3/12/2020

$(\mathfrak{X}_1, T_1), \dots, (\mathfrak{X}_K, T_K)$ e.t. conexos, entonces $(\mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_K, T_1 \times \dots \times T_K)$ es conexo

Demostración por inducción sobre K.

$K=2$. $(\mathfrak{X}_1, T_1), (\mathfrak{X}_2, T_2)$ conexos $\Rightarrow (\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2, T_1 \times T_2)$

Fijamos $x_1 \in \mathfrak{X}_1$. Veamos que $\mathfrak{X}_2$ es homeomorfo a $\{x_1\} \times \mathfrak{X}_2$.
Definimos $f: \mathfrak{X}_2 \to \{x_1\} \times \mathfrak{X}_2$ por medio de la igualdad $f(x_2) = (x_1, x_2)$.
La aplicación inversa es $g: \{x_1\} \times \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_2$ definida por $g(x_1, x_2) = x_2$
Es inmediato que $g \circ f = Id_{\mathfrak{X}_2}$ y que $f \circ g = Id_{\{x_1\} \times \mathfrak{X}_2}$. Por tanto $f^{-1} = g$. Veamos que

$$f: (\mathfrak{X}_2, T_2) \to (\underline{\{x_1\} \times} \mathfrak{X}_2, (T_1 \times T_2)_{\{x_1\} \times \mathfrak{X}_2})$$

es un homeomorfismo. Si llamamos $A = \{x_1\} \times \mathfrak{X}_2$, tenemos que $f: (\mathfrak{X}_2, T_2) \to (A, (T_1 \times T_2)_A)$ es continua si y solo $i_A \circ f : (\mathfrak{X}_2, T_2) \to$
$\to (\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2, T_1 \times T_2)$ es continua. Pero $i_A \circ f$ es continua si y solo si $\pi_1 \circ (i_A \circ f)$, $\pi_2 \circ (i_A \circ f)$ son continuas.

$$\pi_1(i_A(f(x_2))) = \pi_1(i_A(x_1, x_2)) = \pi_1(x_1, x_2) = x_1$$

$\Rightarrow \pi_1 \circ i_A \circ f$ es una aplicación constante $\mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_1$ (x_1 es fijo)
$\Rightarrow \pi_1 \circ i_A \circ f$ es continua.

$$\pi_2(i_A(f(x_2))) = \pi_2(x_1, x_2) = x_2$$

$\Rightarrow \pi_2 \circ i_A \circ f = Id_{\mathfrak{X}_2}$ es una aplicación continua.

Por tanto $i_A \circ f$ es continua y f es continua.

Veamos ahora que $f^{-1} = g$ es continua. La aplicación $g : \{x_1\} \times X_2 \to X_2$ está definida por $g(x_1, x_2) = x_2$. Observamos que $g = \pi_2|_{\{x_1\} \times X_2} = \pi_2 \circ i_{\{x_1\} \times X_2}$ que es continua por ser composición de aplicaciones continuas.

Concluimos que $X_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homeomorfos}}}{\approx} \{x_1\} \times X_2$

Análogamente, fijando $x_2 \in X_2$, obtenemos que $X_1 \approx X_1 \times \{x_2\}$.
$(f(x_1) = (x_1, x_2))$

Por tanto, $\{x_1\} \times X_2$, $X_1 \times \{x_2\}$ son subconjuntos conexos de $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$

Fijamos $x_1 \in X_1$. Para todo $x_2 \in X_2$ definimos

$$C_{x_2} = (\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{x_2\})$$

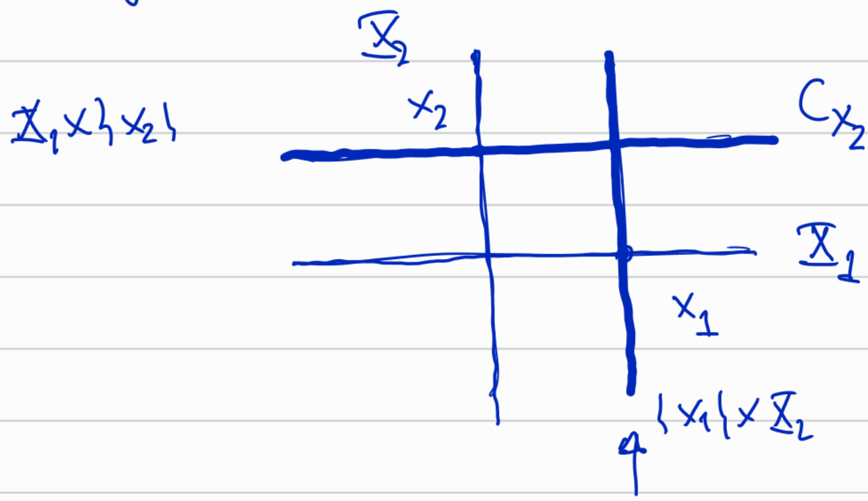
C_{x_2} es conexo por ser unión de conjuntos conexos con intersección no vacía $((x_1, x_2) \in (\{x_1\} \times X_2) \cap (X_1 \times \{x_2\}))$.

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{x_2 \in X_2} C_{x_2}.$$

$\boxed{\supset \text{ es trivial}}$. Si $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ entonces $(y_1, y_2) \in X_1 \times \{y_2\} \subset$
$\subset C_{y_2} \subset \bigcup_{x_2 \in X_2} C_{x_2} \Rightarrow \boxed{\subset}$

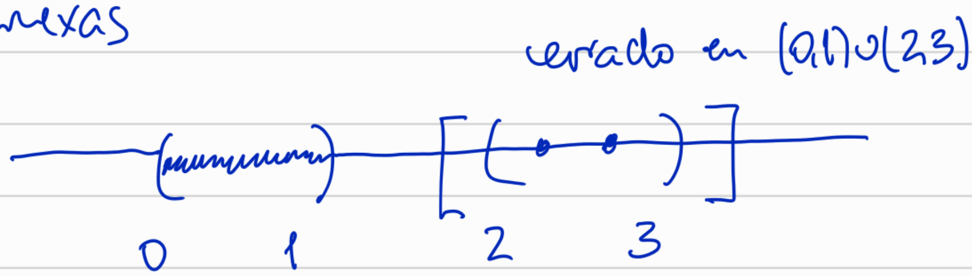
$$\bigcap_{x_2 \in X_2} C_{x_2} \supset \{x_1\} \times X_2 \neq \phi \Rightarrow \bigcap_{x_2 \in X_2} C_{x_2} \neq \phi.$$

Por tanto, $(\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2, T_1\times T_2)$ es conexo porque $\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2$ es unión de subconjuntos conexos con intersección no vacía.



Supongamos por inducción que $(\mathbb{X}_1\times\dots\times\mathbb{X}_{k-1}, T_1\times\dots\times T_{k-1})$ es conexo. Como $(\mathbb{X}_1\times\dots\times\mathbb{X}_k, T_1\times\dots\times T_k) \cong ((\mathbb{X}_1\times\dots\times\mathbb{X}_{k-1})\times\mathbb{X}_k, (T_1\times\dots\times T_{k-1})\times T_k)$, que es el producto de dos e.top. conexos, el apartado anterior (caso $k=2$) demuestra que $(\mathbb{X}_1\times\dots\times\mathbb{X}_k, T_1\times\dots\times T_k)$ es conexo. ■

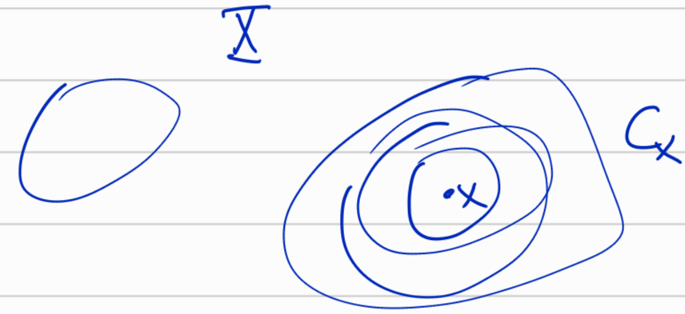
Componentes conexas



$\mathbb{X} = (0,1)\cup(2,3)$ con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$ no es conexo. ($(0,1),(2,3)$ son cerrados de $\mathbb{X}$).

Def: Sea $(\mathbb{X},T)$ un e.top. y $x\in\mathbb{X}$. La componente conexa de $\mathbb{X}$ que contiene a x es el conjunto

$$C_x = \bigcup\{A\subset\mathbb{X} : A \text{ conexo}, x\in A\}$$



C_x es la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen al punto x.

Propiedades: 1. C_x es conexo y $x \in C_x$

2. Si $A \subset X$ es conexo y $x \in A$, entonces $A \subset C_x$

(C_x es el mayor subconjunto conexo que contiene a x).

3. $\overline{C_x} = C_x$ (C_x es cerrado)

4. Si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, entonces $C_x = C_y$

5. Si A es abierto y cerrado, y $x \in A$, entonces $C_x \subset A$

Dem. 1. C_x es unión de subconjuntos conexos tales que x pertenece a todos ellos (intersección no vacía). Por tanto, C_x es conexo. Es trivial que $x \in C_x$.

2. A conexo, $x \in A$, entonces $A \subset C_x$.

$$C_x = \bigcup_{\substack{B \text{ conexo} \\ x \in A}} B \supset A$$

(A es miembro de la familia $\{B \subset X : B \text{ conexo}, x \in B\}$.)

3. $\overline{C_x} = C_x$. Observamos que $\boxed{C_x \subset \overline{C_x}}$. Como C_x es conexo, $\overline{C_x}$ también lo es. Por supuesto, $x \in \overline{C_x}$. El apartado 2 garantiza que $\boxed{\overline{C_x} \subset C_x}$. Por tanto, $C_x = \overline{C_x}$

(las componentes conexas son conjuntos cerrados).

4. Si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, entonces $C_x = C_y$. Si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, entonces $C_x \cup C_y$ es un subconjunto conexo. $x, y \in C_x \cup C_y$
Por el apartado 2

$$C_x \cup C_y \subset C_x \quad (x \in C_x \cup C_y \text{ conexo})$$
$$C_x \cup C_y \subset C_y \quad (y \in C_x \cup C_y \text{ conexo})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_y \subset C_x \cup C_y \subset C_x \\ C_x \subset C_x \cup C_y \subset C_y \end{cases} \Rightarrow C_x = C_y$$

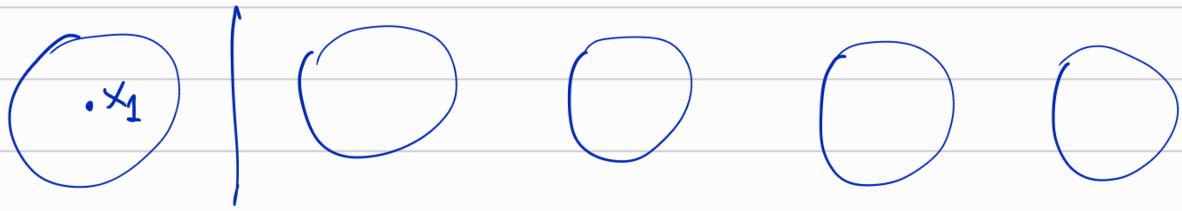
5. $A \in T \cap C_T$ y $x \in A$, entonces $C_x \subset A$.

Observamos que $A \cap C_x \neq \emptyset$. Si $\boxed{(X \setminus A) \cap C_x \neq \emptyset,}$ entonces

C_x no es conexo porque $C_x = (\underset{\substack{\neq \\ \emptyset}}{A \cap C_x}) \cup (\underset{\substack{\neq \\ \emptyset}}{(X \setminus A) \cap C_x})$ y
$A \cap C_x$, $(X \setminus A) \cap C_x \in (C_x)_T$
$\Rightarrow C_x$ no es conexo !!
Por tanto, $(X \setminus A) \cap C_x = \emptyset \Rightarrow C_x \subset X \setminus (X \setminus A) = A$.

<u>Ejemplos</u>: 1. (X, T_D) $x \in X$. $C_x = \{x\}$. ($\{x\}$ es el único conjunto conexo de (X, T_D) que contiene a x). En este caso C_x es un conjunto abierto.

2. Sea (X, T) un e. top. Supongamos que $X = C_{x_1} \cup \dots \cup C_{x_k}$ donde <u>C_{x_i} son componentes conexas</u> y <u>$C_{x_i} \cap C_{x_j} = \emptyset \ \forall i \neq j$</u>



$C_{x_1} = C_{y_1} \quad \forall y_1 \in C_{x_1}$

$\{C_{x_i} : i = 1, \dots, k\}$ es una partición de X en componentes conexas.

En este caso $C_{x_i} = X \setminus \left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} C_{x_j} \right) = X \setminus (\underbrace{C_{x_1} \cup \dots \cup \widehat{C_{x_i}} \cup \dots \cup C_{x_k}}_{\text{cerrado}})$

$\Rightarrow C_{x_i} \in T$.

3. $(\mathbb{Q}, (T_u)_{\mathbb{Q}})$ $\quad q \in \mathbb{Q} \Rightarrow C_q = \{q\}$ y C_q no es abierto.