14/10/2020

$S\subset P(X)$. $\quad T(S) := \bigcap_{S\subset T} \{T : T \text{ topología en } X\}$

$T(S)$ es topología en T, $S\subset T(S)$, $T(S)$ es la topología más gruesa que contiene a S.

<u>Propiedad</u>: S es una subbase de $T(S)$. $\bigcup_{A\in S} A = X$.

" S subbase de T si $\mathcal{B}(S) = \{\bigcap_{i\in I} S_i : S_i \in S, I \text{ finito}\}$ es una base de T "

- Partimos de $S\subset X$ tal que $\bigcup_{A\in S} A = X$. Construimos $\mathcal{B}(S) =$
$= \{\bigcap_{i\in I} S_i : S_i\in S, I \text{ finito}\}$. Vimos que $\mathcal{B}(S)$ es base de una topología T en X.

- Queremos ver que $T = T(S)$. Sabemos que $S\subset T \Rightarrow T(S)\subset T$.
Falta ver que $T\subset T(S)$. Sea $U\in T$. Como $\mathcal{B}(S)$ es base de T, tomamos $\{B_j\}_{j\in J}$ tal que $U = \bigcup_{j\in J} B_j$. Cada $B_j = \bigcap_{i\in I_j} S_i$, I_j finito.

$$U = \bigcup_{j\in J} \left(\underline{\bigcap_{i\in I_j} S_i} \right)$$

$\forall j\in J, \forall i\in I_j$, $S_i \in T(S)$. $T(S)$ top. $\Rightarrow \bigcap_{i\in I_j} S_i \in T(S)$ $\forall j\in J$.

$$\Rightarrow U = \bigcup_{j\in J} \left(\bigcap_{i\in I_j} S_i\right) \in T(S)$$

$\Rightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{T}(S)$

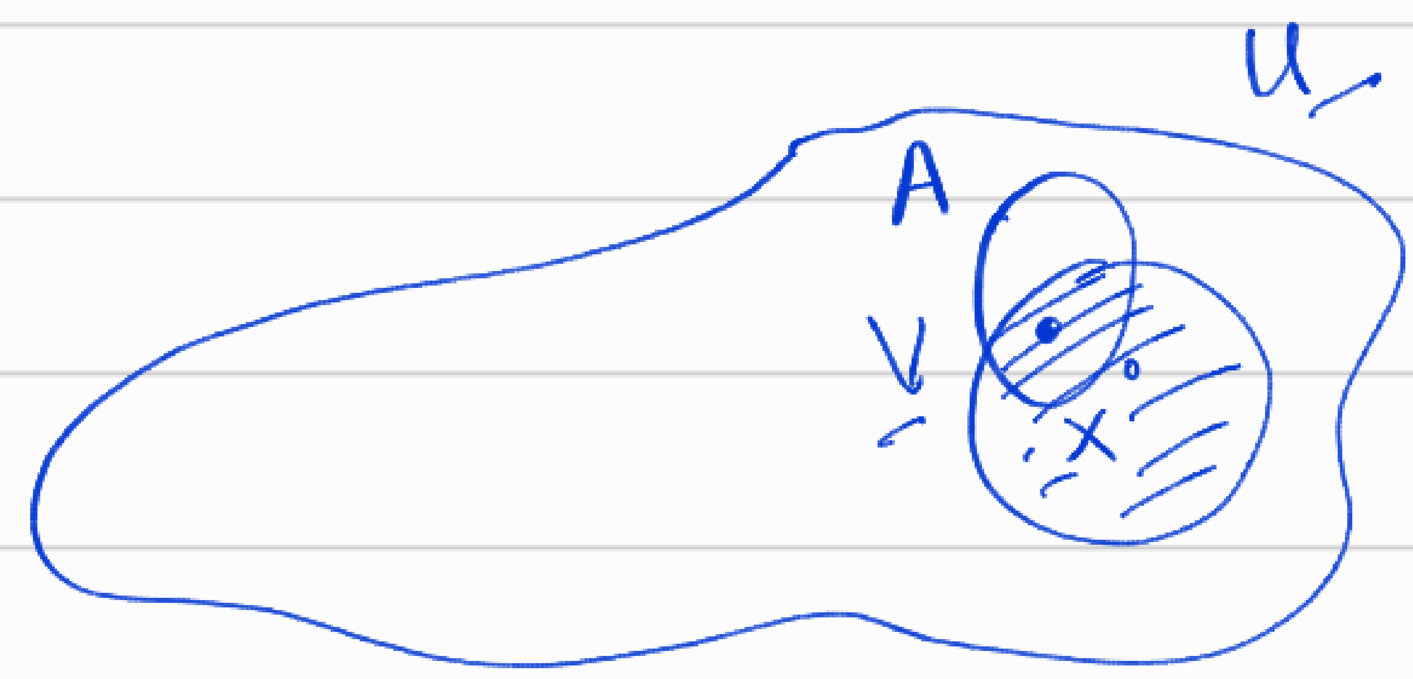
Acabamos de demostrar que S es subbase de $\mathcal{T} = \mathcal{T}(S)$. Esto significa que

$$\mathcal{T}(S) = \left\{ \bigcup_{j\in J} \left(\bigcap_{i\in I_j} S_i \right) : S_i \in S \right\} \cup \{\emptyset\}$$

Es necesario que $\displaystyle\bigcup_{A\in S} A = X$.

Lema: sea $(X,\mathcal{T})$ un e. top. Para cada $x\in X$, sea N_x el conjunto de entornos de x. Entonces

1. $x \in U \quad \forall U \in N_x$
2. Si $U_1, U_2 \in N_x$, entonces $U_1 \cap U_2 \in N_x$
3. Si $U \in N_x$, $U \subset V$, entonces $V \in N_x$
4. $\forall\, U \in N_x$, $\exists V \in N_x$ tal que $U \in N_y \ \forall y \in V$. $\quad (V \subset U)$



Recuerdo que $U \in N_x$ si existe $A\in\mathcal{T}$ tal que $x\in A\subset U$.

Dem: 1. Si $U\in N_x$, existe $A\in\mathcal{T}$ tal que $x\in A\subset U \Rightarrow x\in U$

2. Si $U_1, U_2 \in N_x$, existen $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tales que $x\in A_i \subset U_i$, $i=1,2$

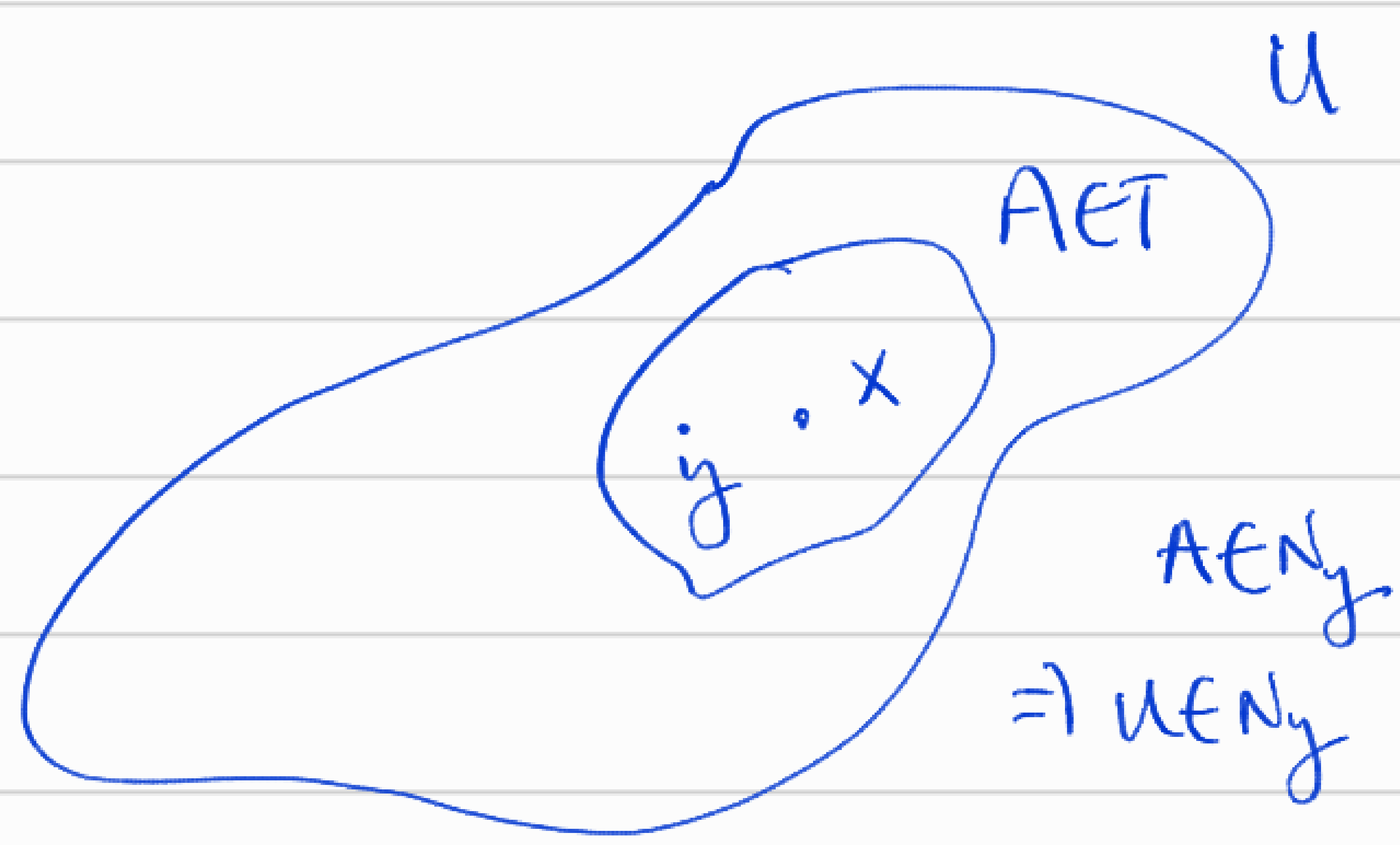
$$\Rightarrow \quad x \in \underbrace{A_1\cap A_2}_{\in \mathcal{T}} \subset \underline{U_1\cap U_2}$$

$A_1\cap A_2$ es un abierto de T que contiene a x y está contenido en $U_1\cap U_2 \Rightarrow U_1\cap U_2\in N_x$.

3. Si $U\in N_x$, existe $A\in T$ tal que $x\in A\subset U$. Como $U\subset V$, se tiene que $x\in A\subset U\subset V$. Por tanto, $V\in N_x$

4. Sea $U\in N_x$. Sea $A\in T$ tal que $x\in A\subset U$. Si $y\in A$, entonces $A\in N_y$. $(y\in \underset{T}{\underset{\cap}{A}}\subset A)$ (Un conjunto abierto es entorno de cada uno de sus puntos). Como $\underset{N_y}{\underset{\cap}{A}}\subset U \Rightarrow U\in N_y$. Basta tomar $V=A$.

$\forall y\in A=V$, $U\in N_y$



Teorema: Sea $X\neq\emptyset$. Consideramos una colección $\{M_x\}_{x\in X}$ con $\emptyset\neq M_x\subset P(X)$ $\forall x\in X$. Supongamos que:

1. $x\in U$ $\forall U\in M_x$
2. $U_1,U_2\in M_x$, entonces $U_1\cap U_2\in M_x$
3. Si $U\in M_x$ y $U\subset V$, entonces $V\in M_x$
4. $\forall U\in M_x$, existe $V\in M_x$ tal que $U\in M_y$ $\forall y\in V$.

Entonces

$$T=\{U\subset X : \forall x\in U, \exists V\in M_x \text{ tal que } V\subset U\}\cup\{\emptyset\}$$

es una topología en X tal que $M_x=N_x$ $\forall x\in X$ (la familia de entornos de $x\in X$ es M_x). Además T es la única topología tal que $N_x=M_x$ $\forall x\in X$.

Se comprueba que T es topología en X del mismo modo que se comprueba que una familia $\mathcal{B}$ con ciertas propiedades de base genera una topología.

Veamos ahora que $M_x = N_x \quad \forall x \in X$

$N_x \subset M_x$: sea $U \in N_x$. Existe $A \in T$ tal que $x \in A \subset U$. Por la definición de T, existe $V \in M_x$ tal que $x \in \underset{\substack{\cap \\ M_x}}{V} \subset A \subset U$. Por la propiedad 3, $U \in M_x$

$M_x \subset N_x$: Sea $V \in M_x$. Definimos $U = \{y \in V : V \in M_y\} \neq \emptyset$

Tenemos entonces que $x \in U \subset V$.

Veamos que $U \in T$. Tomamos $y \in U$. Por definición de U, $V \in M_y$. Por 4, existe $W \in M_y$ tal que $V \in M_z$ para todo $z \in W$. De nuevo por la definición de U, se tiene que $W \subset U$. Por tanto, dado $y \in U$ hemos encontrado $W \in M_y$ tal que $W \subset U$. Como $y \in U$ es arbitrario, la definición de T implica que $U \in T$.

En consecuencia, $x \in U \subset V$ y $U \in T$. Esto implica que $U \in N_x$ (un conjunto abierto es entorno de cada uno de sus puntos). Como $U \subset V$, se tiene que $V \in N_x$ cualquiera que sea $V \in M_x$.

Por tanto, $M_x \subset N_x$.

Falta la unicidad