3/12/2020

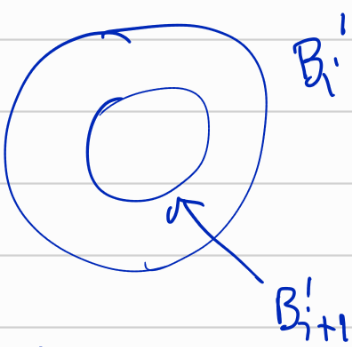
36. (d) $(X,T)$ e.top AN-I. Si $x \in \bar{A}$, existe $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que

$$x = \lim_{i\to\infty} a_i$$

Sea $\mathcal{B}_x = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ una base de entornos numerable. Tomamos la familia

$$\mathcal{B}'_x = \{B'_i : i\in\mathbb{N}\} \qquad B'_i = B_1 \cap \dots \cap B_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

- $B'_i \in N_x \quad \forall i$ (intersección finita de entornos es entorno)
- $B'_i \subset B_i \quad \forall i$
- $B'_{i+1} \subset B'_i$
- $\mathcal{B}'_x$ es base de entornos de $x$. Sea $U \in N_x$, como $\mathcal{B}_x$ es base de entornos, existe $B_i \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_i \subset U$. Como $B'_i \subset B_i \subset U$, obtenemos el resultado




$x \in \bar{A}$, entonces $B'_i \cap A \neq \emptyset \ \forall i \in \mathbb{N}$. Tomamos $a_i \in B'_i \cap A$. Veamos que $x = \lim_{i\to\infty} a_i$.

Sea $U \in N_x$, entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B'_{i_0} \subset U$.

$\forall i \geq i_0, \quad a_i \in B'_i \subset B'_{i_0} \subset U$ ▨

Contraejemplo: $\mathbb{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en $(\mathbb{R},T_{CN})$. $\quad T_{CN}=\{\text{conj. numerables}\}\cup\{\mathbb{R}\}$

$\overline{\mathbb{I}}=\mathbb{R}$ (el único que contiene a $\mathbb{I}$ no numerable es $\mathbb{R}$)

En el ejercicio 40 probaremos que $x=\lim_{i\to\infty} x_i \Leftrightarrow x_i=x \ \forall i\geq i_0$.

$\Rightarrow q\in\mathbb{Q}=\overline{\mathbb{I}}$ pero no es límite de puntos de $\mathbb{I}$.

40 $(\mathbb{R},T_{CN})$ $\quad x=\lim_{i\to\infty} x_i \Leftrightarrow \exists i_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_i=x \ \forall i\geq i_0$

$\Leftarrow)$ trivial

$\Rightarrow)$ Consideramos el conjunto $N=\{x_i : i\in\mathbb{N},\ x_i\neq x\}$. El conjunto $N$ es numerable. Por tanto $\mathbb{R}\setminus N$ es un conjunto abierto y $x\in\mathbb{R}\setminus N$. $(x\notin N)$. Es decir, $U=\mathbb{R}\setminus N$ es entorno de $x$. $\exists i_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$x_i\in U=\mathbb{R}\setminus N \qquad \forall i\geq i_0$$

$$\Rightarrow x_i=x \qquad \forall i\geq i_0$$

(En $U$ no hay ningún punto de la sucesión distinto de $x$).

39. $(X,T_D)$ $\quad x=\lim_{i\to\infty} x_i \Leftrightarrow \exists i_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_i=x \ \forall i\geq i_0$

$\Leftarrow)$ trivial

$\Rightarrow)$ $U=\{x\}$ es ent. de $x \Rightarrow \exists i_0\in\mathbb{N}$ tal que $x_i\in U \ \forall i\geq i_0$

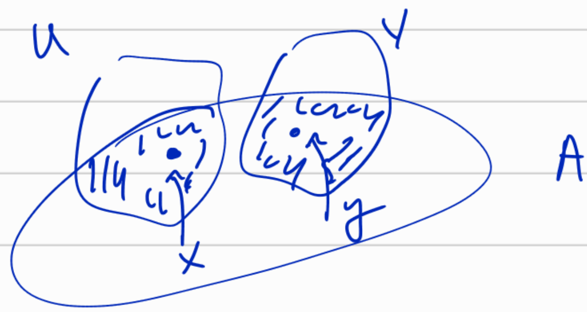
$\Rightarrow x_i=x \ \forall i\geq i_0 \qquad (x_i\in\{x\}\ \forall i\geq i_0)$

37, 38 grabación

41. $(X,T)$ e.top. $A\subset X$, $A\neq\emptyset$.

(a) $(X,T)$ Hausdorff $\Rightarrow$ $(A,T_A)$ también lo es.

Sean $a,b\in A$, $a\neq b$. Como $(X,T)$ es Hausdorff, existen $U,V\in T$ tales que $a\in U$, $b\in V$, $U\cap V=\emptyset$. Entonces $a\in U\cap A$, $b\in V\cap A$, $U\cap A, V\cap A\in T_A$, y $(U\cap A)\cap(V\cap A)=(U\cap V)\cap A=\emptyset$ porque $U\cap V=\emptyset$




(b) Si $(X,T)$ es AN-I, entonces $(A,T_A)$ es AN-I

Sea $a\in A$. $\mathcal{B}_a=\{$base de entornos de $a$ en $X\}$. Entonces

$$\mathcal{B}_a^A=\{B\cap A : B\in\mathcal{B}_a\}$$

es base de entornos de $a$ en $(A,T_A)$. Si tomamos $\mathcal{B}_a$ numerable, entonces $\mathcal{B}_a^A$ es numerable. Como $a\in A$ es arbitrario, $(A,T_A)$ es AN-I.

(c) Si $(X,T)$ es AN-II, sea $\mathcal{B}$ una base numerable. Entonces

$$\mathcal{B}^A=\{B\cap A : B\in\mathcal{B}\}$$

es base numerable de $(A,T_A)$. Es claro que $\mathcal{B}^A$ es numerable. Para ver que es base, tomamos $V\in T_A$. Existe entonces $U\in T$ tal que

$$T_A\ni V=U\cap A=\Big(\bigcup_{i\in I}B_i\Big)\cap A \qquad B_i\in\mathcal{B}$$

$$= \bigcup_{i\in I} (B_i \cap A) \qquad B_i \cap A \in \mathcal{B}^A$$

(d) Si $(X,T)$ es metrizable, entonces $(A,T_A)$ es metrizable.

Si $(X,T)$ es metrizable, existe $d$ distancia en $X$ tal que $T_d = T$. Consideramos $d$ restringida al conjunto $A$. La llamamos $d_A$. Queremos ver que $T_{d_A} = T_A$.

Una base de $T_d = T$ es $\mathcal{B} = \{B(x,r) : x\in X, r>0\}$. Por tanto

$$\mathcal{B}^A = \{B(x,r)\cap A : x\in X, r>0\}$$

es una base de $T_A$.

Por otra parte, $d_A(x,y) = d(x,y)$, $\forall x,y \in A$, es una distancia en $A$. Por tanto

$$\mathcal{B}_d^A = \{B_A(a,r) : a\in A, r>0\}$$

forman una base de $T_{d_A}$.

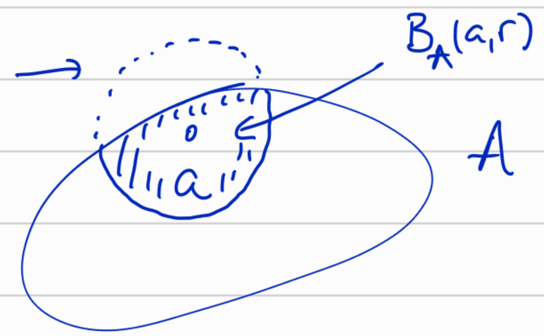
Queremos ver que ambas bases generan la misma topología.

1. $\forall B\in \mathcal{B}_d^A$, $\forall a\in B$, $\exists B'\in \mathcal{B}^A$ tal que $a\in B'\subset B$.
2. $\forall B'\in \mathcal{B}^A$, $\forall a\in B'$, $\exists B\in \mathcal{B}_d^A$ tal que $a\in B\subset B'$.

1. $B\in \mathcal{B}_d^A$ $\quad B = B_A(a,r) = \{b\in A : d_A(b,a)<r\}$
$$= \{b\in A : d(b,a)<r\}$$
$$= \underbrace{B(a,r)}_{\text{bola en } X}\cap A \in \mathcal{B}^A.$$

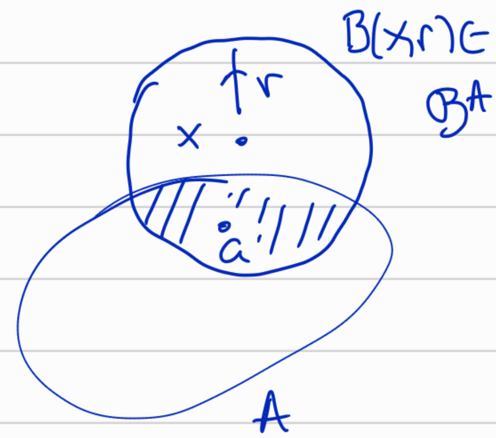
$$\boxed{B_A(a,r) = B(a,r)\cap A}$$

$\mathcal{B}_d^A \subset \mathcal{B}^A$.

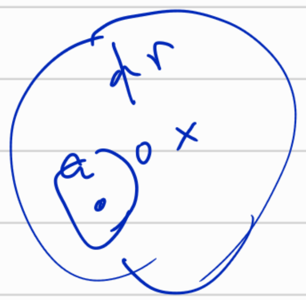



Para probar 1, tomamos $B \in \mathcal{B}_d^A$ y $B' = B$.

2. Sea $B' = B(x,r) \cap A \in \mathcal{B}^A$




Sea $a \in B' = B(x,r) \cap A$




$$s = r - d(x,a) > 0 \Rightarrow B(a,s) \subset B(x,r)$$

$$\Rightarrow B(a,s) \cap A \subset B(x,r) \cap A$$

$$\Rightarrow \underbrace{B_A(a,s)}_{\displaystyle a \in B \in \mathcal{B}_d^A} \subset B(x,r) \cap A = B'$$

Acabamos de comprobar que $\mathcal{T}_{d_A} = \mathcal{T}_A$. (la distancia $d_A$ genera la topología $\mathcal{T}_A$).

42. Un e. top. AN-II es separable. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable del espacio $(X,\mathcal{T})$. $\mathcal{B} = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$. Elegimos $x_i \in B_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$. El conjunto $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ es numerable. Veamos que $\overline{D} = X$. Sólo hay que comprobar que $X \subset \overline{D}$. Sea $x \in X$. Sea $U \in N_x$ y sea $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V \subset U$. Existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in B_{i_0} \subset V \subset \mathcal{U}.$$

$$x_{i_0} \in \mathcal{U} \cap D. \Rightarrow \mathcal{U} \cap D \neq \emptyset. \underset{\mathcal{U} \in \mathcal{N}_x \text{ arbitrario}}{\Rightarrow} x \in \overline{D} \underset{x \text{ arbitrario}}{\Rightarrow} X \subset \overline{D} \quad \blacksquare$$

43. Si $(X,d)$ es AN-II $\underset{(42)}{\Rightarrow}$ es separable

Si $(X,d)$ es separable, entonces existe $D$ denso y numerable ($\overline{D} = X$, $\#D = \#\mathbb{N}$).

$$\mathcal{B} = \{ B(q, \tfrac{1}{n}) : q \in D, n \in \mathbb{N} \}$$

$\mathcal{B}$ es numerable. Veamos que $\mathcal{B}$ es base de $T$. Obviamente $\mathcal{B} \subset T$.

Sea $\mathcal{U} \in T$. Si $x \in \mathcal{U}$, $\exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset \mathcal{U}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$. Como $x \in X = \overline{D}$, $B(x, \frac{1}{n}) \cap D \neq \emptyset$ y existe $q \in D$ tal que $d(x,q) < \frac{1}{n} < \frac{r}{2}$. Entonces

$$x \in \underset{\mathcal{B}}{\underset{\cap}{B(q, \tfrac{1}{n})}} \subset B(x,r) \subset \mathcal{U}$$

Si $m \in B(q, \frac{1}{n})$, $d(m,x) \leq d(m,q) + d(q,x) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \Rightarrow m \in B(x,r)$

Hemos probado que $\forall \mathcal{U} \in T$, $\forall x \in \mathcal{U}$, $\exists B(q, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B(q, \frac{1}{n}) \subset \mathcal{U}$. Esta propiedad implica que $\mathcal{B}$ es base. Por tanto, $(X, T_d)$ es AN-II. $\blacksquare$