9/10/2020

$\mathcal{T}_S$ = top. Sorgenfrey $\quad \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_S \quad (\mathbb{R})$

$\mathcal{T}_K$: topología Kuratowski $\quad \mathcal{B}_K = \{(a,b) : a<b\} \cup \{(a,b)\setminus K : a<b\}$

$K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Comprobamos que $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_K$.

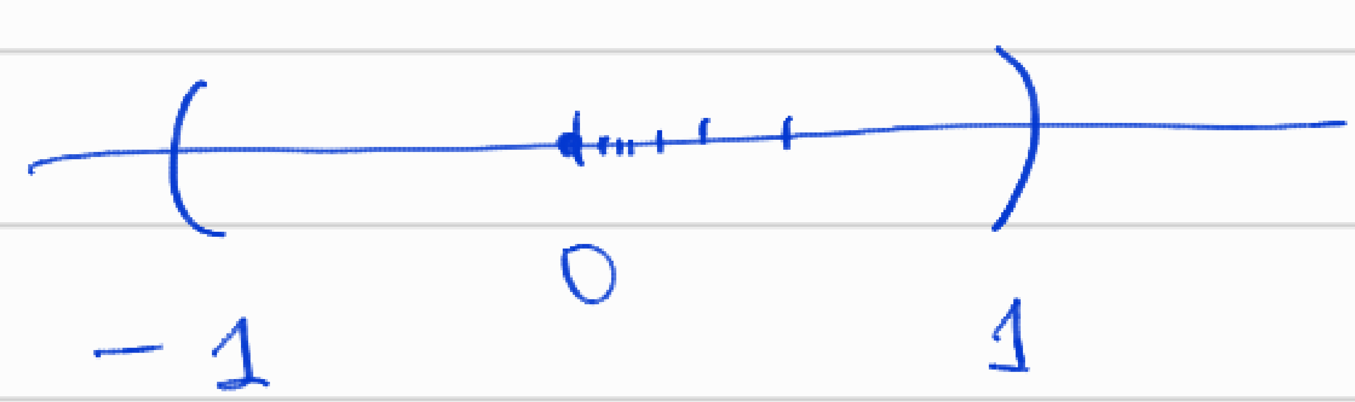
$\forall B \in \mathcal{B}$ (base de $\mathcal{T}$), $\forall x \in B$, $\exists B_K \in \mathcal{T}_K$ tal que $x \in B_K \subset B$.

En nuestro caso $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_K$: esto significa que dado $B \in \mathcal{B}$, $x \in B$, podemos tomar $B_K = B$ y $x \in B_K = B$. $\Rightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_K$.

$\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_K$ $\quad (\mathcal{T}_K \not\subset \mathcal{T})$. Aplicamos el criterio de las bases: $\mathcal{T}_K \subset \mathcal{T}$
$\Leftrightarrow \forall B_K \in \mathcal{B}_K, \forall x \in B_K, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_K$.

Para probar que $\mathcal{T}_K \not\subset \mathcal{T}$ hay que encontrar $B_K \in \mathcal{B}_K$, $x \in B_K$ tales que ningún $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ esté contenido en B_K.

$B_K = (-1,1)\setminus K$



$x = 0$

Si $(a,b) \in \mathcal{B}$ $\quad 0 \in (a,b) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < b \quad \forall n \geq n_0$

$\frac{1}{n} \in (a,b) \qquad (a,b) \not\subset (-1,1)\setminus K$

$\frac{1}{n} \qquad \not\ni 1/n$

Esto $T \not\subseteq T_K$.

$$\begin{array}{ccc} & & T_S \\ & \subset & \\ T & & \\ & \subset & \\ & & T_K \end{array}$$

Ejercicio: T_S y T_K no son comparables (ninguna de ellas está contenida en la otra)

Problema: $X \neq \phi$. sea $S \subset P(X)$ (S es una familia de subconjuntos de X)

¿Hay una topología que contiene a S? Sí, $S \subset T_D = P(X)$

¿De entre todas las topologías que contienen a S, hay alguna que sea la más fina? Sí. Vamos a probarlo.

Def: sea X un conjunto no vacío, $\{T_j\}_{j\in J}$ una familia de topologías en X. Definimos

$$\bigcap_{j\in J} T_j = \{U \subset X : \underline{U \in T_j}\ \underline{\forall j \in J}\} \subset P(X).$$

Entonces $\bigcap_{j\in J} T_j$ es una topología en X.

Dem: 1. $\phi, X \in T_j\ \forall j \in J$ (T_j topología) $\Rightarrow \phi, X \in \bigcap_{j\in J} T_j$

2. $\underbrace{\{U_i\}_{i\in I} \subset \bigcap_{j\in J} T_j}_{} \Rightarrow U_i \in \bigcap_{j\in J} T_j \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow \underbrace{U_i \in T_j}\ \underbrace{\forall i \in I}, \forall j \in J$. Fijando j, como T_j es topología,

$\bigcup_{i \in I} U_i \in T_j \ \forall j \in J \Rightarrow \underbrace{\bigcup_{i \in I} U_i \in \bigcap_{j \in J} T_j}$

3. $U_1, \dots, U_k \in \bigcap_{j \in J} T_j \Rightarrow U_i \in T_j \ \forall i = 1, \dots, k \ \forall j \in J$

Fijando j, como T_j es topología, se tiene que $U_1 \cap \dots \cap U_k \in T_j \ \forall j \in J$.

$\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in \bigcap_{j \in J} T_j$ $\square$

<u>Propiedad</u>: sea $X \neq \emptyset$, y sea $S \subset P(X)$ una familia de subconjuntos de X. Existe entonces una topología $T(S)$ que verifica:

→ 1. $S \subset T(S)$

2. Si existe otra topología T' tal que $S \subset T'$, entonces $T(S) \subset T'$

La afirmación 2 dice que $T(S)$ es la topología más gruesa que contiene a S.

<u>Def</u>: $T(S)$ es la topología generada por S.

<u>Dem</u> (propiedad)

$\mathcal{J} = \{ T \subset P(X) : T \text{ es topología y } \underline{\underline{S \subset T}} \} \neq \emptyset$ $\quad T_D \in \mathcal{J}$.

$T(S) = \bigcap_{T \in \mathcal{J}} T$. $T(S)$ es una topología en X

$T \in \mathcal{J} \Rightarrow S \subset T \Rightarrow S \subset \bigcap_{T \in \mathcal{J}} T = T(S)$. Esto demuestra 1.

Para probar 2, tomamos T' topología tal que $S \subset T' \Rightarrow T' \in \mathcal{J}$

$$T(S) = \bigcap_{T \in \mathcal{J}} T \underset{\substack{\uparrow \\ T' \in \mathcal{J}}}{\subset} T'$$

$\square$

Ejemplo: $A \subset X$, $S = \{A\}$ $\qquad T(S) = \{\emptyset, A, X\}$ ←

Ejemplo: sean T_1, T_2 dos topologías en X. Definimos

$$T_1 \cup T_2 = \{U \subset X : U \in T_1 \text{ ó } U \in T_2\} \supset T_1, T_2$$

$T_1 \cup T_2$ no es una topología en general. $X = \{a, b, c\}$

$T_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ $\quad T_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ son topologías

$T_1 \cup T_2$ no es topología: $\{a\} \in T_1 \cup T_2$, $\{b\} \in T_1 \cup T_2$, pero $\{a\} \cup \{b\} \notin T_1 \cup T_2$

$$T_1 \cup T_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$$

Sin embargo, $T_1 \cup T_2 \subset P(X)$. Podemos calcular la topología generada por $T_1 \cup T_2$, $T(T_1 \cup T_2)$.

Def: a $T(T_1 \cup T_2)$ la llamaremos la topología generada por T_1 y T_2.
(es la topología más gruesa que contiene a T_1 y a T_2)

Def: Sea (X, T) un espacio topológico, $S \subset P(X)$. Diremos que S es una subbase de T si la familia

$$\left\{ \bigcap_{i \in I} S_i : I \text{ finito} \right\}$$

es una base de T

(Todo abierto $U \in T$ es unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos de S)

Propiedad: Sea X un conjunto, $S \subset P(X)$ tal que $\displaystyle\bigcup_{V \in S} V = X$.

Entonces S es una subbase de $T(S)$.

Dem: Sea $\mathcal{B}(S) = \left\{ \bigcap_{i \in I} S_i ; S_i \in S, I \text{ finito} \right\}$.

Veamos que $\mathcal{B}(S)$ es base de una topología T. Tenemos que comprobar que:

1. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}(S) \,/\, x \in B$

2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(S), x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}(S) \,/\, x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

1. Si $A \in S \Rightarrow A \in \mathcal{B}(S)$ | $S \subset \mathcal{B}(S)$ $\displaystyle\bigcup_{A \in S} A = X$

Si $x \in X$, $\exists A \in S \subset \mathcal{B}(S) \,/\, x \in A$

2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(S)$ $B_1 = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_K}$ $A_{i_j} \in S$ $j = 1, \dots, K$

$B_2 = A_{i_{k+1}} \cap \dots \cap A_{i_{k+r}} \quad A_{i_{k+s}} \underset{S}{\cap} \quad s = 1, \dots, r$

$x \in B_1 \cap B_2 = \underbrace{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}} \cap \dots \cap A_{i_{k+r}}}_{\text{intersección finita de elementos de } S} \in \mathcal{B}(S)$

T es una topología de base $\mathcal{B}(S) \Rightarrow S \subset \mathcal{B}(S) \subset T$

$\Rightarrow T(S) \subset T$

El próximo día veremos $T \subset T(S)$.