d'(x,y) < 20$

$d \qquad d' = 2d$

Topología es una estructura en un conjunto que proporciona una noción de proximidad independiente de una distancia

1. No hace falta una distancia para definir una topología
2. Dos distancias pueden generar la misma topología.

1$^{\text{er}}$ tema. Intro a espacios métricos + def. esp. topológico
2º tema. Aplicaciones continuas + homeomorfismos.
3$^{\text{er}}$ tema: Conexión y compacidad

Bibliografía recomendada

- Munkres, Topología, 2ª ed.
- R. López, Topología, Ed. UGR

24/09/2020

TEMA 0. ESPACIOS MÉTRICOS

Sea X conjunto no vacío.

Def: una distancia en X es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

D1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$

D2. $d(x,y) = d(y,x), \quad \forall x,y \in X$ (simétrica)

D3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad \forall x,y,z \in X$
(desigualdad triangular)

Nota: $d(x,y) \geq 0$ se obtiene a partir de D1, D2, D3.

$$0 \overset{D1}{=} d(x,x) \overset{D3}{\leq} d(x,y) + \underline{d(y,x)} \overset{D2}{=} d(x,y) + \underline{d(x,y)} = 2d(x,y)$$

$\Rightarrow d(x,y) \geq 0$

Ejemplo: si d es distancia en X y $r > 0$, entonces

$rd : X \times X \to \mathbb{R} \qquad (rd)(x,y) = r \cdot d(x,y)$

Entonces rd es una distancia en X

Ejemplo: $\mathbb{R}$. $d(x,y) = |y - x|$ (D3. $|x+y| \leq |x| + |y|$)

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$ $\|\cdot\|$ norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

N1. $\|x\| \geq 0.\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ Además $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2. $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

N3 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

La distancia asociada a la norma es

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Ejemplo: si $x \in \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$ norma 2 ó norma Euclídea

$$\|x\|_\infty = \max \{ |x_i| : i=1, \ldots, n \}$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$\left. \begin{array}{l} \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq n \cdot \|\cdot\|_\infty \\ \\ \|\cdot\|_\infty \leq \|\ \|_2 \leq n^{1/2} \|\ \|_\infty \end{array} \right\}$$

Nota: Las distancias asociadas a una norma tienen algunas propiedades que no se verifican para distancias más generales (que no proceden de normas)

Ejemplo: sea X un conjunto arbitrario no vacío. Definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

d es una distancia en X (distancia discreta)

D1. $d(x,y)=0 \iff x=y$ (directamente de la def.)

D2. $d(x,y)=d(y,x)$ (" " " ")

D3 $x,y,z\in X$. Queremos $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

Si $d(x,y)=0 \Rightarrow$ $d(x,y)=0\le \underbrace{d(x,z)+d(z,y)}_{\substack{\vee\!\backslash\\ 0}}$

Si $d(x,y)\neq 0$ $d(x,y)=1 \overset{?}{\le} \underbrace{d(x,z)+d(z,y)}_{0,\underline{\underline{1}},2}$

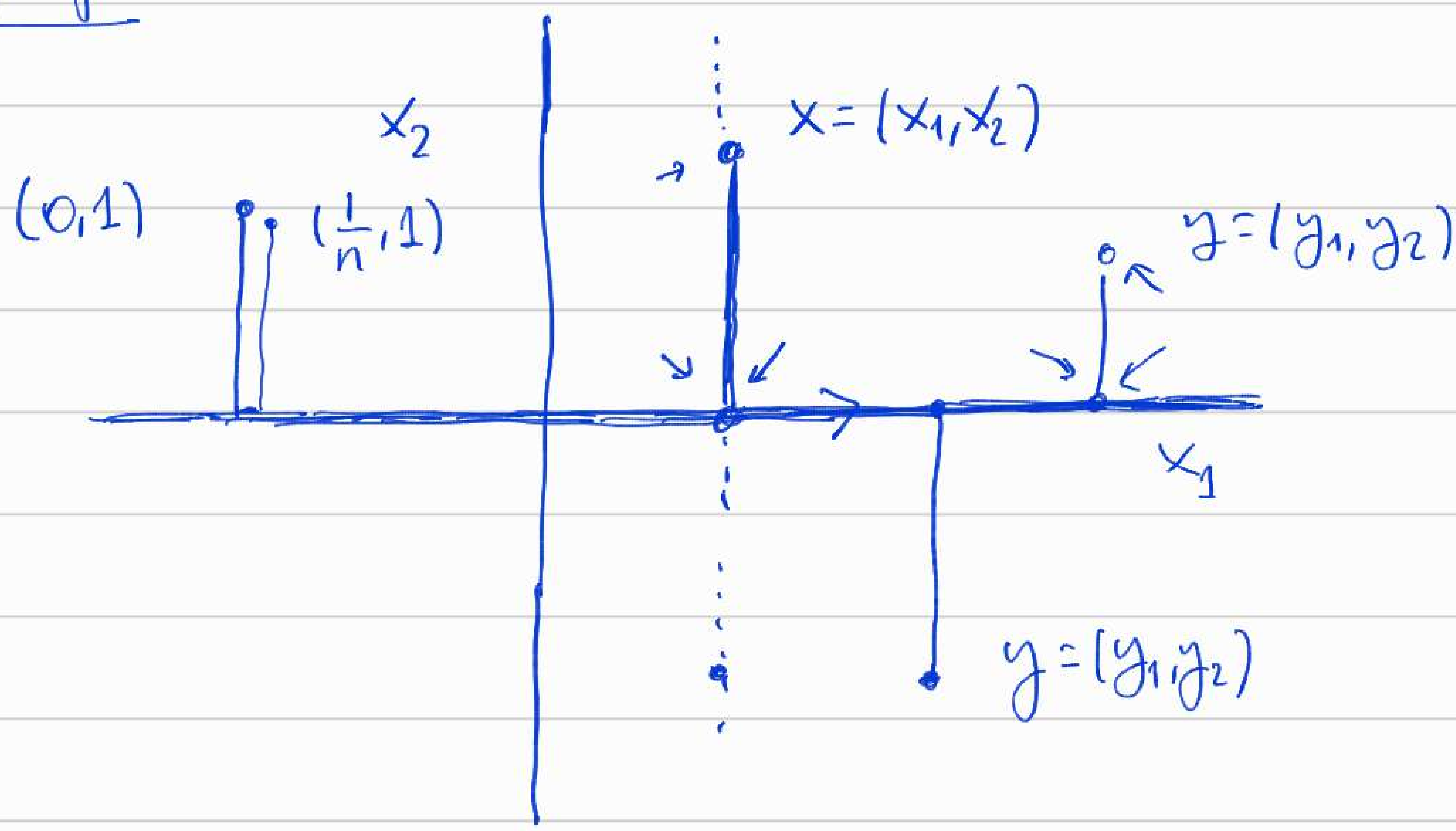
Si $d(x,z)+d(z,y)=1$ ó 2 entonces la des. triangular se verifica. Si $d(x,z)+d(z,y)=0 \underset{\substack{\uparrow\\ d(x,z),\,d(z,y)\ge 0}}{\Rightarrow} d(x,z)=d(z,y)=0 \Rightarrow x=z=y$
$\Rightarrow d(x,y)=0$ ¡¡

<u>Nota</u>: X es conj., d distancia discreta, $\lambda>0$. Entonces λd es una distancia en X

$$(\lambda d)(x,y)=\lambda\cdot d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ \lambda, & x\neq y\end{cases}$$

En la distancia discreta podemos cambiar 1 por cualquier número real positivo λ.

Ejemplo (distancia del río).



$$d(x,y)=\begin{cases} |x_2-y_2| & \text{si } x_1=y_1 \\ |x_2|+|x_1-y_1|+|y_2| & \text{si } x_1\neq y_1 \end{cases}$$

$$d\left((0,1),\left(\tfrac{1}{n},1\right)\right)$$
$$\shortparallel$$
$$1+\frac{1}{n}+1=2+\frac{1}{n}\geq 2$$

Queremos ver que d es una distancia. $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $z=(z_1,z_2)$

D1. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

$\Leftarrow$ trivial

$$\Rightarrow\ 0=d(x,y)=\begin{cases} |x_2-y_2|, & x_1=y_1 \\ |x_2|+|x_1-y_1|+|y_2|, & x_1\neq y_1 \end{cases}$$

1er caso $\underline{x_1=y_1}$ $\quad |x_2-y_2|=d(x,y)=0 \Rightarrow \underline{x_2=y_2} \Rightarrow x=(x_1,x_2)=(y_1,y_2)=y$

2º caso no puede darse $x_1 \neq y_1 \Rightarrow |x_1 - y_1| > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(x,y) = \underset{\overset{\vee\!\shortmid}{0}}{|x_2|} + \underset{\overset{\vee}{0}}{|x_1-y_1|} + \underset{\overset{\vee\!\shortmid}{0}}{|y_2|} > 0$$

D2. Propiedad simétrica: se sigue de la definición

D3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$x_1 = y_1 \left\langle \begin{array}{ll} y_1 = z_1 & A \\ y_1 \neq z_1 & B \end{array} \right. \qquad x_1 \neq y_1 \left\langle \begin{array}{ll} y_1 = z_1 & C \\ y_1 \neq z_1 & D \end{array} \right.$$

Caso A.

$d(x,y) = |x_2 - y_2|$ $\qquad$ $d(x,z) + d(z,y) = |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ es equivalente a $|x_2 - y_2| \leq |x_2 - z_2| +$
$+ |z_2 - y_2|$

$$|x_2 - y_2| = |(x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)| \leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$$

$\boxed{\text{Casos B y C comprobar}}$

caso D $\quad x_1 \neq y_1 \quad y_1 \neq z_1$

$$\begin{array}{ccc} d(x,y) & & d(x,z) + d(z,y) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| & & d(x,z) + |z_2| + |y_1 - z_1| + |y_2| \end{array}$$

subcasos de D.

D1 $\quad x_1 = z_1 \qquad d(x,z) = |x_2 - z_2|$

D2 $\quad x_1 \neq z_1 \qquad d(x,z) = |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2|$

D2

$$\underbrace{|x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2|}_{d(x,y)} \leq \underbrace{|x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2|}_{d(x,z)} + \underbrace{|z_2| + |y_1 - z_1| + |y_2|}_{d(z,y)}$$

$\downarrow$

$|y_1 - x_1| \leq |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1|$ cierta

$\leq |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1| + 2|z_2| \qquad |z_2| \geq 0$

$$|x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| \leq |x_2| + |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1| + |y_2| + 2|z_2|$$

D1. $\quad x_1 \neq y_1 \quad y_1 \neq z_1 \quad \underline{x_1 = z_1}$

$d(x,y) \qquad\qquad d(x,z) + d(z,y)$

$\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$

$|x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| \qquad |x_2 - z_2| + |y_2| + |z_1 - y_1| + |z_2|$

$x_2 = (x_2 - z_2) + z_2 \qquad \underbrace{|x_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2|}$

$|x_1 - y_1| = |z_1 - y_1|$

Partimos de $|x_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2|$ ←

$\Rightarrow \quad |x_2| + |x_1 - y_1| \leq |x_2 - z_2| + |z_2| + |z_1 - y_1| \qquad x_1 = z_1$

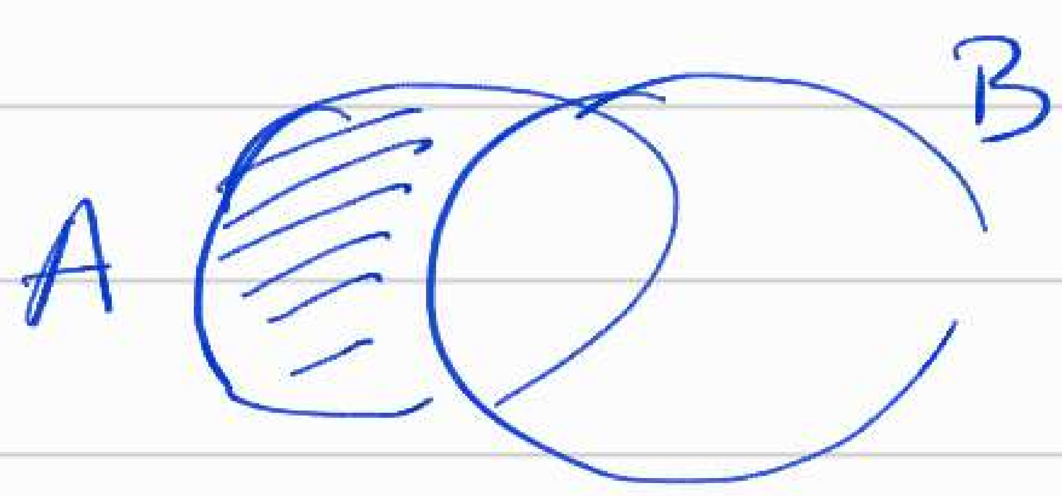
$\Rightarrow \quad |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| \leq |y_2| + |x_2 - z_2| + |z_2| + |z_1 - y_1|$

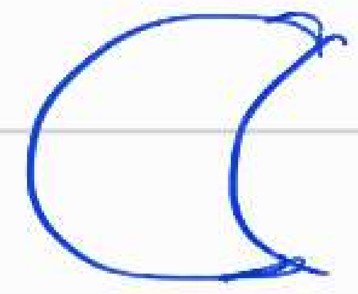
<u>Def:</u> Al par (X, d) formado por un conjunto no vacío y una distancia d se le llama espacio métrico.

<u>Def:</u> Si (X, d) es espacio métrico, $a \in X$, $r > 0$. Definimos

1. $B(a,r) = \{x \in X \, / \, d(x,a) < r\}$ (bola abierta de centro a y radio $r>0$)
2. $\overline{B}(a,r) = \{x \in X \, / \, d(x,a) \leq r\}$ (" cerrada " " " " " ")
3. $S(a,r) = \{x \in X \, / \, d(x,a) = r\}$ (esfera de centro a y radio $r>0$)

<u>Nota:</u> si $A, B \subset X$, $A \setminus B = \{a \in A \, / \, a \notin B\}$



$A \setminus B$ 

$S(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r)$

<u>Ejemplo:</u> (X, d) distancia discreta

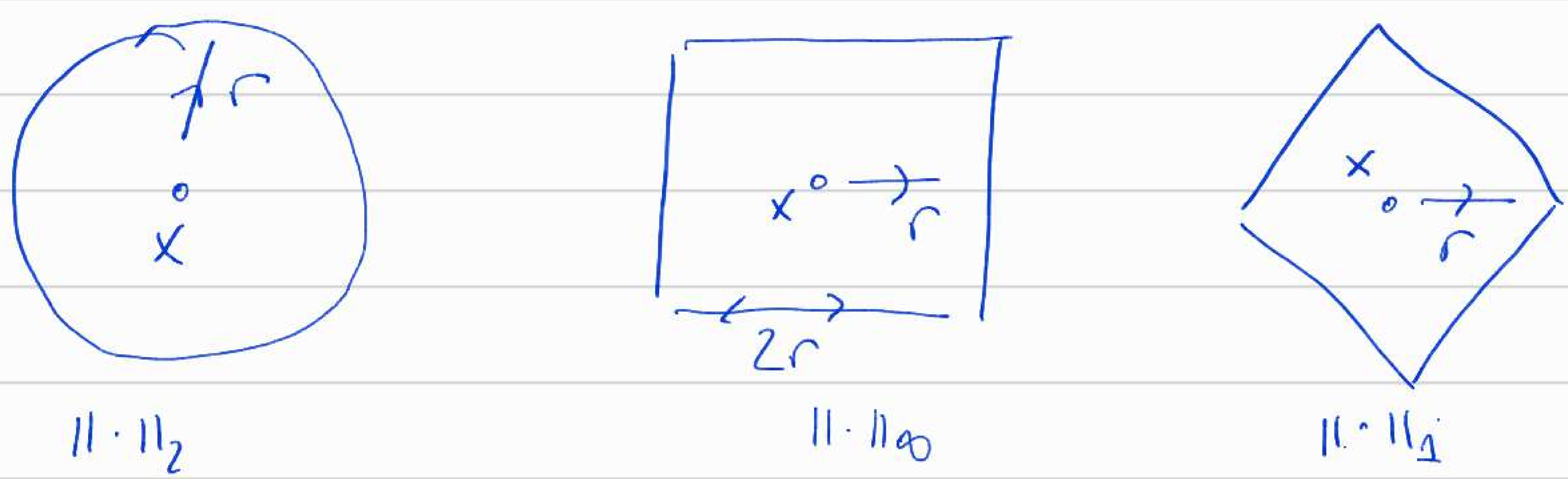
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & r \leq 1 \\ X & r > 1 \end{cases}$$

$$\bar{B}(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & r < 1 \\ X, & r \geq 1 \end{cases}$$

$B(x,1) = \{x\}$ $\quad \bar{B}(x,1) = X \Rightarrow S(x,1) = \bar{B}(x,1) \setminus B(x,1) = X \setminus \{x\}$

$r \neq 1 \quad B(x,r) = \bar{B}(x,r) \Rightarrow S(x,r) = \bar{B}(x,r) \setminus B(x,r) = \emptyset$



Propiedades: 1. $B(a,r) \subset \bar{B}(a,r)$

2. $r < s \Rightarrow B(a,r) \subset B(a,s)$, $\bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(a,s)$

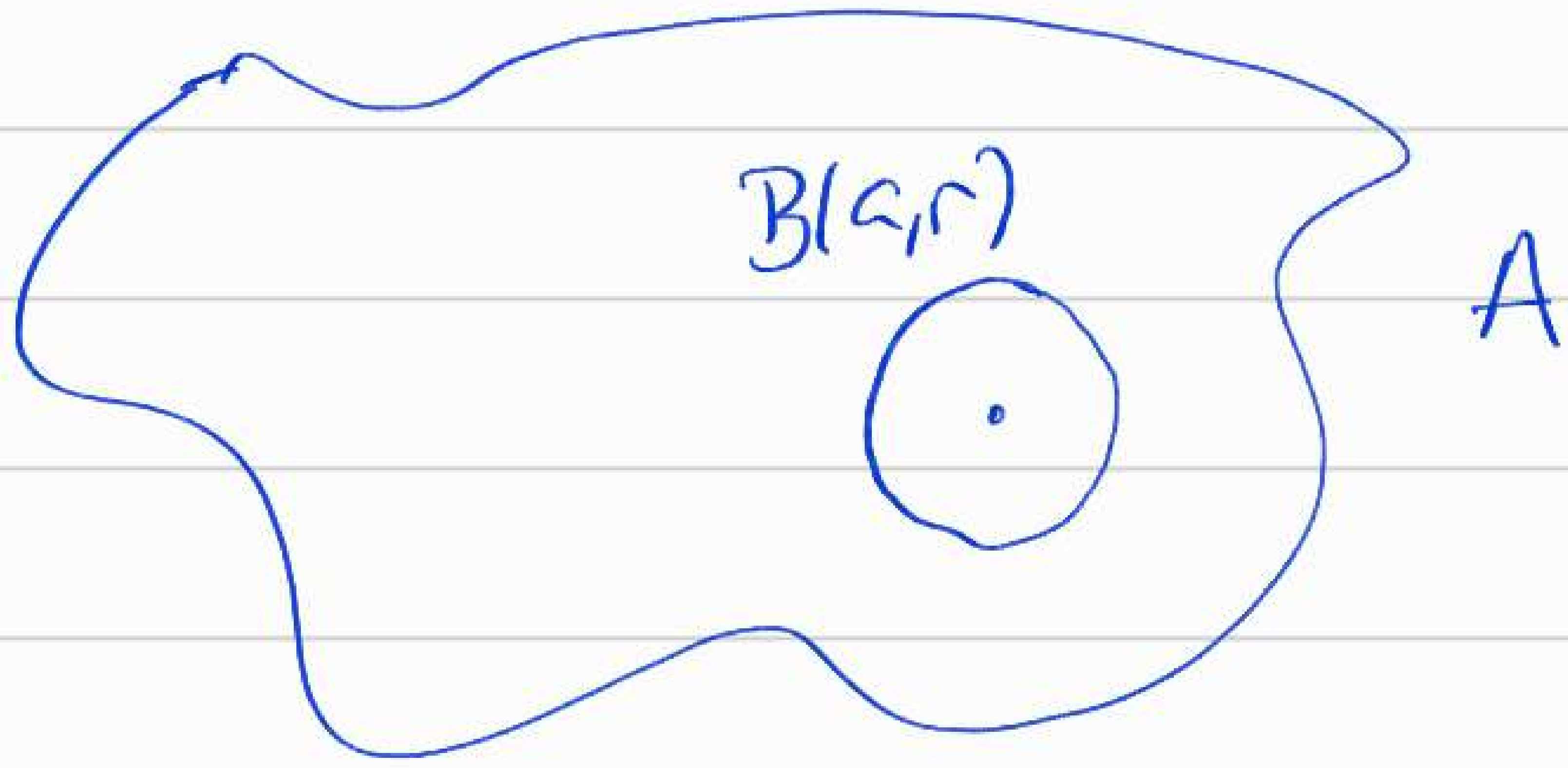
3. Si $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \bar{B}(a,\lambda r) \subset B(a,r)$

3. $x \in \bar{B}(a,\lambda r) \Rightarrow d(a,x) \leq \lambda r \underset{\lambda<1}{<} r \Rightarrow x \in B(a,r)$

$\Rightarrow \bar{B}(a,\lambda r) \subset B(a,r)$ Toda bola abierta contiene a una bola cerrada

Def: Sea (X,d) un espacio métrico. Diremos que $A \subset X$ es abierto en (X,d) si, para todo $a \in A$, $\exists\, r>0$ (depende de a) tal que

$$B(a,r) \subset A$$



Siempre supondremos que $A=\emptyset$ es abierto

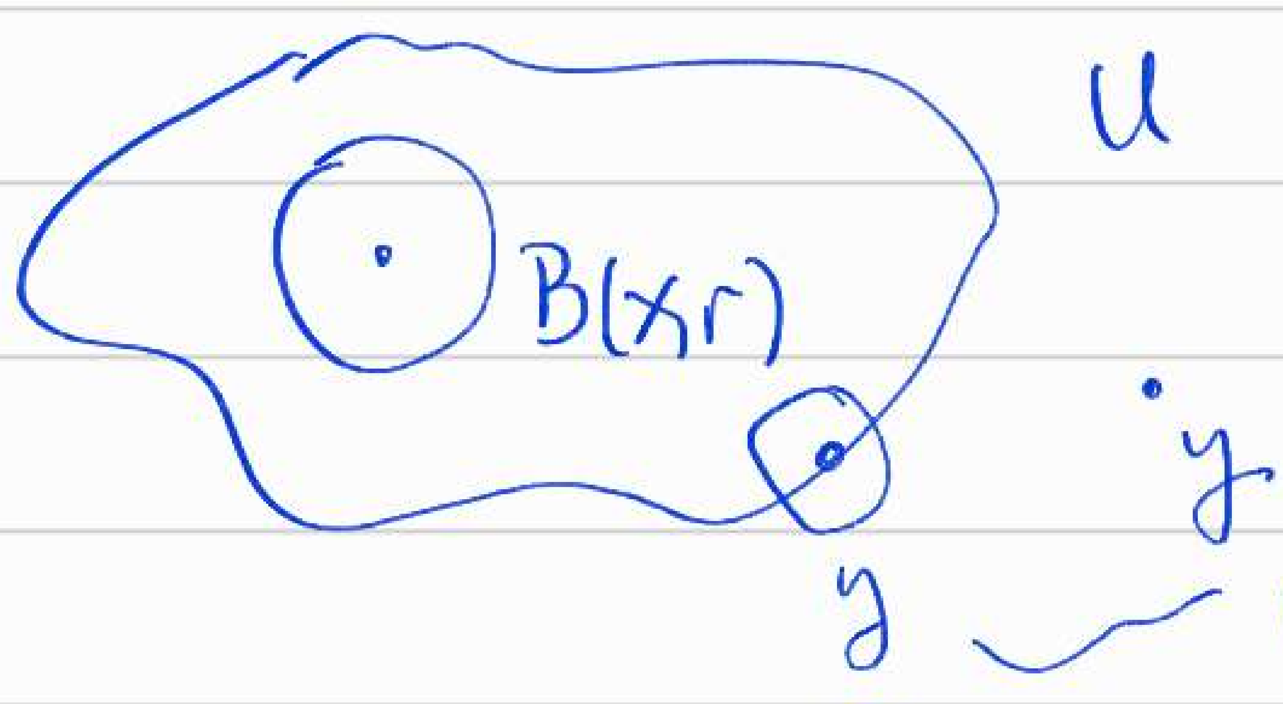
25/09/2020

Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que $A\subset X$ es abierto si $\forall a\in A$, $\exists r>0$ (depende de a) tal que $B(a,r)\subset X$

$A=\phi$ es abto. por convenio

Def: Sea (X,d) un e. métrico, $C\subset X$ es cerrado si su complementario $X\setminus C$ es abierto

Def: Sea (X,d) un e. métrico, $x\in X$. Diremos que un conjunto U es entorno de x si $\exists r>0$ tal que $B(x,r)\subset U$.

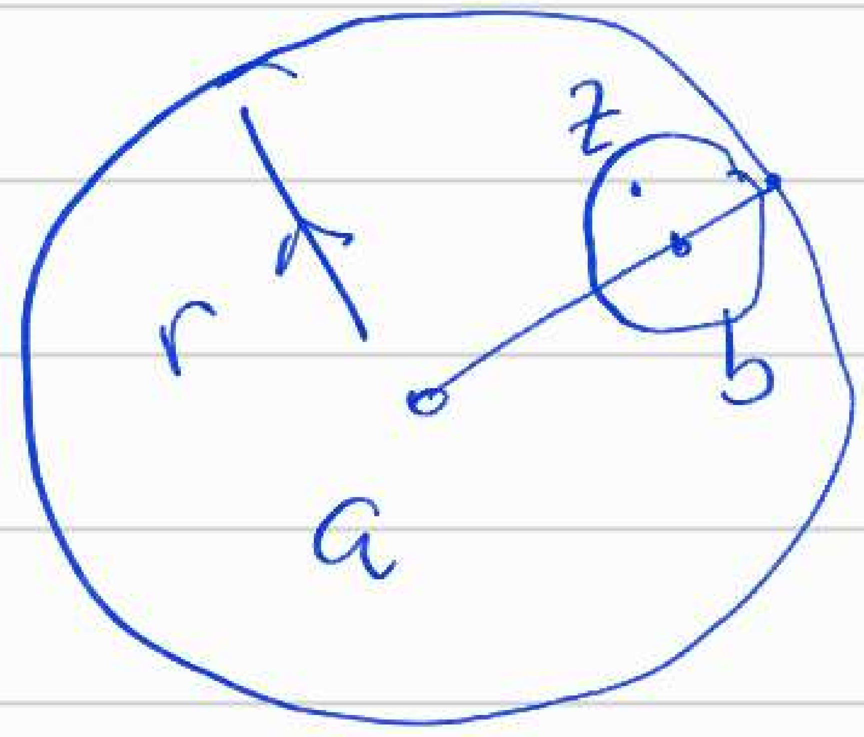


$x\in B(x,r)\subset U$

y ~ U no entorno de y

Propiedad: una bola abierta en un espacio métrico es un conjunto abierto.

Dem: sea $B(a,r)$ una bola en (X,d). Sea $b\in B(a,r)$. Queremos encontrar $s>0$ tal que $B(b,s)\subset B(a,r)$



Tomamos $s = r - d(a,b) > 0$ $(d(a,b) < r \Leftrightarrow b \in B(a,r))$. Comprobamos que $B(b,s) \subset B(a,r)$. Tomamos $z \in B(b,s)$ $(d(z,b) < s)$. Para comprobar que $z \in B(a,r)$ calculamos $d(z,a)$

$$d(z,a) \leq d(z,b) + d(a,b) < s + d(a,b) = (r - d(a,b)) + d(a,b) = r$$

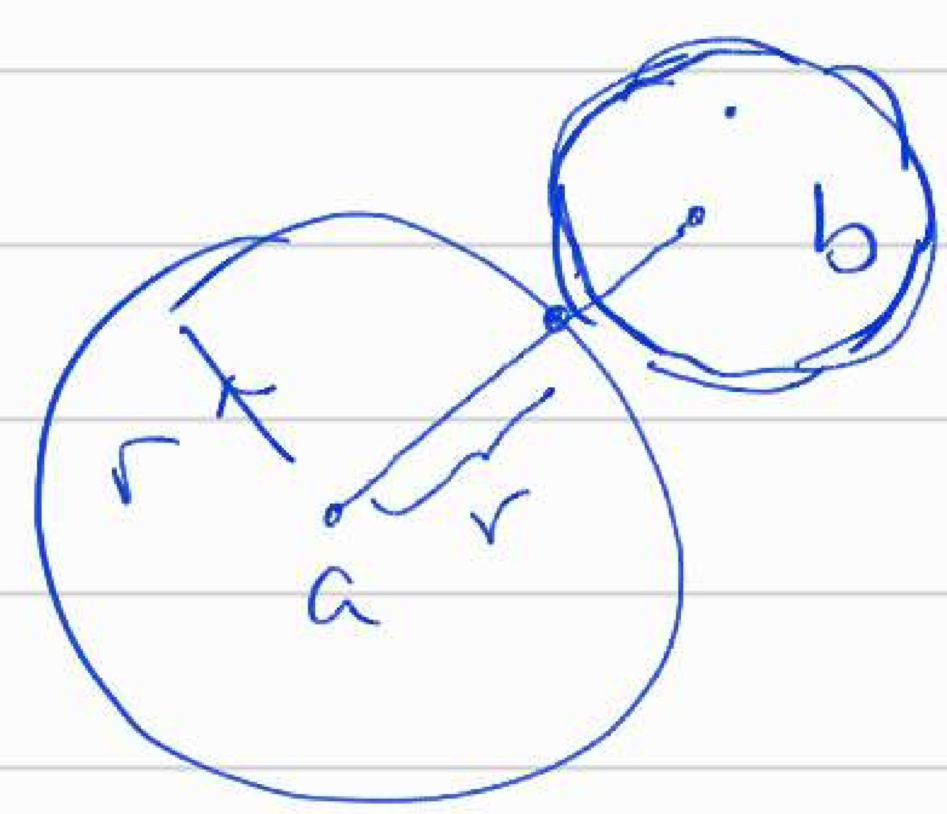
$\Rightarrow z \in B(a,r)$

Como z es arbitrario, $B(b,s) \subset B(a,r)$. Como $b \in B(a,r)$ es arbitrario, tenemos $B(a,r)$ es un conjunto abierto.

Propiedad: Una bola en un espacio métrico es un conjunto cerrado.

Dem: $\bar{B}(a,r) \subset X$. (X,d) e. métrico. Veamos que $X \setminus \bar{B}(a,r)$ es un conjunto abierto. $\bar{B}(a,r) = \{x \in X / d(a,x) \leq r\} \Rightarrow X \setminus \bar{B}(a,r) =$
$= \{x \in X / d(x,a) > r\}$

Queremos ver que $X \setminus \bar{B}(a,r)$ es abierto.
Tomamos $b \in X \setminus \bar{B}(a,r)$ $(d(a,b) > r)$
Definimos $s = d(a,b) - r > 0$. Vamos a comprobar que $B(b,s) \subset X \setminus \bar{B}(a,r)$. Sea $x \in B(b,s)$ $(d(x,b) < s)$. Comprobamos que $x \in X \setminus \bar{B}(a,r)$ $(d(x,a) > r)$.



$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < d(a,x) + s$$

$$\Rightarrow \quad r = d(a,b) - s < d(a,x)$$

Como $x \in B(b,s)$ es arbitrario, $B(b,s) \subset X \setminus \bar{B}(a,r)$

Como $b \in \mathbb{X} \setminus \bar{B}(a,r)$ es arbitrario, entonces $\mathbb{X} \setminus \bar{B}(a,r)$ es abierto $\Rightarrow$ $\bar{B}(a,r)$ es cerrado.

<u>Ejercicio</u>: 1. Los conjuntos formados por un punto son cerrados en un espacio métrico.

2. $S(a,r) = \bar{B}(a,r) \setminus B(a,r)$ es un conjunto cerrado.

<u>Ejemplo</u>: sea $\mathbb{X}$ un conjunto no vacío y d la distancia discreta.

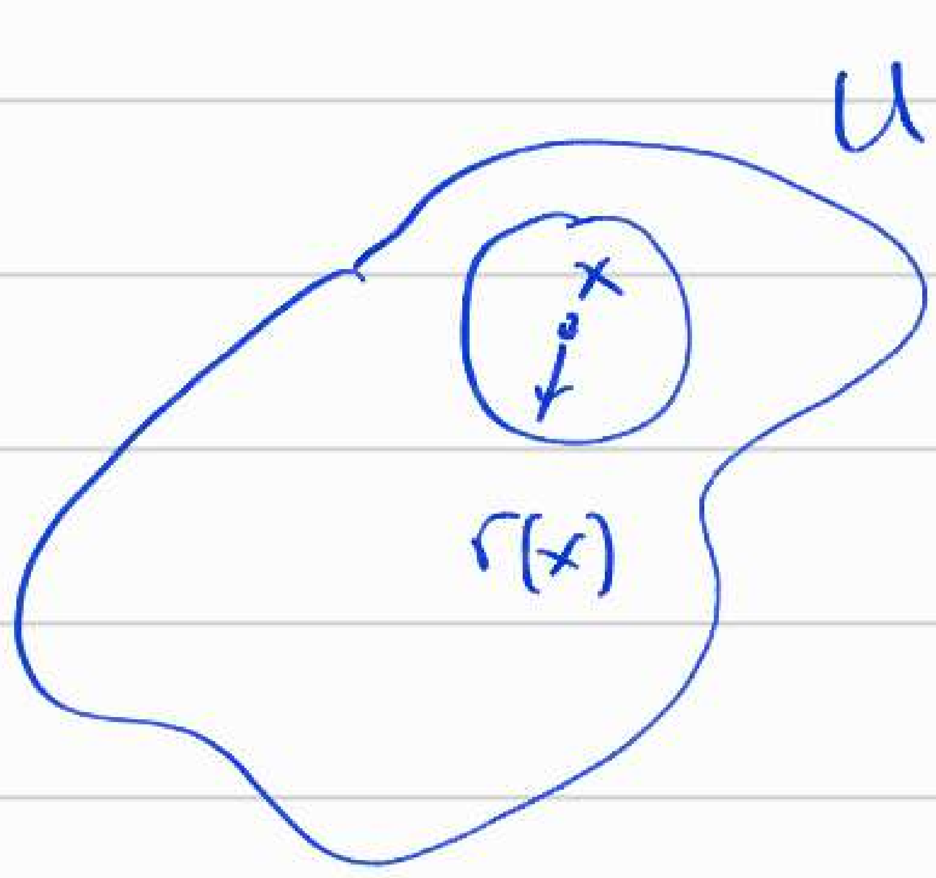
Sea $U \subset \mathbb{X}$ un conjunto arbitrario, $U \neq \phi$, $x \in U$. ¿$\exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$? Tomando $r \in (0,1]$, $B(x,r) = \{x\}$

$x \in B(x,r) = \{x\} \subset U$.

Como $x \in U$ es arbitrario $\Rightarrow$ U es abierto.

En un espacio métrico discreto, todos los conjuntos son abiertos. Como los conjuntos cerrados son los complementarios de los conjuntos abiertos, todos los conjuntos son cerrados

<u>Proposición</u>: Sea $(\mathbb{X}, d)$ un e. métrico, $U \subset \mathbb{X}$ abierto no vacío. Entonces U es unión de bolas abiertas.



<u>Dem</u>: $\forall x \in U$, existe $r(x) > 0$ tal que

$B(x, r(x)) \subset U$

Así obtenemos la familia $\{B(x,r(x)) \,/\, x\in U\}$

$$B(x,r(x))\subset U \quad \forall x\in U \Rightarrow \boxed{\bigcup_{x\in U} B(x,r(x))\subset U}$$

$$\text{Si } z\in U \Rightarrow z\in B(z,r(z))\subset \bigcup_{x\in U} B(x,r(x)) \underset{z \text{ arbitrario}}{\Rightarrow} \boxed{U\subset \bigcup_{x\in U} B(x,r(x))}$$

Por tanto: $U=\bigcup_{x\in U} B(x,r(x))$ $\square$

Pregunta: ¿Es todo conjunto abierto de (X,d) unión de bolas cerradas? SÍ

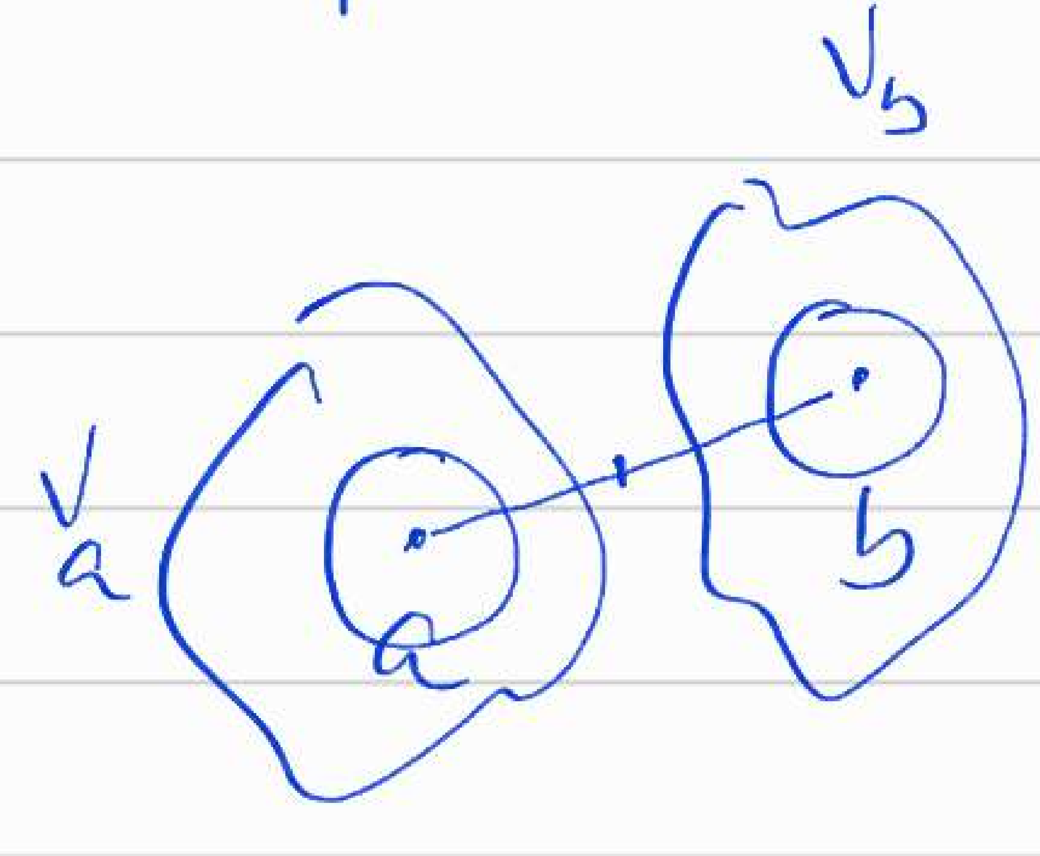
Sea U abto. Sea $x\in U$. Existe $r(x)>0$ tal que $B(x,r(x))\subset U$

$$\bar{B}\left(x,\frac{r(x)}{2}\right)\subset B(x,r(x))\subset U$$

Se puede probar que: $\boxed{U=\bigcup_{x\in U} \bar{B}\left(x,\frac{r(x)}{2}\right)}$.

Proposición: Sea (X,d) un espacio métrico; sean $a,b\in X$, $a\neq b$. Existen entornos V_a, V_b de a,b, respectivamente, tales que $V_a\cap V_b=\phi$

Dem: (V_x es entorno de x si $\exists r>0$ tal que $B(x,r)\subset V_x$)



Las bolas abiertas que contienen a x son entornos de x
($x \in B(a,s)$. Sabemos que $\exists r > 0 / B(x,r) \subset B(a,s)$)

Hemos probado que las bolas abiertas son entorno de cada uno de sus puntos

Sea $r = d(a,b) > 0$ $(a \neq b)$. Tomamos $V_a = B(a, \frac{r}{2})$, $V_b = B(b, \frac{r}{2})$

Veamos que $V_a \cap V_b = \emptyset$. Supongamos que no lo es: sea $x \in V_a \cap V_b$

$x \in V_a = B(a, r/2) \Rightarrow d(x,a) < r/2$
$x \in V_b = B(b, r/2) \Rightarrow d(x,b) < r/2$

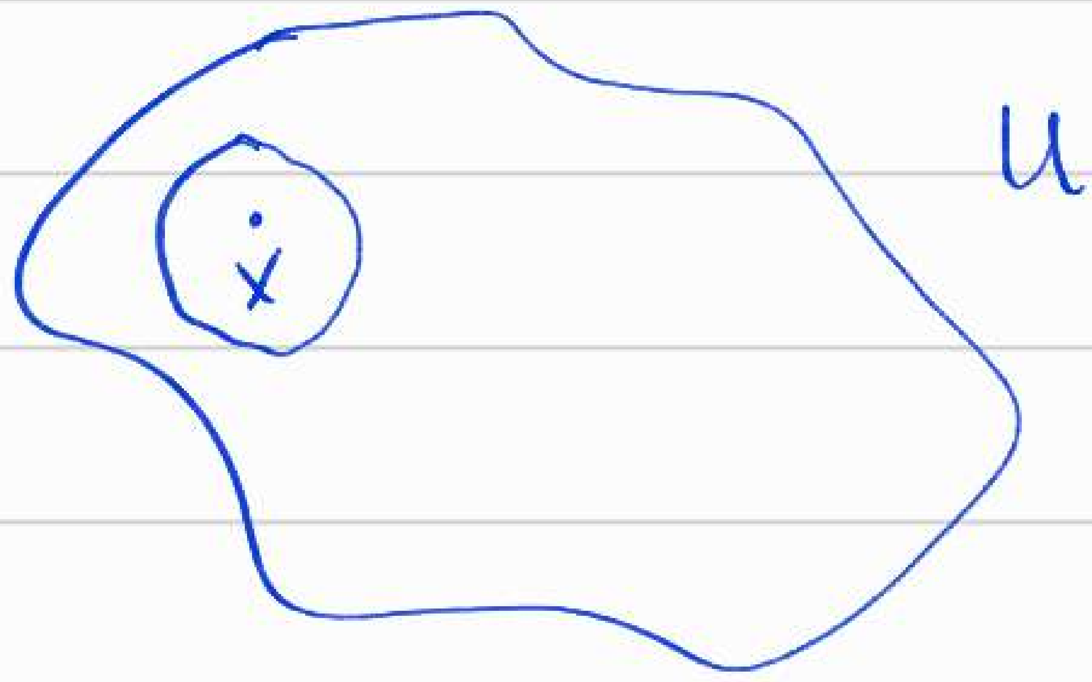
$$r = d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \quad !!$$

Esta contradicción viene de suponer que $V_a \cap V_b \neq \emptyset$. Por tanto $V_a \cap V_b = \emptyset$ $\square$

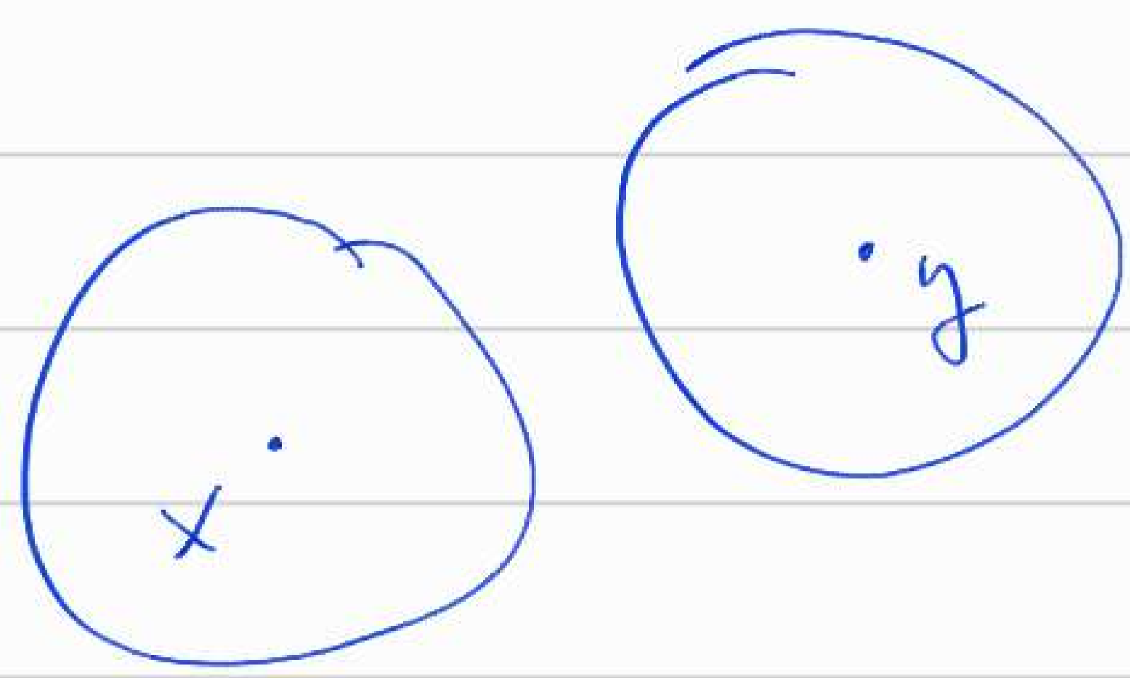
HAUSDORFF

30/09/2020

(X,d) e. métrico, $U \subset X$ es abierto si $\forall x \in U$, $\exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$



Propiedad: $x \neq y$



Hausdorff.

Def: sea (X,d) un espacio métrico. La topología inducida por d es la familia $T_d \subset P(X) = \{\text{subconjuntos de } X\}$ formada por los conjuntos abiertos.

Proposición: si (X,d) es un e. métrico y T_d la topología inducida: Entonces:

1. $\phi, X \in T_d$
2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T_d \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T_d$
3. $U_1, \dots, U_k \in T_d \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T_d$

Dem: 1. $\phi \in T_d$ por suposición. $X \in T_d$. Sea $x \in X$, sea $r > 0$ arbitrario $\Rightarrow B(x,r) \subset X$. Como $x \in X$ es arbitrario $\Rightarrow X \in T_d$

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T_d$. Si $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T_d$.

Si $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. $U_{i_0} \in T_d$

$\Rightarrow \exists r>0 \,/\, B(x,r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Como $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ es arbitrario $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T_d$.

3. $U_1, \dots, U_K \in T_d$. Si $U_1 \cap \dots \cap U_K = \emptyset \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_K \in T_d$

Si $U_1 \cap \dots \cap U_K \neq \emptyset$. Sea $x \in U_1 \cap \dots \cap U_K \Rightarrow x \in U_i \; \forall i = 1, \dots, K$.
Cada $U_i \in T_d$. Para cada $i \in \{1, \dots, K\}$, existe $r_i > 0$ tal que $B(x, r_i) \subset U_i$. Tomando $r = \min\{r_1, \dots, r_K\}$ $(r \leq r_i \; \forall i)$ $B(x,r) \subset B(x, r_i)$ $\forall i = 1, \dots, K \Rightarrow B(x,r) \subset B(x, r_1) \cap \dots \cap B(x, r_K) \subset U_1 \cap \dots \cap U_K$

Como $x \in U_1 \cap \dots \cap U_K$ es arbitrario, $U_1 \cap \dots \cap U_K \in T_d$.

Def: un conjunto $C \subset X$ es cerrado si $X \setminus C$ es abierto $(X \setminus C \in T_d)$

Def: A la familia de conjuntos cerrados de un espacio métrico la vamos a denotar por C_{T_d}.

Propiedades (ejercicio)

1. $\emptyset, X \in C_{T_d}$.
2. $\{C_i\}_{i\in I} \subset C_{T_d} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} C_i \in C_{T_d}$
3. $C_1, \dots, C_K \in C_{T_d} \Rightarrow C_1 \cup \dots \cup C_K \in C_{T_d}$

2. $\quad X \setminus \underbrace{\bigcap_{i\in I} C_i} = \bigcup_{i\in I} \underbrace{(X\setminus C_i)}_{T_d}$

3 $\quad \underbrace{X\setminus(C_1\cup\dots\cup C_k)}_{\in T_d} = (\underline{X\setminus C_1})\cap\dots\cap(\underline{X\setminus C_k})$

<u>Ejemplo:</u> la intersección arbitraria de conjuntos abiertos no es, en general, un conjunto abierto.

$X=\mathbb{R}^2 \qquad U_i = B(0,1/i) \qquad i\in\mathbb{N} \qquad B=$ bola con distancia d_2

$$\boxed{\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i = \{0\}}$$

$0\neq p \Rightarrow d(p,0)=\varepsilon > 1/i_0$

$\Rightarrow p\notin B(0,1/i_0)=U_{i_0}$

$\Rightarrow p\notin \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i$

$\{0\}$ no es abierto en $(\mathbb{R}^2,d_2)$: cualquier $B(0,r)$ contiene al menos al punto $(r/2,0)$ $\quad (B(0,r)\not\subset\{0\})$

Dos distancias pueden definir la misma topología

<u>Def:</u> Sea X un conjunto no vacío, d, d' distancias en X. Diremos que d, d' son equivalentes si existen $\alpha,\beta>0$ tales que:

$$\beta\cdot d' \le d \le \alpha\cdot d' \qquad (\beta\cdot d'(x,y)\le d(x,y)\le \alpha\cdot d'(x,y)\ \forall\, x,y\in X)$$

Teorema: Sea X un conjunto, d, d' distancias equivalentes. Entonces $T_d = T_{d'}$.

Dem: Sean $\alpha, \beta > 0$ tales que $\beta d' \leq d \leq \alpha \cdot d'$.

Sea $r > 0$, $x \in X$. $B'(x,r)$ = bola con distancia d'. Veamos que

$$B(\underbrace{x, \alpha r}_{r'}) \supset B'(x, \underbrace{r}_{r'/\alpha}) \qquad (*) \equiv \begin{array}{c} B(x,r) \\ \cup \\ B'(x, \frac{r}{\alpha}) \end{array}$$

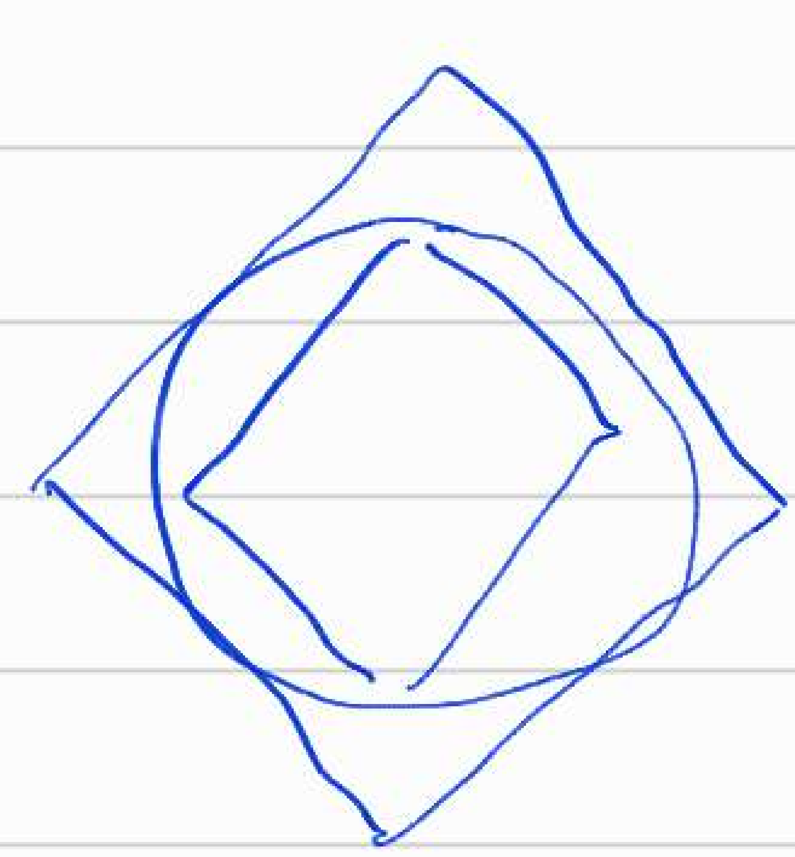
Para demostrar (*) tomamos $z \in B'(x,r) \Rightarrow d'(x,z) < r \Rightarrow$
$d(x,z) \leq \alpha \cdot d'(x,z) < \alpha r \Rightarrow z \in B(x, \alpha r)$

Además $\qquad B(x,r) \subset B'(x, \frac{r}{\beta})$

$$z \in B(x,r) \Rightarrow d(x,z) < r \Rightarrow d'(x,z) \leq \frac{d(x,z)}{\beta} < \frac{r}{\beta} \Rightarrow z \in B'(x, \frac{r}{\beta})$$

$$\beta d' \leq d \leq \alpha \cdot d'$$
$$\Downarrow$$
$$B'(x, \frac{r}{\alpha}) \subset B(x,r) \subset B'(x, \frac{r}{\beta})$$

Si dos distancias son equivalentes, las bolas centradas en un punto contienen y están contenidas en bolas centradas en el punto para la otra distancia.



Veamos que $T_d = T_{d'}$. Veamos que $T_d \subset T_{d'}$.

Sea $U \in T_d$. Veamos que $U \in T_{d'}$. Si $U = \emptyset \Rightarrow U \in T_{d'}$. Supongamos que $U \neq \emptyset$. Sea $x \in U \in T_d$. Existe $r > 0$ tal que

$$\boxed{B'(x, \tfrac{r}{\alpha})} \subset \boxed{B(x,r)} \subset \boxed{U}$$

$x \in U$ arbitrario $\Rightarrow U \in T_{d'}$ $\Rightarrow$ $T_d \subset T_{d'}$

La otra inclusión $T_{d'} \subset T_d$ se prueba análogamente.

Def: una distancia d en X es acotada si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $d \leq \varepsilon$ ($d(x,y) \leq \varepsilon \ \forall x, y \in X$)

1/10/2020

TEMA 1. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

X conjunto no vacío

Def: Una topología T en X es una familia de subconjuntos de X ($T \subset P(X)$) que verifica:

1. $\phi, X \in T$
2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$ ($U_i \in T\ \forall i \in I$) $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T$
3. $U_1, \dots, U_k \in T \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T$

A los elementos de T se les llama conjuntos abiertos para la topología T.

Ejemplos: 1. Si (X,d) es espacio métrico

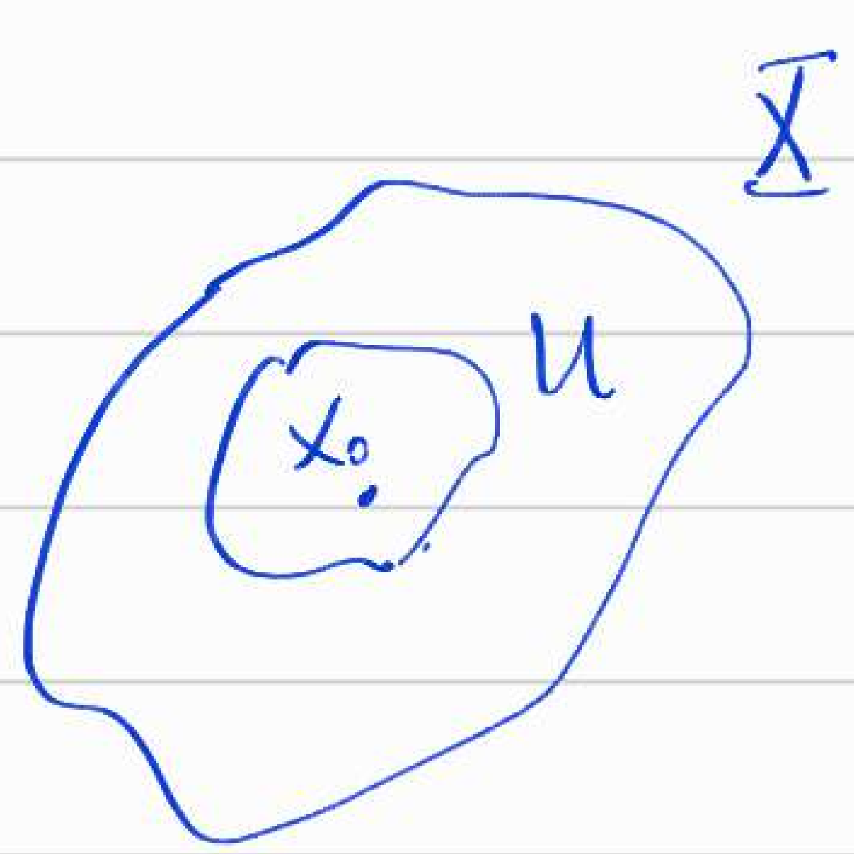
$$T_d = \{U \subset X : \forall x \in U, \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset U\} \cup \{\phi\}$$

T_d es la topología en X asociada a d.

2. Topología trivial. $X \neq \phi$, $T_t = \{\phi, X\}$.

3. $X \neq \phi$. Sea $x_0 \in X$

$$T_{x_0} = \{U \subset X : x_0 \in U\} \cup \{\phi\}$$



T_{x_0} es una topología en X

1. $\phi \in T_{x_0}$. $x_0 \in X \Rightarrow X \in T_{x_0}$

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T_{x_0} \Rightarrow U_i = \phi$ ó $x_0 \in U_i$ $\forall i \in I$

- Si $U_i = \phi$ $\forall i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i = \phi \in T_{x_0}$
- Si $U_{i_0} \neq \phi$ para algún $i_0 \in I \Rightarrow x_0 \in U_{i_0} \Rightarrow x_0 \in \bigcup_{i \in I} U_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T_{x_0}$

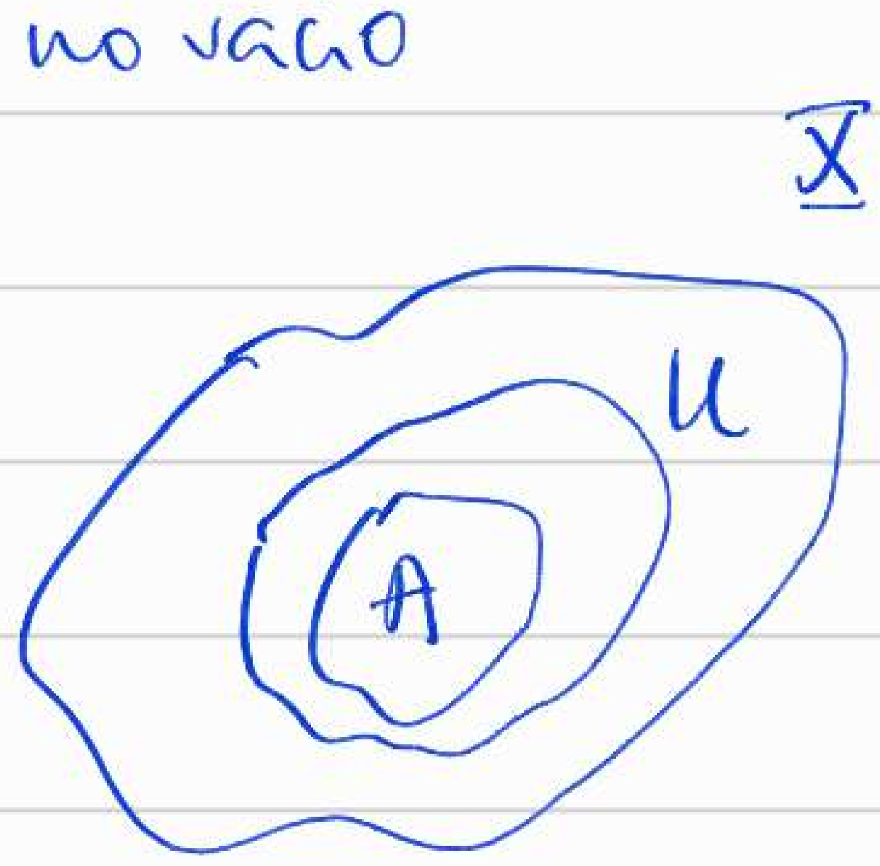
3. $U_1, \dots, U_K \in T_{x_0} \Rightarrow U_i = \phi$ ó $x_0 \in U_i$

- Si algún $U_{i_0} = \phi \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_K = \phi$
- Si $U_i \neq \phi$ $\forall i \in \{1, \dots, K\} \Rightarrow x_0 \in U_i$ $\forall i \Rightarrow x_0 \in U_1 \cap \dots \cap U_K$

$\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_K \in T_{x_0}$

4. Ejercicio. Sea $X \neq \phi$, $A \subset X$ subconjunto no vacío

$T_A = \{U \subset X : A \subset U\} \cup \{\phi\}$



Probar que T_A es una topología en X

$A = \{x_0\}$

5. Topología discreta. $X \neq \phi$. $T_D = P(X)$. Cualquier subconjunto es abierto en T_D.

Si d es la distancia discreta, entonces $T_d = T_D$

$T_d \subset P(X) = T_D$; $T_d \subset T_D$

$$\underbrace{U \in T_D}_{} \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} \{x\} = \bigcup_{x \in U} \underbrace{B(x, 1/2)}_{\in T_d} \in T_d \Rightarrow \underbrace{U \in T_d}_{}$$

$\Rightarrow T_D \subset T_d \Rightarrow T_D = T_d$ $\qquad (B(x,r) = \{x\} \quad 0 < r \leq 1)$

6. Si $X \neq \phi$ y T es una topología en X, entonces

$$\{\phi, X\} = T_t \subset T \subset T_D = P(X)$$

<u>Def</u>: Sea X un conjunto y T_1, T_2 dos topologías en X. Diremos que T_1 es más fina que T_2 si $T_2 \subset T_1$. En la misma situación $T_2 \subset T_1$ diremos que T_2 es más gruesa que T_1.

6. $X \neq \phi$. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. T_x, T_y

$\{x\} \in T_x$, $\{x\} \notin T_y$ $\qquad T_x \not\subset T_y$

$\{y\} \in T_y$, $\{y\} \notin T_x$ $\qquad T_y \not\subset T_x$

7. $X \neq \emptyset$. Topología de los complementos finitos

$$T_{CF} = \{ U \subset X : X \setminus U \text{ es finito} \} \cup \{\emptyset\}$$

T_{CF} es una topología en X.

1. $\emptyset \in T_{CF}$. $X \setminus X = \emptyset$ finito (con 0 elementos) $\Rightarrow X \in T_{CF}$

2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T_{CF}$. Si $U_i = \emptyset \ \forall i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset \in T_{CF}$

Supongamos que $\exists i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} \neq \emptyset \Rightarrow X \setminus U_{i_0}$ es finito.

$$\left(X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \subset X \setminus U_{i_0} \text{ finito}$$

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i)$ finito (subconjunto de un conjunto finito)

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T_{CF}$

3. $U_1, \dots, U_K \in T_{CF}$. Si algún $U_i = \emptyset \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_K = \emptyset$

Supongamos $U_i \neq \emptyset \ \forall i \Rightarrow X \setminus U_i$ finito $\forall i$

$X \setminus (U_1 \cap \dots \cap U_K) = (X \setminus U_1) \cup \dots \cup (X \setminus U_K)$ finito (unión finita de conjuntos finitos)

$\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_K \in T_{CF}$

Si X es finito, $T_{CF} = T_D$ (Si X es finito, $A \subset X \Rightarrow X \setminus A$ es finito)

8. $X \neq \phi$. Topología complementos numerables

$$T_{CN} = \{ U \subset X : X \setminus U \text{ es numerable} \} \cup \{\phi\}$$

Ejercicio (se necesita en el paso 3 que la unión finita de conjuntos numerables es numerable)

$T_{CF} \subset T_{CN}$

Si X es numerable $\Rightarrow T_{CN} = T_D$ ($\overset{\phi}{\underset{\neq}{U}} \subset X \Rightarrow X \setminus U$ es un subconjunto de X; X es numerable $\Rightarrow X \setminus U$ numerable $\Rightarrow U \in T_{CF}$)

Def: Un espacio topológico (X, T) es un par formado por un conjunto no vacío y una topología T en X

Def: Sea (X,T) un espacio topológico. Diremos que $C \subset X$ es un conjunto cerrado si $X \setminus C \in T$ (es un conjunto abierto).

A la familia de los subconjuntos cerrados de (X,T) la denotaremos por C_T.

Propiedades:
1. $\phi, X \in C_T$
2. $\{C_i\}_{i \in I} \subset C_T \Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i \in C_T$
3. $C_1, \ldots, C_k \in C_T \Rightarrow C_1 \cup \ldots \cup C_k \in C_T$

Dem: 1. $\phi = X \setminus \underset{\substack{\cap \\ T}}{X} \in G_T$ $\quad X = X \setminus \underset{\substack{\cap \\ T}}{\phi} \in G_T$

2. $\{G_i\}_{i\in I} \subset G_T \Rightarrow X \setminus G_i \in T \ \forall i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} (X \setminus G_i) \in T$

$$\bigcap_{i\in I} G_i \in G_T \Leftarrow X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} G_i \right)$$

3. $G_1, \dots, G_k \in G_T \Rightarrow X \setminus G_i \in T \ \forall i$

$$X \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_k) = \underset{\substack{\cap \\ T}}{(X \setminus G_1)} \cap \dots \cap \underset{\substack{\cap \\ T}}{(X \setminus G_k)} \in T$$

$\Rightarrow G_1 \cup \dots \cup G_k \in G_T$

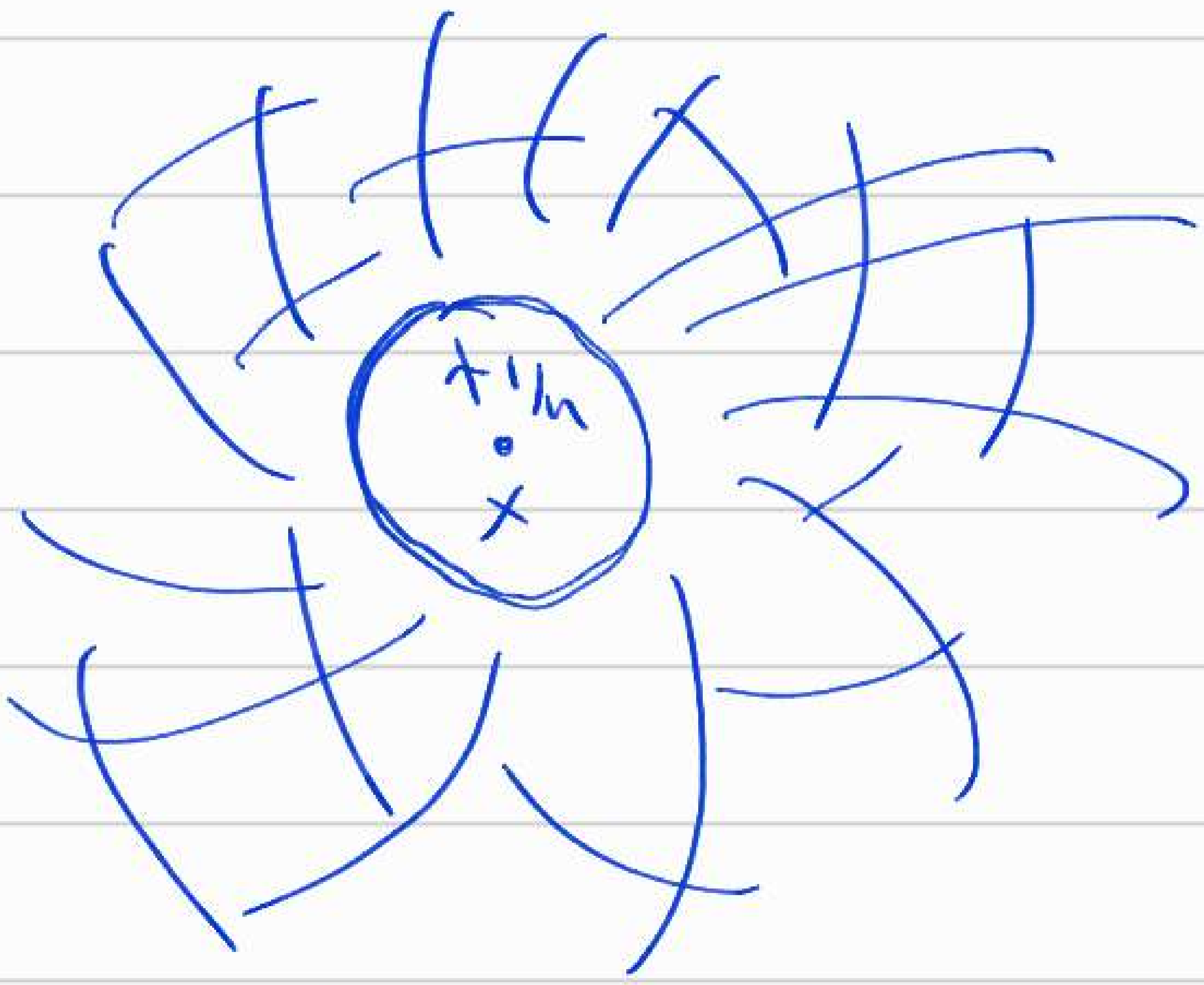
Consecuencia: (X, d) $\quad T_d$ $\quad x \in X$. Sabemos que $\bar{B}(x, 1/n)$ son conjuntos cerrados

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(x, 1/n) \Rightarrow \{x\} \in G_T$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$, tomamos $x \in \mathbb{R}^2$

$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x, 1/n)$. Pasando al complementario

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{x\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^2 \setminus B(x, 1/n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{ y \in \mathbb{R}^2 : d(y,x) \geq 1/n \}$$

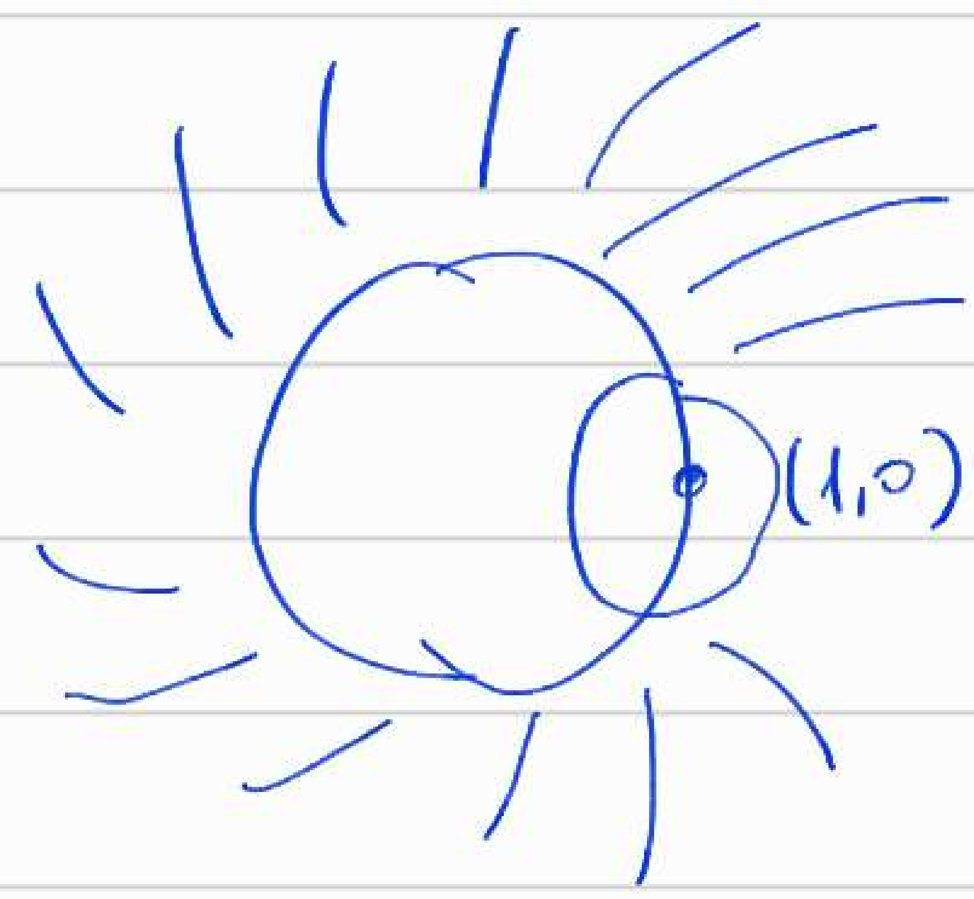


$\mathbb{R}^2 \setminus B(x,1/n)$

$\{\mathbb{R}^2 \setminus B(x,1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos cerrados cuya unión no es un conjunto cerrado.

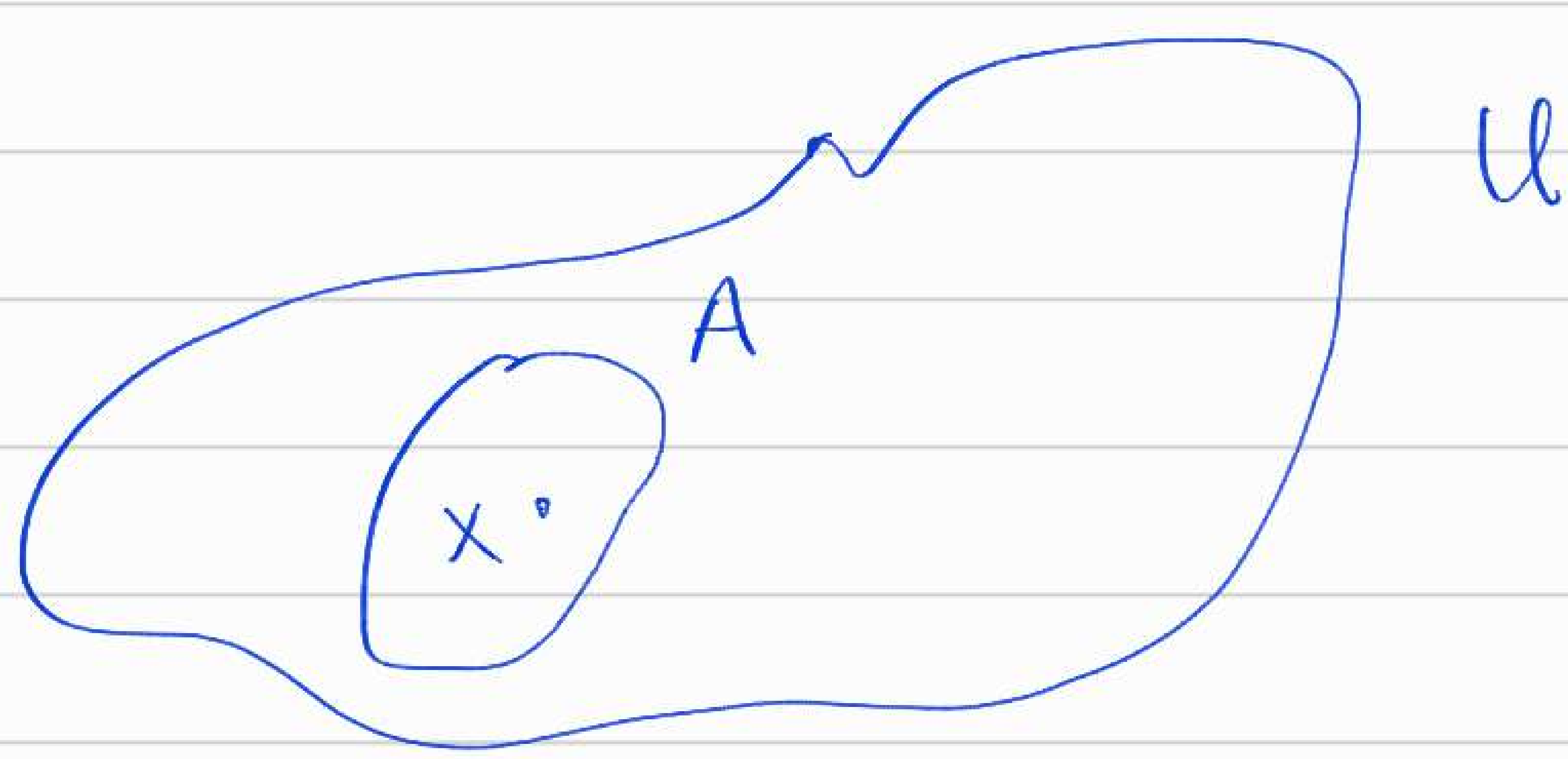
Otro contraejemplo:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}\left(0, 1-\frac{1}{n}\right) = B(0,1) \quad \text{en } (\mathbb{R}^2, d_2)$$

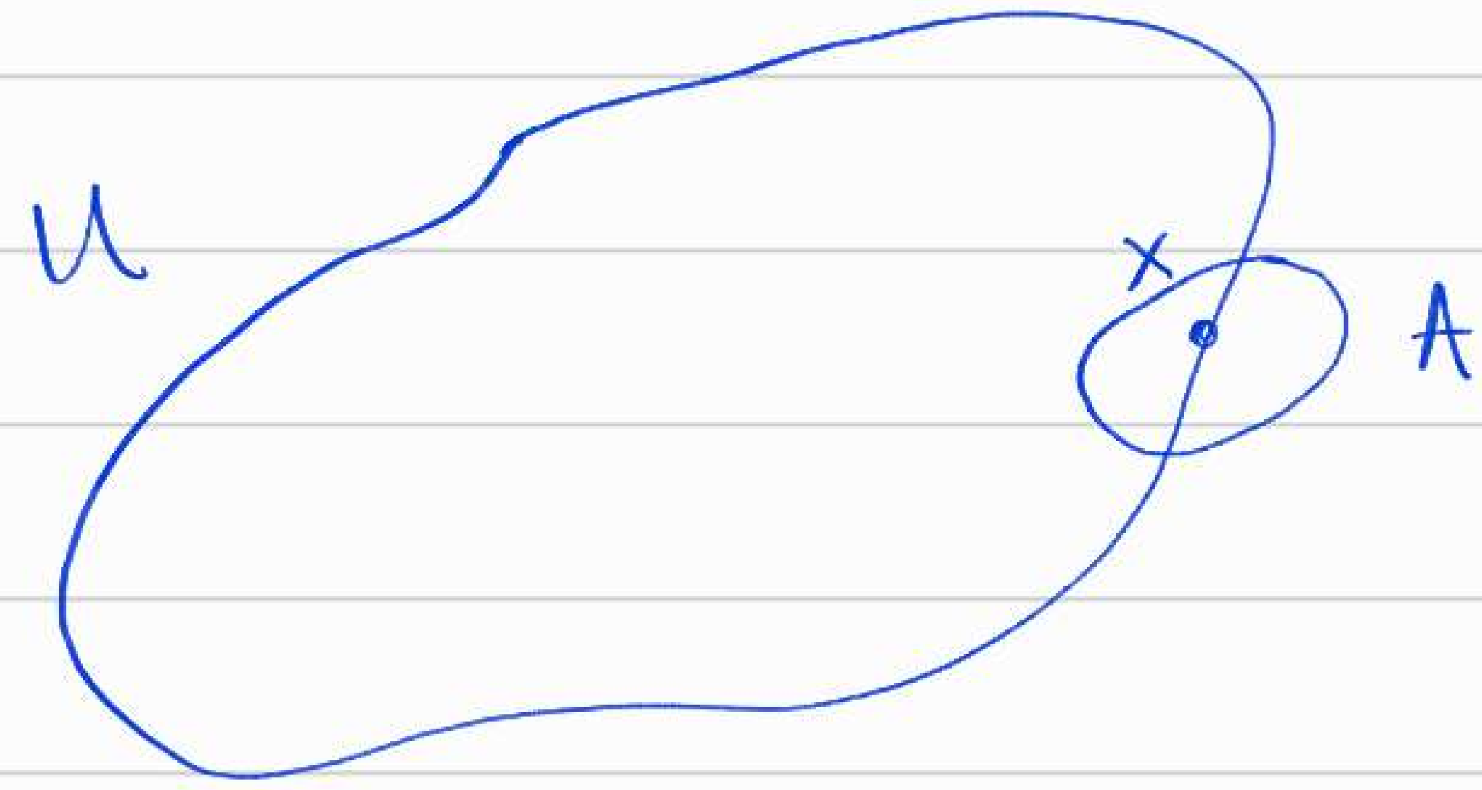


<u>Def</u> (entorno de un punto) Sea (X, T) un espacio topológico, $x \in X$. Diremos que un conjunto U es entorno del punto x si existe $A \in T$ tal que

$$\underline{x} \in A \subset \underline{U}$$



<u>Ejemplo</u>: ¿Cuándo U no sería entorno de x?



Cualquier abto. que contiene a x no está contenido en U (interseca a $X \setminus U$).

Ejemplo: si $U \subset X$ es abierto y $x \in U$, entonces U es entorno de x

Podemos tomar $A = U$

Un conjunto abierto es entorno de cada uno de sus puntos.

Def. Al conjunto de entornos de $x \in X$ en un espacio topológico lo denotaremos por N_x.

(entorno = neighbourhood)

Ejemplo: (X, T_t) $\quad N_x = \{X\} \quad \forall x \in X$

Ejemplo: (X, T_D) $\quad \underline{N_x = \{U \subset X : x \in U\}}$

$$x \in U \Rightarrow x \in \underbrace{\{x\}}_{\text{abierto}} \subset U \Rightarrow U \in N_x \qquad \{U \subset X : x \in U\} \supset N_x$$

$N_x \subset \{U \subset X : x \in U\}$ siempre

Def: sea (X,T) un e. top. Una base $\mathcal{B}$ de la topología T es una subfamilia $\mathcal{B} \subset T$ tal que todo $U \in T$ no vacío se puede expresar como unión arbitraria de elementos de $\mathcal{B}$.

Ejemplo: (X,d) e. métrico $\{B(x,r) : x \in X, r>0\}$ es una base $\mathcal{B}$ de T_d.

$$U \in T_d,\ U \neq \emptyset \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B(x, r(x))$$

Ejemplo: (X,d) e. métrico $\mathcal{B}_{r_0} = \{B(x,r) : x \in X, 0<r<r_0\}$

$\mathcal{B}_{r_0}$ es base de T_d

EJERCICIO

Ejemplo: (X, T_D) $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base de T_D

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \qquad \mathcal{B} \subset T_D \qquad \{x\} \in T_D$$

Def: sea (X,T) un espacio topológico, $x \in X$. Una base de entornos del punto x es una familia $\mathcal{B}_x \subset N_x$ tal que $\forall\, U \in N_x$, $\exists\, B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset U$.

Ejemplo: Sea (X,d) un e. métrico, $x \in X$ $\mathcal{B}_x = \{B(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ es base de entornos de x en (X, T_d)

Sea $U \in N_x$. Sabemos que $\exists A \in T_d$ tal que $x \in A \subset U$

Por la def. de abierto en (X, d), $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$

Como $r > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < r$

$$\underbrace{B(x, \tfrac{1}{n_0})} \subset B(x, r) \subset A \subset \underbrace{U}$$

Dado $U \in N_x$, $\exists$ $B(x, \frac{1}{n_0}) \in \mathcal{B}_x$ / $B(x, \frac{1}{n_0}) \subset U$.

<u>Ejemplo:</u> (X, T_D) $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$

Si $U \in N_x \Rightarrow x \in \{x\} \subset U$

$\{x\} \in N_x$ porque es abierto y contiene a x

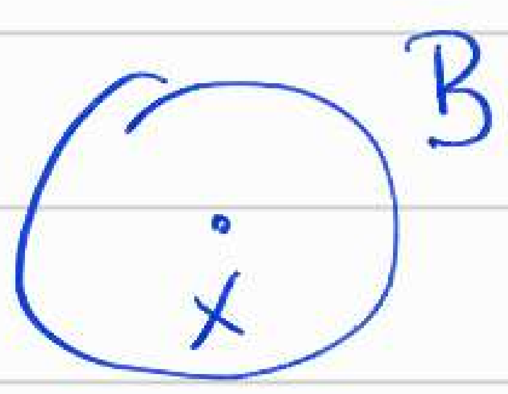
2/10/2020

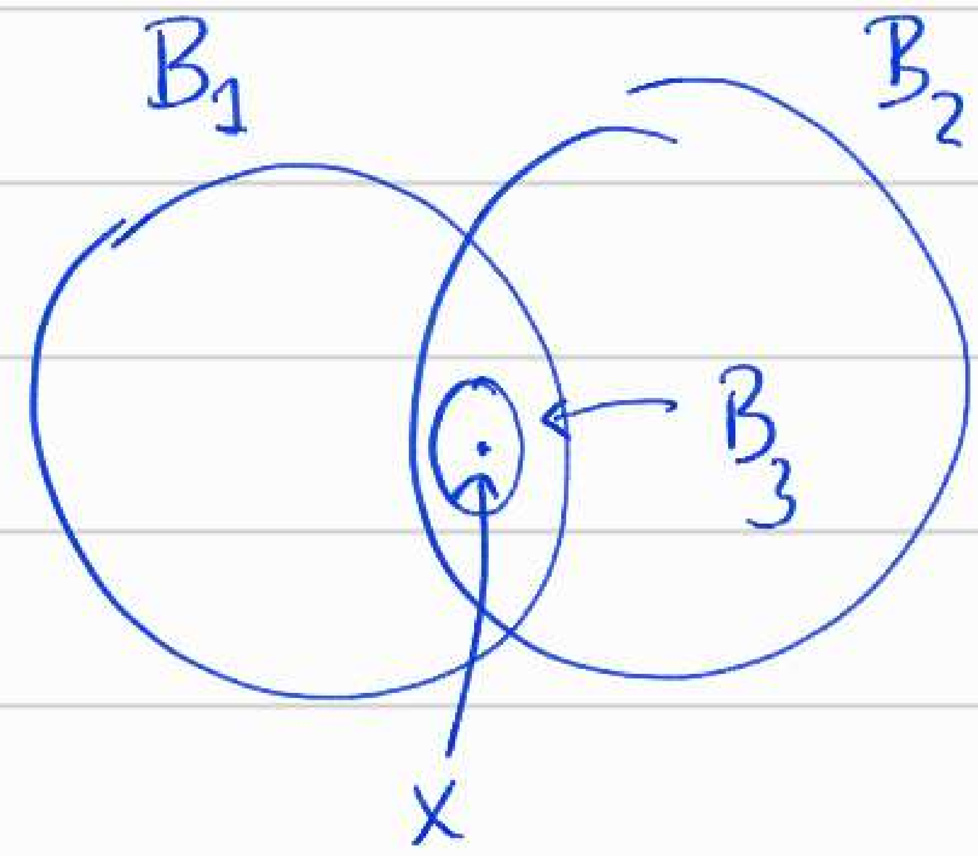
Sea (X,T) un espacio topológico. Una base $\mathcal{B}$ es una colección de conjuntos abiertos $\underline{\mathcal{B} \subset T}$ tal que todo $U \in T$ se puede expresar como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Ejemplo: Bolas abiertas en (X,d)

Propiedades: Sea (X,T) e. top., $\mathcal{B}$ base de T. Entonces:

1. $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$
2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$





1. $x \in \underline{X \text{ abierto}} \underset{\smile}{\Rightarrow} X = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ tal que $\underline{x \in B_{i_0}} = \underline{\underline{B}}$.

2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subset T \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in T \underset{\mathcal{B} \text{ base}}{\Rightarrow} x \in B_1 \cup B_2 = \bigcup_{j \in J} B_j \Rightarrow \exists\, j_0 \in J$ tal que $x \in B_{j_0} \subset \bigcup_{j \in J} B_j = B_1 \cap B_2$. Tomando $B_3 = B_{j_0}$ hemos terminado de demostrar la propiedad.

$X \neq \phi$ conjunto. Vamos a poner una familia $\mathcal{B}$ de tal modo que $\mathcal{B}$ sea la base de una topología.

Teorema: sea $X \neq \phi$. Sea $\mathcal{B} \subset P(X)$ tal que

1. $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces la familia

$$T := \{ U \subset X : \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ con } x \in B \subset U \} \cup \{\phi\}$$

es una topología en X y $\mathcal{B}$ es base de T.

Dem: Veamos que T es topología en X

1. $\phi \in T$. $X \in T$ (por la propiedad 1: $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ / $x \in B \subset X$)
2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T$. Veamos que $\bigcup_{i \in I} U_i \in T$. Para ello tomamos $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ arbitrario. $\exists i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0} \in T$. Por la definición de T, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T$

3. $U_1, U_2 \in T$. Si $U_1 \cap U_2 = \phi \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$. Si $U_1 \cap U_2 \neq \phi$, tomamos $x \in U_1 \cap U_2$ arbitrario. Existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in B_1 \subset U_1$, $x \in B_2 \subset U_2 \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Por (2), $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$$

$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$.

Sean $U_1, \dots, U_k \in T$. Supongamos que, por inducción, $U_1 \cap \dots \cap U_{k-1} \in T$

$$\underset{\substack{\cap\\ T\ (\text{inducción})}}{(U_1\cap\cdots\cap U_{k-1})}\cap \underset{\substack{\cap\\ T}}{U_k} = U_1\cap\cdots\cap U_k \in T.$$

Queremos probar, por último, que $\mathcal{B}$ es base de T. Sea $U\in T$, $U\neq\emptyset$. Por definición de T, para todo $x\in U$, existe $B_x\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B_x\subset U$. Entonces:

$$U=\bigcup_{x\in U} B_x$$

$$\left.\begin{array}{l} B_x\subset U\ \forall x\in U \Rightarrow \underbrace{\bigcup_{x\in U} B_x\subset U}_{\equiv} \\ z\in U \Rightarrow z\in B_z\subset \bigcup_{x\in U} B_x \Rightarrow \underbrace{U\subset \bigcup_{x\in U} B_x}_{\equiv} \end{array}\right\} \Rightarrow U=\bigcup_{x\in U} B_x$$

<u>Nota</u>: Sea X un conjunto, T_1,T_2 dos topologías en X. Supongamos que $\mathcal{B}$ es base de T_1 y T_2. Entonces $T_1=T_2$.

$$\left.\underbrace{U\in T_1}\ \ U\neq\emptyset \underset{\substack{\uparrow\\ \mathcal{B}\text{ base } T_1}}{\Rightarrow} U=\bigcup_{i\in I} B_i \underset{\substack{\uparrow\\ B_i\in T_2\ (\mathcal{B}\subset T_2)\\ \equiv}}{\Rightarrow} \underbrace{U\in T_2}\ \right| \Rightarrow T_1\subset T_2$$

Aplicando el mismo argumento a $U\in T_2$, probamos que $T_2\subset T_1$. Por tanto, $T_1=T_2$.

<u>Nota</u>: en el teorema anterior, T es única porque $\mathcal{B}$ solo puede ser base de una topología.

Ejemplos: 1. Topología límite inferior o topología de Sorgenfrey

En $\mathbb{R}$ tomamos $\mathcal{B} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$

$\mathcal{B}$ es base de una topología (única) en $\mathbb{R}$, T_S

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\quad x \in [x, x+1) \in \mathcal{B}$
2. $\underset{\overset{\shortparallel}{B_1}}{[a_1,b_1)}, \underset{\overset{\shortparallel}{B_2}}{[a_2,b_2)} \in \mathcal{B}$. Sea $x \in \underbrace{[a_1,b_1)\cap[a_2,b_2)}$. Queremos encontrar

$B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

$x \in [a_1,b_1)\cap[a_2,b_2) \qquad a_1 \leq x < b_1 \qquad a_2 \leq x < b_2$

$$a_3 = \max(a_1,a_2) \leq x < \min(b_1,b_2) = b_3$$

$[a_1,b_1)\cap[a_2,b_2) = [a_3,b_3)$

En $\mathcal{B}$, $\quad B_1\cap B_2 = B_3 \in \mathcal{B} \implies x \in B_3 = B_1 \cap B_2$

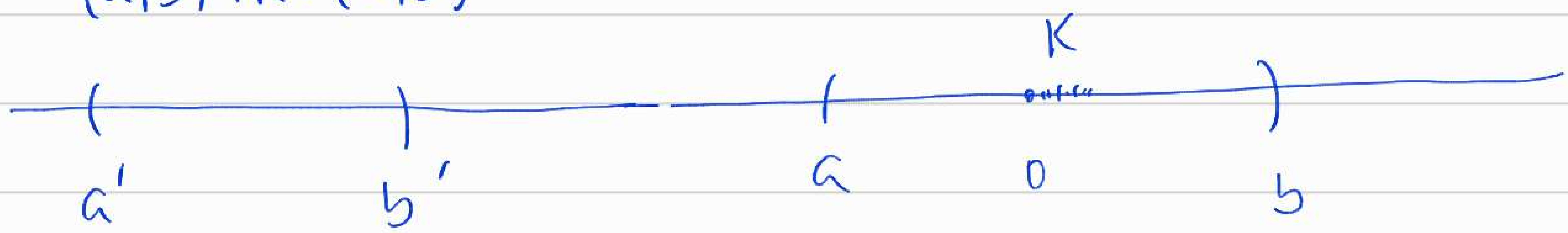
Veremos que $T_S \neq T$

Ejemplo: (Topología de Kuratowski) $\quad K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

En $\mathbb{R}$, definimos $\mathcal{B} = \{(a,b)\setminus K : a,b\in\mathbb{R},\ a<b\} \cup$

$$\cup \{(a,b) : a<b\} \cup \{\emptyset\}$$

$(a',b') \setminus K = (a',b')$



$\mathcal{B}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$ que denotaremos por T_K.

El próximo día compararemos T_S, T_K con la topología usual de $\mathbb{R}$ asociada a la distancia $d(x,y) = |x-y|$

7/10/2020

(X,T) espacio topológico. $\mathcal{B} \subset T$ es una base si todo $U \in T$ se puede expresar como unión de elementos.

$X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subset P(X)$

1. $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B} \ / \ x \in B$
2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} \ / \ x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces

$$T = \{U \subset X \ / \ \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ con } x \in B \subset U\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología sobre X y $\mathcal{B}$ es base de T. Además T es única.

Ejemplos: 1. T_S en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_S = \{[x,y) : x,y \in \mathbb{R}, x<y\}$$

base de una top. T_S en $\mathbb{R}$ (topología de Sorgenfrey)

2. T_K

$$\mathcal{B}_K = \{(a,b) : a<b, a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,b) \setminus K : a<b, a,b \in \mathbb{R}\}.$$

$K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

1. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in (x-1, x+1) \in \mathcal{B}_K$

2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_K$ $\qquad B_1 = (a_1,b_1)$ ó $B_1 = (a_1,b_1)\setminus K \quad a_1<b_1$

$B_2 = (a_2,b_2)$ ó $B_2 = (a_2,b_2)\setminus K \quad a_2<b_2$

$B_1=(a_1,b_1),\ B_2=(a_2,b_2) \Rightarrow B_1\cap B_2 = (\max(a_1,a_2), \min(b_1,b_2)) \in \mathcal{B}_K$

$B_1=(a_1,b_1)\setminus K,\ B_2=(a_2,b_2) \Rightarrow B_1\cap B_2 = \underbrace{(\max(a_1,a_2), \min(b_1,b_2))}\setminus K \in \mathcal{B}_K$

$B_1=(a_1,b_1),\ B_2=(a_2,b_2)\setminus K$ (igual que anterior)

$B_1=(a_1,b_1)\setminus K,\ B_2=(a_2,b_2)\setminus K \Rightarrow B_1\cap B_2 = \underbrace{(\max(a_1,a_2), \min(b_1,b_2))\setminus K}_{\in \mathcal{B}_K}$

$\mathcal{B}_K$ es base de una topología T_K sobre $\mathbb{R}$. (Topología de Kuratowski) $\square$

En $\mathbb{R}$ tenemos la topología usual, generada por $d(x,y)=|x-y|$, una de cuyas bases es $\{B(x,r) : x\in\mathbb{R},\ r>0\} = \{(x-r,x+r) : x\in\mathbb{R},\ r>0\} = \{(a,b) : a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$.

$\underline{(a,b)} = \underline{B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)} \leftarrow$

En $\mathbb{R}$ también tenemos otras topologías T_S, T_K. Queremos comparar dichas topologías. Para ello debemos dar un criterio que me permita la comparación usando bases.

<u>Propiedad</u>: sea $X\neq\emptyset$, y sean $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ bases de las topologías T,T', resp. Entonces son equivalentes:

1. $T\subset T'$ (T' es más fina que T)
2. $\forall B\in\mathcal{B},\ \forall x\in B,\ \exists B'\in\mathcal{B}'$ tal que $x\in B'\subset B$.

Dem: 1⇒2. Sea $B \in \mathcal{B}$, sea $x \in B$. Queremos encontrar $B' \in \mathcal{B}' / x \in B' \subset B$.
$B \in \mathcal{B} \subset T \subset T' \Rightarrow B$ es abierto en T'. Como $\mathcal{B}'$ es base de $T' \Rightarrow$
$\Rightarrow B = \bigcup_{i \in I} B'_i$, $B'_i \in \mathcal{B}'$. Si $x \in B = \bigcup_{i \in I} B'_i \Rightarrow \exists i_0 \in I / x \in B'_{i_0}$. Llamamos $B' = B'_{i_0}$

$$\underbrace{x \in B'} = B'_{i_0} \subset \underbrace{\bigcup_{i \in I} B'_i} = \underbrace{B}.$$

2⇒1. Veamos que $T \subset T'$. Sea $U \in T$, $U \neq \phi$. Tomamos $x \in U$

$U \in T$, $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow$ $\underline{U = \bigcup_{i \in I} B_i}$, $B_i \in \mathcal{B}$. $x \in U \Rightarrow \exists i_0 \in I / x \in B_{i_0}$

Llamamos $B_x = B_{i_0}$. B_x tiene la propiedad $x \in B_x \subset U$. Hacemos esta construcción para todo $x \in U$. Aplicamos 2 a cada B_x y obtenemos $B'_x \in \mathcal{B}'$ tal que $\underline{x \in B'_x \subset B_x}$

$$U \subset \bigcup_{x \in U} B'_x \subset \bigcup_{x \in U} B_x \subset U \Rightarrow \boxed{U = \bigcup_{x \in U} B'_x} = \bigcup_{x \in U} B_x = U.$$

$x \in U \Rightarrow x \in B'_x \subset \bigcup_{y \in U} B'_y$ cada $B_x \subset U$

$U = \bigcup_{x \in U} B'_x \in T' \Rightarrow \underline{U \in T'}$ | $T \subset T'$

$\mathcal{B}' \subset T'$

Corolario: $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de dos topologías T, T' en X.
Son equivalentes

1. $T = T'$
2. a) $\forall B \in \mathcal{B},\ \forall x \in B,\ \exists B' \in \mathcal{B}' \ /\ x \in B' \subset B$ $\quad (T \subset T')$

   b) $\forall B' \in \mathcal{B}',\ \forall x \in B',\ \exists B \in \mathcal{B} \ /\ x \in B \subset B'$ $\quad (T' \subset T)$

Dem: $2.a) \Leftrightarrow T \subset T'$; $2.b) \Leftrightarrow T' \subset T$ | $2a + 2b \Leftrightarrow T = T'$

Def: dos bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ en X son equivalentes si $T = T'$ (si son bases de la misma topología).

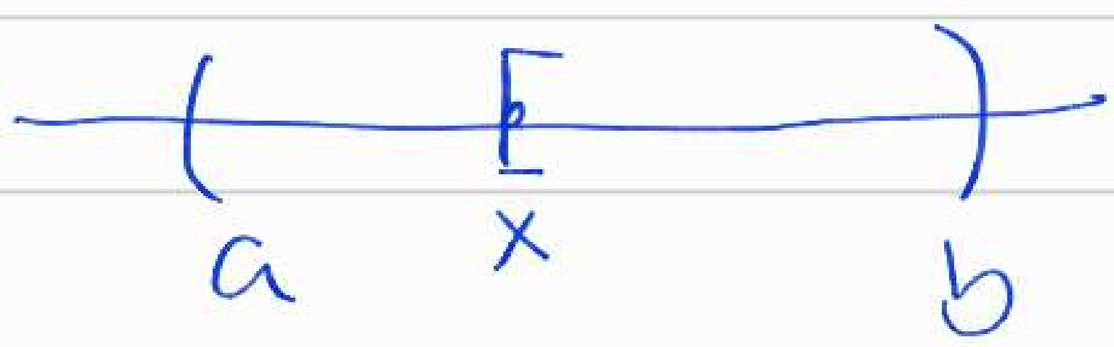
Ejemplo: comparación de T, T_S, T_K.

$\mathcal{B} = \{(a,b) : a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B}_K = \{[a,b) : a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$.

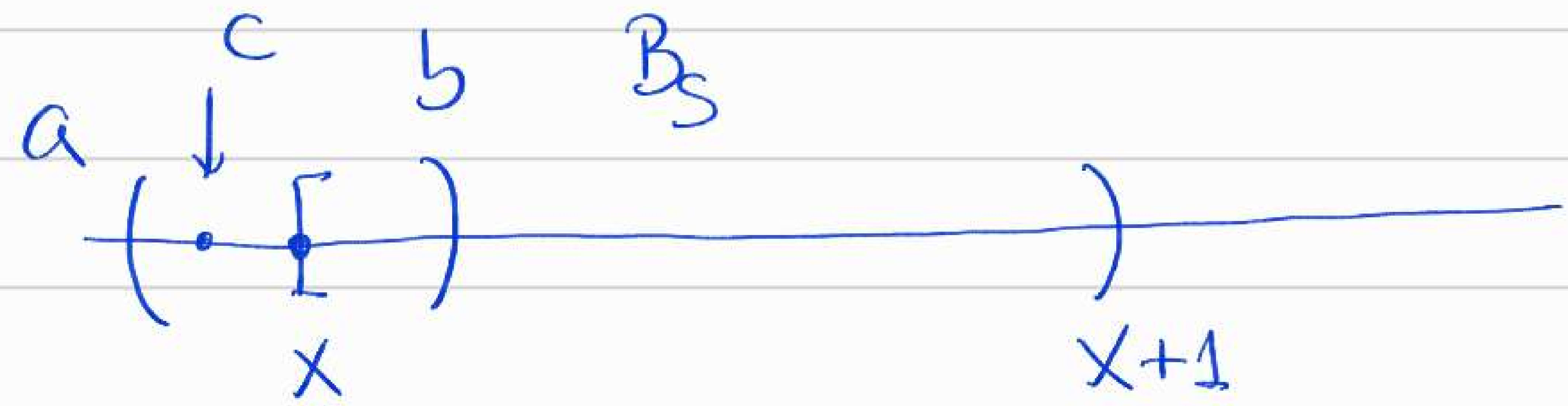
$T \subset T_S$

Sea $(a,b) \in \mathcal{B}$. Sea $x \in (a,b)$. Queremos ver que $\exists B_S \in \mathcal{B}_S$ tal que $x \in B_S \subset (a,b)$. Tomando $B_S = [x,b)$ tenemos que $x \in [x,b) \subset (a,b)$



¿$T_S \subset T$? $\forall B_S \in \mathcal{B}_S,\ \forall x \in B_S,\ \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_S$.

Sea $B_S = [x, x+1)$, $x \in B_S$ ¿$\exists (a,b) \ /\ x \in (a,b) \subset [x, x+1)$?



$a < x$. Si tomamos $c \in \mathbb{R}$ / $a < c < x < b \Rightarrow c \in (a,b)$

$c \notin [x, x+1)$ porque $c < x$ (para que $c \in [x, x+1)$, c tiene que ser $\geq x$).

$c \in (a,b)$, $c \notin [x, x+1) \Rightarrow (a,b) \not\subset [x, x+1)$

La condición 2 no se da si tomamos B_S, B. Es decir $T_S \not\subset T$.

$$\left.\begin{array}{l} T \subset T_S \\ T_S \not\subset T \Rightarrow T_S \neq T \end{array}\right\} \quad T \subsetneq T_S$$

La topología T_S contiene a T pero es distinta de T. La topología es estrictamente más fina que T.

<u>Ejercicio:</u> $T \subsetneq T_K$

9/10/2020

T_S = top. Sorgenfrey $T \subsetneq T_S$ $(\mathbb{R})$

T_K: topología Kuratowski $\mathcal{B}_K = \{(a,b) : a<b\} \cup \{(a,b)\setminus K : a<b\}$

$K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Comprobamos que $T \subsetneq T_K$.

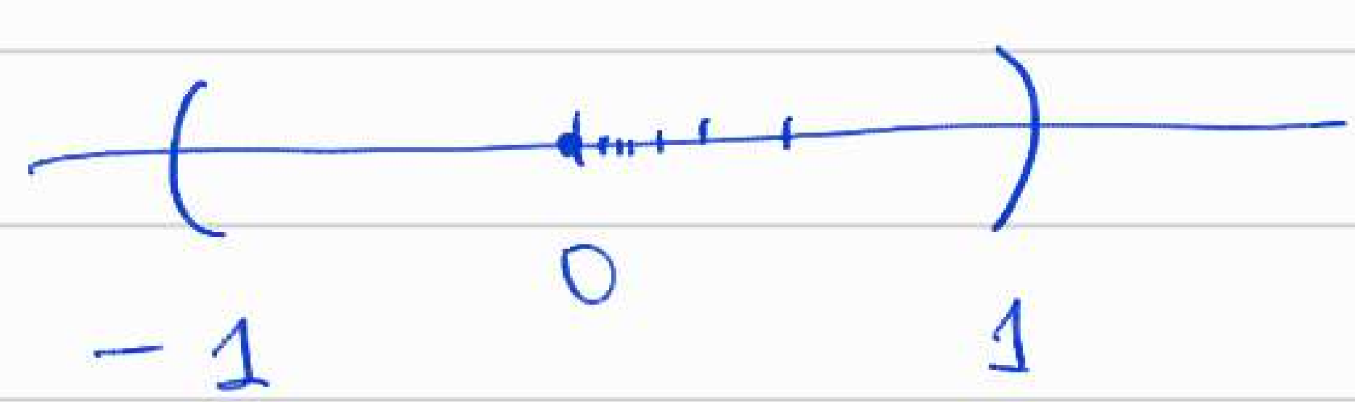
$\forall B \in \mathcal{B}$ (base de T), $\forall x \in B$, $\exists B_K \in T_K$ tal que $x \in B_K \subset B$.

En nuestro caso $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_K$: esto significa que dado $B \in \mathcal{B}$, $x \in B$, podemos tomar $B_K = B$ y $x \in B_K = B$. $\Rightarrow T \subset T_K$.

$T \subsetneq T_K$ $(T_K \not\subset T)$. Aplicamos el criterio de las bases: $T_K \subset T$
$\Leftrightarrow \forall B_K \in \mathcal{B}_K$, $\forall x \in B_K$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_K$.

Para probar que $T_K \not\subset T$ hay que encontrar $B_K \in \mathcal{B}_K$, $x \in B_K$ tales que ningún $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ esté contenido en B_K.

$B_K = (-1,1)\setminus K$ ←



$x = 0$ ←

Si $(a,b) \in \mathcal{B}$ $0 \in (a,b) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < b$ $\forall n \geq n_0$

$\frac{1}{n} \in (a,b)$ $\underbrace{(a,b)}_{\ni \frac{1}{n}} \not\subset \underbrace{(-1,1)\setminus K}_{\not\ni 1/n}$

Esto $T \not\subseteq T_K$.

$$\begin{array}{ccc} & \subset & T_S \\ T & & \\ & \subset & T_K \end{array}$$

<u>Ejercicio</u>. T_S y T_K no son comparables (ninguna de ellas está contenida en la otra)

<u>Problema</u>: $X \neq \emptyset$. sea $S \subset P(X)$ (S es una familia de subconjuntos de X)

¿Hay una topología que contiene a S? Sí, $S \subset T_D = P(X)$

¿De entre todas las topologías que contienen a S, hay alguna que sea la más fina? Sí. Vamos a probarlo.

<u>Def</u>: Sea X un conjunto no vacío, $\{T_j\}_{j \in J}$ una familia de topologías en X. Definimos

$$\bigcap_{j \in J} T_j = \{ U \subset X : \underline{U \in T_j} \ \ \underline{\forall j \in J} \} \subset P(X)$$

Entonces $\bigcap_{j \in J} T_j$ es una topología en X.

<u>Dem</u>: 1. $\emptyset, X \in T_j \ \forall j \in J$ (T_j topología) $\Rightarrow \emptyset, X \in \bigcap_{j \in J} T_j$

2. $\underbrace{\{U_i\}_{i \in I} \subset \bigcap_{j \in J} T_j}_{} \Rightarrow U_i \in \bigcap_{j \in J} T_j \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow \underbrace{U_i \in T_j}\ \underbrace{\forall i \in I}, \forall j \in J$. Fijando j, como T_j es topología,

$\bigcup_{i \in I} U_i \in T_j \ \forall j \in J \Rightarrow \underbrace{\bigcup_{i \in I} U_i \in \bigcap_{j \in J} T_j}$

3. $U_1, \dots, U_k \in \bigcap_{j \in J} T_j \Rightarrow U_i \in T_j \ \forall i = 1, \dots, k \ \forall j \in J$

Fijando j, como T_j es topología, se tiene que $U_1 \cap \dots \cap U_k \in T_j \ \forall j \in J$.

$\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in \bigcap_{j \in J} T_j$ $\square$

Propiedad: sea $X \neq \emptyset$, y sea $S \subset P(X)$ una familia de subconjuntos de X. Existe entonces una topología $T(S)$ que verifica:

→ 1. $S \subset T(S)$

2. Si existe otra topología T' tal que $S \subset T'$, entonces $T(S) \subset T'$

La afirmación 2 dice que $T(S)$ es la topología más gruesa que contiene a S.

Def: $T(S)$ es la topología generada por S.

Dem (propiedad)

$\mathcal{J} = \{T \subset P(X) : T \text{ es topología y } \underline{\underline{S \subset T}}\} \neq \emptyset \quad T_D \in \mathcal{J}$.

$T(S) = \bigcap_{T \in \mathcal{J}} T$. $T(S)$ es una topología en X

$T \in \mathfrak{I} \Rightarrow S \subset T \Rightarrow S \subset \bigcap_{j \in \mathfrak{I}} T = T(S)$. Esto demuestra 1.

Para probar 2, tomamos T' topología tal que $S \subset T' \Rightarrow T' \in \mathfrak{I}$

$$T(S) = \bigcap_{T \in \mathfrak{I}} T \underset{T' \in \mathfrak{I}}{\underset{\uparrow}{\subset}} T' \qquad \square$$

Ejemplo: $A \subset X$, $S = \{A\}$ $\qquad$ $T(S) = \{\phi, A, X\}$

Ejemplo: sean T_1, T_2 dos topologías en X. Definimos

$$T_1 \cup T_2 = \{ U \subset X : U \in T_1 \text{ ó } U \in T_2 \} \supset T_1, T_2$$

$T_1 \cup T_2$ no es una topología en general. $X = \{a, b, c\}$

$T_1 = \{\phi, \{a\}, X\}$ $\quad$ $T_2 = \{\phi, \{b\}, X\}$ $\quad$ son topologías

$T_1 \cup T_2$ no es topología: $\{a\} \in T_1 \cup T_2$, $\{b\} \in T_1 \cup T_2$, pero $\{a\} \cup \{b\} \notin T_1 \cup T_2$

$T_1 \cup T_2 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$

Sin embargo, $T_1 \cup T_2 \subset P(X)$. Podemos calcular la topología generada por $T_1 \cup T_2$, $T(T_1 \cup T_2)$.

Def: a $T(T_1 \cup T_2)$ la llamaremos la topología generada por T_1 y T_2.
(es la topología más gruesa que contiene a T_1 y a T_2)

Def: Sea $(\mathbb{X}, T)$ un espacio topológico, $S \subset P(\mathbb{X})$. Diremos que S es una subbase de T si la familia

$$\left\{ \bigcap_{i \in I} S_i : I \text{ finito} \right\}$$

es una base de T

(Todo abierto $U \in T$ es unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos de S)

Propiedad: Sea $\mathbb{X}$ un conjunto, $S \subset P(\mathbb{X})$ tal que $\bigcup_{V \in S} V = \mathbb{X}$.

Entonces S es una subbase de $T(S)$.

Dem: Sea $\mathcal{B}(S) = \left\{ \bigcap_{i \in I} S_i ; S_i \in S, I \text{ finito} \right\}$.

Veamos que $\mathcal{B}(S)$ es base de una topología T. Tenemos que comprobar que:

1. $\forall x \in \mathbb{X}, \exists B \in \mathcal{B}(S) \,/\, x \in B$

2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(S), x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(S) \,/\, x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

1. Si $A \in S \Rightarrow A \in \mathcal{B}(S)$ | $S \subset \mathcal{B}(S)$ $\qquad \bigcup_{A \in S} A = \mathbb{X}$

Si $x \in \mathbb{X}$, $\exists A \in S \subset \mathcal{B}(S) \,/\, x \in A$

2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(S)$ $\qquad B_1 = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ $\qquad A_{i_j} \in S \quad j = 1, \dots, k$

$B_2 = A_{i_{k+1}} \cap .. \cap A_{i_{k+r}}$ $\quad A_{i_{k+s}}$ $s = 1, ..., r$
$\quad\quad \cap$
$\quad\quad S$

$$x \in B_1 \cap B_2 = \underbrace{A_{i_1} \cap .. \cap A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}} \cap ..}_{} \cap A_{i_{k+r}} \in \mathcal{B}(S)$$

intersección finita de elementos de S.

T es una topología de base $\mathcal{B}(S) \Rightarrow S \subset \mathcal{B}(S) \subset \underline{\underline{\underline{T}}}$

$\Rightarrow T(S) \subset T$

El próximo día veremos $T \subset T(S)$.

14/10/2020

$S \subset \mathcal{P}(X)$. $\qquad T(S) := \bigcap_{S \subset T} \{T : T \text{ topología en } X\}$

$T(S)$ es topología en T, $S \subset T(S)$, $T(S)$ es la topología más gruesa que contiene a S.

Propiedad: S es una subbase de $T(S)$. $\bigcup_{A \in S} A = X$.

"S subbase de T si $\mathcal{B}(S) = \{\bigcap_{i \in I} S_i : S_i \in S, I \text{ finito}\}$ es una base de T"

- Partimos de $S \subset X$ tal que $\bigcup_{A \in S} A = X$. Construimos $\mathcal{B}(S) = \{\bigcap_{i \in I} S_i : S_i \in S, I \text{ finito}\}$. Vimos que $\mathcal{B}(S)$ es base de una topología T en X.

- Queremos ver que $T = T(S)$. Sabemos que $S \subset T \Rightarrow T(S) \subset T$. Falta ver que $T \subset T(S)$. Sea $U \in T$. Como $\mathcal{B}(S)$ es base de T, tomamos $\{B_j\}_{j \in J}$ tal que $U = \bigcup_{j \in J} B_j$. Cada $B_j = \bigcap_{i \in I_j} S_i$, I_j finito.

$$U = \bigcup_{j \in J} \Big(\underbrace{\bigcap_{i \in I_j} S_i}_{} \Big)$$

$\forall j \in J, \forall i \in I_j$, $S_i \in T(S)$. $T(S)$ top. $\Rightarrow \bigcap_{i \in I_j} S_i \in T(S)$ $\forall j \in J$.

$$\Rightarrow U = \bigcup_{j \in J} \Big(\bigcap_{i \in I_j} S_i \Big) \in T(S)$$

$\Rightarrow T \subset T(S)$ ☒

Acabamos de demostrar que S es subbase de $T = T(S)$. Esto significa que

$$T(S) = \left\{ \bigcup_{j\in J} \left(\bigcap_{i \in I_j} S_i \right) : S_i \in S \right\} \cup \{\phi\}$$

Es necesario que $\bigcup_{A\in S} A = X$.

<u>Lema</u>: sea (X,T) un e. top. Para cada $x\in X$, sea N_x el conjunto de entornos de x. Entonces

1. $x\in U \quad \forall U \in N_x$
2. Si $U_1, U_2 \in N_x$, entonces $U_1\cap U_2 \in N_x$
3. Si $U\in N_x$, $U\subset V$, entonces $V\in N_x$
4. $\forall\, U\in N_x$, $\exists V\in N_x$ tal que $U\in N_y \quad \forall y\in V$. $\quad (V\subset U)$

Recuerdo que $U\in N_x$ si existe $A\in T$ tal que $x\in A\subset U$.

<u>Dem</u>: 1. Si $U\in N_x$, existe $A\in T$ tal que $x\in A\subset U \Rightarrow x\in U$

2. Si $U_1, U_2\in N_x$, existen $A_1, A_2 \in T$ tales que $x\in A_i \subset U_i$, $i=1,2$

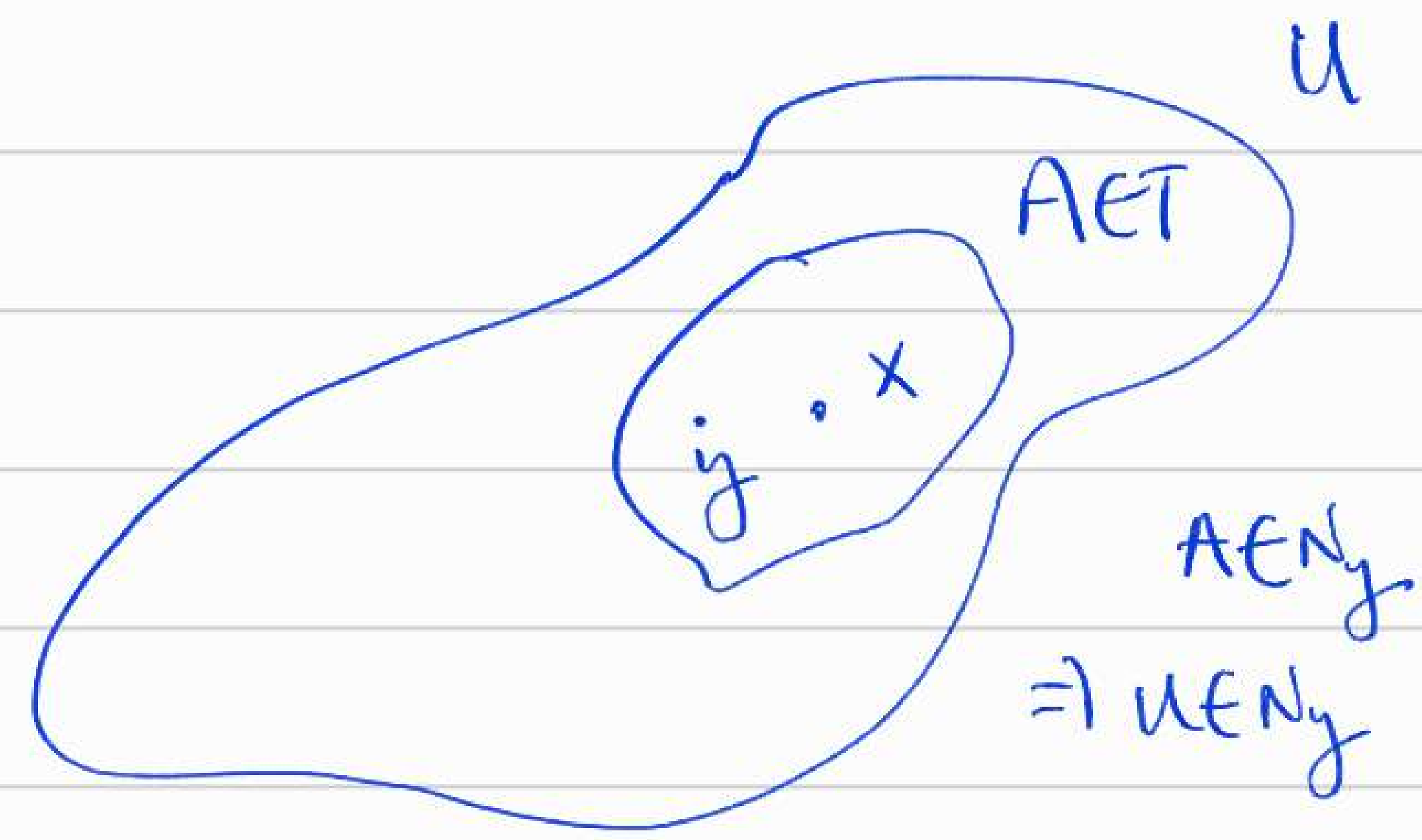
$$\Rightarrow \quad x \in \underbrace{A_1\cap A_2}_{\substack{\cap\\ T}} \subset \underline{U_1\cap U_2}$$

$A_1\cap A_2$ es un abierto de T que contiene a x y está contenido en $U_1\cap U_2 \Rightarrow U_1\cap U_2\in N_x$.

3. Si $U\in N_x$, existe $A\in T$ tal que $x\in A\subset U$. Como $U\subset V$, se tiene que $\underbrace{x\in A\subset U\subset V}$. Por tanto, $V\in N_x$

4. Sea $U\in N_x$. Sea $A\in T$ tal que $x\in A\subset U$. Si $y\in A$, entonces $A\in N_y$. $(y\in \underset{\underset{T}{\cap}}{A}\subset A)$ (Un conjunto abierto es entorno de cada uno de sus puntos). Como $\underset{\underset{N_y}{\cap}}{A}\subset U \Rightarrow U\in N_y$. Basta tomar $V=A$.

$\forall y\in A=V,\ U\in N_y$



Teorema: Sea $X\neq\emptyset$. Consideramos una colección $\{M_x\}_{x\in X}$ con $\emptyset\neq M_x\subset P(X)$ $\forall x\in X$. Supongamos que:

1. $x\in U$ $\forall U\in M_x$
2. $U_1,U_2\in M_x$, entonces $U_1\cap U_2\in M_x$
3. Si $U\in M_x$ y $U\subset V$, entonces $V\in M_x$
4. $\forall U\in M_x$, existe $V\in M_x$ tal que $U\in M_y$ $\forall y\in V$.

Entonces

$$T=\{U\subset X : \forall x\in U, \exists V\in M_x \text{ tal que } V\subset U\}\cup\{\emptyset\}$$

es una topología en X tal que $\underline{M_x=N_x}$ $\forall x\in X$ (la familia de entornos de $x\in X$ es M_x). Además T es la única topología tal que $N_x=M_x$ $\forall x\in X$.

Se comprueba que T es topología en X del mismo modo que se comprueba que una familia $\mathcal{B}$ con ciertas propiedades de base genera una topología.

Veamos ahora que $\mathcal{M}_x = \mathcal{N}_x \quad \forall x \in X$

$\mathcal{N}_x \subset \mathcal{M}_x$: sea $U \in \mathcal{N}_x$. Existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subset U$. Por la definición de $\mathcal{T}$, existe $V \in \mathcal{M}_x$ tal que $x \in \underset{\mathcal{M}_x}{\underset{\Uparrow}{V}} \subset A \subset U$. Por la propiedad 3, $U \in \mathcal{M}_x$

$\mathcal{M}_x \subset \mathcal{N}_x$: Sea $V \in \mathcal{M}_x$. Definimos $U = \{y \in V : V \in \mathcal{M}_y\} \neq \emptyset$
Tenemos entonces que $x \in U \subset V$.
Veamos que $U \in \mathcal{T}$. Tomamos $y \in U$. Por definición de U, $V \in \mathcal{M}_y$. Por 4, existe $W \in \mathcal{M}_y$ tal que $V \in \mathcal{M}_z$ para todo $z \in W$. De nuevo por la definición de U, se tiene que $W \subset U$. Por tanto, dado $y \in U$ hemos encontrado $W \in \mathcal{M}_y$ tal que $W \subset U$. Como $y \in U$ es arbitrario, la definición de $\mathcal{T}$ implica que $U \in \mathcal{T}$.
En consecuencia, $x \in U \subset V$ y $U \in \mathcal{T}$. Esto implica que $U \in \mathcal{N}_x$ (un conjunto abierto es entorno de cada uno de sus puntos). Como $U \subset V$, se tiene que $V \in \mathcal{N}_x$ cualquiera que sea $V \in \mathcal{M}_x$.
Por tanto, $\mathcal{M}_x \subset \mathcal{N}_x$.
Falta la unicidad

15/10/2020 10:00 - 11:00

$X \neq \emptyset$ $\forall x \in X$, consideramos $M_x \subset P(X)$ que verifica 1-4.

$T = \{U \subset X : \forall x \in U, \exists V \in M_x$ con $V \subset U\} \cup \{\emptyset\}$

es top. en X y además $N_x = \{$entornos de x en $(X,T)\} = M_x$

Falta ver la unicidad: si (X,T') es otro e.top. tal que $N'_x = \{$entornos de x en $(X,T')\} = \underbrace{M_x}$. Entonces $T = T'$.

$U \in T' \Leftarrow \forall x \in U, \exists V \in \underbrace{N'_x}_{M_x = N_x}$ tal que $V \subset U \Leftrightarrow U \in T$; $T = T'$

Lema: Sea (X,T) e.top. Entonces $U \in T$ si y sólo si $\forall x \in U, \exists V \in N_x$ tal que $V \subset U$.

Dem: $\Rightarrow$) $V = U$

$\Leftarrow$ Si $\forall x \in U, \exists V_x \in N_x$ con $V_x \subset U$. Como V_x es entorno de x, $\exists A_x \in T$ tal que $A_x \subset V_x$

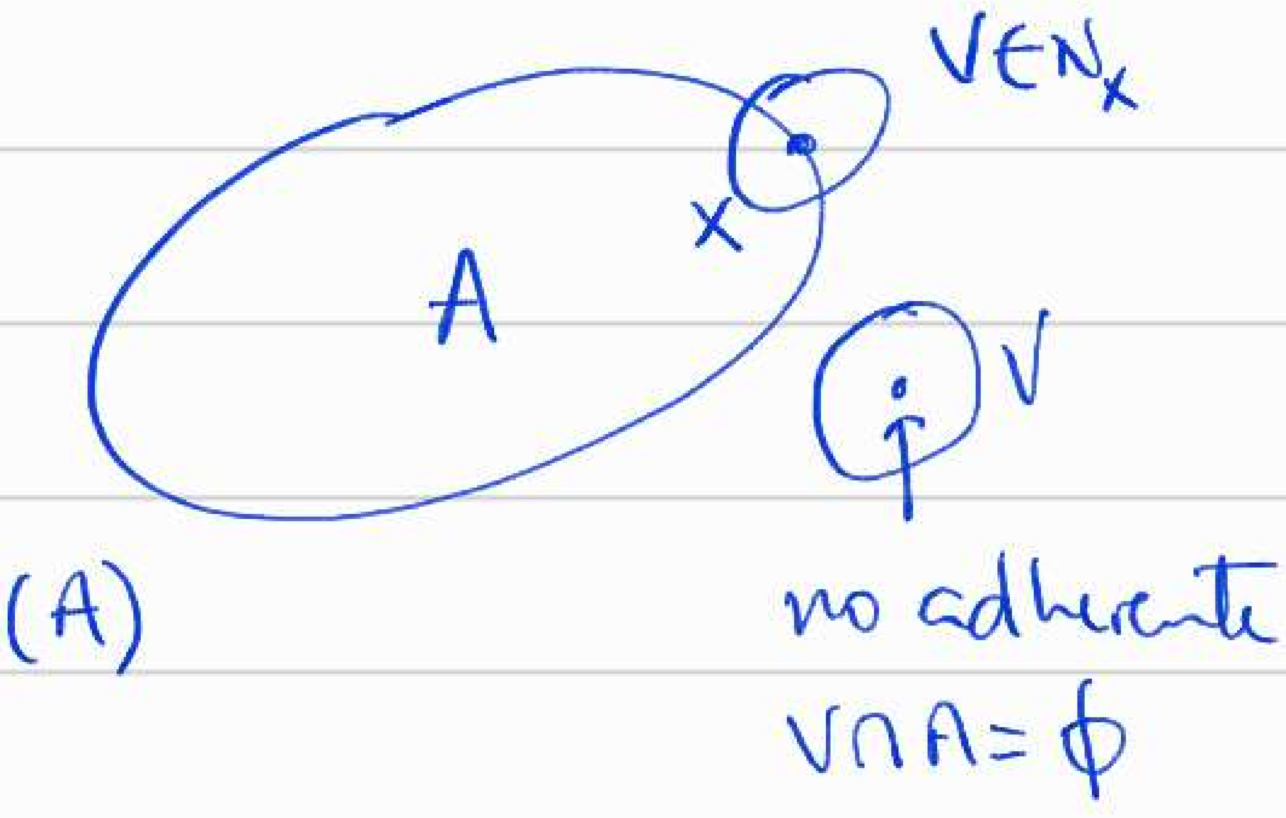
$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} \underbrace{A_x}_{T} \in T$.

Puntos interiores, adherentes, de acumulación y puntos frontera

Sea (X,T) un e.top. y sea $A \subset X$, $A \neq \emptyset$

Def: diremos que $x \in X$ es un punto adherente de A si $V \cap A \neq \phi$ (a) para todo $V \in N_x$.

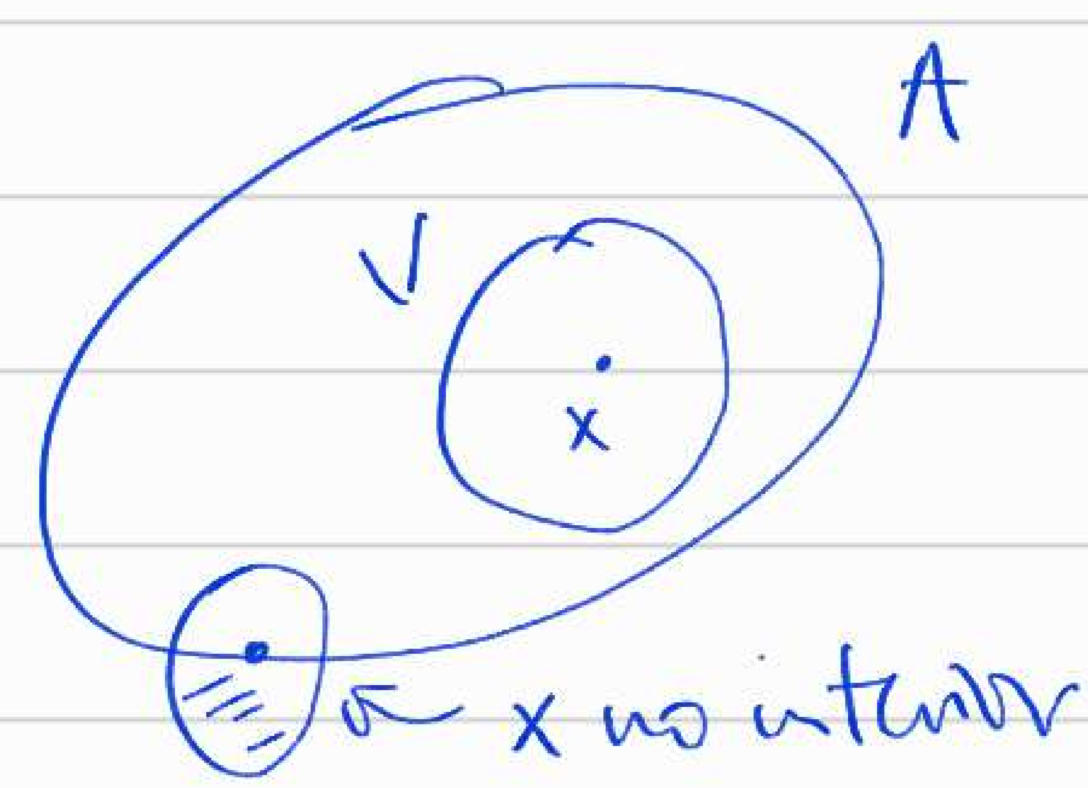
(un punto $x \in X$ es adherente al conjunto A si todo entorno del punto x corta al conjunto A)



Def: Al conjunto de puntos adherentes de A se le llama la adherencia o clausura de A y se le denota por $\bar{A}$ o $cl(A)$

Nota: $A \subset \bar{A}$. Si $x \in A$, $\underbrace{V \in N_x}_{\text{arbitrario}} \Rightarrow \{x\} \subset V \cap A \Rightarrow \underset{\forall V \in N_x}{V \cap A \neq \phi} \Rightarrow x \in \bar{A}$

Def: diremos que $x \in X$ es un punto interior de A si existe $V \in N_x$ tal que $V \subset A$.



Def: al conjunto de puntos interiores de A se le llama el interior de A y se le denota por $int(A)$ o $\mathring{A}$

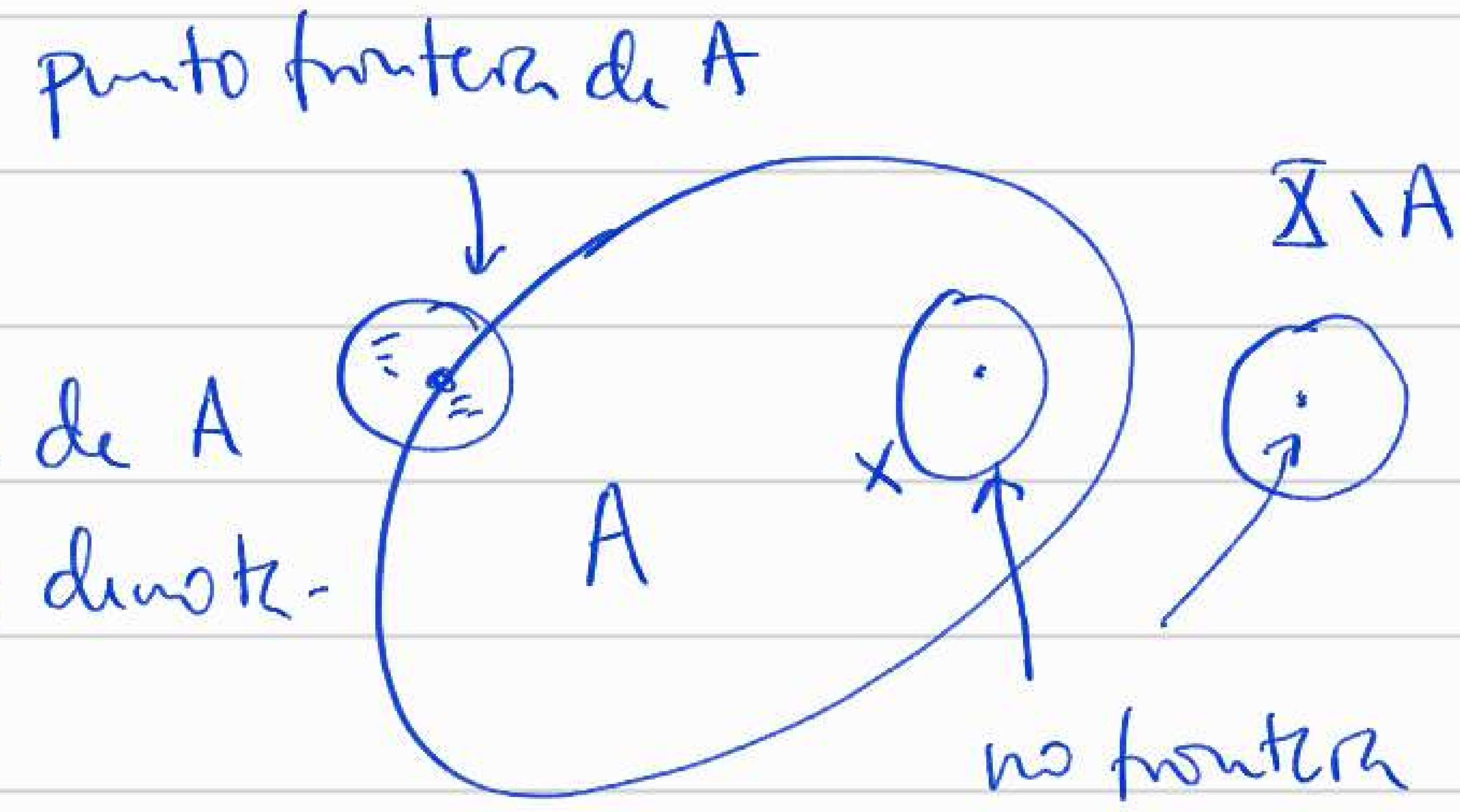
Nota: $\mathring{A} \subset A$. $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists V \in N_x$ tal que $x \in V \subset A \Rightarrow x \in A$
Como $x \in \mathring{A}$ es arbitrario, se tiene que $\mathring{A} \subset A$.

$$\boxed{\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}}$$

Def: diremos que $x \in X$ es un punto frontera de A si $\forall V \in N_x$, se tiene que $V \cap A \neq \phi$ y $V \cap (X \setminus A) \neq \phi$

(cualquier entorno de x corta a A y corta a $X \setminus A$).

A corta a B si $A\cap B\neq\emptyset$



Def: al conjunto de puntos frontera de A lo llamaremos la frontera de A. Lo denotaremos por $fr(A)$ ó ∂A.

$x\in\partial A \iff \forall V\in N_x,\ V\cap A\neq\emptyset$ y $V\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$

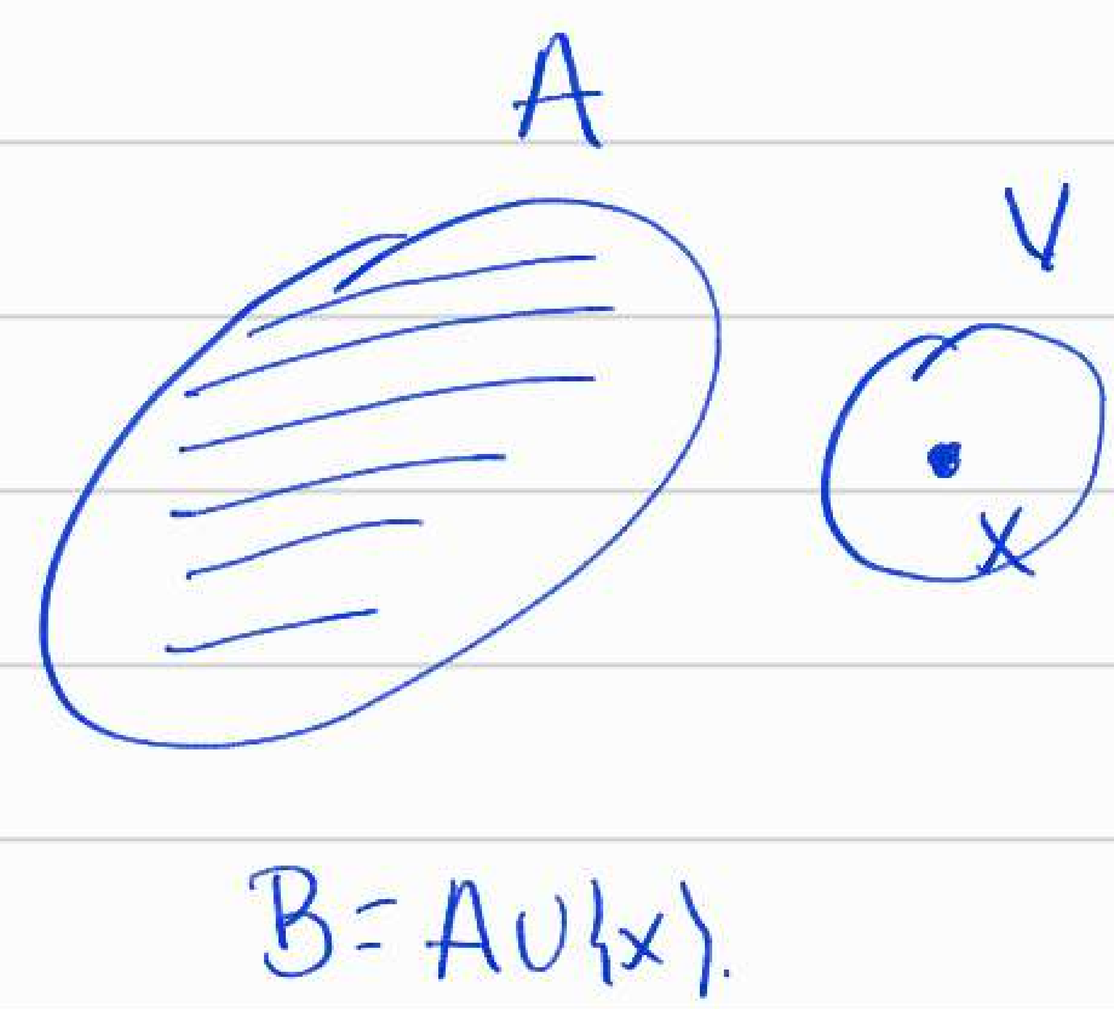
$\iff x\in\bar{A}$ y $x\in\overline{X\setminus A} \iff x\in\bar{A}\cap\overline{(X\setminus A)}$

Propiedad: $\boxed{\partial A=\bar{A}\cap\overline{(X\setminus A)}}$

Def. $x\in A$ es punto de acumulación de A si $\forall V\in N_x$ se tiene $(V\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset$

(hay puntos de A próximos a x, pero distintos de x. Si $y\in(V\setminus\{x\})\cap A$ $\Rightarrow y\in V\setminus\{x\}\Rightarrow y\neq x$)

x es un punto adherente de B, pero no es punto de acumulación de B porque $V\cap B=\{x\}$ $\Rightarrow (V\setminus\{x\})\cap B=\emptyset$



Def: un punto $x\in A$ es aislado si existe $V\in N_x$ tal que $V\cap A=\{x\}$.

Al conjunto de puntos de acumulación se le denota por A'. A veces se le llama conjunto derivado de A.

Nota: $A' \subset \bar{A}$ $\quad x \in A' \Rightarrow \forall V \in N_x$, se tiene que $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \forall V \in N_x \quad V \cap A \supset (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall V \in N_x \quad V \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$$

Propiedad: $\mathring{A}$ es un conjunto abierto. Además, si $U \subset A$ es un conjunto abierto, entonces $U \subset \mathring{A}$

($\mathring{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A)

Dem: 1. $\mathring{A}$ es abierto. Para todo $x \in \mathring{A}$, existe $V_x \in N_x$ tal que $V_x \subset A$
Como $V_x \in N_x$, existe U_x abierto tal que $x \in U_x \subset V_x$.
Afirmación: $U_x \subset \mathring{A}$. Si $y \in U_x$, como $U_x \in T$, se tiene que $U_x \in N_y$
$\Rightarrow \underbrace{y \in U_x \subset V_x}_{N_y} \subset A \Rightarrow y \in \mathring{A}$ *

Entonces $$\mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} U_x \qquad (\text{cada } U_x \text{ verifica } x \in U_x \subset \mathring{A})$$

$$\Rightarrow \mathring{A} \in T \text{ porque } U_x \in T \ \forall x \in \mathring{A}$$

2. Si $U \subset A$ es abierto, entonces $U \subset \mathring{A}$. Tomamos $x \in U$. Como U es abierto, $U \in N_x$. Entonces $x \in \underbrace{U}_{N_x} \subset A$ y $x \in \mathring{A}$. Por tanto, $U \subset \mathring{A}$ ∎

Nota: si no existe $U \in T$ con $U \subset A$, entonces $\mathring{A} = \emptyset$.

Propiedad: $\bar{A}$ es un conjunto cerrado. Además, si $F \supset A$ es un conjunto cerrado, entonces $\bar{A} \subset F$.

($\bar{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A)

Dem: veamos que $X \setminus \bar{A}$ es un conjunto abierto.

$$x \in X \setminus \bar{A} \Leftrightarrow x \notin \bar{A} \Leftrightarrow \exists V \in N_x \,/\, V \cap A = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow \exists V \in N_x \,/\, V \subset X \setminus A$$
$$\Leftrightarrow x \in \operatorname{int}(X \setminus A)$$

$$\boxed{X \setminus \bar{A} = \operatorname{int}(X \setminus A)}$$

$\bar{A}$ es cerrado porque su complementario es $\operatorname{int}(X \setminus A)$, que es abierto.

Supongamos que F es cerrado y que $A \subset F$. Queremos ver que $\bar{A} \subset F$. Vamos a ver que $X \setminus F \subset X \setminus \bar{A}$. Sea $x \in X \setminus F$. Como $X \setminus F$ es abierto $\exists V \in N_x$ tal que $V \subset X \setminus F \Rightarrow \exists V \in N_x$ tal que $V \cap F = \emptyset$. Entonces $V \cap A \subset V \cap F = \emptyset$. Por tanto $V \cap A = \emptyset$. Entonces $x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in X \setminus \bar{A}$.

Def: Al interior de $X \setminus A$ se le llama el exterior de A y se le denota por $\operatorname{ext}(A)$ $(= \operatorname{int}(X \setminus A))$.

$$\bar{A} \cap \operatorname{ext}(A) = \emptyset, \qquad \bar{A} \cup \operatorname{ext}(A) = X \qquad (\operatorname{ext}(A) = X \setminus \bar{A})$$

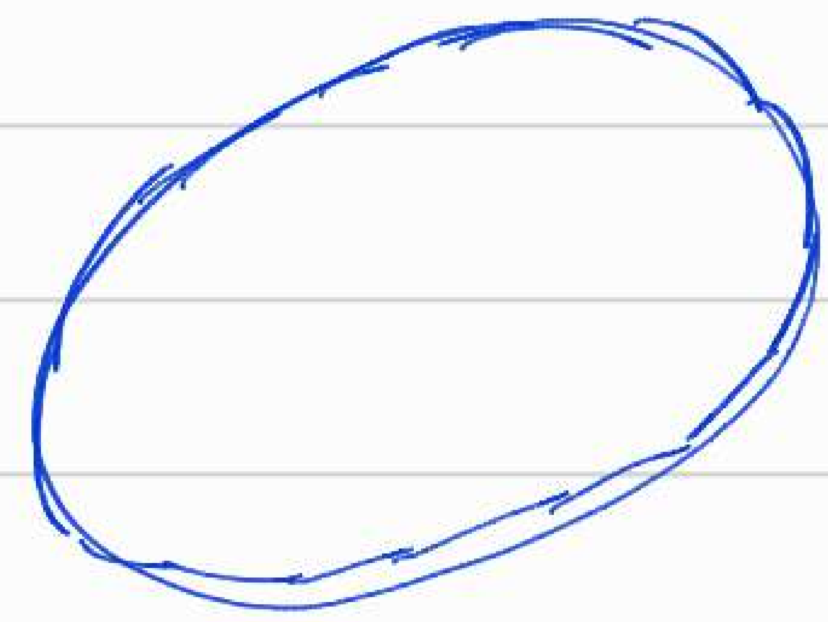
Pregunta: ¿Es ∂A un conjunto cerrado? Sí, porque

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$$

Entonces ∂A es intersección de conjuntos cerrados

$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, $\partial A \subset \bar{A}$ $\qquad\qquad$ $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A \cup ¿?$

Propiedad: $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$; $\mathring{A} \cap \partial A = \phi$ $\qquad\qquad$ $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$



Dem: $\mathring{A} \subset \bar{A}$, $\partial A \subset \bar{A} \Rightarrow \mathring{A} \cup \partial A \subset \bar{A}$

$x \in \bar{A}$. Entonces $\forall V \in N_x$, $V \cap A \neq \phi$. Tenemos dos posibilidades:

1. $\forall V \in N_x$, $V \cap (X \setminus A) \neq \phi \quad \Rightarrow x \in \partial A$; ó
2. $\exists V \in N_x$ tal que $V \cap (X \setminus A) = \phi \Rightarrow \exists V \in N_x$ tal que $V \subset A \Rightarrow x \in \mathring{A}$

$\bar{A} \subset \partial A \cup \mathring{A}$. Por tanto $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

Además $\mathring{A} \cap \partial A = \phi$

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists V \in N_x \,/\, V \subset A$

$x \in \partial A \Rightarrow \forall V \in N_x$, $V \cap (X \setminus A) \neq \phi \Rightarrow \forall V \in N_x$, $V \not\subset A$

Un punto $x \in X$ no puede estar simultáneamente en ∂A y en $\mathring{A}$ $\Rightarrow \mathring{A} \cap \partial A = \phi$.

Nota: $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A \qquad \mathring{A} \cap \partial A = \phi \qquad ext(A) = int(X \setminus A)$

$X = \bar{A} \cup ext(A) \qquad A \cap ext(A) = \phi \qquad = X \setminus \bar{A}$

$X = \mathring{A} \cup \partial A \cup ext(A)$. Además, los tres conjuntos $\mathring{A}, \partial A, ext(A)$ tienen intersección vacía. Es decir, $\{\mathring{A}, \partial A, ext(A)\}$ forman una partición de X.

Si $\partial A = \emptyset$, entonces $X = \mathring{A} \cup ext(A)$, abiertos disjuntos.

Propiedad: Sea (X,T) e. top. $A \subset X$, $x \in X$. Sea $\mathcal{B}_x$ base de entornos del punto x. Son equivalentes:

1. $x \in \mathring{A}$ $\qquad (\exists V \in N_x$ tal que $V \subset A)$
2. $\exists B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset A$.

(Para ver que $x \in \mathring{A}$ basta comprobar la condición que define al punto interior para conjuntos en $\mathcal{B}_x$)

Dem: $(1 \Rightarrow 2)$ $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists V \in N_x$ tal que $V \subset A$. Como $\mathcal{B}_x$ es base de entornos, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset V \subset A$, como queríamos demostrar

$(2 \Rightarrow 1)$. Si existe $B \in \mathcal{B}_x$ con $B \subset A$. Como $B \in \mathcal{B}_x \subset N_x \Rightarrow$ $x \in \mathring{A}$ ■

Ejercicio: Sea $\mathcal{B}$ base de la topología T en X. Sea $x \in X$. Probar que

$$\mathcal{B}(x) = \{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \} \leftarrow$$

es una base de entornos abiertos de x.

Propiedad: Sea (X,T) un e.top. $A \subset X$, $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ base de entornos de x.

1. $x \in \overline{A}$ $\qquad (\forall V \in N_x, V \cap A \neq \emptyset)$
2. $\forall B \in \mathcal{B}_x$, $B \cap A \neq \emptyset$

Dem: $1 \Rightarrow 2$ Si $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{N}_x$ se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$. En particular, si $B \in \mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ y $B \cap A \neq \emptyset$

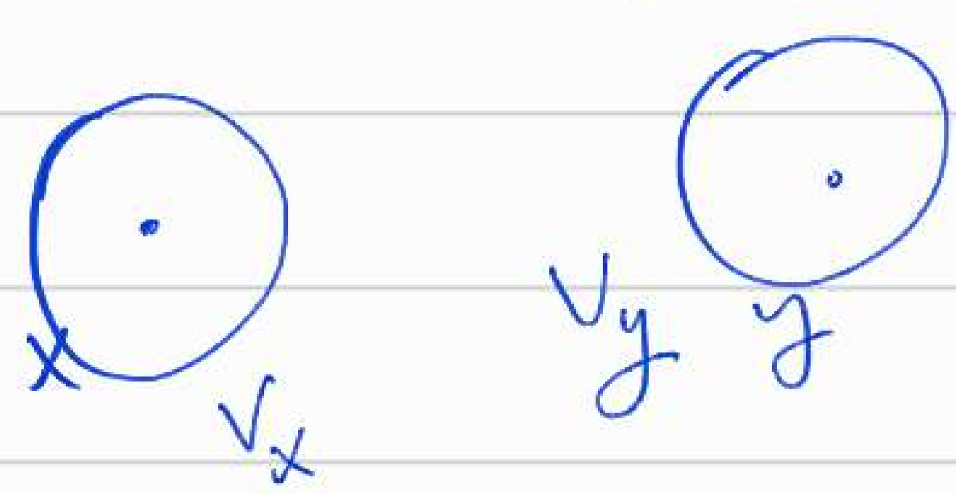
$2 \Rightarrow 1$. Sea $V \in \mathcal{N}_x$. Como $\mathcal{B}_x$ es base de entornos de x, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset V$. Tenemos entonces que

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ cierto}}}{\emptyset \neq} B \cap A \subset V \cap A \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \qquad \blacksquare$$

Probaremos más propiedades en ejercicios.

Mañana: axiomas de separación y numerabilidad

T_2 o Hausdorff



$x \neq y$

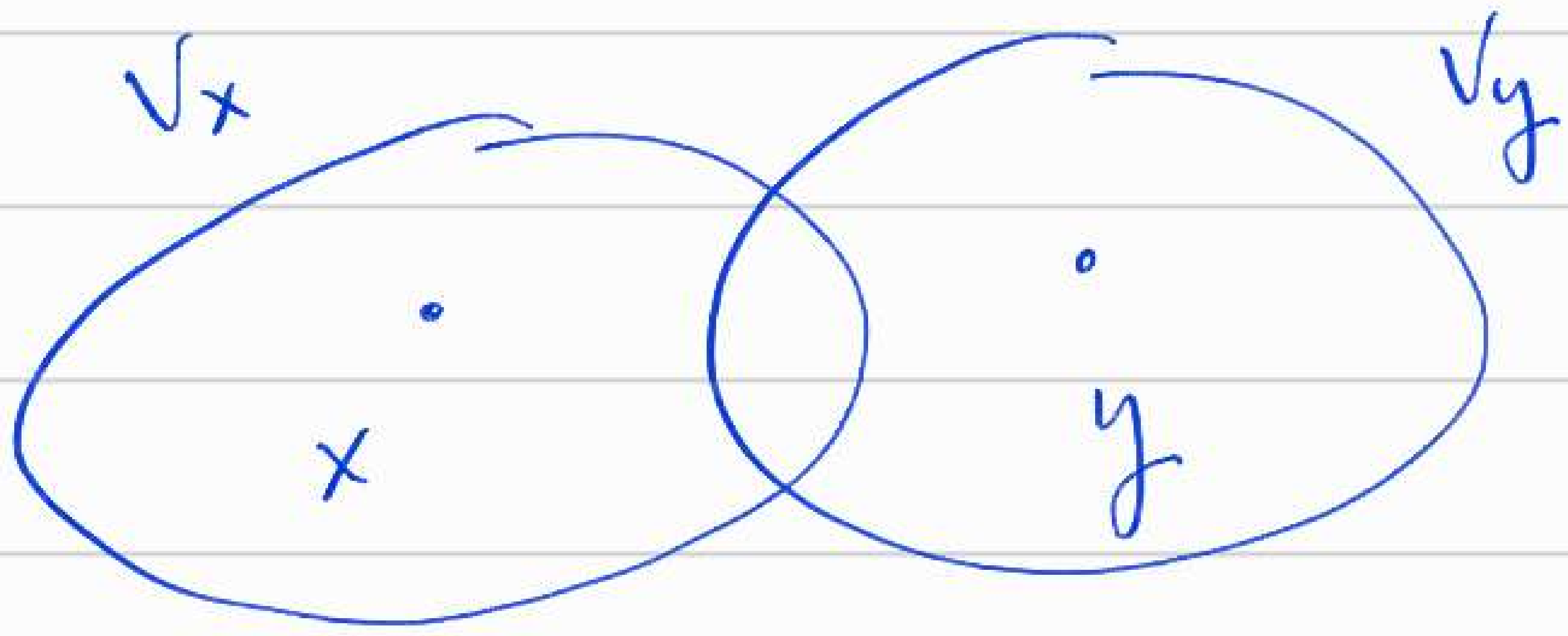
$$\exists\, V_x \in \mathcal{N}_x,\ V_y \in \mathcal{N}_y \ /\ V_x \cap V_y = \emptyset$$

16/10/2020

Axiomas de separación

$(\mathbb{X}, T)$ esp. topológico.

Def: diremos que $(\mathbb{X}, T)$ es T_1 (que verifica el axioma de separación) si, para todo par de puntos $x, y \in \mathbb{X}$, $x \neq y$, existen $V_x \in N_x$, $V_y \in N_y$ tales $y \notin V_x$ y $x \notin V_y$.



Prop: un espacio topológico $(\mathbb{X}, T)$ es T_1 si y sólo si todo punto es cerrado.

Dem: supongamos que $(\mathbb{X}, T)$ es T_1. Sea $x \in \mathbb{X}$. Veamos $\mathbb{X} \setminus \{x\} \in T$. Tomamos $y \in \mathbb{X} \setminus \{x\}$, entonces $y \neq x$. Como $(\mathbb{X}, T)$ es T_1, existe $V_y \in N_y$ tal que $x \notin V_y$. Esto significa que $V_y \subset \mathbb{X} \setminus \{x\}$. Entonces $y \in \text{int}(\mathbb{X} \setminus \{x\})$. Todo punto de $\mathbb{X} \setminus \{x\}$ es interior. Por tanto $\mathbb{X} \setminus \{x\}$ es un conjunto abierto. y $\{x\}$ es cerrado.

Supongamos ahora que todo punto es cerrado. Sean $x, y \in \mathbb{X}$, $x \neq y$. Sean $V_x = \mathbb{X} \setminus \{y\}$, $V_y = \mathbb{X} \setminus \{x\}$. $V_x, V_y \in T$. $x \in V_x$, $y \in V_y$, $x \notin V_y$, $y \notin V_x$. $V_x \in N_x$, $V_y \in N_y$, $y \notin V_x$, $x \notin V_y$ $\blacksquare$

Def: un espacio topológico (X, T) es T_2 o Hausdorff si para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $V_x \in N_x$, $V_y \in N_y$ tales que $V_x \cap V_y = \phi$

Nota: si $V_x \cap V_y = \phi \Rightarrow x \notin V_y$, $y \notin V_x$

Prop: Todo espacio topológico T_2 es T_1

Consecuencia: En un espacio Hausdorff todo punto es cerrado.

Ejemplo: sea (X, d) e. métrico. Entonces (X, T_d) es T_2.

$x \neq y$, $r = d(x,y) > 0 \Rightarrow B(x, r/2) \cap B(y, r/2) = \phi$

Def: diremos que un e. top. (X, T) es metrizable si existe una distancia d en X tal que $T_d = T$.

Nota: todo e. top. metrizable es T_2 (T_d es Hausdorff).

Ejemplo: $(\mathbb{N}, T_{CF})$ no es T_2. Por tanto no es metrizable.

$x \in \mathbb{N}$, $U \in N_x$, $\exists V \in T_{CF}$ tal que $x \in V \subset U$

$\Rightarrow \mathbb{N} \setminus U \subset \mathbb{N} \setminus V$ finito.

$x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y$ $\quad U_x \in N_x$, $U_y \in N_y$ $\quad U_x \cap U_y \neq \phi$ (si $U_x \cap U_y = \phi \Rightarrow \underbrace{(\mathbb{N} \setminus U_x)}_{\text{finito}} \cup \underbrace{(\mathbb{N} \setminus U_y)}_{\text{finito}} = \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{no finito}}$)

¿Es $(\mathbb{N}, T_{CF})$ T_1? Sí, porque todo punto es cerrado en $(\mathbb{N}, T_{CF})$.

$$C_{T_{CF}} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\text{conjuntos finitos}\}.$$

Axiomas de numerabilidad

Def: decimos que un e.top. (X,T) verifica el primer axioma de numerabilidad si cada punto admite una base de entornos numerable. Diremos también que (X,T) es AN-I.

Ejemplo: sea (X,d) un e. métrico. Entonces (X,T_d) es AN-I

$$\text{Si } x\in X, \quad \mathcal{B}_x = \{B(x,1/n) : n\in\mathbb{N}\}$$

es base de entornos de x.

Ejemplo: $(\mathbb{R}, T_{CF})$ no es AN-I. Tomamos $x\in\mathbb{R}$. Sea $\mathcal{B}_x=\{B_i : i\in\mathbb{N}\}$ una base numerable de x. Entonces $\mathbb{R}\setminus B_i$ es finito ($\exists U_i\in T$ tal que $U_i\subset B_i \Rightarrow \mathbb{R}\setminus B_i \subset \mathbb{R}\setminus U_i$ finito $\Rightarrow \mathbb{R}\setminus B_i$ finito). Entonces el conjunto

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}\setminus B_i$$

es numerable. También $\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}\setminus B_i)\right)\cup\{x\}$ es numerable.

Como $\mathbb{R}$ no es numerable, tomamos $y\notin \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}\setminus B_i)\cup\{x\}\right)$.

$V_x = \mathbb{R}\setminus\{y\}$ es entorno de x ($x\in V_x$ porque $x\neq y$ y $V_x\in T_{CF}$).

Veamos que no existe $B_{i_0}\subset V_x$. Si existiera, entonces

$$\{y\} = \mathbb{R}\setminus V_x \subset \mathbb{R}\setminus B_{i_0} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}\setminus B_i) \cup \{x\}$$

$$\Rightarrow y \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}\setminus B_i) \cup \{x\}. \quad \blacksquare$$

<u>Def</u>: diremos que un espacio topológico (X,T) verifica el segundo axioma de numerabilidad si existe una base numerable de T. Diremos que (X,T) es AN-II.

<u>Def</u>: diremos que un subconjunto D de un e.top. (X,T) es denso si $\overline{D} = X$.

<u>Def</u>: diremos que un e.top. es separable si contiene un subconjunto denso y numerable.

<u>Ejemplo</u>: $(\mathbb{R}, T_u)$ T_u: topología usual asociada a $d(x,y) = |x-y|$ es AN-II.

$$\mathcal{B} = \{(a,b) : a<b,\ a,b\in\mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$$

$\mathcal{B}$ es una familia numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Además, $\mathcal{B}$ es base de T_u. Si $U\in T_u$, entonces, para todo $\underline{x\in U}$, existen $c,d\in\mathbb{R}$ tales $x\in(c,d)\subset U$

$$c<x<d$$

Existen entonces $a,b\in\mathbb{Q}$ tales que $c<a<x<b<d$. (entre dos números reales distintos siempre hay un número racional)

$$x\in\underline{(a,b)}\subset(c,d)\subset U$$

$(a,b) \in \mathcal{B}$ $\qquad$ $(a,b] = U_x \subset U$

$$U = \bigcup_{x \in U} \underset{\mathcal{B}}{\underset{\cap}{U_x}}$$

$\blacksquare$

Ejercicio: $\mathbb{R}$ es separable $(\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R})$

Ejercicio: $(\mathbb{R}, T_D)$ no es AN-II.