4/11/2020

Ejemplos. 1. $f:(X,T)\to(Y,T')$ es continua siempre si $T'=$ top. trivial

$f:(X,T)\to(Y,T')$ es continua siempre si $T=$ top. discreta

2. $Id:(X,T)\to(X,T')$ continua $\Leftrightarrow T'\subset T$ $\qquad Id^{-1}(U')=U'$

Propiedad: sean (X_1,T_1), (X_2,T_2), (X_3,T_3) y $f:X_1\to X_2$, $g:X_2\to X_3$ aplicaciones. Sea $x\in X_1$. Entonces:

1. Si f es continua en x y g es continua en $f(x)$, entonces $g\circ f$ es continua en x
2. Si f,g son continuas, entonces $g\circ f$ es continua.

Dem: 1. Sea $W\in N_{(g\circ f)(x)}$ entorno de $(g\circ f)(x)$ en (X_3,T_3)

Como g es continua en $f(x)$ y $g(f(x))=(g\circ f)(x)$, existe $V\in N_{f(x)}$ entorno de $f(x)$ en (X_2,T_2) tal que $g(V)\subset W$.
Como f es continua en $x\in X_1$, dado $V\in N_{f(x)}$, existe $U\in N_x$ entorno de x en (X_1,T_1) tal que $f(U)\subset V$.
Entonces

$$(g\circ f)(U)=g(f(U))\subset g(V)\subset W$$

y $(g\circ f)$ es continua en x.

2. Se sigue a partir de 1. porque una aplicación es continua si y sólo si es continua en cada punto.
Otra demostración. Sea $U_3\in T_3$. Entonces

$$(g\circ f)^{-1}(U_3)=f^{-1}(g^{-1}(U_3))$$

Como g es continua, $g^{-1}(U_3) \in T_2$. Como f es continua, $f^{-1}(g^{-1}(U_3)) \in T_1 \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U_3) \in T_1$. ■

Ejemplos: 1. Sea $f: (X,T) \to (Y,T')$ una aplicación constante: existe $y_0 \in Y$ tal que $f(x) = y_0$ $\forall x \in X$. ($f(X) = \{y_0\}$). Entonces f es continua.

Sea $U' \in T'$

$$f^{-1}(U') = \begin{cases} X, & \text{si } y_0 \in U' \\ \phi, & \text{si } y_0 \notin U' \end{cases}$$

$\phi, X \in T \Rightarrow f$ es continua

3. (X,T) e.top. $A \subset X$ no vacío. $T_A = \{U \cap A : U \in T\}$ top. inducida en A por T. Sea $i_A : A \to X$ la aplicación inclusión ($i_A(a) = a$ $\forall a \in A$). Entonces $i_A : (A, T_A) \to (X,T)$ es continua: tomamos $U \in T$

$$i_A^{-1}(U) = \{a \in A : a \in U\} = U \cap A \in T_A \leftarrow$$

4. Sea $f: (X,T) \to (Y,T')$ continua, $A \subset X$, $A \neq \phi$. La restricción de f al subconjunto A es la aplicación $f|_A : A \to Y$ definida por $f|_A(a) = f(a)$ $\forall a \in A$. Entonces $f|_A : (A, T_A) \to (Y, T')$ es continua

La demostración consiste en probar que $f|_A = f \circ i_A$ ($\forall a \in A$ $f|_A(a) = f(a) = f(i_A(a)) = (f \circ i_A)(a)$). Entonces $f|_A$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas.

5. Sean (X,T), (Y,T') esp. top. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de abiertos de X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ (recubrimiento abierto de X). Sea

$f: X \to Y$ una aplicación. Entonces f es continua si y sólo si $f|_{U_\alpha}$ es continua. $\left(f|_{U_\alpha} : (U_\alpha, T_{U_\alpha}) \to (Y, T') \right)$. Se sigue del ejemplo 4 que si f es continua, entonces $f|_{U_\alpha}$ es continua. Supongamos ahora que $f|_{U_\alpha}$ es continua $\forall \alpha \in I$. Sea $V \in T'$. Como $f|_{U_\alpha}$ es continua, tenemos que $f|_{U_\alpha}^{-1}(V) \in T_{U_\alpha}$. Existe entonces $V_\alpha \in T$ tal que

$$f|_{U_\alpha}^{-1}(V) = V_\alpha \cap U_\alpha$$

Como $U_\alpha \in T$, $V_\alpha \in T \Rightarrow V_\alpha \cap U_\alpha \in T \Rightarrow f|_{U_\alpha}^{-1}(V) \in T \quad \forall \alpha \in I$.
Por otra parte:

$$f|_{U_\alpha}^{-1}(V) = (f \circ i_{U_\alpha})^{-1}(V) = i_{U_\alpha}^{-1}\left(f^{-1}(V)\right) = f^{-1}(V) \cap U_\alpha$$

Entonces:

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} \left(f^{-1}(V) \cap U_\alpha \right)$$

$$= \bigcup_{\alpha \in I} \underbrace{f|_{U_\alpha}^{-1}(V)}_{\subset T} \in T$$

Acabamos de probar que $\forall V \in T'$, $f^{-1}(V) \in T$. Por tanto f es continua.

¿Es cierto este resultado si los conjuntos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ son cerrados?
En principio la demostración que acabamos de hacer no sirve porque la unión arbitraria de cerrados no es un conjunto cerrado.

6. Sean (X, T), (Y, T') e.top. $f: X \to Y$ aplicación, $C_1, \dots, C_k$ familia finita de cerrados en X tales que $X = C_1 \cup \dots \cup C_k$. Entonces f es

continua si y sólo si f_{K_i} es continua $\forall i \in \{1, \dots, K\}$. (ejercicio)

Def: Sean (X,T), (Y,T') dos e.top., $f: X \to Y$ una aplicación:

1. Diremos que f es una aplicación abierta si $f(U) \in T'$ $\forall U \in T$.
2. Diremos que f es una aplicación cerrada si $f(C) \in C_{T'}$ $\forall C \in C_T$.

Def: Sean (X,T), (Y,T') son dos e.top. Una aplicación $f: X \to Y$ es un homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa f^{-1} es continua.

Si f es biyectiva, entonces $f^{-1}: (Y,T') \to (X,T)$ es una aplicación bien definida. f^{-1} es continua $\Leftrightarrow$ $\forall U \in T$, $(f^{-1})^{-1}(U) \in T'$ $\Leftrightarrow$ $\forall U \in T$, $f(U) \in T'$ $\Leftrightarrow$ f es abierta.

$$(f^{-1})^{-1}(U) = \{y \in T : f^{-1}(y) \in U\} = \{y \in T : y \in f(U)\} = f(U)$$

Si f es biyectiva, f^{-1} es continua $\Leftrightarrow$ f es abierta.

Nota: f es homeomorfismo si f es biyectiva, continua y abierta.

Def: Cuando existe un homeomorfismo $f: (X,T) \to (Y,T')$ diremos que (X,T) es homeomorfo a (Y,T') y lo indicaremos por $(X,T) \approx (Y,T')$

1. $(X,T) \approx (X,T)$ $\quad (Id: (X,T) \to (X,T))$
2. $(X,T) \approx (Y,T') \Rightarrow (Y,T') \approx (X,T)$ $\quad$ ($f: X \to Y$ hom. $\Rightarrow f^{-1}: Y \to X$ es homeomorfismo)
3. $(X,T) \approx (Y,T')$, $(Y,T') \approx (Z,T'') \Rightarrow (X,T) \approx (Z,T'')$ (Si $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ son homeomorfismos, entonces $g \circ f: X \to Z$ es homeom.).

$\Rightarrow$ $\approx$ es una relación de equivalencia.