29/10/2020

16 (X,T) e.top. $A,B\subset X$

(a) $A=\mathring{A} \iff A\in T$

$\Rightarrow$) Si $A=\mathring{A}$, sabemos que $\mathring{A}\in T \Rightarrow A=\mathring{A}\in T$

$\Leftarrow$) Si $A\in T$, todo punto de A es interior $\Rightarrow A=\mathring{A}$

(b) $\mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$. Sabemos que $\mathring{A}\in T$. Por a), $\mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$

(c) Si $A\subset B$, entonces $\mathring{A}\subset\mathring{B}$ (si $x\in\mathring{A}$, existe $U\in N_x$ tal que $U\subset A$. Como $A\subset B$, se tiene que $U\subset B \Rightarrow x\in\mathring{B}$)

$\mathring{A}$ es un conjunto abierto contenido en $A\subset B$. Como $\mathring{B}$ es el mayor conjunto abierto contenido en B, entonces $\mathring{A}\subset\mathring{B}$.

(d) $\text{int}(A\cap B)=\text{int}(A)\cap\text{int}(B)$

$\boxed{\supset}$ $\text{int}(A)\cap\text{int}(B)\subset A\cap B$. Como $\text{int}(A\cap B)$ es el mayor conjunto abierto contenido en $A\cap B$ y $\text{int}(A)\cap\text{int}(B)$ es abierto y está contenido en $A\cap B$, se tiene que:

$$\text{int}(A)\cap\text{int}(B)\subset\text{int}(A\cap B)$$

$\boxed{\subset}$ Sea $x\in\text{int}(A\cap B) \Rightarrow \exists\, U\in N_x$ tal que $U\subset A\cap B\subset A,B$

$\Rightarrow x\in\text{int}(A)$ y $x\in\text{int}(B) = x\in\text{int}(A)\cap\text{int}(B)$

(e) $\text{int}(A\cup B) \overset{?}{=} \text{int}(A)\cup\text{int}(B)$

$\boxed{\supset}$ $\text{int}(A)\cup\text{int}(B)$ es abierto contenido en $A\cup B \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{int}(A)\cup\text{int}(B)\subset\text{int}(A\cup B)$

$[\subset]$ $x \in int(A \cup B) \Rightarrow \exists U \in N_x$ tal que $U \subset A \cup B \not\Rightarrow U \subset A$ ó $U \subset B$

<u>Contraejemplo</u> $(\mathbb{R}, T_u)$ $A = (0,1)$ $B = [1,2)$

$A \cup B = (0,2) \in T_u \Rightarrow int(A \cup B) = (0,2)$

$int(A) = (0,1)$, $int(B) = (1,2) \Rightarrow int(A) \cup int(B) = (0,1) \cup (1,2)$

$= (0,2) \setminus \{1\}$

$int(A) \cup int(B) \not\supseteq int(A \cup B)$

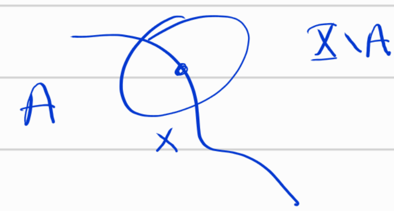
17. Grabación

18. (X, T) e. top $A, B \subset X$

(a) A abierto $\Leftrightarrow A \cap \partial A = \phi$.

$\Rightarrow$ Supongamos que existe $x \in A \cap \partial A$. Como $x \in \partial A$, esto significa que $\forall U \in N_x$, $U \cap A \neq \phi$, $U \cap (X \setminus A) \neq \phi$. La segunda propiedad implica que $U \not\subset A \Rightarrow x \notin int(A)$

Como $x \in A$, y hemos probado que $x \notin int(A)$, A no es abierto.



$\Leftarrow$ Supongamos que $A \cap \partial A = \phi$. Sabemos que $int(A)$, ∂A, $ext(A)$ son una partición de X

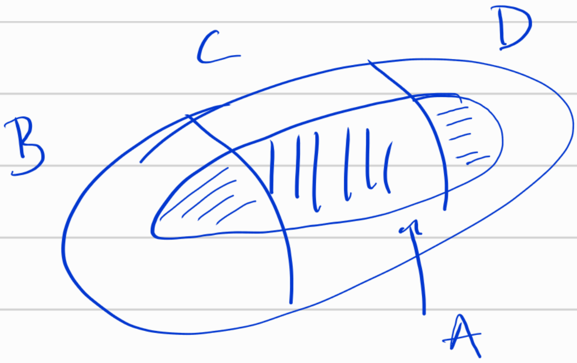
(*) $X = int(A) \cup \partial A \cup ext(A)$ $(ext(A) = X \setminus \bar{A})$

$\Rightarrow A = X \cap A = (A \cap int(A)) \cup (A \cap \partial A) \cup (A \cap ext(A))$

$= int(A) \cup \phi \cup \phi = int(A) \Rightarrow A \in T.$

ph

(*) se obtiene de $\bar{A} = int(A) \cup \partial A$.



$X = C \cup D \cup E$

$A = A \cap X = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (A \cap E)$

(b) A cerrado si y solo si $\partial A \subset A$

$\Rightarrow$ Si A es cerrado, $A = \bar{A} = int(A) \cup \partial A \supset \partial A$

$\Leftarrow$ Supongamos que $\partial A \subset A$, sabemos que $\bar{A} = int(A) \cup \partial A \subset A$ p.h.

Sabemos que siempre $A \subset \bar{A} \Rightarrow A = \bar{A}$ y A es cerrado.

(c) A es abierto y cerrado $\Leftrightarrow \partial A = \phi$

$\Rightarrow$ Sup que A es abierto y cerrado $\underset{(a),(b)}{\Rightarrow} A \cap \partial A = \phi$, $\partial A \subset A \Rightarrow \partial A = \phi$

$(\partial A \subset A \Rightarrow \partial A = \partial A \cap A = \phi)$

$\Leftarrow$ Si $\partial A = \phi$ sabemos que $X = int(A) \cup ext(A)$

$\Rightarrow A = X \cap A = (A \cap int(A)) \cup \underbrace{(A \cap ext(A))}_{= \phi} = int(A)$

$$\left.\begin{array}{l} A = int(A) \Rightarrow A \in T \\ X = A \cup ext(A) \Rightarrow X \setminus A = ext(A) \in T \Rightarrow A \in C_T. \end{array}\right\}$$

(d) $\partial(A\cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

Si $E \subset X$, $\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}$

$$\partial(A\cup B) = \overline{A\cup B} \setminus \operatorname{int}(A\cup B) = \overline{A}\cup\overline{B} \setminus \operatorname{int}(A\cup B) = (*)$$

$$\operatorname{int}(A\cup B) \supset \operatorname{int}(A)\cup \operatorname{int}(B)$$

$$= (\overline{A}\cup\overline{B}) \cap (X\setminus \operatorname{int}(A\cup B)) \subset (\overline{A}\cup\overline{B}) \cap (X\setminus(\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)))$$

$$= (\overline{A}\cup\overline{B}) \cap (X\setminus\operatorname{int}(A)) \cap (X\setminus\operatorname{int}(B)) =$$

$$= \left[\overline{A}\cap(X\setminus\operatorname{int}(A))\cap(X\setminus\operatorname{int}(B))\right] \cup \left[\overline{B}\cap(X\setminus\operatorname{int}(A))\cap(X\setminus\operatorname{int}(B))\right]$$

$$\subseteq \left[\overline{A}\cap(X\setminus\operatorname{int}(A))\right] \cup \left[\overline{B}\cap(X\setminus\operatorname{int}(B))\right]$$

$$= (\overline{A}\setminus\mathring{A}) \cup (\overline{B}\setminus\mathring{B}) = \partial A\cup\partial B.$$

Probar que no se da la igualdad en general

$A=(0,1)$, $B=[1,2)$ en $(\mathbb{R}, T_u)$

$A\cup B = (0,2)$ $\qquad \partial(A\cup B) = \{0,2\}$

$\partial A = \{0,1\}$, $\partial B = \{1,2\} \Rightarrow \partial A\cup\partial B = \{0,1,2\} \not\subset \partial(A\cup B)$

19. $\partial\mathring{A} \subset \partial A$. Dar ejemplos donde se de la igualdad y otros donde no se da.

$E \subset X \qquad \partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E} \qquad\qquad \mathring{A} \subset A \Rightarrow \bar{\mathring{A}} \subset \bar{A}$

$$\partial \mathring{A} = \bar{\mathring{A}} \setminus \mathring{\mathring{A}} \subset \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \partial A$$

$[0,1] \subset \mathbb{R}$ en $(\mathbb{R}, T_u)$ $\quad \mathring{[0,1]} = (0,1) \quad \partial((0,1)) = \partial([0,1]) = \{0,1\}$

$(0,1) \cup \{2\} \qquad \text{int}((0,1) \cup \{2\}) = (0,1)$

$$\text{int}\left(\overline{((0,1) \cup \{2\})}\right) = \{0,1\} \subset \{0,1,2\} = \partial((0,1) \cup \{2\})$$

¿Qué pasa con $\partial \bar{A}$? Ejercicio

20. $X \qquad \phi \neq A \neq X$

$$\mathcal{B} = \{ A \cup \{x\} : x \in X \}$$

$\mathcal{B}$ es base porque $A \in \mathcal{B}$ puesto que podemos escribir $A = A \cup \{a\}$ con $a \in A$.