19/11/2020

26. Recta diseminada. $\mathbb{R}$

$$T = \{A \cup B : A \in T_u,\ B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

B está formado por números irracionales.

$T_u \subset T$. Además, si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, entonces $\{x\} \in T$.

(a) fácil

(b) $[a,b]$ y $[c,d)$ $d \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ son cerrados en $(\mathbb{R}, T)$.

$$\mathbb{R}\setminus[a,b] = \underbrace{(-\infty,a)}_{\in T_u \subset T} \cup \underbrace{(b,+\infty)}_{\in T_u \subset T} \in T. \Rightarrow [a,b] \in C_T$$

$$\mathbb{R}\setminus[c,d) = (-\infty,c) \cup [d,+\infty) = \Big(\underbrace{(-\infty,c)}_{\in T_u \subset T} \cup \overbrace{\underbrace{\{d\}}_{\subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}^{T}\Big) \cup \underbrace{(d,+\infty)}_{\in T_u \subset T} \in T$$

$\Rightarrow [c,d) \in C_T.$

(c) Calcular interior, clausura y frontera de $[0,1]$ y $[0,\sqrt{2})$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{[0,1]} = [0,1] \\ \overline{[0,\sqrt{2})} = [0,\sqrt{2})\end{array}\right\} \text{ ambos son cerrados por (b).}$$

- $\mathrm{int}([0,1])$

⊛ $0 \notin \mathrm{int}([0,1])$. Si $U \in \underline{\underline{N_0}}$, existe $V \in T$ tal que $0 \in V \subset U$

$V = A \cup B$, con $A \in T_u$, $B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si $0 \in V = A \cup B \Rightarrow 0 \in A$.

$\Rightarrow 0 \in A \subset V \subset U$

Si $U \subset [0,1] \Rightarrow$ $0 \in \underset{\underset{T_u}{\cap}}{A} \subset U \subset [0,1] \Rightarrow 0$ sería punto interior de $[0,1]$ en $(\mathbb{R}, T_u)$

⊛ $1 \notin \operatorname{int}([0,1])$ por los mismos argumentos.

⊛ $0 < x < 1$, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\underset{\underset{T_u \subset T}{\cap}}{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)} \subset [0,1]$

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in N_x \Rightarrow x \in \operatorname{int}([0,1])$.

$\operatorname{int}([0,1]) = (0,1)$.

$\partial[0,1] = \overline{[0,1]} \setminus \operatorname{int}([0,1]) = [0,1] \setminus (0,1) = \{0,1\}$.

- $\operatorname{int}([0,\sqrt{2}))$.

⊛ $0 \notin \operatorname{int}([0,\sqrt{2}))$ por las mismas razones que antes

⊛ Si $0 < x < \sqrt{2}$, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\underset{\underset{N_x}{\cap}}{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)} \subset [0,\sqrt{2})$

$\Rightarrow x \in \operatorname{int}([0,\sqrt{2}))$

$\operatorname{int}([0,\sqrt{2})) = (0,\sqrt{2})$

$\overline{[0,\sqrt{2})} = [0,\sqrt{2}]$

$\partial [0,\sqrt{2}) = [0,\sqrt{2}] \setminus (0,\sqrt{2}) = \{0\}$.

(d) Calculamos base de entornos de x en $(\mathbb{R},T)$.

- Si $x\in\mathbb{Q}$. Sea $U\in N_x$; existe $V\in T$ tal que $x\in V\subset U$
$V=A\cup B$ con $A\in T_u$, $B\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $x\in A$. Entonces

$$x\in A\subset V\subset U$$

Cualquier base de entornos de x en $(\mathbb{R},T_u)$ es base de entornos de x en $(\mathbb{R},T)$. P.e. $\{\underline{(x-r,x+r)}: r>0\}$. Como $A\in T_u$, $x\in A$, $\exists r>0$ tal que

$$(x-r,x+r)\subset A\subset U$$

$\{(x-r,x+r): r>0\}$ son entornos de x en $(\mathbb{R},T)$ (son abiertos que contienen a x.

- Si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, entonces $\{x\}\in T$. Entonces $\mathcal{B}_x=\{\{x\}\}$ es base de entornos de x: si $U\in N_x$, entonces $x\in U\Rightarrow x\in\{x\}\subset U$

(e) Obtener $\overline{\{x\}}$, $\operatorname{int}(\{x\})$, $\partial(\{x\})$ para $x\in\mathbb{R}$.

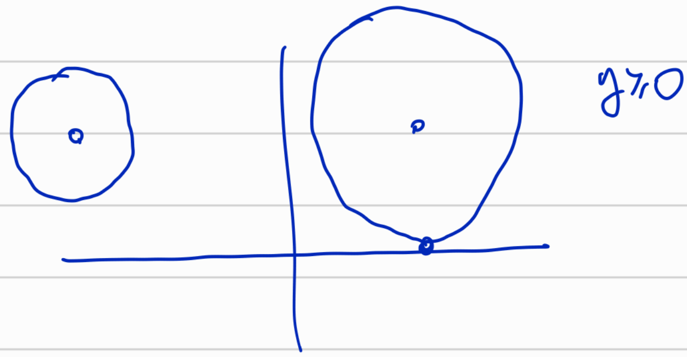
$\overline{\{x\}}$ · Si $x\in\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R}\setminus\{x\}=(-\infty,x)\cup(x,+\infty)\in T_u\subset T\Rightarrow\{x\}\in C_T$

$\operatorname{int}(\{x\})$ $\begin{cases}\text{Si } x\in\mathbb{Q}, \text{ entonces } \operatorname{int}(\{x\})=\emptyset \text{ (ningún elemento de la base de entornos } \{(x-r,x+r): r>0\} \text{ está contenido en } \{x\}.) \\ \text{Si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ entonces } \operatorname{int}(\{x\})=\{x\}. \text{ (}\{x\}\text{ abierto)}\end{cases}$

$$\partial(\{x\})=\overline{\{x\}}\setminus\operatorname{int}(\{x\})=\begin{cases}\{x\}\setminus\emptyset=\{x\}, & \text{si } x\in\mathbb{Q},\\ \{x\}\setminus\{x\}=\emptyset, & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

27. Grabación

28. Semiplano Moore definido en ejercicio 12.



$\underline{B_x} = B((x,y),y) \cup \{(x,0)\} \in \mathcal{B} \subset \underline{T}.$

$L = \{y=0\}.$ $\quad \underline{L} \cap \underline{B_x} = \{(x,0)\} \Rightarrow \{(x,0)\} \in T_L.$ (top. inducida)

(L, T_L) es un espacio discreto porque todo conjunto $\{(x,0)\}$ con $(x,0) \in L$ pertenece a T_L.

29. T_1, T_2 top. en X tales que $T_1 \subset T_2$

- $\text{int}_{T_1}(A) \subset \text{int}_{T_2}(A)$
- $\overline{A}^{T_1} \supset \overline{A}^{T_2}$

$\overline{A}^{T_1}$ = menor conjunto cerrado en T_1 que contiene a A.

$T_1 \subset T_2 \Rightarrow C_{T_1} \subset C_{T_2}$

$$\underset{\substack{\cap \\ C_{T_2}}}{\overline{A}^{T_1}} \supset A \Rightarrow \underbrace{\overline{A}^{T_1}} \supset \underbrace{\overline{A}^{T_2}} \supset A$$

En general no se de la igualdad: $X = \mathbb{R}$, $T_1 = T_u$, $T_2 = T_D$

$$A = [0,1] \qquad int_{T_1}(A) = (0,1) \subsetneq int_{T_2}(A) = [0,1].$$

Sea ahora $X = \mathbb{R}$, $T_1 = T_t$, $T_2 = T_u$

$$A = [0,1] \qquad \overline{A}^{T_1} = \mathbb{R} \supsetneq [0,1] = \overline{A}^{T_2}$$

30. (X,T) admite un subconjunto denso no trivial si y solo si T no es la topología discreta. (no trivial significa distinto de X)

$A \subset X$ es denso si $\overline{A} = X$.

Supongamos que existe $A \subset X$ tal que $\overline{A} = X$ y $A \neq X$. Entonces $T \neq T_D$ porque si $T = T_D$ entonces $\overline{A} = A \neq X$.
Supongamos ahora que $T \neq T_D$. Entonces existe $x \in X$ tal que $\{x\} \notin T$. (Si todo $\{x\} \in T_D$ entonces $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \in T \Rightarrow T = T_D$)
Tomamos $A = X \setminus \{x\}$. Entonces A no es cerrado. Por tanto $A \subset \overline{A}$ pero $\overline{A} \neq A$. Como $A = X \setminus \{x\}$, el único subconjunto de X que contiene a A y es distinto de A es X. Por tanto $\overline{A} = X$
Es decir, A es denso. $\blacksquare$

31, 32 Grabaciones.

33. (X,T) AN-II. Sea $\mathcal{B}$ base numerable. Si $x \in X$, entonces

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

es base de entornos de x y es numerable. Por tanto, (X,T) es AN-I

Si $(\mathbb{R}, T_D)$ $\mathbb{R}$ es AN-I $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$, pero no es AN-II porque si $\mathcal{B}$ es base, entonces $\{x\} \in \mathcal{B}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{B}$ no sería numerable

34. $(\mathbb{R}, T_S)$ no es AN-II.