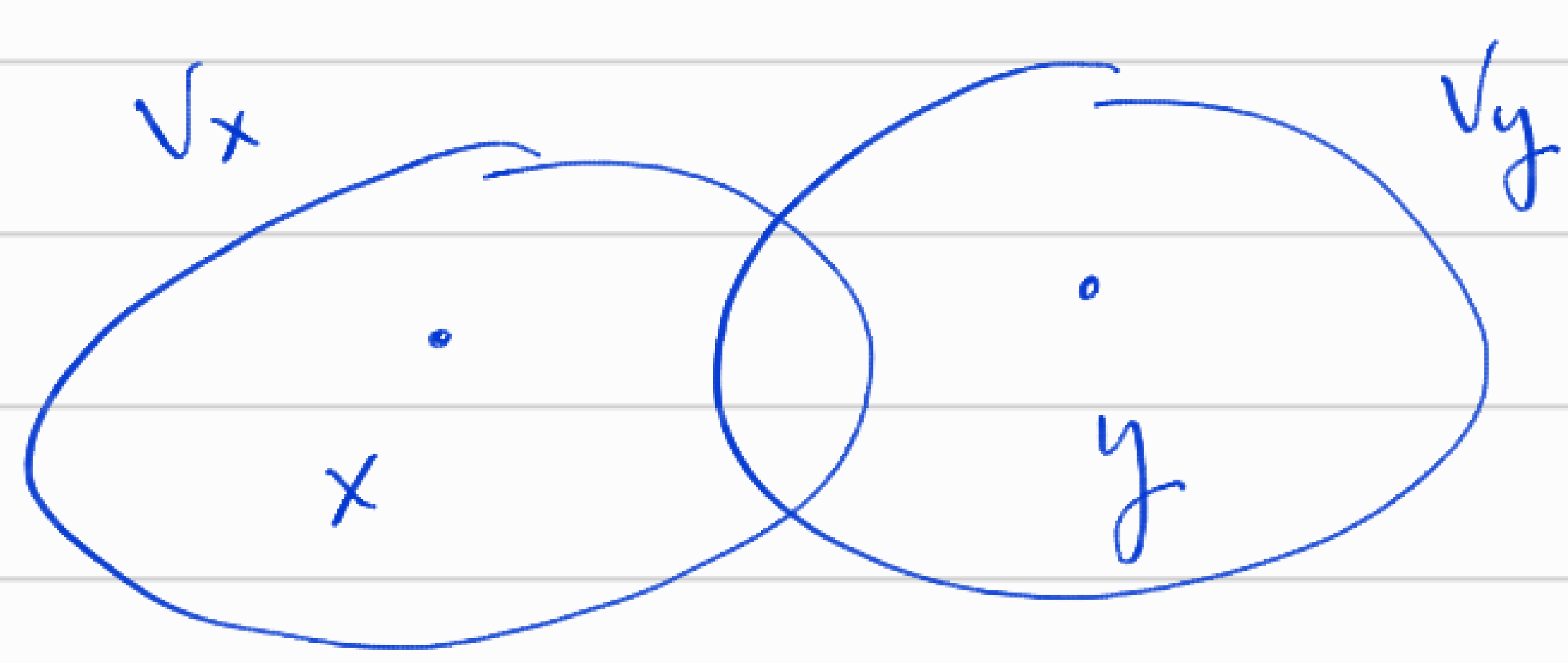
16/10/2020

Axiomas de separación

$(\mathbb{X},T)$ esp. topológico.

<u>Def</u>: diremos que $(\mathbb{X},T)$ es T_1 (que verifica el axioma de separación) si, para todo par de puntos $x,y\in\mathbb{X}$, $x\neq y$, existen $V_x\in N_x$, $V_y\in N_y$ tales $y\notin V_x$ y $x\notin V_y$.



<u>Prop</u>: un espacio topológico $(\mathbb{X},T)$ es T_1 si y sólo si todo punto es cerrado.

<u>Dem</u>: supongamos que $(\mathbb{X},T)$ es T_1. Sea $x\in\mathbb{X}$. Veamos $\mathbb{X}\setminus\{x\}\in T$. Tomamos $y\in\mathbb{X}\setminus\{x\}$, entonces $y\neq x$. Como $(\mathbb{X},T)$ es T_1, existe $V_y\in N_y$ tal que $x\notin V_y$. Esto significa que $V_y\subset\mathbb{X}\setminus\{x\}$. Entonces $y\in \operatorname{int}(\mathbb{X}\setminus\{x\})$. Todo punto de $\mathbb{X}\setminus\{x\}$ es interior. Por tanto $\mathbb{X}\setminus\{x\}$ es un conjunto abierto. y $\{x\}$ es cerrado.

Supongamos ahora que todo punto es cerrado. Sean $x,y\in\mathbb{X}$, $x\neq y$. Sean $V_x=\mathbb{X}\setminus\{y\}$, $V_y=\mathbb{X}\setminus\{x\}$. $V_x,V_y\in T$. $x\in V_x$, $y\in V_y$. $x\notin V_y$, $y\notin V_x$. $V_x\in N_x$, $V_y\in N_y$, $y\notin V_x$, $x\notin V_y$ ■

Def. un espacio topológico (X, T) es T_2 o Hausdorff si para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $V_x \in N_x$, $V_y \in N_y$ tales que $V_x \cap V_y = \phi$

Nota: si $V_x \cap V_y = \phi \Rightarrow x \notin V_y, \ y \notin V_x$

Prop: Todo espacio topológico T_2 es T_1

Consecuencia: En un espacio Hausdorff todo punto es cerrado.

Ejemplo: sea (X, d) e. métrico. Entonces (X, T_d) es T_2.

$x \neq y, \quad r = d(x,y) > 0 \Rightarrow B(x, r/2) \cap B(y, r/2) = \phi$

Def. diremos que un e.top. (X, T) es metrizable si existe una distancia d en X tal que $T_d = T$.

Nota: todo e.top. metrizable es T_2 (T_d es Hausdorff).

Ejemplo: $(\mathbb{N}, T_{CF})$ no es T_2. Por tanto no es metrizable.

$x \in \mathbb{N}, \quad U \in N_x, \quad \exists\, V \in T_{CF}$ tal que $x \in V \subset U$

$\Rightarrow \mathbb{N} \setminus U \subset \mathbb{N} \setminus V$ finito.

$x, y \in \mathbb{N}, \ x \neq y \quad U_x \in N_x, \ U_y \in N_y \qquad U_x \cap U_y \neq \phi$ (si $U_x \cap U_y = \phi \Rightarrow \underbrace{(\mathbb{N} \setminus U_x)}_{\text{finito}} \cup \underbrace{(\mathbb{N} \setminus U_y)}_{\text{finito}} = \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{no finito}}$)

¿Es $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CF})$ T_1? Sí, porque todo punto es cerrado en $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CF})$.

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}_{CF}} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\text{conjuntos finitos}\}.$$

Axiomas de numerabilidad

<u>Def</u>: decimos que un e. top. $(X, \mathcal{T})$ verifica el primer axioma de numerabilidad si cada punto admite una base de entornos numerable. Diremos también que $(X, \mathcal{T})$ es AN-I.

<u>Ejemplo</u>: sea (X, d) un e. métrico. Entonces $(X, \mathcal{T}_d)$ es AN-I

$$\text{Si } x \in X, \quad \mathcal{B}_x = \{B(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

es base de entornos de x.

<u>Ejemplo</u>: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ no es AN-I. Tomamos $x \in \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{B}_x = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de x. Entonces $\mathbb{R} \setminus B_i$ es finito ($\exists\, U_i \in \mathcal{T}$ tal que $U_i \subset B_i \Rightarrow \mathbb{R} \setminus B_i \subset \mathbb{R} \setminus U_i$ finito $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus B_i$ finito). Entonces el conjunto

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus B_i$$

es numerable. También $\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus B_i) \right) \cup \{x\}$ es numerable.

Como $\mathbb{R}$ no es numerable, tomamos $\underline{\underline{y \notin \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus B_i) \cup \{x\} \right)}}$.

$V_x = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ es entorno de x ($x \in V_x$ porque $x \neq y$ y $V_x \in \mathcal{T}_{CF}$).

Veamos que no existe $\underline{B_{i_0} \subset V_x}$. Si <u>existiera</u>, entonces

$$\{y\} = \mathbb{R} \setminus V_x \subset \mathbb{R} \setminus B_{i_0} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus B_i) \cup \{x\}$$

$$\Rightarrow \underline{y} \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus B_i) \cup \{x\}. \quad \blacksquare$$

Def: diremos que un espacio topológico (X, T) verifica el segundo axioma de numerabilidad si existe una base numerable de T. Diremos que (X, T) es AN-II.

Def: diremos que un subconjunto D de un e.top. (X, T) es denso si $\overline{D} = X$.

Def: diremos que un e.top. es separable si contiene un subconjunto denso y numerable.

Ejemplo: $(\mathbb{R}, T_u)$ T_u: topología usual asociada a $d(x,y) = |x-y|$ es AN-II.

$$\mathcal{B} = \{(a,b) : a<b,\ a,b \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

$\mathcal{B}$ es una familia numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Además, $\mathcal{B}$ es base de T_u. Si $U \in T_u$, entonces, para todo $\underline{x \in U}$, existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales $x \in (c,d) \subset U$

$$c < x < d$$

Existen entonces $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $c < a < x < b < d$. (entre dos números reales distintos siempre hay un número racional)

$$x \in \underline{(a,b)} \subset (c,d) \subset U$$

$(a,b) \in \mathcal{B}$ $\qquad$ $(a,b) = U_x \subset U$

$$U = \bigcup_{x \in U} \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{B}}}{U_x}$$

$\blacksquare$

Ejercicio: $\mathbb{R}$ es separable $(\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R})$

Ejercicio: $(\mathbb{R}, T_D)$ no es AN-II.