12/11/2020

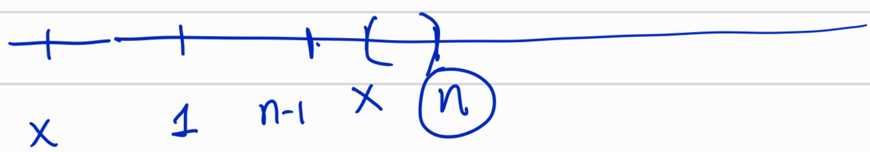
25. $(\mathbb{R}, T_S)$ $\quad \mathcal{B}_S = \{[a,b) : a<b\}$ $\quad T_u \subset T_S$

(a) Calcular clausura de $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}, \{-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$.

(b) Calcular la frontera de $(a,b], [a,b)$.

(a) $\overline{\mathbb{N}}$, $\quad \mathbb{N}\subset\overline{\mathbb{N}}$. Veamos qué puntos $x\notin\mathbb{N}$ están en $\overline{\mathbb{N}}$

Si $x\in\mathbb{R}$, $x\notin\mathbb{N}$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x<n$ y en el intervalo (x,n) no hay más números naturales



Entonces $[x,n)\in\mathcal{B}_S\subset T_S$ y $x\in[x,n) \Rightarrow [x,n)\in N_x$

$$\underline{[x,n)}\cap\mathbb{N} = (\{x\}\cup(x,n))\cap\mathbb{N} = \underbrace{(\{x\}\cap\mathbb{N})}_{=\emptyset}\cup\underbrace{((x,n)\cap\mathbb{N})}_{=\emptyset} = \emptyset$$

$\Rightarrow x\notin\overline{\mathbb{N}}$ (existe un entorno de x que no corta a $\mathbb{N}$)

Por tanto, $\overline{\mathbb{N}}=\mathbb{N}$.

$\overline{\mathbb{Q}}$, $\quad \mathbb{Q}\subset\overline{\mathbb{Q}}$. Veamos que $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$. Sea $x\in\mathbb{R}$, y sea $U\in N_x$, entonces existe $[a,b)\in\mathcal{B}_S$ tal que $x\in[a,b)\subset U$. Sabemos que $a<b$ y sabemos que existe $q\in\mathbb{Q}$ tal que $a<q<b$. Por tanto

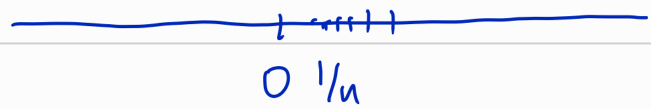
$$\emptyset \neq [a,b)\cap\mathbb{Q} \subset U\cap\mathbb{Q}$$

$\Rightarrow$ $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ para todo entorno $U \in \mathcal{N}_x$. $\Rightarrow$ $x \in \overline{\mathbb{Q}}$

$\Rightarrow$ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}}$.

Sea $x \notin \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces



$x < 0$, ó

$x = 0$, ó

$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$, para un cierto $n \in \mathbb{N}$, ó

$1 < x$

NO $\quad$ Si $x < 0$ $\Rightarrow$ $[x, 0) \in \mathcal{N}_x$ y $[x,0) \cap \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ $\Rightarrow$ $x \notin \overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}}$

SI $\quad$ Si $x = 0$ $\Rightarrow$ $\forall\, U \in \mathcal{N}_x$, existe $[0, r) \subset U$ y $[0,r) \cap \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $U \cap \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $0 \in \overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}}$

NO $\quad$ Si $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0+1} < x < \frac{1}{n_0}$ entonces $[x, \frac{1}{n_0}) \cap \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$

$\Rightarrow$ $x \notin \overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}}$

NO $\quad$ Si $1 < x$ entonces $[x, x+1) \in \mathcal{N}_x$ tal que $[x, x+1) \cap \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$

$\Rightarrow$ $x \notin \overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}}$

$$\overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$\overline{\{-\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}}$. Si $x\notin \overline{\{-\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}}$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} x<-1, \text{ ó} \\ \exists\, n_0\in\mathbb{N} \text{ tal que } -\frac{1}{n_0}<x<-\frac{1}{n_0+1}, \text{ ó} \\ x\geq 0. \end{array}\right\}$$

NO $\cdot$ $x<-1 \Rightarrow [x,-1)\in N_x$ y $[x,-1)\cap\{-\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}=\phi \Rightarrow$
$\Rightarrow x\notin \overline{\{-\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}}$

NO $\cdot$ $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ tal que $-\frac{1}{n_0}<x<-\frac{1}{n_0+1}$. Entonces $[x,-\frac{1}{n_0+1})\in N_x$
y $[x,-\frac{1}{n_0+1})\cap\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}=\phi \Rightarrow x\notin \overline{\{-\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}}$

NO $\cdot$ $x\geq 0$. Entonces $[x,x+1)\in N_x$ y $[x,x+1)\cap\{-\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}=\phi$
$\Rightarrow x\notin \overline{\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}}$

$\Rightarrow$ $\overline{\{-\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}}=\{-\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$

En particular $(-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a 0.

(b) $\partial((a,b])$ $\partial([a,b))$

$\partial((a,b])=\overline{(a,b]}\setminus \text{int}((a,b])$

$\overline{(a,b]}$. $(a,b]\subset\overline{(a,b]}$. Sea $x\notin(a,b]$

- $x<a$ $\quad [x,a) \in N_x$ y $[x,a) \cap (a,b] = \phi \Rightarrow x \notin \overline{(a,b]}$

- $x=a$ $\quad$ Si $\underline{U \in N_x}$, entonces existe $r>0$ tal que $[a,a+r) \subset U$

$$\underline{\phi \neq} \ [a,a+r) \cap (a,b] \subset \underline{U \cap (a,b]}$$

$\Rightarrow a \in \overline{(a,b]}$

- $x>b \Rightarrow x \notin \overline{(a,b]}$

$$\overline{(a,b]} = [a,b]$$

$\mathrm{int}((a,b])$ $\qquad \mathrm{int}((a,b]) \subset (a,b]$. Sea $\underline{x \in (a,b]}$

SI $\quad$ • Si $x<b \Rightarrow [x,b) \subset (a,b] \Rightarrow x \in \mathrm{int}((a,b])$

NO $\quad$ • Si $x=b$, $U \in N_x$, entonces existe $r>0$ tal que $[b,b+r) \subset U$

$$[b,b+r) \not\subset (a,b] \Rightarrow U \not\subset (a,b].$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Uparrow$$

$$\underline{\phi \neq} \ [b,b+r) \cap (\mathbb{R} \setminus (a,b]) \subset \underline{U \cap (\mathbb{R} \setminus (a,b])}$$

Por tanto $x=b \notin \mathrm{int}((a,b])$

$$\mathrm{int}((a,b]) = (a,b)$$

$$\partial((a,b]) = \overline{(a,b]} \setminus \mathrm{int}((a,b]) = [a,b] \setminus (a,b) = \{a,b\}$$

Calculamos ahora $\partial([a,b))$. Tenemos que calcular $\overline{[a,b)}$ e $\mathrm{int}([a,b))$.

$$[a,b)\in \mathcal{B}_S\subset T_S \Rightarrow \mathrm{int}([a,b))=[a,b)$$

$\overline{[a,b)}$ $\quad [a,b)\subset\overline{[a,b)}$. Sea $x\notin [a,b)$

$$x<a \Rightarrow \underline{[x,a)}\in N_x \text{ y } [x,\underline{a)\cap[}a,b)\underline{=\emptyset} \Rightarrow x\notin\overline{[a,b)}$$

$$x\geq b \Rightarrow [x,x+1)\in N_x \text{ y } \underset{b\leq x\leq}{[x,x+1)}\cap \underset{<b}{[a,b)}=\emptyset \Rightarrow x\notin\overline{[a,b)}$$

$$\overline{[a,b)}=[a,b).$$

$[a,b)$ es cerrado. Hay otra forma de ver que $[a,b)$ es cerrado

$$\mathbb{R}\setminus[a,b)=(-\infty,a)\cup[b,+\infty)$$

$$=\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\underset{\substack{\cap\\ \mathcal{B}_S\\ \cap\\ T_S}}{[-n,a)}\Big)\cup\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\underset{\substack{\cap\\ \mathcal{B}_S\\ \cap\\ T_S}}{[b,b+n)}\Big)\in T_S$$

Por tanto $\partial([a,b))=\overline{[a,b)}\setminus\mathrm{int}([a,b))=[a,b)\setminus[a,b)=\emptyset$
(Si A es abto. y cerrado, $\partial A=\bar{A}\setminus\mathring{A}=A\setminus A=\emptyset$)

26. (Recta discriminada) $\mathbb{R}$

$T = \{A \cup B : A \in T_u, B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = números irracionales.

(a) T topología

1. $\phi, \mathbb{R} \in T_u \Rightarrow \phi, \mathbb{R} \in T$ $\quad (\phi \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad U \in T_u \Rightarrow U \cup \phi = U \in T)$

2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T \Rightarrow U_i = A_i \cup B_i, \ A_i \in T_u, B_i \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ \forall i \in I$

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_i) = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)$$

- $A = \bigcup_{i \in I} A_i \in T_u$ porque T_u es topología en $\mathbb{R}$
- $B = \bigcup_{i \in I} B_i \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i = A \cup B, \quad A \in T_u, \ B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T.$$

3. $U_1, \dots, U_k \in T \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T$

Cada U_i se expresa como $A_i \cup B_i$, con $A_i \in T_u$, $B_i \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$U_1 \cap \dots \cap U_k = (A_1 \cup B_1) \cap \dots \cap (A_k \cup B_k) =$

$$\underbrace{(A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2)} \cap \dots (A_k \cap B_k)$$

$$((A_1 \cup B_1) \cap A_2) \cup ((A_1 \cup B_1) \cap B_2) \cap \dots$$

$$= (A_1 \cap A_2) \cup \underbrace{(B_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2)} \cap \dots$$

$$= \Big((\underline{A_1 \cap A_2}) \cup \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}{B_{12}} \Big) \cap \dots \cap (A_k \cap B_k)$$

$$= \underset{\substack{\cap \\ T_u}}{(A_1 \cap \dots \cap A_k)} \cup \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}{B_{12\dots k}} \qquad B_{12\dots k} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T.$$