11/11/2020

Espacios producto

Sean $(X_1, T_1), \ldots, (X_k, T_k)$ espacios topológicos. $X_1 \times \ldots \times X_k$ su producto cartesiano:

$$X_1 \times \ldots \times X_k = \{ (x_1, \ldots, x_k) : x_i \in X_i \ \forall i = 1, \ldots, k \}$$

$\pi_i : X_1 \times \ldots \times X_k \to X_i$ proyección ; $\pi_i((x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)) = x_i$
$\forall i = 1, \ldots, k$

(X_i, T_i) e.top; $X = X_1 \times \ldots \times X_k$; $\pi_i : X \to X_i$ familia aplicaciones. Consideramos en X la topología inicial inducida por las aplicaciones π_i. Por definición, dicha topología es la topología producto en $X = X_1 \times \ldots \times X_k$ y la denotaremos por $T_1 \times \ldots \times T_k$

Propiedades. 1. las aplicaciones $\pi_i : (X_1 \times \ldots \times X_k, T_1 \times \ldots \times T_k) \to (X_i, T_i)$ son continuas $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$

2. $T_1 \times \ldots \times T_k$ es la topología más gruesa que hace continuas a las aplicaciones π_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$

3. Si (Z, T') es un e.top. y $f: Z \to X_1 \times \ldots \times X_k$ es una aplicación, entonces $f: (Z, T') \to (X_1 \times \ldots \times X_k, T_1 \times \ldots \times T_k)$ es continua si y sólo si $\pi_i \circ f : (Z, T') \to (X_i, T_i)$ es continua para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

4. La familia

$$S = \{ \pi_i^{-1}(U_i) : U_i \in T_i, \ i \in \{1, \ldots, k\} \}$$

es una subbase de $T_1 \times \dots \times T_k$

5. La familia

$$\mathcal{B} = \{ \pi_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_k^{-1}(U_k) : U_i \in T_i , i \in \{1, \dots, k\} \} \leftarrow$$

es una base de $T_1 \times \dots \times T_k$

<u>Dem:</u> 1-4 son propiedades de la top. inicial.

5. Si $f_i : X \to X_i$ es una familia de aplicaciones en (X_i, T_i) y T es la top. inicial en X, entonces sabemos que

$$\to \quad \mathcal{B} = \{ f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_r}^{-1}(U_{i_r}) : U_{i_j} \in T_{i_j} , r \in \mathbb{N} \}$$

es una base de T.

Si la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ es finita, $I = \{1, \dots, k\}$, entonces

$$\to \quad \mathcal{B} = \{ f_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f_k^{-1}(U_k) : U_i \in T_i , i = 1, \dots, k \}$$

Si tomamos $f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_r}^{-1}(U_r)$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, tomamos $I_i = \{ i_r : i_r = i \}$ (Si $i_1 = 1, i_2 = 1, i_3 \neq 1, \dots, i_r \neq 1 \Rightarrow I_1 = \{i_1, i_2\}$.) Por supuesto I_i puede ser ϕ.

$$\to \quad \underline{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_r}^{-1}(U_{i_r})} = \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} \Big(\bigcap_{j_r \in I_i} \underbrace{f_{j_r}^{-1}(U_{j_r})}_{j_r = i} \Big) =$$

$$f_i^{-1}(U_{j_r})$$

$$\underset{T_i}{\cap}$$

$$\to \quad = \underline{f_1^{-1}(V_1) \cap \dots \cap f_k^{-1}(V_k)}$$

$$V_i = \begin{cases} \text{si } I_i \neq \emptyset & V_i = \bigcap_{j \in I_i} U_j \\ \text{si } I_i = \emptyset & V_i = \mathbb{X}_i \end{cases}$$

$K=5$ $\quad \underbrace{f_1^{-1}(U_{i_1}) \cap f_1^{-1}(U_{i_2})} \cap \underline{f_2^{-1}(U_{i_3})} \cap f_5^{-1}(U_{i_4})$

$$= \underbrace{f_1^{-1}(U_{i_1} \cap U_{i_2})}_{V_1} \cap \underbrace{f_2^{-1}(U_{i_3})}_{V_2} \cap \underbrace{f_3^{-1}(\mathbb{X}_3)}_{\mathbb{X}_3 = V_3} \cap \underbrace{f_4^{-1}(\mathbb{X}_4)}_{= V_4} \cap \underbrace{f_5^{-1}(U_{i_4})}_{= V_5}$$

$f_3^{-1}(\mathbb{X}_3) = f_4^{-1}(\mathbb{X}_4) = \mathbb{X}$.

$\pi_i : \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_K \to \mathbb{X}_i$, $\quad U_i \subset \mathbb{X}_i$

$\pi_i^{-1}(U_i) = \{ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_K) \in \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_K : \pi_i((x_1, \dots, x_K)) = x_i \in U_i \}$

Def: Si $A_i \subset \mathbb{X}_i$ $\forall i \in \{1, \dots, K\}$, definimos

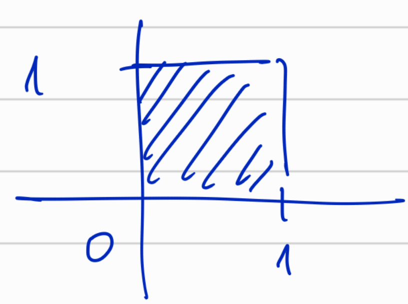
$$A_1 \times \dots \times A_K \subset \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_K$$

Por:

$$A_1 \times \dots \times A_K = \{ (x_1, \dots, x_K) \in \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_K : x_i \in A_i \ \forall i \}$$

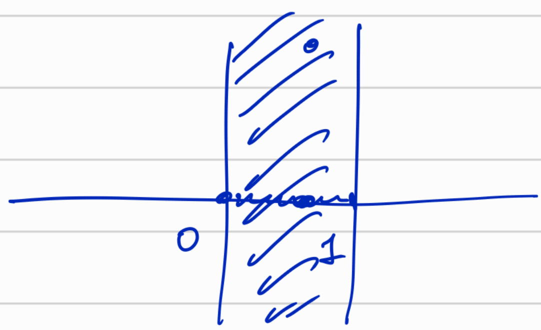
Ejemplo: $\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad [0,1] \subset \mathbb{R}$

$$[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$



$$\pi_i^{-1}(U_i) = \{(x_1,\dots,x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k : x_i \in U_i\}$$
$$= \{(x_1,\dots,x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k : x_i \in U_i,\ x_j \in X_j\ \forall j \neq i\}$$
$$= X_1 \times \dots \times \underset{(i)}{U_i} \times \dots \times X_k$$

$U_1 = [0,1] \subset \mathbb{R}$ $\qquad$ $\underset{[0,1]\times\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{\pi_1^{-1}(U_1)}}$ donde $\pi_1 : \underset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{\mathbb{R}^2}} \to \mathbb{R}$



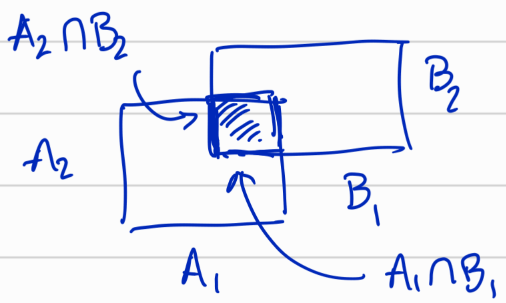
$$\pi_1^{-1}([0,1]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\}$$

$$\pi_i^{-1}(U_i) = X_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times X_k .$$

<u>Propiedad</u>: Si $A_i, B_i \subset X_i$ $\forall i \in \{1,\dots,k\}$, entonces

$$(A_1 \times \dots \times A_k) \cap (B_1 \times \dots \times B_k) = (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_k \cap B_k) .$$

Si $x = (x_1,\dots,x_k) \in (A_1 \times \dots \times A_k) \cap (B_1 \times \dots \times B_k) \Leftrightarrow x \in A_1 \times \dots \times A_k$ y $x \in B_1 \times \dots \times B_k \Leftrightarrow x_1 \in A_1, \dots, x_k \in A_k$ y $x_1 \in B_1, \dots, x_k \in B_k$ $\Leftrightarrow x_1 \in A_1 \cap B_1, \dots, x_k \in A_k \cap B_k \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_k) \in (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_k \cap B_k)$



$$B \in \mathcal{B} \Rightarrow B = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_k^{-1}(U_k) =$$
$$= (U_1 \times X_2 \times \dots \times X_k) \cap (X_1 \times U_2 \times \dots \times X_k) \cap \dots$$
$$\dots \cap (X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times U_k)$$
$$= U_1 \times \dots \times U_k$$

Una base de la topología producto es:

$$\mathcal{B} = \{ U_1 \times \dots \times U_k : U_i \in T_i,\ i = 1, \dots, k \}.$$

$\mathcal{B}$ está formada por productos de abiertos.

<u>Propiedad</u>: las aplicaciones π_i son abiertas ($\pi_i : X_1 \times \dots \times X_k \to X_i$)

<u>Dem.</u> Sea $U_1 \times \dots \times U_k \in \mathcal{B}$, donde $U_i \in T_i$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.

$$\pi_i(U_1 \times \dots \times U_k) = U_i$$

$\forall B \in \mathcal{B}$, $\pi_i(B) \in T_i$.

Sea ahora $W \in T_1 \times \dots \times T_k$. Entonces $\exists \{B_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{B}$ tal que

$$W = \bigcup_{j \in J} B_j$$

Entonces $\pi_i(W) = \pi_i\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} \underbrace{\pi_i(B_j)}_{\in T_i} \in T_i$ ■

$\left(y \in \pi_i\left(\bigcup_j B_j\right) \Leftrightarrow y = \pi(x) \text{ con } x \in \bigcup_j B_j \Leftrightarrow \exists j_0 \in J \text{ tal que}\right.$

$\left. y = \pi_i(x),\ x \in B_{j_0} \Leftrightarrow \exists j_0 \in J \text{ tal que } y \in \pi_i(B_{j_0}) \Leftrightarrow y \in \bigcup_j \pi_i(B_j) \right)$

Ejemplo: las proyecciones no son, en general, aplicaciones cerradas.

Ejemplo. Sea $(X_1, d_1), \dots, (X_k, d_k)$ espacios métricos. Sean T_{d_i} $i = 1, \dots, k$ las topologías inducidas y sea $T = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$.
¿$(X_1 \times \dots \times X_k, T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k})$ es metrizable?
¿Existe una distancia d en $X_1 \times \dots \times X_k$ tal que $T_d = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$?

Definimos, para $x, y \in X_1 \times \dots \times X_k$, $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k)$

$$d_\infty(x,y) = \max \{ d_i(x_i, y_i) : i \in \{1, \dots, k\} \}$$

$$d_1(x,y) = d_1(x_1, y_1) + \dots + d_k(x_k, y_k)$$

$$d_2(x,y) = \left(d_1(x_1,y_1)^2 + \dots + d_k(x_k,y_k)^2 \right)^{1/2}$$

d_1, d_2, d_∞ son distancias en $X_1 \times \dots \times X_k$. Además son equivalentes.
Vamos a probar que

$$T_{d_\infty} = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k} \qquad (!!)$$

Por tanto $T_{d_1} = T_{d_2} = T_{d_\infty} = T_{d_1} \times \dots \times T_{d_k}$

Veamos que d_∞ es una distancia en $X_1 \times \dots \times X_k$. Sean $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k)$, $z = (z_1, \dots, z_k)$. Observemos que $d_i(x_i, y_i) \leq d_\infty(x,y)$ $\forall i$.

1. $d_\infty(x,y) \geq 0$ y $d_\infty(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
Como $d_i(x_i, y_i) \geq 0$ y $d_\infty(x,y) = \max\{ d_i(x_i,y_i) : i \in \{1, \dots, k\}\}$, se tiene que $d_\infty(x,y) \geq 0$

$d_\infty(x,y)=0 \iff d_i(x_i,y_i)=0 \ \forall i\in\{1,\dots,K\}. \iff x_i=y_i \ \forall i\in\{1,\dots,K\}$
$\iff (x_1,\dots,x_K)=(y_1,\dots,y_K) \iff x=y$

d_i distancias

2. $d_\infty(x,y)=d_\infty(y,x)$ (trivial)

3. Para todo $i\in\{1,\dots,K\}$, $d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)$ por ser d_i una distancia en X_i, $\forall i\in\{1,\dots,K\}$. Por tanto

$$d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)\leq d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y)$$

Tomando en esta desigualdad el máximo cuando $i\in\{1,\dots,K\}$ tenemos la desigualdad triangular

$$d_\infty(x,y)\leq d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y)$$

Las propiedades 1 y 2 para comprobar que d_1 es una distancia en $X_1\times\cdots\times X_K$ son similares a los anteriores. Para comprobar la desigualdad triangular tenemos en cuenta que, por ser d_i una distancia para todo i:

$$d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)$$

Sumando en i

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^K d_i(x_i,y_i)\leq\sum_{i=1}^K d_i(x_i,z_i)+\sum_{i=1}^K d_i(z_i,y_i)=d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y)$$

Las propiedades 1 y 2 para comprobar que d_2 es una distancia se hacen como en los casos anteriores. Para comprobar la desigualdad triangular tenemos en cuenta la desigualdad de $\mathbb{R}^K$

$$\left(\sum_{i=1}^K (a_i+b_i)^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{i=1}^K a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^K b_i^2\right)^{1/2}.$$

Aplicamos esta desigualdad con $a_i = d_i(x_i, z_i)$, $b_i = d_i(z_i, y_i)$ y obtenemos

$$\left(\sum_{i=1}^{K} \left(d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i) \right)^2 \right)^{1/2} \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$$

Como d_i es una distancia para todo $i \in \{1, \dots, K\}$, tenemos que $d_i(x_i,y_i) \leq d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i)$. Por tanto

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{k} d_i(x_i,y_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{K} \left(d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i) \right)^2 \right)^{1/2}$$

y concluimos que

$$d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$$

Para comprobar que las distancias son equivalentes tenemos en cuenta que

$$d_1 \leq \sqrt{K}\, d_2 \leq K \cdot d_\infty \leq K \cdot d_1$$

La primera desigualdad se obtiene aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^K$ a los vectores $\underset{(K)}{(1, \dots, 1)}$, $(d_1(x_1,y_1), \dots, d_K(x_K,y_K))$. Se tiene entonces que

$$d_1(x,y) = |\langle (1,\dots,1), (d_1(x_1,y_1), \dots, d_K(x_K,y_K)) \rangle|$$
$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{K} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{K} d_i(x_i,y_i)^2} = \sqrt{K} \cdot d_2(x,y)$$

La segunda desigualdad se obtiene de:

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{K} d_i(x_i,y_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{K} d_\infty(x,y)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{K} \cdot d_\infty(x,y)$$

La tercera se obtiene de:

$$d_\infty(x,y) = \max\{d_i(x_i,y_i) : i=1,\dots,k\} \leq \sum_{i=1}^{k} d_i(x_i,y_i) = d_1(x,y)$$