28/10/2020

13 (d) En $(\mathbb{R}, T)$, la intersección arbitraria de abiertos es abierto.

Tomamos $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$. Veamos que $\bigcap_{i\in I} U_i \in T$. Supongamos que $\bigcap_{i\in I} U_i \neq \phi$.

Fijamos $\underline{x \in \bigcap_{i\in I} U_i}$ $\Rightarrow$ $x \in U_i \ \forall i \in I$

T = top generada por $\underline{T_2} = \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi, X\}$

$\Rightarrow \exists B_x \in T_2$ tal que $\underline{x \in B_x} \subset U_i \ \forall i \in I$

$B_x = \mathbb{R}$ ó $[a,+\infty)$. En cualquiera de los dos casos $[x,+\infty) \subset \mathbb{R}$ ó $[a,+\infty)$
$\Downarrow$
x

$\Rightarrow \forall x \in \bigcap_{i\in I} U_i$, $[x,+\infty) \subset U_i \ \forall i \in I \Rightarrow \underline{[x,+\infty) \subset \bigcap_{i\in I} U_i}$

Por tanto

$$\bigcap_{i\in I} U_i = \bigcup_{x\in \bigcap_{i\in I} U_i} \underset{T_2 \subset T}{\underset{\cap}{[x,+\infty)}} \in T. \quad \blacksquare$$

14 Grabación

15. $\mathbb{R}$ $\quad T := \{U \subset \mathbb{R} : 0 \notin U\} \cup \{U \subset \mathbb{R} : (-1,1) \subset U\}$

- Si $U \in T$ y $0 \in U \Rightarrow (-1,1) \subset U$

(a) Probamos que T es una top en $\mathbb{R}$.

1. $0 \notin \phi \Rightarrow \phi \in T$; $(-1,1) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in T$

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$

- Si $0 \notin U_i$ para ningún $i \in I \Rightarrow 0 \notin \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T$

- Si $0 \in U_{i_0}$ para cierto $i_0 \in I \Rightarrow (-1,1) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T$

3. $U_1, \dots, U_k \in T$.

- Si $0 \in U_i \; \forall i = 1,\dots,k \Rightarrow (-1,1) \subset U_i \; \forall i = 1,\dots,k \Rightarrow (-1,1) \subset U_1 \cap \dots \cap U_k$
$\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T$

- Si $0 \notin U_{i_0} \Rightarrow 0 \notin U_1 \cap \dots \cap U_k \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T$

$G = \{F \subset \mathbb{R} : X \setminus F \in T\} = \{F \subset \mathbb{R} : 0 \in U\} \cup \{F \subset \mathbb{R} : F \subset \mathbb{R} \setminus (-1,1)\} \leftarrow$

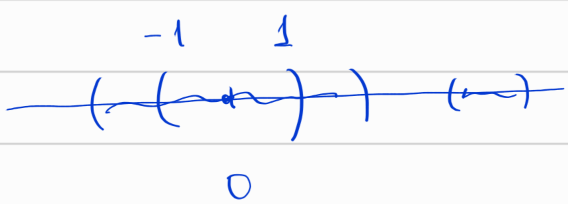
(b) $\mathcal{B}$ base de T con la menor cantidad posible de conjuntos

- Si $x \neq 0 \Rightarrow \{x\} \in T$
- $(-1,1) \in T$

$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \neq 0\} \cup \{(-1,1)\} \subset T$ es base de T

Sea $U \in T$: • si $0 \notin U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} \underbrace{\{x\}}_{\in \mathcal{B}} \Rightarrow U$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$

- si $0 \in U \Rightarrow (-1,1) \subset U \Rightarrow U = \underset{\downarrow}{(-1,1)} \cup \bigcup_{x \in U\setminus\{0\}} \{x\} \Rightarrow U$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$
0



Hemos visto que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$. ¿Podemos eliminar algún conjunto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ sigue siendo base? $(-1,1)$ no podemos eliminarlo porque es el único elemento de $\mathcal{B}$ que contiene a 0. Si $x \neq 0$, tampoco podemos eliminar $\{x\}$ porque $\{x\}$ es el único elemento de $\mathcal{B}$ que contiene a x y está contenido en $\{x\}$.

(c) $x \in \mathbb{R}$. Encontrar $\mathcal{B}_x$

$\underline{x \neq 0}$, $\underline{x \in (-1,1)}$ $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\} = \underline{\{\{x\}, (-1,1)\}}$ es base de entornos de x

También $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x

- En general, si $x \neq 0$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x

- Si $x = 0$, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(0) = \{B \in \mathcal{B} : 0 \in B\} = \{(-1,1)\}$

(d) $\overline{[0,1]}$, $\operatorname{int}([0,1])$, $\partial([0,1])$

$0 \notin \mathbb{R} \setminus [0,1] \Rightarrow \mathbb{R} \setminus [0,1] \in \mathcal{T} \Rightarrow [0,1] \in \mathcal{G} \Rightarrow \underline{\underline{\overline{[0,1]} = [0,1]}}$

$\operatorname{int}[0,1]$ = mayor conjunto abierto contenido en $[0,1]$. $\quad (0,1] \in \mathcal{T}$ $\quad 0 \notin$

¿Es $[0,1] \in \mathcal{T}$? No porque $(-1,1) \not\subset [0,1]$

Concluimos $(0,1] \in \mathcal{T}$, $(0,1] \subset [0,1]$ y $[0,1] \notin \mathcal{T} \Rightarrow (0,1]$ es el mayor conjunto abierto contenido en $[0,1]$. $\operatorname{int}([0,1]) = (0,1]$

$x \in \operatorname{int}([0,1]) \Leftrightarrow \exists\, U_x \in \mathcal{N}_x$ tal que $x \in U_x \subset [0,1]$.

$x \neq 0 \Rightarrow x \in \underset{\mathcal{N}_x}{\underset{\cap}{\{x\}}} \subset [0,1] \Rightarrow x \in \operatorname{int}([0,1])$

Si $x = 0$, no existe ningún entorno de 0 contenido en $[0,1]$

Si existe $V \in \mathcal{N}_0$ tal que $0 \in V \subset [0,1]$, entonces $\exists\, U \in T$ tal que

$$0 \in U \subset V \subset [0,1] \Rightarrow 0 \in (-1,1) \subset U \subset V \subset [0,1]$$

$$\Rightarrow 0 \notin \operatorname{int}([0,1])$$

$$\operatorname{int}([0,1]) = (0,1].$$

$$\partial([0,1]) = \overline{[0,1]} \setminus \operatorname{int}([0,1]) = [0,1] \setminus (0,1] = \{0\}.$$