10/12/2020

Estábamos probando $[a,b]$ es compacto. Para ello considerábamos un recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$, con $U_i \in (T_u)_{[a,b]}$, el conjunto

$$\{r \in [a,b] : [a,r] \text{ puede recubrirse por finitos } U_i\}$$

y el supremo s de dicho conjunto. Ayer vimos que $s=b$. Falta ver que b pertenece al conjunto. Para verlo, tomamos U_{i_0} que contiene a b. Existe $\varepsilon>0$ tal que $(b-\varepsilon,b] = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\cap[a,b] \subset U_{i_0}$. Como b es el supremo del conjunto, o bien b pertenece al conjunto o bien existe r en el conjunto tal que $r\in(b-\varepsilon,b]$. Sabemos que $[a,r]\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_k}$ y, por tanto

$$[a,b] = [a,r]\cup[r,b] \subset \underbrace{[a,r]}\cup\underline{(b-\varepsilon,b]} \subset \underbrace{U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_k}}\cup \underline{U_{i_0}}$$

Por tanto, $[a,b]$ se puede recubrir por una cantidad finita de U_i's. Es decir, $b\in$ conjunto y podemos extraer un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$ ■

Nota: $(a,b) = \bigcup_{n\geq n_0} \left(a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right)$. $\quad [a,b) = \bigcup_{n\geq n_0} \underbrace{\left[a, b-\frac{1}{n}\right)}\in (T_u)_{[a,b)}$

Def. Sea X un conjunto, y sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita si

$$\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$$

para todo $J\subset I$ finito.

Proposición: Sea (X,T) un e.top. Son equivalentes:

1. (X,T) compacto
2. Toda familia de cerrados en (X,T) con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Nota. 2 significa que si $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados tal que $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \phi$ $\forall J\subset I$ finito, entonces $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \phi$.

Dem (proposición). $1 \Rightarrow 2$. Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados tal que $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \phi$ si $J\subset I$ es finito. Supongamos que $\bigcap_{i\in I} F_i = \phi$. Entonces:

$$X = X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} (X\setminus F_i)$$

y $\{X\setminus F_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X. Por ser X compacto, $\exists J\subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{j\in J}(X\setminus F_j) \Rightarrow \phi = \bigcap_{j\in J} F_j$!! porque $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la prop. de la int. finita. Por tanto, $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \phi$.

$2 \Rightarrow 1$. Veamos que (X,T) es compacto. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ rec. abto de X. Entonces $\{X\setminus U_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados con la propiedad

$$\bigcap_{i\in I} (X\setminus U_i) = X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \phi$$

Entonces $\{X \setminus U_i\}_{i\in I}$ tiene intersección no vacía y, por 1, no puede tener la propiedad de la intersección finita. Existe $J \subset I$ finito tal que $\bigcap_{j\in J} (X\setminus U_j) = \phi$. Entonces

$$X = X \setminus \left(\bigcap_{j\in J} (X\setminus U_j) \right) = \bigcup_{j\in J} (X\setminus(X\setminus U_j)) = \bigcup_{j\in J} U_j$$

Del recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ hemos extraído un subrec. finito. Por tanto, (X,T) es compacto $\blacksquare$

<u>Consecuencia</u>: Si (X,T) es compacto y $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es decreciente ($F_{i+1} \subset F_i \ \forall i$) de conjuntos cerrados no vacíos, entonces $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Entonces

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \phi$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $\quad a_i < b_i \quad$ Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\underset{\smile}{a_i \uparrow}$ $\underset{\smile}{b_i \downarrow}$

$$a \leq a_i < b_i \leq b$$

entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} [a_i, b_i] \neq \phi$ $\quad$ ($\{[a_i,b_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de cerrados en el espacio compacto $\left([a,b], (T_u)_{[a,b]}\right)$.

<u>Proposición</u>: Sea $f: (X,T) \to (Y,T')$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Supongamos que (X,T) es compacto. Entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de (Y,T').

Por tanto, si f es homeomorfismo y (X,T) es compacto entonces (Y, T') es compacto.

Dem: Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $f(X)$ por abiertos de (Y,T'). $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} V_i$. Entonces

$$X \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$$

Como f es continua y $V_i \in T'$ $\forall i \in I$, $f^{-1}(V_i) \in T$ $\forall i \in I$. Entonces $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ es un rec. abierto de X. Como (X,T) es compacto, existe $J \subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j)$. Entonces

$$f(X) = f\left(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j)\right) = \bigcup_{j\in J} f(f^{-1}(V_j)) \subset \bigcup_{j\in J} V_j$$

Entonces $\{V_j\}_{j\in J}$ es un subrec. de $f(X)$ finito. Por tanto $f(X)$ es compacto $\blacksquare$

Proposición:

1. Si (X,T) es compacto y $A \subset X$ es cerrado, entonces A es un subconjunto compacto de X
2. Si (X,T) es un e. top. Hausdorff y $A \subset X$ es un subconjunto compacto, entonces A es cerrado
3. Si $f: (X,T) \to (Y,T')$ es continua, (X,T) es compacto e (Y,T') es Hausdorff, entonces f es cerrada. En particular, si f es biyectiva, es un homeomorfismo.

Dem: 1. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de A por conjuntos $U_i\in T$ $\forall i\in I$. $A\subset\bigcup_{i\in I} U_i$. Por tanto

$$\mathbb{X} = A\cup(\mathbb{X}\setminus A)\subset\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)\cup(\mathbb{X}\setminus A)$$

Como $\mathbb{X}\setminus A\in T$, la familia $\{U_i\}_{i\in I}\cup\{\mathbb{X}\setminus A\}$ es un rec. abto. de $(\mathbb{X},T)$. Como $(\mathbb{X},T)$ es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito.

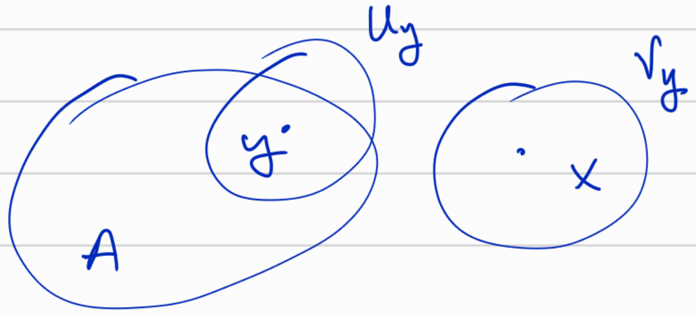
$$\mathbb{X}\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_k}\cup(\mathbb{X}\setminus A)$$

Entonces $A\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_k}$ y $\{U_{i_j}\}_{j\in\{1,\dots,k\}}$ es un subrecubrimiento finito de A.

2. [Nota $(\mathbb{X},T_{CF})$ $\mathbb{X}$ infinito. Sea $A\subset\mathbb{X}$ también infinito. Sabemos que $(\mathbb{X},T_{CF})$ es compacto. $(T_{CF})_A$ es la top. de los complementos finitos en A. Por tanto, $(A,(T_{CF})_A)$ es compacto. ¿Es A cerrado en T_{CF}? No, si $A\neq\mathbb{X}$. A sería un subconjunto compacto no cerrado de un e.top. No obstante, $(\mathbb{X},T_{CF})$ no es Hausdorff]

Sea $A\subset\mathbb{X}$ es un subconjunto compacto de $(\mathbb{X},T)$. Sea $x\notin A$.

$x\in\mathbb{X}\setminus A$



Para todo $y \in A$, sean $U_y, V_y \in T$ tales que $y \in U_y$, $x \in V_y$, $U_y \cap V_y = \phi$. Entonces $\{U_y\}_{y \in A}$ es un rec. de A por abiertos de (X, T). Como A es un subconjunto compacto, entonces existen $y_1, \dots, y_k \in A$ tales que $A \subset U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_k}$. Definimos $V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_k} \in T$, $x \in V$.

$$A \cap V \subset (U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_k}) \cap V = (U_{y_1} \cap V) \cup \dots \cup (U_{y_k} \cap V)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ V \subset V_{y_i} \ \forall i = 1, \dots, k}}{\subset} (U_{y_1} \cap V_{y_1}) \cup \dots \cup (U_{y_k} \cap V_{y_k}) = \phi$$

$\Rightarrow V \subset X \setminus A \Rightarrow x \in \text{int}(X \setminus A)$. Por tanto $X \setminus A \subset \text{int}(X \setminus A)$. Es decir, $X \setminus A = \text{int}(X \setminus A)$ y, por tanto, $X \setminus A \in T$. Entonces A es cerrado en (X, T).

3. Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ continua, (X, T) compacto, (Y, T') Hausdorff. Sea $C \subset X$ es cerrado. Por 1, C es compacto. Como f es continua, $f(C)$ es compacto en (Y, T'). Como (Y, T') es Hausdorff, 2 implica que $f(C)$ es cerrado. Por tanto, f es cerrada

■