11/12/2020

Ayer vimos: $(\mathbb{X},T)$ compacto, $A\subset\mathbb{X}$ cerrado $\Rightarrow$ A compacto
$(\mathbb{X},T)$ Hausdorff, $A\subset\mathbb{X}$ compacto $\Rightarrow$ A cerrado

<u>Corolario</u>: sea $(\mathbb{X},d)$ un espacio métrico, $A\subset\mathbb{X}$ un subconjunto compacto. Entonces A es cerrado y acotado.

<u>Def</u>: si $(\mathbb{X},d)$ es un espacio métrico, diremos que $A\subset\mathbb{X}$ es acotado si A está contenido en una bola (abierta o cerrada).

<u>Dem</u> (corolario). Sabemos que $(\mathbb{X},T_d)$ es Hausdorff. Por tanto A es cerrado (por ser A compacto). Fijamos $x_0\in\mathbb{X}$ y consideramos

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_0,n) = \mathbb{X}$$

$\{B(x_0,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento de A por abiertos de $(\mathbb{X},T)$.

Por ser A compacto, existen $n_1,\dots,n_k$ tales que $A\subset\bigcup_{j=1}^{k} B(x_0,n_j)$

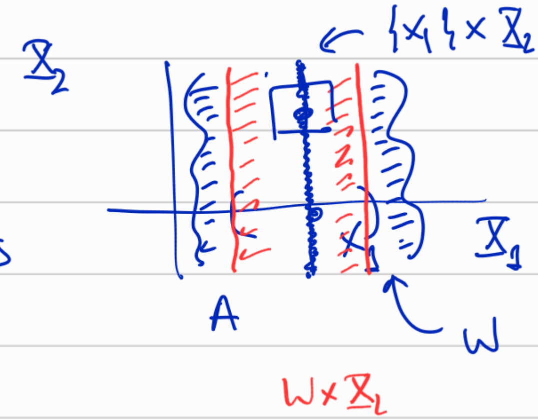
Si $n:=\max\{n_1,\dots,n_k\}$, entonces $A\subset B(x_0,n)$ y A es acotado. $\blacksquare$

<u>Teorema</u> (Tijonov). Sean $(\mathbb{X}_1,T_1),\dots,(\mathbb{X}_k,T_k)$ espacios topológicos. Entonces $(\mathbb{X}_1\times\dots\times\mathbb{X}_k, T_1\times\dots\times T_k)$ es compacto si y sólo si $(\mathbb{X}_i,T_i)$ es compacto para todo $i\in\{1,\dots,k\}$.

La demostración utiliza el siguiente resultado.

<u>Lema</u> (del tubo): sean $(\mathbb{X}_1,T_1)$, $(\mathbb{X}_2,T_2)$ e. topológicos, $(\mathbb{X}_2,T_2)$ compacto.

Sea $x_1 \in X_1$. Sea $A \in T_1 \times T_2$ tal que $\{x_1\} \times X_2 \subset A$. Entonces existe $W \in T_1$ tal que $\{x_1\} \times X_2 \subset W \times X_2 \subset A$



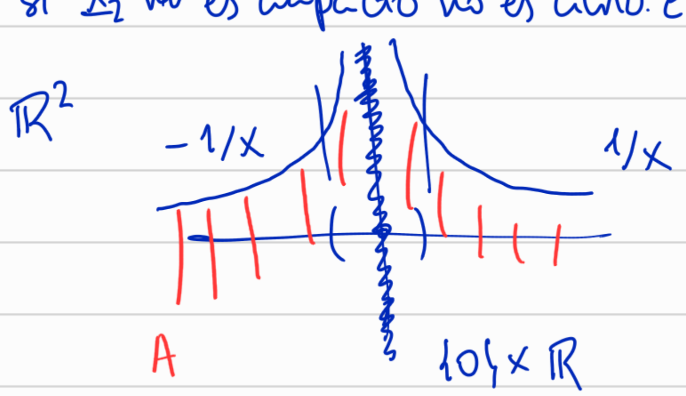
<u>Dem</u>: para todo $x_2 \in X_2$, se tiene que $(x_1, x_2) \in \{x_1\} \times X_2 \subset A \in T_1 \times T_2$.
Podemos encontrar $U_{x_2} \in T_1$, $V_{x_2} \in T_2$ tales que $(x_1, x_2) \in U_{x_2} \times V_{x_2} \subset A$.
($\{U \times V : U \in T_1, V \in T_2, (x_1,x_2) \in U \times V\}$ es base de entornos de (x_1, x_2))

$\{V_{x_2}\}_{x_2 \in X_2}$ es un recubrimiento abierto de X_2. Como X_2 es compacto, extraemos un subrecubrimiento finito: existe $M \subset X_2$ finito tal que $X_2 \subset \bigcup_{x_2 \in M} V_{x_2}$. Definimos $W = \bigcap_{x_2 \in M} U_{x_2}$ $(W \subset U_{x_2}\ \forall x_2 \in M)$

$$W \times X_2 \subset W \times \left(\bigcup_{x_2 \in M} V_{x_2}\right) = \bigcup_{x_2 \in M} (W \times V_{x_2}) \subset \bigcup_{x_2 \in M} (U_{x_2} \times V_{x_2}) \subset A$$

Como $x_1 \in W = \bigcap_{x_2 \in M} U_{x_2}$ $(x \in U_{x_2}\ \forall x_2)$, entonces $\{x_1\} \times X_2 \subset W \times X_2 \subset A$. ☒

<u>Nota</u>: si X_2 no es compacto no es cierto el lema.



$$A = \begin{cases} x = 0, \text{ ó} \\ y < \frac{1}{x} \quad x > 0, \text{ ó} \\ y < -\frac{1}{x} \quad x < 0 \end{cases}$$

No existe W abto que contiene a 0 tal que $W \times \mathbb{R} \subset A$

<u>Dem</u> (Teorema Tijonov) Si $(\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es compacto, entonces $\mathbb{X}_i = \pi_i(\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k)$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Por tanto, $\mathbb{X}_i$ es la imagen del espacio compacto $(\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ por la aplicación continua $\pi_i : (\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k, T_1 \times \dots \times T_k) \to (\mathbb{X}_i, T_i)$. Entonces $(\mathbb{X}_i, T_i)$ es compacto.

Supongamos ahora que $(\mathbb{X}_i, T_i)$ es compacto para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Veamos que $(\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es compacto por inducción sobre k.

$k=2$ Veamos que $(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2, T_1 \times T_2)$ es compacto. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto de $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$. Para cada punto $x_1 \in \mathbb{X}_1$ sabemos que $\mathbb{X}_2$ es homeomorfo a $\{x_1\} \times \mathbb{X}_2$. Entonces $\{x_1\} \times \mathbb{X}_2$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$. Como $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de $\{x_1\} \times \mathbb{X}_2$, existe $J(x_1) \subset I$ finito tal que

$$\{x_1\} \times \mathbb{X}_2 \subset \bigcup_{j \in J(x_1)} U_j$$

Utilizamos ahora el lema del tubo para cada punto $x_1 \in \mathbb{X}_1$. Como

$$\{x_1\} \times \mathbb{X}_2 \subset \bigcup_{j \in J(x_1)} U_j \in T_1 \times T_2,$$

A en el lema del tubo.

usando el lema existe $W_{x_1} \in T_1$ tal que

$$\{x_1\} \times \mathbb{X}_2 \subset W_{x_1} \times \mathbb{X}_2 \subset \bigcup_{j \in J(x_1)} U_j. \qquad (*)$$

Tenemos entonces que $\{W_{x_1}\}_{x_1\in X_1}$ es un recubrimiento abierto de X_1 ($x_1 \in W_{x_1}$ $\forall x_1 \in X_1$). Como X_1 es compacto, existe $M \subset X_1$ finito tal que

$$X_1 \subset \bigcup_{x_1\in M} W_{x_1}.$$

Entonces

$$X_1 \times X_2 \subset \left(\bigcup_{x_1\in M} W_{x_1}\right) \times X_2 = \bigcup_{x_1 \in M} \left(W_{x_1} \times X_2\right)$$

$$\overset{(*)}{\subset} \bigcup_{x_1\in M}\left(\bigcup_{j\in J(x_1)} U_j\right) = \bigcup_{j\in J} U_j$$

$J = \{j \in I : j \in J(x_1), x_1 \in M\}$ es finito. (M finito y $J(x_1)$ es finito para todo $x_1 \in M$) $\quad \# J = \sum_{x_1\in M} \# J(x_1)$.

Hemos probado que, de todo recubrimiento abierto de $X_1 \times X_2$, hemos extraído un subrecubrimiento finito. Por tanto, $(X_1\times X_2, T_1 \times T_2)$ es compacto.

Supongamos ahora que $(X_1 \times \dots \times X_{k-1}, T_1 \times \dots \times T_{k-1})$ es compacto.

Veamos que $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es compacto. Sabemos que $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k) \cong ((X_1 \times \dots \times X_{k-1}) \times X_k, (T_1 \times \dots \times T_{k-1}) \times T_k)$ (El homeomorfismo es $(x_1, \dots, x_k) \to ((x_1, \dots, x_{k-1}), x_k)$). Por hipótesis de inducción, $(X_1 \times \dots \times X_{k-1}, T_1 \times \dots \times T_{k-1})$ es compacto. Por tanto

$$((X_1 \times \dots \times X_{k-1}) \times X_k, (T_1 \times \dots \times T_{k-1}) \times T_k)$$

es compacto. Como $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es homeomorfo al espacio anterior, es también compacto. $\blacksquare$