6/11/2020

(X_i, T_i) $\quad f_i : X_i \to Y$ $\quad$ Construimos una topología en Y tal que $f_i : (X_i, T_i) \to (Y, T')$ es continua $\forall i \in I$ (topología final)

$g : (Y, T') \to (Z, T'')$ cont. $\iff$ $g \circ f_i : (X_i, T_i) \to (Y, T')$ es cont. $\forall i$

Ejemplo: Sea X un conjunto, (Y, T') e.top, $f : X \to Y$ aplicación
¿Existe una topología en X con el menor número posible de abiertos que hace continua a la aplicación f? Sea T esta posible topología

Si $U' \in T' \Rightarrow f^{-1}(U')$ debe pertenecer a T.

Veamos que

$$\boxed{T = \{ f^{-1}(U') : U' \in T' \}}$$

es una topología en X.

- $\phi = f^{-1}(\phi)$, $X = f^{-1}(Y)$ $\quad \phi, Y \in T' \Rightarrow \phi, X \in T$

- $\{U_i\}_{i \in I} \subset T$. Cada U_i es preimagen por f de $V_i \in T'$: $U_i = f^{-1}(V_i)$

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{i \in I} V_i}_{\in T'}\Big) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T$$

- $U_1, \dots, U_k \in T \Rightarrow U_i = f^{-1}(V_i)$, $V_i \in T'$, $\forall i = 1, \dots, k$

$$U_1 \cap \dots \cap U_k = f^{-1}(V_1) \cap \dots \cap f^{-1}(V_k) = f^{-1}(\underbrace{V_1 \cap \dots \cap V_k}_{\in T'})$$

$\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T$

T es una topología en X tal que $f: (X, T) \to (Y, T')$ es continua. Si existe otra topología $\tilde{T}$ en X tal que $f: (X, \tilde{T}) \to (Y, T')$ es continua, entonces $T \subset \tilde{T}$.

Si $\underline{U \in T} \Rightarrow \exists U' \in T'$ tal que $U = f^{-1}(U')$. Como $f: (X, \tilde{T}) \to (Y, T')$ es continua $\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(U')}_{= U} \in \tilde{T} \Rightarrow \underline{U \in \tilde{T}}$. $\mid$ $T \subset \tilde{T}$.

T es la topología más gruesa en X que hace continua a la aplicación f.

<u>Ejemplo:</u> Sea (X_i, T_i) una familia de e.top., X conjunto, $f_i: X \to X_i$ familia de aplicaciones. ¿Existe en X una topología T con la menor cantidad posible de abiertos tal que las aplicaciones $f_i: (X, T) \to (X_i, T_i)$ son continuas?

Si $U_i \in T_i$, entonces $f_i^{-1}(U_i)$ debe pertenecer a T.

Definimos $S = \{ f_i^{-1}(U_i) : U_i \in T_i, i \in I \}$ (Si I solo tiene un elemento, esta familia es una topología en X).

$$\bigcup_{V \in S} V = X \qquad \left(V = f_i^{-1}(X_i) = X \right)$$

Llamamos $T = T(S)$ = topología generada por S. S es subbase de $T(S)$

$$\mathcal{B} = \{ f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_K}^{-1}(U_{i_K}) ; U_{i_K} \in T_{i_K}, i_1, \dots, i_K \in I, K \in \mathbb{N} \}$$

es base de la topología $T(S)$. Recordamos que $T(S)$ es la menor topología que contiene a S $\left(T(S) = \bigcap_{S \subset T} T \right)$.

$T = T(S)$ es una topología en X y $f_i : (X,T) \to (X_i,T_i)$ son continuas.

$$U_i \in T_i \Rightarrow f_i^{-1}(U_i) \in S \subset \mathcal{B} \subset T$$

→ Supongamos ahora que $\tilde{T}$ es otra topología en X tal que $f_i : (X,\tilde{T}) \to (X_i,T_i)$ es continua. Veamos que $T \subset \tilde{T}$. Sea $U \in T$ $\Rightarrow U = \bigcup_{j\in J} B_j$, $B_j \in \mathcal{B}$. Cada $B_j = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ con

$i_1, \dots, i_k \in I$, $k \in \mathbb{N}$.

- Si $U_i \in T_i \Rightarrow f_i^{-1}(U_i) \in \tilde{T}$ porque $f_i : (X,\tilde{T}) \to (X_i,T_i)$ son continuas
- Si $U_{i_1} \in T_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in T_{i_k} \Rightarrow$ $\overbrace{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})}$ $\in \tilde{T}$

($f_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \in \tilde{T}$ por el punto anterior y la intersección finita de elementos de $\tilde{T}$ está en $\tilde{T}$) $\Rightarrow \mathcal{B} \subset \tilde{T}$

- ¿Si $\mathcal{B} \subset \tilde{T} \Rightarrow T \subset \tilde{T}$?

  Si $U \in T \Rightarrow U = \bigcup_{i\in I} B_i$, con $B_i \in \mathcal{B} \subset \tilde{T} \Rightarrow U$ es unión de elementos de $\tilde{T} \Rightarrow U \in \tilde{T}$

<u>Def</u>: a la topología T que hemos definido en X se le llama topología inicial asociada a la familia de aplicaciones $f_i : X \to (X_i, T_i)$.

Propiedad universal de la topología inicial. Sea (X_i,T_i) una familia de e.top., X conjunto, $f_i : X \to X_i$ familia de aplicaciones, T = top inicial en X, $(Z,\tilde{T})$ otro e.top y $g : Z \to X$ una aplicación

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Entonces $g: (Z, \tilde{T}) \to (X, T)$ es continua $\Leftrightarrow$ $\underline{f_i \circ g: (Z, \tilde{T}) \to (X_i, T_i)}$ es continua $\forall i \in I$.

$\Rightarrow]$ la composición de aplicaciones continuas también lo es.

$\Leftarrow]$ veamos que g es continua. Sea $\underline{\underline{\underline{U \in T}}}$ $\quad U = \bigcup_{j \in J} B_j$, $B_j \in \mathcal{B}$

Cada $B_j = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_K}^{-1}(U_{i_K})$, $U_{i_j} \in T_{i_j}$, $K \in \mathbb{N}$.

$$g^{-1}(U) = g^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} g^{-1}(B_j)$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(B_j) &= g^{-1}\left(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_K}^{-1}(U_{i_K})\right) \\ &= g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1})) \cap \dots \cap g^{-1}(f_{i_K}^{-1}(U_{i_K})) \\ &= \underbrace{(f_{i_1} \circ g)^{-1}(U_{i_1})}_{\in \tilde{T}} \cap \dots \cap \underbrace{(f_{i_K} \circ g)^{-1}(U_{i_K})}_{\in \tilde{T}} \in \tilde{T} \quad (\tilde{T} \text{ topología}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow g^{-1}(B_j) \in \tilde{T} \quad \forall j \in J$.

$$\underline{\underline{\underline{g^{-1}(U)}}} = \bigcup_{j \in J} g^{-1}(B_j) \ \underline{\underline{\underline{\in \tilde{T}}}} \quad (\tilde{T} \text{ topología}) \qquad \blacksquare$$

Espacios producto

Sea $(X_1, T_1), \dots, (X_K, T_K)$ familia de e.top. El producto cartesiano de $X_1 \times \dots \times X_K$ está formado por:

$$\{(x_1, \dots, x_K) : x_1 \in X_1, \dots, x_K \in X_K\}$$

Las aplicaciones proyección $\pi_i : X_1 \times \dots \times X_n \to X_i$ $\quad \forall i = 1, \dots, K$ se define por $\pi_i(\underline{(x_1, \dots, x_K)}) = x_i$. La aplicación π_i es la proyección i-ésima.

$$\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k \xrightarrow{\pi_i} (\mathbb{X}_i, T_i)$$

Queremos definir una topología en $\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k$ de modo que π_i sea continua $\forall i \in \{1, \dots, k\}$

<u>Def</u>: la top. inicial para las aplicaciones π_i es la topología producto en $\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k$. Se denota por $T_1 \times \dots \times T_k$.