7/10/2020

(X,T) espacio topológico. $\mathcal{B} \subset T$ es una base si todo $U \in T$ se puede expresar como unión de elementos.

$X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subset P(X)$

1. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B} \,/\, x \in B$
2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} \,/\, x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces

$$T = \{U \subset X \,/\, \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ con } x \in B \subset U\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología sobre X y $\mathcal{B}$ es base de T. Además T es única.

Ejemplos: 1. T_S en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_S = \{[x,y) : x,y \in \mathbb{R}, x<y\}$$

base de una top. T_S en $\mathbb{R}$ (topología de Sorgenfrey)

2. T_K

$$\mathcal{B}_K = \{\underline{(a,b)} : a<b, a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{\underline{(a,b) \setminus K} : a<b, a,b \in \mathbb{R}\}.$$

$K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

1. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in (x-1, x+1) \in \mathcal{B}_K$

2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_K$ $\quad B_1 = (a_1,b_1)$ ó $B_1 = (a_1,b_1)\setminus K$ $\quad a_1<b_1$

$B_2 = (a_2,b_2)$ ó $B_2 = (a_2,b_2)\setminus K$ $\quad a_2<b_2$

$B_1 = (a_1,b_1),\ B_2 = (a_2,b_2) \Rightarrow B_1 \cap B_2 = (\max(a_1,a_2), \min(b_1,b_2)) \in \mathcal{B}_K$

$B_1 = (a_1,b_1)\setminus K,\ B_2 = (a_2,b_2) \Rightarrow B_1 \cap B_2 = (\underbrace{\max(a_1,a_2), \min(b_1,b_2)}) \setminus K \in \mathcal{B}_K$

$B_1 = (a_1,b_1),\ B_2 = (a_2,b_2)\setminus K$ (igual que anterior)

$B_1 = (a_1,b_1)\setminus K,\ B_2 = (a_2,b_2)\setminus K \Rightarrow B_1 \cap B_2 = (\max(a_1,a_2), \min(b_1,b_2))\setminus K$

$\qquad\qquad \cap$

$\qquad\qquad \mathcal{B}_K$

$\mathcal{B}_K$ es base de una topología T_K sobre $\mathbb{R}$. (Topología de Kuratowski) $\square$

En $\mathbb{R}$ tenemos la topologia usual, generada por $d(x,y) = |x-y|$, una de cuyas bases es $\{\underline{B(x,r)} : x \in \mathbb{R},\ r>0\} = \{\underline{(x-r,x+r)} : x \in \mathbb{R},\ r>0\} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$.

$\underline{(a,b)} = \underline{B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)} \leftarrow$

En $\mathbb{R}$ también tenemos otras topologias T_S, T_K. Queremos comparar dichas topologías. Para ello debemos dar un criterio que nos permita la comparación usando bases.

<u>Propiedad</u>: sea $X \neq \phi$, y sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de las topologías T, T', resp. Entonces son equivalentes:

1. $T \subset T'$ (T' es más fina que T)
2. $\forall B \in \mathcal{B},\ \forall x \in B,\ \exists B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in \underline{B'} \subset \underline{B}$.

Dem: 1 $\Rightarrow$ 2. Sea $B \in \mathcal{B}$, sea $x \in B$. Queremos encontrar $B' \in \mathcal{B}' / x \in B' \subset B$.

$B \in \mathcal{B} \subset T \subset T' \Rightarrow B$ es abierto en T'. Como $\mathcal{B}'$ es base de $T' \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \bigcup_{i \in I} B'_i$, $B'_i \in \mathcal{B}'$. Si $x \in B = \bigcup_{i \in I} B'_i \Rightarrow \exists i_0 \in I / x \in B'_{i_0}$. Llamamos $B' = B'_{i_0}$

$$\underbrace{x \in B'}_{} = \underbrace{B'_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} B'_i}_{} = \underbrace{B}_{}.$$

2 $\Rightarrow$ 1. Veamos que $T \subset T'$. Sea $U \in T$, $U \neq \emptyset$. Tomamos $x \in U$

$U \in T$, $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i$, $B_i \in \mathcal{B}$. $x \in U \Rightarrow \exists i_0 \in I / x \in B_{i_0}$

Llamamos $B_x = B_{i_0}$. B_x tiene la propiedad $x \in B_x \subset U$. Hacemos esta construcción para todo $x \in U$. Aplicamos 2 a cada B_x y obtenemos $B'_x \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B'_x \subset B_x$

$$U \subset \bigcup_{x \in U} B'_x \subset \bigcup_{x \in U} B_x \subset U \Rightarrow \boxed{U = \bigcup_{x \in U} B'_x} = \bigcup_{x \in U} B_x = U.$$

$x \in U \Rightarrow x \in B'_x \subset \bigcup_{y \in U} B'_y$

cada $B_x \subset U$

$U = \bigcup_{x \in U} B'_x \in T' \Rightarrow U \in T'$ | $T \subset T'$

$\mathcal{B}' \subset T'$

Corolario: $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de dos topologías T, T' en X.
Son equivalentes

1. $T = T'$
2. a) $\forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \,/\, x \in B' \subset B$ $\quad (T \subset T')$

   b) $\forall B' \in \mathcal{B}', \forall x \in B', \exists B \in \mathcal{B} \,/\, x \in B \subset B'$ $\quad (T' \subset T)$

Dem: $2.a) \Leftrightarrow T \subset T'$; $2b \Leftrightarrow T' \subset T$ | $2a + 2b \Leftrightarrow T = T'$

Def: dos bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ en X son equivalentes si $T = T'$ (si son bases de la misma topología).

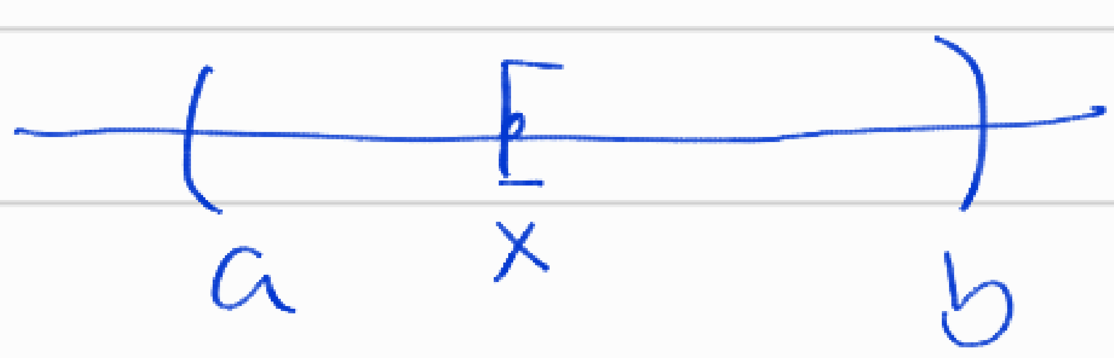
Ejemplo: comparación de T, T_S, T_K.

$\mathcal{B} = \{(a,b) : a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B}_K = \{[a,b) : a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$.

$T \subset T_S$

Sea $(a,b) \in \mathcal{B}$. Sea $x \in (a,b)$. Queremos ver que $\exists B_S \in \mathcal{B}_S$ tal que $x \in B_S \subset (a,b)$. Tomando $B_S = [x,b)$ tenemos que $x \in [x,b) \subset (a,b)$



¿$T_S \subset T$? $\forall B_S \in \mathcal{B}_S, \forall x \in B_S, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_S$.

Sea $B_S = [x, x+1)$, $x \in B_S$ ¿$\exists (a,b) \,/\, x \in (a,b) \subset [x, x+1)$?

$a<x$. Si tomamos $c\in\mathbb{R}$ / $a<c<x<b \Rightarrow c\in(a,b)$
$c\notin[x,x+1)$ porque $c<x$ (para que $c\in[x,x+1)$, c tiene que ser $\geq x$).

$c\in(a,b)$, $c\notin[x,x+1) \Rightarrow (a,b)\not\subset[x,x+1)$

La condición 2 no se da si tomamos $\mathcal{B}_S$, $\mathcal{B}$. Es decir $T_S\not\subset T$.

$$\left.\begin{array}{l} T\subset T_S \\ T_S\not\subset T \Rightarrow T_S\neq T \end{array}\right\} \quad T\subsetneq T_S$$

La topología T_S contiene a T pero es distinta de T. La topología es estrictamente más fina que T.

<u>Ejercicio</u>: $T\subsetneq T_K$