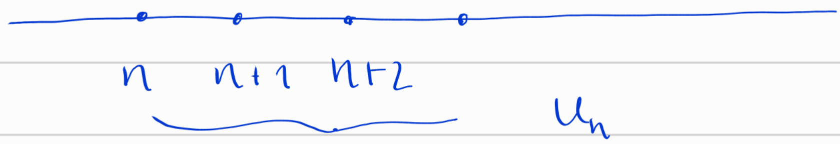
22/10/2020

2(c) $\underline{X} = \mathbb{N}$ $\quad T = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ $\quad U_n = [n, +\infty) \cap \mathbb{N}$

$= \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$



1. $\emptyset, \mathbb{N} \in T$

2. $\{V_i\}_{i \in I} \subset T \Rightarrow \bigcup V_i \in T$

→ Si algún $V_{i_0} = \underline{X} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i = \underline{X} \in T$

→ Si $\underline{V_i \neq \underline{X}}$ $\forall i \in I \Rightarrow V_i = U_{n_i}$ ó $V_i = \emptyset$

Si $V_i = \emptyset$ $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i = \emptyset$

Si algún $V_{i_0} = U_{n_{i_0}}$ Tomamos $\underline{m = \min}\{n : [n, +\infty) = V_j$ para algún $j \in I\}$

$[m, +\infty) = V_{j_0} \supset V_i$ $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i = V_{j_0} = [m, +\infty) \in T$

3. $V_1, \ldots, V_K \in T \Rightarrow V_1 \cap \ldots \cap V_K \in T$

Si $V_i = \emptyset$ para algún $i \in I \Rightarrow V_1 \cap \ldots \cap V_K = \emptyset \in T$

Si $V_i \neq \emptyset$ para todo $i \Rightarrow V_i = U_{n_i}$ ó $V_i = \underline{X}$

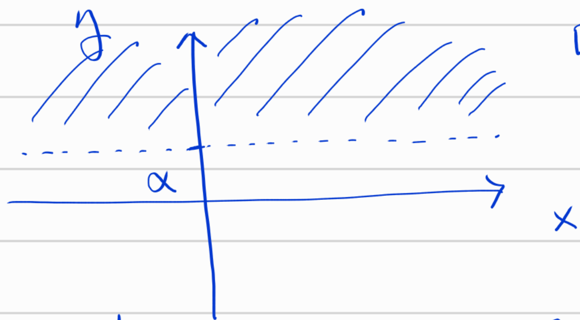
Supongamos que algún $V_i \neq \underline{X}$ (si $V_i = \underline{X}$ $\forall i \in I \Rightarrow V_1 \cap . \cap V_K = \underline{X} \in T$)

Sea $m = \max\{n : [n, +\infty) = V_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, K\}\}$

$V_{i_0} = [m,+\infty) \subset V_1, V_2, \dots, V_k \Rightarrow V_1 \cap \dots \cap V_k = V_{i_0} = [n,+\infty) \in T$ ∎

③ Grabación

4. $\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad U_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \alpha\} = \mathbb{R} \times [y, +\infty)$



(a) $T = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$ es una top en $\mathbb{R}^2$

1. $\emptyset, \mathbb{R}^2 \in T$

2. $\{V_i\}_{i \in I} \subset T$ Siempre existe V_{i_0}, con $i_0 \in I$, tal que $\boxed{V_{i_0} \supset V_i}$ $\forall i \in I$.

   Si algún $V_i = X$ tomamos ese elemento como V_{i_0}.

   Si ningún $V_i = X$ tomamos $V_i = \emptyset$ (si todos los $V_i = \emptyset$) o

   $V_i = \mathbb{R} \times (m, +\infty)$ $\quad m = \min\{n : \mathbb{R} \times (n,+\infty) = V_i$ para un cierto $i \in I\}$

   $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i = V_{i_0} \in T$

3. $V_1, \dots, V_k \in T$. Siempre existe $V_{i_0} \in T$ tal que $V_{i_0} \subset V_i$ $\forall i = 1, \dots, k$

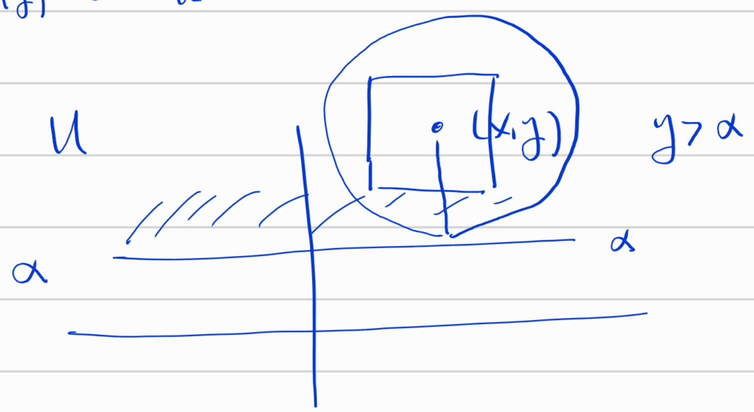
Si todos los $V_i = \emptyset$, se toma $V_{i_0} = \emptyset$. Si $V_i \neq \emptyset$ para todo i, se toma $V_{i_0} = X$ si $V_i = X$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, y en caso de que algún $V_i \neq X$ se toma $V_{i_0} = \mathbb{R} \times (m, +\infty)$ con $m = \max\{n : \mathbb{R} \times (m,+\infty) = V_i$ para $i \in$ $i \in \{1, \dots, k\}\}$

$\Rightarrow \quad V_1 \cap \dots \cap V_k = V_{i_0} \in T$

(b) $T \subset T_u$ ó $T_u \subset T$

$U \in T$. Si $U \neq \phi, \mathbb{R}^2$, entonces $U = \mathbb{R} \times (\alpha, +\infty)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$
Veamos que U es abierto para $\underline{\underline{T_u}}$. Para ello vamos a tomar $(x,y) \in U$ y vamos a ver que existe $V_{(x,y)} \in T_u$ tal que $(x,y) \in V_{(x,y)} \subset U$

Entonces $\quad U = \bigcup_{(x,y) \in U} V_{(x,y)} \in T_u$

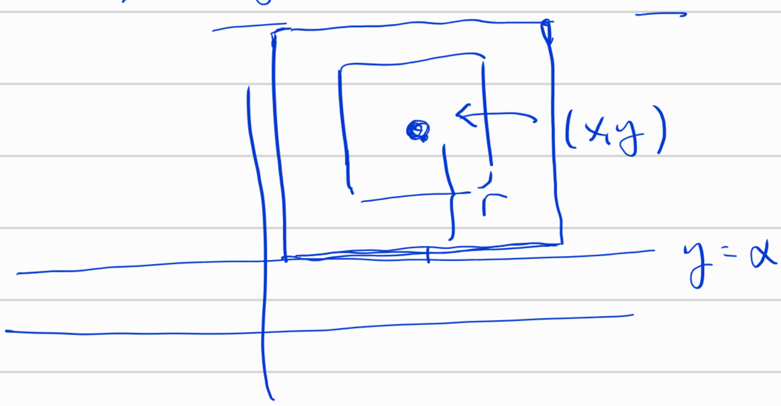


$(x,y) \in U \Rightarrow y > \alpha$ Sea $\underline{r = y - \alpha} > 0$ Entonces el conjunto

$V_{(x,y)} = (x-r, x+r) \times (y-r, y+r) = B_{d_\infty}((x,y), r) \in T_u$ (d_∞, d_2 son equiv.)

$\boxed{\underline{V_{(x,y)} \subset U}}$ $\quad$ Sea $\underline{(x',y') \in V_{(x,y)}} \Rightarrow x' \in (x-r, x+r)$, $\underline{y' \in (y-r, y+r)}$

$\Rightarrow x' \in \mathbb{R}, \quad y' > y - r = \alpha \Rightarrow (x',y') \in \mathbb{R} \times (\alpha, +\infty) = \underline{U}$



Se puede comprobar que $B_{d_2}((x,y),r) \subset U$.

$U \in T \Rightarrow$ si $U = \emptyset, \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ $U \in T_u$. Si $U = \mathbb{R} \times (\alpha, +\infty) \Rightarrow$ $U \in T_u$

Por tanto, $T \subset T_u$

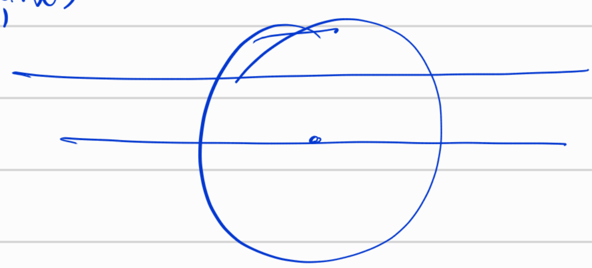
$\boxed{T_u \not\subset T}$

Sea $U = B_{d_2}((0,0),1)$. No existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $U = \mathbb{R} \times (\alpha, +\infty)$ ← no acotado

acotado

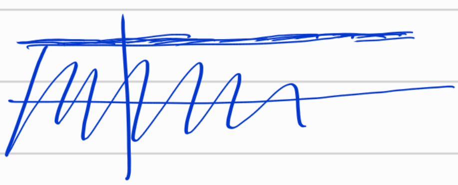
siempre existe $(x,y) \in \mathbb{R} \times (\alpha, +\infty)$ con $y > 1$.

$\mathbb{R} \times (\alpha, +\infty)$



(c) $G_T = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{C_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ $\quad C_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \alpha\}$.

$C_\alpha = \mathbb{R}^2 \setminus U_\alpha$.



5. Grabación

6. Grabación

7. Sea (X, T) e. top. $A \subset X$

$T_A = \{U \cap A : U \in T\}$ es una top. en A

(A, T_A) es espacio topológico. T_A es la top. inducida en A.

1. $\phi, A \in T_A$ $\quad \phi = \underset{\underset{T}{\cap}}{\phi} \cap A, \quad A = \underset{\underset{T}{\cap}}{X} \cap A \in T_A$

2. Sea $\{V_i\}_{i \in I} \subset T_A \Rightarrow \forall i \in I, \exists \underline{U_i \in T} / V_i = U_i \cap A$.

$$\underline{\bigcup_{i \in I} V_i} = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = \Big(\underset{\underset{T}{\cap}}{\bigcup_{i \in I} U_i} \Big) \cap A \in T_A$$

3. $V_1, \dots, V_K \in T_A \Rightarrow \exists U_1, \dots, U_K \in T / V_1 = U_1 \cap A, \dots, V_K = U_K \cap A$

$$V_1 \cap \dots \cap V_K = (U_1 \cap A) \cap \dots \cap (U_K \cap A) = \underset{\underset{T}{\cap}}{(U_1 \cap \dots \cap U_K)} \cap A \in T_A$$

8. Grabación $\qquad A \subset B \subset X$

$T_A =$ top. ind. por X
$T_B =$ " " " "

$A \subset B \qquad (T_B)_A = T_A$

La topología inducida en A por B = top. inducida en A en X

9. (X, T) e.t. $\quad A \subset X \quad \mathcal{B}$ base de T

$$\mathcal{B}_A = \{ B \cap A : B \in \mathcal{B} \}$$

base de T_A

Tomamos $V \in T_A$, $V \neq \emptyset$. Existe $U \in T$ tal que $V = U \cap A$

Como $\mathcal{B}$ es base de T, existe $\{B_i\}_{i \in I}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$

$$\underset{T_A}{\underset{\cap}{V}} = U \cap A = \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap A = \bigcup_{i \in I} \underset{\mathcal{B}_A}{\underset{\cap}{(B_i \cap A)}}$$

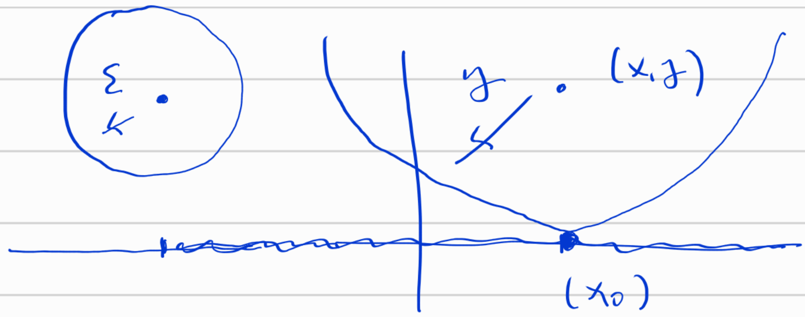
$\Rightarrow \mathcal{B}_A$ es base de T_A

10. Grabación

11. $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \in N_x,\ U \cap A \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_x,\ B \cap A \neq \emptyset$

12. Semiplano de Moore



$\mathbb{R}_2^+ = \{(x,y) : y \geq 0\}$

$\mathcal{B}_M = \{ B((x,y),\varepsilon) : y > 0,\ 0 < \varepsilon < y \} \cup \{ B((x,y),y) \cup \{(x,0)\} \}$

$\mathcal{B}_M$ es base de una top. en $\mathbb{R}_2^+$

1. $\forall p \in \mathbb{R}^2_+$, existe $B \in \mathcal{B}_M$ tal que $p \in B$ $\quad \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \mathbb{R}^2_+ \right)$

$p = (x,y)$. Si $y > 0$, tomamos $\underset{\substack{\Psi \\ p}}{B((x,y),\varepsilon)}$ con $\varepsilon = \frac{y}{2}$. $\in \mathcal{B}_M$

Si $y = 0$ tomamos $\underset{\substack{\Psi \\ p}}{B((x,1),1)} \cup \{\underset{\substack{\parallel \\ p}}{(x,0)}\} \in \mathcal{B}_M$

2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_M$ y $p \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}_M$ tal que $p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Para probar esta propiedad, siempre podemos suponer que $B_1 \neq B_2$ (si $B_1 = B_2$, tomamos $B_3 = B_1 = B_1 \cap B_2$)

Sean $B_1 \neq B_2$

Si $B_1 \neq B_2$ entonces $B_1 \cap B_2$ no contiene punto del eje x.

Sea $\mathcal{B}_M^1 = \{ B((x,y),\varepsilon) : y > 0,\ 0 < \varepsilon < y \}$
$\mathcal{B}_M^2 = \{ B((x,y),y) : y > 0 \} \cup \{(x,0)\}$

- $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_M^1 \Rightarrow B_1, B_2$ son bolas euclídeas $B_i \cap \{y=0\} = \phi$

$\Rightarrow$ $B_1 \cap B_2$ es abto en T_u (top. usual de $\mathbb{R}^2$)

$\underline{B_1 \cap B_2 \cap \{y=0\}} = \phi$

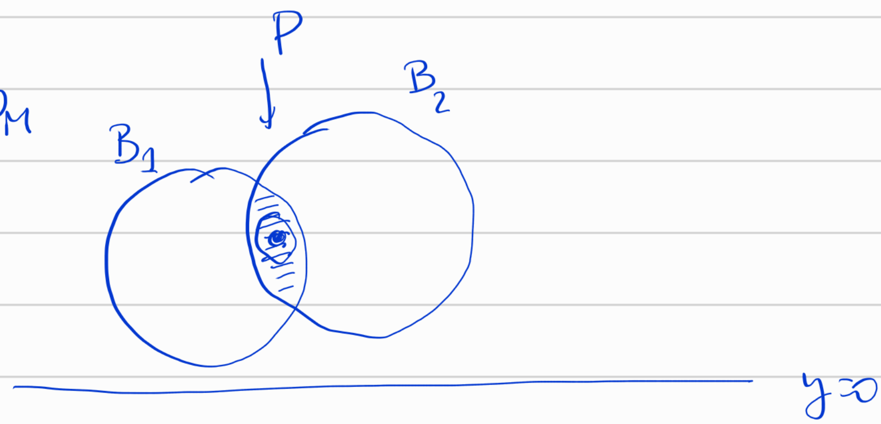
$B_1 \cap B_2 \in T_u$; $B_1 \cap B_2 \subset \mathbb{R}^2_+ \setminus \{y=0\}$.

Sea $p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow p=(x,y)$, $y>0$. Como $B_1 \cap B_2 \in T_u$, $p \in B_1 \cap B_2$ existe $\varepsilon>0$ (que podemos tomar $< y$) tal que

$$B((x,y),\varepsilon) \subset B_1 \cap B_2$$

$$\cap$$

$$\mathcal{B}_M^1 \subset \mathcal{B}_M$$



- $B_1 \in \mathcal{B}_M^1$, $B_2 \in \mathcal{B}_M^2$

$B_1 = B((x,y),\varepsilon)$ $\quad 0<\varepsilon<y \quad y>0$

$B_2 = B((x',y'),y') \cup \{(x',0)\}$ $\quad y'>0$

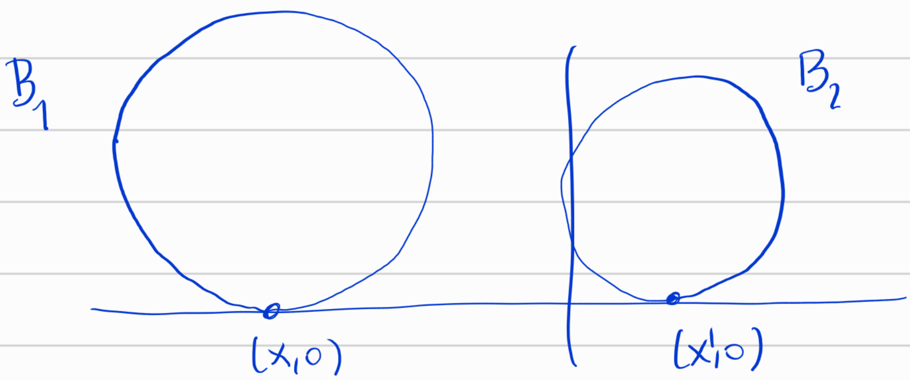
$B_1 \cap B_2 = B((x,y),\varepsilon) \cap B((x',y'),y')$ $\quad (x',0) \notin B_1$

Estamos en el caso anterior $\quad \underline{p \in B_1 \cap B_2} = B((x,y),\varepsilon) \cap B((x',y'),y')$

$\underline{p=(p_1,p_2)}$ $\quad p_2>0$

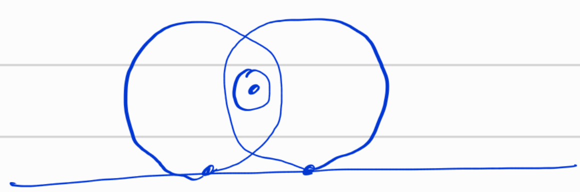
Sea $0<\varepsilon<p_2$ tal que $\underset{\mathcal{B}_M^1}{\underset{\cap}{B((p_1,p_2),\varepsilon)}} \subset B_1 \cap B_2$

- $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_M^2$ $\qquad B_1 = B((x,y),y) \cup \{(x,0)\}$
  $\qquad\qquad\qquad\qquad B_2 = B((x',y'),y') \cup \{(x',0)\}$.



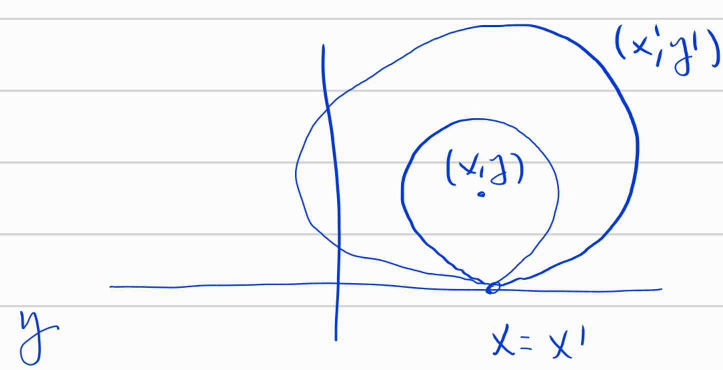
→ Si $x \neq x' \Rightarrow (x,0) \notin B_2$ y $(x',0) \notin B_1$

$\Rightarrow B_1 \cap B_2 = B((x,y),y) \cap B((x',y'),y')$ $\qquad B_1 \cap B_2 \cap \{y=0\} = \emptyset$



Razonamos como antes y encontramos, para todo $p \in B_1 \cap B_2$, $\varepsilon>0$ tal que $B(p,\varepsilon) \subset B_1 \cap B_2$ y $B(p,\varepsilon) \in \mathcal{B}_M^1$.

→ Si $x = x'$



$B_1 = B((x,y),y) \cup \{(x,0)\}$ $\qquad x = x'$

$B_2 = B((x',y'),y') \cup \{(x,0)\}$

Si $y = y' \Rightarrow B_1 = B_2$ y tomamos $B_3 = B_1 = B_2$

Si $y \neq y'$, podemos suponer que $y < y'$. Es fácil ver

(✱) $\quad B((x,y),y) \subset B((x,y'),y')$

$\Rightarrow \quad B_1 \subset B_2$ y $B_1 \cap B_2 = B_1$. Tomamos $B_3 = B_1 = B_1 \cap B_2$

Probamos (✱). Sea $\underline{(z_1,z_2) \in B((x,y),y)} \Rightarrow (x-z_1)^2 + (y-z_2)^2 < y^2$.
Veamos que $\underline{(z_1,z_2) \in} B((x,y'),y')$. Calculamos

$$(x-z_1)^2 + (y'-z_2)^2 = (x-z_1)^2 + (y'-y+y-z_2)^2 =$$

$$= (x-z_1)^2 + 2(y'-y)\cdot(y-z_2) + (y'-y)^2 + (y-z_2)^2$$

$$< y^2 + 2(y'-y)(y-z_2) + (y'-y)^2 \overset{?}{<} (y')^2$$

$$\equiv$$

(✱) $\quad y^2 + 2(y'-y)(y-z_2) + \cancel{(y')^2} - 2yy' + y^2 < \cancel{(y')^2} \; 0$

$$\cancel{y^2} + \cancel{2y'y} - \cancel{2y^2} + 2y'(-z_2) + 2(-y)(-z_2) - \cancel{2yy'} + \cancel{y^2} < 0$$

$$2(-y'z_2 + yz_2) < 0$$

$$\underline{2(y-y')z_2 < 0} \qquad \text{cierto} \qquad y - y' < 0 \qquad z_2 > 0$$

$\Rightarrow \quad B((x,y),y) \subset B((x,y'),y') \Rightarrow B((x,y),y) \cup \{(x,0)\} \subset$

$\subset B((x,y'),y') \cup \{(x,0)\}$

La topología inducida por $\mathcal{B}_M$ en $\mathbb{R}^2_+$ es la topología de Moore T_M.
$A = \{y=0\} \subset \mathbb{R}^2_+$

$(A,(T_M)_A)$ es la topología discreta en A.

$$\{(x,0)\} = \big(\underset{\substack{\cap \\ \mathcal{B}_M \subset T_M}}{B((x,1),1) \cup \{(x,0)\}}\big) \cap A \in T_A$$

13. $\mathbb{R}$ $\quad T_1 = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi, \mathbb{R}\}$
$\quad T_2 = \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi, \mathbb{R}\}$

1. T_1 topología (Se hace igual que 2(c)).

2. T_2 no topología

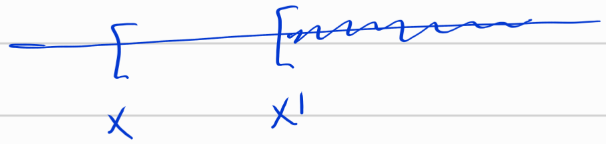
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\tfrac{1}{n}, +\infty) = (0,+\infty) \notin T_2$$

↑ no existe un elemento de esta familia que sea el mayor de todos.

13(b) T_2 es base de una topología en $\mathbb{R}$.

$$[x,+\infty) \cap [x',+\infty) = [\max\{x,x'\}, +\infty)$$

Si $x' \geq x \Rightarrow [x,+\infty) \supset [x',+\infty)$.



13 (c) Si T es la topología generada por T_2 vamos a comparar T con T_1 y T_u.