29/10/2020

TEMA 2. Aplicaciones entre espacios topológicos

Def: sean (X,T), (Y,T') e top y $f: X \to Y$ una aplicación. Diremos que f es una aplicación continua de (X,T) en (Y,T') si, para todo $U' \in T'$, se tiene $f^{-1}(U') \in T$

Nota: si $f: X \to Y$ es una aplicación entre dos conjuntos y $U' \subset Y$,

$$f^{-1}(U') = \{x \in X : f(x) \in U'\}$$

$f^{-1}(U')$ es la imagen inversa de U' por f. (f^{-1} no es la aplicación inversa de f). f^{-1} tiene las siguientes propiedades

- $f^{-1}(U' \cap V') = f^{-1}(U') \cap f^{-1}(V')$
- $f^{-1}(U' \cup V') = f^{-1}(U') \cup f^{-1}(V')$
- $f^{-1}(Y \setminus U') = X \setminus f^{-1}(U')$ $\qquad (f^{-1}((U')^c) = f^{-1}(U')^c)$
- $f(f^{-1}(U')) \subset U'$

Def. sean (X,T), (Y,T') e.top., $f: X \to Y$ aplicación, $x_0 \in X$. Diremos que f es continua en x_0 si, para todo entorno $V \in N'_{f(x_0)} = \{$entornos de $f(x_0)$ en $(Y,T')\}$, existe $U \in N_{x_0} = \{$entornos de x_0 en $(X,T)\}$ tal que $f(U) \subset V$

Propiedad: sean (X,T), (Y,T') e top, $f: X \to Y$ aplicación. Son equivalentes:

1. f es continua
2. f es continua en x_0 para todo $x_0 \in X$

Dem: $1 \Rightarrow 2$ Sea $V \in N'_{f(x_0)}$. Existe $U' \in T'$ tal que $f(x_0) \in U' \subset V$

p.h. $f^{-1}(U') \in T$. $x_0 \in f^{-1}(U')$ ($\Leftrightarrow f(x_0) \in U'$) $\Rightarrow f^{-1}(U') \in N_{x_0}$
Llamamos $U = f^{-1}(U')$. Entonces

$$f(U) = f(f^{-1}(U')) \subset U' \subset V.$$

Entonces f es continua en x_0.

$2 \Rightarrow 1$ Sea $U' \in T'$. Queremos ver que $f^{-1}(U') \in T$. Veamos que todo punto de $f^{-1}(U')$ es un punto interior. Sea $x_0 \in f^{-1}(U')$, entonces $f(x_0) \in U'$. Por tanto, $U' \in N'_{f(x_0)}$ ($U' \in T'$, $f(x_0) \in U'$). P.h. existe $U \in N_{x_0}$ tal que $f(U) \subset U'$. Veamos que $U \subset f^{-1}(U')$. Para ver esta propiedad tomamos $x \in U \Rightarrow f(x) \in f(U) \subset U' = x \in f^{-1}(U')$.

Esto demuestra que x_0 es punto interior de $f^{-1}(U')$ porque existe $U \in N_{x_0}$ tal que $U \subset f^{-1}(U')$ $\blacksquare$

<u>Propiedad</u>: Sean (X,T), (Y,T') e.top, $f: X \to Y$, $\mathcal{B}$ base de T, $\mathcal{B}'$ base de T'. Son equivalentes:

1. f continua
2. Para todo $B' \in \mathcal{B}'$ y para todo $x \in f^{-1}(B')$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset f^{-1}(B')$

<u>Demostración</u>

$1 \Rightarrow 2$ Sea $B' \in \mathcal{B}' \subset T'$. P.h. $f^{-1}(B') \in T \Rightarrow f^{-1}(B') = \bigcup_{i \in I} B_i$

con $B_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall x \in f^{-1}(B')$ existe B_{i_0} al que llamamos B_x tal que $x \in B_x = B_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} B_i = f^{-1}(B')$

$2 \Rightarrow 1$ Sea $U' \in T'$. Como $\mathcal{B}'$ es base de T', $U' = \bigcup_{B_i' \in \mathcal{B}'} B_i'$

$f^{-1}(U') = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i'\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i')$. La propiedad 2 implica que

$f^{-1}(B_i') \in T$ para todo $i \in I$ $\left(f^{-1}(B_i') = \bigcup_{x \in f^{-1}(B_i')} B_x \right) \Rightarrow f^{-1}(U') \in T$

(unión de elementos de T).

Nota: 2 es equivalente a "$f^{-1}(B') \in T \ \forall B \in \mathcal{B}'$". Comprobadlo como ejercicio.

Propiedad: Sean (X,T), (Y,T') e. top., $x_0 \in X$, $\mathcal{B}_{x_0}$ base entorno de x_0 en (X,T), $\mathcal{B}'_{f(x_0)}$ es base de entornos de $f(x_0)$ en (Y,T'). Son equivalentes:

1. f continua en x_0
2. Para todo $V \in \mathcal{B}'_{f(x_0)}$, existe $U \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $f(U) \subset V$.

Dem: $1 \Rightarrow 2$ es inmediato porque $\mathcal{B}_{x_0} \subset \mathcal{N}_{x_0}$, $\mathcal{B}'_{f(x_0)} \subset \mathcal{N}'_{f(x_0)}$

$2 \Rightarrow 1$ Sea $V' \in \mathcal{N}'_{f(x_0)}$. Como $\mathcal{B}'_{f(x_0)}$ es base de entornos de $f(x_0)$ existe $V \in \mathcal{B}'_{f(x_0)}$ tal que $V \subset V'$. P.h. existe $U \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $f(U) \subset V \subset V'$. Ya hemos terminado porque dado $V' \in \mathcal{N}'_{f(x_0)}$, existe $U \in \mathcal{B}_{x_0} \subset \mathcal{N}_{x_0}$ tal que $f(U) \subset V'$ ∎

Ejemplo. Sean (X,d), (Y,d') e. métricos. Sean T_d, $T_{d'}$ son las topologías asociadas, $x_0 \in X$. Sean $\mathcal{B}_{x_0} = \{B(x_0,r) : r > 0\}$, $\mathcal{B}'_{f(x_0)} = \{B'(f(x_0),r) : r > 0\}$. La propiedad anterior me dice que $f : (X,T_d) \to (X,T_{d'})$ es continua en x_0 si para todo $B'(f(x_0),\varepsilon) \in \mathcal{B}'_{f(x_0)}$, existe $B(x_0,\varepsilon)$ tal que $f(B(x_0,\delta)) \subset B'(f(x_0),\varepsilon)$.

Esta propiedad es equivalente a: "para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0,\delta)) \subset B'(f(x_0), \varepsilon)$"

Decir que $f(B(x_0,\delta)) \subset B'(f(x_0),\varepsilon)$ es equivalente a decir que:
"$\forall x \in B(x_0,\delta)$, $f(x) \in B'(f(x_0),\varepsilon)$"; y esto es equivalente a
"$\forall x$ tal que $d(x,x_0) < \delta$, se tiene que $d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$"

La continuidad en $x_0 \in X$ se puede expresar como: "$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$" (*)

Nota importante: todas las aplicaciones continuas entre espacios métricos usando la caracterización (*) son continuas como aplicaciones entre espacios topológicos (p.e. polinomios, aplicación exponencial, ...)

30/10/2020

- Aplicación continua $f:(X,T)\to(Y,T')$. si $f^{-1}(U')\in T$ $\forall U'\in T'$
- Aplicación continua en $x_0\in X$. $f:(X,T)\to(Y,T')$ cont. en $x_0\in X$ si $\forall V\in N'_{f(x_0)}$, $\exists U\in N_{x_0}$ tal que $f(U)\subset V$

Propiedades: Sean (X,T), (Y,T') dos e.top., $f:X\to Y$ aplicación
Son equivalentes:

1. f continua
2. $f^{-1}(C')$ es cerrado en (X,T) para todo $C'\subset Y$ cerrado en (Y,T') $(f^{-1}(C')\in G_T \;\; \forall C'\in G_{T'})$
3. $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$ para todo $A\subset X$.

Dem: $(1)\Leftrightarrow(2)$, $(1)\Leftrightarrow(3)$

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $C'\in G_{T'} \Rightarrow Y\setminus C'\in T' \underset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow} \underbrace{f^{-1}(Y\setminus C')}_{= X\setminus f^{-1}(C')}\in T \Rightarrow f^{-1}(C')\in G$

2) $\Rightarrow$ 1) exactamente igual cambiando cerrado por abierto.

1) $\Rightarrow$ 3) Sea $y\in f(\bar{A}) \Rightarrow \exists x\in\bar{A}$ tal que $y=f(x)$. Queremos probar que $y\in\overline{f(A)}$. Tomamos $V\in N'_y$. Como f es continua en x, como $V\in N'_{f(x)}$ existe $U\in N_x$ tal que $f(U)\subset V$. Como $x\in\bar{A}$, $U\cap A\neq\emptyset$. Por tanto $f(U\cap A)\neq\emptyset$.

$$\emptyset\neq f(U\cap A)\subset f(U)\cap f(A)\subset V\cap f(A).$$

$(z\in f(U\cap A) \Rightarrow z=f(w)$ $w\in U\cap A \Rightarrow z=f(w)\in f(U)$, $z=f(w)\in f(A)$
$\Rightarrow z\in f(U)\cap f(A))$

Hemos probado que $\forall V \in N'_y$, $V \cap f(A) \neq \phi \Rightarrow y \in \overline{f(A)}$. Entonces $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

3) $\Rightarrow$ 1). Sea $U' \in T'$. Veamos que $f^{-1}(U') \in T$. Para ello vamos a ver que $X \setminus f^{-1}(U') \in G_T$. Sea $A = X \setminus f^{-1}(U')$. Por hipótesis $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

$$f(\bar{A}) = f(\overline{\underbrace{X \setminus f^{-1}(U')}}) = \overline{f(f^{-1}(Y \setminus U'))} \subset \overline{Y \setminus U'} = Y \setminus U'$$

U' abto

$\Rightarrow f(\bar{A}) \subset Y \setminus U'$

$\Rightarrow f(\overline{\underbrace{X \setminus f^{-1}(U')}}) \subset Y \setminus U' \Rightarrow \overline{X \setminus f^{-1}(U')} \subset f^{-1}(Y \setminus U') = X \setminus f^{-1}(U')$

$\supset$

Por tanto: $\overline{X \setminus f^{-1}(U')} = X \setminus f^{-1}(U') \Rightarrow X \setminus f^{-1}(U') \in G_T \Rightarrow f^{-1}(U') \in T$

■

<u>Ejemplos</u>: 1. (X, T), (Y, T') espacios topológicos. $f: X \to Y$ aplicación

- Si $T' = T_t \Rightarrow f$ continua siempre

$T' = T_t = \{\phi, Y\} \Rightarrow f^{-1}(\phi) = \phi$, $f^{-1}(Y) = X$, $\phi, X \in T$

- Si $T = T_D \Rightarrow f$ continua siempre

$\underline{U' \in T'} \Rightarrow \underline{f^{-1}(U')} \in P(X) = T_D$

2. $Id: (X, T) \to (X, T')$ continua si y solo si $\underline{T' \subset T}$ (T' es menos fina que T). Si $\underline{U \in T'} \Rightarrow Id^{-1}(U) \in \underline{T}$

$\overset{\shortparallel}{\underline{U}}$

4/11/2020

Ejemplos. 1. $f:(X,T)\to(Y,T')$ es continua siempre si T' = top. trivial
$f:(X,T)\to(Y,T')$ es continua siempre si T = top. discreta

2. $Id:(X,T)\to(X,T')$ continua $\Leftrightarrow$ $T'\subset T$ $\qquad Id^{-1}(U')=U'$

Propiedad: sean (X_1,T_1), (X_2,T_2), (X_3,T_3) y $f:X_1\to X_2$, $g:X_2\to X_3$ aplicaciones. Sea $x\in X_1$. Entonces:

1. Si f es continua en x y g es continua en $f(x)$, entonces $g\circ f$ es continua en x
2. Si f,g son continuas, entonces $g\circ f$ es continua.

Dem: 1. Sea $W\in N_{(g\circ f)(x)}$ entorno de $(g\circ f)(x)$ en (X_3,T_3)

Como g es continua en $f(x)$ y $g(f(x))=(g\circ f)(x)$, existe $V\in N_{f(x)}$ entorno de $f(x)$ en (X_2,T_2) tal que $g(V)\subset W$.
Como f es continua en $x\in X_1$, dado $V\in N_{f(x)}$, existe $U\in N_x$ entorno de x en (X_1,T_1) tal que $f(U)\subset V$.
Entonces

$$(g\circ f)(U) = g(f(U))\subset g(V)\subset W$$

y $(g\circ f)$ es continua en x.

2. Se sigue a partir de 1. porque una aplicación es continua si y sólo si es continua en cada punto.
Otra demostración. Sea $U_3\in T_3$. Entonces

$$(g\circ f)^{-1}(U_3) = f^{-1}(g^{-1}(U_3))$$

Como g es continua, $g^{-1}(U_3) \in T_2$. Como f es continua, $f^{-1}(g^{-1}(U_3)) \in T_1 \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U_3) \in T_1$. ∎

Ejemplos: 1. Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación constante: existe $y_0 \in Y$ tal que $f(x) = y_0$ $\forall x \in X$. ($f(X) = \{y_0\}$). Entonces f es continua.

Sea $U' \in T'$.

$$f^{-1}(U') = \begin{cases} X, & \text{si } y_0 \in U' \\ \phi, & \text{si } y_0 \notin U' \end{cases}$$

$\phi, X \in T \Rightarrow f$ es continua

3. (X, T) e.top. $A \subset X$ no vacío. $T_A = \{U \cap A : U \in T\}$ top. inducida en A por T. Sea $i_A : A \to X$ la aplicación inclusión ($i_A(a) = a$ $\forall a \in A$). Entonces $i_A : (A, T_A) \to (X, T)$ es continua: tomamos $U \in T$

$$i_A^{-1}(U) = \{a \in A : a \in U\} = \underline{U \cap A \in T_A} \leftarrow$$

4. Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ continua, $A \subset X$, $A \neq \phi$. La restricción de f al subconjunto A es la aplicación $f_{|A} : A \to Y$ definida por $f_{|A}(a) = f(a)$ $\forall a \in A$. Entonces $f_{|A} : (A, T_A) \to (Y, T')$ es continua

La demostración consiste en probar que $f_{|A} = f \circ i_A$ ($\forall a \in A$
$f_{|A}(a) = f(a) = f(i_A(a)) = (f \circ i_A)(a)$). Entonces $f_{|A}$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas.

5. Sean (X, T), (Y, T') esp. top. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de abiertos de X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ (recubrimiento abierto de X). Sea

$f: X \to Y$ una aplicación. Entonces f es continua si y sólo si $f|_{U_\alpha}$ es continua. $(f|_{U_\alpha} : (U_\alpha, T_{U_\alpha}) \to (Y, T'))$. Se sigue del ejemplo 4 que si f es continua, entonces $f|_{U_\alpha}$ es continua. Supongamos ahora que $f|_{U_\alpha}$ es continua $\forall \alpha \in I$. Sea $V \in T'$. Como $f|_{U_\alpha}$ es continua, tenemos que $f|_{U_\alpha}^{-1}(V) \in T_{U_\alpha}$. Existe entonces $V_\alpha \in T$ tal que

$$f|_{U_\alpha}^{-1}(V) = V_\alpha \cap U_\alpha$$

Como $U_\alpha \in T$, $V_\alpha \in T \Rightarrow V_\alpha \cap U_\alpha \in T \Rightarrow f|_{U_\alpha}^{-1}(V) \in T$ $\forall \alpha \in I$.
Por otra parte:

$$f|_{U_\alpha}^{-1}(V) = (f \circ i_{U_\alpha})^{-1}(V) = i_{U_\alpha}^{-1}(f^{-1}(V)) = f^{-1}(V) \cap U_\alpha$$

Entonces:

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (f^{-1}(V) \cap U_\alpha)$$

$$= \bigcup_{\alpha \in I} \underbrace{f|_{U_\alpha}^{-1}(V)}_{\in T} \in T$$

Acabamos de probar que $\forall V \in T'$, $f^{-1}(V) \in T$. Por tanto f es continua.

¿Es cierto este resultado si los conjuntos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ son cerrados?
En principio la demostración que acabamos de hacer no sirve porque la unión arbitraria de cerrados no es un conjunto cerrado.

6. Sean (X, T), (Y, T') e.top. $f: X \to Y$ aplicación, $C_1, \dots, C_k$ familia finita de cerrados en X tales que $X = C_1 \cup \dots \cup C_k$. Entonces f es

continua si y sólo si f_{K_i} es continua $\forall i \in \{1, \dots, K\}$. (ejercicio)

Def: Sean (X,T), (Y,T') dos e.top., $f: X \to Y$ una aplicación:

1. Diremos que f es una aplicación abierta si $f(U) \in T'$ $\forall U \in T$.
2. Diremos que f es una aplicación cerrada si $f(C) \in C_{T'}$ $\forall C \in C_T$.

Def: Sean (X,T), (Y,T') son dos e.top. Una aplicación $f: X \to Y$ es un homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa f^{-1} es continua.

Si f es biyectiva, entonces $f^{-1}: (Y,T') \to (X,T)$ es una aplicación bien definida. f^{-1} es continua $\Leftrightarrow \forall U \in T$, $(f^{-1})^{-1}(U) \in T'$ $\Leftrightarrow \forall U \in T$, $f(U) \in T' \Leftrightarrow f$ es abierta.

$$(f^{-1})^{-1}(U) = \{y \in T : f^{-1}(y) \in U\} = \{y \in T : y \in f(U)\} = f(U)$$

Si f es biyectiva, f^{-1} es continua $\Leftrightarrow$ f es abierta.

Nota: f es homeomorfismo si f es biyectiva, continua y abierta.

Def: cuando existe un homeomorfismo $f: (X,T) \to (Y,T')$ diremos que (X,T) es homeomorfo a (Y,T') y lo indicaremos por $(X,T) \approx (Y,T')$

1. $(X,T) \approx (X,T)$ $\quad (Id: (X,T) \to (X,T))$
2. $(X,T) \approx (Y,T') \Rightarrow (Y,T') \approx (X,T)$ $\quad$ ($f: X \to Y$ hom. $\Rightarrow f^{-1}: Y \to X$ es homeomorfismo)
3. $(X,T) \approx (Y,T')$, $(Y,T') \approx (Z,T'') \Rightarrow (X,T) \approx (Z,T'')$ (Si $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ son homeomorfismos, entonces $g \circ f: X \to Z$ es homeom.).

$\Rightarrow$ $\approx$ es una relación de equivalencia.

5/11/2020

Contraejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$. En $(\mathbb{R}, T_u)$ cada punto es cerrado.

No es cierto que f continua $\underline{\Leftrightarrow}$ $f|_{\{x\}}$ es continua

$f|_{\{x\}}: \{x\} \to \mathbb{R}$ siempre es continua por ser constante (independientemente de la topología que pongamos en $\mathbb{R}$).

Si fuera cierto que: "dada $f: (X, T) \to (Y, T')$, $X = \bigcup_{i \in I} C_i$, C_i cerrados de X, f cont. $\Leftrightarrow$ $f|_{C_i}$ es continua", entonces cualquier aplicación $f: (\mathbb{R}, T_u) \to (\mathbb{R}, T_u)$ sería continua.

$f: (X, T) \to (Y, T')$ homeomorfismo si f biyectiva, continua y abierta

(X, T) es homeomorfo a (Y, T') ($(X,T) \cong (Y, T')$) si $\exists f: (X, T) \to (Y, T')$ homeomorfismo.

Def: un invariante topológico es una propiedad de un espacio topológico que se conserva por homeomorfismos.

Ejemplos: 1. Sea (X, T) un e.top. Entonces el cardinal de X es un invariante topológico, puesto que $(X, T) \cong (Y, T')$, existe $f: (X, T) \to (Y, T')$ homeomorfismo, que es una aplicación biyectiva. Por tanto $\# X = \# Y$.

$$(\mathbb{R}, T_{CF}) \not\cong (\mathbb{N}, T_{CF})$$

2. La propiedad Hausdorff es un invariante topológico. Supongamos que (X, T) es Hausdorff y que $f: (X, T) \to (Y, T')$ es un homeomorfismo. Veamos que (Y, T') es Hausdorff. Sean $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Como f es biyectiva, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Por supuesto, $x_1 \neq x_2$.

Como (X,T) es Hausdorff, y $x_1 \neq x_2$, existen $V_1 \in N_{x_1}$, $V_2 \in N_{x_2}$ tales que $\phi = V_1 \cap V_2$. Entonces $\phi = f(\phi) = f(V_1 \cap V_2) = f(V_1) \cap f(V_2)$ (f biyectiva). Veamos que $f(V_i)$ es entorno de y_i, $i=1,2$. Esto demostraría que (Y,T') es Hausdorff.

→ V es entorno de $x \in X$ y $f: (X,T) \to (Y,T')$ homeomorfismo, entonces $f(V)$ es entorno de $f(x) \in Y$. Sabemos que $V \in N_x \Rightarrow \exists\, U \in T$ tal que $x \in U \subset V \Rightarrow f(x) \in f(U) \subset f(V)$. Como f es homeomorfismo, es abierta. $\Rightarrow f(U) \in T' \Rightarrow f(U) \in N'_{f(x)}$. Como $f(U) \subset f(V) \Rightarrow f(V) \in N'_{f(x)}$.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{no es Hausdorff}}}{(\mathbb{R}, T_{CF})} \not\cong \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sí es Hausdorff}}}{(\mathbb{R}, T_u)}$$

3. Propiedades que son invariantes topológicos.

- AN-I
- AN-II

} ejercicio.

Si $f: (X,T) \to (Y,T')$ es homeomorfismo, $x \in X$.

- Si $\mathcal{B}_x$ es base de entornos de $x \Rightarrow f(\mathcal{B}_x) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}_x\}$ es base de entornos de $f(x)$
- Si $\mathcal{B}$ es base de T, entonces $f(\mathcal{B}) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es base de T'.

Ejemplo: Sea (X,T) un e.top., Y conjunto, $f: X \to Y$. ¿Puedo poner en Y una topología de modo que f sea continua? Sí, la top. trivial T_t en Y. ¿Cuál es la top. en Y con la mayor cantidad posible de abiertos tal que f es continua?

$$T'_f = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in T\}$$

T_f' es topología

- $\underset{\substack{\Uparrow \\ T}}{\phi} = f^{-1}(\phi)$, $\underset{\substack{\Uparrow \\ T}}{X} = f^{-1}(Y) \Rightarrow \phi, Y \in T_f'$
- Sea $\{V_i\}_{i\in I} \subset T_f' \Rightarrow f^{-1}(V_i) \in T \ \forall i \in I \underset{T \text{ top.}}{\Rightarrow} \underline{\bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) \in T}$
  $$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\Big(\underline{\bigcup_{i\in I} V_i}\Big)$$
  $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} V_i \in T_f'$
- $V_1,\dots,V_K \in T_f' \Rightarrow f^{-1}(V_1\cap\dots\cap V_K) = \underset{\substack{\Uparrow \\ T}}{f^{-1}(V_1)} \cap\dots\cap \underset{\substack{\Uparrow \\ T}}{f^{-1}(V_K)} \in T$
  $\Rightarrow V_1\cap\dots\cap V_K \in T_f'$.

Si T' es una topología en Y tal que $f:(X,T)\to(Y,T')$ es continua entonces $T' \subset T_f$. Si $\underline{V\in T'}$, como f es continua, $f^{-1}(V)\in T \Rightarrow \underline{V\in T_f'}$

T_f' = topología final para la aplicación f.

Ejemplo: Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ una familia de e. top., Y conjunto, $f_i : X_i \to Y$ familia de aplicaciones. ¿Existe en Y una topología con la mayor cantidad posible de abiertos que hace continuas a estas aplicaciones?

Sea $T' = \{V\subset Y : f_i^{-1}(V)\in T_i \ \forall i\in I\}$. Veamos que T' es topología en Y.

- $\phi = f_i^{-1}(\phi)$ $X_i = f_i^{-1}(Y)$ $\forall i\in I \Rightarrow \phi, Y \in T'$
- $\{V_j\}_{j\in J} \subset T' \Rightarrow f_i^{-1}(V_j)\in T_i \ \forall i\in I, \forall j\in J. \Rightarrow \underline{f_i^{-1}}\Big(\underline{\bigcup_{j\in J} V_j}\Big) =$
  $$= \bigcup_{j\in J} \underset{\substack{\Uparrow \\ T_i}}{f_i^{-1}(V_j)} \in \underline{T_i} \ \underline{\forall i} \Rightarrow \bigcup_{j\in J} V_j \in T_i$$

- $V_1,\dots,V_K \in T' \Rightarrow f_i^{-1}(V_1),\dots,f_i^{-1}(V_K) \in T_i \ \forall i\in I$

$\Rightarrow f_i^{-1}(V_1\cap\dots\cap V_K) = \underset{T_i}{\underset{\cap}{f_i^{-1}(V_1)}} \cap\dots\cap \underset{T_i}{\underset{\cap}{f_i^{-1}(V_K)}} \in T_i \ \forall i\in I$

$\Rightarrow V_1\cap\dots\cap V_K \in T'$

T' es una top. en Y y $f_i:(X_i,T_i)\to(Y,T')$ es cont. $\forall i\in I$

Veamos que, si $\tilde{T}$ es otra topología en Y tal que $f_i:(X_i,T_i)\to(Y,\tilde{T})$ es continua, entonces $\tilde{T}\subset T'$! Si $\underline{\tilde{V}\in\tilde{T}} \Rightarrow f_i^{-1}(\tilde{V})\in T_i \ \forall i\in I \underset{\text{def. } T'}{\Rightarrow} \underline{\tilde{V}\in T'}$

Def: A T' se le llama la topología final en Y inducida por la familia de aplicaciones $\{f_i\}_{i\in I}$.

Propiedad. Sea $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ familia de e.top., Y conjunto, $f_i: X_i\to Y$ familia de aplicaciones y T' la top. final en Y inducida por $\{f_i\}_{i\in I}$. Sea (Z,T'') otro espacio topológico, y $g: Y\to Z$ una aplicación

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g\circ f_i"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Entonces $g:(Y,T')\to(Z,T'')$ es continua $\Leftrightarrow g\circ f_i:(X_i,T_i)\to(Z,T'')$ es continua $\forall i\in I$

$\Rightarrow$)) trivial (la comp. de apl. cont. es continua).

$\Leftarrow$) Sabemos que $g\circ f_i$ es cont. $\forall i\in I$. Queremos ver que g es continua. Sea $W\in T''$, $g^{-1}(W)\in T' \Leftrightarrow \underset{(g\circ f_i)^{-1}(W)}{\underset{\shortparallel}{f_i^{-1}(g^{-1}(W))}}\in T_i \ \forall i\in I$

Como suponemos $(g \circ f_i)$ continua $\Rightarrow (g \circ f_i)^{-1}(W) \in T_i \; \forall i \in I \Rightarrow g^{-1}(W) \in T'$

A esta propiedad se le conoce como propiedad universal de la topología final.

Próximo día $\quad f : X \to \underbrace{(Y, T')}$ ¿ $\exists$ T en X / f continua ?

$\qquad f_i : X \to (Y_i, T_i')$ ¿ $\exists$ T en X / f_i cont. $\forall i$?

6/11/2020

(X_i, T_i) $\quad f_i : X_i \to Y$ Construimos una topología en Y tal que $f_i : (X_i, T_i) \to (Y, T')$ es continua $\forall i \in I$ (topología final)

$g : (Y, T') \to (Z, T'')$ cont. $\Leftrightarrow$ $g \circ f_i : (X_i, T_i) \to (Y, T')$ es cont. $\forall i$

<u>Ejemplo</u>: Sea X un conjunto, (Y, T') e.top, $f : X \to Y$ aplicación
¿Existe una topología en X con el menor número posible de abiertos que hace continua a la aplicación f? Sea T esta posible topología

Si $U' \in T' \Rightarrow f^{-1}(U')$ debe pertenecer a T.

Veamos que

$$\boxed{T = \{ f^{-1}(U') : U' \in T' \}}$$

es una topología en X.

- $\phi = f^{-1}(\phi)$, $X = f^{-1}(Y)$ $\quad \phi, Y \in T' \Rightarrow \phi, X \in T$

- $\{U_i\}_{i \in I} \subset T$. Cada U_i es preimagen por f de $V_i \in T'$: $U_i = f^{-1}(V_i)$

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{i \in I} V_i}_{\in T'}\Big) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T$$

- $U_1, \dots, U_k \in T \Rightarrow U_i = f^{-1}(V_i)$, $V_i \in T'$, $\forall i = 1, \dots, k$

$$U_1 \cap \dots \cap U_k = f^{-1}(V_1) \cap \dots \cap f^{-1}(V_k) = f^{-1}(\underbrace{V_1 \cap \dots \cap V_k}_{\in T'})$$

$\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T$

T es una topología en X tal que $f:(X,T)\to(Y,T')$ es continua. Si existe otra topología $\tilde{T}$ en X tal que $f:(X,\tilde{T})\to(Y,T')$ es continua, entonces $T\subset\tilde{T}$.

Si $\underline{U\in T}\Rightarrow \exists U'\in T'$ tal que $U=f^{-1}(U')$. Como
$f:(X,\tilde{T})\to(Y,T')$ es continua $\Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{U}}{f^{-1}(U')}\in\tilde{T}\Rightarrow \underline{U\in\tilde{T}}$. $\quad|\quad T\subset\tilde{T}$.

T es la topología más gruesa en X que hace continua a la aplicación f.

<u>Ejemplo</u>: Sea (X_i,T_i) una familia de e.top., X conjunto, $f_i: X\to X_i$ familia de aplicaciones. ¿Existe en X una topología T con la menor cantidad posible de abiertos tal que las aplicaciones $f_i:(X,T)\to(X_i,T_i)$ son continuas?

Si $U_i\in T_i$, entonces $f_i^{-1}(U_i)$ debe pertenecer a T.

Definimos $S=\{f_i^{-1}(U_i): U_i\in T_i,\ i\in I\}$ (Si I solo tiene un elemento, esta familia es una topología en X).

$$\bigcup_{V\in S} V = X \qquad \left(V=f_i^{-1}(X_i)=X\right)$$

Llamamos $T=T(S)=$ topología generada por S. S es subbase de $T(S)$

$$\mathcal{B}=\{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1})\cap\dots\cap f_{i_K}^{-1}(U_{i_K});\ U_{i_K}\in T_{i_K},\ i_1,\dots,i_K\in I,\ K\in\mathbb{N}\}$$

es base de la topología $T(S)$. Recordamos que $T(S)$ es la menor topología que contiene a S $\left(T(S)=\bigcap_{S\subset T} T\right)$.

$T = T(S)$ es una topología en X y $f_i : (X, T) \to (X_i, T_i)$ son continuas.

$$U_i \in T_i \Rightarrow f_i^{-1}(U_i) \in S \subset \mathcal{B} \subset T$$

→ Supongamos ahora que $\tilde{T}$ es otra topología en X tal que $f_i : (X, \tilde{T}) \to (X_i, T_i)$ es continua. Veamos que $T \subset \tilde{T}$. Sea $U \in T$ $\Rightarrow U = \bigcup_{j \in J} B_j$, $B_j \in \mathcal{B}$. Cada $B_j = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ con

$i_1, \dots, i_k \in I$, $k \in \mathbb{N}$.

- Si $U_i \in T_i \Rightarrow f_i^{-1}(U_i) \in \tilde{T}$ porque $f_i : (X, \tilde{T}) \to (X_i, T_i)$ son continuas
- Si $U_{i_1} \in T_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in T_{i_k} \Rightarrow f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \in \tilde{T}$

($f_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \in \tilde{T}$ por el punto anterior y la intersección finita de elementos de $\tilde{T}$ está en $\tilde{T}$) $\Rightarrow \mathcal{B} \subset \tilde{T}$

- ¿Si $\mathcal{B} \subset \tilde{T} \Rightarrow T \subset \tilde{T}$?

  Si $U \in T \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i$, con $B_i \in \mathcal{B} \subset \tilde{T} \Rightarrow U$ es unión de elementos de $\tilde{T} \Rightarrow U \in \tilde{T}$

<u>Def</u>: a la topología T que hemos definido en X se le llama topología inicial asociada a la familia de aplicaciones $f_i : X \to (X_i, T_i)$.

Propiedad universal de la topología inicial. Sea (X_i, T_i) una familia de e. top., X conjunto, $f_i : X \to X_i$ familia de aplicaciones, T = top inicial en X. $(Z, \tilde{T})$ otro e. top y $g : Z \to X$ una aplicación

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Entonces $g:(Z,\tilde{T})\to(X,T)$ es continua $\Leftarrow\!\Rightarrow$ $\underline{f_i\circ g:(Z,\tilde{T})\to(X_i,T_i)}$ es continua $\forall i\in I$.

$\Rightarrow]$ la composición de aplicaciones continuas también lo es.

$\Leftarrow]$ veamos que g es continua. Sea $\underline{\underline{U\in T}}$ $\quad U=\bigcup_{j\in J} B_j,\ B_j\in\mathcal{B}$

Cada $B_j=f_{i_1}^{-1}(U_{i_1})\cap\ldots\cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, $\ U_{i_j}\in T_{i_j}$, $K\in\mathbb{N}$.

$$g^{-1}(U)=g^{-1}\left(\bigcup_{j\in J}B_j\right)=\bigcup_{j\in J}g^{-1}(B_j)$$

$$\begin{aligned}
g^{-1}(B_j)&=g^{-1}\left(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1})\cap\ldots\cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\right)\\
&=g^{-1}(f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}))\cap\ldots\cap g^{-1}(f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}))\\
&=\underbrace{(f_{i_1}\circ g)^{-1}(U_{i_1})}_{\in\tilde{T}}\cap\ldots\cap\underbrace{(f_{i_k}\circ g)^{-1}(U_{i_k})}_{\in\tilde{T}}\in\tilde{T}\quad(\tilde{T}\text{ topología})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow g^{-1}(B_j)\in\tilde{T}\quad\forall j\in J$.

$$\underline{\underline{g^{-1}(U)}}=\bigcup_{j\in J}g^{-1}(B_j)\ \underline{\underline{\in\tilde{T}}}\quad(\tilde{T}\text{ topología})\qquad\blacksquare$$

Espacios producto

Sea $(X_1,T_1),\ldots,(X_K,T_K)$ familia de e.top. El producto cartesiano de $X_1\times\ldots\times X_K$ está formado por:

$$\{(x_1,\ldots,x_K):\ x_1\in X_1,\ldots,x_K\in X_K\}$$

Las aplicaciones proyección $\pi_i: X_1\times\ldots\times X_n\to X_i\quad\forall i=1,\ldots,K$ se define por $\pi_i(\underline{(x_1,\ldots,x_K)})=x_i$. La aplicación π_i es la proyección i-ésima.

$$\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k \xrightarrow{\pi_i} (\mathbb{X}_i, T_i)$$

Queremos definir una topología en $\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k$ de modo que π_i sea continua $\forall i \in \{1, \dots, k\}$

Def: la top. inicial para las aplicaciones π_i es la topología producto en $\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k$. Se denota por $T_1 \times \dots \times T_k$.

11/11/2020

Espacios producto

Sean $(X_1,T_1),\dots,(X_K,T_K)$ espacios topológicos. $X_1\times\dots\times X_K$ su producto cartesiano:

$$X_1\times\dots\times X_K=\{(x_1,\dots,x_K):\ x_i\in X_i\ \forall i=1,\dots,K\}$$

$\pi_i: X_1\times\dots\times X_K\to X_i$ proyección ; $\pi_i((x_1,\dots,x_i,\dots,x_K))=x_i$
$\forall i=1,\dots,K$

(X_i,T_i) e.top; $X=X_1\times\dots\times X_K$; $\pi_i: X\to X_i$ familia aplicaciones. Consideramos en X la topología inicial inducida por las aplicaciones π_i. Por definición, dicha topología es la topología producto en $X=X_1\times\dots\times X_K$ y la denotaremos por $T_1\times\dots\times T_K$

<u>Propiedades</u>: 1. las aplicaciones $\pi_i:(X_1\times\dots\times X_K, T_1\times\dots\times T_K)\to(X_i,T_i)$ son continuas $\forall i\in\{1,\dots,K\}$

2. $T_1\times\dots\times T_K$ es la topología más gruesa que hace continuas a las aplicaciones π_i, $i\in\{1,\dots,K\}$

3. Si (Z,T') es un e.top. y $f: Z\to X_1\times\dots\times X_K$ es una aplicación, entonces $f:(Z,T')\to(X_1\times\dots\times X_K, T_1\times\dots\times T_K)$ es continua si y sólo si $\pi_i\circ f:(Z,T')\to(X_i,T_i)$ es continua para todo $i\in\{1,\dots,K\}$.

4. La familia

$$S=\{\pi_i^{-1}(U_i):\ U_i\in T_i,\ \ i\in\{1,\dots,K\}\}$$

es una subbase de $T_1 \times \ldots \times T_k$

5. La familia

$$\mathcal{B} = \{ \pi_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \pi_k^{-1}(U_k) : U_i \in T_i, \ i \in \{1, \ldots, k\} \} \leftarrow$$

es una base de $T_1 \times \ldots \times T_k$

Dem: 1-4 son propiedades de la top. inicial.

5. Si $f_i : X \to X_i$ es una familia de aplicaciones en (X_i, T_i) y T es la top. inicial en X, entonces sabemos que

$$\to \quad \mathcal{B} = \{ f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_r}^{-1}(U_{i_r}) : U_{i_j} \in T_{i_j}, \ r \in \mathbb{N} \}$$

es una base de T.

Si la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ es finita, $I = \{1, \ldots, k\}$, entonces

$$\to \quad \mathcal{B} = \{ f_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap f_k^{-1}(U_k) : U_i \in T_i, \ i = 1, \ldots, k \}$$

Si tomamos $f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_r}^{-1}(U_r)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, tomamos $I_i = \{ i_r : i_r = i \}$ (Si $i_1 = 1, i_2 = 1, i_3 \neq 1, \ldots, i_r \neq 1 \Rightarrow I_1 = \{i_1, i_2\}$.) Por supuesto I_i puede ser ϕ.

$$\to \quad \underline{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_r}^{-1}(U_{i_r})} = \bigcap_{i \in \{1, \ldots, k\}} \Big(\bigcap_{j_r \in I_i} \underbrace{f_{j_r}^{-1}(U_{j_r})}_{j_r = i} \Big) =$$

$$f_i^{-1}(U_{j_r}), \quad \bigcap T_i$$

$$\to \quad = \underline{f_1^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap f_k^{-1}(V_k)}$$

$$V_i = \begin{cases} \text{si } I_i \neq \emptyset & V_i = \bigcap\limits_{j \in I_i} U_j \\ \\ \text{si } I_i = \emptyset & V_i = X_i \end{cases}$$

$K = 5$ $\quad \underbrace{f_1^{-1}(U_{i_1}) \cap f_1^{-1}(U_{i_2})} \cap \underline{f_2^{-1}(U_{i_3})} \cap f_5^{-1}(U_{i_4})$

$$= f_1^{-1}(\underbrace{U_{i_1} \cap U_{i_2}}_{V_1}) \cap f_2^{-1}(\underbrace{U_{i_3}}_{V_2}) \cap f_3^{-1}(\underbrace{X_3}_{\substack{X_3 \\ \| \\ V_3}}) \cap f_4^{-1}(\underset{\substack{\| \\ V_4}}{X_4}) \cap f_5^{-1}(\underset{\substack{\| \\ V_5}}{U_{i_4}})$$

$f_3^{-1}(X_3) = f_4^{-1}(X_4) = X.$ $\blacksquare$

$\pi_i : X_1 \times \dots \times X_K \to X_i \, , \quad U_i \subset X_i$

$\pi_i^{-1}(U_i) = \{ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_K) \in X_1 \times \dots \times X_K : \pi_i((x_1, \dots, x_K)) = x_i \in U_i \}$

Def: Si $A_i \subset X_i$ $\forall i \in \{1, \dots, K\}$, definimos

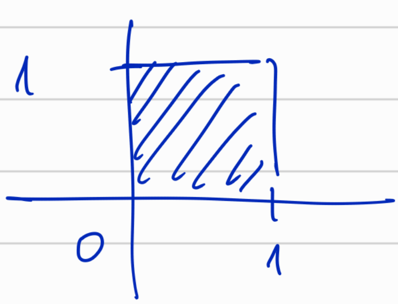
$$A_1 \times \dots \times A_K \subset X_1 \times \dots \times X_K$$

Por:

$$A_1 \times \dots \times A_K = \{ (x_1, \dots, x_K) \in X_1 \times \dots \times X_K : x_i \in A_i \ \forall i \}$$

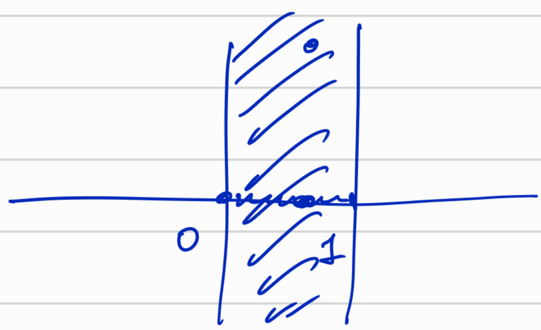
Ejemplo: $\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad [0,1] \subset \mathbb{R}$

$$[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$



$$\pi_i^{-1}(U_i) = \{(x_1,\dots,x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k : \ x_i \in U_i\}$$
$$= \{(x_1,\dots,x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k : \ x_i \in U_i, \ x_j \in X_j \ \forall j \neq i\}$$
$$= X_1 \times \dots \times \underset{(i)}{U_i} \times \dots \times X_k$$

$U_1 = [0,1] \subset \mathbb{R}$ $\quad$ $\underset{\substack{\| \\ [0,1]\times\mathbb{R}}}{\pi_1^{-1}(U_1)}$ donde $\pi_1 : \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$



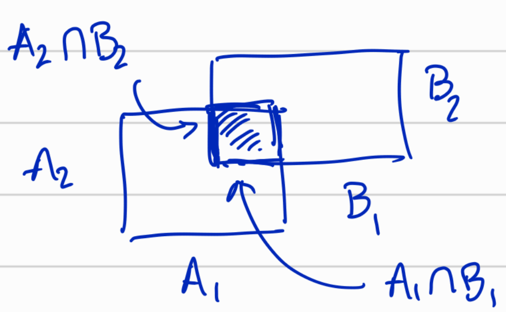
$$\pi_1^{-1}([0,1]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\}$$

$$\pi_i^{-1}(U_i) = X_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times X_k.$$

<u>Propiedad:</u> Si $A_i, B_i \subset X_i$ $\forall i \in \{1,\dots,k\}$, entonces

$$(A_1 \times \dots \times A_k) \cap (B_1 \times \dots \times B_k) = (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_k \cap B_k) \ .$$

Si $x = (x_1,\dots,x_k) \in (A_1 \times \dots \times A_k) \cap (B_1 \times \dots \times B_k) \iff x \in A_1 \times \dots \times A_k$ y $x \in B_1 \times \dots \times B_k \iff x_1 \in A_1, \dots, x_k \in A_k$ y $x_1 \in B_1, \dots, x_k \in B_k$ $\iff x_1 \in A_1 \cap B_1, \dots, x_k \in A_k \cap B_k \iff (x_1,\dots,x_k) \in (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_k \cap B_k)$



$B \in \mathcal{B} \Rightarrow B = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_k^{-1}(U_k) =$

$= (U_1 \times X_2 \times \dots \times X_k) \cap (X_1 \times U_2 \times \dots \times X_k) \cap \dots$

$\dots \cap (X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times U_k)$

$= U_1 \times \dots \times U_k$ ✓

Una base de la topología producto es:

$$\mathcal{B} = \{ U_1 \times \dots \times U_k : U_i \in T_i,\ i = 1, \dots, k \}.$$

$\mathcal{B}$ está formada por productos de abiertos.

<u>Propiedad</u>: las aplicaciones π_i son abiertas ($\pi_i : X_1 \times \dots \times X_k \to X_i$)

<u>Dem.</u> Sea $U_1 \times \dots \times U_k \in \mathcal{B}$, donde $U_i \in T_i\ \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

$\pi_i (U_1 \times \dots \times U_k) = U_i$

$\forall B \in \mathcal{B},\ \pi_i(B) \in T_i$.

Sea ahora $W \in T_1 \times \dots \times T_k$. Entonces $\exists \{B_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{B}$ tal que

$$W = \bigcup_{j \in J} B_j$$

Entonces $\pi_i(W) = \pi_i \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \underline{\bigcup_{j \in J}} \underbrace{\pi_i(B_j)}_{\in T_i} \in T_i$ ■

$\left(y \in \pi_i \left(\bigcup_j B_j \right) \Leftrightarrow y = \pi(x) \text{ con } x \in \bigcup_j B_j \Leftrightarrow \exists j_0 \in J \text{ tal que} \right.$

$\left. y = \pi_i(x)\ x \in B_{j_0} \Leftrightarrow \exists j_0 \in J \text{ tal que } y \in \pi_i(B_{j_0}) \Leftrightarrow y \in \bigcup_j \pi_i(B_j) \right)$

Ejemplo: las proyecciones no son, en general, aplicaciones cerradas.

Ejemplo. Sea $(X_1, d_1), \dots, (X_k, d_k)$ espacios métricos. Sean T_{d_i} $i = 1, \dots, k$ las topologías inducidas y sea $T = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$.
¿$(X_1 \times \dots \times X_k, T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k})$ es metrizable?
¿Existe una distancia d en $X_1 \times \dots \times X_k$ tal que $T_d = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$?

Definimos, para $x, y \in X_1 \times \dots \times X_k$, $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k)$

$$d_\infty(x,y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : i \in \{1, \dots, k\}\}$$

$$d_1(x,y) = d_1(x_1, y_1) + \dots + d_k(x_k, y_k)$$

$$d_2(x,y) = \left(d_1(x_1, y_1)^2 + \dots + d_k(x_k, y_k)^2 \right)^{1/2}$$

d_1, d_2, d_∞ son distancias en $X_1 \times \dots \times X_k$. Además son equivalentes.
Vamos a probar que

$$T_{d_\infty} = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k} \qquad (\text{III})$$

Por tanto $T_{d_1} = T_{d_2} = T_{d_\infty} = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$

Veamos que d_∞ es una distancia en $X_1 \times \dots \times X_k$. Sean $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k)$, $z = (z_1, \dots, z_k)$. Observemos que $d_i(x_i, y_i) \leq d_\infty(x,y)$ $\forall i$.

1. $d_\infty(x,y) \geq 0$ y $d_\infty(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Como $d_i(x_i, y_i) \geq 0$ y $d_\infty(x,y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : i \in \{1, \dots, k\}\}$, se tiene que $d_\infty(x,y) \geq 0$

$d_\infty(x,y)=0 \iff d_i(x_i,y_i)=0\ \forall i\in\{1,\dots,K\}. \underset{d_i \text{ distancias}}{\iff} x_i=y_i\ \forall i\in\{1,\dots,K\}$
$\iff (x_1,\dots,x_K)=(y_1,\dots,y_K) \iff x=y$

2. $d_\infty(x,y)=d_\infty(y,x)$ (trivial)

3. Para todo $i\in\{1,\dots,K\}$, $d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)$ por ser d_i una distancia en X_i, $\forall i\in\{1,\dots,K\}$. Por tanto

$$d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)\leq d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y)$$

Tomando en esta desigualdad el máximo cuando $i\in\{1,\dots,K\}$ tenemos la desigualdad triangular

$$d_\infty(x,y)\leq d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y)$$

Las propiedades 1 y 2 para comprobar que d_1 es una distancia en $X_1\times\cdots\times X_K$ son similares a los anteriores. Para comprobar la desigualdad triangular tenemos en cuenta que, por ser d_i una distancia para todo i:

$$d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)$$

Sumando en i

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{K} d_i(x_i,y_i)\leq\sum_{i=1}^{K} d_i(x_i,z_i)+\sum_{i=1}^{K} d_i(z_i,y_i)=d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y)$$

Las propiedades 1 y 2 para comprobar que d_2 es una distancia se hacen como en los casos anteriores. Para comprobar la desigualdad triangular tenemos en cuenta la desigualdad de $\mathbb{R}^K$

$$\left(\sum_{i=1}^{K}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{i=1}^{K}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{K}b_i^2\right)^{1/2}.$$

Aplicamos esta desigualdad con $a_i = d_i(x_i, z_i)$, $b_i = d_i(z_i, y_i)$ y obtenemos

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \left(d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i)\right)^2\right)^{1/2} \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$$

Como d_i es una distancia para todo $i \in \{1,\dots,k\}$, tenemos que $d_i(x_i,y_i) \leq d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i)$. Por tanto

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{k} d_i(x_i,y_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \left(d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i)\right)^2\right)^{1/2}$$

y concluimos que

$$d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$$

Para comprobar que las distancias son equivalentes tenemos en cuenta que

$$d_1 \leq \sqrt{k}\, d_2 \leq k \cdot d_\infty \leq k \cdot d_1$$

La primera desigualdad se obtiene aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^k$ a los vectores $\underset{(k)}{(1,\dots,1)}$, $(d_1(x_1,y_1),\dots,d_k(x_k,y_k))$
Se tiene entonces que

$$d_1(x,y) = |\langle (1,\dots,1), (d_1(x_1,y_1),\dots,d_k(x_k,y_k))\rangle|$$
$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} d_i(x_i,y_i)^2} = \sqrt{k} \cdot d_2(x,y)$$

La segunda desigualdad se obtiene de:

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{k} d_i(x_i,y_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} d_\infty(x,y)^2\right)^{1/2} = \sqrt{k} \cdot d_\infty(x,y)$$

La tercera se obtiene de:

$$d_\infty(x,y) = \max\{d_i(x_i,y_i) : i=1,\dots,K\} \leq \sum_{i=1}^{K} d_i(x_i,y_i) = d_1(x,y)$$

12/11/2020

$(X_1, T_1), \dots, (X_K, T_K) \rightsquigarrow (X_1 \times \dots \times X_K, T_1 \times \dots \times T_K)$

$\pi_i : X_1 \times \dots \times X_K \to X_i$ continuas

$$\begin{tikzcd} (Z, T') \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_i \circ f"'] & (X_1 \times \dots \times X_K, T_1 \times \dots \times T_K) \arrow[d, "\pi_i"] \\ & (X_i, T_i) \end{tikzcd}$$

f continua $\Leftrightarrow$ $\pi_i \circ f$ continua.

Ejemplo: $(X_1, d_1), \dots, (X_K, d_K)$ $\quad T_{d_1}, \dots, T_{d_K}$

¿ $(X_1 \times \dots \times X_K, T_{d_1} \times \dots \times T_{d_K})$ es metrizable ?

Si $x = (x_1, \dots, x_K)$, $y = (y_1, \dots, y_K)$, definimos

$$\left.\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \max\{d_i(x_i, y_i) : i \in \{1, \dots, K\}\} \\ d_1(x,y) &= d_1(x_1,y_1) + \dots + d_K(x_K, y_K) \\ d_2(x,y) &= \left(d_1(x_1,y_1)^2 + \dots + d_K(x_K,y_K)^2\right)^{1/2} \end{aligned}\right\} \text{distancias en } X_1 \times \dots \times X_K$$

d_1, d_2, d_∞ son equivalentes.

$$d_1 \leq \sqrt{K} \cdot d_2 \leq K \cdot d_\infty \leq K \cdot d_1$$

Por tanto d_1, d_2, d_∞ generan la misma topología.

Sea $\underline{x} = (x_1, \dots, x_K) \in X_1 \times \dots \times X_K$ y sea $r > 0$.

$$B_{d_\infty}(x,r) = \{ y \in X_1 \times \dots \times X_k : d_\infty(x,y) < r \}$$

$\forall i \in \{1,\dots,k\}$ $\quad B_{d_i}(x_i,r) = \{ y_i \in X_i : d_i(x_i,y_i) < r \}$

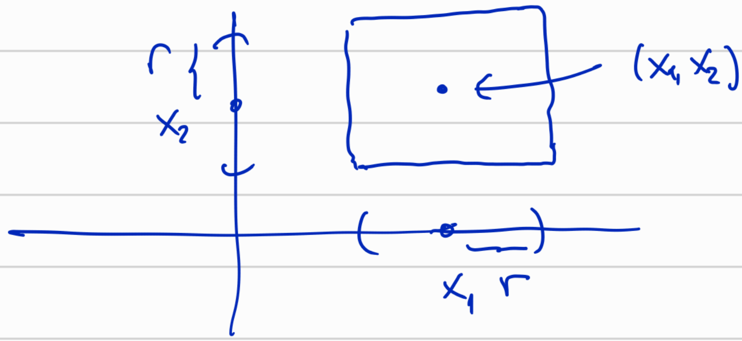
Veamos que:

$$B_{d_\infty}(x,r) = B_{d_1}(x_1,r) \times \dots \times B_{d_k}(x_k,r_k) \qquad (*)$$

$y \in B_{d_\infty}(x,r) \iff d_\infty(x,y) < r \iff d_i(x_i,y_i) < r \ \forall i \in \{1,\dots,k\}$

$\iff y_i \in B_{d_i}(x_i,r) \ \forall i \in \{1,\dots,d\}$

$\iff y = (y_1,\dots,y_k) \in B_{d_1}(x_1,r) \times \dots \times B_{d_k}(x_k,r_k)$



Vamos a utilizar esta propiedad para probar que la topología en $X_1 \times \dots \times X_k$ asociada a d_∞, T_{d_∞}, es igual a la topología producto $T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$.

Sea $U \in T_{d_\infty} \Rightarrow \forall x \in U, \exists r > 0$ tal que $B_{d_\infty}(x,r) \subset U$

$$\Rightarrow \underbrace{B_{d_1}(x_1,r)}_{\in T_{d_1}} \times \dots \times \underbrace{B_{d_k}(x_k,r)}_{\in T_{d_k}} = B_{d_\infty}(x,r) \subset U.$$

Si $B_x = B_{d_1}(x_1,r)\times\dots\times B_{d_k}(x_k,r)$, entonces $B_x \in T_{d_1}\times\dots\times T_{d_k}$
Hemos probado que, $\forall x\in U$, $\exists B_x \in T_{d_1}\times\dots\times T_{d_k}$ tal que $x\in B_x \subset U$. Entonces

$$U = \bigcup_{x\in U} B_x \in T_{d_1}\times\dots\times T_{d_k}.$$

Acabamos $T_{d_\infty} \subset T_{d_1}\times\dots\times T_{d_k}$

Para probar la inclusión opuesta tomamos $V\in T_{d_1}\times\dots\times T_{d_k}$.
Sea $x\in V$, $x=(x_1,\dots,x_k)$. Como $\mathcal{B} = \{U_1\times\dots\times U_k : U_i\in T_i\ \forall i\}$ es base de $T_{d_1}\times\dots\times T_{d_k}$, existen $U_1,\dots,U_k$ ($U_i\in T_i\ \forall i$) tales que

$$x\in U_1\times\dots\times U_k \subset V$$

Por tanto $x_i \in U_i\ \forall i\in\{1,\dots,k\}$. Como $U_i\in T_{d_i}$, y las bolas abiertas en X_i forman base de T_i, existe $r_i>0$ tal que

$$B_{d_i}(x_i,r_i)\subset U_i$$

$\forall i\in\{1,\dots,k\}$. Sea $r=\min\{r_1,\dots,r_k\}>0$. Se tiene $B_{d_i}(x_i,r)\subset B_{d_i}(x_i,r_i)$
Por tanto

$$B_{d_\infty}(x,r) = B_{d_1}(x_1,r)\times\dots\times B_{d_k}(x_k,r) \subset B_{d_1}(x_1,r_1)\times\dots\times B_{d_k}(x_k,r_k)$$
$$\subset U_1\times\dots\times U_k \subset V.$$

Si llamamos $\underline{r_x = r}$, hemos probado que para cada $x\in V$, existe $r_x>0$ tal que

$$B_{d_\infty}(x,r_x)\subset V$$

Esto implica que

$$V = \bigcup_{x \in V} \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{T}_{d_\infty}}}{B_{d_\infty}(x, r_x)} \in \mathcal{T}_{d_\infty}$$

Esto significa que $\mathcal{T}_{d_1} \times \dots \times \mathcal{T}_{d_k} \subset \mathcal{T}_{d_\infty}$

Por tanto $\mathcal{T}_{d_1} \times \dots \times \mathcal{T}_{d_k} = \mathcal{T}_{d_\infty}$ y $X_1 \times \dots \times X_k$ es metrizable ■

<u>Ejemplo</u>: En $\mathbb{R}^n$ la topología asociada a $\|\cdot\|_2$ es la topología usual, generalmente denotada por $\mathcal{T}_u$. A veces, cuando sea necesario indicar que es la topología usual de $\mathbb{R}^n$, la denotaremos por $\mathcal{T}_u^n$.

$\mathcal{T}_u^n$ es la top. asociada a $\|\cdot\|_2$ o a cualquier distancia equivalente, p.e. $\|\cdot\|_\infty$ o $\|\cdot\|_1$.

Si en $\mathbb{R}$ tomamos la distancia usual $d(x,y) = |y-x|$, y $\underline{\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_u^1}$ entonces

$$\mathcal{T}_u^k = \mathcal{T}_{d_\infty} = \mathcal{T}_d \times \dots \times \mathcal{T}_d = \mathcal{T}_u^1 \times \dots \times \mathcal{T}_u^1$$

$d_\infty((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = \max\{d(x_i, y_i) : i \in \{1, \dots, k\}\}$ es la distancia ∞ en $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d_\infty((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) &= \max\{d(x_i, y_i) ; i \in \{1, \dots, k\}\} \\ &= \max\{|x_i - y_i|, i \in \{1, \dots, k\}\} \end{aligned}$$

es equivalente a la distancia Euclídea en $\mathbb{R}^k \Rightarrow \mathcal{T}_{d_\infty} = \mathcal{T}_u^k$

$$T_u^k = T_u^1 \times \dots \times T_u^1$$

La topología usual de $\mathbb{R}^k$, T_u^k, es la topologíc producto $T_u^1 \times \dots \times T_u^1$ donde T_u^1 es la top. usual de $\mathbb{R}$.

Ejercicio: Sean $(X_1, T_1), \dots, (X_k, T_k)$ e.top. $k \geq 2$. Consideramos

$$(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$$

Tomamos $(X_1 \times \dots \times X_{k-1}, T_1 \times \dots \times T_{k-1})$, (X_k, T_k) y calculamos su espacio producto topológico.

$$((X_1 \times \dots \times X_{k-1}) \times X_k, (T_1 \times \dots \times T_{k-1}) \times T_k)$$

Consideramos la aplicación $f: X_1 \times \dots \times X_k \to (X_1 \times \dots \times X_{k-1}) \times X_k$ definida por:

$$f((x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)) = ((x_1, \dots, x_{k-1}), x_k)$$

La aplicación f es biyectiva. Probar que es un homeomorfismo.

Propiedad: Sean $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ bases de $(X_1, T_1), \dots, (X_k, T_k)$. Entonces $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_k$ es una base de $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$.

Dem: Sea $U \in T_1 \times \dots \times T_k$. Sea $x \in U$. Como $\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_k : U_i \in T_i, i = 1, \dots, k\}$ es base de $T_1 \times \dots \times T_k$, existen $U_1 \in T_1, \dots U_k \in T_k$ tales que

$$x \in U_1 \times \dots \times U_k \subset U$$

$\Rightarrow$ si $x = (x_1, \dots, x_k)$, entonces $x_i \in U_i$ $\forall i$. Como $\mathcal{B}_i$ es base de T_i

existe $B_i \in \mathcal{B}_i$ tal que $x_i \in B_i \subset U_i$ $\forall i$. Entonces

$$x = (x_1, \dots, x_k) \in \underbrace{B_1 \times \dots \times B_k} \subset U_1 \times \dots \times U_k \subset U$$

Llamamos $B_x = B_1 \times \dots \times B_k$. Hemos probado que, dado $U \in T_1 \times \dots \times T_k$, y $x \in U$, existe $B_x \in \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_k$ tal que $x \in B_x \subset U$. Esto implica que:

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x$$

$\Rightarrow$ U es unión de elementos de $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_k$. Por tanto $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_k$ es base de $T_1 \times \dots \times T_k$ $\blacksquare$

18/11/20

$\mathcal{B}_i$ base de (X_i, T_i) $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_k$ es base de $T_1 \times \dots \times T_k$.

<u>Proposición</u>: $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es AN-II si y sólo si (X_i, T_i) es AN-II $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.

<u>Dem</u>: Supongamos que (X_i, T_i) es AN-II $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Existe una base numerable $\mathcal{B}_i$ de T_i $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_k$ es base de $T_1 \times \dots \times T_k$ y es numerable porque es un producto finito de conjuntos numerables. Entonces $X_1 \times \dots \times X_k$ es AN-II.
Supongamos ahora que $X_1 \times \dots \times X_k$ es AN-II. Sea $\mathcal{B}_N$ una base numerable de la topología producto $T_1 \times \dots \times T_k$. Queremos ver que cada (X_i, T_i) admite una base numerable. Fijamos $i_0 \in \{1, \dots, k\}$. Sea

$$\mathcal{B}_{i_0} = \pi_{i_0}(\mathcal{B}_N) = \{ \pi_{i_0}(B) : B \in \mathcal{B}_N \}$$

$\mathcal{B}_{i_0}$ es una familia numerable. Sabemos que π_{i_0} es una aplicación abierta. Por tanto, $\mathcal{B}_{i_0} \subset T_{i_0}$. Sea ahora $U \in T_{i_0}$. Entonces

$$X_1 \times \dots \times \underset{(i_0)}{U} \times \dots \times X_k \in T_1 \times \dots \times T_k$$

Como $\mathcal{B}_N$ es base de $T_1 \times \dots \times T_k$,

$$X_1 \times \dots \times \underset{(i_0)}{U} \times \dots \times X_k = \bigcup_{i \in I} B_i \quad , \quad B_i \in \mathcal{B}_N.$$

Entonces

$$U = \pi_{i_0}(X_1 \times \dots \times U \times \dots \times X_k) = \pi_{i_0}\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \pi_{i_0}(B_i)$$

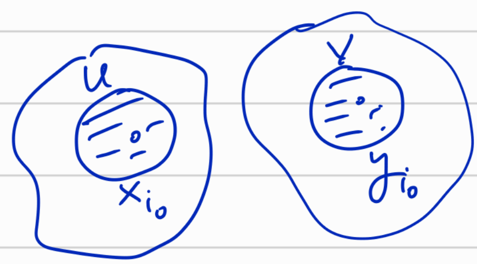
y se tiene que U es unión de elementos de $\mathcal{B}_{i_0}$. $\blacksquare$

Ejercicio: 1. Si $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$ y $\mathcal{B}_{x_1}, \dots, \mathcal{B}_{x_k}$ son bases de entornos de $x_1, \dots, x_k$ en $(X_1, T_1), \dots, (X_k, T_k)$, resp. Entonces $\mathcal{B}_{x_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{x_k}$ es base de entornos de x en $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$

2. Si (X_i, T_i) es AN-I $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ entonces $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es AN-I.

Proposición: (X_i, T_i) es Hausdorff $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ si y solo si $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es Hausdorff.

Dem: supongamos que (X_i, T_i) es Hausdorff $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Sean $x = (x_1, \dots, x_k)$ $y = (y_1, \dots, y_k)$ puntos distintos. Esto significa que existe $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Como (X_{i_0}, T_{i_0}) es Hausdorff, existen $U, V \in T_{i_0}$ tales que $x_{i_0} \in U$, $y_{i_0} \in V$ y $U \cap V = \emptyset$



Tomamos $\quad X_1 \times \dots \times \underset{(i_0)}{U} \times \dots \times X_k$,

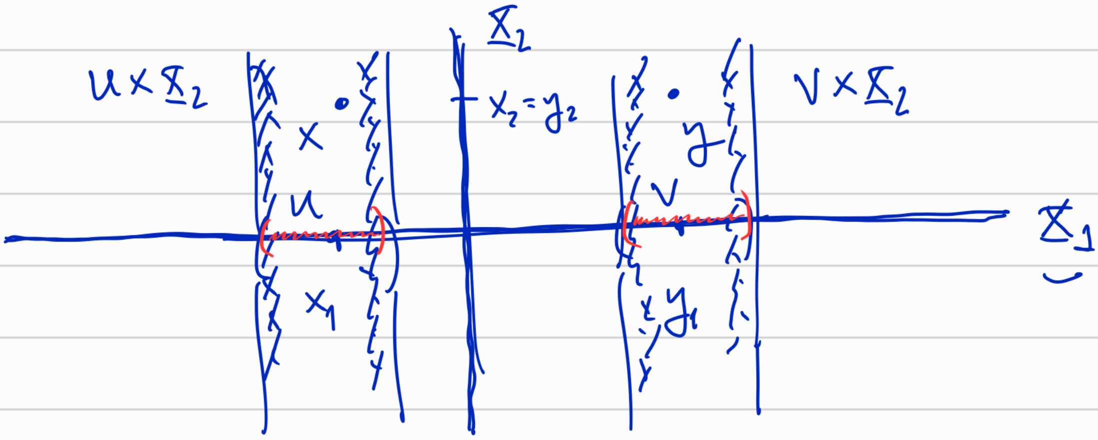
$\qquad X_1 \times \dots \times \underset{(i_0)}{V} \times \dots \times X_k$

$$x \in \underbrace{X_1 \times \dots \times \underset{(i_0)}{U} \times \dots \times X_k}_{\text{pertenece a } T_1 \times \dots \times T_k}, \quad y \in \underbrace{X_1 \times \dots \times \underset{(i_0)}{V} \times \dots \times X_k}_{\text{pertenece a } T_1 \times \dots \times T_k}$$

$$(X_1 \times \dots \times U \times \dots \times X_k) \cap (X_1 \times \dots \times V \times \dots \times X_k) =$$

$$(X_1 \cap X_1) \times \dots \times \underset{\overset{\shortparallel}{\emptyset}}{(U \cap V)} \times \dots \times (X_k \cap X_k) = \emptyset$$

Esto demuestra que $(\mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es Hausdorff.



Supongamos ahora que $(\mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es Hausdorff. Veamos que $(\mathfrak{X}_i, T_i)$ lo es. Sean $x_i, y_i \in \mathfrak{X}_i$ tales que $x_i \neq y_i$. Tomamos $a_j \in \mathfrak{X}_j$ para todo $j \neq i$. Consideramos los puntos

$$x = (a_1, \dots, \underset{(i)}{x_i}, \dots, a_k) \qquad y = (a_1, \dots, \underset{(i)}{y_i}, \dots, a_k)$$

$x \neq y$ porque sus coordenadas i-ésimas son distintas. Como $\mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_k$ es Hausdorff, existen $U, V \in T_1 \times \dots \times T_k$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y además $U \cap V = \phi$. Entonces $\pi_i(U), \pi_i(V) \in T_i$ (π_i son abiertas), $x_i = \pi_i(x) \in \pi_i(U)$, $y_i = \pi_i(y) \in \pi_i(V)$ y

$$\pi_i(U) \cap \pi_i(V) = \pi_i(U \cap V) = \phi$$

Esto demuestra que $(\mathfrak{X}_i, T_i)$ es Hausdorff $\boxtimes$

<u>Lema</u>: Sea $A_i \subset \mathfrak{X}_i$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces

$$\overline{A_1 \times \dots \times A_k} = \overline{A}_1 \times \dots \times \overline{A}_k.$$

($\overline{A_1 \times \dots \times A_k}$ es la clausura de $A_1 \times \dots \times A_k$ en $T_1 \times \dots \times T_k$; $\overline{A}_i$ es la clausura de A_i en T_i).

Dem: Sea $x=(x_1,\dots,x_k)\in\overline{A_1\times\cdots\times A_k}$. Entonces $\forall V\in N_x$, se tiene que $V\cap(A_1\times\cdots\times A_k)\neq\phi$. Vamos a tomar como V un producto $U_1\times\cdots\times U_k$ donde $U_i\in T_i$ y $x_i\in U_i$. Entonces

$$\phi\neq(U_1\times\cdots\times U_k)\cap(A_1\times\cdots\times A_k)=(U_1\cap A_1)\times\cdots\times(U_k\cap A_k)$$

y se tiene que $U_i\cap A_i\neq\phi$ $\forall i\in\{1,\dots,k\}$. Como U_i es un conjunto abierto arbitrario que contiene a x_i, entonces $x_i\in\overline{A_i}$ $\forall i\in\{1,\dots,k\}$. Esto demuestra que

$$\overline{A_1\times\cdots\times A_k}\subset\overline{A_1}\times\cdots\times\overline{A_k}$$

Sea ahora $x\in\overline{A_1}\times\cdots\times\overline{A_k}\Rightarrow x_i\in\overline{A_i}$ $\forall i\in\{1,\dots,k\}$. $\Rightarrow\forall i\in\{1,\dots,k\}$ y $\forall U_i\in T_i$ tal que $x_i\in U_i$ se tiene que $U_i\cap A_i\neq\phi$. En particular

$$(U_1\times\cdots\times U_k)\cap(A_1\times\cdots\times A_k)\neq\phi \leftarrow$$
$$\| $$
$$(\underbrace{U_1\cap A_1}_{\neq\phi})\times\cdots\times(\underbrace{U_k\cap A_k}_{\neq\phi})$$

Por tanto $\forall B\in\mathcal{B}=\{W_1\times\cdots\times W_k: W_i\in T_i\ \forall i\in\{1,\dots,k\}\}$ tal que $x\in B$ tenemos que

$$B\cap(A_1\times\cdots\times A_k)\neq\phi$$

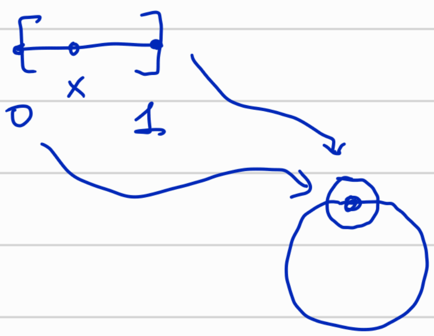
Como $\mathcal{B}(x)=\{B\in\mathcal{B}: x\in B\}$ es base de entornos abiertos de x, entonces $x\in\overline{A_1\times\cdots\times A_k}$. Esto demuestra que

$$\overline{A_1}\times\cdots\times\overline{A_k}\subset\overline{A_1\times\cdots\times A_k}$$

■

19/11/2020

Espacios cociente



$x,y \in [0,1]$

$$xRy \iff \begin{cases} x=y, \text{ o} \\ x=0, y=1, \text{ ó } x=1, y=0. \end{cases}$$

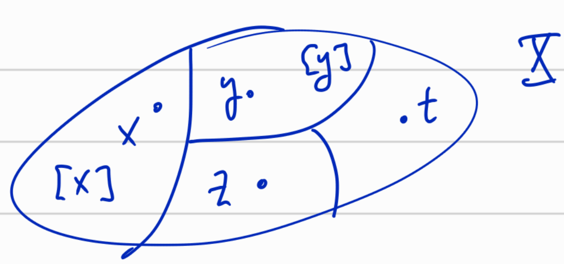
identificando los puntos $0,1 \in [0,1]$ se obtiene una circunferencia

Las clases de equivalencia son $[0]=[1]=\underline{\{0,1\}}$, $[x]=\underline{\{x\}}$ $0<x<1$.

Sea (X,T) un e. topológico, R relación de equivalencia en X. R induce una partición de X en clases de equivalencia: dado $x \in X$, la clase de equivalencia de x es:

$$[x] = \{ y \in X : xRy \} \subset X$$

Se tiene $[x]=[y]$ si y solo si xRy. El conjunto de clases de equivalencia es una partición de X



El conjunto cociente es el formado por las clases de equivalencia. Se denota por X/R

En el ejemplo anterior, $\underline{X}/R = \{[x], [y], [z], [t]\}$

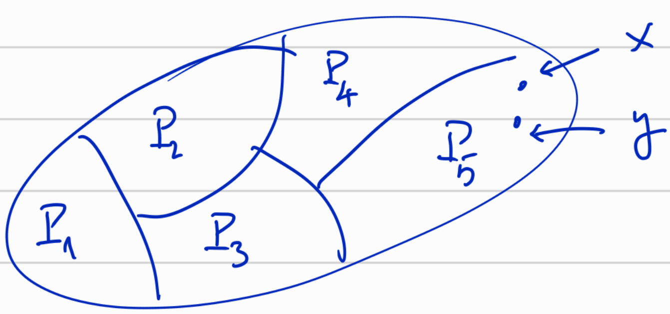
Cualquier relación de equivalencia R en $\underline{X}$ induce una partición en $\underline{X}$ formada por las clases de equivalencia.

Recíprocamente, si $\{P_i\}_{i\in I}$ es una partición de $\underline{X}$:

1. $\bigcup_{i\in I} P_i = \underline{X}$
2. $P_i \cap P_j = \phi$ si $i \neq j$

podemos definir una relación de equivalencia R en $\underline{X}$ de modo que las clases de equivalencia de R sean los conjuntos P_i. Definimos R por

$$x R y \Leftrightarrow \exists\, i_0 \in I \text{ tal que } x, y \in P_{i_0}$$



R cumple trivialmente.

1. xRx
2. $xRy \Rightarrow yRx$
3. $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$

Falta probar que si $x \in P_i$, entonces $[x] = P_i$. $y \in [x] \Leftrightarrow yRx \Leftrightarrow y \in P_i$ Esto demuestra que $[x] = P_i$.

La aplicación proyección $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}/R$ es la definida por $\pi(x) = [x]$.
o proyección canónica

Es sobreyectiva y, en general, no es inyectiva (solo lo es si $[x] = \{x\}$ para todo $x \in \mathbb{X}$).

En nuestra situación, tenemos $\pi : (\mathbb{X}, T) \to \mathbb{X}/R$

Def: dado un e. top. $(\mathbb{X}, T)$ y una relación de equivalencia R en $\mathbb{X}$ con aplicación proyección $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}/R$, se define la topología cociente en $\mathbb{X}/R$ como la topología final para la aplicación $\pi : (\mathbb{X}, T) \to \mathbb{X}/R$. Se denota por T/R.

Sabemos que

$$T/R = \{ U \subset \mathbb{X}/R : \pi^{-1}(U) \in T \}$$

$$\pi^{-1}(U) = \{ x \in \mathbb{X} : \pi(x) = [x] \in U \} = \bigcup_{[x] \in U} [x].$$

subconjunto de $\mathbb{X}$

punto de $U \subset \mathbb{X}/R$

$$= \bigcup_{\pi(x) \in U} [x].$$

La clase de equivalencia $[x]$ es, al mismo tiempo, un subconjunto de $\mathbb{X}$ y un elemento de $\mathbb{X}/R$. A partir, reservaremos la notación $[x]$ para el subconjunto de $\mathbb{X}$ y $\pi(x)$ para el punto de $\mathbb{X}/R$.

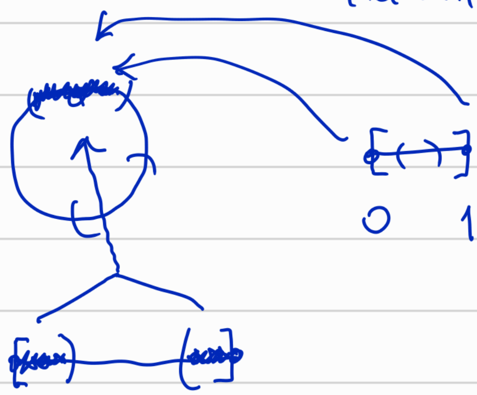
$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\pi(x) \in U} [x].$$

En el ejemplo de la circunferencia

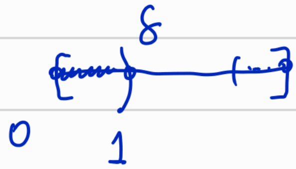
$X=[0,1]$ clase equiv. $= \{\{0,1\}\} \cup \{\{x\}: 0<x<1\}$.

(identificamos 0 y 1)

X/R



Ejemplo: π no es, en general, abierta. $X=[0,1]$. OR1.



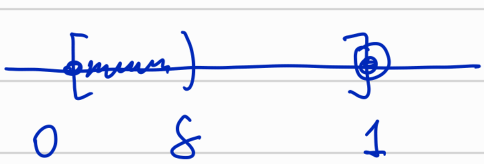
$0<\delta<1$ $\quad [0,\delta)$ es abierto en $[0,1]$.

$[0,\delta) = \underbrace{(-\infty,\delta)}_{\text{abto } \mathbb{R}} \cap [0,1]$

$\pi([0,\delta))$ no es abierto porque si lo fuera, $\pi^{-1}(\pi([0,\delta)))$ sería abierto en $[0,1]$.

$$\pi^{-1}(\pi([0,\delta))) = \bigcup_{\pi(x)\in\pi([0,\delta)) \Leftrightarrow x\in[0,\delta)} [x] = \bigcup_{x\in[0,\delta)} [x] = \overset{[0]}{\{0,1\}} \cup \overset{\bigcup_{0<x<\delta}[x]}{(0,\delta)} = [0,\delta)\cup\{1\}$$

$\pi(x)\in\pi([0,\delta)) \Leftrightarrow x R y$ tal que $y\in[0,\delta)$. Entonces $[x]=[y]$.



¿ $[0,\delta)\cup\{1\}$ abto en $[0,1]$?

NO porque $1\notin \operatorname{int}([0,\delta)\cup\{1\})$

Def: Sea X un conjunto, R una relación de equivalencia, $\pi: X \to X/R$ proyección canónica. Diremos que $A \subset X$ es saturado ó R-saturado si $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$.

A R-saturado $\Leftrightarrow \forall x \in A, [x] \subset A$. $(*)$

En el ejemplo anterior, $\{0\}$ no es R-saturado $\pi(\{0\}) = \{[0]\}$ y $\pi^{-1}(\pi(\{0\})) = \{0,1\}$. Si $x \in (0,1)$ $\pi^{-1}(\pi(\{x\})) = \{x\}$. Por tanto, $\{x\}$ si es R-saturado.

Demostración de $(*)$. Si A es R-saturado, entonces $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$.
Si $x \in A$, yRx, entonces $\pi(y) = \pi(x) \in \pi(A) \Rightarrow y \in \pi^{-1}(\pi(A)) = A$ $\Rightarrow y \in A$. Por tanto, $[x] \subset A$.
Supongamos ahora que $\forall x \in A$, $[x] \subset A$. Vamos a probar que $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$ (A siempre está contenido en $\pi^{-1}(\pi(A))$). Solo hay que probar que $\pi^{-1}(\pi(A)) \subset A$. Sea $y \in \pi^{-1}(\pi(A)) \Rightarrow \pi(y) \in \pi(A) \Rightarrow \exists x \in A$ tal que $\pi(y) = \pi(x) \Rightarrow y \in [x]$, $x \in A$. Por hipótesis $y \in A$. Esto implica que $\pi^{-1}(\pi(A)) \subset A$. $\blacksquare$

20/11/2020

(X,T) e. top., R rel. equiv. en X, $\pi: X \to X/R$ $\pi(x)=[x]$.

T/R = top. cociente = top. final para $\pi:(X,T)\to X/R$
$= \{U \subset X/R : \pi^{-1}(U) \in T\}$.

π continua, pero no es abierta en general.

Decimos que $A \subset X$ es R-saturado si $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. ($\Leftrightarrow$ se verifica la propiedad "si $x \in A \Rightarrow [x] \subset A$").

Propiedad: En las condiciones anteriores, $\pi(A) \in T/R$ para conjunto A abierto R-saturado.

Dem: sea $A \subset X$ abto R-saturado. Entonces $\pi(A) \in T/R \Leftrightarrow \pi^{-1}(\pi(A)) \in T$
Como $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, entonces $\pi^{-1}(\pi(A)) \in T$ ∎

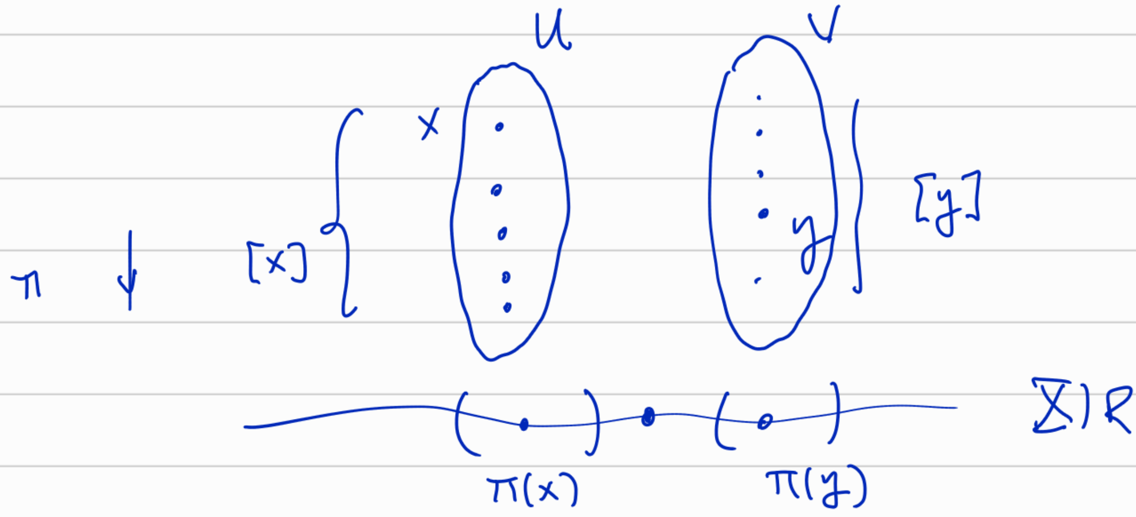
Def: diremos que $\pi: X \to X/R$ es casi abierta si $\pi(A) \in T/R$ para todo $A \in T$ R-saturado.

Observación: si $A \in T$ es R-saturado $\Rightarrow \pi(A) \in T/R$
⊙ si $B \in T/R \Rightarrow \pi^{-1}(B) \in T$ y es R-saturado $\left(\underset{\pi^{-1}(B)}{\underset{\parallel}{\pi^{-1}(\pi(\pi^{-1}(B)))}}\right.$
$(\pi(\pi^{-1}(B)) = B$ porque π es sobreyectiva$)\Big)$.

Además $\pi(\pi^{-1}(B)) = B$.

Todo abierto de T/R es imagen por π de un abierto R-saturado de (X,T)

Ejemplo. ¿Cuándo X/R es Hausdorff? Sean $\pi(x), \pi(y) \in X/R$, $\pi(x) \neq \pi(y)$. Entonces $x \not R y$ (x e y no están relacionados)



Si existen U, V R-saturados con $x \in U$, $y \in V$, tales que $U \cap V = \emptyset$, entonces $\pi(x) \in \pi(U)$, $\pi(y) \in \pi(V)$, $\pi(U), \pi(V)$ son abiertos.

→ Veamos que $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$: Si existe $\pi(z) \in \pi(U) \cap \pi(V)$, entonces $\pi(z) \in \pi(U)$ y $\pi(z) \in \pi(V) \Rightarrow z \in U \cap V$!! (suponemos $U \cap V = \emptyset$).

$$\pi(z) \in \pi(U) \Leftrightarrow z \in \pi^{-1}(\pi(U)) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{R-saturado}}}{U}$$

Si para cada par de puntos $x, y \in X$ tales que $x \not R y$, podemos encontrar dos abiertos R-saturados U, V tales que $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$, entonces $(X/R, T/R)$ es Hausdorff.

25/11/2020

$\pi: X \to X/R$ continua pero no abierta; sí es casi-abierta.

$f(U) \in T/R$ si $U \in T$ es R-saturado

$(f^{-1}(f(U)) = U)$

<u>Def</u>: Sea $f: (X,T) \to (Y,T')$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Diremos que f es una identificación si es <u>sobreyectiva</u> y T' es la topología final para f.

$$T' = \{ \underbrace{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in T}_{\text{Topología final}} \}$$

<u>Def.</u> Sea $f: X \to Y$ una aplicación. Diremos que $U \subset X$ es f-saturado si $f^{-1}(f(U)) = U$. (como $U \subset f^{-1}(f(U))$ siempre, la información relevante de esta igualdad es $f^{-1}(f(U)) \subset U$).

¿Qué significa $f^{-1}(f(U)) \subset U$? Si $x \in f^{-1}(f(U)) \Rightarrow x \in U$

$f(x) \in f(U)$

$\exists y \in U : \quad f(x) = f(y)$

Si $\exists y \in U$ tal que $f(x) = f(y)$, entonces $x \in U$.

<u>Def.</u> Si $f: X \to Y$ es una aplicación, podemos definir una relación de equivalencia en X, R_f.

$$x R_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

$\pi: X \to X/R_f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/R_f \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Podemos definir $\tilde{f}$ como $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x)$. $\tilde{f}$ está bien definida porque si $\pi(x) = \pi(x') \Rightarrow x R_f x' \Rightarrow f(x) = f(x')$. Por tanto
$\tilde{f}(\pi(x)) = f(x) = f(x') = \tilde{f}(\pi(x'))$ si $\pi(x) = \pi(x')$

$\tilde{f}$ siempre es inyectiva.

<u>Def</u>: Sea $f: (X,T) \to (Y,T')$ una aplicación. Diremos que f es casi-abierta si $f(U) \in T'$ para todo $U \in T$ y f-saturado.
La noción de aplicación casi-cerrada es casi igual: "$f(C) \in C_{T'}$ $\forall C \in C_T$ f-saturado"

<u>Proposición</u>: Sea $f: (X,T) \to (Y,T')$ una aplicación sobreyectiva. Entonces f es una identificación si y sólo si f es continua y casi-abierta (o casi-cerrada).

<u>Dem</u>: Sup. que f es identificación. Entonces f es continua porque T' es la topología final para la aplicación f. Veamos que f es casi-abierta.
Sea $U \subset X$ abierto f-saturado. ¿Cuando $f(U) \in T'$? Como T' es la top. final para f, $f(U) \in T' \Leftrightarrow f^{-1}(f(U)) \in T$. Como U es f-saturado $f^{-1}(f(U)) = U \in T$
(Si $C \subset X$ es cerrado f-saturado, $f(C) \in C_{T'} \Leftrightarrow Y \setminus f(C) \in T' \Leftrightarrow$ $f^{-1}(Y \setminus f(C)) \in T$; $f^{-1}(Y \setminus f(C)) = X \setminus f^{-1}(f(C)) = X \setminus C \in T$)

Supongamos ahora que f es continua y casi-abierta. Tenemos que probar que f es identificación, es decir, que $T' = \{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in T\}$. Como f es continua, si $U' \in T'$, entonces $f^{-1}(U') \in T \Rightarrow T' \subseteq \{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in T\}$. Sea ahora $U' \subset Y$ tal que $f^{-1}(U') \in T$. Queremos ver que $U' \in T'$. El conjunto $f^{-1}(U')$ es f-saturado ($f^{-1}(f(f^{-1}(U'))) = f^{-1}(U')$ porque $f(f^{-1}(U')) = U'$ por ser f sobreyectiva). Como f es casi abierta, $f(\underbrace{f^{-1}(U')}_{\text{abto } f\text{-saturado}}) \in T'$. Acabamos de ver que $U' = f(f^{-1}(U')) \in T'$ $\Rightarrow U' \in T'$. Por tanto $\{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in T\} \subseteq T'$. Concluimos que

$$\{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in T\} = T'.$$

Por tanto, f es una identificación. ∎

Teorema: Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una identificación (sobreyectiva). Entonces $\tilde{f} : (X/R_f) \to (Y, T')$ es un homeomorfismo.

Dem: Tenemos que ver que $\tilde{f}$ es biyectiva, continua y abierta. Ya sabemos que $\tilde{f}$ es inyectiva. Además, como f es sobreyectiva, $\tilde{f}$ también lo es (Si $y \in Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x) = y$).

$$\begin{tikzcd}
(X, T) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (Y, T') \\
& (X/R_f, T/R_f) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como T/R_f es la topología final para π, $\tilde{f}$ es continua si y sólo si $\tilde{f} \circ \pi$ es continua. Pero $\tilde{f} \circ \pi = f$. Como f es continua, $\tilde{f}$ también lo es.

Veamos por último que $\tilde{f}$ es abierta. Sea $V \in T/R_f$. Queremos ver que $\tilde{f}(V) \in T'$.

$$\tilde{f}(V) = \{ \tilde{f}(\pi(x)) : \pi(x) \in V \}$$

$$\underset{\circledast}{=} \{ f(x) : x \in \pi^{-1}(V) \}$$

$$= f(\pi^{-1}(V))$$

$\circledast$ $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x)$

$\circledast$ $\pi(x) \in V \Leftrightarrow x \in \pi^{-1}(V)$

Comprobemos que $\pi^{-1}(V)$ es f-saturado. Hay que ver $f^{-1}(f(\pi^{-1}(V))) = \pi^{-1}(V)$. Solo hay que comprobar que $f^{-1}(f(\pi^{-1}(V))) \subset \pi^{-1}(V)$. Para comprobarlo tomamos $x \in f^{-1}(f(\pi^{-1}(V))) \Rightarrow f(x) \in f(\pi^{-1}(V)) \Rightarrow$ existe $x' \in \pi^{-1}(V)$ tal que $f(x) = f(x')$. Si $f(x) = f(x')$, entonces $x R_f x' \Rightarrow \pi(x) = \pi(x')$. Como $\pi(x') \in V$, entonces $\pi(x) = \pi(x') \in V \Rightarrow x \in \pi^{-1}(V)$. Esto demuestra que $f^{-1}(f(\pi^{-1}(V))) \subset \pi^{-1}(V)$ y, por tanto, $f^{-1}(f(\pi^{-1}(V))) = \pi^{-1}(V)$ y $\pi^{-1}(V)$ es f-saturado. Como f es casi abierta, $f(\pi^{-1}(V)) \in T'$, pero entonces:

$$\tilde{f}(V) = f(\pi^{-1}(V)) \in T'$$

Por tanto, $\tilde{f}$ es una aplicación abierta. ∎