18/11/20

$\mathcal{B}_i$ base de (X_i, T_i) $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_k$ es base de $T_1 \times \dots \times T_k$.

<u>Proposición</u>: $(X_1 \times \dots \times X_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es AN-II si y sólo si (X_i, T_i) es AN-II $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.

<u>Dem</u>: Supongamos que (X_i, T_i) es AN-II $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Existe una base numerable $\mathcal{B}_i$ de T_i $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_k$ es base de $T_1 \times \dots \times T_k$ y es numerable porque es un producto finito de conjuntos numerables. Entonces $X_1 \times \dots \times X_k$ es AN-II.

Supongamos ahora que $X_1 \times \dots \times X_k$ es AN-II. Sea $\mathcal{B}_N$ una base numerable de la topología producto $T_1 \times \dots \times T_k$. Queremos ver que cada (X_i, T_i) admite una base numerable. Fijamos $i_0 \in \{1, \dots, k\}$. Sea

$$\mathcal{B}_{i_0} = \pi_{i_0}(\mathcal{B}_N) = \{ \pi_{i_0}(B) : B \in \mathcal{B}_N \}$$

$\mathcal{B}_{i_0}$ es una familia numerable. Sabemos que π_{i_0} es una aplicación abierta. Por tanto, $\mathcal{B}_{i_0} \subset T_{i_0}$. Sea ahora $U \in T_{i_0}$. Entonces

$$X_1 \times \dots \times \underset{(i_0)}{U} \times \dots \times X_k \in T_1 \times \dots \times T_k$$

Como $\mathcal{B}_N$ es base de $T_1 \times \dots \times T_k$,

$$X_1 \times \dots \times \underset{(i_0)}{U} \times \dots \times X_k = \bigcup_{i \in I} B_i \quad , \qquad B_i \in \mathcal{B}_N.$$

Entonces

$$U = \pi_{i_0}(X_1 \times \dots \times U \times \dots \times X_k) = \pi_{i_0}\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \pi_{i_0}(B_i)$$

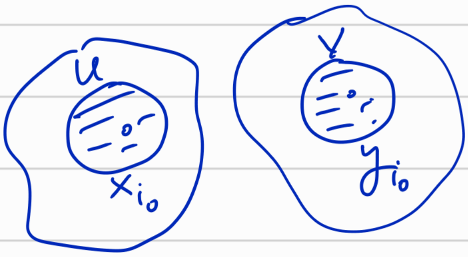
y se tiene que U es unión de elementos de $\mathcal{B}_{i_0}$. ∎

Ejercicio: 1. Si $x=(x_1,\dots,x_k)\in \mathbb{X}_1\times\dots\times \mathbb{X}_k$ y $\mathcal{B}_{x_1},\dots,\mathcal{B}_{x_k}$ son bases de entornos de $x_1,\dots,x_k$ en $(\mathbb{X}_1,T_1),\dots,(\mathbb{X}_k,T_k)$, resp. Entonces $\mathcal{B}_{x_1}\times\dots\times\mathcal{B}_{x_k}$ es base de entornos de x en $(\mathbb{X}_1\times\dots\times \mathbb{X}_k,\ T_1\times\dots\times T_k)$

2. Si $(\mathbb{X}_i,T_i)$ es AN-I $\forall i\in\{1,\dots,k\}$ entonces $(\mathbb{X}_1\times\dots\times\mathbb{X}_k, T_1\times\dots\times T_k)$ es AN-I.

Proposición: $(\mathbb{X}_i,T_i)$ es Hausdorff $\forall i\in\{1,\dots,k\}$ si y solo si $(\mathbb{X}_1\times\dots\times\mathbb{X}_k,$ $T_1\times\dots\times T_k)$ es Hausdorff.

Dem: supongamos que $(\mathbb{X}_i,T_i)$ es Hausdorff $\forall i\in\{1,\dots,k\}$. Sean $x=(x_1,\dots,x_k)$ $y=(y_1,\dots,y_k)$ puntos distintos. Esto significa que existe $i_0\in\{1,\dots,k\}$ tal que $x_{i_0}\neq y_{i_0}$. Como $(\mathbb{X}_{i_0},T_{i_0})$ es Hausdorff, existen $U,V\in T_{i_0}$ tales que $x_{i_0}\in U$, $y_{i_0}\in V$ y $U\cap V=\emptyset$



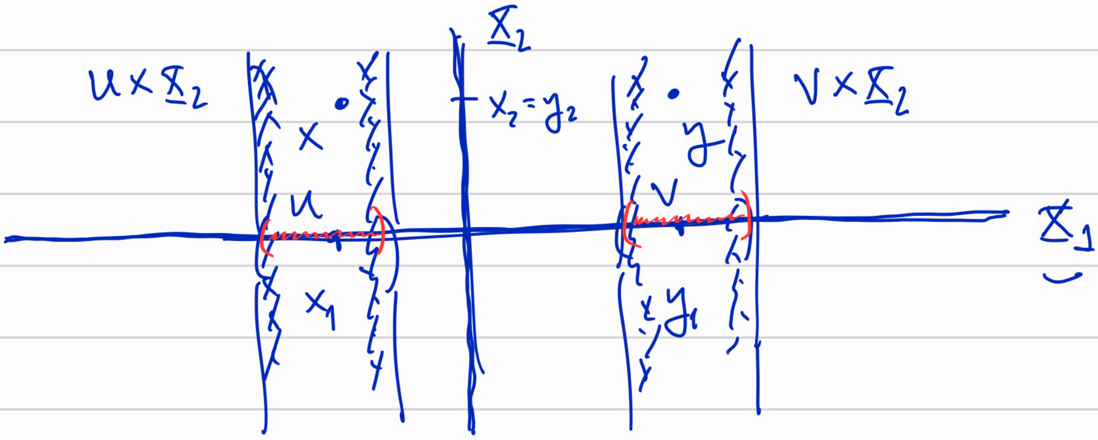
Tomamos
$$\mathbb{X}_1\times\dots\times\underset{(i_0)}{U}\times\dots\times\mathbb{X}_k,$$
$$\mathbb{X}_1\times\dots\times\underset{(i_0)}{V}\times\dots\times\mathbb{X}_k$$

$$x\in \underbrace{\mathbb{X}_1\times\dots\times\underset{(i_0)}{U}\times\dots\times\mathbb{X}_k}_{\text{pertenece a } T_1\times\dots\times T_k},\qquad y\in\underbrace{\mathbb{X}_1\times\dots\times\underset{(i_0)}{V}\times\dots\times\mathbb{X}_k}_{\text{pertenece a } T_1\times\dots\times T_k}$$

$$(\mathbb{X}_1\times\dots\times U\times\dots\times\mathbb{X}_k)\cap(\mathbb{X}_1\times\dots\times V\times\dots\times\mathbb{X}_k)=$$

$$(\mathbb{X}_1\cap\mathbb{X}_1)\times\dots\times\underset{\overset{\shortparallel}{\emptyset}}{(U\cap V)}\times\dots\times(\mathbb{X}_k\cap\mathbb{X}_k)=\emptyset$$

Esto demuestra que $(\mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es Hausdorff.



Supongamos ahora que $(\mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_k, T_1 \times \dots \times T_k)$ es Hausdorff. Veamos que $(\mathfrak{X}_i, T_i)$ lo es. Sean $x_i, y_i \in \mathfrak{X}_i$ tales que $x_i \neq y_i$. Tomamos $a_j \in \mathfrak{X}_j$ para todo $j \neq i$. Consideramos los puntos

$$x = (a_1, \dots, \underset{(i)}{x_i}, \dots, a_k) \qquad y = (a_1, \dots, \underset{(i)}{y_i}, \dots, a_k)$$

$x \neq y$ porque sus coordenadas i-ésimas son distintas. Como $\mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_k$ es Hausdorff, existen $U, V \in T_1 \times \dots \times T_k$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y además $U \cap V = \phi$. Entonces $\pi_i(U), \pi_i(V) \in T_i$ (π_i son abiertas), $x_i = \pi_i(x) \in \pi_i(U)$, $y_i = \pi_i(y) \in \pi_i(V)$ y

$$\pi_i(U) \cap \pi_i(V) = \pi_i(U \cap V) = \phi$$

Esto demuestra que $(\mathfrak{X}_i, T_i)$ es Hausdorff $\boxtimes$

<u>Lema</u>: Sea $A_i \subset \mathfrak{X}_i$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces

$$\overline{A_1 \times \dots \times A_k} = \overline{A_1} \times \dots \times \overline{A_k}.$$

($\overline{A_1 \times \dots \times A_k}$ es la clausura de $A_1 \times \dots \times A_k$ en $T_1 \times \dots \times T_k$; $\overline{A_i}$ es la clausura de A_i en T_i).

Dem: Sea $x=(x_1,\dots,x_k)\in\overline{A_1\times\dots\times A_k}$. Entonces $\forall V\in N_x$, se tiene que $V\cap(A_1\times\dots\times A_k)\neq\emptyset$. Vamos a tomar como V un producto $U_1\times\dots\times U_k$ donde $U_i\in T_i$ y $x_i\in U_i$. Entonces

$$\emptyset\neq(U_1\times\dots\times U_k)\cap(A_1\times\dots\times A_k)=(U_1\cap A_1)\times\dots\times(U_k\cap A_k)$$

y se tiene que $U_i\cap A_i\neq\emptyset\ \forall i\in\{1,\dots,k\}$. Como U_i es un conjunto abierto arbitrario que contiene a x_i, entonces $x_i\in\overline{A_i}\ \forall i\in\{1,\dots,k\}$. Esto demuestra que

$$\overline{A_1\times\dots\times A_k}\subset\overline{A_1}\times\dots\times\overline{A_k}$$

Sea ahora $x\in\overline{A_1}\times\dots\times\overline{A_k}\Rightarrow x_i\in\overline{A_i}\ \forall i\in\{1,\dots,k\}\Rightarrow\forall i\in\{1,\dots,k\}$ y $\forall U_i\in T_i$ tal que $x_i\in U_i$ se tiene que $U_i\cap A_i\neq\emptyset$. En particular

$$(U_1\times\dots\times U_k)\cap(A_1\times\dots\times A_k)\neq\emptyset$$

$$(U_1\times\dots\times U_k)\cap(A_1\times\dots\times A_k)=(\underbrace{U_1\cap A_1}_{\neq\emptyset})\times\dots\times(\underbrace{U_k\cap A_k}_{\neq\emptyset})$$

Por tanto $\forall B\in\mathcal{B}=\{W_1\times\dots\times W_k : W_i\in T_i\ \forall i\in\{1,\dots,k\}\}$ tal que $x\in B$ tenemos que

$$B\cap(A_1\times\dots\times A_k)\neq\emptyset$$

Como $\mathcal{B}(x)=\{B\in\mathcal{B} : x\in B\}$ es base de entornos abiertos de x, entonces $x\in\overline{A_1\times\dots\times A_k}$. Esto demuestra que

$$\overline{A_1}\times\dots\times\overline{A_k}\subset\overline{A_1\times\dots\times A_k}$$ ■