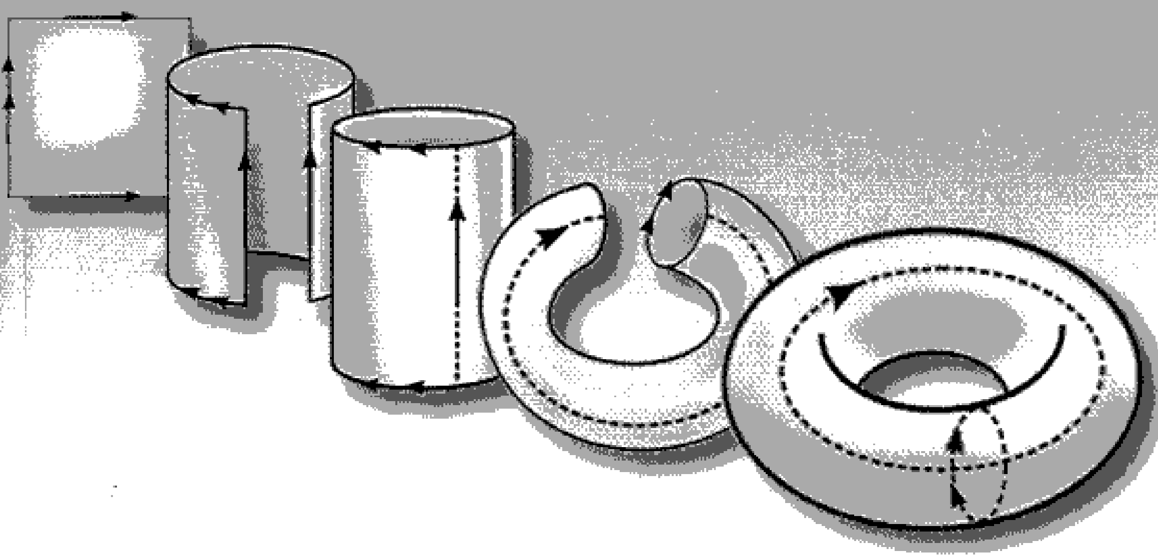
Ciencias Experimentales manuales major y Exactas

RAFAEL LÓPEZ CAMINO

Topología



eug

TOPOLOGÍA

RAFAEL LÓPEZ CAMINO

TOPOLOGÍA

GRANADA
2014

Colección Manuales / Major

TOPOLOGÍA.
ISBN: 978-84-338-5676-0.
Depósito legal GR 1.330-2014.
Edita: Editorial Universidad de Granada.
Campus Universitario de Cartuja. Granada.
Imprime: Imprenta Comercial. Motril. Granada.

Printed in Spain *Impreso en España*

Índice

Introducción

Este libro está dedicado a todos los alumnos a los que he tenido el placer de enseñar matemáticas

El presente libro es el resultado de años de docencia en topología en la Universidad de Granada, primero en la licenciatura de matemáticas en los años noventa y más tarde en el grado en matemáticas, y sus contenidos están basados en los sucesivos temarios que se han ido desarrollando. Está dirigido especialmente, pero no de manera única, a los estudiantes universitarios de matemáticas que inician un primer curso de topología y que habitualmente se enmarca en la llamada topología general. El desarrollo del libro está enfocado con esta finalidad y está apoyado en más de 75 figuras y 120 ejemplos distribuidos a lo largo del texto, junto con más de 260 ejercicios propuestos.

La topología

La topología es una herramienta básica en matemáticas y numerosos resultados tienen un transfondo topológico. Destacamos dos de ellos que a pesar de su simpleza en sus enunciados, implican consecuencias importantes en diferentes áreas de las matemáticas. Para enmarcar ambos resultados, vamos a utilizar las nociones que posee un alumno de primer curso de matemáticas y el cual no tiene conocimientos previos de topología.

El primer resultado es el teorema de Bolzano, el cual afirma que una función continua definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y que toma valores positivos y negativos, se anula necesariamente en un punto: si suponemos que la función $f : I \to \mathbb{R}$ satisface $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, con $a < b$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Véase la figura 1, izquierda. Habitualmente la forma de vender las bonanzas de este resultado es que permite saber si una ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución, a pesar de que la expresión algebraica de $f(x)$

pueda ser tan complicada que sea imposible obtener una solución mediante simples transformaciones algebraicas.

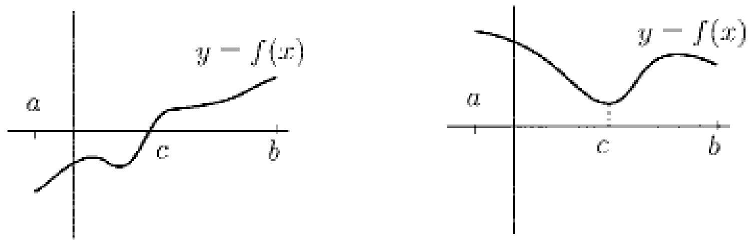


Figura 1: Izquierda: teorema de Bolzano. Derecha: una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado alcanza un mínimo

Para mostrar cómo se aplica el teorema, nos preguntamos si la ecuación $e^x + \sin(x) - 2 = 0$ tiene solución. Si uno intenta despejar x de dicha ecuación mediante sumas, multiplicaciones u operaciones algebraicas parecidas, observa inmediatamente que no se llega a ningún resultado. Afrontamos ahora la cuestión de otra manera. Definimos la función continua $f(x) = e^x + \sin(x) - 2$. Es evidente que $f(-\pi) < 0$ y $f(\pi) > 0$ y por tanto el teorema de Bolzano asegura que existe una solución de la ecuación en el intervalo $(-\pi, \pi)$. La afirmación del teorema puede parecerle a uno no muy satisfactoria ya que no permite encontrar la solución de la ecuación de forma explícita, sino sólo asegura su *existencia*. Sin embargo la cuestión interesante era saber si había soluciones, y *una vez que se conoce que la ecuación tiene solución*, por métodos numéricos, ésta se puede calcular con la aproximación que queramos.

Lo que nos interesa remarcar ahora es que lo que se encuentra detrás del teorema de Bolzano es un resultado *topológico* que afirma que una función continua definida en un espacio *conexo* y que toma valores positivos y negativos, se anula en algún punto de dicho espacio. No es éste el momento para decir qué es un espacio conexo, pero sí es importante observar que el teorema de Bolzano también es útil en otras partes de las matemáticas cuando aparece un problema del cual queremos saber si existe una solución. Si pudiéramos transformar dicho problema en uno que consista en saber si cierta función continua definida en un espacio topológico conexo se anula, el teorema de Bolzano se podrá usar del mismo modo que se ha hecho anteriormente.

El segundo resultado está relacionado de nuevo con el problema de hallar soluciones de una ecuación, pero ahora las soluciones se van a alcanzar en extremos relativos y que ahora precisamos. De nuevo, y volviendo con lo que conoce un alumno de primer curso de matemáticas, es sabido que una función continua f definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanza un mínimo en un punto $c \in [a,b]$, es decir, $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Si además $c \in (a,b)$ y la función f es derivable, entonces $f'(c) = 0$: ver la figura 1, derecha. En matemáticas es habitual tener problemas cuyas soluciones se reducen a resolver ecuaciones del tipo $f'(x) = 0$, donde f es una función definida en un espacio abstracto y en el cual existe un concepto de 'derivada'. Por tanto, y siguiendo la misma estrategia que se ha hecho antes en el intervalo $[a,b]$, podríamos decir que dicha ecuación tiene solución si el espacio en el que estemos trabajando tiene aquellas propiedades que posee $[a,b]$ y que aseguren la existencia de dicho mínimo. En concreto, la propiedad que se usa de un intervalo cerrado $[a,b]$ es que es *compacto*. El concepto de *compacidad* es *topológico* y como veremos en el capítulo 8, será uno de los más importantes que aparecerán en este libro.

Los dos ejemplos anteriores ya dan una muestra de las potencialidades que proporciona la topología en la resolución de problemas. Para un alumno de un primer curso de universidad, todo esto se ve enmascarado por el hecho de trabajar con funciones continuas en la recta euclídea, un espacio muy conocido por el alumno desde sus primeros contactos con las matemáticas.

La topología estudia la propiedades que se mantienen por aplicaciones continuas. En la recta euclídea $\mathbb{R}$, la continuidad tiene que ver con la idea de cercanía y que viene dada por la distancia entre dos números reales. En matemáticas, y en un primer curso de cálculo, la definición de continuidad de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $x = x_0$ viene dada en términos de epsilons y deltas y que ahora recordamos: la función f es continua es x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Si vemos esta expresión, observamos que se centra en el valor de la distancia entre números, concretamente de x a x_0 y de $f(x)$ a $f(x_0)$, dada por el valor absoluto de su diferencia. Sin embargo, lo importante en el concepto de continuidad es conocer la *cercanía* entre los puntos x y x_0 y entre los puntos $f(x)$ y $f(x_0)$, sin tener mucho interés por saber cuál es el valor preciso de su distancia. Lo mismo sucede con la otra noción de proximidad que conoce el alumno y es la convergencia de una sucesión de números reales. En la definición de límite de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ se involucra de nuevo epsilons. Así, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : n \geq \nu \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon.$$

Con esta expresión se quiere indicar de nuevo que los términos x_n de la sucesión se encuentran cada vez más próximos al límite de la misma.

Un espacio topológico no va a ser más que un conjunto y un concepto de cercanía, donde a cada punto del mismo se le va a asociar una familia de subconjuntos que llamaremos *entornos* de dicho punto. Los conceptos de continuidad de aplicaciones y el de convergencia de sucesiones se expresarán en términos de entornos, y nos apoyaremos solamente en la teoría de conjuntos, sin hacer ninguna referencia a la noción de distancia.

Por ahora, y en esta introducción, dejamos de lado la formalización matemática de la continuidad de una aplicación, y volvemos con el objeto matemático que estudia la topología y que se llama *espacio topológico*. La topología estudia los espacios topológicos y las propiedades que se conservan por aplicaciones continuas. Como una rama más de las matemáticas, la topología realiza una clasificación de los espacios topológicos considerando que dos espacios son iguales desde un punto de vista topológico si existe una aplicación biyectiva entre ellos, tal que ella y su inversa sean continuas: este tipo de aplicaciones se llaman *homeomorfismos*.

Para subconjuntos de espacios euclídeos, uno se puede imaginar un homeomorfismo como una deformación biyectiva y continua de un espacio en otro. Es por esta razón que habitualmente se dice que la topología estudia "las matemáticas de los objetos de plastilina", en el sentido de que si un objeto X hecho de plastilina se deforma en otro Y, para un topólogo, X es lo *mismo* que Y y se dirá que X es *homeomorfo* a Y. Aquí hay que indicar que las deformaciones permitidas consisten en estirar, contraer o mover. Sin embargo, en este proceso de manipulación no podemos cortar ni pegar, ya que si cortamos, puntos cercanos en X se corresponden con puntos lejanos en Y y se perdería la continuidad, y por otro lado, si pegamos, identificaríamos dos puntos de X en uno mismo de Y, perdiendo la biyectividad de la transformación.

Con esta forma de pensar, todas las curvas de la figura 2 son iguales desde el punto de vista topológico. Obsérvese que al estirar y contraer, el tamaño de la figura ha cambiado. Por ello, también decimos que para un topólogo el tamaño no importa.

Enmarcado en el problema de la clasificación de espacios topológicos, la topología también estudia las propiedades que se mantienen por homeomorfismos y que se llaman *invariantes topológicos*. Como consecuencia, si un espacio satisface un invariante topológico y otro espacio no, ambos espacios no pueden ser homeomorfos entre sí. Para ilustrar esta situación, vamos a poner dos ejemplos de invariantes topológicos que se estudiarán en este libro.

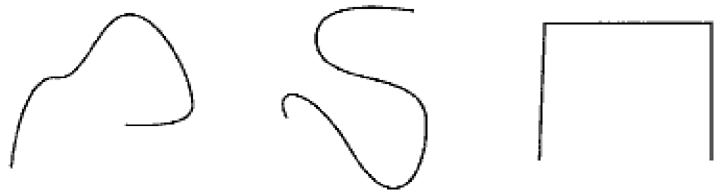


Figura 2: Las figuras que aparecen son iguales desde el punto de vista topológico ya que se pueden deformar unas en otras. En este sentido, no nos importa el tamaño del conjunto

De paso, y con el primer invariante, probaremos que la recta euclídea $\mathbb{R}$ no es homeomorfa al plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ ni al espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$; el segundo va a permitir demostrar que $\mathbb{R}^2$ tampoco es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$. Las demostraciones rigurosas aparecerán en los capítulos 6 y 11 respectivamente.

El primer invariante topológico es la *conexión*, que ya ha aparecido anteriormente con el teorema de Bolzano. En una primera aproximación al nivel de esta introducción, un subconjunto de un espacio euclídeo es conexo si está formado por un único 'trozo'. En lenguaje de la topología, un trozo se denomina componente conexa. Así $\mathbb{R}-\{0\}$ tiene dos componentes conexas y no es conexo y $\mathbb{R}^2$ menos los ejes de coordenadas tiene cuatro cuatro componentes conexas correspondientes a los cuatro cuadrantes, y por tanto, tampoco es conexo. Relacionado con el concepto de conexión, está el del *número de componentes conexas* de un espacio y dicho número también es una propiedad topológica. De esta manera, si un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tiene, por ejemplo, tres componentes, cuando lo deformamos en otro (imaginándonos que está hecho de plastilina, y sin cortar ni pegar), el número de componentes ni disminuye ni aumenta, conservándose en tres el número de componentes conexas del espacio deformado.

Así, consideremos una circunferencia del plano euclídeo (figura 3). Este conjunto está constituida por una única componente conexa y decimos que la circunferencia es conexa. Si deformamos la circunferencia como si estuviera hecha de plastilina, es evidente que el conjunto resultante también está constituido por una única componente.

Volviendo al caso que nos interesa, es claro que tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son conexos, al estar constituidos cada uno por una única componente. La

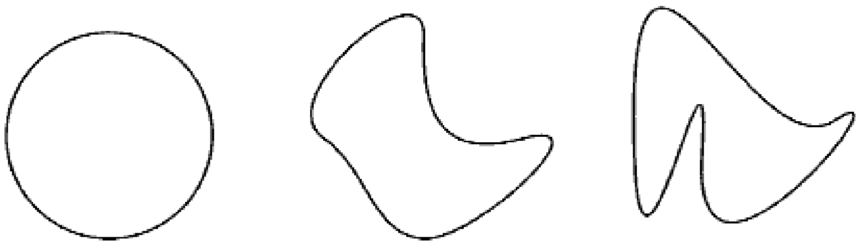


Figura 3: Las distintas deformaciones de la circunferencia no cambia la propiedad de que esté formada por una única componente conexa. Así la conexión es un invariante topológico

demostración de que la recta euclídea $\mathbb{R}$ no es homeomorfa al plano $\mathbb{R}^2$ se hace por reducción al absurdo (del mismo modo se prueba que $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$). Supongamos que entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ existe un homeomorfismo. Si quitamos un punto en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2$ quitamos el correspondiente punto mediante dicho homeomorfismo, entonces los espacios resultantes siguen siendo homeomorfos. Sin embargo, si en la recta euclídea quitamos un punto, nos queda dos componentes, y no es conexo, no así en el plano $\mathbb{R}^2$, donde al quitar un punto, el espacio sigue estando formado por una única componente, es decir, es conexo: ver figura 4. Esto demuestra que $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

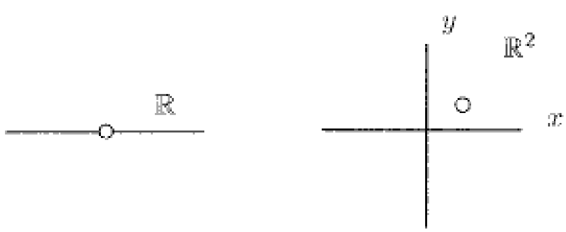


Figura 4: La recta euclídea $\mathbb{R}$ menos punto no es conexa, pero el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ menos un punto sí es conexo. El punto eliminado se ha representado en la figura por un pequeño círculo

Veamos ahora el segundo invariante topológico y que va a permitir distinguir topológicamente el plano $\mathbb{R}^2$ del espacio $\mathbb{R}^3$. Fijamos en $\mathbb{R}^2$ un punto

$p \in \mathbb{R}^2$ y consideramos el conjunto de lazos desde dicho punto. Por un lazo entendemos una curva *en dicho conjunto* que empieza y acaba en el punto p. Es fácil imaginar que cualquier lazo desde p se puede deformar continuamente en otros lazos *de* $\mathbb{R}^2$ cada vez más pequeños, hasta reducirlos en el punto p de partida. Con el mismo argumento, el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ posee dicha propiedad. Esta propiedad, a saber, que dado un punto de un espacio, todo lazo desde dicho punto se puede deformar de forma continua en el propio punto, es un invariante topológico y es el que usaremos para probar que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ no son homeomorfos.

El razonamiento para probar que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$ es de nuevo por reducción al absurdo, y suponemos que entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ existe un homeomorfismo. Quitamos ahora un punto de $\mathbb{R}^2$ y su correspondiente en $\mathbb{R}^3$. Vamos a darnos cuenta cómo $\mathbb{R}^2$ menos un punto no puede ser homeomorfo a $\mathbb{R}^3$ menos un punto usando la propiedad anterior. Antes de ello, hagamos la observación que tanto $\mathbb{R}^2$ menos un punto como $\mathbb{R}^3$ menos un punto son espacios formados por una única componente, es decir, son conexos. Por tanto, la propiedad de conexión no nos sirve ahora para distinguir ambos espacios.

Podemos suponer que el punto que quitamos en $\mathbb{R}^2$ es el origen $O = (0,0)$. Sea $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ y consideremos los lazos *en* $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ que salen y acaban en p. Observemos que existen lazos que sí se pueden deformar en p, como ocurre con el lazo α de la figura 5, el cual se reduce al punto p mediante sucesivas deformaciones continuas de α. Sin embargo, existen otros lazos que no satisfacen dicha propiedad, como es el lazo β, el cual da una vuelta alrededor de O. Es evidente que β no se puede deformar en el punto p ya que para ello tendríamos que 'atravesar' el origen O, es decir, en la posible deformación nos encontramos con que el punto O representa un obstáculo, y por tanto nos tendríamos que 'salir' del conjunto que estamos estudiando, a saber, $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.

Veamos qué sucede en el espacio euclídeo. En $\mathbb{R}^3$ quitamos un punto Q, por ejemplo, el origen de coordenadas, y sea $q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{Q\}$. Es evidente que todo lazo desde q se puede deformar en el propio punto q, debido a que al haber una dimensión más que en $\mathbb{R}^2$, podemos 'evitar' el origen de coordenadas y realizar dicha deformación. O si se quiere ver de otra manera, en $\mathbb{R}^3 \setminus \{Q\}$ no tiene sentido decir que existen lazos que 'den una vuelta' alrededor de Q, como sucede con la curva β de la figura 5. Esta contradicción prueba definitivamente que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

En general, estos dos resultados no son más que casos particulares de un teorema que afirma que si denotamos por $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo de dimensión n, entonces $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ si $n \neq m$. Este teorema no es fácil de probar y se necesita de potentes herramientas no sólo de topología sino

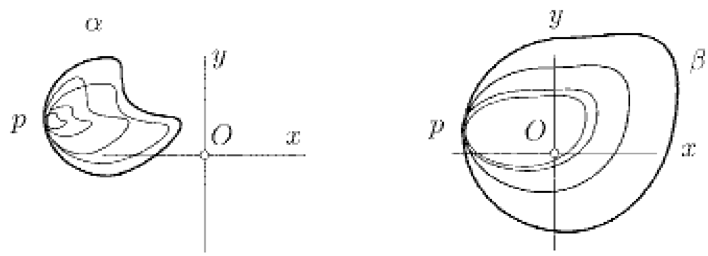


Figura 5: En el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, el lazo α con base en el punto p se puede deformar en el propio punto. Por contra, existen lazos como el lazo β que, sin salirse del espacio, no se pueden deformar en un punto

también de álgebra. Es tal la dificultad que en el presente libro no se va a poder demostrar en toda su generalidad, sino sólo algunos casos particulares. Puede ser una sorpresa para un alumno que la demostración necesite de tanto esfuerzo cuando intuitivamente el resultado es evidente, ya que el exponente n en $\mathbb{R}^n$ nos indica la dimensión del espacio y parece claro que no es posible deformar un espacio en otro mediante un homeomorfismo de manera que la dimensión aumente o disminuya. Así, una curva, que es un objeto unidimensional, no puede transformarse de manera homeomorfa a una superficie, que es un objeto bidimensional.

Como curiosidad, y como una muestra de qué tipo de propiedades son las que interesan en topología, ponemos un ejemplo cercano y reconocido. Cojamos el plano del metro de una ciudad, figura 6. Cada línea de metro, representada en el mapa por un color diferente, es un trayecto (de ida o vuelta) uniendo dos lugares de la ciudad. Además los trenes que circulan en cada línea no viajan por otras líneas. En un trayecto existen varias paradas (estaciones). De esta forma, cuando uno quiere desplazarse usando el metro, habitualmente no hay una línea directa que enlace dos estaciones de origen y de destino y necesita realizar uno o más trasbordos y cambiar de línea. Así cuando uno consulta el mapa del metro le interesa saber cómo se encuentran entrecruzadas las líneas y dónde se encuentran los nudos (intersecciones de dos o más líneas) que permita conocer en qué estaciones pararse, cambiar de línea y llegar correctamente al destino. En este sentido, la distancia entre estaciones no es una información relevante, o dicho de otro modo, no interesa conocer la *escala* del mapa del metro. Si deformamos el mapa (estirando o contrayendo), las conexiones entre líneas se siguen conservando, reteniendo la información de dónde realizar los trasbordos. Es por ello que, generalmente, los planos de metro de una ciudad no están realizados a escala y se enfatice más en indicar dónde se encuentran las intersecciones de líneas y el número de éstas. Por tanto cuando miramos un mapa, lo estamos haciendo desde un punto de vista topológico.

Yendo un poco más lejos con este ejemplo, hay que indicar la influencia de la topología en otras partes de la ciencia, no sólo en matemáticas. Así la topología está relacionada con el problema de organización de los trayectos de una empresa de autobuses, el problema de la distribución de información en redes de telecomunicaciones, los anudamientos de las moléculas de ADN, o el estudio de los diferentes modelos cosmológicos del universo.

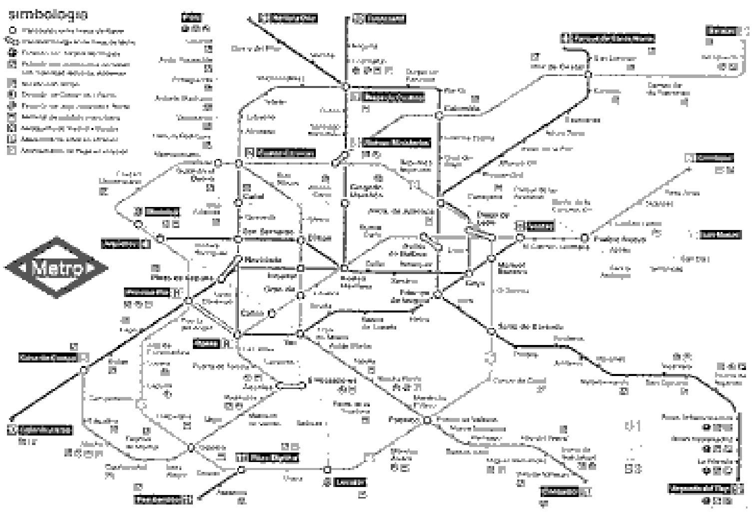


Figura 6: El plano del metro de Madrid no está hecho a escala, ya que lo importante es saber cómo están interconectadas las diferentes líneas de metro

Contenidos del libro y su desarrollo

El libro está dividido en once capítulos y que resumimos a continuación.

El capítulo 1 introduce al lector en el concepto matemático que estudia la topología, es decir, el de espacio topológico. La definición que damos de espacio topológico usa la noción de conjunto abierto. Posteriormente, damos los conceptos de conjunto cerrado, base de topología, subbase, entorno y base de entornos. La principal tarea en dicho capítulo será conocer y trabajar con todos ellos, ya que con cada uno de los mismos se puede introducir de forma equivalente el concepto de espacio topológico. En este capítulo también definimos las operaciones topológicas sobre subconjuntos de un espacio topológico, como son el interior y la adherencia de un conjunto. Finalmente, introducimos el concepto de topología relativa en un subconjunto de un espacio topológico.

El capítulo 2 se dedica a estudiar los espacios métricos como un ejemplo particular de espacio topológico. La importancia de los espacios métricos en matemáticas merece que tenga un apartado especial en el libro. El objetivo es mostrar cómo la topología de un espacio métrico puede expresarse en términos de la convergencia de sucesiones, una herramienta que muchas veces es más manejable y útil en este tipo de espacios.

Una vez introducido el objeto matemático, necesitamos definir qué aplicaciones son interesantes entre espacios topológicos. Por ello el capítulo 3 se centra en el concepto de aplicación continua y sus caracterizaciones. En el siguiente capítulo 4 estudiamos los homeomorfismos que, como ya hemos indicado, permiten clasificar espacios topológicos. También introducimos lo que es un invariante topológico, y daremos ejemplos de construcción explícita de homeomorfismos.

El capítulo 5 se dedica a introducir una topología natural en el producto cartesiano de dos espacios topológicos y que llamamos topología producto. Incidiremos en el estudio de la continuidad de aplicaciones que tienen por dominio o codominio un espacio topológico producto. Extenderemos posteriormente la topología producto al producto arbitrario de espacios topológicos y acabamos el capítulo introduciendo el concepto de grupo topológico.

El primer invariante topológico que estudiaremos con profundidad es la conexión y el capítulo 6 se dedica a su estudio. Daremos los conceptos de componente conexa, conexión local y arcoconexión.

El capítulo 7 se centra en invariantes topológicos relacionados en cómo separar mediante conjuntos abiertos dos puntos, un punto de conjunto cerrado o dos cerrados. También estudiaremos invariantes sobre la numerabilidad de bases y bases de entornos.

El segundo invariante topológico al que dedicamos un amplio desarrollo en este libro es el de compacidad. En el capítulo 8 estudiamos las propiedades topológicas que tiene un espacio compacto. Se dará el concepto de compacidad local y finalmente explicamos el proceso de compactificación de un espacio no compacto.

En el capítulo 9 introducimos el concepto de espacio topológico cociente. Daremos ejemplos de cómo se pueden construir homeomorfismos entre espacios cocientes con espacios ya conocidos y dedicamos una parte del capítulo a estudiar la topología del espacio proyectivo. El capítulo 10 es una continuación del anterior, donde incidimos en el estudio de espacios cocientes con la propiedad añadida de que sean grupos topológicos. Nos centraremos especialmente en espacios de matrices.

El libro finaliza en el capítulo 11 con una introducción a la topología algebraica estudiando el concepto de grupo fundamental. Aunque la idea es más o menos intuitiva, al menos cuando consideramos subconjuntos de espacios euclídeos, la construcción del grupo fundamental requiere de cierto esfuerzo. Nos detendremos en calcular el grupo fundamental de la circunferencia y finalmente, aportaremos técnicas para hallar de forma explícita el grupo fundamental de numerosos espacios topológicos.

La bibliografía que aparece al final del libro se refiere a parte de los textos de topología que he usado a lo largo de mis años de docencia, y por tanto, en el desarrollo de este libro. Ya que éste se basa principalmente en las asignaturas de topología que se han ido impartiendo en la Universidad de Granada, los libros de la bibliografía no recogen el desarrollo curricular de los temarios de estas asignaturas. Esto no quita ni mucho menos la importancia de usar, manejar y trabajar dichos textos, tal como el autor de este libro ha hecho a lo largo de los cursos impartidos.

Una vez establecido los contenidos del libro, indicamos de qué manera se puede desarrollar temporalmente. El libro está concebido como un curso extenso de topología general para ser impartido en una asignatura anual, con una breve introducción a la topología algebraica en el último capítulo. El desarrollo temático está realizado de forma que la persona que empieza el libro puede acabarlo sin necesitar de otros conocimientos de topología que no sean los que se han establecido con anterioridad en el mismo texto.

Dependiendo del tiempo disponible y de las necesidades de cada uno (por ejemplo, para una asignatura semestral), es posible hacer un curso de topología general más reducido quitando partes de este libro. Detallo ahora qué contenidos pueden evitarse.

1. El capítulo 2 sobre espacios métricos se puede resumir e introducirlo en el capítulo 1.
2. Si se quiere entender el concepto de topología producto de una manera sencilla, basta con estudiarlo para el producto de dos espacios topológicos. También es posible incluir el concepto de producto topológico en

el capítulo 1 como uno más de los ejemplos de espacios topológicos. Así se puede dejar de estudiar la sección 5.3 que generaliza el concepto para una familia arbitraria. La sección 5.4 sobre grupos topológicos es independiente y puede descartarse.

3. El capítulo 7 puede evitarse, excepto el concepto de espacio Hausdorff, que se utiliza posteriormente en el capítulo 8 de compacidad. La sección 8.3 usa los conceptos de normalidad y regularidad del capítulo 7.

4. Para un conocimiento básico de conexión y compacidad, puede eliminarse las secciones 6.5 y 8.4 sobre conexión local y compacidad local respectivamente. También puede descartarse el concepto de compactificación de un espacio topológico y por tanto, la sección 8.5. Si por el contrario se opta por impartir ésta última, se necesita la noción de compacidad local de la sección 8.4

5. Si se quiere dar sólo el concepto de la topología cociente, es suficiente con las dos primeras secciones del capítulo 9.

6. El capítulo 10 es una continuación y extensión de la sección 5.4 usando la idea de topología cociente del capítulo 9. Independientemente si la sección 5.4 se imparta o no, este capítulo se puede prescindir en su totalidad.

7. El capítulo 11 sobre el grupo fundamental puede dejarse de lado ya que se encuadra más dentro de un curso de topología algebraica. También se podría dar como capítulo independiente después del 6 sobre conexión, aunque se necesita algunos conocimientos sobre compacidad en $\mathbb{R}^n$.

Es evidente que existen diversas maneras de desarrollar un curso de topología general, como uno puede corroborar al consultar cualquier libro de la bibliografía. Quiero justificar el que se ha elegido en este libro, concretamente, quiero destacar dónde hemos ido colocando la construcción de la topología relativa, topología producto y topología cociente.

En algunos textos se puede observar que tras la definición de espacio topológico, se sigue con ejemplos de nuevos espacios, como son el subespacio topológico, el producto topológico y el espacio topológico cociente. Esto es natural en matemáticas, ya que cuando se define una estructura matemática se plantea el problema de cómo llevarla a subconjuntos, productos cartesianos o conjuntos cocientes. En tal caso, la desventaja que he apreciado es que las tres construcciones entrarían a formar parte del conjunto de los ejemplos que se muestran en el primer capítulo, sin resaltar por separado su relevancia e importancia. Además no sería posible en un primer capítulo desarrollar las propiedades de estos nuevos espacios ya que se necesita de otros conceptos topológicos que son precisos conocer previamente.

Por el contrario, en este libro se ha optado porque cada uno de ellos aparezca diferenciado en un capítulo aparte. Así, el concepto de la topología relativa, la que se define de manera natural en un subconjunto de un espacio topológico, aparece en el primer capítulo. A pesar de su sencillez en la formulación, el concepto de topología relativa no es fácil de entender por el alumno, así que merece un desarrollo más amplio y detenido. Para la topología producto es necesario conocer el concepto de aplicación continua, así que al menos necesitamos de dicho concepto que aparece en el capítulo 3. Finalmente, la topología cociente la colocamos muy al final del libro, en el capítulo 9. Las razones son varias. Primero, para un alumno el mismo concepto conjuntista de conjunto cociente ya le resulta difícil de comprender, y si a eso le añadimos la idea de espacio topológico, puede resultar inapropiado colocar la topología cociente en los inicios de este libro, y mucho menos, como un ejemplo más de espacio topológico. Además, y a la hora de dar ejemplos explícitos de homeomorfismos entre espacios cocientes y otros espacios, que es lo que en verdad resulta interesante conocer en este capítulo, es necesario utilizar el concepto de compacidad, luego partes del capítulo 8 deben ser desarrolladas con anterioridad.

Algunas observaciones para estudiar topología

A menudo digo a los alumnos que la topología es "*abstracta y no fácil*". Hay varias observaciones que hacer y en las que merece la pena detenerse. Probablemente la primera dificultad cuando uno empieza a estudiar topología es que previamente ya conoce algunos conceptos topológicos, especialmente los de la recta euclídea $\mathbb{R}$, aunque no haya oído todavía la palabra 'topología'. Así, en un curso habitual de cálculo o análisis matemático, el alumno ya maneja conceptos como interior y adherencia de un intervalo, compacidad, y continuidad de aplicaciones. Incluso es posible que haya extendido estos conceptos a espacios métricos, al menos, al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Habitualmente en los planes de estudios universitarios de matemáticas, dicha asignatura de análisis matemático se imparte en un curso previo o simultáneo al de topología. Esto puede originar una cierta confusión para el alumno que empieza a iniciarse a la topología ya que, efectivamente, los espacios métricos son un ejemplo más de espacios topológicos, pero no todos los espacios topológicos son espacios métricos. Si el estudiante ya está familiarizado al lenguaje de intervalos de $\mathbb{R}$ o de bolas en espacios métricos, entonces tiende a pensar que en los espacios topológicos también hay bolas, lo cual no es cierto.

También hay que indicar que para empezar a estudiar por primera vez topología se requiere de cierto nivel de abstracción. En general, los conjuntos que se estudian en topología no son espacios euclídeos o subconjuntos suyos, aún siendo éstos muy importantes. También sucede que trabajaremos con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ a los que se ha cambiado la topología euclídea por otra. A esto se le añade que muchos conceptos topológicos usan vocablos que ya son utilizados en el lenguaje cotidiano pero con un valor semántico diferente. Un ejemplo de ello es el concepto de conjunto abierto y conjunto cerrado. Así, en un espacio topológico un conjunto cerrado es aquél cuyo complementario es abierto, y así, un conjunto cerrado *no* es aquél que no es abierto. Sin embargo, los vocablos abierto y cerrado son usados en el lenguaje diario como conceptos opuestos, y así un objeto (una puerta, una caja) o está abierto o está cerrado. Por contra, en topología, un conjunto puede ser abierto y cerrado a la vez.

Otra dificultad cuando uno se inicia en la topología es que la abstracción necesaria nos aleja de poder imaginarnos los espacios topológicos y los conceptos que maneja. Por ejemplo, en esta introducción hemos afirmado que la topología es aquella parte de las matemáticas que estudia las propiedades de los espacios que permanecen invariantes por deformaciones bicontinuas. También hemos dicho que la topología estudia la cercanía de los elementos de un espacio, y por tanto, se trabaja con el concepto de continuidad. Sin embargo, veremos al comienzo del capítulo 1 que en la definición de espacio topológico no aparece en ningún lugar esta idea de cercanía y, efectivamente, es difícil imaginársela en estos primeros momentos. Para ello es necesario introducir el concepto de entorno, e incluso así, resulta todavía extraño imaginarse qué se quiere indicar con que dos puntos sean próximos en un espacio topológico. De nuevo, la topología usual de $\mathbb{R}$ (o de los espacios euclídeos) añade cierta confusión a esta tarea. Es después de trabajar con ejemplos y realizar suficientes ejercicios, y con algo de paciencia, cuando uno puede llegar a alcanzar el verdadero sentido de proximidad y el de continuidad de una aplicación.

Por último, otro problema que aparece cuando uno empieza a estudiar topología, y ligado a las ideas abstractas que usa ésta, es que es fundamental tener una buena base de la teoría de conjuntos. En los planes de estudios universitarios más recientes, la teoría de conjuntos ha ido perdiendo peso poco a poco y si se explica, es a veces de forma resumida, incluso vaga e imprecisa. La topología hace uso constante de la teoría de conjuntos, así como las operaciones entre subconjuntos, aplicaciones, numerabilidad, productos cartesianos, relaciones de orden y de equivalencia, etc. Por ello es necesario conocer y saber manejar todos estos conceptos de forma apropiada y precisa.

Una manera de evitar algunos estos problemas es motivar y justificar el concepto de espacio topológico a partir de espacios conocidos, y no hay duda que son los espacios métricos, o si se prefiere, los espacios euclídeos, los que pueden introducir de forma más amena los conceptos topológicos. Personalmente, tengo que indicar que a veces he impartido la asignatura de topología empezando con espacios métricos, para luego ir abstrayendo las ideas y llegar finalmente a la esencia de las propiedades topológicas de un espacio métrico. Con ellas ya en la mano, se introduce el concepto de espacio topológico, y del mismo modo, el concepto de aplicación continua. Sin embargo he comprobado no pocas veces que añade confusión, pues si el alumno se habitúa en primer lugar a conocer y trabajar con cierta profundidad las propiedades de un espacio métrico, más tarde, cuando ya conoce el concepto de espacio topológico, tiende a pensar que éste no es más que un espacio métrico. Por tanto, he desechado en este libro esta aproximación y he optado por definir un espacio topológico de manera abstracta partiendo del concepto de conjunto abierto. En este libro vamos a detenernos, como no podía ser de otra forma, en los espacios métricos, dedicando específicamente un capítulo, pero con posterioridad a haber trabajado y desarrollado suficientemente los concepto básicos que existen alrededor de un espacio topológico.

Notas finales

A lo largo de los capítulos del libro aparecen numerosos ejemplos de los conceptos topológicos que se tratan en cada uno de ellos. Estos ejemplos aparecen destacados tipográficamente en el texto con el título de EJEMPLO, con un tamaño menor de letra, y con una separación en el margen izquierdo, y que no son más que un conjunto de 'ejercicios resueltos' que creemos que pueden ser útiles para el lector. También serán utilizados para mostrar contraejemplos u observaciones destacadas.

Cada capítulo acaba con una relación de ejercicios. Estos ejercicios tienen su origen no sólo en los problemas que he propuesto en los diferentes cursos a lo largo de los años, sino también en los que aparecen en los textos habituales de topología, algunos de los cuales están citados en la bibliografía. Con los enunciados de los ejercicios, publiqué un libro con la resolución de numerosos de ellos y titulado Ejercicios de Topología General (editorial Nativola, Granada, 2009).

También he tomado contenidos y ejemplos del blog de topología que he mantenido desde el año 2008, llamado 'Topología I' y cuya dirección web es http://topologia-i.blogspot.com.es/

En este blog existen numerosas entradas, en general breves, y también muchas observaciones que permiten adquirir más práctica con los conocimientos topológicos que aparecen a lo largo de este texto.

Este libro tiene su origen en otro que publiqué en 1995 con el título Curso de Topología General, con un enfoque de partida diferente. Su edición limitada, hizo que en la práctica fuera de acceso casi imposible. Con este libro, la metodología y muchos de sus contenidos han cambiado y de ahí su completa reelaboración.

En el apartado de agradecimientos quiero destacar a todos los alumnos que he tenido en mis años de docencia en la Universidad de Granada. Es un placer personal enseñar matemáticas a estudiantes de los primeros cursos universitarios, de los que aprendo siempre nuevas formas de impartir las clases y donde encuentro constantemente motivación para seguir trabajando. A todos ellos está dedicado este libro.

Finalmente quisiera dar las gracias al profesor Alfonso Romero, que me convenció de la necesidad de publicar este libro y que me llevó definitivamente a ponerme en la tarea de su redacción.

Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
Granada, julio de 2014

Capítulo 1

Espacio topológico

Este capítulo se dedica a introducir el concepto de espacio topológico, el objeto matemático central de este libro. Como ya hemos comentado en la introducción, la definición de espacio topológico es abstracta y la presentamos despojada de cualquier idea relacionada con la cercanía o la proximidad. Un espacio topológico no será más que un conjunto y una familia de subconjuntos de éste con una serie de propiedades conjuntistas relacionadas con la intersección y la unión de conjuntos. Desde este punto de vista, trabajar con un espacio topológico no será nada más que utilizar las herramientas de la teoría de conjuntos. A lo largo de este capítulo, estableceremos también diferentes maneras equivalentes de introducir el concepto de espacio topológico. En la parte final del capítulo se estudiará concepto de subespacio topológico y la posición relativa de un punto respecto de un conjunto de un espacio topológico .

1.1. Espacio topológico

Como ya hemos comentado en la introducción del libro, presentamos la noción de espacio topológico usando solo teoría conjuntista.

Definición 1.1.1. Un espacio topológico es un par ordenado (X, τ), donde X es un conjunto no vacío y τ es una familia de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1. Los conjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a τ.
2. $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$, $\forall \{O_i\}_{i\in I} \subset \tau$.

3. $O_1 \cap O_2 \in \tau$, $\forall O_1, O_2 \in \tau$.

A τ se llama la topología de (X, τ). Cada elemento de τ se llama conjunto abierto de (X, τ) y también decimos que es un abierto de τ o simplemente abierto de X si se sobreentiende la topología.

Por tanto, un espacio topológico es un conjunto y una familia de subconjuntos suyos que contiene a los subconjuntos triviales y esta familia es cerrada para la unión arbitraria y para la intersección finita. Es evidente que si $\{O_1, \ldots, O_n\} \subset \tau$, entonces $O_1 \cap \ldots \cap O_n \in \tau$.

A continuación mostramos algunos ejemplos de espacios topológicos y que nos acompañarán a lo largo del libro.

EJEMPLO 1.1.2.

1. Sea X un conjunto y $\tau_T = \{\emptyset, X\}$. La topología τ_T se llama la *topología trivial* y a (X, τ_T), espacio topológico trivial. Es evidente que esta topología es la más pequeña que hay en un conjunto X.
2. Sea X un conjunto y $\tau_D = \mathcal{P}(X)$, donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de X. La topología τ_D se llama la *topología discreta* y a (X, τ_D), espacio topológico discreto. Esta topología es la topología más grande que hay en un conjunto.
3. Sea X un conjunto y $\tau_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus F : F \subset X \text{ es finito}\}$. A τ_{CF} se le llama la *topología de los complementos finitos* o *topología cofinita*. Es fácil probar que X es un conjunto finito si y sólo si $\tau_D = \tau_{CF}$. Para evitar en este caso la coincidencia de ambas topologías, a lo largo del libro se supondrá siempre que un conjunto con la topología cofinita tiene cardinal infinito.
4. Sea $X = \{a, b\}$ un conjunto con dos elementos. Se define la *topología de Sierpinski* en X como $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. La elección del elemento a en vez de b es arbitraria, y podríamos haber definido del mismo modo otra topología mediante $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.
5. Sea un conjunto X y $p \in X$ un elemento que se fija y se distingue de los demás. Se definen dos topologías en X del siguiente modo:

$$\tau_{in} = \{\emptyset\} \cup \{O \subset X : p \in O\}.$$

$$\tau_{ex} = \{X\} \cup \{O \subset X : p \notin O\}.$$

   Las topologías τ_{in} y τ_{ex} se denominan, respectivamente, la *topología del punto incluido* y la *topología del punto excluido* para el punto p. Obsérvese que cada una de ellas va asociada al punto p que se ha fijado de antemano, y por tanto, al cambiar dicho punto, las topologías también cambian.

También vemos que la topología de Sierpinski del ejemplo anterior coincide con la topología del punto incluido para el punto $p = a$ y también coincide con la topología del punto excluido para $p = b$.

A partir de los ejemplos anteriores, hacemos las siguientes observaciones:

1. Dado un conjunto X, siempre se puede definir una topología en él. Para ser más preciso, dado un conjunto X, siempre se puede definir una familia τ de subconjuntos de X tal que (X, τ) sea un espacio topológico.
2. Un espacio topológico es, como se ha indicado, un par ordenado, en el sentido que un *mismo* conjunto X puede tener asociado *diferentes* topologías. Al ir cambiando las topologías, obtenemos diferentes espacios topológicos.
3. En un conjunto X se pueden definir tantas topologías del punto incluido como elementos tenga X. Aunque todas son diferentes, parece claro que esencialmente son las 'mismas'. Esto será precisado en el capítulo 4.

Damos otro ejemplo de espacio topológico, y que destacamos del resto. Supongamos que (X, τ) es un espacio topológico e Y un conjunto biyectivo con X, es decir, existe un aplicación $f : X \to Y$ que es biyectiva. Observemos que Y no es un espacio topológico, sino simplemente un conjunto sin ninguna estructura matemática añadida. Nos preguntamos si se puede construir una topología en Y a partir de la existente en X y usando la aplicación f, de manera que lleve de forma natural todas la propiedades topológicas que tiene (X, τ) en el nuevo espacio topológico que se construya en Y. La respuesta es afirmativa y nos la da el siguiente teorema.

Teorema 1.1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una aplicación biyectiva. Entonces $\tau(f) = \{f(O) : O \in \tau\}$ es una topología en Y.*

Demostración. La prueba es evidente por las propiedades que tiene una aplicación biyectiva respecto de la unión e intersección de subconjuntos. En esta situación, uno puede considerar la aplicación biyectiva $f^{-1} : (Y, \tau(f)) \to X$ y darse cuenta que, con la notación seguida, $\tau(f)(f^{-1}) = \tau$. □

Establecemos una caracterización de la topología discreta.

Proposición 1.1.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico tal que todo conjunto unitario $\{x\}$, $x \in X$, es abierto. Entonces τ es la topología discreta.*

Demostración. Sea $A \subset X$. Entonces

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \in \tau.$$

Por tanto, todo subconjunto de X es abierto en (X, τ), es decir, $\tau_D \subset \tau$. Como τ_D es la topología más grande que hay en X, se deduce la igualdad $\tau = \tau_D$. $\square$

A partir del concepto de conjunto abierto, definimos un conjunto cerrado.

Definición 1.1.5. Sea (X, τ) un espacio topológico y $F \subset X$. Se dice que F es un conjunto cerrado si $X \setminus F \in \tau$. Se denotará por $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los cerrados de un espacio topológico.

El concepto de conjunto cerrado puede confundir ya que uno puede pensar que un conjunto es cerrado es aquél que no es un conjunto abierto, lo cual, no es cierto. Así en todo espacio topológico, los conjuntos triviales son abiertos y cerrados a la vez. Calculamos ahora la familia de conjuntos cerrados para las topologías del ejemplo 1.1.2.

EJEMPLO 1.1.6.
1. Para la topología trivial, $\mathcal{F}_T = \tau_T$. En este caso, todo conjunto cerrado también es abierto.
2. Para la topología discreta, $\mathcal{F}_D = \tau_D$. De nuevo sucede que los conjuntos cerrados coinciden con los conjuntos abiertos.
3. Para la topología cofinita, $\mathcal{F}_{CF} = \{F \subset X : F \text{ es finito}\} \cup \{X\}$. En este caso, y excepto los conjuntos triviales, ningún conjunto es abierto y cerrado a la vez.
4. Para la topología de Sierpinski, la familia de conjuntos cerrados es $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.
5. Sea $p \in X$ y τ_{in} y τ_{ex} las topologías del punto incluido y del punto excluido para el punto p, respectivamente. Entonces $\mathcal{F}_{in} = \tau_{ex}$ y $\mathcal{F}_{ex} = \tau_{in}$.
6. Consideremos la topología del teorema 1.1.3. Entonces la familia de cerrados $\mathcal{F}(f)$ de la topología $\tau(f)$ no es más que $f(\mathcal{F}) = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$.

Gracias a las propiedades de conjunto abierto y de las leyes de De Morgan de la teoría de conjuntos, es inmediato el siguiente resultado:

Proposición 1.1.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *Los conjuntos $\emptyset$ y X son cerrados.*

2. $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$, $\forall \{F_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}$.

3. $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$, $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.

Ya que los conceptos de abierto y cerrado son, en cierto sentido duales, se puede conocer la topología de un espacio topológico si sólo se conoce la familia de cerrados. Esto viene reflejado en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.8. *Sea X un conjunto y $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. *Los conjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{C}$.*

2. $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{C}$, $\forall \{F_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{C}$.

3. $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$, $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{C}$.

Entonces existe una única topología τ en X de forma que la familia de conjuntos cerrados $\mathcal{F}$ coincide con $\mathcal{C}$.

Demostración. Basta con definir $\tau = \{O \subset X : X \setminus O \in \mathcal{C}\}$. Es evidente que τ es una topología en X y que $\mathcal{F} = \mathcal{C}$. Veamos que es única. Si existe otra topología τ' tal que $\mathcal{F}' = \mathcal{C}$, entonces la familia τ' de conjuntos abiertos está formada por los conjuntos complementarios de $\mathcal{C}$, es decir, coincide con los elementos de τ. □

Ya hemos visto que un mismo conjunto X puede soportar diferentes topologías. Además, si τ es una topología en X, siempre son ciertas las inclusiones $\tau_T \subset \tau \subset \tau_D$. Sin embargo, dos topologías τ_1 y τ_2 pueden no ser comparables desde el punto de vista conjuntista, es decir, no tiene porqué ser cierta la inclusión $\tau_1 \subset \tau_2$ o la inclusión $\tau_2 \subset \tau_1$. Así, la topología del punto incluido y del punto excluido no son comparables, o por ejemplo, si $X = \{a, b\}$, las topologías $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ satisfacen $\tau_1 \not\subset \tau_2$ y $\tau_2 \not\subset \tau_1$.

En el caso que dos topologías en un conjunto sean comparables, tenemos el siguiente concepto.

Definición 1.1.9. Sea X un conjunto y τ_1 y τ_2 dos topologías en X. Se dice que τ_1 es más fina que τ_2 si $\tau_1 \supset \tau_2$. También diremos que τ_2 es menos fina que τ_1.

De esta forma, la topología trivial es la topología menos fina que hay en un conjunto y la topología discreta es la topología más fina posible.

El siguiente resultado caracteriza las propiedades de 'ser más fina' en términos de conjuntos cerrados. Aunque su enunciado puede resultar chocante en un primer momento, la demostración es casi inmediata.

Proposición 1.1.10. *Sea X un conjunto y τ_1 y τ_2 dos topologías en X. Entonces τ_1 es más fina que τ_2 si y sólamente si $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$.*

Demostración. Supongamos que $\tau_1 \supset \tau_2$. Sea $F \in \mathcal{F}_2$. Entonces $X \setminus F \in \tau_2$, luego $X \setminus F \in \tau_1$. Esto prueba que $F \in \mathcal{F}_1$. El recíproco es igual de fácil. □

1.2. Base de una topología

En un espacio topológico es deseable tener una familia más pequeña de abiertos que nos permita conocer el resto de la topología. Este papel lo va a desempeñar el concepto de base de una topología.

Definición 1.2.1. Una base de la topología de un espacio topológico (X, τ) es una familia β de conjuntos abiertos de (X, τ) tales que todo conjunto abierto es unión de elementos de la base β, es decir, para todo $O \in \tau$ existe un conjunto de índices I, tal que

$$O = \bigcup_{i \in I} B_i, \quad B_i \in \beta.$$

Observemos que la palabra 'base' también se usa en álgebra lineal y puede dar a confusión si uno ya conoce lo que es una base de un espacio vectorial. Esta confusión aparece cuando en un espacio topológico, y dada una base, un abierto pueda ser expresado de diferentes formas como unión de elementos de la base. Esta no unicidad choca con la unicidad de la descomposición de un vector en combinación lineal respecto de una base dada de un espacio vectorial.

Damos una definición equivalente de base.

Proposición 1.2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y β una familia de abiertos. Entonces β es base de τ si y sólo si para todo $O \in \tau$ y para todo $x \in O$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset O$.*

Demostración. Sea β una base de la topología, $O \in \tau$ y $x \in O$. Como $O = \cup_{i \in I} B_i$, $B_i \in \beta$, existe $j \in I$ tal que $x \in B_j$. Luego, $x \in B_j \subset O$.

Para el recíproco, sea $O \in \tau$. Por hipótesis, para cada $x \in O$ existe un conjunto $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset O$. Entonces

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} B_x \subset O,$$

luego $O = \cup_{x \in O} B_x$. $\square$

De la demostración de la proposición anterior, obtenemos una caracterización de un conjunto abierto en términos de base de una topología.

Corolario 1.2.3. *Sea β una base de un espacio topológico (X, τ) y $A \subset X$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El conjunto A es abierto.*
2. *Para todo $x \in A$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset A$.*

A continuación se muestra ejemplos de bases de topologías.

Ejemplo 1.2.4.

1. En cualquier espacio topológico (X, τ), la propia topología τ es una base. Esto prueba que todo espacio topológico posee bases de topología. Evidentemente, uno aspira a tener bases con un número lo más pequeño posible de abiertos.
2. En un espacio topológico discreto (X, τ_D), una base es $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$, ya que si $O \in \tau_D$, $O = \cup_{x \in O}\{x\}$. Además, es la base de topología más pequeña en el sentido que cualquier otra base β' debe contener a β. Efectivamente, para cada $x \in X$, $\{x\}$ es abierto y $x \in \{x\}$, luego existe $B' \in \beta'$ tal que $x \in B' \subset \{x\}$. Pero esto implica que $B' = \{x\}$, probando $\beta \subset \beta'$.
3. Sea X un conjunto, $p \in X$ un elemento fijo y τ_{in} la topología del punto incluido. Entonces $\beta_{in} = \{\{x, p\} : x \in X\}$ es base de τ_{in}. En primer lugar, observemos que $\{x, p\}$ es un abierto. Por otro, si $O \in \tau_{in}$ y $x \in O$, entonces, $x \in \{x, p\} \subset O$. Además β_{in} es la base con menos elementos que pueden haber en (X, τ_{in}), en el sentido que si β' es otra base de τ_{in}, entonces $\beta_{in} \subset \beta'$.
4. Sea X un conjunto y $p \in X$ un elemento fijo. Si consideramos la topología del punto excluido, entonces $\beta_{ex} = \{\{x\} : x \neq p, x \in X\} \cup \{X\}$ es base de τ_{ex}. Efectivamente, cada elemento de β_{ex} es abierto. Por otro lado, sea $O \in \tau_{ex}$ y $x \in O$. Si $O = X$, entonces $x \in X \subset O$ y $X \in \beta_{ex}$ y si $O \neq X$, entonces $p \notin O$, y por tanto, $x \neq p$. Esto prueba que $x \in \{x\} \subset O$. Como en el ejemplo anterior, β_{ex} es la base de (X, τ_{ex}) que tiene menos elementos.
5. Consideremos el espacio topológico del teorema 1.1.3. Si β una base de τ, entonces $f(\beta) = \{f(B) : B \in \beta\}$ es base de $\tau(f)$.

Las propiedades de bases vienen recogidas en el siguiente resultado.

Proposición 1.2.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico y β una base de la topología. Entonces:*

1. $X = \cup_{B\in\beta} B$.
2. *Si* $B_1, B_2 \in \beta$ *y* $x \in B_1 \cap B_2$, *entonces existe* $B_3 \in \beta$ *tal que* $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
3. *Si* $\{O_i : i \in I\} \subset \tau$, *entonces* $\beta' = \beta \cup \{O_i : i \in I\}$ *es una base de* τ.

Demostración. Usando que X es un abierto, el propio conjunto X es unión de elementos de la base β. Para la segunda propiedad, como $B_1 \cap B_2$ es un conjunto abierto, dado $x \in B_1 \cap B_2$, el corolario 1.2.3 asegura la existencia de un elemento $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. La última propiedad es evidente ya que todo abierto es unión de elementos de β, y por tanto, como $\beta \subset \beta'$, dicho abierto también es unión de elementos (los mismos de antes) de β'. □

Hay espacios topológicos donde la única base es, esencialmente, la propia topología. Veámoslo con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.6. En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ se define los conjuntos $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ constituye una topología en $\mathbb{N}$. Probamos que si β es una base de τ, entonces $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \beta$. Por la última propiedad de la proposición anterior, las demás bases se obtienen al añadir los conjuntos triviales.

Efectivamente, supongamos que β es una base de la topología. Sea A_n, $n \in \mathbb{N}$. Como $n \in A_n$, por la proposición 1.2.2 existe $B \in \beta$ tal que $n \in B \subset A_n$. Usando que B es un conjunto abierto, entonces $B = A_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, y por tanto, $n \in A_m \subset A_n$. Como $n \in A_m$, se tiene que $n \leq m$ y de la inclusión $A_m \subset A_n$, que $m \leq n$. Por tanto $m = n$ y así $B = A_n \in \beta$. Se ha probado entonces que $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \beta$. Por último, hay que decir que $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base del espacio topológico.

Otro ejemplo de topología que se define en $\mathbb{N}$ es la siguiente. Sea $B_n = \{n, n+1, \ldots\}$ y consideramos $\tau' = \{\emptyset\} \cup \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces τ' es una topología en $\mathbb{N}$. Con un razonamiento parecido al anterior, se puede probar que la única base en este espacio topológico es τ'.

Se plantea ahora la siguiente pregunta. Dado un conjunto X, *sin ninguna estructura de espacio topológico*, y dada una familia de subconjuntos de X, ¿qué condiciones tienen que satisfacer dicha familia para que sea base de *alguna* topología en X? Probamos que justamente debe satisfacer las dos primeras propiedades de la proposición anterior.

Teorema 1.2.7. *Sea un conjunto X y una familia β de subconjuntos con las siguientes propiedades:*

1. $X = \cup_{B\in\beta} B$.
2. *Para todo $B_1, B_2 \in \beta$ y todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Entonces existe una única topología τ en X que tiene como base a β. Se dice que la topología está generada por β y se denota esta topología por $\tau(\beta)$.

Demostración. Se define

$$\tau = \{O \subset X : O \text{ es unión de elementos de } \beta\}. \tag{1.1}$$

Demostramos primero que τ es una topología en X.

1. Evidentemente $\emptyset = \cup_{i\in\emptyset} B_i$, con $B_i \in \beta$. Por la primera propiedad que satisface β, $X \in \tau$.
2. Sea ahora $\{O_i : i \in I\}$ una familia de elementos de τ. Teniendo en cuenta que cada O_i es unión de elementos de β, entonces $\cup_{i\in I} O_i$ se expresa como unión de elementos de β y por tanto, $\cup_{i\in I} O_i \in \tau$.
3. Sean O_1, $O_2 \in \tau$. Por definición de β, existen dos conjuntos de índices I y J tales que $O_1 = \cup_{i\in I} B_i^1$ y $O_2 = \cup_{j\in J} B_j^2$, donde B_i^1, $B_j^2 \in \beta$. Usando la propiedad distributiva de la unión y de la intersección,

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{i\in I, j\in J} (B_i^1 \cap B_j^2).$$

Para probar que $O_1 \cap O_2 \in \tau$, basta con demostrar que $B_i^1 \cap B_j^2 \in \tau$ y usar el apartado anterior. Para ello, dado $x \in B_i^1 \cap B_j^2$, se sabe por hipótesis que existe $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset B_i^1 \cap B_j^2$. De esta inclusión y tomando uniones en $x \in B_i^1 \cap B_j^2$, se deduce

$$B_i^1 \cap B_j^2 = \bigcup_{x\in B_i^1 \cap B_j^2} B_x,$$

luego por la definición de τ en (1.1), $B_i^1 \cap B_j^2 \in \tau$.

El siguiente paso es probar que β es base de la topología τ definida en (1.1). Esto es evidente pues $\beta \subset \tau$ y por la propia definición de τ, todo elemento de τ es unión de elementos de β. También es trivial que la topología τ es la única que tiene por base β ya que si τ' es otra topología con base β y por definición de base, los elementos de τ' son uniones arbitrarias de los elementos de β, es decir, coincide con τ. $\square$

Nota 1.2.8. Una *condición suficiente* para que se verifique la propiedad 2 en el teorema anterior es que la intersección de dos elementos de β sea otro elemento de β. En tal caso, tomamos B_3 como la propia intersección $B_1 \cap B_2$.

Una aplicación del teorema 1.2.7 permite definir la topología euclídea de $\mathbb{R}$. Por su importancia, la distinguimos de los demás ejemplos.

Definición 1.2.9. Se llama la topología euclídea (o topología usual) de $\mathbb{R}$ a la generada por los intervalos abiertos acotados, es decir, por

$$\beta_u = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\},$$

donde $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ es el intervalo abierto de extremos a y b. La topología se denota por τ_u y diremos también que $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es la recta euclídea.

Cuando no se explicite nada, se supondrá que es ésta es la topología que se considerará en $\mathbb{R}$. Para probar la propiedad 2 del teorema 1.2.7 basta usar la nota 1.2.8, ya que la intersección de dos intervalos abiertos es otro intervalo abierto. Obsérvese que β no constituye una topología, pues en general, la unión de dos intervalos abiertos no es un intervalo abierto: por ejemplo, $(0, 1), (1, 2) \in \beta_u$, pero $(0, 1) \cup (1, 2) \notin \beta_u$.

Estudiamos qué intervalos de $\mathbb{R}$ son conjuntos abiertos o conjuntos cerrados.

Proposición 1.2.10. *En la recta euclídea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ se tiene:*

1. *Un intervalo abierto es un conjunto abierto y no es un conjunto cerrado, a no ser que sea $\mathbb{R}$.*
2. *Un intervalo cerrado es un conjunto cerrado y no es un conjunto abierto.*
3. *Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\{x\}$ es un conjunto cerrado y no es abierto.*
4. *Los intervalos de la forma $[a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, no son ni abiertos ni son cerrados.*

Demostración. 1. Si el intervalo es acotado, entonces pertenece a β_u, luego es abierto. Si el intervalo es de la forma (a,∞), entonces

$$(a,\infty)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a,a+n),$$

y por tanto, $(a,\infty)\in\tau_u$. De la misma forma, $(-\infty,a)\in\tau_u$. Por último $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}\in\tau_u$

Veamos ahora que (a,b) no es un conjunto cerrado. Esto es equivalente a probar que $A=(-\infty,a]\cup[b,\infty)$ no es abierto. Usamos el corolario 1.2.3 (o la proposición 1.2.2). Efectivamente, si A fuera abierto, y como $a\in A$, existiría $(c,d)\in\beta_u$ tal que $a\in(c,d)\subset A$. Como $a<d$, la inclusión $(c,d)\subset A$ implica $(a,d)\subset[b,\infty)$, lo cual es una contradicción pues $a<b$. De forma análoga, un intervalo de la forma (a,∞) o de la forma $(-\infty,a)$ no es cerrado.

2. El complementario de un intervalo cerrado (acotado o no acotado) es abierto ya que es unión de intervalos abiertos. Esto prueba que un intervalo cerrado es un conjunto cerrado.

   Si $[a,b]$ fuera un conjunto abierto, y como $a\in[a,b]$, el corolario 1.2.3 implicaría que existe $c,d\in\mathbb{R}$, $c<d$ tal que $a\in(c,d)\subset[a,b]$. Ya que $a\in(c,d)$, se deduce $c<a$ y de $(c,d)\subset[a,b]$, que $a<c$, llegando a una contradicción. Probamos ahora que $[a,\infty)$ no es un conjunto abierto (del mismo modo se demostraría que $(-\infty,a]$ tampoco lo es). Si $[a,\infty)\in\tau_u$, y como $a\in[a,\infty)$, existiría $(c,d)\in\beta_u$ tal que $a\in(c,d)\subset[a,\infty)$. De aquí se obtiene de nuevo una contradicción.

3. Si $x\in\mathbb{R}$, entonces $\{x\}=[x,x]$ es un intervalo cerrado. Aplicamos ahora el apartado anterior.

4. Si el conjunto $[a,b)$ fuera un conjunto abierto y como $a\in[a,b]$, existiría $(c,d)\in\beta_u$ tal que $a\in(c,d)\subset[a,b)$, llegando a una contradicción como en el apartado 2. Por otro lado, si $[a,b)$ fuera cerrado, su complementario, a saber, $(-\infty,a)\cup[b,\infty)$, sería abierto. Ya que b está en dicho conjunto, el corolario 1.2.3 afirmaría que existe $(c,d)\in\beta$ tal que $b\in(c,d)\subset(-\infty,a)\cup[b,\infty)$, llegando de nuevo a una contradicción.

□

Como consecuencia de esta proposición, ningún intervalo de $\mathbb{R}$ (excepto $(-\infty,\infty)$) es un conjunto abierto y cerrado a la vez. Este resultado es un caso particular de otro que se probará en el capítulo 6 que afirma que los únicos conjuntos abiertos y cerrados de la recta euclídea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ son los conjuntos triviales, es decir, $\emptyset$ y $\mathbb{R}$.

Nota 1.2.11. Obsérvese que uno podría razonar de forma errónea que $[a, b]$ no es abierto del siguiente modo: ya que $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, y se ha visto que cada uno de dichos intervalos no es cerrado, entonces la unión tampoco es cerrado. Esto es falso en general: por ejemplo, los conjuntos $[-1, 1)$ y $(0, 2]$ no son cerrados, pero su unión, que es $[-1, 2]$, es cerrado.

El teorema 1.2.7 nos dice cuál es la base de un espacio topológico, pero no nos informa del conjunto de todos los abiertos: sólo sabemos que éstos son uniones arbitrarias de elementos de β_u. La topología usual de $\mathbb{R}$ es un ejemplo de que el conjunto $\tau \setminus \beta_u$ puede ser muy grande. Esto no impide trabajar en el espacio topológico, ya que el corolario 1.2.3 caracteriza los conjuntos abiertos a partir de una base de topología.

En el próximo ejemplo continuamos construyendo nuevas topologías en $\mathbb{R}$ siguiendo la misma idea que con la topología euclídea, pero reemplazando los intervalos abiertos y acotados por otro tipo de intervalos. También generalizamos esta idea a topologías definidas en $\mathbb{R}^2$. En parte de las bases que aparecen, la propiedad 2 del teorema 1.2.7 se verifica usando la nota 1.2.8.

EJEMPLO 1.2.12.

1. En $\mathbb{R}$ se define $\beta_S = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Esta familia de intervalos forma una base de topología y a la topología que genera se llama *topología de Sorgenfrey*. La denotamos por τ_S. De nuevo, $\beta_S \neq \tau_S$. En esta topología los intervalos abiertos (a, b) son conjuntos abiertos ya que
$$(a, b) = \bigcup_{a<c<b} [c, b).$$
De aquí se deduce que la topología de Sorgenfrey τ_S es más fina que la topología usual, es decir, $\tau_u \subset \tau_S$.
Por otro lado, esta topología no coincide con la topología usual de $\mathbb{R}$ ya que un intervalo $[a, b)$ es abierto en τ_S pero no es un conjunto abierto en τ_u por la proposición 1.2.10.
2. En $\mathbb{R}$ se considera $\beta_o = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Entonces β_o es una base para cierta topología τ. Es posible conocer la topología en este espacio topológico, y no es difícil probar que $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \beta_o$. En esta topología, un intervalo abierto acotado no es un conjunto abierto. Además, por la proposición 1.2.10, $\beta_o \subset \tau_u$ y así se concluye $\tau \subset \tau_u$.
3. Se considera en $\mathbb{R}$ la familia $\beta_c = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. Entonces β_c también es base de una topología. En particular, los conjuntos $\{x\} = [x, x]$ son conjuntos abiertos. Por la proposición 1.1.4, la topología que genera β_c es la topología discreta. Obsérvese que la familia $\{[a, b] : a, b \in$

$\mathbb{R}, a < b\}$ no cumple la propiedad 2 del teorema 1.2.7 pues basta observar que $1 \in [0,1] \cap [1,2]$ pero no existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tal que

$$1 \in [a, b] \subset [0, 1] \cap [1, 2].$$

4. En $\mathbb{R}$ se considera $\beta_d = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Entonces β_d genera una topología que se denota por τ_d y que se llama la ***topología a derechas*** de $\mathbb{R}$. Obsérvese que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $(a, \infty) = \cup_{b>a}[b, \infty)$ y esto prueba que la topología del ejemplo 2 anterior es menos fina que τ_d.

   En este espacio topológico también es fácil hallar la topología, sin más que hacer uniones arbitrarias de elementos de β_d y darse cuenta que

   $$\tau_d = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \beta \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$

   En particular, τ_d no es comparable con la topología usual ya que $[0, \infty) \in \tau_d$ pero no es abierto en τ_u y por otro lado, $(0, 1) \in \tau_u$ pero no es abierto en la topología a derechas.

5. Podemos modificar los ejemplos anteriores y definir nuevas (y diferentes) topologías en $\mathbb{R}$ mediante las siguientes bases:

   $$\beta_S^r = \{(a, b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

   $$\beta_o^r = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$$

   $$\beta_d^r = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}.$$

6. En $\mathbb{R}^2$ se considera $\beta_u = \{(a, b) \times (c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$. Entonces β_u genera una topología en $\mathbb{R}^2$ que se llama la ***topología euclídea*** (o usual) de $\mathbb{R}^2$ y se denota de nuevo por τ_u. Diremos que $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ es el ***plano euclídeo***. En este caso, se verifica la observación realizada en la nota 1.2.8.

7. En $\mathbb{R}^2$ se considera la distancia euclídea d entre dos puntos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, definida por

   $$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

   Se llama la bola de radio $r > 0$ y centro $x \in \mathbb{R}^2$ al conjunto $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x| < r\}$. Geométricamente, $B_r(x)$ no es más que el disco circular del plano centrado en x y de radio r, sin considerar el borde del disco. Entonces

   $$\beta = \{B_r(x) : x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$$

   es base de una topología en $\mathbb{R}^2$. Este espacio topológico es el primer ejemplo de los que han aparecido hasta ahora en el que la intersección de dos elementos de β no es otro elemento de β que, en nuestro caso, dice que la intersección de dos bolas no es una bola. Tenemos pues que comprobar la propiedad 2 del teorema 1.2.7: ver figura 1.1. Sea $z \in B_r(x) \cap B_s(y)$. Probamos que $B_\delta(z) \subset B_r(x) \cap B_s(y)$ donde $\delta = \min\{r - |z - x|, s - |z -$

$y|\}$. Efectivamente, si $w \in B_\delta(z)$, la propiedad triangular de la distancia euclídea implica

$$|w-x| \leq |w-z| + |z-x| < \delta + |z-x| \leq (r - |z-x|) + |z-x| = r,$$

probando que $w \in B_r(x)$. Del mismo modo se tiene $w \subset B_s(y)$.

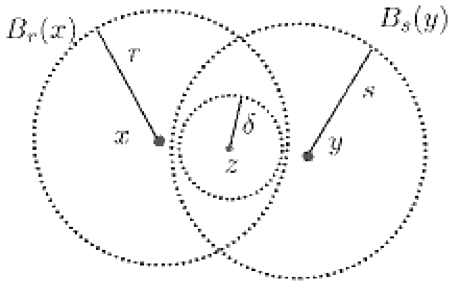


Figura 1.1: Prueba de que las bolas de $\mathbb{R}^2$ son una base de la topología euclídea

8. La familia $\beta = \{(a,b) \times \mathbb{R} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ es base de una topología en $\mathbb{R}^2$. Esta topología es menos fina que la topología usual de $\mathbb{R}^2$, pues esta base está incluida en la base β_u.
9. El ejemplo anterior, y el de la topología usual τ_u de $\mathbb{R}^2$, se pueden generalizar considerando todos los tipos de intervalos que han aparecido en $\mathbb{R}$, y hacer los productos cartesianos de todas las formas posibles. Para ser más precisos, consideramos $\Gamma = \{\beta_u, \beta_c, \beta_S, \beta_o, \beta_d, \beta_S^r, \beta_o^r, \beta_d^r\}$. Entonces $\beta_1 \times \beta_2$ es base de una topología en $\mathbb{R}^2$, donde $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma$.

A partir de los ejemplos previos, nos planteamos la siguiente pregunta. Sea X un conjunto con dos bases β_i para sendas topologías τ_i, $i = 1, 2$. ¿Es posible comparar τ_1 y τ_2 sólo a partir de β_1 y β_2? La siguiente proposición permite comparar topologías en un caso sencillo, y ha sido usada implícitamente en las comparaciones de topologías realizadas en el ejemplo anterior.

Proposición 1.2.13. *Sea un conjunto X con dos topologías τ_1 y τ_2. Supongamos que β_1 es base de τ_1. Si $\beta_1 \subset \tau_2$, entonces $\tau_1 \subset \tau_2$.*

Demostración. Sea $O \in \tau_1$ y veamos que O es un conjunto abierto en (X, τ_2). Se sabe que $O = \cup_{i \in I} B_i$, donde $B_i \in \beta_1$. Como $B_i \in \tau_2$ y O es unión de abiertos de (X, τ_2), entonces pertenece a τ_2. □

Definición 1.2.14. Sean dos bases β_1, β_2 de topologías τ_1 y τ_2 respectivamente, definidas en un conjunto X. Se dice que las bases β_1 y β_2 son equivalentes si $\tau_1 = \tau_2$.

Evidentemente la equivalencia de bases es una relación de equivalencia definida en el conjunto de todas las bases que admite X, de manera que las clases de equivalencia se identifican con las distintas topologías que posee X. Pero ¿cómo se puede determinar si dos bases son equivalentes sin hacer uso de las respectivas topologías que generan? El siguiente teorema resuelve esta cuestión y extiende la proposición 1.2.13.

Teorema 1.2.15 (Criterio de Hausdorff). *Dadas dos bases β_1 y β_2 para sendas topologías τ_1 y τ_2 en un conjunto X, son equivalentes los dos siguientes enunciados:*

1. *La topología τ_1 coincide con τ_2.*
2. a) *Para todo $B_1 \in \beta_1$ y todo $x \in B_1$ existe $B_2 \in \beta_2$ tal que $x \in B_2 \subset B_1$.*

   b) *Para todo $B_2 \in \beta_2$ y todo $x \in B_2$ existe $B_1 \in \beta_1$ tal que $x \in B_1 \subset B_2$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $B_1 \in \beta_1$ y $x \in B_1$. Teniendo en cuenta que $\beta_1 \subset \tau_1 = \tau_2$ y β_2 es una base de esta topología, la proposición 1.2.2 implica que existe $B_2 \in \beta_2$ tal que $x \in B_2 \subset B_1$. El otro apartado es análogo.

(2) $\Rightarrow$ (1). Probamos la igualdad de las dos topologías. Por el corolario 1.2.3, la hipótesis afirma que todo elemento de β_1 es un conjunto abierto para la topología τ_2. Por la proposición 1.2.13, $\tau(\beta_1) = \tau_1 \subset \tau_2$. De la misma forma se tiene $\tau(\beta_2) = \tau_2 \subset \tau_1$. $\square$

De la demostración se deduce la siguiente consecuencia:

Corolario 1.2.16. *Sea X un conjunto con dos bases β_i para sendas topologías τ_i, $i = 1, 2$. Entonces $\tau_1 \subset \tau_2$ si y sólo si para todo $B_1 \in \beta_1$ y para todo $x \in B_1$, existe $B_2 \in \beta_2$ tal que $x \in B_2 \subset B_1$.*

Corolario 1.2.17. *En $\mathbb{R}^2$, la topología generada por las bolas es la topología usual.*

Demostración. Usamos el criterio de Hausdorff para comparar las dos bases. Denotamos por β_u la base formada por el producto de intervalos abiertos acotados de la propia definición dada en el 1.2.12 y sea β la base dada por las bolas. Probamos los dos apartados del teorema 1.2.15: véase la figura 1.2.

Sea $(a, b) \times (c, d) \in \beta_u$ y $x \in (a, b) \times (c, d)$. Si $x = (x_1, x_2)$, sea $r = \min\{x_1 - a, b - x_1, x_2 - c, d - x_2\}$ y veamos que $x \in B_r(x) \subset (a, b) \times (c, d)$. Es evidente

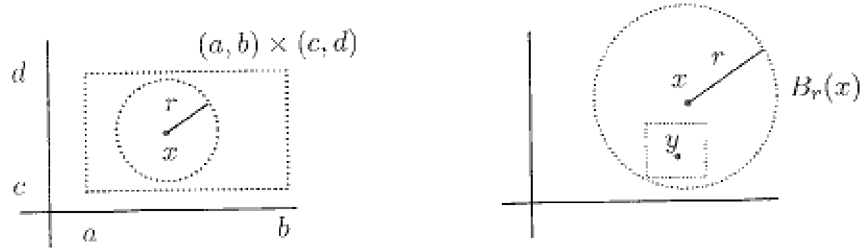


Figura 1.2: La base β_u formada por los rectángulos de $\mathbb{R}^2$ y la base β de las bolas son equivalentes y generan la topología euclídea de $\mathbb{R}^2$

que x está en la bola $B_r(x)$. Veamos ahora la inclusión $B_r(x) \subset (a,b)\times(c,d)$. Sea $y \in B_r(x)$. Entonces

$$r > |y-x| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2} \geq |y_1-x_1|, |y_2-x_2|.$$

En particular, y por la definición de r,

$$|y_1-x_1| < x_1-a,\ |y_1-x_1| < b-x_1,$$

probando que $y_1 \in (a,b)$. De forma parecida, $y_2 \in (c,d)$ y por tanto, $y \in (a,b)\times(c,d)$.

Sea ahora $B_r(x) \in \beta$ e $y \in B_r(x)$. Se toma $\delta = (r-|y-x|)/\sqrt{2}$ y veamos que $(y_1-\delta, y_1+\delta)\times(y_2-\delta, y_2+\delta) \subset B_r(x)$. Sea $z \in (y_1-\delta, y_1+\delta)\times(y_2-\delta, y_2+\delta)$. Obsérvese que

$$|z-y| = \sqrt{(z_1-y_1)^2+(z_2-y_2)^2} < \sqrt{\delta^2+\delta^2} = \sqrt{2}\delta = r-|y-x|.$$

Entonces la desigualdad triangular de la distancia euclídea implica

$$|z-x| \leq |z-y| + |y-x| < (r-|y-x|) + |y-x| = r,$$

luego $z \in B_r(x)$. □

Este corolario se generaliza a dimensiones arbitrarias. Para ello definimos primero el espacio euclídeo de dimensión n

Definición 1.2.18. Se llama topología euclídea, o topología usual, de $\mathbb{R}^n$ a la topología generada por la familia de conjuntos

$$\beta = \{(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n) : a_i < b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Se denota dicha topología como τ_u y se dice que $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$ es el espacio euclídeo de dimensión n.

Recordemos que en $\mathbb{R}^n$ la distancia euclídea d está definida por

$$d(x,y) = |x-y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Se define la *bola de centro x y radio* $r > 0$ como

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

El conjunto formado por todas las bolas

$$\beta = \{B_r(x) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\},$$

también es base de la topología usual de $\mathbb{R}^n$ ya que la demostración del corolario 1.2.17 se generaliza fácilmente a dimensiones arbitrarias.

Nota 1.2.19. Si hacemos $n = 1$, entonces $B_r(x)$ no es más que el intervalo abierto $(x-r, x+r)$. En este caso, el conjunto $\{B_r(x) : x \in \mathbb{R}, r > 0\}$ coincide con la familia β_u dada en la definición 1.2.9 de la topología usual de $\mathbb{R}$.

Seguimos definiendo nuevos espacios topológicos a partir de bases de la topología. Consideramos un conjunto X dotado de una relación de orden total $\leq$, es decir, $\leq$ es una relación de orden y además, dados dos elementos cualesquiera $x, y \in X$, siempre se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$. En los dos siguientes ejemplos definimos dos topologías relacionadas con dicho orden y de paso, extendemos topologías que ya se habían definido en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.20. Sea un conjunto ordenado $(X, \leq)$ y $a, b \in X$. Definimos los conjuntos

$$]a,b[= \{x \in X : a < x < b\},$$

$$[a,b[= \{x \in X : a \leq x < b\},$$

$$]a,b] = \{x \in X : a < x \leq b\}.$$

En $(X, \leq)$ tenemos la posibilidad de que pueda haber un mínimo m (resp. un máximo M), es decir, un elemento $m \in X$ tal que $m \leq x$ para todo $x \in X$ (resp. $M \in X$ tal que $x \leq M$ para todo $x \in X$). Se considera la familia

$$\beta = \{]a,b[: a < b, a, b \in X\} \cup \{[m,a[: a \in X\} \cup \{]a,M] : a \in X\}. \quad (1.2)$$

Entonces β es base de una topología definida en X que se llama la *topología del orden* y que denotamos por τ_o. Observemos que, distinguiendo casos según si existen los elementos m o M, la intersección de dos elementos de β es otro elemento de β. Así, por ejemplo, y en el caso de que exista M, tenemos

$$]a,b[\cap]c,M]=]\max\{a,c\},M],$$

donde por $\max\{a,c\}$ denotamos aquel elemento $d\in\{a,c\}$ tal que $a\leq d$ y $c\leq d$; el hecho de que la relación $\leq$ sea total asegura la existencia de dicho elemento $\max\{a,c\}$.

En el caso particular que $X=\mathbb{R}$ y $\leq$ es el orden usual, entonces no existen mínimo ni máximo, el conjunto $]a,b[$ coincide con el intervalo abierto (a,b) y la base β dada en (1.2) es la base β_u de la topología euclídea que apareció en la definición 1.2.9.

Ejemplo 1.2.21. Se considera un conjunto ordenado $(X,\leq)$ y para todo $x\in X$ se define

$$[x,\rightarrow[=\{y\in X: x\leq y\}.$$

Sea $\beta_d=\{[x,\rightarrow[: x\in X\}$. Entonces β_d es base para una cierta topología τ_d, que se llama *topología a derechas* de X. Además en esta topología la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es también un conjunto abierto.

Probamos que β_d es base. Sea $x\in X$. Entonces $x\in[x,\rightarrow[$ y por tanto $X=\bigcup_{x\in X}[x,\rightarrow[$. Por otra parte, si $z\in[x,\rightarrow[\cap[y,\rightarrow[$ entonces $x\leq z$ e $y\leq z$ y así $[z,\rightarrow[\subset[x,\rightarrow[\cap[y,\rightarrow[$.

Se prueba ahora que la intersección arbitraria de elementos de β_d es un conjunto abierto. Se considera $\{[x_i,\rightarrow[: i\in I\}\subset\beta_d$. Entonces es fácil probar que

$$\bigcap_{i\in I}[x_i,\rightarrow[=\bigcup_{y\geq x_i,\ i\in I}[y,\rightarrow[,$$

y esta unión es, por tanto, un conjunto abierto de (X,τ_d). Sea ahora una familia de abiertos $\{O_i: i\in I\}$. Para demostrar que $\bigcap_{i\in I}O_i$ es un conjunto abierto, usamos el corolario 1.2.3. Sea $x\in\bigcap_{i\in I}O_i$. Ya que O_i es abierto, para cada $i\in I$ existe $B_i^x=[x_i,\rightarrow[\in\beta_d$ tal que $x\in B_i^x\subset O_i$. Por tanto

$$x\in\bigcap_{i\in I}B_i^x\subset\bigcap_{i\in I}O_i.$$

Tomando todos los elementos de $\bigcap_{i\in I}O_i$, tenemos

$$\bigcap_{i\in I}O_i=\bigcup_{x\in\bigcap_{i\in I}O_i}\left(\bigcap_{i\in I}B_i^x\right),$$

que es un conjunto abierto.

Un ejemplo de la topología a derechas aparece al tomar $X=\mathbb{R}$ con su orden usual $\leq$. Efectivamente, si $x\in\mathbb{R}$, entonces

$$[x,\rightarrow[=\{y\in\mathbb{R}: x\leq y\}=[x,\infty).$$

Esta topología es justamente la topología a derechas que apareció en el ejemplo 1.2.12.

Para finalizar esta sección, damos una demostración *topológica* de que el conjunto de números primos es infinito. Recordemos que existen numerosas demostraciones de este hecho, desde la primera que hizo Euclides, pero lo llamativo de esta demostración es que sólo usa conceptos topológicos[1].

Teorema 1.2.22. *El conjunto de números primos es infinito.*

Demostración. Denotamos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los números primos. Si $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, denotamos

$$A(a, b) = a\mathbb{Z} + b = \{an + b : n \in \mathbb{Z}\},$$

que no es más que la sucesión aritmética determinada por b y de razón a. Observemos que si $c \in A(a, b)$, entonces $A(a, b) = A(a, c)$.

Sea

$$\beta = \{A(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}.$$

Entonces β es base de una topología τ en $\mathbb{Z}$. Esto se debe a que la intersección de dos elementos de β es otro elemento de β (nota 1.2.8), concretamente, si $c \in A(a_1, c) \cap A(a_2, c)$, entonces

$$A(a_1, c) \cap A(a_2, c) = A(a, c),$$

donde $a = m.c.m\{a_1, a_2\}$. Veamos algunas propiedades de esta topología.

1. Para $a \neq 0$, $A(a, b) = A(-a, b)$.
2. El conjunto $A(a, 0)$ es el conjunto de los múltiplos de a.
3. Un conjunto finito distinto de $\emptyset$ no es abierto ya que toda sucesión aritmética $A(a, b)$ está formada por infinitos números.
4. El conjunto $A(a, b)$ es cerrado. Efectivamente, si $a = \pm 1$, entonces $A(a, b) = \mathbb{Z}$, que es cerrado. Si $|a| > 1$, entonces

$$\mathbb{Z} \setminus A(a, b) = \bigcup_{i=1}^{|a|-1} A(a, b + i).$$

Probamos ahora que el cardinal de $\mathcal{P}$ es infinito. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{P}$ es finito. Como los únicos números enteros que no son múltiplos de primos son 1 y -1, tenemos

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} A(p, 0). \tag{1.3}$$

---

[1] La demostración es debida a H. Furstenberg, On the infinitude of primes, *American Mathematical Monthly*, **62** (1955), 353.

Este conjunto es abierto por ser unión de abiertos, pero no es cerrado porque su complementario es finito. Sin embargo, como $A(p, 0)$ es cerrado, y usando que estamos suponiendo que $\mathcal{P}$ es finito, el conjunto que aparece a la derecha en (1.3) es cerrado al ser unión finita de conjuntos cerrados: contradicción. □

1.3. Subbase de una topología

En la sección anterior hemos determinado la topología mediante una base. Existe aún una forma de definir una topología con un número menor de abiertos y es mediante subbases. La idea es construir una base de la topología a partir de una subbase.

Definición 1.3.1. Dado un espacio topológico (X, τ), una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos abiertos se llama subbase de τ si

$$\beta(\mathcal{S}) = \{\text{intersecciones finitas de elementos de } \mathcal{S}\}$$

es una base de τ.

De esta forma, si $\mathcal{S}$ es una subbase, para calcular la topología, hallamos primero todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ y posteriormente se toma todas las uniones arbitrarias de estas intersecciones. Esto lo podemos expresar como

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) : B_j \in \mathcal{S}, J \text{ finito}, I \text{ conjunto} \right\}.$$

En cualquier espacio topológico, toda base es una subbase. Efectivamente, sea β de un espacio topológico y usamos la notación de la definición 1.3.1 con $\mathcal{S} = \beta$. En primer lugar, observemos que si hacemos solamente intersecciones de *un* elemento de $\mathcal{S}$, obtenemos β y por tanto, $\beta \subset \beta(\mathcal{S})$. Para probar que $\beta(\mathcal{S})$ es una base, tenemos que todos sus elementos son abiertos al ser intersección de un número finito de abiertos. Por tanto $\beta(\mathcal{S})$ es una familia de abiertos que contiene a una base y así, es base de τ (apartado 3 de la proposición 1.2.5).

Sin embargo, no toda subbase es una base, como muestra los dos siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.3.2. Sea X un conjunto con la topología de los complementos finitos y sea $\mathcal{S} = \{X \setminus \{x\} : x \in X\}$. Dicha familia de subconjuntos es una subbase pues

$$\bigcap_{j=1}^{n}(X \setminus \{x_i\}) = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$$

y así $\beta(\mathcal{S}) = \{X \setminus F : F \text{ finito}\}$, que es evidentemente una base de τ_{CF}: concretamente $\beta(\mathcal{S}) = \tau_{CF} \setminus \{\emptyset, X\}$.

Sin embargo $\mathcal{S}$ no es una base de τ_{CF}. Para ello, se considera el conjunto abierto $O = X \setminus \{x_1, x_2\}$, donde $x_1, x_2 \in X$. Sea $y \in O$. Si $\mathcal{S}$ es base, existe $x \in X$ tal que

$$y \in X \setminus \{x\} \subset X \setminus \{x_1, x_2\}$$

pero la última inclusión implica que $\{x_1, x_2\} \subset \{x\}$, lo cual no es cierto.

Ejemplo 1.3.3. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y $\mathcal{S} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. La base determinada por $\mathcal{S}$ está formada por las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$, es decir,

$$\beta(\mathcal{S}) = \{X, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}\}.$$

La topología es la unión de elementos de $\beta(\mathcal{S})$. Así $\tau = \{\emptyset\} \cup \beta(\mathcal{S})$. Si $\mathcal{S}$ fuera base de τ, y ya que $\{2\} \in \tau$, existiría $B \subset \mathcal{S}$ tal que $2 \in B \subset \{2\}$. Esto implica $B = \{2\}$, pero $\{2\} \notin \mathcal{S}$.

Igual que ha sucedido con las bases de abiertos, planteamos la siguiente cuestión. Dado un conjunto X, sin ninguna estructura de espacio topológico, y dada una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X, ¿qué propiedades tiene que tener $\mathcal{S}$ para que sea una subbase de alguna topología en X? El siguiente resultado asegura que no hay que imponer ningún requisito.

Proposición 1.3.4. *Sea un conjunto X y una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos. Entonces existe una única topología τ en X tal que $\mathcal{S}$ es subbase de τ.*

Demostración. Probamos que

$$\beta(\mathcal{S}) = \{\text{intersecciones finitas de elementos de } \mathcal{S}\}$$

es base de una topología. Para ello, veamos que se satisfacen las dos propiedades del teorema 1.2.7. Por un lado $X = \cap_{i \in \emptyset}\{B : B \subset \mathcal{S}\}$. Por otro, la intersección de dos elementos de $\beta(\mathcal{S})$ pertenece de nuevo a $\beta(\mathcal{S})$, luego la propiedad 2 de dicho teorema es válida por la nota 1.2.8. $\square$

Esta proposición marca una diferencia con las otras formas de introducir una topología en un conjunto, a saber, mediante cerrados o mediante bases de abiertos, pues en los teoremas 1.1.8 y 1.2.7 había siempre condiciones sobre los conjuntos.

1.4. Entorno de un punto. Base de entornos

En esta sección aparece por primera vez una idea de 'cercanía' o 'proximidad' en un espacio topológico, y esto se debe al concepto de entorno de un punto. También va a permitir introducir un espacio topológico de otra forma equivalente.

Definición 1.4.1. Sea (X,τ) un espacio topológico y $x \in X$. Un conjunto $U \subset X$ se llama entorno de x si existe $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset U$. A la familia de todos los entornos de x se llama sistema de entornos de x y se denota por $\mathcal{U}_x$.

Si se define $\tau_x = \{O \subset \tau : x \in O\}$, entonces $\tau_x \subset \mathcal{U}_x$. Por tanto, todo abierto que contiene a un punto es un entorno suyo. El recíproco también es cierto en el siguiente sentido.

Proposición 1.4.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $A \in \tau$ si y sólamente si A es entorno de todos sus puntos.*

Demostración. Lo único que hay que probar es que si A es entorno de todos sus puntos, entonces es un conjunto abierto. Sea $x \in A$. Ya que $A \in \mathcal{U}_x$, existe $O_x \in \tau$ tal que $x \in O_x \subset A$. Por tanto, $A = \cup_{x\in A} O_x$, que es un conjunto abierto al ser unión de conjuntos abiertos. □

También se caracteriza un entorno a partir de una base de abiertos de la topología.

Proposición 1.4.3. *Sea (X,τ) un espacio topológico, $x \in X$ y β una base de τ. Si $U \subset X$, son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El conjunto U es un entorno de x.*
2. *Existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Ya que $U \in \mathcal{U}_x$, existe un abierto $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset U$. Por definición de base de abiertos, y como $x \in O$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset O$ y así, $x \in B \subset U$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Como $B \in \tau$, entonces $U \in \mathcal{U}_x$ por la definición de entorno. □

Obsérvese que el conjunto de entornos de un punto es muy grande ya que si U es entorno de x y $V \supset U$, entonces V también es entorno de x puesto que el mismo abierto que hay entre x y U, también está entre x y V. Esto quiere decir que es difícil hallar *todos* los entornos de un punto en un espacio arbitrario[2]. Como veremos más tarde, nos quedaremos con menos entornos, pero suficientes, para conocer cuál es el espacio topológico.

De los ejemplos que han aparecido de espacios topológicos, en alguno de ellos se tiene que todos los entornos son conjuntos abiertos, es decir, $\mathcal{U}_x = \tau_x$. Así sucede por ejemplo, en la topología trivial, discreta, cofinita y la del punto incluido. Sin embargo en la recta euclídea, los conjuntos τ_x y $\mathcal{U}_x$ no coinciden: el conjunto $[-1,1]$ es un entorno de $x = 0$, pues $(-1,1)$ es un abierto y $0 \in (-1,1) \subset [-1,1]$, pero $[-1,1]$ no es abierto por la proposición 1.2.10.

Algunas propiedades de los entornos vienen dadas por el próximo resultado.

Proposición 1.4.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $x \in X$.*

1. *Si $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$.*
2. *Si $U \in \mathcal{U}_x$ y $V \supset U$, entonces $V \in \mathcal{U}_x$.*
3. *Sea $U \in \mathcal{U}_x$. Existe $W \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \in \mathcal{U}_y$ para todo $y \in W$.*

Demostración. Todas las propiedades son evidentes salvo la tercera. En ella, basta con tomar $W = O$, donde O es un conjunto abierto que satisfaga $x \in O \subset U$ y usar la proposición 1.4.2. $\square$

La tercera propiedad en la proposición 1.4.4 se puede expresar del siguiente modo: *si $U \subset X$ es un entorno de x, entonces U también es entorno de más puntos, a saber, al menos de todos los que forman un entorno W de x.*

Nos encontramos ahora en una situación parecida al caso de conjuntos cerrados y bases. Se considera un conjunto X, sin ninguna estructura topológica, de forma que para cada $x \in X$, hay asignada una familia de subconjuntos $\mathcal{V}_x$. ¿Qué propiedades debe tener $\mathcal{V}_x$ para que sea el sistema de entornos de alguna topología definida en X? La respuesta nos la da el siguiente teorema.

Teorema 1.4.5. *Sea X un conjunto y para cada $x \in X$ se tiene asignada una familia no vacía $\mathcal{V}_x$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:*

1. *$x \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}_x$.*

[2]Es por esta razón que algunos autores definen un entorno de $x \in X$ a un conjunto abierto que contiene a x, es decir, $\mathcal{U}_x = \tau_x$

2. *Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$, entonces $V_1 \cap V_2 \subset \mathcal{V}_x$.*

3. *Si $U \in \mathcal{V}_x$ y $V \supset U$, entonces $V \in \mathcal{V}_x$.*

4. *Para cada $U \in \mathcal{V}_x$, existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \in \mathcal{V}_y$ para todo $y \in W$.*

Entonces existe una única topología en X cuyo sistema de entornos $\mathcal{U}_x$ coincide con $\mathcal{V}_x$ para todo $x \in X$.

Demostración. Motivados por la proposición 1.4.2, definimos la topología τ como
$$\tau = \{O \subset X : O \in \mathcal{V}_x, \forall x \in O\}.$$

Se prueba que τ es efectivamente una topología en X.

1. Para probar que $X \in \tau$, sea $x \in X$. Se toma $U \in \mathcal{V}_x$ un elemento arbitrario, que existe pues $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$. Como $X \supset U$, la tercera propiedad asegura que $X \in \mathcal{V}_x$. El hecho que $\emptyset \in \tau$ es trivial.

2. Sea $\{O_i : i \in I\} \subset \tau$ y $x \in \cup_{i \in I} O_i$. Sea $j \in I$ tal que $x \in O_j$. Por tanto, $O_j \in \mathcal{V}_x$ y por la tercera propiedad, $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{V}_x$.

3. Sean $O_1, O_2 \in \tau$. Sea $x \in O_1 \cap O_2$ y por tanto, $O_1, O_2 \in \mathcal{V}_x$. Por la segunda propiedad, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{V}_x$.

Una vez probado que τ es una topología, demostramos que los entornos de un punto $x \in X$ con esta topología coinciden con los elementos de $\mathcal{V}_x$. Denotamos por $\mathcal{U}_x$ el sistema de entornos de x en el espacio topológico (X, τ) así definido. La prueba de $\mathcal{U}_x = \mathcal{V}_x$ se hace por doble inclusión.

- Sea $U \in \mathcal{U}_x$. Entonces existe $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset U$. Ya que $O \in \mathcal{V}_x$, la tercera propiedad afirma que $U \in \mathcal{V}_x$. Se ha probado pues que $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{V}_x$.

- Sea $V \in \mathcal{V}_x$. Se prueba que el conjunto $O = \{y \in V : V \in \mathcal{V}_y\}$ pertenece a la topología τ y como $x \in O \subset V$, entonces V sería un elemento de $\mathcal{U}_x$ por la definición de entorno de un punto.

  Veamos que $O \in \tau$. Sea $y \in O$. Como $V \in \mathcal{V}_y$, sea $W_y \in \mathcal{V}_y$ el entorno de la propiedad 4). Entonces $V \in \mathcal{V}_z$ para todo $z \in W_y$. Por tanto, $W_y \subset O$ y por la tercera propiedad, $O \in \mathcal{V}_y$, como se quería probar.

La unicidad de la topología viene dada por la propia definición de τ y la proposición 1.4.2. $\square$

De nuevo, y a igual que sucedía con los conjuntos abiertos de un espacio topológico, se plantea cómo trabajar con los entornos de un punto pero con un número menor de ellos. Aparece así el concepto de base de entornos.

Definición 1.4.6. Sea un espacio topológico (X,τ). Un subconjunto β_x de $\mathcal{U}_x$ se llama base de entornos de x si para todo $U \in \mathcal{U}_x$ existe $V \in \beta_x$ tal que $V \subset U$.

El siguiente resultado es fácil de probar y relaciona el concepto de base de entornos con el de abierto y el de base de topología.

Proposición 1.4.7. *Sea (X,τ) un espacio topológico, $x \in X$ y β_x una familia de entornos de x. Sea β una base de τ. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *β_x es base de entornos de x.*
2. *Para todo $O \in \tau_x$, existe $V \in \beta_x$ tal que $V \subset O$.*
3. *Para todo $B \in \beta$ con $x \in B$, existe $V \in \beta_x$ tal que $V \subset B$.*

A continuación hallamos bases de entornos de espacios topológicos conocidos.

EJEMPLO 1.4.8. 1. En cualquier espacio topológico, el propio sistema de entornos de un punto es una base de entornos.

2. Si (X,τ) es un espacio topológico y $x \in X$, una base de entornos de x es

$$\tau_x = \{O \in \tau : x \in O\} = \{U \in \mathcal{U}_x : U \in \tau\} = \mathcal{U}_x \cap \tau.$$

Del mismo modo, si β es una base de τ, entonces $\beta_x = \{B \in \beta : x \in B\}$ es una base de entornos del punto x.

3. En un espacio topológico discreto (X,τ_D), una base de entornos de $x \in X$ es $\beta_x = \{\{x\}\}$. Además es la base de entornos más pequeña (para la inclusión) que existe para el punto x.

4. Sea un espacio topológico (X,τ_{in}) con la topología del punto incluido para $p \in X$. Entonces una base de entornos de $x \in X$ es $\beta_x = \{\{x,p\}\}$. En la topología del punto excluido, es $\beta_x = \{\{x\}\}$ si $x \neq p$ y $\beta_p = \{X\}$.

5. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, una base de entornos de $x \in \mathbb{R}^n$ es $\beta_x = \{B_r(x) : r > 0\}$. En particular, para $n = 1$ una base de entornos de $x \in \mathbb{R}$ es el conjunto de intervalos centrados en $x \in \mathbb{R}$: $\beta_x = \{(x-r, x+r) : r > 0\}$. Obsérvese que esta base es diferente y más pequeña que la que resulta de usar el apartado 2 anterior tomando como β las bolas de $\mathbb{R}^n$.

6. Se considera la topología de Sorgenfrey τ_S. Una base de entornos de $x \in \mathbb{R}$ es $\beta_x^S = \{[x, x+r) : r > 0\}$. Como en el caso anterior, tenemos $\beta_x^S \subsetneq \beta_S \cap \mathcal{U}_x$.
7. Sea la topología $\tau(f)$ del teorema 1.1.3. Entonces $\mathcal{U}'_y = \{f(U) : U \in \mathcal{U}_{f^{-1}(y)}\}$. Del mismo modo que se tenía para base de abiertos, si β_x es una base de entornos de $x \in X$, entonces $f(\beta_x)$ es una base de entornos de $f(x)$ en $(Y, \tau(f))$.
8. Sea (X, τ_d) un espacio topológico dotado de la topología a derechas (ejemplo 1.2.21). Una base de entornos de $x \in X$ es $\beta_x = \{[x, \rightarrow[\}$.

Se estudia algunas propiedades de bases de entornos.

Proposición 1.4.9. *Se considera una base de entornos β_x para cada punto x en un espacio topológico (X, τ). Entonces:*

1. *$x \in V$ para todo $V \in \beta_x$.*
2. *Si V_1, $V_2 \in \beta_x$, existe $V_3 \in \beta_x$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.*
3. *Si $V \in \beta_x$, existe $V_0 \in \beta_x$ tal que para cada $y \in V_0$ existe $V_y \in \beta_y$ con $y \in V_y \subset V$.*

Demostración. Sólo la tercera propiedad no es evidente y pasamos a probarla. Como $V \in \mathcal{U}_x$, por la tercera propiedad de la proposición 1.4.4, existe $W \in \mathcal{U}_x$ tal que para cada $y \in W$, $V \in \mathcal{U}_y$. Por ser β_x base de entornos existe $V_0 \in \beta_x$ tal que $V_0 \subset W$. Entonces $V \in \mathcal{U}_y$ para cada $y \in V_0$, luego existe $V_y \in \beta_y$ con $y \in V_y \subset V$. □

Sea ahora X un conjunto sin una topología establecida en él. Supongamos que para cada $x \in X$, hay asignada una familia γ_x de subconjuntos de X ¿qué propiedades debe tener γ_x para que sea base de entornos de una topología definida en X? Una respuesta la obtenemos en el siguiente resultado:

Teorema 1.4.10. *Sea un conjunto X tal que para cada $x \in X$ existe γ_x una familia no vacía de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. *$x \in V$ para todo $V \in \gamma_x$.*
2. *Si V_1, $V_2 \in \gamma_x$, existe $V_3 \in \gamma_x$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.*
3. *Si $V \in \gamma_x$, existe $V_0 \in \gamma_x$ tal que para cada $y \in V_0$, existe $V_y \in \gamma_y$ con $y \in V_y \subset V$.*

Entonces existe una única topología en X de forma que γ_x es una base de entornos para todo $x \in X$.

Demostración. Se define la topología expresando el sistema de entornos:

$$\mathcal{U}_x = \{U \subset X : \text{existe } V \in \gamma_x \text{ tal que } V \subset U\}.$$

Se comprueba que $\mathcal{U}_x$ cumple las cuatro propiedades del teorema 1.4.5. Observemos que $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$, pues $\gamma_x \subset \mathcal{U}_x$.

1. Dado $U \in \mathcal{U}_x$ existe $V \in \gamma_x$ tal que $V \subset U$. Como $x \in V$, también pertenece a U.

2. Sean U_1, $U_2 \in \mathcal{U}_x$ y sean V_1, $V_2 \in \gamma_x$ tales que $V_i \subset U_i$. Por la segunda propiedad, existe $V_3 \in \gamma_x$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ y por tanto $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$ por la definición de $\mathcal{U}_x$.

3. Sea $U \in \mathcal{U}_x$ y $V \subset X$ tal que $V \supset U$. Sea $W \in \gamma_x$ satisfaciendo $W \subset U$. Por tanto $W \subset V$ y así $V \in \mathcal{U}_x$.

4. Sea $U \in \mathcal{U}_x$. Existe $V \in \gamma_x$ tal que $V \subset U$. Sea $W = V_0$: si $y \in W$, existe $V_y \in \gamma_y$ tal que $V_y \subset V$. Entonces $V \in \mathcal{U}_y$, y así, $U \in \mathcal{U}_y$ por la definición de $\mathcal{U}_y$.

Para finalizar, es evidente que γ_x es base de entornos de $\mathcal{U}_x$ y por la definición 1.4.6 de base de entornos, la familia $\mathcal{U}_x$ es única. □

Nota 1.4.11. 1. Igual que sucede para base de abiertos (nota 1.2.8), la propiedad 2) del teorema anterior se satisface si es cierto que $V_1 \cap V_2 \in \beta_x$ para todo $V_1, V_2 \in \beta_x$.

2. Usando 2) del ejemplo 1.4.8, suele ocurrir a veces que los elementos de β_x son conjuntos abiertos. Por tanto sucede que la propiedad 3) del teorema 1.4.10 es cierta simplemente tomando $V_0 = V$.

Se muestra un ejemplo de cómo se utiliza el teorema 1.4.10.

Ejemplo 1.4.12. En $\mathbb{R}^2$ y para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se considera la familia de subconjuntos dada por

$$\beta_{(x,y)} = \{(x - \epsilon, x + \epsilon) \times \{y\} : \epsilon > 0\}.$$

Entonces el conjunto de dichas familias $\beta_{(x,y)}$ forma una base de entornos para alguna topología. Se prueba sólamente la tercera propiedad. Sea $V = (x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{y\}$. Se toma $V_0 = V$. Dado $(z, y) \in V$, sea $\delta = \min\{(x+\epsilon) - z, z - (x-\epsilon)\}$. Obsérvese que $\delta > 0$. Entonces $(z - \delta, z + \delta) \times \{y\} \subset V$.

El criterio de Hausdorff del teorema 1.2.15 servía para comparar dos topologías a partir de bases de topologías. El siguiente teorema es análogo pero con base de entornos.

Teorema 1.4.13 (Criterio de Hausdorff). *Sea un conjunto X y para todo $x \in X$ sean β_x^1, β_x^2 dos bases de entornos para sendas topologías τ_1 y τ_2. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La topología τ_1 coincide con τ_2.*
2. a) *Para todo $x \in X$ y $V_1 \in \beta_x^1$, existe $V_2 \in \beta_x^2$ tal que $V_2 \subset V_1$.*

   b) *Para todo $x \in X$ y $V_2 \in \beta_x^2$, existe $V_1 \in \beta_x^1$ tal que $V_1 \subset V_2$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $V_1 \in \beta_x^1$ y sea $O_1 \in \tau_1 = \tau_2$ tal que $x \in O_1 \subset V_1$. Debido a que $O_1 \in \tau_2$, $O_1 \in \mathcal{U}_x^2$ para la topología τ_2. Luego existe $V_2 \in \beta_x^2$ tal que $V_2 \subset O_1$. Por tanto $V_2 \subset V_1$. El otro apartado es análogo.

(2) $\Rightarrow$ (1). La hipótesis afirma que $\mathcal{U}_x^1 \subset \mathcal{U}_x^2$ y $\mathcal{U}_x^2 \subset \mathcal{U}_x^1$ y por tanto $\mathcal{U}_x^1 = \mathcal{U}_x^2$. □

Un caso particular de este teorema ocurre si $\beta_x^1 \subset \mathcal{U}_x^2$ para todo $x \in X$, y sería el resultado análogo que se dio para bases en la proposición 1.2.13.

Caracterizamos un conjunto abierto en términos de base de entornos de forma parecida a como se hizo con entornos en la proposición 1.4.2.

Proposición 1.4.14. *Sea (X, τ) un espacio topológico y β_x una base de entornos en cada punto $x \in X$. Dado $A \subset X$, son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El conjunto A es abierto.*
2. *Para todo $x \in A$, existe $V \in \beta_x$ tal que $V \subset A$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). De la proposición 1.4.2, $A \in \mathcal{U}_x$ para todo $x \in A$. Como β_x es base de entornos, existe $V \in \beta_x$ tal que $V \subset A$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Es consecuencia de la proposición 1.4.2 y de que $\beta_x \subset \mathcal{U}_x$. □

Llegados a este punto, merece la pena resumir los distintos caminos que se han adoptado a lo largo de este capítulo para definir un espacio topológico: mediante conjuntos abiertos, tal como se definió un espacio topológico, conjuntos cerrados, bases de topología, subbases, entornos y bases de entornos. A lo largo de este libro, un espacio topológico vendrá definido mediante algunas de estas formas y es posible pasar de unas a otras del siguiente modo:

1. Si se conocen los conjuntos abiertos, se puede determinar los conjuntos cerrados (definición 1.1.5) y los entornos (definición 1.4.1).
2. Si se conocen los conjuntos cerrados, se conoce también los conjuntos abiertos (definición 1.1.5).
3. Si hay una base de la topología, se conocen los conjuntos abiertos (definición 1.2.1 y corolario 1.2.3).
4. Si se conoce una subbase, se puede construir una base (definición 1.3.1).
5. Si se conocen los entornos, entonces se puede hallar la topología (proposición 1.4.2).
6. Si se conocen una base de entornos para todo punto, se conocen los entornos (teorema 1.4.10) y los conjuntos abiertos (proposición 1.4.14).

1.5. Subespacio topológico

El objetivo de esta sección es definir de forma natural una topología en un subconjunto de un espacio topológico. Concretamente, se considera un espacio topológico (X, τ) y $A \subset X$ un subconjunto de X. Nos preguntamos si es posible definir en A una topología que tenga relación con la que ya hay en X, es decir, con τ. Este proceso de definir una estructura matemática en un subconjunto de un conjunto que ya la tiene, es frecuente en matemáticas y así tenemos las nociones de subgrupo de grupos, subespacio vectorial de espacios vectoriales, subanillo de anillos, etc. En topología tenemos la siguiente definición (ver figura 1.3).

Definición 1.5.1. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Se llama topología relativa (o inducida) en A a

$$\tau_{|A} := \{O \cap A : O \in \tau\}.$$

Se dice que $(A, \tau_{|A})$ es un subespacio topológico de (X, τ). Se denota al conjunto de todos los cerrados por $\mathcal{F}_{|A}$ y a la familia de entornos de un punto $a \in A$ por $\mathcal{U}_a^A$.

Comprobamos que $\tau_{|A}$ es una topología en A.

1. En primer lugar, $A = X \cap A$ y $\emptyset = \emptyset \cap A$, luego A y $\emptyset$ pertenecen a $\tau_{|A}$.
2. Sea $\{O_i \cap A\}_{i \in I}$ una familia de elementos de $\tau_{|A}$, donde $O_i \in \tau$ para todo $i \in I$. Entonces $\cup_{i\in I}(O_i \cap A) = (\cup_{i\in I} O_i) \cap A \in \tau_{|A}$ pues $\cup_{i\in I} O_i \in \tau$.
3. Sean $O_1 \cap A,\ O_2 \cap A \in \tau_{|A}$, donde $O_1, O_2 \in \tau$. Entonces
$$(O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A) = (O_1 \cap O_2) \cap A \in \tau_{|A},$$
pues $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

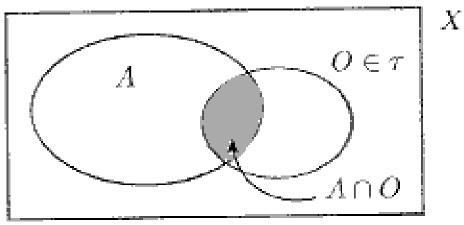


Figura 1.3: Topología relativa definida en $A \subset X$

Una primera observación es la transitividad de la topología relativa.

Proposición 1.5.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$ tales que $B \subset A$. Entonces*
$$\tau_{|B} = (\tau_{|A})_{|B}.$$

Demostración. La demostración es evidente a partir de la igualdad
$$O \cap B = (O \cap A) \cap B$$
para todo $O \in \tau$. □

Por tanto, y en la situación anterior, no hay confusión al tener una topología relativa en B, ya que da igual que sea respecto de $(A, \tau_{|A})$ como de (X, τ).

Caracterizamos ahora los conjuntos cerrados y los entornos en la topología relativa. También proporcionamos un método para construir bases de la topología y bases de entornos en la topología relativa a partir de bases y bases de entornos en el espacio topológico ambiente.

Teorema 1.5.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$.*

1. $\mathcal{F}_{|A} = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$.
2. *Si β es una base de la topología τ, entonces $\beta_A = \{B \cap A : B \in \beta\}$ es una base de la topología $\tau_{|A}$.*
3. *Si $a \in A$, $\mathcal{U}_a^A = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}_a\}$.*
4. *Si β_a es una base de entornos de $a \in A$ para la topología τ, entonces $\beta_a^A = \{B \cap A : B \in \beta\}$ es una base de entornos de a en $(A, \tau_{|A})$.*

Demostración. Se prueba sólamente las dos primeras propiedades.

1. Para los conjuntos cerrados se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{|A} &= \{A \setminus (O \cap A) : O \in \tau\} = \{(X \setminus O) \cap A : O \in \tau\} \\ &= \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}. \end{aligned}$$

2. Obsérvese primero que un conjunto de la forma $B \cap A$, con $B \in \beta$, pertenece a $\tau_{|A}$ pues $B \in \tau$. Por otra parte, si $O \cap A \in \tau_{|A}$, entonces $O = \cup_{i \in I} B_i$, para un cierto conjunto de indices I, con $B_i \in \beta$. Entonces $O \cap A = \cup_{i \in I}(B_i \cap A)$, con $B_i \cap A \in \beta_A$.

□

A partir de ahora, siempre que se tenga un subconjunto en un espacio topológico, se considerará que tiene la topología inducida de éste.

En el próximo ejemplo vamos a trabajar con el concepto de topología relativa en la topología euclídea τ_u de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.5.4. 1. Se considera el intervalo $A = [0, 2) \subset \mathbb{R}$ (1.4). El subconjunto $[1, 2)$ es cerrado en A, pues $[1, 2) = [1, 3] \cap A$ y $[1, 3] \in \mathcal{F}_u$. Sin embargo $[1, 2)$ no es cerrado en $\mathbb{R}$. Por otra parte, el intervalo $[0, 1)$ es abierto en A pues $[0, 1) = (-1, 1) \cap A$ y $(-1, 1) \in \tau_u$. Obsérvese también que $[0, 1)$ no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

2. En la recta real $\mathbb{R}$ se considera el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales con su topología relativa. El subconjunto $A = \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es abierto y cerrado en $(\mathbb{Q}, \tau_{u|\mathbb{Q}})$, pues

$$A = \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in \tau_u$, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \in \mathcal{F}_u$.

3. Consideramos el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales con la topología inducida de $\mathbb{R}$. Entonces la topología $\tau_{|\mathbb{Q}}$ no es la discreta. Efectivamente, si fuera así, dado $x \in \mathbb{Q}$, el conjunto $\{x\}$ sería un conjunto abierto en $\tau_{u|\mathbb{Q}}$. En particular, y por el teorema 1.5.3, existiría $\epsilon > 0$ tal que $x \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap \mathbb{Q} \subset \{x\}$, lo cual no es cierto.

Figura 1.4: En el intervalo $A = [0,2)$, el conjunto $[1,2)$ es cerrado y el conjunto $[0,1)$ es abierto

A continuación se muestran algunas condiciones suficientes para saber si un conjunto es abierto o cerrado en una topología relativa.

Proposición 1.5.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$.*

1. *Sea $O \subset A$. Si $O \in \tau$ (resp. $O \in \mathcal{F}$), entonces $O \in \tau_{|A}$ (resp. $O \in \mathcal{F}_{|A}$).*
2. *Sea $A \in \tau$ (resp. $A \in \mathcal{F}$) y $O \in \tau_{|A}$ (resp. $O \in \mathcal{F}_{|A}$). Entonces $O \in \tau$ (resp. $O \in \mathcal{F}$).*
3. *Si $A \in \tau$, entonces $\tau_{|A} = \{O \in \tau : O \subset A\}$.*
4. *Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}_{|A} = \{F \in \mathcal{F} : F \subset A\}$.*

Demostración. Los dos últimos apartados son consecuencias de los dos primeros.

1. Es evidente que $O = O \cap A$ y $O \in \tau$, luego $O \in \tau_{|A}$.
2. Si $O \in \tau_{|A}$, existe $G \in \tau$ tal que $O = G \cap A$. Entonces $O \in \tau$ al ser intersección de dos abiertos, a saber, G y A.

□

Finalizamos esta sección estudiando la topología relativa en los espacios topológicos del ejemplo 1.1.2.

EJEMPLO 1.5.6. 1. Sea (X, τ_T) un espacio topológico trivial. Si $A \subset X$, entonces $\tau_{T|A}$ es la topología trivial en A.

2. Sea (X, τ_D) un espacio topológico discreto. Si $A \subset X$, entonces $\tau_{D|A}$ es la topología discreta en A.

3. Sea (X, τ_{CF}) un espacio topológico cofinito. Si $A \subset X$, entonces $\tau_{CF|A}$ es la topología cofinita en A. Efectivamente, la familia de cerrados en X $\mathcal{F}_{CF}$ está formada por X y los subconjuntos finitos de X. Si intersecamos con A, obtenemos A y los subconjuntos finitos de A y por tanto, coincide con la familia de cerrados de la topología cofinita de A.

   A la vista de lo anterior podemos decir que la topología inducida de la topología trivial (resp. discreta, cofinita) es la topología trivial (resp. discreta, cofinita) en el subconjunto.

4. Sea X un conjunto, $p \in X$ y τ_{in} la topología del punto incluido para p. Sea $A \subset X$.

   a) Si $p \notin A$, entonces $\tau_{in|A}$ es la topología discreta de A pues si $B \subset A$, entonces $p \notin B$ y $B = (B \cup \{p\}) \cap A \in \tau_{in|A}$. Esto prueba que todo subconjunto de A es abierto en $\tau_{in|A}$, es decir, esta topología es la discreta en A.

   b) Si $p \in A$, entonces $\tau_{in|A}$ coincide con la topología del punto incluido de A para el punto p.

   Podemos también estudiar la topología $\tau_{in|A}$ con las bases de abiertos o bases de entornos. Sabemos del ejemplo 1.4.8 que una base de entornos de $x \in X$ en (X, τ_{in}) es $\beta_x = \{\{x, p\}\}$. Si intersecamos β_x con A, obtenemos una base de entornos de x en $(A, \tau_{in|A})$. Como β_x sólo tiene un entorno, concluimos:

   a) Si $p \notin A$, $\beta_x^A = \{\{x\}\}$ y la topología que se obtiene es la discreta de A, usando de nuevo el ejemplo 1.4.8 y la unicidad de la topología dada en el teorema 1.4.10.

   b) Si $p \in A$, $\beta_x^A = \{\{x, p\}\}$, que es la base de entornos de x en la topología del punto incluido de A para el punto p.

1.6. Interior y adherencia de un conjunto

En esta sección vamos a expresar si un elemento de un espacio topológico está 'próximo' o no a un subconjunto suyo. Esto es lo que llamamos 'posición relativa de un punto $x \in X$ respecto de un conjunto A en un espacio topológico (X, τ)'.

Definición 1.6.1. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Sea $x \in X$.

1. Se dice que x es un punto interior de A si existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \subset A$.
2. Se dice que x es un punto exterior de A si existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \subset X \setminus A$.
3. Se dice que x es un punto frontera de A si para todo $U \in \mathcal{U}_x$, $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

A partir de estas definiciones, tenemos éstas otras:

1. El interior de A es el conjunto $\overset{\circ}{A}= \{x \in X : x \text{ es interior de } A\}$. También se denota este conjunto como $\mathrm{int}(A)$.
2. El exterior de A es $\mathrm{ext}(A) = \{x \in X : x \text{ es exterior de } A\}$.
3. La frontera de A es $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in X : x \text{ es frontera de } A\}$.

Evidentemente $\overset{\circ}{A}\subset A$ y $\mathrm{ext}(A) \subset X \setminus A$.

Proposición 1.6.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces*

1. $X = \overset{\circ}{A} \cup ext(A) \cup Fr(A)$ *es una unión disjunta.*
2. $\overset{\circ}{A}= ext(X \setminus A)$.
3. $ext(A) = int(X \setminus A)$.
4. $Fr(A) = Fr(X \setminus A)$.

Demostración. Se prueba sólamente la primera propiedad, ya que las otras son triviales. Sea $x \in X$. Caben dos posibilidades:

- Existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \subset A$. Entonces $x \in \overset{\circ}{A}$.
- Para todo $U \in \mathcal{U}_x$, $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. En este caso, o existe $U \subset \mathcal{U}_x$ con $U \subset X \setminus A$ y x pertenecería a $\mathrm{ext}(A)$, o para cada $U \in \mathcal{U}_x$, $U \cap A \neq \emptyset$ y x pertenecería a $\mathrm{Fr}(A)$.

Por último, y del razonamiento anterior, donde cada una de las disyuntivas era excluyente, se deduce que la unión es disjunta. $\square$

Ejemplo 1.6.3. Se considera el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{CF})$ y $A = (0,1)$. Hallamos el conjunto interior, exterior y frontera de A.

Sea $x \in \text{int}(A)$. Entonces existe un conjunto finito $F \subset \mathbb{R}$ tal que $x \in \mathbb{R}\setminus F \subset (0,1)$, en particular, $\mathbb{R} \setminus (0,1) \subset F$, lo cual es falso. Por tanto $\text{int}((0,1)) = \emptyset$. Análogamente, $\text{ext}((0,1)) = \emptyset$. De la proposición 1.6.2, $\text{Fr}((0,1)) = \mathbb{R}$.

La proposición 1.6.2 tiene la siguiente consecuencia. Sea un espacio topológico y supóngase que se sabe hallar el interior de cualquier subconjunto del espacio. Entonces esta proposición asegura que también se sabe calcular el exterior y frontera de cualquier conjunto: el exterior es el interior del complementario y la frontera es el complementario de la unión del interior junto con el exterior.

Del mismo modo, si conocemos el exterior de un conjunto, sabemos hallar el interior del mismo por el apartado 2 de la proposición y por tanto, su frontera. Por último, si sabemos la frontera, también tenemos el interior y el exterior: si $A \subset X$,

$$\text{int}(A) = A \cap (X \setminus \text{Fr}(A))$$

$$\text{ext}(A) = (X \setminus A) \cap (X \setminus \text{Fr}(A).$$

Esta observación dice que podemos restringir nuestro estudio a uno cualquiera de los tipos anteriores de puntos. Nos detenemos en la propiedades del interior de un conjunto (esto se verá más justificado por la proposición 1.6.8).

El interior de un conjunto se ha definido a partir de entornos, pero es evidente que también se puede caracterizar mediante conjuntos abiertos, base de una topología y base de entornos de un punto. El siguiente resultado es inmediato.

Proposición 1.6.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico, β una base de τ y β_x una base de entornos de $x \in X$. Sea $A \subset X$. Entonces $x \in \overset{\circ}{A}$ si y sólamente son ciertas cualquiera de las siguientes propiedades:*

1. *Existe $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset A$.*
2. *Existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset A$.*
3. *Existe $V \in \beta_x$ tal que $V \subset A$.*

Esta proposición afirma que podemos hallar el interior de un conjunto en un espacio topológico sin necesidad de conocer todos los entornos de un punto. Por ejemplo, y usando la caracterización por base de entornos, hemos visto en el ejemplo 1.4.8 espacios topológicos donde β_x sólo tiene un elemento.

Por tanto, decir que 'existe $V \in \beta_x$ tal que $V \subset A$' se reduce en estos casos a probar que *ese* entorno V está incluido en A. Esta observación es igualmente válida para el exterior y frontera de un conjunto y del resto de conceptos que aparecerán a lo largo de esta sección cuando vengan caracterizados en términos de bases de entornos.

EJEMPLO 1.6.5. En la topología a derechas $(\mathbb{R}, \tau_d)$ hallamos el interior, exterior y frontera del conjunto $A = (-\infty, 0]$. Recordemos que $\beta_x = \{[x, \infty)\}$. Si $x \in \text{int}(A)$, entonces $[x, \infty) \subset A$, lo cual no es posible, probando que $\text{int}(A) = \emptyset$. Para hallar el exterior de A, sea $x \in \text{ext}(A)$. Entonces $[x, \infty) \subset \mathbb{R} \setminus A = (0, \infty)$. Y esto sucede si y sólo si $x > 0$. Por tanto, $\text{ext}(A) = (0, \infty)$. Como consecuencia, $\text{Fr}(A) = A$.

En el ejemplo siguiente trabajamos con la topología euclídea de $\mathbb{R}$ y usamos las tres caracterizaciones de la proposición 1.6.4.

EJEMPLO 1.6.6. En la recta euclídea, hallamos el interior, exterior y frontera de un intervalo cerrado $A = [a, b]$ con $a < b$.

Como (a, b) es un conjunto abierto incluido en A, por el apartado 1 de la proposición anterior, $(a, b) \subset \text{int}(A)$. Ya que $\text{int}(A) \subset A$, queda por estudiar si a y b son o no puntos interiores. Veamos que no. Si $a \in \text{int}(A)$, y tomando como β_a la base formada por los intervalos abiertos, existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a \in (c, d) \subset [a, b]$. En particular, $c < a < d$ y $a < c$: esto es imposible. Del mismo modo, $b \notin \text{int}(A)$, pero ahora utilizamos la caracterización por bases de entornos. Sabemos que una base de entornos de b es $\{(b - r, b + r) : r > 0\}$ (ejemplo 1.4.8). Si b fuera un punto interior, existiría $r > 0$ tal que $(b - r, b + r) \subset [a, b]$, lo cual es falso de nuevo. Por tanto $\text{int}(A) = (a, b)$.

Hallamos el exterior de A, es decir, $ext(A) = \text{int}((-\infty, a) \cup (b, \infty))$. Ya que $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ es un conjunto abierto, de nuevo el apartado 1 de la proposición 1.6.4 asegura que $(-\infty, a) \cup (b, \infty) \subset ext(A)$, y como la otra inclusión siempre es cierta, concluimos que $ext(A) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Finalmente, la proposición 1.6.2 implica $\text{Fr}(A) = \{a, b\}$.

Con un razonamiento parecido, tomamos los demás tipos de intervalos de $\mathbb{R}$:

1. Sea $A = (a, b)$. Entonces $\text{int}((a, b)) = (a, b)$, $\text{ext}((a, b)) = \mathbb{R} \setminus [a, b]$ y $\text{Fr}((a, b)) = \{a, b\}$.
2. Sea $A = [a, b)$. Entonces $\text{int}([a, b)) = (a, b)$, $\text{ext}([a, b)) = \mathbb{R} \setminus [a, b]$ y $\text{Fr}([a, b)) = \{a, b\}$.
3. Sea $A = [a, a] = \{a\}$. Entonces $\text{int}([a, a]) = \emptyset$, $\text{Fr}([a, a]) = \{a\}$ y $\text{ext}([a, a]) = \mathbb{R} \setminus \{a\}$.
4. Sea $A = [a, \infty)$. Entonces $\text{int}([a, \infty)) = (a, \infty)$, $\text{Fr}([a, \infty)) = \{a\}$ y

$\text{ext}([a,\infty)) = (-\infty, a)$.

5. Sea $A = (a,\infty)$. Entonces $\text{int}((a,\infty)) = (a,\infty)$, $\text{Fr}((a,\infty)) = \{a\}$ y $\text{ext}((a,\infty)) = (-\infty, a)$.

Se estudia ahora el comportamiento del interior de un conjunto respecto de las operaciones conjuntistas.

Proposición 1.6.7. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$.*

1. $\overset{\circ}{X} = X$, $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$.
2. *Si $A \subset B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.*
3. $int(A \cap B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset int(A \cup B)$.
5. $int(int(A)) = int(A)$.

Demostración. Sólamente la última propiedad no es evidente. Ya que $\text{int}(A) \subset A$, el apartado 2 asegura que $\text{int}(\text{int}(A)) \subset \text{int}(A)$. Veamos ahora la otra inclusión. Sea $x \in \text{int}(A)$. Por el proposición 1.6.4, existe $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset A$. Dado $y \in O$, $O \in \mathcal{U}_y$ ya que $O \in \tau$, y es evidente que $O \subset A$. Esto prueba que $y \in \text{int}(A)$ y por tanto hemos probado que $O \subset \text{int}(A)$, es decir, $x \in \text{int}(\text{int}(A))$. □

Un ejemplo de que la inclusión en la propiedad 4) puede ser estricta es el siguiente. En la recta euclídea, sean $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En este caso, $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} = \emptyset$, pero $\text{int}(A \cup B) = \text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Proposición 1.6.8. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El conjunto A es abierto.*
2. $int(A) = A$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). La inclusión $\overset{\circ}{A} \subset A$ siempre es cierta. Probamos ahora $A \subset \overset{\circ}{A}$. Si $x \in A$, y como $A \in \mathcal{U}_x$ (proposición 1.4.2) con $A \subset A$, se obtiene $x \in \overset{\circ}{A}$. Luego $A \subset \overset{\circ}{A}$ y así se da la igualdad $A = \overset{\circ}{A}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Para probar que A es abierto, demostramos que $A \in \mathcal{U}_x$ para todo $x \in A$ (proposición 1.4.2). Sea $x \in A$. Como $x \in A = \mathring{A}$, existe $U \subset \mathcal{U}_x$ tal que $U \subset A$. Por la propiedad 3) del teorema 1.4.5, $A \in \mathcal{U}_x$, como se quería probar. $\square$

La proposición 1.6.8 tiene mucha importancia ya que caracteriza un conjunto abierto en términos del interior de un conjunto. O dicho de otro modo, nos dice que si en un espacio topológico (X, τ) se conoce los interiores de *todos* los subconjuntos de X, entonces somos capaces de recuperar la topología: un conjunto será abierto si coincide con su interior. Podemos plasmar esta idea en la figura 1.5, que representa la 'máquina' de hallar el interior de un espacio topológico. En esta máquina, cuando introducimos un conjunto $A \subset X$, nos da su interior. Entonces basta separar aquellos conjuntos que al introducirlos, la máquina devuelve el mismo conjunto. Haciéndolo con todos los subconjuntos de X, obtenemos la topología τ. También remitimos al lector al ejercicio 41 del final del capítulo, donde aparece de otra manera esta idea de definir un espacio topológico a partir de la noción de interior de un conjunto.

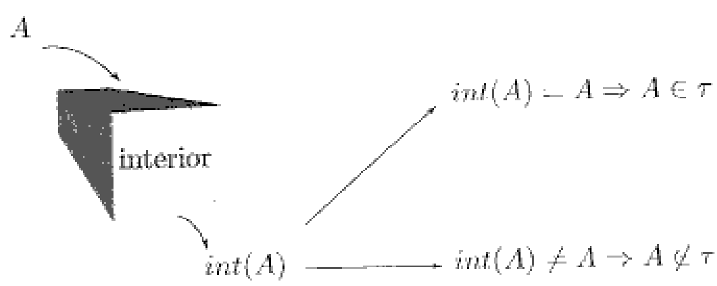


Figura 1.5: La máquina imaginaria que calcula el interior de cualquier subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Dicha máquina permite hallar la topología del espacio

Del mismo modo, y por el comentario que se hizo después del ejemplo 1.6.3, podemos obtener todos los conjuntos abiertos si tenemos las respectivas máquinas de hallar el exterior y la frontera de todos los subconjuntos del espacio topológico.

También obtenemos la siguiente caracterización del interior de un conjunto.

Proposición 1.6.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *$\mathring{A} = \bigcup\{O \in \tau : O \subset A\}$.*

2. *El conjunto $\mathring{A}$ es el mayor conjunto abierto incluido en A.*

Demostración. 1. Por la proposición 1.6.8, el conjunto $\mathring{A}$ es un conjunto abierto, luego $\mathring{A} \subset \bigcup\{O \in \tau : O \subset A\}$. Por otro lado, $\bigcup\{O \in \tau : O \subset A\}$ es un conjunto abierto al ser unión de conjuntos abiertos y además, está incluido en A. Al tomar interior y usando la propiedad 2 de la proposición 1.6.7, se obtiene la inclusión $\bigcup\{O \in \tau : O \subset A\} \subset \mathring{A}$.

2. Evidente por el apartado anterior.

□

Se define ahora la adherencia de un conjunto.

Definición 1.6.10. Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Se dice que x es un punto adherente de A si $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$. El subconjunto formado por todos los puntos adherentes de A se llama adherencia (o clausura) de A y se denota por $\overline{A}$.

De la definición de punto adherente se deduce que $A \subset \overline{A}$, $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A}$ y $\mathrm{ext}(A) \cap \overline{A} = \emptyset$. Por tanto $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A)$.

Proposición 1.6.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico, β una base de τ y β_x una base de entornos $x \in X$. Sea $A \subset X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólamente alguna de las siguientes propiedades son ciertas:*

1. *Para todo $O \in \tau$ tal que $x \in O$, se tiene $A \cap O \neq \emptyset$.*

2. *Para todo $B \in \beta$ tal que $x \in B$, se tiene $B \cap A \neq \emptyset$.*

3. *Para todo $V \in \beta_x$, se tiene $V \cap A \neq \emptyset$.*

Mostramos ahora algunas propiedades de la adherencia de conjuntos.

Proposición 1.6.12. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$.*

1. *$\overline{A} = \mathring{A} \cup Fr(A) = A \cup Fr(A)$.*

2. *$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.*

3. *$X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$.*

4. $X \setminus \overline{A} = int(X \setminus A)$.
5. $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$.
6. *Si* $B \subset A$, *entonces* $\overline{B}^A = \overline{B} \cap A$. *Aquí,* $\overline{B}^A$ *denota la adherencia del conjunto* B *en el espacio topológico* $(A, \tau_{|A})$.
7. *Si* $A \subset B$, *entonces* $\overline{A} \subset \overline{B}$.
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
9. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
10. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Demostración. Se demuestra sólo las primeras cuatro propiedades. El resto son consecuencia de la tercera propiedad y de la proposición 1.6.7.

1. Sabemos que $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A)$ y $ext(A) \subset X \setminus A$. Entonces $\overline{A} = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}(A)$
2. Usando que $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$ y el apartado anterior, obtenemos
$$\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = (\mathring{A} \cup \mathrm{Fr}(A)) \cap (\mathrm{int}(X \setminus A) \cup \mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(A).$$
3. De nuevo, por el primer apartado y la proposición 1.6.2, concluimos
$$\overline{X \setminus A} = \mathrm{int}(X \setminus A) \cup \mathrm{Fr}(X \setminus A) = \mathrm{ext}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) = X \setminus \mathring{A}.$$
4. Usando de nuevo la proposición 1.6.2, se deriva
$$X \setminus \overline{A} = \mathrm{ext}(A) = \mathrm{int}(X \setminus A).$$

□

De la proposición se deduce que si se conoce las adherencias de todos lo subconjuntos de un espacio topológico, se obtiene los interiores de todos lo subconjuntos del espacio, ya que $\mathrm{int}(A) = X \setminus (\overline{X \setminus A})$. Como consecuenci de esta igualdad, y de las proposiciones 1.6.8 y 1.6.9, concluimos:

Proposición 1.6.13. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* $A \subset X$.

1. *El conjunto* A *es cerrado si y sólamente si* $\overline{A} = A$.
2. $\overline{A} = \bigcap\{F \in \mathcal{F} : A \subset F\}$.

3. El conjunto $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A.

De nuevo, si conocemos las adherencias de todos los subconjuntos de un espacio topológico, tenemos todos los conjuntos cerrados del espacio, y por ende, toda la topología. Ver figura 1.6.

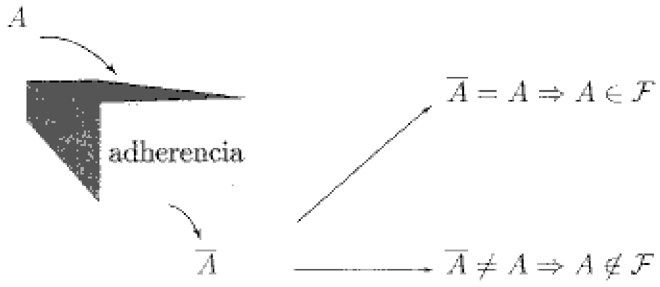


Figura 1.6: La máquina imaginaria que calcula la adherencia de cualquier subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Dicha máquina permite hallar la familia de cerrados $\mathcal{F}$

Gracias a las proposiciones 1.6.9 y 1.6.13, estudiamos el interior y la adherencia en los siguientes espacios topológicos.

Ejemplo 1.6.14. 1. Se considera el espacio trivial (X, τ_T) y $A \subset X$, $A \neq \emptyset, X$. Entonces $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ y $\overline{A} = X$.

2. Sea un espacio topológico discreto (X, τ_D) y $A \subset X$. Como $A \subset \tau$ y $A \subset \mathcal{F}$, entonces $\overset{\circ}{A} = A$ y $\overline{A} = A$.

3. Consideramos $\mathbb{R}$ con la topología a derechas τ_d. Veamos que $\overline{\{x\}} = (-\infty, x]$. Observamos primero que $(-\infty, x]$ es cerrado pues su complementario es $(x, \infty) \in \tau_d$. Por tanto, $\overline{\{x\}} \subset (-\infty, x]$. Si la inclusión es estricta, existe $y \in \overline{\{x\}}$ tal que $x < y$, pero entonces $[y, \infty) \in \mathcal{U}_y$ por ser abierto e $[y, \infty) \cap \{x\} = \emptyset$, lo cual no es posible.

Para acabar esta sección sobre la posición relativa de un punto respecto de un conjunto, damos dos definiciones nuevas.

Definición 1.6.15. Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$.

1. Se dice que x es un punto de acumulación de A si $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$. El conjunto de puntos de acumulación de A se denota por A' y se llama el conjunto derivado de A.

2. Se dice que x es un punto aislado de A si existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \cap A = \{x\}$. El conjunto de puntos aislados de A se denota por $Ais(A)$.

Son evidentes las siguientes propiedades:

Proposición 1.6.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$.*

1. $Ais(A) \subset A$.
2. $Ais(A) = \{x \in A : x \notin A'\}$.
3. $\overline{A} = A \cup A' = Ais(A) \cup A'$.

1.7. Sucesión convergente

Ya hemos comentando varias veces que la topología estudia la cercanía entre puntos de un espacio topológico. Uno de los primeros conceptos de cercanía que posee un alumno que estudia matemáticas es el del límite de una sucesión. Vamos a mostrar en esta sección cómo, efectivamente, este concepto es *topológico*.

Para motivar la definición, recurrimos a la recta euclídea. La definición habitual de convergencia de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales viene dada en términos de epsilons: la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, y escribimos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$, si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N} : n \geq \nu \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon.$$

En tal caso caso, se dice que x es el límite de la sucesión. Aparentemente, el concepto de límite tiene que ver con el de distancia, ya que usamos el valor absoluto de la diferencia entre x_n y x. Sin embargo, podemos escribir $|x_n - x| < \epsilon$ como $x_n \in B_\epsilon(x)$, donde $B_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ es la bola centrada en x y de radio ϵ. Por otro lado, las bolas centradas en un punto son base de entornos y además, dado un entorno, dentro hay un elemento de una base de entornos. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.7.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge a x si para todo $U \in \mathcal{U}_x$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq \nu$. Se escribe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ y se dice que x es un límite de la sucesión.

Es inmediato el siguiente resultado.

Proposición 1.7.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X y $x\in X$. Supongamos que β es una base de τ y β_x una base de entornos de x. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.*
2. *Para todo $O\in\tau$ con $x\in O$, existe $\nu\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\in O$ para todo $n\geq\nu$.*
3. *Para todo $B\in\beta$ con $x\in B$, existe $\nu\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\in B$ para todo $n\geq\nu$.*
4. *Para todo $V\in\beta_x$, existe $\nu\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\in V$ para todo $n\geq\nu$.*

El próximo resultado afirma que en todo espacio topológico hay sucesiones convegentes.

Proposición 1.7.3. *Las sucesiones que son constantes a partir de un lugar son convergentes.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico tal que a partir del lugar $n_0\in\mathbb{N}$, $x_n=a$, con $a\in X$, $n>n_0$. Probamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\to a$. Dado $U\in\mathcal{U}_a$, tomamos $\nu=n_0$. Entonces si $n\geq\nu$, $x_n=a\in U$. □

Un hecho que resulta algo chocante para uno que se inicia en la topología, y más si tiene conocimientos básicos de cálculo de una variable, es que una sucesión convergente puede tener varios límites. Es por esta razón que en la definición 1.7.1 hemos llamado a x *un* límite de la sucesión.

Ejemplo 1.7.4.
1. En el espacio trivial (X,τ_T), toda sucesión es convergente y converge a cualquier elemento de X. Esto es así porque $\mathcal{U}_x=\{X\}$.
2. En $(\mathbb{R},\tau_{CF})$, la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a *todo* número real $x\in\mathbb{R}$, pues si $U=\mathbb{R}\setminus\{x_1,\ldots,x_n\}$ es un entorno de x, para $n>\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$, $n\in U$. Con la misma demostración se prueba que en $(\mathbb{R},\tau_{CF})$ cualquier sucesión con infinitos elementos converge a cualquier elemento de $\mathbb{R}$.

Otro ejemplo es el siguiente:

Ejemplo 1.7.5. Consideramos $\mathbb{R}$ con la topología a derechas τ_d, donde sabemos que $\beta_x=\{[x,\infty)\}$ es una base de entornos de x. Denotamos $V_x=[x,\infty)$.

1. La sucesión $\{-1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $x=0$ pues ningún elemento de la sucesión pertenece a V_0.
2. Se tiene $\{-1/n\}_{n\in\mathbb{N}} \to -2$ puesto que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V_{-2}$.
3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada inferiormente por α. Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x para todo $x \leq \alpha$, ya que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V_x$.
4. La sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a todo $x \in \mathbb{R}$. A partir de $\nu = E[x]+1$, siendo $E[x]$ la parte de entera de x, se tiene $n \in V_x$.
5. Con un argumento parecido al anterior, toda sucesión no acotada superiormente converge a cualquier número.

El resultado siguiente caracteriza, en parte, un punto interior, adherente, exterior o frontera en términos del concepto de convergencia de sucesiones.

Teorema 1.7.6. *Sea (X,τ) un espacio topológico, $A\subset X$ y $x\in X$.*

1. *Si $x \in \overset{\circ}{A}$, entonces para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para $n \geq \nu$.*
2. *Si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$, entonces $x \in \overline{A}$.*
3. *Si $x \in ext(A)$, entonces para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in X\setminus A$ para $n \geq \nu$.*
4. *Si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ y otra sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X\setminus A$ con $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$, entonces $x \in Fr(A)$.*

Demostración. Es suficiente probar los dos primeros enunciados.

1. Supongamos que $x \in \overset{\circ}{A}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Ya que $x \in \overset{\circ}{A}$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \subset A$. Dado ese entorno U, por la definición de convergencia, sea $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para $n \geq \nu$. Por tanto $x_n \in A$.
2. Sea una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Para probar que x es adherente a A, tomamos un entorno arbitrario $U \in \mathcal{U}_x$ y probamos que $U\cap A \neq \emptyset$. Entonces existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in U$ para $n \geq \nu$, probando que $U \cap A \neq \emptyset$.

□

El recíproco del teorema no tiene porqué se cierto, como muestra el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1.7.7. En $\mathbb{R}$ se define la topología

$$\tau_{CN} = \{\mathbb{R} \setminus N : N \subset \mathbb{R} \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Esta topología se llama la *topología de los complementos numerables* o *topología conumerable*. Es fácil probar que para todo $x \in \mathbb{R}$, el sistema de entornos es

$$\mathcal{U}_x = \{\mathbb{R} \setminus N : N \subset \mathbb{R} \text{ es numerable y } x \notin N\}.$$

Sea $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces $\overline{A} = \mathbb{R}$. Para ello es suficiente con probar que $0 \in \overline{A}$. Sea $U = \mathbb{R} \setminus N$ un entorno de 0. Si $U \cap A = \emptyset$, $U \subset \mathbb{R} \setminus A = \{0\}$, lo cual es falso.

Por otra parte, no existe una sucesión en A que converja a 0: por reducción al absurdo, sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ una sucesión convergente a 0, con $a_n \neq 0$. Entonces $U = \mathbb{R} \setminus \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un entorno de 0 y por la convergencia, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $a_n \in U$, lo cual es falso.

1.8. Ejercicios

1. Sea X un conjunto y $\{\tau_i : i \in I\}$ una familia de topologías definida en X. Probar que $\bigcap_{i\in I} \tau_i$ es una topología en X. Dar un ejemplo de que la unión de dos topologías en un conjunto no tiene porqué ser una topología.

2. Hallar todas las topologías que se pueden definir en un conjunto con tres elementos.

3. Se considera un conjunto X y $A, B \subset X$. Se define $\tau = \{\emptyset, X, A, B\}$. Determinar qué propiedades deben tener A y B para que τ sea una topología en X.

4. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $A = \{a, b\}$. Hallar todas las topologías que se pueden definir en X de forma que A sea un conjunto abierto y cerrado a la vez.

5. Si $X = \{a, b, c, d\}$ es un conjunto, probar que $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ es una topología. Hallar el interior y la adherencia de los conjuntos $\{a, d\}$ y $\{b, c, d\}$.

6. En $\mathbb{N}$ se define la siguiente familia τ de subconjuntos. Un conjunto $O \subset \mathbb{N}$ pertenece a τ si satisface la siguiente propiedad: "si $n \in O$, entonces todos los divisores de n pertenecen a O". Probar que τ define una topología en $\mathbb{N}$ llamada *topología de los divisores*. Hallar una base

de entornos para cada $n \in \mathbb{N}$ con el menor número posible de entornos. Hallar el interior y la adherencia de los conjuntos $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{4, 5\}$.

7. Hallar bases de entornos en los espacios topológicos del ejemplo 1.2.6.

8. Se considera $\mathbb{N}$ con las topologías τ y τ' del ejemplo 1.2.6. Hallar el interior y la adherencia de los conjuntos $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ y $C = \{2, 3, 5\}$. En los espacios topológicos $(A, \tau_{|A})$ y $(A, \tau'_{|A})$, hallar el interior y la adherencia de los conjuntos $\{4\}$ y $\{4n : n \in \mathbb{N}\}$.

9. Probar que en un conjunto ordenado $(X, \leq)$ se puede definir de manera análoga al ejemplo 1.2.21 una *topología a izquierdas* usando los conjuntos $]\leftarrow, x]$. En el caso particular de $X = \mathbb{N}$ con su orden usual, relacionar las topologías a izquierdas y derechas con las dadas en el ejemplo 1.2.6.

10. En $X = [-1, 1]$ se define $\tau = \{O \subset X : 0 \notin O\} \cup \{O \subset X : (-1, 1) \subset O\}$. Probar que τ define una topología en X. Hallar el interior y la adherencia de $[0, 1]$ y $(0, 1)$.

11. Probar que $\tau = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ es una topología en $\mathbb{R}$, pero no la familia de subconjuntos $\{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Hallar el interior y la adherencia de $(0, 1)$ y $\mathbb{Z}$ en $(\mathbb{R}, \tau)$.

12. Sea X un conjunto y $A \subset X$ un subconjunto fijo. Para cada $x \in X$ se define $B_x = A \cup \{x\}$. Probar que $\beta = \{B_x : x \in X\}$ es base de una topología en X. Esta topología se llama la *topología del conjunto incluido*. Si $C \subset X$, hallar el interior y la adherencia de C.

13. Se considera $\beta = \{B \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus B$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}\}$. Probar que β es base de una topología definida en $\mathbb{R}$. Hallar la topología y comparar con la topología de los complementos finitos.

14. Estudiar si $\beta = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ es la única base que puede haber en $\mathbb{R}$ con la topología derechas.

15. Sea (X, τ) un espacio topológico y β_1 y β_2 dos bases del mismo. Estudiar si $\beta_1 \cap \beta_2$ y $\beta_1 \cup \beta_2$ son bases de la topología.

16. Sea $A = \{-1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$. Probar que $\tau_{u|A}$ no es la topología discreta pero $\tau_{S|A}$ sí lo es, donde τ_S es la topología de Sorgenfrey. Considerar el mismo problema, pero reemplazando A por el conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ y también por $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

17. Se considera $X = \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big) \cup \big([0,\infty) \times \{1\}\big) \subset \mathbb{R}^2$. Se define una topología en X a partir de una base de entornos para cada punto. Si el punto no es $(0,1)$, entonces se toma una base de entornos para la topología usual y si el punto es $(0,1)$, se considera la familia

$$\beta_{(0,1)} = \Big\{\big((a,0) \times \{0\}\big) \cup \big([0,b) \times \{1\}\big) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\Big\}.$$

Probar que, efectivamente, se define así una topología en X. Probar que la intersección de dos entornos cualesquiera de los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$ no es vacía.

18. Probar que si $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $\beta_x = \{\Pi_{i=1}^n (x_i - r, x_i + r) : r > 0\}$ es una base de entornos de x en $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$.

19. Denotamos por τ_u^n la topología euclídea de $\mathbb{R}^n$.

    a) Probar que $\beta = \{O_1 \times \ldots \times O_n : O_i \in \tau_u^1\}$ es una base de τ_u^n.

    b) Con la identificación $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$, probar que $\beta = \{O_1 \times O_2 : O_1 \in \tau_u^n, O_2 \in \tau_u^m\}$ es base de τ_u^{n+m}.

20. (Plano de Moore) En $X = \mathbb{R} \times [0,\infty)$ se define una topología a partir de una base de entornos (ver figura 1.7). Sea $(x,y) \in X$. Si $y > 0$, se toma las bolas centradas en el punto y contenidas en X; si $y = 0$, se toma bolas contenidas en X y tangentes al eje de abscisas en $(x,0)$ junto el punto $(x,0)$, es decir,

$$\beta_{(x,0)} = \{B_r(x,r) \cup \{(x,0)\} : r > 0\}.$$

Probar que se tiene así definida una topología en X llamada la topología del plano de Moore.

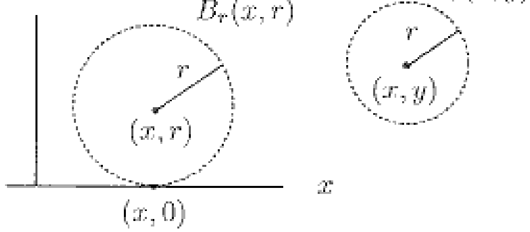


Figura 1.7: El plano de Moore

21. Un subconjunto D de un espacio topológico (X,τ) se llama *denso* si $\overline{D}=X$. Probar que es equivalente a que todo conjunto abierto no vacío O de X, satisface $O\cap D\neq\emptyset$. Probar que en la topología cofinita, todo abierto es denso.

22. Probar que $\mathbb{Q}$ es denso en $(\mathbb{R},\tau_u)$. Probar que es equivalente al hecho de que dado $x\in\mathbb{R}$ y $\epsilon>0$, existe $q\in\mathbb{Q}$ tal que $|x-q|<\epsilon$. Probar que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ es denso.

23. En $(\mathbb{R},\tau_S)$ y $(\mathbb{R},\tau_d)$, estudiar si $\mathbb{Q}$ es denso.

24. Se considera (X,τ) un espacio topológico y $A\subset X$. Demostrar:

    - $\overset{\circ}{A}=\emptyset$ si y sólamente si $X\setminus A$ es denso en X.
    - $\overset{\circ}{A}\neq\emptyset$ si y sólamente si para todo subconjunto denso D de X, $D\cap A\neq\emptyset$.
    - A es un conjunto abierto si y sólamente si todo subconjunto B de X tal que $A\cap B=\emptyset$, satisface $A\cap\overline{B}=\emptyset$.

25. En la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R},\tau_S)$, hallar el interior y la adherencia de los intervalos de $\mathbb{R}$.

26. En la recta real con la topología a derechas, $(\mathbb{R},\tau_d)$ hallar el interior y la adherencia de los intervalos de $\mathbb{R}$.

27. En $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$, probar que la topología relativa de $\mathbb{Z}^n$ es la discreta, pero no así en $\mathbb{Q}^n$.

28. Sea (X,τ) un espacio topológico y una aplicación $f:X\to Y$. Se define en Y la familia de subconjuntos
$$\tau(f)=\{O'\subset Y, f^{-1}(O')\in\tau\}.$$
Probar que $\tau(f)$ es una topología en Y. Observemos que estamos usando la misma notación que en el teorema 1.1.3.

29. Sea (Y,τ') un espacio topológico y una aplicación $f:X\to Y$. Probar que
$$\tau_f=\{f^{-1}(O'):O'\in\tau'\}$$
determina una topología en X. Usando la notación del ejercicio anterior, ¿es cierto que $\tau_f(f)=\tau'$?

30. Dar un ejemplo de un espacio topológico no discreto ni trivial en el que coincidan los conjuntos abiertos con los conjuntos cerrados.

31. Se considera la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dada por
$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{G_k : k \in \mathbb{R}\},$$
donde $G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x + k\}$. Ver figura 1.8. Probar que es una topología y comparar con la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Caracterizar los conjuntos cerrados. Estudiar si $\beta = \{G_k : k \in \mathbb{Q}\}$ es base de la topología.

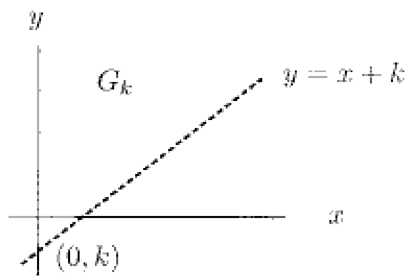


Figura 1.8: Los conjuntos G_k

32. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Probar:
    a) A es abierto si y sólo si $A \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.
    b) A es cerrado si y sólo si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$. Probar que también es equivalente a que $A' \subset A$.
    c) A es abierto y cerrado si y sólo si $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.
33. En $(\mathbb{R}, \tau_d)$, sea $A = \{0\}$. Probar que $-1 \in \overline{A}$, pero no es cierto para este caso el recíproco del apartado 2) del teorema 1.7.6.
34. Probar que $\beta = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ es base de $(\mathbb{R}, \tau_u)$, pero que $\beta' = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ no es base en $(\mathbb{R}, \tau_S)$.
35. Sea X un conjunto y $p, q \in X$ dos elementos fijos. Para cada $x \in X$, se define $\beta_x = \{\{x, p, q\}\}$. Probar que las familias β_x definen bases de entornos para alguna topología en X.
36. Sea p un objeto, $p \notin \mathbb{R}$, y $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$. Probar que
$$\beta = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(\mathbb{R} \setminus [a, b]) \cup \{p\} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$$
define una base para cierta topología τ en X. Probar que $\tau_{|\mathbb{R}}$ coincide con la topología usual de $\mathbb{R}$. Hallar el interior y la adherencia de $[0, 1] \cup \{p\}$ y $[0, \infty) \cup \{p\}$.

37. Probar que el recíproco del teorema 1.5.3 no es cierto en general, en el siguiente sentido. Sea $A \subset X$ donde (X, τ) es un espacio topológico. Sea β' una base de $\tau_{|A}$. Para cada $V \in \beta'$, como $V \in \tau_{|A}$, existe $B \in \beta$ tal que $B \cap A = V$. Obsérvese que B no tiene porqué ser único. Para cada $V \in \beta'$ tomamos uno B, lo fijamos, y lo denotamos por B_V. Hallar un ejemplo donde $\beta = \{B_V : V \in \beta'\}$ no es base de (X, τ).

38. Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se define $\beta_{(x,y)} = \{(x - r, x + r) \times (y - s, y + s) : r, s > 0\}$. Probar que el conjunto de todas las familias $\beta_{(x,y)}$ define bases de entornos para una topología de $\mathbb{R}^2$. Comparar con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

39. En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y con el orden usual, se considera la topología del orden τ_o definida en el ejemplo 1.2.20. Estudiar si dicha topología es la topología discreta.

40. Sea $X = (-1, 0) \cup [1, 2)$ con el orden usual y la correspondiente topología del orden τ_o. Probar que τ_o no coincide con la topología usual de X.

41. Sea X un conjunto e $i : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una aplicación con las siguientes propiedades:

    a) $i(X) = X$.
    b) $i(A) \subset A$, para todo $A \subset X$.
    c) $i(i(A)) = i(A)$, para todo $A \subset X$.
    d) $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$, para $A, B \subset X$.

    Probar que $\tau = \{A \subset X : i(A) = A\}$ es una topología en X con la propiedad de que $\operatorname{int}(A) = i(A)$. Enunciar un resultado análogo para la adherencia.

42. Sea un conjunto X con dos topologías τ_1 y τ_2. Son equivalentes

    a) τ_1 es más fina que τ_2.
    b) Para cada $O' \in \tau_2$, $x \in O'$ existe $O \in \tau_1$ tal que $x \in O \subset O'$.
    c) Para cada $x \in X$, los correspondientes sistemas de entornos satisfacen $\mathcal{U}_x^2 \subset \mathcal{U}_x^1$.
    d) Para cada subconjunto A de X, $\overline{A}^1 \subset \overline{A}^2$.
    e) $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.

43. Probar la proposición 1.5.5.

44. En la recta euclídea, sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente (resp. inferiormente) y $\alpha = \sup(A)$ (resp. $\beta = \inf(A)$). Probar que $\alpha \in \overline{A}$ (resp. $\beta \in \overline{A}$). Dar un ejemplo de un conjunto acotado A tal que $\alpha, \beta \in A$ pero A no es cerrado.

45. Estudiar cuáles son las sucesiones convergentes en las topologías discreta y trivial.

Capítulo 2

Espacio métrico

Los espacios métricos forman una familia destacable de espacios topológicos por su interés en muchas ramas de las matemáticas y por tanto merecen un capítulo aparte en este libro. El ejemplo típico de espacio métrico es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ que ya fue introducido en la definición 1.2.18. En aquel momento se probaba que la topología euclídea de $\mathbb{R}^n$ estaba generada por todas las bolas de $\mathbb{R}^n$. Un espacio métrico no va a ser más que un conjunto donde hay definida una distancia con propiedades similares a la distancia euclídea y la familia formada por todas las bolas será una base de la topología. La tarea que haremos es estudiar y expresar los conceptos topológicos que han aparecido en el capítulo anterior en términos de bolas y de la distancia del espacio métrico.

Como ya se anticipó en la introducción, para alguien que ya ha trabajado con espacios métricos, o al menos, con espacios euclídeos, le puede resultar algo difícil distinguir ahora en este capítulo qué conceptos de los que ha manejado son topológicos de aquéllos que son realmente métricos.

2.1. Distancia y ejemplos

En el conjunto de los números reales, el concepto de proximidad entre dos números $x, y \in \mathbb{R}$ procede de la distancia entre ellos, que no es más que $|x-y|$. Se puede abstraer las propiedades del valor absoluto para deducir el concepto de distancia.

Definición 2.1.1. Una distancia en un conjunto X es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que posee las siguientes propiedades:

1. $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X$ y $d(x,y) = 0$ si y sólamente si $x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in X$ (propiedad simétrica).
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x,y,z \in X$ (desigualdad triangular).

Al par (X,d) se llama espacio métrico y se dice que d es su distancia.

EJEMPLO 2.1.2. 1. En $\mathbb{R}^n$ se define la *distancia euclídea* o *distancia usual* como

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

donde $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $y = (y_1,\ldots,y_n)$. Obsérvese que para $n = 1$, $d(x,y) = |x-y|$ es la distancia que habíamos definido en $\mathbb{R}$.

2. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Definimos en A una distancia d_A como

$$d_A(x,y) = d(x,y).$$

A la distancia d_A se le llama la *distancia inducida* en A por la distancia d. De esta manera, (A,d_A) es un espacio métrico. También se escribirá simplemente d en vez de d_A si se sobreentiende el conjunto A.

3. Sea (V,g) un espacio vectorial métrico donde g es una métrica definida positiva. Recordemos que una métrica es una aplicación bilineal $g : V \times V \to \mathbb{R}$ y es definida positiva si $g(u,u) \geq 0$, $\forall u \in V$, y $g(u,u) = 0$ si y sólo si $u = 0$. En este contexto, se define en (V,g) la distancia determinada por g como

$$d(x,y) = \sqrt{g(x-y,x-y)}, \quad x,y \in V.$$

4. Un caso particular del anterior resulta al considerar $\mathbb{R}^n$ con la estructura vectorial usual dada por

$$x + y = (x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$

$$\lambda x = \lambda(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

La métrica euclídea g se define como

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Entonces la distancia determinada por dicha métrica coincide con la distancia usual del apartado 1.

5. Sea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, donde la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz están definidos por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}),$$

con $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. En dicho espacio vectorial se define la métrica

$$g(A, B) = \text{traza } (AB^t),$$

donde B^t es la matriz traspuesta de B. Se puede observar que g se expresa como

$$g(A, B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

Esta métrica es definida positiva. Se define la *distancia usual* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ como la distancia que posee este conjunto como espacio vectorial métrico:

$$d(A, B) = \sqrt{g(A - B, A - B)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2}.$$

Esto quiere decir que vemos la matriz A como un vector de $\mathbb{R}^{n^2}$ sin más que tomar cada una de las filas de A, empezando con la primera, luego con la segunda, y así sucesivamente, y poniendo cada elemento a_{ij} en cada una de las entradas de un vector de $\mathbb{R}^{n^2}$:

$$A = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

De esta forma, la distancia entre las matrices A y B no es más que la distancia euclídea entre los correspondientes puntos $A, B \in \mathbb{R}^{n^2}$.

6. En el conjunto $\mathbb{R}^n$ se definen dos distancias d_1, d_2 de la siguiente forma (ver figura 2.1 y su relación con la distancia euclídea). Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

    a) $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

    b) $d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$.

7. Se considera $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas definidas en $[0, 1]$ y con valores en $\mathbb{R}$. Se define en dicho conjunto dos distancias (figura 2.2).

    a) Se llama *distancia uniforme* a

    $$d_\infty(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

    Observemos que la función $|f - g|$ es continua y se sabe pues que dicha función alcanza un máximo ya que está definida en un intervalo cerrado y acotado (ver también el corolario 8.2.6).

b) La otra distancia es

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx.$$

La integral tiene sentido pues las funciones continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado son funciones integrables y lo mismo su diferencia y su valor absoluto.

8. En todo conjunto X se puede definir una distancia, y por tanto convertirse en un espacio métrico. Para ello basta tomar

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

A esta distancia d se le llama *distancia discreta* y se dice que (X,d) es un *espacio métrico discreto*.

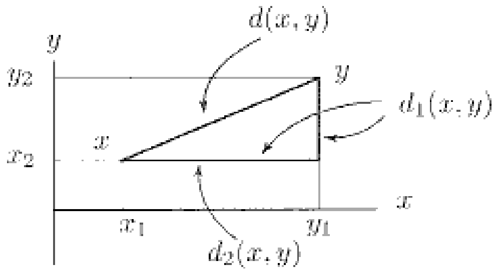


Figura 2.1: Comparación de las distancias d, d_1 y d_2 en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. La distancia euclídea d se corresponde con la hipotenusa del triángulo rectángulo, la distancia d_1 con la suma de los dos catetos y la distancia d_2 es la longitud del cateto mayor

De la misma manera que se hizo en $\mathbb{R}^n$, definimos una bola en un espacio métrico.

Definición 2.1.3. Una bola de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ en un espacio métrico (X,d) es el conjunto

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Por ejemplo, si se considera en $\mathbb{R}$ la distancia usual, la bola $B_r(x)$ es justamente el intervalo abierto $(x-r, x+r)$. Para ilustrar que el concepto de bola depende de la distancia, se considera en $\mathbb{R}^n$ las tres distancias definidas anteriormente (para $n = 1$, las tres distancias coinciden).

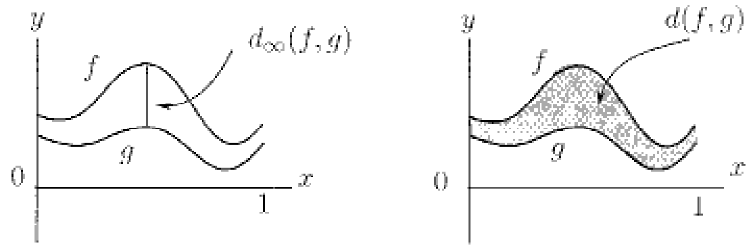


Figura 2.2: Distancias d_∞ y d en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. A la izquierda, la distancia d_∞ es la longitud del segmento indicado por la flecha. A la derecha, $d(f,g)$ es el área de la zona sombreada entre las gráficas de las funciones f y g

Ejemplo 2.1.4. Consideramos en $\mathbb{R}^n$ las tres distancias d, d_1 y d_2 del ejemplo 2.1.2. Se expresa a continuación las bolas centradas en el origen $p = (0,0)$ de radio r para cada una de estas distancias. Para mostrar mejor con dibujos las bolas, nos remitimos al caso $n = 2$, es decir, al plano euclídeo. Ver figura 2.3.

1. En $(\mathbb{R}^2, d)$ se tiene $B_r(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x^2+y^2} < r\}$. Aquí $B_r(0,0)$ es el conjunto de puntos que distan del origen menor que r con la distancia usual. Por tanto, al dibujar $B_r(0,0)$, obtenemos un disco circular centrado en $(0,0)$ del que se ha quitado su borde.
2. Si $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $B_r^1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < r\}$. La bola es un cuadrado con centro el origen, de lado $\sqrt{2}r$ y con vértices en los ejes coordenados de $\mathbb{R}^2$.
3. En $(\mathbb{R}^2, d_2)$ tenemos $B_r^2(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} < r\}$. Para la distancia d_2, la bola también es un cuadrado centrado en el origen pero ahora de lado $2r$ y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

El lector puede pensar que las bolas son 'redondas' sólo en el espacio euclídeo y que en los espacios que han aparecido en el ejemplo 2.1.4, las bolas no son redondas (incluso cuadradas) por la manera en que están definidas las distancias. En un espacio métrico no sólo es la distancia, sino también el conjunto donde está definida, lo que determina la forma de una bola. En el siguiente ejemplo, cambiamos $\mathbb{R}^2$ por un subconjunto suyo, tomamos la distancia inducida de la euclídea y observemos cómo las bolas no van a ser redondas.

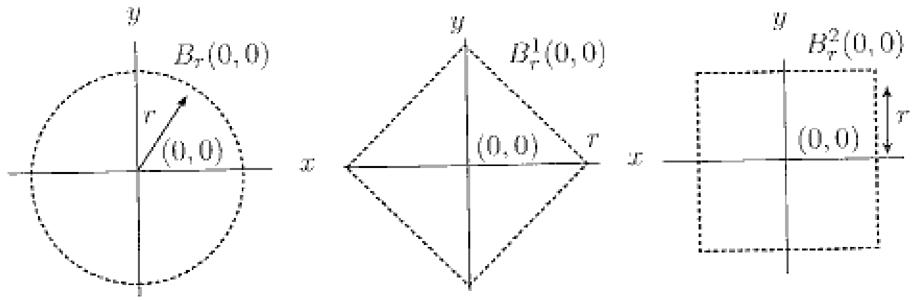


Figura 2.3: Las bolas del ejemplo 2.1.4, las cuales se corresponden con el conjunto de $\mathbb{R}^2$ encerrado por el círculo y los dos cuadrados. En los tres casos, el borde no está incluido en la bola

Ejemplo 2.1.5. Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} \cup \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\},$$

y consideramos en X la restricción de la distancia euclídea de $\mathbb{R}^2$. Tomamos $p = (0,0)$ y $r = 1$. Entonces la bola $B_1(p)$ es la que aparece en la figura 2.4 izquierda, que consiste en un segmento de longitud 2 en la recta $y = -x$ junto con una parte del primer cuadrante. Si $q = (1/2, -1/2)$ y $r = 1/2$, la bola $B_{1/2}(q)$ no es más que un segmento de longitud 1 sobre la recta $y = -x$.

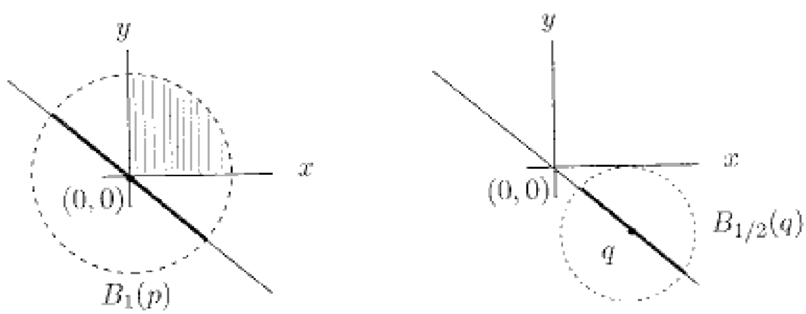


Figura 2.4: En el conjunto X las bolas no son 'redondas', incluso si consideramos la distancia euclídea

Ejemplo 2.1.6. En $C([0,1], \mathbb{R})$ consideramos la distancia d_∞ definida en el ejemplo 2.1.2 y las bolas en este espacio métrico. Sea $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ y $r > 0$. Si $g \in B_r(f)$, entonces $|g(x) - f(x)| < r$ para todo $x \in [0,1]$, es decir, $f(x) - r < g(x) < f(x) + r$. Dibujamos la gráfica de la función f, junto con las de las funciones $f(x) - r$ y $f(x) + r$: ver figura 2.5. Entonces para todo

$x \in [0,1]$, el valor $g(x)$ está acotado por $f(x) - r$ y $f(x) + r$. Esto quiere decir que la gráfica de g se encuentra entre la de $f(x) - r$ y $f(x) + r$. En el dibujo, la bola está representada por la zona sombreada, queriendo decir que toda función cuya gráfica se encuentra en ella, pertenece a la bola $B_r(f)$.

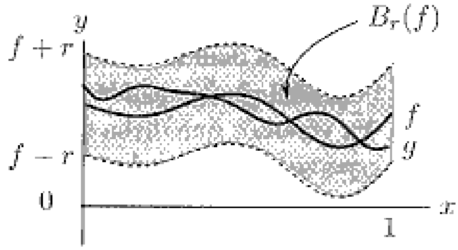


Figura 2.5: La bola $B_r(f)$ de radio $r > 0$ y centrada en f en el espacio métrico $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ con la distancia d_∞

2.2. Topología en un espacio métrico

Una vez establecido el concepto de bola en un espacio métrico, vamos a dotar al mismo de una topología relacionada con la distancia que posee.

Teorema 2.2.1. *En un espacio métrico (X, d), la familia*

$$\beta = \{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$$

es una base para una cierta topología τ.

A partir de ahora, esta topología es la que se considerará en todo espacio métrico.

Demostración. Usando el teorema 1.2.7, se prueba las dos propiedades que necesita tener β para que sea base de alguna topología. Ya que la primera, es decir, $X = \bigcup_{r>0, x\in X} B_r(x)$, es evidente, pasamos a probar la segunda. Sean dos bolas $B_r(x)$ y $B_s(y)$ y tomemos $z \in B_r(x) \cap B_s(y)$. Llamando $\delta = \min\{r - d(z,x), s - d(z,y)\}$, veamos que

$$z \in B_\delta(z) \subset B_r(x) \cap B_s(y).$$

Consideramos un punto arbitrario $w \in B_\delta(z)$. Por la desigualdad triangular, tenemos

$$d(w,x) \leq d(w,z) + d(z,x) < \delta + d(z,x) \leq r.$$

Esto prueba que $w \in B_r(x)$. De la misma forma se prueba que $w \in B_s(y)$. □

Obsérvese que, formalmente, la demostración es la misma que se hizo en el ejemplo 1.2.12 para las bolas del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. También ha sido clave la desigualdad triangular. Ya veremos que dicha desigualdad se utiliza frecuentemente en la teoría de espacios métricos. Antes de proseguir, nos detenemos un momento en qué hay de métrico y qué de topológico en este teorema. Evidentemente, el concepto de bola es métrico, es decir, al cambiar de distancia, la bola, como conjunto, cambia, tal como se ha visto en el ejemplo 2.1.4 para las tres distancias definidas en $\mathbb{R}^n$. Del mismo modo, la base de bolas del teorema anterior también cambia al cambiar las distancias. Sin embargo, el concepto topológico aparece cuando consideramos las *uniones arbitrarias* de bolas, que proporciona la topología del espacio. Para el caso concreto de $\mathbb{R}^n$ con las tres distancias del ejemplo 2.1.2, probaremos en el corolario 2.2.8 que las topologías que se obtienen para dichas distancias son las mismas, y esto sucede sabiendo de antemano que las bases correspondientes son diferentes.

Una vez definida la topología en un espacio métrico, podemos reflejar el resto de conceptos topológicos en términos de bolas.

Corolario 2.2.2. *Sea (X,d) un espacio métrico y $x \in X$.*

1. *Sea $U \subset X$. Entonces $U \in \mathcal{U}_x$ si y sólo si existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$.*
2. *Una base de entornos de x es el conjunto de las bolas centradas en x, es decir, $\beta_x = \{B_r(x) : r > 0\}$.*

Demostración. 1. Si $U \in \mathcal{U}_x$, la proposición 1.4.3 asegura que existe $B_s(y) \in \beta$ tal que $x \in B_s(y) \subset U$. Llamando $r = s - d(x,y)$, entonces $B_r(x) \subset B_s(y) \subset U$ pues si $z \in B_r(x)$, la desigualdad triangular implica

$$d(z,y) < d(x,z) + d(x,y) < r + d(x,y) = s.$$

Por otro lado, si $B_r(x) \subset U$, como $B_r(x)$ es un abierto que contiene a x, entonces $U \in \mathcal{U}_x$ por la propia definición de entorno.

2. Es consecuencia directa del apartado anterior.

□

Obsérvese que la base de entornos que proporciona este corolario no coincide con la que da el apartado 2 del ejemplo 1.4.8, pues aquel resultado nos dice que las bolas *que contienen a* x forman una base de entornos de x y ahora estamos afirmando que nos quedamos con menos bolas, sólo aquéllas *centradas en* x. Incluso se puede disminuir el número de dichas bolas, tal como indica el siguiente resultado y que es fácil de probar.

Proposición 2.2.3. *Sea* (X,d) *un espacio métrico y* $x \in X$.

1. *Si* $r_0 > 0$, *entonces* $\{B_r(x) : 0 < r < r_0\}$ *es base de entornos de* x.
2. *Las familias de bolas dadas por* $\{B_r(x) : r \in \mathbb{Q}^+\}$ *y* $\{B_r(x) : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, r > 0\}$ *son bases de entornos de* x.

Ejemplo 2.2.4. Dado un conjunto X, probamos que la topología τ inducida por la distancia discreta d definida en el ejemplo 2.1.2 es la topología discreta τ_D. Para ello y por la proposición 1.1.4, es suficiente con probar que para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es un conjunto abierto para la topología τ. Basta entonces observar que, tomando $r = 1$, tenemos

$$B_1(x) = \{x\},$$

lo cual demuestra que $\{x\}$ es un conjunto abierto en (X,τ).

Del mismo modo, si $\lambda > 0$, la distancia definida por

$$d_\lambda(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \lambda & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

determina una topología que es de nuevo la topología discreta. Por tanto, d y d_λ son distancias que generan la misma topología.

Ya hemos puesto ejemplos de conjuntos que soportan diferentes distancias, y por tanto, diferentes espacios métricos basados en el mismo conjunto. Cada una de dichas distancias determinan una topología y nos preguntamos cuándo dos distancias definen la misma topología.

Definición 2.2.5. Sea X un conjunto y d_1 y d_2 dos distancias en X. Se dice que d_1 y d_2 son distancias equivalentes si las topologías que determinan coinciden.

Como consecuencia del criterio de Hausdorff y del corolario 2.2.2 se deduce:

Teorema 2.2.6. *Sea un conjunto* X *con dos distancias* d_1 *y* d_2. *Para cada punto* $x \in X$ *se consideran las bases de entornos formadas por las bolas* *centradas en x para cada una de las distancias d_1 y d_2:*

$$\beta_x^1 = \{B_r^1(x) : r > 0\}, \qquad \beta_x^2 = \{B_r^2(x) : r > 0\}.$$

Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:

1. $\tau_1 = \tau_2$.
2. *Para todo $x \in X$, y*

   a) *para todo $B_r^1(x) \in \beta_x^1$, existe $s > 0$ tal que $B_s^2(x) \subset B_r^1(x)$;*

   b) *para todo $B_r^2(x) \in \beta_x^2$, existe $s > 0$ tal que $B_s^1(x) \subset B_r^2(x)$.*

Un caso particular es el siguiente resultado, el cual proporciona una condición suficiente.

Corolario 2.2.7. *Sean dos distancias d_1, d_2 en un conjunto X. Supongamos que existen constantes $k, m > 0$ tales que $d_1 \leq kd_2$ y $d_2 \leq md_1$. Entonces d_1 y d_2 son distancias equivalentes.*

Demostración. Consideremos una bola $B_r^1(x)$ en el espacio métrico (X, d_1). Llamando $s = r/k > 0$, probamos que $B_s^2(x) \subset B_r^1(x)$. Efectivamente, si $y \in B_s^2(x)$, tenemos

$$d_1(x, y) \leq kd_2(x, y) < ks = r.$$

Por el criterio de Hausdorff, esta inclusión prueba que $\tau_1 \subset \tau_2$. De la misma forma, y usando la desigualdad $d_2 \leq md_1$, se prueba $\tau_2 \subset \tau_1$. $\square$

El recíproco del corolario 2.2.7 no tiene porqué ser cierto, es decir, puede no haber una desigualdad del tipo $d_1 \leq kd_2$ y sin embargo $\tau_1 \subset \tau_2$. Un ejemplo es el siguiente. En $X = \mathbb{R}$ consideramos la distancia euclídea d_u y la distancia discreta d. Sabemos por el ejemplo 2.2.4 que τ_d es la topología discreta τ_D y por tanto $\tau_u \subset \tau_D$. Sin embargo no existe $k > 0$ tal que $d_u \leq kd$: si fuera así, tomando la distancia euclídea entre $x = 2k$ e $y = 0$, tenemos:

$$2k = |2k - 0| = d_u(2k, 0) \leq kd(2k, 0) = k,$$

lo cual es falso.

Corolario 2.2.8. *En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, las distancias d, d_1 y d_2 definidas en el ejemplo 2.1.2 son equivalentes.*

Demostración. Consideramos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y llamamos $a_i = |x_i - y_i|$. Entonces

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \quad d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad d_2(x,y) = \text{máx}\{a_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

Ya que $a_i > 0$, se tiene

$$\text{máx}\{a_i : 1 \leq i \leq n\} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq n\, \text{máx}\{a_i : 1 \leq i \leq n\},$$

es decir,

$$d_2 \leq d \leq d_1 \leq nd_2.$$

La demostración finaliza con el corolario 2.2.7. □

Por tanto, los espacios métricos definidos en $\mathbb{R}^n$ y asociados a las tres distancias anteriores definen el *mismo* espacio topológico, que no es más que el espacio euclídeo del ejemplo 2.1.2. Con este caso, mostramos una vez más que, aunque las bolas en cada uno de los distintos espacios métricos son distintas, las topologías que las tienen como base son las mismas. En particular, y para $n = 2$, una bola para la distancia d_1, que es un cuadrado, es una unión de discos circulares; y del mismo modo se tendría para $n = 3$ con cubos y esferas, y así sucesivamente para dimensiones arbitrarias.

Ejemplo 2.2.9. Consideremos en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ las dos distancias d y d_∞ definida según el ejemplo 2.1.2. Veamos que τ_{d_∞} es más fina que τ_d, es decir, $\tau_d \subset \tau_{d_\infty}$. Si $f, g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, entonces $|f(x) - g(x)| \leq \text{máx}_{t\in I} |f(t) - g(t)|$. Por tanto,

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \leq \int_0^1 d_\infty(f,g)\, dx = d_\infty(f,g).$$

Entonces $d \leq d_\infty$ y esto prueba que $\tau_d \subset \tau_{d_\infty}$ según el corolario 2.2.7.

Veamos que $\tau_{d_\infty} \not\subset \tau_d$. Para ello sea $g = 0$ y probamos que la bola $B_1^{d_\infty}(g)$ no es un conjunto abierto en (X, τ_d). Como $\{B_r^d(g) : 0 < r < 1\}$ es una base de entornos de g para la distancia d, demostramos que $B_r^d(g) \not\subset B_1^{d_\infty}(g)$, $\forall r < 1$. Para cada $r > 0$, se define la aplicación continua

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{r}{2} \\ \frac{4}{r}(x-1) + 2 & \text{si } 1 - \frac{r}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Ver figura 2.6. Entonces $f \in B_r^d(g)$ pues

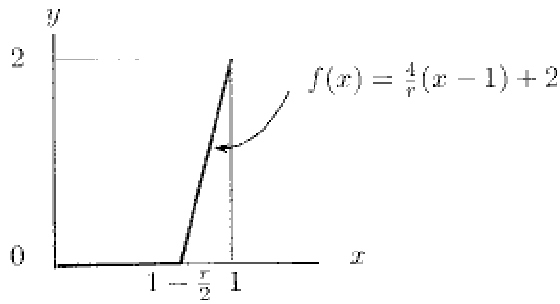


Figura 2.6: La gráfica de la función f. La zona sombreada es la distancia entre f y la función $g = 0$ para la distancia d. Para la distancia d_∞, la distancia es el mayor valor que alcanza $|f - 0|$, que en este caso es 2

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - 0|\, dx = \int_{1-r/2}^1 \left(\frac{4}{r}(x-1)+2\right) dx = \frac{r}{2},$$

pero $f \notin B_1^{d_\infty}(g)$ ya que

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - 0| = f(1) = 2.$$

Otra cuestión que se plantea en el contexto de los espacios métricos es la siguiente:

> Sea (X, τ) un espacio topológico, ¿podemos definir en X una distancia cuya topología asociada coincida con τ?

Definición 2.2.10. Un espacio topológico (X, τ) se dice que es metrizable si existe una distancia d en X tal que la topología que induce coincide con τ.

Así, el corolario 2.2.8 dice que la topología discreta es metrizable. Del mismo modo, el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ también es metrizable: esto se probó para el caso $n = 2$ en el corolario 1.2.17, y para el caso de dimensión arbitraria, después de la definición 1.2.18.

Si todo espacio topológico fuera metrizable, el concepto de espacio topológico se reduciría al de espacio métrico. Como es de esperar, no es cierto en general que todo espacio topológico sea metrizable. Un ejemplo es la topología cofinita, que no es metrizable. Para probarlo, veamos una propiedad topológica que posee todo espacio métrico, pero no necesariamente un espacio topológico, estableciendo una condición necesaria para que un espacio sea metrizable.

Proposición 2.2.11. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si $x,y \in X$, existen $U \in \mathcal{U}_x$, $V \in \mathcal{U}_y$ tales que $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración. Ya que $x \neq y$, llamamos r al número positivo dado por $2r = d(x,y) > 0$. Se consideran $U = B_r(x)$ y $V = B_r(y)$. Entonces $U \cap V = \emptyset$, pues si $z \in B_r(x) \cap B_r(y)$, la desigualdad triangular asegura que

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r + r = 2r,$$

lo cual es una contradicción. □

Gracias a este resultado, probamos que en un espacio topológico con la topología cofinita no procede de una distancia. Para ello demostramos que dos entornos de sendos puntos siempre se intersecan[1]. Sean $U \in \mathcal{U}_x$ y $V \in \mathcal{U}_y$ y supongamos que $U \cap V = \emptyset$. Entonces

$$X = X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V),$$

que es un subconjunto finito de X al ser unión de dos conjuntos finitos, llegando a una contradicción porque el cardinal de X es infinito. El mismo argumento es válido para probar que un espacio topológico trivial tampoco es metrizable.

También tenemos una generalización de la proposición 1.2.10.

Corolario 2.2.12. *Si (X,d) es un espacio métrico y $x \in X$, entonces $\{x\}$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Si $\{x\} \neq \overline{\{x\}}$, existe $y \in \overline{\{x\}}$ con $y \neq x$. Sin embargo, por la proposición anterior, existe $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $x \notin V$, es decir, $\{x\} \cap V = \emptyset$: contradicción. □

Probamos ahora una propiedad particular que posee el espacio euclídeo.

Teorema 2.2.13. *Existe una base numerable de la topología euclídea de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Probamos que el conjunto numerable

$$\beta = \{B_r(q) : r \in \mathbb{Q}^+, q \in \mathbb{Q}^n\},$$

es una base de la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Por una parte, es evidente que sus elementos son conjuntos abiertos ya que son bolas.

[1] A lo largo del libro entenderemos que dos conjuntos se *intersecan* si su intersección es no vacía

1. En un primer paso, demostramos que
$$\forall\epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\ \exists q \in \mathbb{Q}^n \text{ tal que } |x - q| < \epsilon. \tag{2.1}$$
Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Usamos ahora la propiedad de densidad del conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$: dado un número real, existe un número racional tan cerca del anterior como se quiera (ver también el ejercicio 22 del capítulo anterior). Sean pues $q_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_i - q_i| < \epsilon/\sqrt{n}$, para todo $1 \leq i \leq n$ y sea $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Entonces
$$d_u(x, y) = |x - q| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - q_i)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{n} n} = \epsilon,$$

2. Finalmente, sea ahora O un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $x \in O$. Probamos que existe una bola $B_r(q) \in \beta$ tal que $x \in B_r(q) \subset O$. Usando las bolas centradas en x y el corolario 2.2.2, existe $\delta > 0$ tal que $x \in B_\delta(x) \subset O$. Sea $r \in \mathbb{Q}^+$ tal que $r < \delta$ y tomamos
$$\epsilon = \text{mín}\{\delta - r, r\} > 0.$$
Usando (2.1), existe $q \in \mathbb{Q}^n$ tal que $|x - q| < \epsilon$. Comprobamos que $x \in B_r(q) \subset B_\delta(x)$:
   a) El punto x pertenece a $B_r(q)$ pues de la definición de ϵ, tenemos
   $$|x - q| < \epsilon \leq r \Rightarrow x \in B_r(q).$$
   b) Sea $z \in B_r(q)$. La desigualdad triangular asegura que
   $$|x - z| \leq |x - q| + |q - z| < \epsilon + r \leq (\delta - r) + r = \delta,$$
   probando que $z \in B_\delta(x)$.

□

Definición 2.2.14. Un espacio topológico se dice que satisface el segundo axioma de numerabilidad, y lo denotamos por ANII, si admite una base numerable de la topología.

Como consecuencia del apartado 2 del teorema 1.5.3 y del teorema 2.2.13 concluimos:

Corolario 2.2.15. *Cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cumple el segundo axioma de numerabilidad.*

En topología, es interesante cuestiones sobre la numerabilidad o no numerabilidad de conceptos topológicos, como bases, bases de entornos, conjuntos densos, etc. Estas cuestiones serán tratadas con más profundidad en el capítulo 7. En espacios métricos podemos decir algo más. En tal caso, sabemos por la proposición 2.2.3 que $\beta_x = \{B_r(x) : r \in \mathbb{Q}^+\}$ es una base de entornos de x y que esta base es numerable. Análogamente al concepto del segundo axioma de numerabilidad, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2.16. Se dice que espacio topológico satisface el primer axioma de numerabilidad si todo punto tiene una base numerable de entornos. Escribimos esta propiedad como ANI.

Corolario 2.2.17. *Un espacio métrico es ANI.*

Para acabar con esta sección, vamos a centrarnos en la relación entre la topología inducida y la distancia inducida. Planteamos el problema del siguiente modo. Consideramos un espacio métrico (X, d) con su topología τ determinada por la distancia d y sea $A \subset X$. El conjunto A tiene dos topologías: una es la topología inducida de τ, y que hemos denotado por $\tau_{|A}$; la otra es la topología τ_{d_A} determinada por la distancia inducida d_A definida en el ejemplo 2.1.2. Vamos a probar que ambas coinciden.

Proposición 2.2.18. *Sea un espacio métrico (X, d) y la topología τ determinada por la distancia d. Si $A \subset X$, entonces*

$$\tau_{|A} = \tau_{d_A}.$$

En particular, la topología relativa de un subconjunto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es la topología que tiene dicho conjunto con la distancia usual.

Demostración. Sea $a \in A$ y $\beta_a = \{B_r(a) : r > 0\}$ la base usual de entornos del punto a en el espacio (X, τ). El teorema 1.5.3 asegura que

$$\beta_a^A = \{B_r(a) \cap A : r > 0\}$$

es una base de entornos de a en el espacio topológico $(A, \tau_{|A})$.

Por otra parte, el corolario 2.2.2 dice que una base de entornos del punto a en la topología τ_{d_A} es la familia de las bolas centradas en a dada por $\beta'_a = \{B_r^A(a) : r > 0\}$. Aquí estamos denotando por $B_r^A(a)$ la bola centrada en a en el espacio métrico (A, d_A). Sin embargo,

$$B_r^A(a) = \{x \in A : d_A(x, a) < r\} = \{x \in A : d(x, a) < r\} = B_r(a) \cap A.$$

Esto prueba que las bases de entornos β_a^A y β'_a son iguales y por tanto, las topologías $\tau_{|A}$ y τ_{d_A} que determinan coinciden por el teorema 1.4.10. □

2.3. Interior y adherencia en espacios métricos

Es natural pensar que los conceptos de interior y adherencia de un conjunto en un espacio métrico se puedan caracterizar en términos de bolas, ya que las bolas centradas en un punto son una base de entornos del espacio métrico. Es inmediato el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Sea $x \in X$.*

1. *$x \in \overset{\circ}{A}$ si existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$.*
2. *$x \in \overline{A}$ si $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.*

EJEMPLO 2.3.2. Sea (X,d) un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$. Definimos

$$V_r(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

Algunos autores llaman a este conjunto la *bola cerrada* de centro x y radio r.

1. El conjunto $V_r(x)$ es cerrado. Para probarlo, sea $y \in \overline{V_r(x)}$ y veamos que $y \in V_r(x)$. Ya que $B_{1/n}(y) \cap V_r(x) \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sea $z_n \in B_{1/n}(y) \cap V_r(x)$. Se tiene que $d(y, z_n) < 1/n$ y $d(z_n, x) \leq r$. La desigualdad triangular da
$$d(x,y) \leq d(x,z_n) + d(z_n,y) < r + \frac{1}{n}.$$
Tomando límites, se obtiene $d(x,y) \leq r$, es decir, $y \in V_r(x)$.
2. Probamos la inclusión $\overline{B_r(x)} \subset V_r(x)$. Sea $y \in \overline{B_r(x)}$. Ya que y es un punto adherente, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in B_{1/n}(y) \cap B_r(x)$. La desigualdad triangular da ahora
$$d(x,y) \leq d(x,z_n) + d(z_n,y) < r + \frac{1}{n}$$
y tomando de nuevo límites, concluimos $d(x,y) \leq r$, es decir, $y \in V_r(x)$.
3. La inclusión $V_r(x) \subset \overline{B_r(x)}$ no es cierta en todo espacio métrico. Para ello consideramos el siguiente ejemplo. Sea la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y tomamos
$$A = \mathbb{S}^1 \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} = \mathbb{S}^1 \cup ([0,1] \times \{0\}).$$
Ver figura 2.7. Dotamos a este conjunto A de la distancia euclídea d_u de $\mathbb{R}^2$ y tomamos como espacio métrico (A, d_u). Se tiene entonces:
$$V_1(0,0) = \{(x,y) \in A : d((x,y),(0,0)) \leq 1\} = A.$$

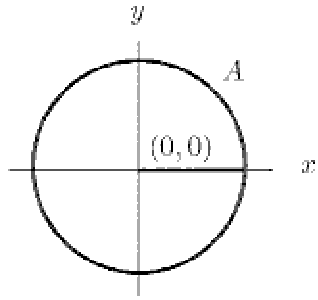


Figura 2.7: El conjunto A del ejemplo 2.3.2

Por contra,

$$B_1((0,0)) = \{(x,y) \in A : d((x,y),(0,0)) < 1\} = [0,1) \times \{0\}.$$

Para hallar su adherencia usamos la proposición 1.6.12. Así

$$\begin{aligned}\overline{B_1(0,0)}^A &= \overline{\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1\}} \cap A\\ &= \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cap A = [0,1] \times \{0\}.\end{aligned}$$

Teorema 2.3.3. *Se considera el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ y la bola $B_r(a)$. Entonces:*

1. $int(B_r(a)) = B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) < r\}$.
2. $Fr(B_r(a)) = S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) = r\}$.
3. $ext(B_r(a)) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) > r\}$.

Demostración. 1. Es consecuencia de que una bola en un espacio métrico es un conjunto abierto y de la proposición 1.6.8.

2. a) Probamos $S_r(a) \subset \mathrm{Fr}(B_r(a))$. Sea $x \in S_r(a)$ y $B_\delta(x)$ un elemento de la base de entornos con radio $\delta \leq r$ (proposición 2.2.3). Como $d(x,a) = r$, entonces $x \not\in B_r(a)$ y por tanto $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_r(a)$. Así $(\mathbb{R}^n \setminus B_r(a)) \cap B_\delta(x) \neq \emptyset$. Sea ahora el punto $p_0 = x - \delta(x-a)/(2r)$ y probamos que $p_0 \in B_r(a) \cap B_\delta(x)$. Por una parte,

$$|p_0 - a| = \left|(r - \frac{\delta}{2})\frac{(x-a)}{r}\right| = r - \frac{\delta}{2} < r,$$

y por otra, $|p_0 - x| = \delta/2 < \delta$.

b) Probamos $\mathrm{Fr}(B_r(a)) \subset S_r(a)$. Sea $x \in \mathrm{Fr}(B_r(a))$ y supongamos que $d(x,a) \neq r$. Si $d(x,a) < r$, entonces $x \in B_r(a) = \mathrm{int}(B_r(a))$, lo cual es falso, pues $\mathrm{int}(B_r(a)) \cap \mathrm{Fr}(B_r(a)) = \emptyset$. Si $d(x,a) > r$, sea $\delta = d(x,a) - r > 0$. Veamos que $B_\delta(x) \cap B_r(a) = \emptyset$. En caso contrario, si $z \in B_\delta(x) \cap B_r(a)$, la desigualdad triangular da

$$d(x,a) \leq d(x,z) + d(z,a) < \delta + r = d(x,a),$$

lo cual es una contradicción. Esto prueba que x no es un punto frontera. Hemos probado necesariamente que $d(x,a) = r$.

3. Es consecuencia de los dos apartados anteriores y de la proposición 1.6.2.

□

Si consideramos la recta euclídea $\mathbb{R}$ y un intervalo abierto (a,b), con $a < b$, dicho intervalo no es más que $B_r(x)$, donde $x = (a+b)/2$ y $r = (b-a)/2$. Entonces $\mathrm{int}((a,b)) = (a,b)$, $\mathrm{Fr}((a,b)) = \{a,b\}$ y $\mathrm{ext}((a,b)) = \mathbb{R} \setminus [a,b]$, obteniendo el mismo resultado que del ejemplo 1.6.6.

Las conclusiones del teorema 2.3.3 no se pueden generalizar a cualquier espacio métrico distinto de $\mathbb{R}^n$, pues en la demostración se ha usado de forma importante la estructura de espacio afín que posee $\mathbb{R}^n$, concretamente al tomar el punto p_0 en la demostración del apartado 2 del teorema anterior. Sin embargo, y como consecuencia de la demostración, se deduce que en todo espacio métrico (X,d) se tiene

$$\begin{aligned}
&\mathrm{int}(B_r(a)) = B_r(a)\\
&\{x \in X : d(x,a) > r\} \subset \mathrm{ext}(B_r(a))\\
&\mathrm{Fr}(B_r(a)) \subset S_r(a).
\end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo mostramos que las dos últimas inclusiones pueden llegar a ser estrictas.

Ejemplo 2.3.4. Volvemos a considerar el conjunto $A = \mathbb{S}^1 \times ([0,1] \times \{0\})$ de la figura 2.7. Sea $a = (0,0)$ y $r = 1$. Aquí $B_1(a) = [0,1) \times \{0\}$. Usando la notación anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
&\{(x,y) \in A : d((x,y),a) > 1\} = \emptyset\\
&\mathrm{ext}(B_1(a)) = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}\\
&\mathrm{Fr}(B_1(a)) = \{(1,0)\}\\
&S_1(a) = \mathbb{S}^1.
\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo estudia el grafo de una función continua de $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 2.3.5. Consideramos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se define el *grafo de* f como el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

Suponiendo que f es *continua*, calculamos el interior, exterior, frontera y adherencia de $G(f)$ como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

1. Demostramos primero que $\mathrm{int}(G(f)) = \emptyset$. Por contradicción, sea $(x, y) \in \mathrm{int}(G(f))$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x, y) \subset G(f)$. Sea $y' = y + r/2$. Entonces $(x, y') \in B_r(x, y)$ pero $y' \neq f(x) = y$: contradicción.
2. Probamos que $\mathrm{ext}(G(f)) = \mathbb{R}^2 \setminus G(f)$. Sea $(a, b) \notin G(f)$, es decir, $b \neq f(a)$. Supongamos, sin perder generalidad, que $b > f(a)$. Ya que f es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $f(x) < b$, en particular, $d((x, f(x)), (a, b)) > 0$. La función $b - f(x)$ es continua. Si restringimos a un intérvalo cerrado y acotado, sabemos de cálculo elemental que existe un mínimo de la función. Sea $m = \min\{b - f(x) : x \in [a - \delta/2, a + \delta/2]\}$ y $\eta = \min\{m, \delta/2\}$.
   Comprobemos que $B_\eta(a, b) \subset \mathbb{R}^2 \setminus G(f)$. Si $(x, y) \in G(f) \cap B_\eta(a, b)$, entonces $y = f(x)$ y
   $$d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x - a)^2 + (f(x) - b)^2} < \eta. \tag{2.2}$$
   De aquí se deduce que $|x - a| < \eta$. Entonces $b - f(x) \geq m$. También de la desigualdad en (2.2) se tiene $|f(x) - b| < \eta \leq m$, llegando a una contradicción. Esta contradicción prueba que $\mathbb{R}^2 \setminus G(f) \subset \mathrm{ext}(G(f))$. Ya que siempre es cierta la otra inclusión, concluimos que $\mathrm{ext}(G(f)) = \mathbb{R}^2 \setminus G(f)$.
3. Usando la proposición 1.6.9, tenemos
   $$\mathrm{Fr}(G(f)) = \overline{G(f)} = G(f).$$

2.4. Sucesión convergente en un espacio métrico

Una herramienta que va a resultar muy útil en un espacio métrico es la convergencia de sucesiones, pues se probará en el teorema 2.4.8 de esta sección que la topología en un espacio métrico puede caracterizarse si conocemos las sucesiones convergentes. Ya que las bolas centradas en un punto de un espacio métrico forman una base de entornos, se desprende de la proposición 1.7.2 la siguiente caracterización de la convergencia de sucesiones, y que extiende la dada habitualmente en un primer curso de análisis matemático para sucesiones de números reales.

Proposición 2.4.1. *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X,d) es convergente a $x \in X$ si y sólo si*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \nu \in \mathbb{N} : n \geq \nu \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon.$$

Demostración. Basta darse cuenta que escribir $d(x_n, x) < \epsilon$ es lo mismo que $x_n \in B_\epsilon(x)$. □

También $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ es equivalente a que la sucesión de números reales $\{d(x_n, x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

De nuevo tenemos que recordar y remarcar que el concepto de convergencia de sucesiones es *topológico* a pesar de que en la proposición 2.4.1, y en el contexto de espacios métricos, aparece de forma explícita la distancia del espacio. Por tanto, si d_1 y d_2 son dos distancias equivalentes en un conjunto dado X, las sucesiones convergentes en (X, d_1) coinciden con las de (X, d_2).

Corolario 2.4.2. *Sea X un conjunto dos distancias d_1 y d_2. Si estas distancias son equivalentes, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ para la distancia d_1 si y sólo si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ para la distancia d_2.*

EJEMPLO 2.4.3. En el conjunto $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ se habían definido en el ejemplo 2.2.9 dos distancias, d y d_∞ y ya se probó entonces que $\tau_d \subsetneq \tau_{d_\infty}$. Esta inclusión estricta también se puede probar en términos de sucesiones. Concretamente, recordemos la función f definida en aquél ejemplo que dependía de $r > 0$. Denotamos f_n a la función para el valor $r = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces es evidente que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{d}{\to} g$, $g = 0$, ya que $d(f_n, 0) = 1/(2n) \to 0$. Sin embargo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a 0 con la distancia d_∞ ya que $d_\infty(f_n, 0) = 2$, que evidentemente no converge a 0.

EJEMPLO 2.4.4. Probamos que las sucesiones convergentes en un espacio métrico discreto (X, d) son las sucesiones que son constantes a partir de un término de la sucesión.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Sea $\epsilon = 1$. Entonces existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $d(x_n, x) < 1$. Pero de la definición de la distancia discreta, $d(x_n, x) = 0$ y por tanto $x_n = x$. Esto significa que la sucesión es constante a partir del término $n = \nu$.

Probamos que el límite de una sucesión convergente en un espacio métrico es único. Este hecho no es cierto en general para espacios topológicos, tal como apareció en los ejemplos 1.7.4 y 1.7.5.

Proposición 2.4.5. *En un espacio métrico el límite de una sucesión convergente es único.*

Demostración. Sea una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con dos límites x e y. Por la proposición 2.2.11, existen $U \in \mathcal{U}_x$ y $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $U \cap V = \emptyset$. Por la definición de convergencia, existen $\nu_1,\ \nu_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall n \geq \nu_1,\ x_n \in U, \qquad \forall n \geq \nu_2,\ x_n \in V.$$

Si $n \geq \max\{\nu_1, \nu_2\}$, entonces $x_n \in U \cap V$, lo cual es una contradicción. □

En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, la convergencia de sucesiones se puede reducir a convergencia de sucesiones de $\mathbb{R}$.

Proposición 2.4.6. *Sea una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^m$ y $x \in \mathbb{R}^m$. Denotamos $x_n = (x_1^n, \dots, x_m^n)$ y $x = (x_1, \dots, x_m)$. Son equivalentes:*

1. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$.
2. *Para cada* $j = 1, \dots, m$, $\{x_j^n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x_j$.

Demostración. (1) ⇒ (2). Para cada $j = 1, \dots, m$, se tiene

$$|x_j^n - x_j| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i^n - x_i)^2} = |x_n - x|.$$

Por tanto, si $|x_n - x| \to 0$, entonces $|x_j^n - x_j| \to 0$.

(2) ⇒ (1). Tenemos

$$0 \leq |x_n - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i^n - x_i)^2} \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i^n - x_i|.$$

Como $|x_i^n - x_i| \to 0$ para todo i, entonces $|x_n - x| \to 0$. □

Este resultado también se puede probar de otra manera. Consideramos en $\mathbb{R}^m$ las distancias d_1 y d_2 definidas en el ejemplo 2.1.2. Sabemos por el corolario 2.2.8 que las distancias euclídea, d_1 y d_2 son equivalentes. Por el corolario 2.4.2, decir que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ (concepto topológico) es lo mismo que $d_2(x_n, x) \to 0$. Pero por la definición de d_2,

$$0 \leq |x_j^n - x_j| \leq d_2(x_n, x),$$

luego $|x_j^n - x_j| \to 0$.

Para la otra implicación, como $|x_j^n - x_j| \to 0$, $1 \leq j \leq m$, entonces

$$d_1(x_n, x) = \sum_{j=1}^{m} |x_j^n - x_j| \to 0,$$

luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$.

El siguiente resultado es conocido de cálculo y su demostración es sencilla.

Proposición 2.4.7. *Se consideran en $\mathbb{R}^m$ sucesiones convergentes $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con límites x e y, respectivamente, y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

1. *La sucesión $\{\lambda x_n + \mu y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y tiene como límite $\lambda x + \mu y$.*
2. *Supongamos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Entonces la sucesión $\{y_n x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y su límite es yx.*
3. *Supongamos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y que $y \neq 0$. Entonces la sucesión $\{x_n/y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y su límite es x/y.*

Es posible estudiar en un espacio métrico los puntos interiores, exteriores, frontera y adherentes por medio de sucesiones. Concretamente, y a diferencia del teorema 1.7.6, proporcionamos *caracterizaciones* en términos de sucesiones.

Teorema 2.4.8. *Sea un espacio métrico (X, d), $A \subset X$ y $x \in X$. Entonces*

1. *$x \in \mathring{A}$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $x_n \in A$.*
2. *$x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$.*
3. *$x \in ext(A)$ si y sólamente si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $x_n \in X \setminus A$.*
4. *$x \in Fr(A)$ si y sólamente si existen sucesiones en A y en $X \setminus A$ convergentes a x.*

Demostración. Hacemos sólo los dos primeros apartados. El tercero es consecuencia de (1) y de que $\operatorname{ext}(A) = \operatorname{int}(X \setminus A)$; el cuarto es consecuencia de (2) y de que $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Por otro lado, siempre es cierta una de las implicaciones por el teorema 1.7.6 y por tanto, en ambos casos, demostramos la otra.

1. La implicación que hay que probar es de derecha a izquierda. Por reducción al absurdo, supongamos que $x \notin \overset{\circ}{A}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $B_{1/n}(x) \in \mathcal{U}_x$, $B_{1/n}(x) \not\subset A$, luego existe $x_n \in B_{1/n}(x) \setminus A$. Evidentemente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ pues
$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0,$$
pero ningún elemento de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a A, en contradicción con la hipótesis.

2. Ahora la implicación a demostrar es de izquierda a derecha. Supongamos que $x \in \overline{A}$. Sean las bolas $B_{1/n}(x) \in \mathcal{U}_x$, $n \in \mathbb{N}$. Por ser x adherente a A, $B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$. Tomamos un elemento de dicha intersección y lo fijamos, el cual denotamos por a_n. Entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A que converge a x ya que
$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \to 0.$$

□

El teorema 2.4.8 es de gran importancia y da una cualidad especial que tiene los espacios métricos. Dicho teorema dice que los puntos interiores (también adherentes) de un conjunto de un espacio métrico vienen caracterizados en términos de sucesiones convergentes. Pero como ya fue observado en la proposición 1.6.8 y comentarios posteriores, conocer el interior de todos los conjuntos es equivalente a conocer la topología del espacio. Por tanto, podemos afirmar:

La topología de un espacio métrico está caracterizada en términos de sucesiones convergentes.

Mostramos un ejemplo de cómo se usa el teorema anterior.

Ejemplo 2.4.9. Usando sucesiones, probamos que el conjunto
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x + 1\}$$
es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y que
$$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x + 1\}.$$
Para probar que A es abierto, veamos que si $(x, y) \in A$, entonces $(x, y) \in \mathrm{int}(A)$. Sea $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to (x, y)$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$

(proposición 2.4.6). Por tanto, $\{y_n - x_n - 1\}_{n\in\mathbb{N}} \to y - x - 1$ (proposición 2.4.7). Ya que $y - x - 1 > 0$, y tomando $\epsilon = y - x - 1$, la definición de convergencia de sucesiones asegura que existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$,

$$|(y_n - x_n - 1) - (y - x - 1)| < \epsilon = y - x - 1.$$

En particular,

$$(y_n - x_n - 1) - (y - x - 1) > -\epsilon = -(y - x - 1).$$

De aquí se deduce que $y_n - x_n - 1 > 0$, probando que $(x_n, y_n) \in A$ a partir de $n \geq \nu$. Esto demuestra que $(x, y) \in \operatorname{int}(A)$ por el teorema 2.4.8.

Sea ahora $(x, y) \in \overline{A}$. Por el teorema 2.4.8, existe $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to (x, y)$. De nuevo, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$. Ya que $(x_n, y_n) \in A$, entonces $y_n - x_n - 1 > 0$. Tomando límites, y por el ejercicio 10 del final de este capítulo, conseguimos $y - x - 1 \geq 0$. Esto prueba que $A \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x + 1\}$. Queda por probar que si (x, y) satisface $y = x + 1$, entonces (x, y) es adherente a A. Para ello basta con tomar la sucesión $\{(x, x + 1 + 1/n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, cuyo límite es (x, y).

Damos ahora una nueva caracterización de la adherencia de un conjunto en un espacio métrico en términos de la distancia. Intuitivamente nos dice que un punto adherente a un conjunto está a 'distancia cero' de dicho conjunto, dando énfasis al significado de 'estar adherido' que hay en el lenguaje cotidiano.

Proposición 2.4.10. *Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$. Definimos la distancia de x al conjunto A como*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Entonces $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

El conjunto $\{d(x, a) : a \in A\}$ posee ínfimo porque está acotado inferiormente por 0.

Demostración. Supongamos que $x \in \overline{A}$. Por el teorema 2.4.8, existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Ya que $\{d(a_n, x) : n \in \mathbb{N}\} \subset \{d(a, x) : a \in A\}$, al tomar ínfimos en ambos conjuntos, se tiene

$$\inf\{d(a_n, x) : n \in \mathbb{N}\} \geq \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Pero como $\{d(a_n, x)\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, el ínfimo del conjunto de la izquierda es 0, probando que el de la derecha también es 0, es decir, $d(x, A) = 0$.

Sea ahora $x \in X$ tal que $d(x, A) = 0$ y $B_r(x)$ una bola centrada en x. Como

$$0 = d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} < r,$$

la definición de ínfimo en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, asegura que existe $a \in A$ con $0 \leq d(x, a) < r$. Entonces $a \in B_r(x)$ y por tanto $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. Como el radio de la bola es arbitrario, entonces $x \in \overline{A}$ por la proposición 2.3.1. □

Este resultado (o el teorema 2.4.8) permite probar de nuevo el corolario 2.2.12 que afirma que todo punto en un espacio métrico es un conjunto cerrado. Así, si $x \in X$ e $y \in \overline{\{x\}}$, entonces $d(y, \{x\}) = 0$. Pero esta distancia no es más que $d(y, x)$, luego $d(y, x) = 0$, esto es, $y = x$.

2.5. Ejercicios

1. Dado un espacio métrico (X, d), se define

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Probar que d' es una distancia en X y estudiar si es equivalente a d. Observar que d' es una distancia acotada, pues $d' < 1$.

2. En un espacio métrico (X, d) se define

$$d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Probar que d' es una distancia acotada y que es equivalente a d. Sin embargo, si $X = \mathbb{R}$ y tomando $d = d_u$ la distancia usual, probar que no existe $k > 0$ tal que $kd_u \leq d'$, donde d_u es la distancia usual.

3. Se define en $\mathbb{R}^2$

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Probar que d es una distancia en $\mathbb{R}^2$ y estudiar si es equivalente a la distancia usual.

4. Sea (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Probar que $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de x.

5. Probar que

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{si } x-y \in \mathbb{Q} \\ 1+|x-y| & \text{si } x-y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

   es una distancia en $\mathbb{R}$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, probar que x_n es racional a partir de cierto lugar.

6. Sea (X,d) un espacio métrico. Sea dice que $A \subset X$ está acotado (para la distancia d) si existe $p_0 \in X$ y $M > 0$ tal que $d(a,p_0) \leq M$ para todo $a \in A$. Probar que si A es acotado, también lo es $\overline{A}$.

7. Consideramos $A = [0,1] \cup (2,3) \cup \{5\} \subset \mathbb{R}$. Usar el teorema 2.4.8 para:

   a) Estudiar si $\{5\}$ es un conjunto abierto o cerrado en A.

   b) Hacer lo mismo para el intervalo $(2,3)$.

   c) Calcular la adherencia de $[0,1)$ en A.

   d) Estudiar si $[0,1/2]$ es entorno de 0 en A.

8. Calcular el interior y la adherencia de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

   a) $A = \mathbb{R} \times \{0\}$.

   b) $B = [0,\infty) \times (\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

   c) $C = A \cup B$.

   d) $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.

   e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$.

   f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \leq 1/x\}$.

9. Se considera el grafo de la función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$. Hallar su adherencia en $\mathbb{R}^2$.

10. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$ dos sucesiones convergentes en $(\mathbb{R},\tau_u)$. Si $x_n \geq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, probar que $x \geq y$.

11. Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in A$. Probar que

    a) $x \in \overset{\circ}{A}$ si y sólo si $d(x, X\setminus A) > 0$.

    b) $x \in A'$ si y sólo si $d(x, A\setminus\{x\}) = 0$.

12. Se considera un espacio métrico (X,d) y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Probar que el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es cerrado.

13. Consideramos las distintas *cuádricas* de $\mathbb{R}^3$:

    a) El *elipsoide*: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 = 1\}$, $a,b,c \neq 0$. Un caso particular ocurre cuando $a = b = c$, obteniendo una esfera de radio $|a|$ centrada en el origen.
    b) El *paraboloide*: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$.
    c) El *hiperboloide reglado*: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.
    d) El *hiperboloide de dos hojas*: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$.
    e) El *cono*: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$.
    f) El *paraboloide hiperbólico*: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$.
    g) El *cilindro*: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

    Ver figuras 2.8, 2.9 y 2.10. Probar que son conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^3$.

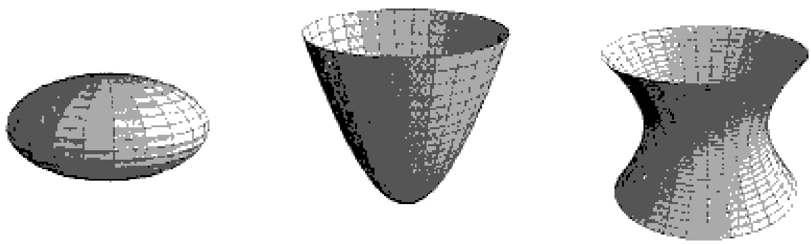


Figura 2.8: De izquierda a derecha: elipsoide, paraboloide e hiperboloide reglado

14. Sea (X,d) un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$. Denotamos por $V_r(x) = \{y \in X : d(y,x) \leq r\}$. Probad:

    a) $V_r(x) = \bigcap_{s>r} B_s(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{r+1/n}(x)$.
    b) $\{x\} = \bigcap_{s>0} B_s(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{1/n}(x)$.
    c) $B_r(x) = \bigcup_{s<r} V_s(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{r-1/n}(x)$.
    d) $B_r(x) \subset \mathrm{int}(V_r(x))$.

15. Sea $A \subset X$ un subconjunto de un espacio métrico (X,d). Probar que $x \in A'$ si y sólo si existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ de términos diferentes que converge a x.

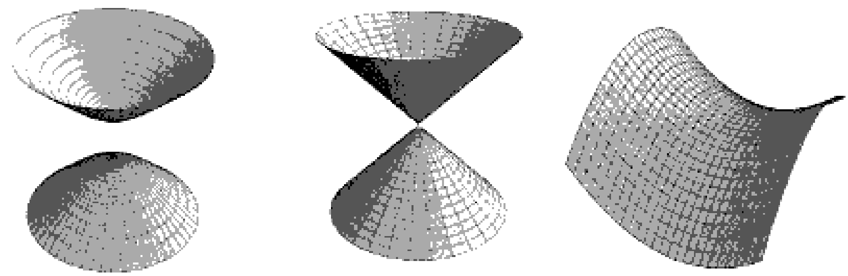


Figura 2.9: De izquierda a derecha: hiperboloide de dos hojas, cono y paraboloido hiperbólico

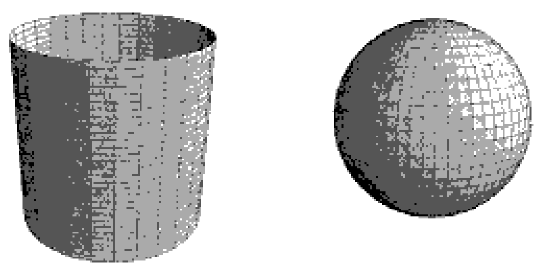


Figura 2.10: Un cilindro y una esfera

16. Sean dos espacios métricos (X_i, d_i), $i = 1, 2$. En el conjunto $X_1 \times X_2$ se define la distancia producto d como

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2).$$

Probar que, efectivamente, d es una distancia. En el caso particular $X_i = \mathbb{R}$ con la distancia usual, la distancia producto resultante en $\mathbb{R}^2$ es la distancia d_1 que ya se había definido en el ejemplo 2.1.2.

17. Dados dos espacios métricos (X_1, d_1) y (X_2, d_2), se define

$$d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \text{máx}\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

$$\bar{d}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}.$$

Probar que d' y $\bar{d}$ son distancias y que ambas son equivalentes a la distancia producto definida en el ejercicio anterior.

Capítulo 3

Aplicación continua

Hemos estudiado en el primer capítulo el concepto de espacio topológico, y hemos continuado en el siguiente con el de espacio métrico como un ejemplo destacado. En este capítulo vamos a considerar aquellas aplicaciones entre espacios topológicos que son naturales en el sentido que la nueva estructura creada, la topología, se traslada de un espacio a otro. Este nuevo paso es habitual en matemáticas y así, cuando se estudia grupos, las aplicaciones que se comportan bien entre grupos son los homomorfismos de grupos, o cuando se considera espacios vectoriales, las aplicaciones adecuadas entre dichos espacios son las aplicaciones lineales. En el caso de la topología, dichas aplicaciones no son más que las aplicaciones continuas.

De nuevo, y como ha sucedido anteriormente con el concepto de límite de sucesiones, la persona que se inicia con este libro en el campo de la topología ya conoce de antemano lo que es una aplicación continua, al menos, una aplicación continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, sin saber en su momento que dicho concepto sea *topológico*. Pero llegados a esta altura del libro, para esta persona que aprendió la definición de aplicación continua en la recta euclídea en términos de epsilons y deltas, e igual que sucedía con el concepto de sucesión convergente, ya no le va a resultar extraño que dicha definición se pueda escribir en términos de entornos o abiertos.

3.1. Aplicación continua

Es natural pensar que la continuidad de una aplicación se exprese en términos de entornos pues éstos indican cercanía alrededor de un punto. Una forma de introducir el concepto de continuidad de una aplicación es recordar el concepto de continuidad para una función de una variable dado en un primer curso de análisis matemático. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, entonces f es continua en $x \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |z - x| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \epsilon.$$

Podemos escribir $|z - x| < \delta$ como $z \in (x - \delta, x + \delta)$ y $|f(z) - f(x)| < \epsilon$ como $f(z) \in (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$. Como la bola $B_r(x)$ en la recta euclídea no es más que el intervalo $(x - r, x + r)$, la definición es equivalente a:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)).$$

Además, esta formulación en términos de bolas es igualmente válida para aplicaciones entre espacios métricos. Ya que las bolas son entornos de puntos, se puede abstraer la definición de aplicación continua entre espacios topológicos del siguiente modo (ver figura 3.1).

Definición 3.1.1. Una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es continua en $x \in X$ si para todo $U' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subset U'$. Si f es continua en todo punto de X, se dice que f es continua en X.

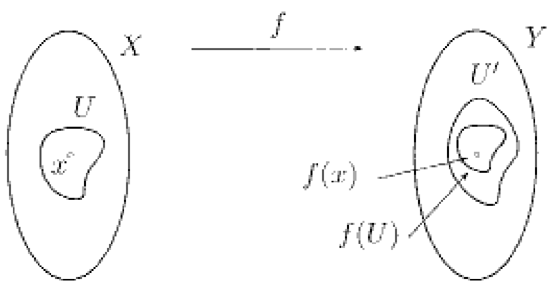


Figura 3.1: Concepto de aplicación continua: para todo entorno U' de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset U'$

Es inmediato la siguiente caracterización de continuidad de una aplicación mediante abiertos, bases y bases de entornos.

Proposición 3.1.2. *Sea una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ y sean bases de topologías β y β' de τ y τ' respectivamente, y bases de entornos β_x y β'_y para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La aplicación f es continua en x.*

2. *Para todo* $O' \in \tau'$, *con* $f(x) \in O'$, *existe* $O \in \tau$ *con* $x \in O$, *tal que* $f(O) \subset O'$.
3. *Para todo* $B' \in \beta'$ *con* $f(x) \in B'$, *existe* $B \in \beta$ *con* $x \in B$, *tal que* $f(B) \subset B'$.
4. *Para todo* $V' \in \beta'_{f(x)}$, *existe* $V \in \beta_x$ *tal que* $f(V) \subset V'$.

Caracterizamos la continuidad de aplicaciones definidas en todo su dominio.

Proposición 3.1.3. *Una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *es continua si y sólo si* $f^{-1}(O') \in \tau$ *para todo* $O' \in \tau'$.

Demostración. Supongamos que la aplicación es continua en todo punto. Sea $O' \in \tau'$ y veamos que $f^{-1}(O')$ es un conjunto abierto en X probando que todo punto es interior. Sea $x \in f^{-1}(O')$. Usando que f es continua en x y que $O' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subset O'$. En particular, $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(O')$ y esto demuestra que $x \in \operatorname{int}(f^{-1}(O'))$.

Probamos el recíproco. Sea $x \in X$ y veamos que f es continua en x. Dado $U' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$, sea $O' \in \tau'$ tal que $f(x) \in O' \subset U'$. Por hipótesis, $f^{-1}(O')$ es un conjunto abierto en X que contiene a x. Si llamamos $U = f^{-1}(O')$, se deduce que $U \in \mathcal{U}_x$ y que

$$f(U) \subset f(f^{-1}(O')) \subset O' \subset U'.$$

$\square$

El siguiente teorema extiende el resultado anterior usando conjuntos cerrados, adherencias y bases de abiertos.

Teorema 3.1.4. *Sea una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *entre dos espacios topológicos. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La aplicación* f *es continua en* X.
2. $f^{-1}(O') \in \tau$ *para todo* $O' \in \tau'$.
3. $f^{-1}(F') \in \mathcal{F}$ *para todo* $F' \in \mathcal{F}'$.
4. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ *para todo* $A \subset X$.
5. *Si* β' *es una base de* τ', *entonces* $f^{-1}(B') \in \tau$ *para todo* $B' \in \beta'$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Es la proposición 3.1.3.

(2) $\Rightarrow$ (3). Dado $F' \in \mathcal{F}'$, sea $O' = Y \setminus F' \in \tau'$. Por hipótesis, $f^{-1}(O') \in \tau$. Como $f^{-1}(O') = X \setminus f^{-1}(F')$, el conjunto $f^{-1}(F')$ es un cerrado en X.

(3) $\Rightarrow$ (4). Como $\overline{f(A)} \in \mathcal{F}'$, entonces por hipótesis $f^{-1}(\overline{f(A)}) \in \mathcal{F}$. Ya que

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)}),$$

tomando adherencias en estas inclusiones, se obtiene $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ y así,

$$f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}.$$

(4) $\Rightarrow$ (1). Sea $U' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ y $O' \in \tau'$ tal que $f(x) \in O' \subset U'$. Sea $A = X \setminus f^{-1}(O')$ y $U = X \setminus \overline{A} \in \tau$. Probamos que $U \in \mathcal{U}_x$ y que $f(U) \subset U'$.

Usando que U es un conjunto abierto de X, para probar que es entorno de x basta con demostrar que $x \in U$ (proposición 1.4.2). Si $x \notin U$, entonces $x \in \overline{A}$ y $f(x) \in \overline{f(A)}$ y por tanto, $O' \cap f(A) \neq \emptyset$. Pero

$$O' \cap f(A) = O' \cap f(X \setminus f^{-1}(O')) \subset O' \cap (Y \setminus O') = \emptyset,$$

lo cual es contradictorio. Por otra parte,

$$f(U) = f(X \setminus \overline{A}) \subset f(X \setminus A) = f(f^{-1}(O')) \subset O' \subset U'.$$

Para probar la equivalencia (2) $\Leftrightarrow$ (5), observemos que si $O' \in \tau'$, entonces $O' = \bigcup_{i \in I} B'_i$ para un conjunto de índices I y $B'_i \in \beta'$. Además $f^{-1}(O') = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B'_i)$. □

Este teorema, además de proporcionar varias caracterizaciones de la continuidad de una aplicación, permite estudiar si un conjunto es abierto o cerrado. Para ello basta con expresar dicho conjunto como la imagen inversa, mediante una aplicación continua, de un conjunto abierto o cerrado. En la sección 3.2 daremos ejemplos de esta situación.

Es conocido de un curso de análisis matemático que la continuidad de aplicaciones en la recta euclídea está caracterizada por sucesiones. En general, en un espacio topológico sólo tenemos una respuesta parcial.

Proposición 3.1.5. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua en $x \in X$. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \to x$, entonces $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \to f(x)$.*

Demostración. Sea $U' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$. Por la continuidad de f, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subset U'$. Como $\{x_n\} \to x$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para $n \geq \nu$. Por tanto, $f(x_n) \in f(U) \subset U'$, como se quería probar. □

Ya probaremos en el teorema 3.3.1 que el anterior resultado es una equivalencia cuando consideramos espacios métricos, tal como ya sabíamos que era cierto al considerar la recta euclídea.

Antes de proseguir con el desarrollo del capítulo, vamos a remarcar una vez más que el concepto de continuidad es topológico. Al plantearnos si cierta aplicación es continua, tenemos que tener una aplicación definida entre *dos espacios topológicos*, y no entre dos conjuntos. Además, e insistiendo una vez más, un espacio topológico es un par ordenado formado por un conjunto y una topología, de manera que si mantenemos el conjunto y cambiamos la topología, el espacio topológico ha cambiado, y la posible continuidad de la aplicación ha podido también variar.

Esto se ilustra claramente cuando consideramos $Y = X$. Sea X un conjunto y una aplicación $f : X \to X$. No tiene sentido en este momento preguntarnos si f es continua ya que f *no* está definida entre espacios topológicos sino sólo entre conjuntos. Por tanto, el planteamiento correcto es considerar $f : (X, \tau) \to (X, \tau')$. Aunque ambas topologías τ y τ' están definidas sobre el *mismo* conjunto X, esto no añade nada, ya que los espacios topológicos son diferentes. Por ejemplo, supongamos que f es la aplicación identidad $f = 1_X$ definida por $1_X(x) = x$, $x \in X$ y nos preguntamos si $1_X : (X, \tau) \to (X, \tau')$ es continua. Para el lector le resultará algo extraño, pero dicha aplicación puede no ser continua. Así, si consideramos $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_D)$, donde τ_D es la topología discreta, esta aplicación no es continua en ningún punto: si $x \in \mathbb{R}$, $\{x\} \in \mathcal{U}_x^D$, pero no existe $\epsilon > 0$ tal que $1_{\mathbb{R}}((x - \epsilon, x + \epsilon)) \subset \{x\}$.

Es evidente el siguiente resultado:

Proposición 3.1.6. *Sea X un conjunto y dos topologías τ_1 y τ_2 definidas en él. Son equivalentes:*

1. *La aplicación $1_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua.*
2. *La topología τ_1 es más fina que τ_2.*

En los siguientes ejemplos estudiamos la continuidad de aplicaciones que tienen por dominio o codominio espacios topológicos que han aparecido en capítulos anteriores.

EJEMPLO 3.1.7. Sea un espacio topológico discreto (X, τ_D). Si (Y, τ') es un espacio topológico, entonces cualquier aplicación $f : (X, \tau_D) \to (Y, \tau')$ es continua, ya que la imagen inversa de todo abierto de Y es abierto en X al ser un subconjunto de X.

Recíprocamente, sea un espacio topológico (X, τ) con la propiedad de que cualquier aplicación de (X, τ) en otro espacio topológico es continua. Probamos que τ es la topología discreta. Como siempre $\tau \subset \tau_D$, para probar la otra inclusión consideramos la aplicación identidad $1_X : (X, \tau) \to (X, \tau_D)$. Por hipótesis, esta aplicación es continua, luego para todo $O \in \tau_D$, $(1_X)^{-1}(O') \in \tau$ es decir, $O' \in \tau$.

Ejemplo 3.1.8. De forma análoga al ejemplo anterior, cualquier aplicación cuyo codominio es un espacio topológico trivial es continua. Por otra parte, el único espacio topológico que cumple que cualquier aplicación definida sobre él sea continua, es el espacio topológico trivial.

Ejemplo 3.1.9. Sea (X, τ_d) un espacio topológico dotado de la topología derechas (ejemplo 1.2.12), donde sabemos que $\beta_x = \{[x, \to [\}$ es una base de entornos de x. Estudiamos qué aplicaciones de (X, τ_d) en (X, τ_d) son continuas. Supongamos que $f : (X, \tau_d) \to (X, \tau_d)$ es una aplicación continua usamos el teorema 3.1.4 con la caracterización por base de entornos. El hecho fundamental aquí es que β_x sólo tiene un elemento. Dado $[f(x), \to [\in \beta_{f(x)}$ si f es continua en x, entonces necesariamente tenemos la inclusión

$$f([x, \to [) \subset [f(x), \to [,$$

decir, para todo $y \in X$ con $x \leq y$, $f(x) \leq f(y)$. Por tanto, la aplicación que ser creciente. El recíproco es inmediato de probar y dice que tod creciente $f : X \to X$ es continua. Por tanto el conjunto de la continuas de (X, τ_d) en sí mismo lo constituye las aplicacione por ejemplo, la función

$$\tau_d) \to (\mathbb{R}, \tau_d), \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Es en nuida. Para el te una a 3.2 darem ... es escenarios que relacionan la teor ... ciones. Empezamos con la aplica ... s. La siguiente proposición

Es conoc ... aplicaciones ... en un espacio ... ...licaciones que ... n aparecido en ... res espacios topológico

Proposición 3. ... $x \in X$. Si $\{x_n\}_{n \in}$ ... τ_D). Si (Y, τ') es un ... $(X, \tau_D) \to (Y, \tau')$ es ... de Y es abierto en X al ... onstante, entonces es cont

... $\to (X, \tau)$ es continua.

Demostración. Sea U ... que $f(U) \subset U'$. Como ... $, \tau') \to (Z, \tau'')$ son dos aplicacion ... Por tanto, $f(x_n) \in f(U$ ... $) \to (Z, \tau'')$ también es continua.

EJEMPLO 3.1.11. Sea (X,τ) un espacio topológico, Y un conjunto y $f: X \to Y$ una aplicación biyectiva. En Y consideramos la topología $\tau(f)$ definida en el teorema 1.1.3. Sea $g:(Y,\tau(f)) \to (Z,\tau')$ una aplicación. Esta aplicación es continua si $g^{-1}(O') \subset \tau(f)$, $\forall O' \in \tau'$. Por la definición de la topología $\tau(f)$, esto es equivalente a que $f^{-1}(g^{-1}(O')) \subset \tau$, es decir, $(g\circ f)^{-1}(O') \in \tau$. Hemos probado que si $g\circ f$ es continua, entonces g también es continua. El recíproco es inmediato por la proposición 3.1.10. Como conclusión, g es continua si y sólamente si $g\circ f$ es continua.

El resultado que viene ahora también es fácil de demostrar pero tiene su importancia y por eso nos detenemos en explicarlo. Planteamos la siguiente situación. Desde la teoría conjuntista, si X es un conjunto y $A \subset X$, se define la aplicación inclusión de A en X como

$$i: A \hookrightarrow X, \quad i(a) = a.$$

Consideramos ahora topologías en A y en X y planteamos la cuestión de la continuidad de i. Concretamente, sea un espacio topológico (X,τ). En el capítulo 1 se definió la topología relativa $\tau_{|A}$ y ya entonces decíamos que esta topología era la natural en dicho conjunto A. Si es así, es de esperar al menos que la aplicación inclusión $i:(A,\tau_{|A}) \to (X,\tau)$ sea continua. La siguiente proposición confirma este hecho y por tanto, los pasos seguidos hasta ahora son coherentes con lo que uno espera que sea cierto. Es más, damos una caracterización de la topología relativa en términos de la continuidad de la aplicación inclusión.

Proposición 3.1.12. *Sea (X,τ) un espacio topológico.*

1. *La aplicación inclusión $i:(A,\tau_{|A}) \to (X,\tau)$ es continua.*
2. *La topología $\tau_{|A}$ es la topología menos fina en A que hace continua a la inclusión.*

Demostración. 1. Si $O \in \tau$, entonces $i^{-1}(O) = O\cap A \in \tau_{|A}$, probando que la inclusión i es continua (proposición 3.1.3).

2. Sea ahora τ' una topología en A tal que la inclusión $i:(A,\tau') \hookrightarrow (X,\tau)$ es continua. Veamos que $\tau_{|A} \subset \tau'$. Sea $O\cap A \in \tau_{|A}$ con $O \in \tau$. Como la aplicación i es continua, $i^{-1}(O) \in \tau'$, pero $i^{-1}(O) = O\cap A$ y por tanto, $\tau_{|A} \subset \tau'$.

$\square$

El siguiente contexto se refiere a la restricción de aplicaciones. Desde teoría de conjuntos, si $f : X \to Y$ es una aplicación y $A \subset X$, se define restricción de f a A como la aplicación

$$f_{|A} : A \to Y, \quad f_{|A}(a) = f(a).$$

Así, la aplicación inclusión $A \hookrightarrow X$ no es más que la restricción de la aplic ción identidad 1_X de X en el conjunto A. Consideramos ahora $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua. Si en A tomamos la topología relativa, decir, $\tau_{|A}$, es natural preguntarse si la aplicación $f_{|A}$ es continua. De forn más general, tenemos:

Teorema 3.1.13. *Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos y $A \subset X$, $B \subset$ Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua.*

1. *La restricción $f_{|A} : (A, \tau_{|A}) \to (Y, \tau')$ es continua.*
2. *Si $Im(f) \subset B$, entonces $f : (X, \tau) \to (B, {\tau'}_{|B})$ es continua.*
3. *La aplicación $f_{|A} : (A, \tau_{|A}) \to (f(A), \tau'_{|f(A)})$ es continua.*

Demostración.

1. La aplicación $f_{|A}$ es continua por ser composición dos aplicaciones continuas, a saber, $f_{|A} = f \circ i$, donde i es la inclusi de A en X (proposición 3.1.12).
2. Sea un conjunto abierto $G' \in {\tau'}_{|B}$. Existe $O' \in \tau'$ tal que $G' = O' \cap$ Por tanto

$$\tau \ni f^{-1}(G') = f^{-1}(O') \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(O') \cap X = f^{-1}(O').$$

3. Es consecuencia de los dos apartados anteriores.

El siguiente resultado tiene unas hipótesis más débiles que el apartad del teorema anterior.

Proposición 3.1.14. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación y $A \subset X$. $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es continua en todo punto de A, entonces $f_{|A} : (A, \tau_{|A}) \to (Y, \tau')$ es continua.*

Demostración. Sea $a \in A$ y $U' \in \mathcal{U}'_{f(a)}$. Por la continuidad de f en $a \in$ existe $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $f(U) \subset U'$. Entonces $U \cap A \in \mathcal{U}_a^A$ y satisface $f(U \cap A$ $f(U) \subset U'$, probando la continuidad de $f_{|A}$ en a.

El recíproco de esta proposición no es cierto, es decir, la aplicación $f_{|A}$ puede ser continua y sin embargo la aplicación $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ puede no serlo en los puntos de A. Un ejemplo es el siguiente. En la recta euclídea, consideramos la función

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

La aplicación $f_{|\mathbb{Q}}$ es continua al ser una aplicación constante, pero f no es continua en ningún número real.

El siguiente resultado es útil a la hora de estudiar la continuidad de una aplicación cuando está definida a trozos. Para asegurar la continuidad, es suficiente que sea continua en dos abiertos (o dos cerrados) que recubran todo el espacio.

Teorema 3.1.15. *Sea una aplicación $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ y supongamos que $X=A\cup B$, donde $A,B\in\tau$ (o $A,B\in\mathcal{F}$). Si $f_{|A}$ y $f_{|B}$ son aplicaciones continuas, entonces f también es continua.*

Demostración. Demostramos el resultado suponiendo que $A,B\in\tau$. Sea $O'\in\tau'$. Entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(O') &= \big(A\cap f^{-1}(O')\big)\cup\big(B\cap f^{-1}(O')\big)\\ &= (f_{|A})^{-1}(O')\cup(f_{|B})^{-1}(O'). \end{aligned}$$

La continuidad de $f_{|A}$ y $f_{|B}$ implican $(f_{|A})^{-1}(O')\in\tau_{|A}$ y $(f_{|B})^{-1}(O')\in\tau_{|B}$. Ya que A y B son abiertos en (X,τ), la proposición 1.5.5 asegura que $\tau_{|A}\subset\tau$ y $\tau_{|B}\subset\tau$. Por tanto, $(f_{|A})^{-1}(O')$ y $(f_{|B})^{-1}(O')$ son conjuntos abiertos en (X,τ) y así, $f^{-1}(O')$ también lo es. □

Ejemplo 3.1.16. Se define

$$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x\in(-\infty,0)\\ 1 & \text{si } x\in(0,\infty).\end{cases}$$

Entonces f es continua, ya que $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$ son abiertos en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y la restricción de f a cada uno de ellos es una aplicación constante.

Este teorema no es cierto si no se supone que A y B son abiertos. El ejemplo que ha aparecido antes del teorema 3.1.15 es una muestra de ello, tomando $A=\mathbb{Q}$ y $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Otro más es el siguiente.

Ejemplo 3.1.17. Consideramos $A = (-\infty, 0)$, $B = [0, \infty)$ y

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{si } x \in [0, \infty). \end{cases}$$

Las aplicaciones $f_{|A}$ y $f_{|B}$ son continuas pero f no es continua en $x = 0$ la siguiente razón. Aquí, $f(0) = 1$. Entonces $U' = (0, 2) \in \mathcal{U}'_1$, pero para $\epsilon > 0$, $f((-\epsilon, \epsilon)) = \{-1, 1\} \not\subset U'$.

Habitualmente se entiende que la continuidad de una aplicación en punto es un *concepto local* en el sentido que para estudiar la continu de una aplicación en un punto, basta sólo con estudiarla alrededor de d punto. Precisamos esto en el siguiente resultado.

Proposición 3.1.18. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación y $x \in X$. equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La aplicación f es continua en x.*
2. *Para cada $U \in \mathcal{U}_x$, $f : (U, \tau_{|U}) \to (Y, \tau')$ es continua en x.*
3. *Existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f : (U, \tau_{|U}) \to (Y, \tau')$ es continua en x.*
4. *Existe un conjunto abierto O, con $x \in O$, tal que $f : (O, \tau_{|O}) \to ($ es continua en x.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $U' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ y $W \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(W) \subset$ Entonces $W \cap U \in \mathcal{U}^U_x$ y satisface $f(W \cap U) \subset f(W) \subset U'$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Es evidente.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset U$. Como $f_{|U}$ es continua en x y O entonces, $f_{|O}$ también es continua en dicho punto por el teorema 3.1.1

(4) $\Rightarrow$ (1). Sea $U' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$. Por hipótesis, sabemos que existe $W \in \mathcal{U}^O_x$ ta $f(W) \subset U'$. Como $W \in \mathcal{U}^O_x$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $W = U \cap O$. Ent $W \in \mathcal{U}_x$ por ser intersección de dos entornos de x y además, $f(W) \subset U$

3.2. Álgebra de las aplicaciones continuas

En esta sección estudiamos la continuidad de aplicaciones que tienen codominio el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3.2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $f, g : (X, \tau) \to ($ dos funciones continuas. Entonces:*

1. *$f+g$ es continua.*
2. *λf es continua, con $\lambda \in \mathbb{R}$.*
3. *fg es continua.*
4. *f/g es continua en todos los puntos $x \in X$ tales que $g(x) \neq 0$.*

Demostración. 1. Sea $x_0 \in$ y $\epsilon > 0$. Por la continuidad de f y g, existen $U, V \in \mathcal{U}_x$ tales que

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall x \in U$$

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall x \in V.$$

Sea el entorno de x_0 definido por $W = U \cap V$. Si $x \in W$, entonces

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2. Si $\lambda = 0$, entonces λf es la aplicación nula, que es continua al ser constante. Supongamos pues $\lambda \neq 0$. Sea $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Ya que f es continua, existe $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/|\lambda|$. Si $x \in U$, tenemos

$$|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)| = |\lambda||f(x) - f(x_0)| < |\lambda|\frac{\epsilon}{|\lambda|} = \epsilon.$$

3. Sea $x_0 \in X$. Por un lado tenemos

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)|. \tag{3.1}$$

Sea $\epsilon > 0$. Ya que f es continua en x_0, existe $U_1 \in \mathcal{U}_{x_0}$ tal que si $x \in U_1$, $|f(x) - f(x_0)| < 1$ y por tanto,

$$|f(x)| < 1 + |f(x_0)|. \tag{3.2}$$

Por otra parte, como g es continua en x_0, dado $\epsilon/(2(1 + |f(x_0)|)) > 0$, existe $U_2 \in \mathcal{U}_{x_0}$ tal que si $x \in U_2$, entonces

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2(1 + |f(x_0)|)}. \tag{3.3}$$

También existe $U_3 \in \mathcal{U}_{x_0}$ tal que si $x \in U_3$, tenemos

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2(1 + |g(x_0)|)}. \tag{3.4}$$

Por tanto, si $x \in U_1 \cap U_2 \cap U_3 \in \mathcal{U}_{x_0}$ y sustituyendo (3.2), (3.3) y (3.
en (3.1), concluimos

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| < \epsilon.$$

4. Sea $x_0 \in X$ con $g(x_0) \neq 0$. Para probar la continuidad de la función $f/$ en x_0 basta probar la continuidad de la función $1/g$ en x_0 y aplicar apartado anterior a las funciones f y $1/g$. Para la función $1/g$ tenem

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)||g(x_0)|}. \qquad (3.$$

Sea $\epsilon = |g(x_0)|/2 > 0$. Usando que g es continua en x_0, existe $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que si $x \in U_1$, $|g(x) - g(x_0)| < |g(x_0)|/2$. Luego

$$\frac{-|g(x_0)|}{2} < g(x) - g(x_0) < \frac{|g(x_0)|}{2},$$

es decir, $|g(x)| > |g(x_0)|/2 > 0$. Entonces

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|g(x_0)|}. \qquad (3.$$

Sea el número positivo $\epsilon|g(x_0)|^2/2$. Por la continuidad de g en x_0, exis $U_2 \in \mathcal{U}_{x_0}$ tal que si $x \in U_2$,

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon|g(x_0)|^2}{2}. \qquad (3.$$

Sea $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_{x_0}$. Si $x \in U$, usando (3.6) y (3.7) en (3. obtenemos

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| < \frac{\epsilon|g(x_0)|^2}{2}\frac{2}{|g(x_0)|}\frac{1}{|g(x_0)|} = \epsilon.$$

Las siguientes funciones serán básicas para la continuidad de aplicacion entre espacios euclídeos.

Proposición 3.2.2. *Para cada $1 \leq i \leq n$, se definen las aplicaciones p yecciones*

$$p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i.$$

Estas aplicaciones son continuas considerando en el dominio y codominio topología euclídea.

Demostración. Sea $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $a_i = p_i(a_1, \ldots, a_n)$. Dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \epsilon$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x - a| < \delta$, entonces

$$|p_i(x) - p_i(a)| = |x_i - a_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)^2} < \delta = \epsilon.$$

□

Observemos que también se puede probar que p_i es continua usando el apartado 5 del teorema 3.1.4 (ver figura 3.2). Para ello tomamos como base de $\mathbb{R}$ la base usual $\beta_u = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Entonces

$$p_i^{-1}((a, b)) = \mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R} \times \overset{i}{\overbrace{(a, b)}} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R}.$$

Para probar que este conjunto es abierto, simplificamos la notación y suponemos $i = 1$. Entonces $p_1^{-1}((a, b)) = (a, b) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Este conjunto es abierto en $\mathbb{R}^n$ pues si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in p_1^{-1}((a, b))$, llamando $r = \text{mín}\{x_1 - a, b - x_1\}$, entonces $B_r(x) \subset (a, b) \times \mathbb{R}^{n-1}$.

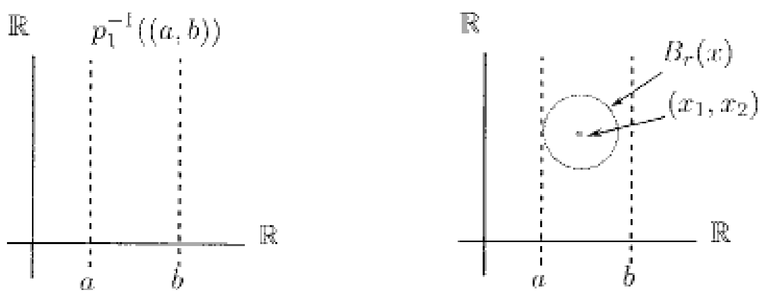


Figura 3.2: El conjunto $p_1^{-1}((a, b)) = (a, b) \times \mathbb{R}$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$

Por supuesto, las aplicaciones proyecciones no tiene porqué ser continuas si cambiamos la topología usual (en el dominio y/o codominio) por otra. En el caso particular $n = 1$, esto ya fue comentado antes de la proposición 3.1.6. Ver también el ejercicio 7 del final de este capítulo.

Proposición 3.2.3. *Sea $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}^n, \tau_u)$ una aplicación. Para cada $x \in X$, se considera $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, donde $f_i = p_i \circ f$, con $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la i-ésima proyección. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La aplicación f es continua.*

2. *Las aplicaciones f_i son continuas para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Es evidente que si f es continua, f_i también es contin ser composición de dos aplicaciones continuas (proposición 3.2.2). I recíproco se prueba que f es continua en cada punto. Sea $x_0 \in X$ y Entonces

$$|f(x) - f(x_0)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(x_0)|^2}.$$

Teniendo en cuenta que cada aplicación f_i es continua en x_0, existe U tal que si $x \in U_i$,

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Sea $U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$, que es entorno de x_0 por ser intersección fi entornos. Se deduce de (3.8) que si $x \in U$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

De las proposiciones 3.2.1 y 3.2.3 tenemos:

Corolario 3.2.4. *Sean $f, g : (X, \tau) \to \mathbb{R}^m$ dos aplicaciones y $\lambda, \mu \in$ y g son continuas, entonces $\lambda f + \mu g$ es continua.*

Usando la proposición 3.2.1, estamos en condiciones de aplicar el t 3.1.4 para probar que ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son conjuntos ab cerrados.

Ejemplo 3.2.5. 1. Un *hiperplano afín* de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Un hiperplano afín de $\mathbb{R}^n$ se escribe de la forma

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0\},$$

donde $a_i, b \in \mathbb{R}$ y algún $a_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$. Se define

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b.$$

Esta aplicación es continua, pues $f = \sum_{i=1}^{n} a_ip_i + b$, siendo p_i caciones proyecciones de $\mathbb{R}^n$. Entonces H es cerrado pues $H =$ j y $\{0\}$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$ por la proposición 1.2.10.

Como consecuencia, todo subespacio afín $U \subset \mathbb{R}^n$ también es un to cerrado en $\mathbb{R}^n$. Efectivamente, si $\dim(U) = k$, existen $n-k$ hip $H_1, \ldots, H_{n-k}$ tales que $U = H_1 \cap \ldots \cap H_{n-k}$. Por tanto U es ce $\mathbb{R}^n$ al ser intersección de conjuntos cerrados.

2. La *esfera* de dimensión n centrada en $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ y radio $r > 0$ es

$$\mathbb{S}^n_r(a) = \left\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - a| = r\right\}.$$

Entonces $\mathbb{S}^n_r(a)$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+1}$. Esto se debe a que $\mathbb{S}^n_r(a) = f^{-1}(\{0\})$, donde f es la aplicación

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1}(x_i - a_i)^2 - r^2.$$

Dicha aplicación es continua pues

$$f = \sum_{i=1}^{n+1}(p_i - a_i)^2 - r^2.$$

Denotaremos por $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera de dimensión n centrada en el origen y de radio 1.

3. Un círculo máximo de $\mathbb{S}^n$ es la intersección de la esfera con un plano que pasa por el origen. Por tanto un círculo máximo es un conjunto cerrado de $\mathbb{S}^n$ al ser la intersección de un cerrado con $\mathbb{S}^n$.

Definimos ahora el hemisferio superior de $\mathbb{S}^n$ como el conjunto

$$\mathbb{S}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} > 0\}.$$

Entonces $\mathbb{S}^n_+$ es un conjunto abierto de $\mathbb{S}^n$. Lo demostramos de dos formas. La primera es darse cuenta que $\mathbb{S}^n_+ = \mathbb{S}^n \cap H^+$, donde

$$H^+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}.$$

El conjunto $H^+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es abierto porque $H^+ = p_{n+1}^{-1}((0, \infty))$ y $(0, \infty)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Para la segunda prueba, consideramos la misma aplicación anterior y la restringimos a $\mathbb{S}^n$. Entonces $p_{n+1|\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ es continua y $\mathbb{S}^n_+ = (p_{n+1|\mathbb{S}^n})^{-1}((0, \infty))$.

4. Consideramos el *cilindro* $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Ya sabemos que C es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^3$ por el ejercicio 13 del capítulo anterior. Para la nueva demostración, se define

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1.$$

Esta aplicación es continua pues $f = p_1^2 + p_2^2 - 1$. Por otra parte, $C = f^{-1}(\{0\})$.

De manera parecida al del cilindro, se puede probar que todas las cuádricas que aparecen en dicho ejercicio 13 son conjuntos cerrados.

5. Volvemos al ejemplo 2.4.9 para hacer una nueva demostración. Definimos la aplicación continua

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = y - x - 1.$$

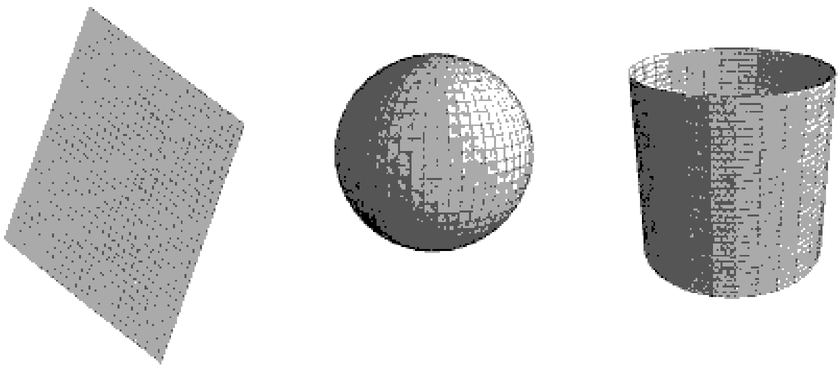


Figura 3.3: Un plano afín, una esfera y un cilindro son conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^3$

Entonces $(x,y)\in A$ si y sólo si $f(x,y)>0$. Por tanto, $A=f^{-1}((0,\infty))$ y ya que $(0,\infty)$ es abierto en $\mathbb{R}$, A es abierto en $\mathbb{R}^2$. Haciendo uso de nuevo de la misma aplicación, el conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x+1\} = f^{-1}([0,\infty))$ es cerrado, luego $\overline{A}\subset f^{-1}([0,\infty)$. Para probar la igualdad en esta inclusión, y ya que

$$f^{-1}([0,\infty)) = f^{-1}((0,\infty))\cup f^{-1}(\{0\}) = A\cup f^{-1}(\{0\}),$$

quedaría por probar que si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=y-x-1=0$, entonces dicho punto es adherente a A. Para ello seguimos los mismos pasos del final del ejemplo 2.4.9.

3.3. Continuidad y espacios métricos

Particularizamos el estudio de las aplicaciones continuas cuando los espacios topológicos son espacios métricos. Recordemos que el teorema 2.4.8 aseguraba que en un espacio métrico la topología venía caracterizada en términos de sucesiones. Es de esperar que lo mismo sucede para las aplicaciones continuas definidas entre espacios métricos. A lo largo de esta sección, consideraremos que un espacio métrico tiene la topología determinada por su distancia.

Teorema 3.3.1. *Sea $f:(X,d)\to(Y,d')$ una aplicación entre espacios métricos y $x\in X$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La aplicación f es continua en x.*

2. *Para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.*

Demostración. La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) ya se probó en la proposición 3.1.5. La prueba de (2)$\Rightarrow$(1) la hacemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, existe $z \in X$ tal que $d(z, x) < \delta$ pero $d'(f(z), f(x)) > \epsilon_0$. Vamos tomando δ de la forma $1/n$, con $n \in \mathbb{N}$ y eligiendo $x_n \in X$ con $d(x_n, x) < 1/n$ y $d'(f(x_n, f(x)) > \epsilon_0$. Como $\{d(x_n, x)\}_{n\in\mathbb{N}} < 1/n \to 0$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Sin embargo $d'(f(x_n), f(x)) > \epsilon_0$, lo cual es una contradicción con $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$. □

Volvemos a hacer de otra manera el ejemplo 2.3.5.

Ejemplo 3.3.2. Probamos que $\text{int}(G(f)) = \emptyset$. Con la notación del ejemplo 2.3.5, supongamos, por reducción al absurdo, que $(x, y) \in \text{int}(G(f))$. Entonces $y = f(x)$. Sea la sucesión $\{(x, y + 1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a (x, y) por la proposición 2.4.5. Usando que (x, y) es un punto interior y el teorema 2.4.8, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $(x, y+1/n) \in G(f)$. En tal caso, $y+1/n = f(x)$, en contradicción con que $y = f(x)$.

Sea ahora $(x, y) \in \overline{G(f)}$. El teorema 2.4.8 implica que existe $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G(f)$ que converge a (x, y). Entonces $y_n = f(x_n)$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ y f es continua, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$ por el teorema 3.3.1. Teniendo en cuenta que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$, la unicidad del límite asegura $y = f(x)$, es decir, $(x, y) \in G(f)$.

La distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una aplicación sobre la que nos podemos preguntar su continuidad si tanto en el dominio y codominio tenemos sendas topologías. En el producto cartesiano $X \times X$ de dos espacios métricos se definió en el ejercicio 16 del capítulo 2 la distancia producto, que aquí denotamos por d', del siguiente modo:

$$d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2).$$

Tomamos en $X \times X$ la topología asociada a la distancia producto.

Proposición 3.3.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces la aplicación distancia $d : (X \times X, d') \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ es continua.*

Demostración. Sea $(x_0, y_0) \in X \times X$ y $\epsilon > 0$. Tomamos $\delta = \epsilon$. La desigualdad triangular implica

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y).$$

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x) + d(x, y) + d(y, y_0).$$

Por tanto,

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y, y_0) = d'((x, y), (x_0, y_0)).$$

Entonces, si $d'((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$,

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d'((x, y), (x_0, y_0)) < \delta = \epsilon.$$

□

Si en la función distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fijamos una variable, también queda una aplicación continua, como vemos en el siguiente resultado.

Proposición 3.3.4. *Sea (X, d) un espacio métrico y $a \subset X$. Entonces la aplicación distancia al punto a definida como*

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = d(x, a)$$

es continua.

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Para cada $x \in X$, la desigualdad triangular implica

$$d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a) \Rightarrow d(x, a) - d(x_0, a) \leq d(x, x_0)$$

$$d(x_0, a) \leq d(x_0, x) + d(x, a) \to d(x_0, a) - d(x, a) \leq d(x, x_0).$$

Entonces

$$|f(x) - f(x_0)| = |d(x, a) - d(x_0, a)| \leq d(x, x_0),$$

lo que prueba de forma inmediata que f es continua. □

Podemos ahora volver al teorema 2.3.3 y hacer una nueva demostración. Probamos que

$$\overline{B_r(a)} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}.$$

Si $x \in \overline{B_r(a)}$, por el teorema 2.4.8 existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_r(a)$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Luego $d(x_n, a) < r$. Tomando límites en la desigualdad $d(x_n, a) < r$ y usando la proposición anterior, obtenemos $d(x, a) \leq r$.

Sea ahora $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $d(x, a) \leq r$. Llamamos $s_n = 1/n$ y $x_n = (1 - s_n)x + s_n a$. Entonces la proposición 2.4.7 afirma que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ y $x_n \in B_r(a)$ pues

$$|x_n - a| = (1 - s_n)|x - a| \leq (1 - s_n)r < r,$$

y esto finaliza la demostración del teorema 2.3.3.

En el próximo ejemplo vemos que las dos distancias que se definieron en el capítulo anterior en el conjunto $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ no son equivalentes probando que cierta aplicación es continua para una de esas distancias y no para la otra. Recordemos que ya se demostró, usando sucesiones convergentes, que dichas distancias no eran equivalentes (ejemplo 2.2.9).

EJEMPLO 3.3.5. Sea $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ y la aplicación

$$F : X \to \mathbb{R}, \quad F(f) = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

En el conjunto X consideramos las distancias d_∞ y d del ejemplo 2.1.2.

1. Probamos que la función $F : (X, d_\infty) \to \mathbb{R}$ es continua. Ya que $F(f) = d_\infty(f, 0)$, la proposición 3.3.4 asegura que F es continua.
2. La aplicación $F : (X, d) \to \mathbb{R}$ no es continua. Concretamente, F no es continua en la función nula $g = 0$. Para ello vamos a encontrar una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a la función g para la distancia d pero la sucesión $\{F(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no va a converger a $F(g)$. Tomamos las funciones que aparecían en el ejemplo 2.1.2 para $r = 1/n$ (ver también el ejemplo 2.4.3). Concretamente

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1 - \frac{1}{2n}] \\ 4n(x-1)+2 & \text{si } x \in [1 - \frac{1}{2n}, 1]. \end{cases}$$

Se tiene

$$d(f_n, g) = \int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{1}{2n} \to 0,$$

luego $\{f_n\} \xrightarrow{d} g$. Por otra parte,

$$F(f_n) = \max_{x \in I} |f_n(x)| = 2,$$

es decir $\{F(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to 2$. Pero $F(g) = 0 \neq \lim_{n\to\infty} F(f_n)$.

3.4. Ejercicios

1. Sea τ_S la topología de Sorgenfrey. Estudiar en qué puntos la aplicación

$$f : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}, \tau_S), \quad f(x) = x^2$$

es continua. Hacer lo mismo con las funciones $g(x) = x^3$ y $h(x) = \sin(x)$.

2. Sea $X = \{a, b\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. Hallar las aplicaciones continuas de (X, τ_i) en (X, τ_j), con $1 \leq i, j \leq 2$.

3. Caracterizar las aplicaciones continuas de $(\mathbb{R}, \tau_{CF})$ en sí mismo.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x - 1$. Estudiar la continuidad de la aplicación considerando en el dominio y el codominio las topologías definidas en el ejemplo 1.2.12.

5. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x^2$, tomando en el dominio y codominio las topologías definidas en el ejemplo 1.2.6. Hacer lo mismo con $g(x) = x + 1$.

6. Estudiar la continuidad de la función

$$f : [0,1] \cup (2,3) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in (2,3). \end{cases}$$

7. En $\mathbb{R}^2$ se considera la topología τ_{in} para el punto $p = (0,0)$. Estudiar en qué puntos la aplicación proyección $p : (\mathbb{R}^2, \tau_{in}) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$, $p(x,y) = x$, es continua.

8. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar que la aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, A)$ es continua.

9. Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una aplicación continua. Probar que el conjunto $A = \{x \in X : f(x) = x\}$ es un conjunto cerrado. ¿Es cierto este resultado en un espacio topológico cualquiera?

10. Se considera en $\mathbb{R}$ la distancia d definida en el ejercicio 5 del capítulo 2 y la aplicación $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Probar que f es continua en $x = 0$.

11. En $X = \{a, b, c, d\}$, se considera $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$. Se define una aplicación $f : X \to X$ como $f(a) = b$, $f(b) = d$, $f(c) = b$ y $f(d) = c$. Estudiar en qué puntos la aplicación es continua.

12. Si consideramos en $\mathbb{R}$ la topología a derechas τ_d, estudiar la continuidad de la función $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_d)$, $f(x) = \sin(x)$. Hacer lo mismo, pero intercambiando el dominio por el codominio.

13. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Estudiar la continuidad de la aplicación característica en A:

$$\chi_A : X \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

14. Probar que una aplicación $f : X \to Y$ es continua si y sólamente satisface alguna de las siguientes propiedades:

    a) $f^{-1}(\text{int}\,(B)) \subset \text{int}\,(f^{-1}(B))$ para todo $B \subset Y$.

    b) $f^{-1}(\text{ext}(B)) \subset \text{ext}(f^{-1}(B))$ para todo $B \subset Y$.

    c) $\text{Fr}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\text{Fr}(B))$ para todo $B \subset Y$.

15. Sean X e Y dos conjuntos, $p \in X$ y $q \in Y$. Estudiar la continuidad de una aplicación $f : X \to Y$ cuando X e Y se consideran algunas de las topologías del punto incluido o excluido para los puntos p y q, respectivamente.

16. Usando el teorema 2.4.8, probar que los conjuntos que aparecen en el ejemplo 3.2.5 son cerrados.

Capítulo 4

Homeomorfismos entre espacios topológicos

Una tarea básica en matemáticas es clasificar y esto mismo también sucede en topología, donde es natural realizar una clasificación de espacios topológicos. Para ello necesitamos, por un lado, aplicaciones que desde el punto de vista conjuntista sean las que identifiquen dos conjuntos y es evidente que dichas aplicaciones no son más que las aplicaciones biyectivas. Por otro lado, queremos que dichas aplicaciones sean buenas para la estructura matemática creada en el conjunto, en nuestro caso, la de espacio topológico. La condición natural es que sean continuas tanto ellas como sus inversas. A una aplicación con tales características se llama un homeomorfismo.

El concepto de homeomorfismo permite 'igualar' topológicamente dos espacios topológicos, y diremos que *son homeomorfos*, si existe un homeomorfismo entre ellos. Por ejemplo, sea $X = \{a, b\}$ un conjunto con dos elementos y recordemos que al definir la topología de Sierpinski, había dos posibilidades de hacerlo, a saber, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. Ya estaba claro entonces que ambas topologías eran esencialmente las mismas, y ahora podemos decir que ambos espacios topológicos son homeomorfos. Concretamente, la aplicación

$$f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2), \quad f(x) = \begin{cases} b & \text{si } x = a \\ a & \text{si } x = b \end{cases}$$

es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas.

Un homeomorfismo no va a ser más que una 'deformación bicontinua' de un espacio en otro. Ésta es la razón por la que decimos que la topología estudia las 'matemáticas de la plastilina', ya que al deformar (sin pegar ni cortar) una figura hecha de plastilina, lo que hacemos es realizar una transformación continua, es decir, un homeomorfismo, y un espacio se transforma en otro topológicamente equivalente.

4.1. Homeomorfismo

Definición 4.1.1. Una aplicación $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo si es una aplicación biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son aplicaciones continuas.

Una consecuencia inmediata de la proposición 3.1.10 es la siguiente

Proposición 4.1.2.

1. *La aplicación identidad es un homeomorfismo.*
2. *La aplicación inversa de un homeomorfismo es un homeomorfismo.*
3. *La composición de dos homeomorfismos es un homeomorfismo.*

Si se denota por $\mathcal{H}(X,\tau)$, o simplemente $\mathcal{H}(X)$ si se sobreentiende la topología, al conjunto de los homeomorfismos de (X,τ) en (X,τ), este resultado dice que dicho conjunto es un grupo con la composición de aplicaciones como operación binaria. Así, y como consecuencia del ejemplo 3.1.7, el grupo de homeomorfismos $\mathcal{H}(X)$ en un espacio discreto coincide con el conjunto de todas las biyecciones de él en sí mismo. También, y gracias al ejemplo 3.1.9, los homeomorfismos de un espacio topológico con la topología a derechas en sí mismo son las aplicaciones crecientes y biyectivas.

Definición 4.1.3. Se dice que un espacio topológico (X,τ) es homeomorfo a otro espacio (Y,τ') si existe un homeomorfismo entre (X,τ) e (Y,τ').

La proposición 4.1.2 nos informa que la relación "ser homeomorfo a" es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios topológicos. Se dice entonces que dos espacios (X,τ) e (Y,τ') *son homeomorfos* y se escribe $(X,\tau) \cong (Y,\tau')$. También diremos que (X,τ) e (Y,τ') son *topológicamente equivalentes*. Esta relación de equivalencia determina un conjunto cociente donde cada una de las clases de equivalencia la constituye un espacio topológico y todos los que son homeomorfos a él. Podemos así decir que:

> *Un objetivo de la topología es entender y comprender este conjunto cociente en el sentido que podamos discernir si dos espacios topológicos son o no son homeomorfos.*

Como ya hemos comentado, desde el punto de vista intuitivo se puede imaginar un homeomorfismo entre dos espacios topológicos como una *deformación bicontinua* de uno en otro. Así, no es difícil imaginarse que el grafo de una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es homeomorfo a la recta real $\mathbb{R}$ como muestra la figura 4.1. En este caso la deformación no es más que proyectar $G(f)$ sobre el eje de abcisas. La demostración rigurosa se hará más tarde en el ejemplo 4.2.4.

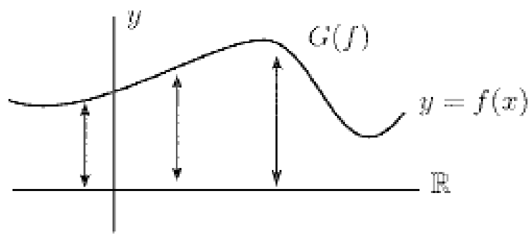


Figura 4.1: El grafo de una función continua $y = f(x)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Basta darse cuenta que la proyección de los puntos de $G(f)$ sobre el eje de abcisas es un homeomorfismo

Una vez establecido el concepto de homeomorfismo, estamos ahora en condiciones de precisar y aclarar algunas ideas que aparecieron en los capítulos previos. Así, continuando con el ejemplo de la topología de Sierpinski al inicio de este capítulo, obtenemos un resultado parecido para la topología del punto incluido.

EJEMPLO 4.1.4. Sea X un conjunto. La topología del punto incluido está definida fijando previamente un punto de X. Ahora podemos ya decir que, aunque cambiemos de punto y la topología cambia, esencialmente son las mismas. Concretamente, sean $p, q \in X$ y sean τ_p y τ_q las topologías del punto incluido para p y q respectivamente. Probamos que $(X, \tau_p) \cong (X, \tau_q)$. Para ello, sea $f : X \to X$ cualquier biyección tal que $f(p) = q$, por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq p, q \\ q & x = p \\ p & x = q \end{cases}$$

Usando el ejercicio 15 del capítulo anterior, las aplicaciones f y f^{-1} son continuas, luego f es un homeomorfismo.

Utilizando el teorema 3.1.4, establecemos varias condiciones equivalentes para que una aplicación sea un homeomorfismo.

Teorema 4.1.5. *Se considera una aplicación biyectiva $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ entre dos espacios topológicos. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La aplicación f es un homeomorfismo.*
2. *La aplicación f es continua y $f(O) \in \tau'$ para todo $O \in \tau$.*
3. *La aplicación f es continua y $f(F) \in \mathcal{F}'$ para todo $F \in \mathcal{F}$.*
4. *$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.*
5. *La aplicación f es continua y $f(U) \subset \mathcal{U}'_{f(x)}$, para todo $U \in \mathcal{U}_x$.*

Usando de nuevo el teorema 3.1.4, es inmediato el siguiente resultado, el cual refleja que toda construcción realizada en un espacio topológico se puede llevar de manera natural a otro que sea homeomorfo con él.

Corolario 4.1.6. *Sea una aplicación biyectiva $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ entre dos espacios topológicos. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La aplicación f es un homeomorfismo.*
2. *La topología τ' coincide con $\{f(O) : O \in \tau\}$.*
3. *La familia de cerrados $\mathcal{F}'$ coincide con $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$.*
4. *Si β es una base de τ, entonces $f(\beta)$ es base de τ'.*
5. *Para todo $x \in X$, $\mathcal{U}'_{f(x)} = \{f(U) : U \in \mathcal{U}_x\}$.*
6. *Para todo $x \in X$ y β_x base de entornos de $x \in X$, $f(\beta_x)$ es una base de entornos de $f(x)$.*

Corolario 4.1.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico, $f : X \to Y$ una aplicación biyectiva y $\tau(f)$ la topología en Y definida en el teorema 1.1.3. Entonces $f : (X, \tau) \to (Y, \tau(f))$ es un homeomorfismo. Recíprocamente, si $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es un homeomorfismo, entonces $\tau' = \tau(f)$.*

Ejemplo 4.1.8. Como una sencilla aplicación del corolario 4.1.6, consideramos en $\mathbb{R}$ la topología a derechas τ_d, es decir, la que tiene por base la familia $\beta_d = \{[x, \infty) : x \in \mathbb{R}\}$. Del ejemplo 1.2.12, consideramos en $\mathbb{R}$ la topología τ_d^r que tiene por base $\beta_d^r = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$, y que llamamos topología a izquierdas. Probamos que $(\mathbb{R}, \tau_d) \cong (\mathbb{R}, \tau_d^r)$. Para ello basta con definir

$$f : (\mathbb{R}, \tau_d) \to (\mathbb{R}, \tau_d^r), \quad f(x) = -x.$$

Esta aplicación es biyectiva con $f^{-1} = f$. Es evidente que $f(\beta_d) = \beta_d^r$, luego el corolario 4.1.6 asegura que f es un homeomorfismo. Del mismo modo, $(\mathbb{R}, \tau_S) \cong (\mathbb{R}, \tau_S^r)$ y $(\mathbb{R}, \tau_o) \cong (\mathbb{R}, \tau_o^d)$.

Se estudia ahora el comportamiento de un homeomorfismo respecto de la topología inducida.

Proposición 4.1.9. *Si $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ es un homeomorfismo y $A\subset X$, entonces $f_{|A}:(A,\tau_{|A})\to(f(A),\tau'_{f(A)})$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sólamente hay que darse cuenta de que $(f_{|A})^{-1}=(f^{-1})_{|f(A)}$ y usar el teorema 3.1.13. □

Esta proposición dice que la restricción de un homeomorfismo a un subconjunto es un homeomorfismo entre éste y su imagen. Este resultado es útil ya que a veces el homeomorfismo que se define entre dos espacios topológicos no es más que la restricción de un homeomorfismo entre espacios más grandes. Un ejemplo de ello es el siguiente resultado donde estudiamos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$.

Teorema 4.1.10. *Los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son homeomorfos entre sí.*

Demostración. El conjunto de los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ es

$$\{(a,b):a<b,a,b\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,\infty):a\in\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,a):a\in\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R}\}.$$

Para la demostración, se distingue los distintos tipos de intervalos abiertos y finalmente usamos la proposición 4.1.2.

1. Si $a,b\in\mathbb{R}$, probamos que $(a,b)\cong(0,1)$. Para ello se define

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{x-a}{b-a}. \tag{4.1}$$

   Esta aplicación es biyectiva y continua. Su inversa es $f^{-1}(x)=(b-a)x+a$, que también es continua. Por tanto f es un homeomorfismo con $f((a,b))=(0,1)$. Por la proposición 4.1.9, la restricción de f al intervalo (a,b) es un homeomorfismo entre (a,b) y $(0,1)$. Ver figura 4.2, izquierda.

2. A continuación se prueba que dos intervalos del tipo (a,∞) y (b,∞) son homeomorfos. De nuevo la idea es definir un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y luego restringir. Sea la aplicación

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x+b-a.$$

   Esta aplicación es biyectiva y su inversa es $f^{-1}(x)=x-b+a$. Ambas son continuas y $f((a,\infty))=(b,\infty)$, luego los dos intervalos son homeomorfos por la proposición 4.1.9.

3. El intervalo (a,∞) es homeomorfo al intervalo $(-\infty,-a)$ con $a \in \mathbb{R}$. Para ello se define
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=-x \tag{4.2}$$
cuya inversa es f y $f((a,\infty))=(-\infty,-a)$.

4. La aplicación
$$f:(0,\infty)\to(0,\infty),\quad f(x)=1/x \tag{4.3}$$
es un homeomorfismo con $f^{-1}=f$. Debido a que $f((0,1))=(1,\infty)$, entonces $(0,1)\cong(1,\infty)$. Ver figura 4.2, derecha.

5. Por último, la aplicación
$$f:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad f(x)=\tan(x)$$
es un homeomorfismo, con $f^{-1}(x)=\arctan(x)$, y así $\mathbb{R}\cong(-\pi/2,\pi/2)$.

□

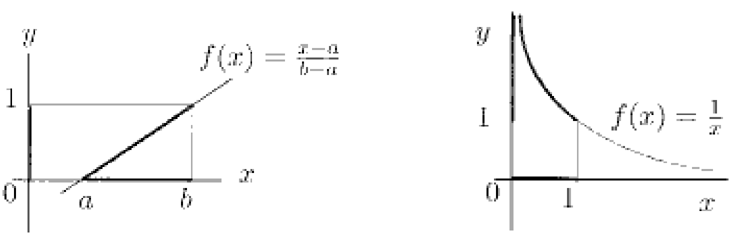


Figura 4.2: Izquierda: un homeomorfismo entre el intervalo (a,b) y $(0,1)$. Derecha: un homeomorfismo entre $(0,1)$ y $(1,\infty)$

De la demostración anterior, el mismo homeomorfismo definido en (4.1) entre (a,b) y $(0,1)$ prueba:

Corolario 4.1.11. *Los intervalos cerrados y acotados con más de un elemento son homeomorfos entre sí.*

Usando también el anterior homeomorfismo y los dados en (4.2) y (4.3), concluimos:

Corolario 4.1.12. *Los intervalos que son cerrados por un extremo y abiertos por el otro son homeomorfos entre sí.*

Nota 4.1.13. Para los intervalos abiertos acotados hemos usado aplicaciones afines para construir los homeomorfismos, es decir, aplicaciones del tipo $f(x) = \lambda x + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Por supuesto, entre dos espacios topológicos puede haber numerosos homeomorfismos. Por ejemplo, consideremos la aplicación seno $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Dicha aplicación no es biyectiva, pero sí es continua. Entonces podemos restringir a intervalos suficientemente pequeños para conseguir que f sea un homeomorfismo. Ver figura 4.3. Así, la restricción de f al intervalo (a_1, a_2) es un homeomorfismo, pero no lo es en el intervalo (c, d) ya que no es biyectiva. En el primer caso, la función seno establece un homeomorfismo entre el intervalo (a_1, a_2) y (b_1, b_2), y donde la inversa es la aplicación arco seno definida sólo en (b_1, b_2).

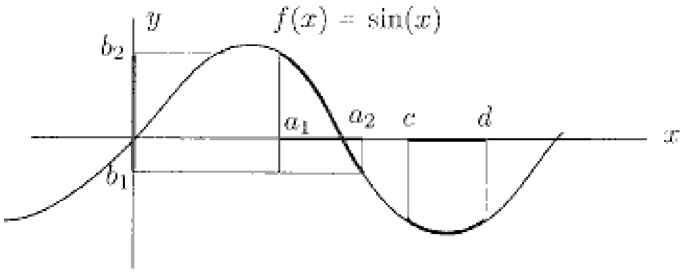


Figura 4.3: En subconjuntos pequeños del dominio, la aplicación $f(x) = \sin(x)$ es un homeomorfismo. Así, f es un homeomorfismo entre los intervalos abiertos (a_1, a_2) y (b_1, b_2). Sin embargo, no lo es si f se restringe al intervalo (c, d) ya que no es inyectiva

Motivados por los resultados anteriores, nos planteamos el problema de la clasificación topológica de los intervalos de $\mathbb{R}$. Todo intervalo de $\mathbb{R}$ que no se reduzca a un punto pertenece a una de las siguientes familias de subconjuntos:

- $X_1 = \{(a, b) : a < b, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$.
- $X_2 = \{[a, b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.
- $X_3 = \{[a, b) : a < b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\} \cup \{(a, b] : a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}\}$.

El teorema 4.1.10 y sus dos corolarios posteriores prueban que dos intervalos que pertenecen a la misma familia X_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, son homeomorfos entre sí. Para completar nuestro estudio, nos quedaría decidir si intervalos que pertenecen a distintas familias X_i, $i = 1, 2, 3$, son o no homeomorfos. Ya anticipamos que la respuesta es que no van a ser homeomorfos. La discusión final se completará en el ejemplo 4.1.16 y el teorema 6.1.7.

Para probar que dos espacios topológicos son homeomorfos tenemos que construir explícitamente un homeomorfismo, como así hemos hecho cuando hemos considerado dos intervalos de $\mathbb{R}$. La pregunta que nos hacemos ahora es cómo discernir que dos espacios topológicos *no* son homeomorfos, es decir,

> ¿Cómo se prueba que *no* hay un homeomorfismo entre dos espacios topológicos dados?

Para ello necesitamos un concepto que nos acompañará en el resto del libro.

Definición 4.1.14. Un invariante topológico es una propiedad $\mathcal{P}$ de forma que si un espacio topológico (X, τ) satisface $\mathcal{P}$, entonces también la cumple todo espacio topológico homeomorfo a (X, τ).

Un invariante topológico también se llama *propiedad topológica*. Ahora ya podemos responder a la pregunta anterior y mostrar la estrategia a seguir. Si hay dos espacios topológicos y existe un invariante topológico que lo satisface un espacio y no el otro, entonces estos espacios no son homeomorfos. Por tanto, nuestra habilidad para asegurar que dos espacios no son homeomorfos pasa por conocer suficientes invariantes topológicos de manera que podamos tener al menos uno que un espacio lo satisfaga y no el otro. De forma más general, podemos decir:

> *La topología estudia los distintos invariantes topológicos que permiten clasificar los espacios topológicos.*

En los siguientes ejemplos se muestran dos invariantes topológicos y cómo se utilizan para probar que dos espacios topológicos no son homeomorfos. En cada uno de estos ejemplos enunciamos el invariante y probamos en primer lugar que verdaderamente es una propiedad topológica.

Ejemplo 4.1.15. El segundo axioma de numerabilidad es una propiedad topológica.

Efectivamente, si (X, τ) es un espacio topológico donde β una base numerable de la topología y $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es un homeomorfismo, entonces $f(\beta)$ es una base de τ' (corolario 4.1.6) y es numerable porque f es biyectiva. Por tanto, (Y, τ') también satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Probamos ahora que la recta euclídea no es homeomorfa a $(\mathbb{R}, \tau_{in})$, donde τ_{in} es la topología del punto incluido para $p = 0$. Sabemos por el teorema 2.2.13 que la topología usual de $\mathbb{R}$ tiene bases numerables. Sin embargo, ya se probó en el ejemplo 1.2.4 que cualquier base β de la topología τ_{in} debe contener a la familia $\{\{0, x\} : x \in \mathbb{R}\}$, la cual no es numerable.

EJEMPLO 4.1.16. Un espacio topológico (X, τ) se dice que satisface la propiedad $\mathcal{M}$ si toda función continua $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ alcanza un máximo. Se prueba que $\mathcal{M}$ es un invariante topológico. Efectivamente, sea (X, τ) un espacio con la propiedad $\mathcal{M}$ y $\phi : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ un homeomorfismo. Veamos que toda función continua definida en (Y, τ') con valores reales, alcanza su máximo. Para ello se considera una función continua $g : (Y, \tau') \to \mathbb{R}$. Ya que la aplicación $g \circ \phi$ definida en (X, τ) es continua, existe $x_0 \in X$ tal que $(g \circ \phi)(x) \leq (g \circ \phi)(x_0)$ para todo $x \in X$. Luego, por ser ϕ una aplicación biyectiva, g alcanza en $\phi(x_0)$ un máximo.

Esta propiedad permite clasificar algunos intervalos de $\mathbb{R}$ del siguiente modo. Es conocido de cálculo de una variable que toda función continua definida en $[0, 1]$ alcanza un máximo, luego $[0, 1]$ satisface $\mathcal{M}$. Sin embargo, $(0, 1)$ no cumple dicha propiedad pues la función $f(x) = 1/x$ es continua en $(0, 1)$ y no tiene máximo. Como conclusión, los intervalos del tipo de X_1 no son homeomorfos a los intervalos de X_2. De la misma forma, el intervalo $(0, 1]$ no satisface la propiedad $\mathcal{M}$ ya que la función $f(x) = 1/x$ no tiene un máximo en $(0, 1]$. Por tanto, los intervalos de X_2 tampoco son homeomorfos a los intervalos de X_3. Quedaría por distinguir los intervalos de X_1 con los intervalos de X_3, pero para ello se necesita de nuevos invariantes topológicos que aparecerán en el capítulo 6.

El uso de un invariante topológico permite afirmar que dos espacios topológicos no son homeomorfos. Sin embargo, no es cierto el recíproco, es decir, dos espacios que no son homeomorfos pueden tener la misma propiedad topológica. Veamos dos ejemplos.

EJEMPLO 4.1.17. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{H}(X, \tau)$ el espacio de todos los homeomorfismos de (X, τ) en (X, τ). A este conjunto se le dota de estructura de grupo donde la operación no es más que la composición de homeomorfismos. En un primer paso probamos que si (Y, τ') es un espacio topológico homeomorfo a (X, τ), entonces $\mathcal{H}(Y)$ es un grupo isomorfo a $\mathcal{H}(X)$. Efectivamente, se considera un homeomorfismo $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ y se define $\phi : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(Y)$ como $\phi(T) = f \circ T \circ f^{-1}$. Entonces $\phi(T)$ es un homeomorfismo de (Y, τ') en (Y, τ') por ser composición de homeomorfismos. Además ϕ es biyectiva y ϕ es un homeomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \phi(T \circ G) &= f \circ T \circ G \circ f^{-1} = (f \circ T \circ f^{-1}) \circ (f \circ G \circ f^{-1}) \\ &= \phi(T) \circ \phi(G). \end{aligned}$$

Se ha probado por tanto que *'ser isomorfos los grupos $\mathcal{H}(X,\tau)$'* es una propiedad topológica.

Sin embargo dos espacios no homeomorfos pueden tener grupos de homeomorfismos isomorfos. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo. Sea un conjunto infinito X. Ya se probó en el ejemplo 3.1.7 que toda aplicación cuyo dominio es (X,τ_D) es continua. Por tanto, el conjunto $\mathcal{H}(X,\tau_D)$ es el conjunto $\mathrm{Biy}(X)$ de todas las biyecciones de X en sí mismo. Se demuestra ahora que si X tiene la topología de los complementos finitos, toda biyección también es continua. Si $f:(X,\tau_{CF})\to(X,\tau_{CF})$ es una aplicación biyectiva, la imagen de todo conjunto finito es finito, es decir, la aplicación lleva conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Y lo mismo sucede con f^{-1}. Por tanto, f es un homeomorfismo (corolario 4.1.6). Esto prueba que $\mathcal{H}(X,\tau_{CF})=\mathrm{Biy}(X)$ y así $\mathcal{H}(X,\tau_D)=\mathcal{H}(X,\tau_{CF})$.

Finalmente, (X,τ_D) y (X,τ_{CF}) no son espacios topológicos homeomorfos porque de nuevo los conjuntos unitarios no son abiertos en (X,τ_{CF}).

EJEMPLO 4.1.18. Se dice que un espacio (X,τ) satisface la propiedad T_0 si dados $x_1\neq x_2\in X$, existe $U_1\subset\mathcal{U}_{x_1}$ tal que $x_2\not\in U_1$ o existe $U_2\subset\mathcal{U}_{x_2}$ tal que $x_1\not\in U_2$. Es evidente que T_0 es un invariante topológico. Consideramos ahora $\mathbb{R}$ con la topología discreta τ_D y la topología euclídea τ_u. Es evidente que ambas topologías son T_0. Para la primera, basta con tomar $U_1=\{x_1\}$ y para la segunda, $U_1=(x_1-r,x_1+r)$, donde $r<|x_1-x_2|$. Sin embargo ambos espacios topológicos no son homeomorfos, pues una aplicación biyectiva lleva conjuntos unitarios en conjuntos unitarios y los conjuntos unitarios de $(\mathbb{R},\tau_D)$ son abiertos, pero no en $(\mathbb{R},\tau_u)$.

Para finalizar esta sección, nos hacemos la siguiente pregunta. Sea (X,τ) un espacio topológico ¿en qué medida podemos conocer qué espacios son homeomorfos a (X,τ)? Ilustramos la cuestión con la topología discreta. Sea (X,τ_D) un espacio topológico discreto, y sea (Y,τ') otro espacio topológico homeomorfo a (X,τ). Probamos que τ' es necesariamente la topología discreta en Y. Esto se debe a que si $f:(X,\tau_D)\to(Y,\tau')$ es un homeomorfismo, todo punto de Y es abierto ya que $\{y\}=f(\{f^{-1}(y)\})$ y $\{f^{-1}(y)\}\in\tau_D$. Hemos probado pues que un espacio topológico discreto sólo es homeomorfo a otro espacio discreto. Un resultado del mismo tipo se puede obtener para las topologías trivial y cofinita (ejercicio 4 al final de este capítulo).

Supongamos ahora que tenemos la recta euclídea $(\mathbb{R},\tau_u)$ y supongamos que τ' es otra topología en $\mathbb{R}$ tal que $(\mathbb{R},\tau_u)\cong(\mathbb{R},\tau')$. Nos preguntamos si $\tau_u=\tau'$. Veamos que no. Para ello consideramos la aplicación biyectiva

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} x & x\neq 0,2\\ 2 & x=0\\ 0 & x=2.\end{cases}$$

Tomamos en el dominio la topología euclídea τ_u y en el codominio $\tau' = \tau_u(f)$ definida en el teorema 1.1.3. Esta topología hace que $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_u(f))$ sea un homeomorfismo. Sin embargo $\tau' \neq \tau_u$. Basta observar que $(-1,1) \in \tau_u$, y por tanto

$$f((-1,1)) = ((-1,1) \setminus \{0\}) \cup \{2\} \in \tau_u(f).$$

Pero este último conjunto no es un abierto en la topología euclídea de $\mathbb{R}$.

Otro ejemplo es el siguiente:

EJEMPLO 4.1.19. Sean τ_d y τ_d^r las topologías a derechas e izquierdas en $\mathbb{R}$ (ejemplo 4.1.8). Ya probamos en su momento que $(\mathbb{R}, \tau_d) \simeq (\mathbb{R}, \tau_d^r)$. Sin embargo $\tau_d \neq \tau_d^r$ ya que $[0,\infty) \in \tau_d$ pero $[0,\infty) \notin \tau_d^r$.

4.2. Ejemplos de homeomorfismos

Nos dedicamos ahora a la construcción explícita de homeomorfismos entre subconjuntos de espacios euclídeos y cada uno de estos homeomorfismos aparecerá a lo largo de esta sección como "teorema". En primer lugar, enunciamos una consecuencia inmediata de la proposición 3.2.3.

Corolario 4.2.1. *Una aplicación afín de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es continua. En particular, una afinidad de $\mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación afín, entonces existe $(b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ y una matriz A de orden $m \times n$ tal que

$$f(x_1, \ldots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

donde identificamos de manera natural una matriz columna de orden $k \times 1$ con un vector de $\mathbb{R}^k$. Para probar que f es continua, veamos que $p'_i \circ f$ es continua, donde $p'_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es la correspondiente proyección, $i \in \{1 \ldots m\}$. Pero

$$(p'_i \circ f)(x_1, \ldots, x_n) = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j + b_i)(x_1, \ldots, x_n),$$

donde $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es ahora la i-ésima proyección de $\mathbb{R}^n$. Por tanto $p'_i \circ f = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j + b_i$, que es una aplicación continua.

Ya que la inversa de una afinidad es otra afinidad, entonces toda afinidad es un homeomorfismo. □

Casos particulares de afinidades son los siguientes:

1. Un isomorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$. En este caso, la matriz $(b_1, \ldots, b_m)$ es nula y la matriz A es regular.

2. Una traslación de $\mathbb{R}^n$. Es una afinidad donde A es la matriz identidad y por tanto se escribe como $T(x) = x + b$, $b \in \mathbb{R}^n$. Al vector b se le llama el vector de traslación de T.

3. Una homotecia de $\mathbb{R}^n$. Se llama homotecia de centro $p \in \mathbb{R}^n$ y razón $r \neq 0$ a la aplicación $h_r(x) = r(x-p)+p$. Es evidente que h es una afinidad con $A = rI$.

Corolario 4.2.2. *Un isomorfismo lineal, una traslación y una homotecia son homeomorfismos de $\mathbb{R}^n$.*

Fue gracia a afinidades de $\mathbb{R}$ y luego restringirlas, como se probó en el teorema 4.1.10 que dos intervalos abiertos y acotados eran homeomorfos entre sí.

Corolario 4.2.3. *1. Las esferas de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+1}$ son homeomorfas entre sí.*

2. Los cilindros de $\mathbb{R}^3$ son homeomorfos entre sí.

Demostración. Una esfera de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+1}$, centro $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ y radio $r > 0$ apareció definida en el ejemplo 3.2.5 y se denotaba por $\mathbb{S}^n_r(a)$. Es evidente que tomando $\Phi = h_r \circ T_a$ donde $T_a(x) = x - a$ y $h_r(x) = x/r$, se tiene $\Phi(\mathbb{S}_r(a)) = \mathbb{S}^n$. Esto prueba que toda esfera es homeomorfa a una fija, a saber, $\mathbb{S}^n$.

Un cilindro de $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de puntos que equidista una distancia $r > 0$ de una recta afín, llamada eje de revolución. Mediante una traslación, dicho eje se lleva a una recta L que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$. Si L no es el eje z, consideramos Π el plano vectorial que contiene al eje z y la recta L y realizamos un giro respecto de la recta vectorial perpendicular a Π que lleve L en el eje z. Así el cilindro original es ahora un cilindro que tiene como eje de revolución al eje z. Realizamos ahora una homotecia de razón $1/r$ y el cilindro se convierte en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, que ya apareció en el ejercicio 13 del capítulo 2. □

El corolario anterior nos dice que al estudiar topológicamente una esfera, basta con que cojamos una concreta, por ejemplo $\mathbb{S}^n$, y es así como haremos en el resto del libro. Y esto mismo podemos hacerlo para otros objetos euclídeos, como una cónica de $\mathbb{R}^2$ o una cuádrica de $\mathbb{R}^3$. Observemos que las definiciones de esfera o cilindro dadas en el ejemplo 3.2.5 y el corolario 4.2.3 son métricas, es decir, como lugares geométricos de $\mathbb{R}^n$ donde los puntos satisfacen ciertas propiedades relacionadas con la distancia euclídea. Es por ello que algunas de las afinidades usadas en la demostración sean realmente isometrías (giros, traslaciones, etc). Sin embargo el corolario 4.2.1 va más allá y nos dice que podemos usar afinidades, y un ejemplo de cómo utilizarlas en su amplitud aparece en el campo de la geometría afín con cónicas y cuádricas. Así, por ejemplo, la clasificación afín de las elipses se hace salvo afinidades y una elipse no es más que un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que se obtiene de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ después de aplicarle una afinidad. Por tanto todas las elipses son topológicamente equivalentes. Y lo mismo podemos decir con hipérbolas, hiperboloides reglados y el resto de las cuádricas del espacio.

Ejemplo 4.2.4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación y sea $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\}$ el grafo de f. Probamos que si f es *continua*, entonces $G(f) \cong \mathbb{R}^n$.

Se define
$$\phi : G(f) \to \mathbb{R}^n, \quad \phi(x, f(x)) = x.$$
Usamos la proposición 3.2.3 para probar que esta aplicación es continua. La aplicación ϕ es la restricción a $G(f)$ de la aplicación
$$\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n,\ \Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n).$$
Esta aplicación es continua pues $p'_i \circ \Phi = p_i$, $1 \leq i \leq n$, donde p'_i son las proyecciones en $\mathbb{R}^n$ y p_i las de $\mathbb{R}^{n+1}$. Es evidente que $\phi = \Phi_{|G(f)}$ y por tanto ϕ es continua.

La aplicación inversa de ϕ es $\phi^{-1}(x) = (x, f(x))$. Para probar la continuidad de esta aplicación, definimos
$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \psi(x) = (x, f(x)).$$
Esta aplicación tiene como codominio a $\mathbb{R}^{n+1}$, luego de nuevo por la proposición 3.2.3, será continua si $p_i \circ \psi$ es continua para $1 \leq i \leq n+1$. Pero tenemos
$$\begin{cases} p_i \circ \psi = p'_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ p_{n+1} \circ \psi = f. \end{cases}$$
En cualquier caso, cada una de estas aplicaciones es continua. Finalmente, la imagen de ψ es $G(f)$, luego restringiendo el codominio a $G(f)$, queda la aplicación ϕ^{-1}, que es continua por el teorema 3.1.13.

A raíz de la demostración realizada en este ejemplo, probamos el siguient resultado que será útil en el resto del libro y que extiende la proposición 3.2.:

Proposición 4.2.5. *Sea $f : (X,\tau) \to Y$ una aplicación donde $Y \subset \mathbb{R}$ está dotado con la topología usual $\tau_{u|Y}$. Denotamos $p_i' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las proyec ciones de $\mathbb{R}^n$ y $q_i = p'_{i|Y}$, $1 \leq i \leq n$. Entonces f es continua si y sólament si $q_i \circ f$ es continua para todo $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Si f es continua, entonces $q_i \circ f$ es continua pues q_i es cor tinua. Recíprocamente, definimos $F : (X,\tau) \to \mathbb{R}^n$ como $F(x) = f(x)$. Est aplicación es continua, pues $p_i \circ F = q_i \circ f$, $1 \leq i \leq n$. Usamos ahora teorema 3.1.13: ya que $\mathrm{Im}(F) \subset Y$, entonces la aplicación restricción a Y $F : (X,\tau) \to (Y, \tau_{u|Y})$, es continua, pero esta aplicación no es más que f.

Teorema 4.2.6. *La bola $B_r(a)$ de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. En particula todas las bolas de $\mathbb{R}^n$ son homeomorfas entre sí.*

Obsérvese que si $n = 1$, la bola $B_r(a)$ es el intervalo abierto $(a-r, a+r$ y ya se probó en el teorema 4.1.10 que dicho intervalo es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Demostración. Primero probamos que la bola $B_r(a)$ es homeomorfa a la bol $B_1(0)$, donde $0 = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$. Para ello, se define la aplicación

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \;\; F = T_a \circ h_r,$$

donde h_r es la homotecia de razón $r > 0$ y centro $0 \in \mathbb{R}^n$ y T_a es la traslació de vector de traslación a, es decir, $h_r(x) = rx$ y $T_a(x) = x + a$. Entonces F e un homeomorfismo por el corolario 4.2.1 y evidentemente $F(B_1(0)) = B_r(a$ Usando la proposición 4.1.9, estas dos bolas son homeomorfas.

Se prueba ahora que $B_1(0)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Sea un homeomorfism cualquiera $h : (-1,1) \to (-\infty,\infty)$, por ejemplo, $h(r) = r/(1-r)$. Se define

$$F : B_1(0) \to \mathbb{R}^n, \;\; F(x) = \frac{h(|x|)}{|x|}x = \frac{x}{1-|x|}. \tag{4.4}$$

Esta aplicación es biyectiva y su inversa es

$$G : \mathbb{R}^n \to B_1(0), \;\; G(y) = \frac{y}{1+|y|}.$$

Usamos ahora las proposiciones 3.2.3 y 4.2.5. Las aplicaciones F y G so continuas pues sus funciones coordenadas son continuas: en el caso de F,

$$p_i \circ F = \frac{q_i}{1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2}},$$

donde $q_i = p_{i|B_1(0)}$. Para la aplicación G tenemos

$$q_i \circ G = \frac{p_i}{1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2}}.$$

□

No es fácil darse cuenta, pero en la demostración de este corolario ha sido crucial la estructura afín de $\mathbb{R}^n$, ya que hemos usado traslaciones y homotecias, algo propio de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, el resultado no se generaliza a cualquier espacio métrico, es decir, dos bolas en un espacio métrico pueden no ser homeomorfas, y esto puede suceder incluso en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, consideramos $X = \{0\} \cup [2, 6]$ como espacio métrico con la distancia usual de $\mathbb{R}$. Tomamos las siguientes tres bolas en X, todas del mismo radio $r = 1$:

$$B_1(0) = \{0\}, \quad B_1(2) = [2, 3), \quad B_1(4) = (3, 5).$$

Cada una de estas bolas con la topología inducida, es decir, la euclídea de $\mathbb{R}$, no es homeomorfa a cualquiera de las otras dos.

Usando el homeomorfismo h de la demostración del teorema 4.2.6, podemos hacer que la recta real, junto con el $+\infty$ y $-\infty$ sean, topológicamente, un intervalo cerrado. Esto lo realizamos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.2.7. Consideramos el conjunto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{p, q\}$, donde $p, q \notin \mathbb{R}$, y la topología τ generada por la base

$$\beta = \{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\{p\} \cup (-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \cup \{q\} : a \in \mathbb{R}\}.$$

Probamos que $(\mathbb{R}^*, \tau)$ es homeomorfo al intervalo $[-1, 1]$. Observemos que $\tau_{|\mathbb{R}}$ es la topología euclídea τ_u de $\mathbb{R}$ ya que al intersecar β con $\mathbb{R}$ nos queda una base de τ_u. Se define la aplicación

$$f : \mathbb{R}^* \to [-1, 1], \quad f(x) = \begin{cases} h(x) = \frac{x}{1-|x|} & x \in (-1, 1) \\ -1 & x = p \\ 1 & x = q. \end{cases}$$

Probamos que f es un homeomorfismo. Es evidente que f es biyectiva. Para probar la continuidad usamos la caracterización mediante bases de abiertos dada en el teorema 3.1.4. Es evidente que para cada $B \in \beta$,

$$f(B) = \begin{cases} [-1, h(a)) & \text{si } B = \{p\} \cup (-\infty, a) \\ (h(a), h(b)) & \text{si } B = (a, b) \\ (h(a), 1] & \text{si } B = (a, \infty) \cup \{q\} \end{cases}$$

En cualquiera de los tres casos, la imagen es un abierto de $[-1,1]$. Para l aplicación f^{-1}, tomamos como base de abiertos de $[-1,1]$ a

$$\begin{aligned}\beta' &= \{O\cap[-1,1] : O\in\beta_u\}\\ &= \{(a,b) : -1<a<b<1\}\cup\{[-1,a) : a<1\}\cup\{(a,1] : -1<a\}.\end{aligned}$$

Entonces

$$f^{-1}(B')=\begin{cases}\{p\}\cup(-\infty,h^{-1}(a)) & \text{si } B'=[-1,a)\\ (h^{-1}(a),h^{-1}(b)) & \text{si } B'=(a,b)\\ (h^{-1}(a),\infty)\cup\{q\} & \text{si } B'=(a,1],\end{cases}$$

probando que f^{-1} es continua. Por último, podemos identificar el element p de $\mathbb{R}^*$ con $-\infty$ y q con $+\infty$, haciendo que la recta real $\mathbb{R}$ "acabe" en l puntos p y q dentro del espacio topológico $(\mathbb{R}^*,\tau)$. Si identificamos $-\infty$ con y $+\infty$ con q, hemos probado que, en cierto sentido, $[-\infty,+\infty]$ es homeomor a un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

Teorema 4.2.8. *Si $A\subset\mathbb{R}^n$ es un subespacio afín de dimensión m ($\leq n$ entonces $A\cong\mathbb{R}^m$.*

Por tanto si $m\leq n$, el espacio $\mathbb{R}^m$ se puede ver topológicamente como subespacio topológico de $\mathbb{R}^n$, concretamente, como un subespacio afín.

Demostración. Excluimos los casos triviales $m=0$ y $m=n$. Si A es subespacio afín de dimensión m, entonces $A=p+\vec{A}$, donde $\vec{A}\subset\mathbb{R}^n$ es subespacio vectorial de dimensión m asociado a A. La demostración se reali en varias etapas.

1. Consideramos la traslación $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dada por $T(x)=x-$ Entonces $T(A)=\vec{A}$ y por tanto $A\cong\vec{A}$.
2. Supongamos que $\vec{A}=<v_1,\ldots,v_m>$. Se considera $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ base usual de $\mathbb{R}^n$. Como $B'=\{v_1,\ldots,v_m\}$ son linealmente indepe dientes, extendemos a una base de $\mathbb{R}^n$: $\{v_1,\ldots,v_m,v_{m+1},\ldots,v_n\}$ y s $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ un isomorfismo lineal tal que $f(v_i)=e_i$, $1\leq i\leq n$. que f es una afinidad,
$$\vec{A}\cong f(\vec{A})=<f(v_1),\ldots,f(v_m)>=<e_1,\ldots,e_m>.$$
3. Finalmente probamos que $A=<e_1,\ldots,e_m>\cong\mathbb{R}^m$. Observemos q el conjunto A no es más que
$$A=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_{m+1}=\ldots=x_n=0\}.$$

Se define

$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad g(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0).$$

Esta aplicación es inyectiva, continua y $g(\mathbb{R}^m) = A$. Por tanto $g : \mathbb{R}^m \to A$ es continua, biyectiva y su inversa es

$$g^{-1} : A \to \mathbb{R}^m, \quad g^{-1}(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Esta aplicación es continua porque g^{-1} es la restricción a A de la aplicación continua de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ dada por $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_m)$.

□

Una consecuencia simple, pero importante, del teorema 4.2.8 es que podemos representar topológicamente la recta euclídea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ como una verdadera recta afín de $\mathbb{R}^2$, o más general, de $\mathbb{R}^n$. Así, cuando en un curso de análisis matemático se introduce y define el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, con su topología usual (aunque no se explicita ésta), dicho conjunto se dibuja en la pizarra como una recta afín, es decir, como una de $\mathbb{R}^2$. Ya que las cuestiones que se estudian se refieren a la continuidad de funciones, convergencia de sucesiones, etc, y éstas son topológicas, podemos ahora afirmar que tal representación es adecuada y no presenta ningún problema, ya que el dibujo es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Desde el punto de vista topológico, podemos ver la recta euclídea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ en $\mathbb{R}^2$ sin ser necesariamente 'recta e infinita'. Así, no es difícil probar que también es homeomorfa a una 'raya acotada' de $\mathbb{R}^2$ como $(0,1) \times \{0\}$, o cualquiera de los subconjuntos que aparecían en la figura 2 (ver también ejercicio 18 de este capítulo). Un caso particular lo proporciona el ejemplo 4.2.4. Así $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es homeomorfo a $\{(x, \sin(x)) : x \in \mathbb{R}\}$.

Seguimos en esta sección estableciendo homeomorfismos entre subconjuntos de espacios euclídeos. Si $0 \leq r < R \leq \infty$, se llama *corona circular* al conjunto del plano $\mathbb{R}^2$ cuya distancia a un punto fijo (x_0, y_0), llamado centro, se encuentra entre r y R, es decir,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R\}.$$

Después de una traslación, que es un homeomorfismo, suponemos que el centro es el origen de coordenadas $(0, 0)$. Denotamos la correspondiente corona circular como

$$C(r, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r < \sqrt{x^2 + y^2} < R\}.$$

Observemos que $C(r, \infty) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > r^2\}$ y que $C(0, \infty) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Teorema 4.2.9. *Una corona circular es homeomorfa al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.*

Demostración. Se considera cualquier homeomorfismo $h : (r, R) \to \mathbb{R}$, cuya existencia viene asegurada por el teorema 4.1.10. Se define $F : C(r, R) \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ como

$$F(p) = \left(\frac{p}{|p|}, h(|p|)\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, h(\sqrt{x^2+y^2})\right),$$

donde $p = (x, y)$. Para probar la continuidad de F usamos la proposición 4.2.5. Así tenemos

$$\begin{aligned} q_1 \circ F &= \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}} \\ q_2 \circ F &= \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}} \\ q_3 \circ F &= h \circ \sqrt{p_1^2+p_2^2}, \end{aligned}$$

donde p_i son las restricciones a $C(r, R)$ de las correspondientes proyecciones de $\mathbb{R}^2$ y q_i las restricciones de las proyecciones de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. La inversa es la aplicación $G(a, b, c) = (ah^{-1}(c), bh^{-1}(c))$, que de nuevo es continua con un argumento similar. Por tanto, F es un homeomorfismo. $\square$

El homeomorfismo F se visualiza en la figura 4.4. La aplicación F lleva circunferencias concéntricas de la corona $C(r, R)$ en circunferencias en el cilindro paralelas al plano de ecuación $z = 0$ pues si dicha circunferencia $C_\delta \subset C(r, R)$ está dada por $x^2 + y^2 = \delta^2$, con $r < \delta < R$, entonces la tercera coordenada de los puntos de $F(C_\delta)$ es $h(\sqrt{\delta})$, que es constante. Para mostrarlo mejor en un dibujo, supongamos que el homeomorfismo h satisface $\lim_{x\to r} h(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to R} h(x) = \infty$, lo cual es posible por el teorema 4.1.10. Si las circunferencias en $C(r, R)$ se van acercando a la circunferencia C_r, la aplicación F las lleva a circunferencias en el cilindro a alturas que van tendiendo a $-\infty$. Y si las circunferencias en $C(r, R)$ van hacia C_R, sus imágenes son circunferencias en el cilindro con alturas yendo a ∞.

Finalizamos la sección con el siguiente resultado.

Teorema 4.2.10. *Si $p \in \mathbb{S}^n$, entonces $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

El resultado es intuitivo al menos para $n = 1$ y $n = 2$: si tomamos una circunferencia (resp. una esfera) agujereada, podemos "abrirla" metiendo las manos en dicho agujero, pudiéndola extender sobre una recta (resp. un plano) y obteniendo un intervalo abierto (resp. un disco circular abierto).

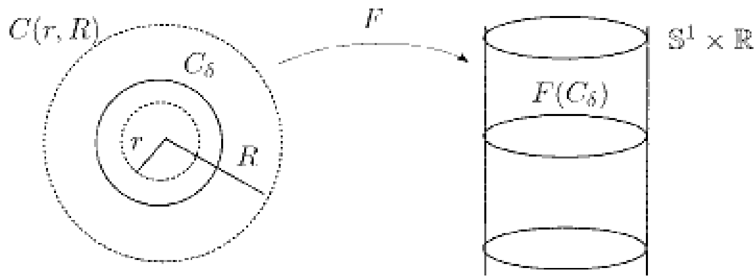


Figura 4.4: Un homeomorfismo entre la corona circular $C(r,R)$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$

Demostración. Primero probamos que el punto p puede ser prefijado, concretamente, demostramos que si $p, q \in \mathbb{S}^n$, entonces $\mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{S}^n \setminus \{q\}$. Se consideran sendas bases ortonormales de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\{p, e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{q, u_1, \ldots, u_n\}$. Sea una isometría lineal $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\phi(p) = q$ y $\phi(e_i) = u_i, 1 \leq i \leq n$. Ya que ϕ es una isometría, es un homeomorfismo por el corolario 4.2.1. Además, por ser ϕ una isometría, $|\phi(x)| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$, y por tanto $\phi(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{S}^n$. Del mismo modo, como ϕ^{-1} es otra isometría, $\phi^{-1}(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{S}^n$, luego se concluye $\phi(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n$. Como $\phi(p) = q$, entonces

$$\mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \phi(\mathbb{S}^n \setminus \{p\}) = \phi(\mathbb{S}^n) \setminus \{\phi(p)\} = \mathbb{S}^n \setminus \{q\}.$$

Una vez probado lo anterior, el punto p que fijamos es $N = (0, \ldots, 0, 1)$, llamado el polo norte de $\mathbb{S}^n$ y pasamos a probar que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Se define la aplicación

$$\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n, \quad \pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right).$$

Esta aplicación se llama la *proyección estereográfica* desde el polo norte. La proyección estereográfica lleva cada punto $x = (x_1 \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ en el punto del hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ de ecuación $x_{n+1} = 0$ que se obtiene de intersecar con dicho hiperplano la recta que une N con el punto x: ver figura 4.5.

La aplicación π es biyectiva y su inversa es

$$\pi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{-1 + |x|^2}{1 + |x|^2}\right).$$

La prueba de que π y π^{-1} son continuas sigue los mismos argumentos que en el ejemplo anterior y hacemos sólo la demostración para la aplicación π.

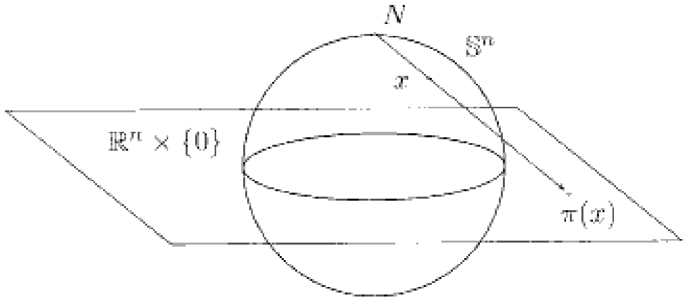


Figura 4.5: La proyección estereográfica π desde el polo norte de $\mathbb{S}^n$ a $\mathbb{R}^n$

Denotamos $p'_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las proyecciones de $\mathbb{R}^n$ y por $p_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ las de $\mathbb{R}^{n+1}$. Usando la proposición 3.2.3, la aplicación π es continua si $p'_i \circ \pi$ lo es, para $1 \leq i \leq n$. Llamamos $q_i = (p_i)_{|\mathbb{S}^n \setminus \{N\}}$. Entonces

$$p'_i \circ \pi = \frac{q_i}{1 - q_{n+1}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto, π es continua. □

Una consecuencia del ejemplo anterior es que $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ es topológicamente equivalente al plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Esto permite *representar* de forma bicontinua la esfera menos un punto como un plano. Si nos imaginamos que la Tierra es la esfera $\mathbb{S}^2$ y el plano $\mathbb{R}^2$ es un mapa, la aplicación π nos *dibuja* la Tierra excepto el polo norte en un papel (el plano $\mathbb{R}^2$) de forma homeomorfa y puntos de la Tierra que están cercanos, aparecen en el dibujo próximos. Se dice entonces que se ha realizado una *proyección estereográfica* de la Tierra.

Aunque este mapa representa la Tierra de *forma continua*, tenemos que indicar que no preserva las distancias entre dos puntos, es decir, no es un mapa hecho *a escala*. El problema de si es posible o no realizar un mapa de la Tierra a escala, entra dentro del ámbito de la geometría diferencial, y la respuesta es negativa.

Nota 4.2.11. La proyección estereográfica para el caso $n = 2$ tiene especial interés ya que la aplicación π puede expresarse en notación compleja. Concretamente, identificamos $\mathbb{R}^2$ con el plano complejo $\mathbb{C}$ de forma que el par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se escribe como $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Si ponemos $\Re(z) = x$ e $\Im(z) = y$ la parte real e imaginaria de $z \in \mathbb{C}$, respectivamente, entonces la aplicación π^{-1} se escribe como

$$\pi^{-1}(z) = \left(\frac{2\Re(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\Im(z)}{1+|z|^2}, \frac{-1+|z|^2}{1+|z|^2}\right),$$

donde $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ es el módulo del número complejo $z \in \mathbb{C}$.

También permite escribir transformaciones de $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{S}^2$ como aplicaciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Así, si $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ es la aplicación antípoda $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$, consideramos la aplicación $\pi \circ f \circ \pi^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, y en este caso, dicha aplicación no es más que

$$(\pi \circ f \circ \pi^{-1})(z) = -\frac{1}{\bar{z}},$$

donde $\bar{z} = x - iy$ es el conjugado de z.

4.3. Embebimiento, aplicación abierta y aplicación cerrada

Definición 4.3.1. Una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ se llama embebimiento si $f : (X, \tau) \to (f(X), \tau'_{|f(X)})$ es un homeomorfismo. En tal caso, se dice que (X, τ) está embebido en (Y, τ') mediante f.

Es evidente que todo homeomorfismo es un embebimiento. Gracias a un embebimiento, el espacio (X, τ) es topológicamente equivalente a un subconjunto de (Y, τ') con su topología relativa, y todas las propiedades topológicas que posee este subconjunto también las tiene (X, τ). La demostración del siguiente resultado es evidente.

Proposición 4.3.2. *Si $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es un embebimiento y $g : (Y, \tau') \to (Z, \tau'')$ un homeomorfismo, entonces $g \circ f$ es un embebimiento.*

El ejemplo típico de embebimiento es la inclusión de un subespacio topológico en el espacio ambiente.

Proposición 4.3.3. *Sea un espacio topológico (X, τ) y A un subconjunto de X con una topología τ'. Entonces la aplicación inclusión $i : (A, \tau') \to (X, \tau)$ es un embebimiento si y sólo si $\tau' = \tau_{|A}$.*

Demostración. La restricción de la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ a la imagen es la identidad. Entonces por el corolario 4.1.6, la aplicación $i : (A, \tau') \to (A, \tau_{|A})$ es un homeomorfismo si y sólo si $\tau' = \tau_{|A}$. $\square$

EJEMPLO 4.3.4. El intervalo $(0,1)$ se embebe en $[0,1]$ mediante la inclusión. Por otra parte, $[0,1]$ también se embebe en $(0,1)$ de la siguiente forma. El intervalo $[0,1]$ se embebe en $\mathbb{R}$ con la inclusión y por otro lado, se toma un homeomorfismo cualquiera $g:\mathbb{R}\to(0,1)$. Las proposiciones 4.3.2 y 4.3.3 aseguran entonces que $g\circ i$ es un embebimiento de $[0,1]$ en $(0,1)$.

Otra forma de embeber $[0,1]$ en $(0,1)$ es la siguiente. El intervalo $[0,1]$ es homeomorfo al intervalo $[1/4,3/4]$. Y ahora componemos con la inclusión de $[1/4,3/4]$ en $(0,1)$.

El concepto de embebimiento permite plantear un problema importante en topología. Para motivarlo, volvamos a los inicios de este libro, donde mostrábamos ejemplos de espacios topológicos, algunos más o menos abstractos. No hay duda que el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico que nos es muy familiar y que ocupa un lugar destacado. Sea ahora un espacio topológico (X,τ) y preguntamos si es posible imaginarse de alguna manera dicho espacio, por supuesto, conservando sus propiedades topológicas. La mejor forma de ello sería que dicho espacio se encontrara 'dentro' de un espacio euclídeo. La pregunta entonces se formula del siguiente modo:

Sea (X,τ) un espacio topológico ¿es posible hallar un embebimiento de (X,τ) en algún espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$? Y si fuera así, ¿cuál sería el menor número natural $n\in\mathbb{N}$?

Evidentemente no siempre es posible. Así, el conjunto de los números reales con la topología discreta no satisface el segundo axioma de numerabilidad y por tanto no puede ser homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^n$ por el corolario 2.2.15.

Si la respuesta fuera positiva y si $f:X\to\mathbb{R}^n$ es el embebimiento, entonces (X,τ) sería homeomorfo a $f(X)\subset\mathbb{R}$, en particular, (X,τ) es metrizable. Además, el estudio topológico de (X,τ) sería esencialmente el de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con la topología euclídea.

Observemos que por el ejercicio 23 de este capítulo, $\mathbb{R}^n$ se embebe en cualquier espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$ con $m\geq n$, así que no tiene sentido preguntarnos por un embebimiento en un espacio euclídeo de dimensión más grande.

Para ilustrar el problema, consideramos la esfera $\mathbb{S}^2$ de dimensión 2. En primer lugar $\mathbb{S}^2$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, luego la inclusión $\mathbb{S}^2\hookrightarrow\mathbb{R}^3$ es un embebimiento ¿es posible hallar un embebimiento de $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^2$, disminuyendo así en 1 la dimensión del espacio euclídeo? Uno tiene esperanzas de encontrarlo pues $\mathbb{S}^2$ es un objeto bidimensional, una *superficie*, lo mismo que sucede con $\mathbb{R}^2$. Además, ya hemos probado que $\mathbb{S}^2\setminus\{N\}$ es homeomorfo a

$\mathbb{R}^2$, luego haciendo composiciones de embebimientos y homeomorfismos del mismo modo que en el ejemplo 4.3.4 , parece que uno podría obtener el embebimiento en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, la respuesta es negativa, pero tenemos que esperar hasta el capítulo 11! para probarlo (corolario 11.4.10).

Motivados por parte del enunciado del teorema 4.1.5, damos la siguiente definición.

Definición 4.3.5. Una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ entre dos espacios topológicos se llama abierta (resp. cerrada) si $f(O) \in \tau'$ para todo $O \in \tau$ (resp. $f(F) \in \mathcal{F}'$ para todo $F \in \mathcal{F}$).

Se deduce del teorema 3.1.4, que una aplicación biyectiva entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo si y sólamente si es continua y es abierta, o si es continua y es cerrada.

Proposición 4.3.6. *Una aplicación abierta lleva entornos en entornos, es decir, si $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es una aplicación abierta y $x \in X$, entonces $f(U) \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$.*

Demostración. Dado $U \in \mathcal{U}_x$, sea $O \in \tau$ tal que $x \in O \in U$. Entonces $f(x) \in f(O) \subset f(U)$. Ya que $f(O) \in \tau'$ por ser f abierta, entonces $f(U)$ es un entorno de $f(x)$. $\square$

Gracias a este resultado, a lo largo del libro, todos aquellos invariantes topológicos definidos *localmente* alrededor de un punto se mantendrán por aplicaciones continuas y abiertas (por ejemplo, proposiciones 6.5.7 y 8.4.10).

Se caracteriza ahora una aplicación abierta en términos del interior de un conjunto, bases y bases de entornos.

Teorema 4.3.7. *Sea una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La aplicación f es abierta.*
2. *Para todo $A \subset X$, $f(\mathring{A}) \subset int\,(f(A))$.*
3. *Si β es una base de τ, entonces $f(B) \in \tau'$ para todo $B \in \beta$.*
4. *Para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}_x$, existe $U' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ tal que $U' \subset f(U)$.*
5. *Para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}_x$, $f(U)$ es entorno de $f(x)$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Como $\overset{\circ}{A}$ es un conjunto abierto, $f(\overset{\circ}{A})$ también lo es. Ya que $\overset{\circ}{A}\subset A$, entonces $f(\overset{\circ}{A})\subset f(A)$ y así

$$f(\overset{\circ}{A}) = \mathrm{int}(f(\overset{\circ}{A})) \subset \mathrm{int}\ (f(A)).$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Para cada $B\in\beta$, B es un conjunto abierto. Entonces $f(B)=f(\overset{\circ}{B})\subset \mathrm{int}(f(B))$, luego int $(f(B))=f(B)$, es decir, $f(B)\in\tau'$.

(3) $\rightarrow$ (4). Sea $x\in X$, $U\in\mathcal{U}_x$ y $O\in\tau$ tal que $x\in O\subset U$. Debido a que τ es base de topología de ella misma, $f(O)\in\tau'$. Se toma $U'=f(O)$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Dado $U\in\mathcal{U}_x$, existe $U'\in\mathcal{U}'_{f(x)}$ tal que $f(x)\in U'\subset f(U)$, luego $f(U)\in\mathcal{U}'_{f(x)}$.

(5) $\rightarrow$ (1). Sea $O\in\tau$ y sea $f(x)\in f(O)$ con $x\in O$. Como $O\in\mathcal{U}_x$, $f(O)\in\mathcal{U}'_{f(x)}$. Esto prueba que $f(O)$ es entorno de todos sus puntos y por tanto, es abierto. □

Corolario 4.3.8. *Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ una aplicación biyectiva. Entonces f es un homeomorfismo si y sólo si $f(\overset{\circ}{A})=$ int $(f(A))$ para todo $A\subset X$.*

De forma parecida al apartado 2 del teorema 4.3.7, tenemos:

Teorema 4.3.9. *Una aplicación $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ es cerrada si y sólo si $\overline{f(A)}\subset f(\overline{A})$ para todo $A\subset X$.*

Proposición 4.3.10. *Las aplicaciones proyecciones $p_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $1\leq i\leq n$, son abiertas pero no son cerradas.*

Demostración. Para probar que es abierta, se usa el teorema 4.3.7 considerando la base formada por las bolas de $\mathbb{R}^n$. Dada una bola $B_r(x)\subset\mathbb{R}^n$, es evidente que $p_i(B_r(x))=(x-r,x+r)$, que es un abierto de $\mathbb{R}$.

Por otro lado, las aplicaciones p_i no son cerradas. Para ello, basta tomar el conjunto $A=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\Pi_{i=1}^n x_i=1\}$. Este conjunto es cerrado pues $A=f^{-1}(\{0\})$, donde

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad f(x_1,\ldots,x_n)=\Pi_{i=1}^n x_i-1$$

es una aplicación continua. Sin embargo, para todo $1\leq i\leq n$, $p_i(A)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ que no es cerrado en $\mathbb{R}$. □

Proposición 4.3.11. *Se consideran $f:X\to Y$ y $g:Y\to Z$ dos aplicaciones entre espacios topológicos.*

1. *Si f y g son abiertas (resp. cerradas), entonces $g \circ f$ es abierta (resp. cerrada).*
2. *Si $g \circ f$ es abierta (resp. cerrada) y f es sobreyectiva y continua, entonces g es abierta (resp. cerrada).*
3. *Si $g \circ f$ es abierta (resp. cerrada) y g es inyectiva y continua, entonces f es abierta (resp. cerrada).*

Siguiendo con aspectos locales, consideramos aplicaciones que alrededor de un punto se comportan como si fueran homeomofismos.

Definición 4.3.12. Un homeomorfismo local es una aplicación $f(X, \tau) \to (Y, \tau')$ tal que para todo $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}_x$ y $U' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ tal que

$$f : (U, \tau_{|U}) \to (U', \tau'_{U'}).$$

es un homeomorfismo. Se dice que X es localmente homeomorfo a Y si para todo $x \in X$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ y existe $y \in Y$ y $U' \in \mathcal{U}'_y$ tal que U es homeomorfo a U'.

Evidentemente, si entre un espacio topológico X y otro Y hay un homeomorfismo local, X es localmente homeomorfo a Y. También, es cierto que la composición de un homeomorfismo con un homeomorfismo local es un homeomorfismo local.

EJEMPLO 4.3.13. Todo conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Concretamente si $O \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y si $x \in O$, sea una bola $B_r(x)$ incluida en O. Entonces $B_r(x) \simeq \mathbb{R}^n$ por el teorema 4.2.6.

Definición 4.3.14. Dos espacios topológicos (X, τ) e (Y, τ') son localmente homeomorfos si (X, τ) es localmente homeomorfo a (Y, τ') e (Y, τ') es localmente homeomorfo a (X, τ).

Un espacio puede ser localmente homeomorfo a otro, pero no al revés, o dicho de otro modo, "ser localmente homeomorfo a" no es una relación de equivalencia, en contraste con "ser homeomorfo a", que sí lo es. Por ejemplo, sea $X = \mathbb{R}$ e $Y = (0, 1) \cup \{2\}$. Entonces X es localmente homeomorfo a Y. Para ello, sea $x \in X$ y tomamos $1/2 \in Y$. Entonces el entorno $\mathbb{R}$ de x es homeomorfo al entorno $(0, 1)$ de $1/2$ en Y. Sin embargo, Y no es localmente homeomorfo a X. Para ello tomamos $2 \in Y$. Si existe $U \in \mathcal{U}_2$ que sea homeomorfo a un entorno U' de $x \in \mathbb{R}$, restringiendo a $\{2\}$ (que es entorno de 2 en Y), tendríamos que $\{x\}$ es un entorno de x en $\mathbb{R}$, lo cual no es cierto.

Proposición 4.3.15. *Un homeomorfismo local es una aplicación continua y abierta.*

Demostración. La continuidad de f es evidente porque es una propiedad local por la proposición 3.1.18.

Para probar que f es abierta usamos el teorema 4.3.7. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ un homeomorfismo local y sea $x \in X$ y $W \subset \mathcal{U}_x$. Veamos que $f(W)$ es un entorno de $f(x)$. Ya que f es un homeomorfismo local, existe $U \in \mathcal{U}_x$ y $U' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ tal que $f : U \to U'$ es un homeomorfismo. Entonces $U \cap W$ es un entorno de x en la topología relativa de U y como f es un homeomorfismo entre U y U', el conjunto $f(U \cap W)$ es un entorno de $f(x)$ en la topología relativa de U'. Ya que U' también es un entorno de $f(x)$, $f(U \cap W)$ es un entorno de $f(x)$ en Y. Por tanto, $f(U \cap W) \subset f(W)$ y es un entorno de $f(x)$. □

Ejemplo 4.3.16. La aplicación

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad f(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

es un homeomorfismo local y no es una aplicación cerrada. Para probar que es un homeomorfismo local, distinguimos casos.

1. Para $t = 0$ se prueba que existe $U \in \mathcal{U}_0$ y $U' \in \mathcal{U}_{f(0)}$ tal que $f : U \to U' = f(U)$ es un homeomorfismo. Para ello, sea $U = (-\pi/2, \pi/2)$ y $f(U) = \{(\cos(t), \sin(t)) : -\pi/2 < t < \pi/2\}$, que es un conjunto abierto de $\mathbb{S}^1$. La inversa de f es la aplicación $f^{-1} : f(U) \to U$ dada por $f^{-1}(x, y) = \text{arc tg}(y/x)$. Tanto f como f^{-1} son aplicaciones continuas.
2. Sea ahora $t_0 \in \mathbb{R}$. Se define $V = T(U)$, donde $T(t) = t + t_0$. Entonces T es un homeomorfismo y V es entorno de t_0. Falta probar que $f : V \to f(V)$ es un homeomorfismo. Se considera $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el giro vectorial definido por $\phi((1,0)) = (\cos(t_0), \sin(t_0))$ y $\phi((0,1)) = (-\sin(t_0), \cos(t_0))$, es decir,
$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(t_0) & -\sin(t_0) \\ \sin(t_0) & \cos(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
Un giro de $\mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo. Finalmente, probamos que $f_{|V} = \phi \circ f_{|U} \circ T^{-1}$. Sea $t \in V$, tenemos
$$\phi \circ f_{|U} \circ T^{-1}(t) = \phi(\cos(t - t_0), \sin(t - t_0)) = (\cos(t), \sin(t)) = f(t).$$

La aplicación f no es cerrada. Para ello, se considera

$$F = \{2\pi n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Este conjunto es cerrado, pues su complementario

$$\mathbb{R}\setminus F = (-\infty, 2\pi+1)\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left((2\pi n + \frac{1}{n}, 2\pi(n+1) + \frac{1}{n+1}\right)$$

es abierto. Por otro lado,

$$f(F) = \left\{ f\left(2\pi n + \frac{1}{n}\right) : n\in\mathbb{N}\right\} = \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Esta sucesión es convergente en la circunferencia $\mathbb{S}^1$ y su límite es $(1,0)$. Ya que $(1,0)\not\in f(F)$, el conjunto $f(F)$ no es cerrado. Ver figura 4.6.

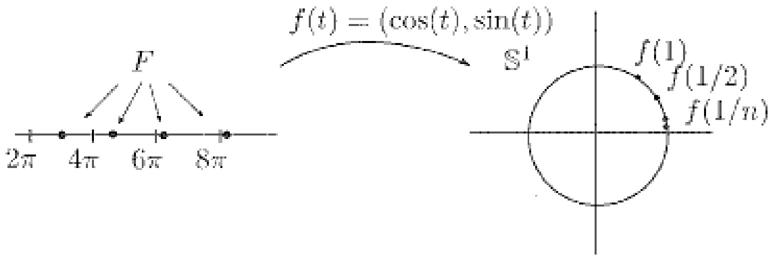


Figura 4.6: El conjunto F es cerrado en $\mathbb{R}$, pero $f(F)$ no es cerrado en $\mathbb{S}^1$

4.4. Ejercicios

1. Se considera un conjunto X con dos topologías τ_1, τ_2. Probar que la aplicación identidad $1_X : (X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ es un homeomorfismo si y sólo si $\tau_1=\tau_2$.

2. Sea $f : X\to Y$ un homeomorfismo y $A\subset X$. Probar:

   - $\operatorname{int}(f(A)) = f(\operatorname{int}(A))$.
   - $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.
   - $\operatorname{ext}(f(A)) = f(\operatorname{ext}(A))$.
   - $\operatorname{Fr}(f(A)) = f(\operatorname{Fr}(A))$.

3. Probar que la propiedad "ser metrizable" es topológica.

4. Sea (X,τ_T) un espacio topológico trivial e (Y,τ') un espacio homeomorfo a él. Probar que τ' es la topología trivial de Y. Obtener el resultado análogo para la topología cofinita.

5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y una aplicación continua $f : A \to \mathbb{R}$. Probar que el grafo de f definido por $G(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es homeomorfo a A.

6. Si H_n^+ es el hemisferio superior de $\mathbb{S}^n$, probar que la aplicación
$$f : \mathbb{R}^n \to H_n^+, \quad f(x) = (x, \sqrt{1 - |x|^2})$$
es un homeomorfismo.

7. Determinar un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

8. Probar que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ es homeomorfo a $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

9. Probar que $\mathbb{S}^2$ es homeomorfo al elipsoide
$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

10. Probar que el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es homeomorfo al hiperboloide reglado
$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$
Ver figuras 2.8 y 2.10.

11. Obtener una expresión de un homeomorfismo entre la corona circular $C(1, 2)$ y el hiperboloide reglado H del ejercicio anterior.

12. Probar que los siguientes conjuntos son homeomorfos:
$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$
$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : s^2 \leq x^2 + y^2 \leq S^2\},$$
donde $0 < r < R < \infty$ y $0 < s < S < \infty$. Además, cualquiera de ellos es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$.

13. Calcular un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ y el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

14. Demostrar que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es homeomorfo al semicono superior definido por $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

15. En la recta de Sorgenfrey, probar que dos intervalos abiertos son homeomorfos entre sí. Lo mismo para intervalos cerrados y acotados. Estudiar si lo mismo ocurre para los otros tipos de intervalos de $\mathbb{R}$.

16. Sea X un conjunto y $p, q \in X$. Si τ_p y τ_q son las topologías del punto excluido para p y q, respectivamente, probar que $(X, \tau_p) \cong (X, \tau_q)$.

17. Construir un homeomorfismo entre los siguientes pares de conjuntos:

    a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z > 1\}$ y $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -\infty < z \leq 0\}$.

    b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ y $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1\}$.

    c) $[0,1) \subset \mathbb{R}$ y $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < y \leq 0, x = z = 0\}$.

    d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(x)\}$ y $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cos(x)\}$.

    e) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$.

    f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$ y $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$.

18. Probar que $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es homeomorfo a los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

    a) $(0,1) \times \{0\}$.

    b) $(\{0,1\} \times (0,1]) \cup ([0,1] \times \{1\})$.

    c) $\{e^t(\cos(t), \sin(t)) : t \in (0, 4\pi)\}$.

19. Se considera el conjunto $X = \{a, b, c\}$. Estudiar cuántas topologías diferentes existen en X salvo homeomorfismos.

20. Probar que existe una proyección estereográfica desde el polo sur $S = (0, \ldots, 0, -1)$, es decir, $\mathbb{S}^n \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n$.

21. Probar el recíproco de la proposición 4.3.6.

22. Probar que la aplicación $f(x) = x^2$ de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ no es abierta. Estudiar si es cerrada. Estudiar el mismo problema pero cambiando τ_u por la topología de Sorgenfrey.

23. Supongamos $n \leq m$. Probar que la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ es un embebimiento. Deducir que $\mathbb{S}^n$ se embebe en $\mathbb{S}^m$.

24. Probar que la aplicación $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$, es cerrada pero no es abierta.

25. Se define la aplicación $f : [0,1] \to \{0,1\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Probar que f es una aplicación sobreyectiva, cerrada, abierta y no es continua.

26. Probar que $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son localmente homeomorfos.

27. Si $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un hiperplano afín que interseca a $\mathbb{S}^n$ en más de un punto, probar que $H \cap \mathbb{S}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$.

28. Estudiar si la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/(1+x^2)$ es abierta y cerrada.

29. Sea $A \subset (X, \tau)$ y la aplicación inclusión $i : (A, \tau_{|A}) \to (X, \tau)$. Probar que i es abierta si y sólo si $A \in \tau$.

30. Probar que cualquier aplicación de (X, τ_{CF}) en sí mismo es cerrada.

31. Sea un espacio topológico discreto (X, τ_D). Estudiar en qué condiciones (X, τ_D) se puede embeber en la recta euclídea $\mathbb{R}$.

32. Se considera V un espacio vectorial real de dimensión n y sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. Esta base permite definir una aplicación biyectiva entre $\mathbb{R}^n$ y V que no es más que considerar coordenadas de V respecto de la base B. Concretamente,

$$f_B : \mathbb{R}^n \to V, \quad f_B(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Siguiendo el teorema 1.1.3, denotamos $\tau_B = \tau_u(f_B)$. Probar que si B' es otra base de V, entonces $\tau_B = \tau_{B'}$.

33. Sean L_1 y L_2 dos rectas afines de $\mathbb{R}^n$ que no se cortan. Probar que $L_1 \cup L_2$ es homeomorfo a otro par de rectas de $\mathbb{R}^n$ que no se cortan.

34. Usamos la notación $\mathbb{S}^1_r(a) \subset \mathbb{R}^2$ para denotar una circunferencia de centro $a \in \mathbb{R}^2$ y radio $r > 0$. Probar:

    a) $\mathbb{S}^1_1(-1,0) \cup \mathbb{S}^1_2(3,0) \cong \mathbb{S}^1_3(-4,0) \cup \mathbb{S}^1_4(6,0)$.

    b) $\mathbb{S}^1_1(-1,0) \cup \mathbb{S}^1_1(1,0) \simeq \mathbb{S}^1_2(-2,0) \cup \mathbb{S}^1_2(2,0)$.

Capítulo 5

Topología producto y topología inicial

Recordemos que en el capítulo 1 ya aparecieron dos formas de tener nuevos espacios topológicos a partir de otros. Así, en el teorema 1.1.3 se dotó de una topología a un conjunto que era biyectivo con un espacio topológico. Por otro lado, en la sección 1.5 se definió una estructura topológica en un subconjunto de un espacio topológico, y que se denominó subespacio topológico.

En este capítulo construimos una topología en el producto cartesiano de dos espacios topológicos. Consideramos dos espacios topológicos (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2). Es natural preguntarse si es posible definir en el producto cartesiano $X_1 \times X_2$ una topología relacionada con τ_1 y τ_2 y a la que llamaremos topología producto. Esta manera de crear estructuras matemáticas en el producto cartesiano es habitual en matemáticas y así se define producto de grupos, producto de anillos o producto de espacios vectoriales.

Para la construcción de la topología producto, planteamos algunos aspectos que serían interesantes que tuviera el nuevo espacio topológico.

1. Si identificamos $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}^{n+m}$, es de esperar que la topología producto de la euclídea de $\mathbb{R}^n$ por la euclídea de $\mathbb{R}^m$ sea la topología euclídea de $\mathbb{R}^{n+m}$.

2. Supongamos que (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) son dos espacios topológicos y consideramos las aplicaciones proyecciones

$$p_i : X_1 \times X_2 \to X_i, \quad p_i(x_1, x_2) = x_i, i = 1, 2.$$

La topología producto tendría que hacer continuas a estas dos aplicaciones, como así sucedía con las proyecciones del espacio euclídeo (proposición 3.2.2). Por otra parte, el estudio de la continuidad de una aplicación $f : Y \to X_1 \times X_2$ tendría que ser equivalente a la continuidad de sus aplicaciones coordenadas $f = (f_1, f_2)$, con $f_i = p_i \circ f$, $i = 1, 2$, de forma análoga con lo que sucede para aplicaciones que tienen como codominio el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ (proposición 3.2.3).

3. Sería de esperar que si $X_1 \cong Y_1$ y $X_2 \cong Y_2$, entonces también se tenga que $X_1 \times X_2 \cong Y_1 \times Y_2$ considerando las topologías productos.

4. Si A y B son dos subconjuntos de dos espacios topológicos X_1 y X_2, respectivamente, en el producto cartesiano $A \times B$ habría dos topologías: la topología producto de la topología relativa de A por la topología relativa de B y por otro lado, la topología inducida en $A \times B$ de la topología producto de X_1 por X_2. Es natural esperar que estas dos topologías coincidan.

Una vez definida la topología producto de dos espacios topológicos, en este capítulo también vamos a extender este concepto al caso que tengamos el producto cartesiano de una familia arbitraria de espacios topológicos. Para ello será necesario extraer las propiedades que caracteriza la topología producto y surgirá así el concepto de topología inicial.

5.1. Topología producto

Para motivar la definición de la topología producto, nos fijamos en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Aquí tomamos dos copias de la recta euclídea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y queremos definir una topología en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Además nos gustaría que dicha topología coincidiera con la topología euclídea que se ha definido en $\mathbb{R}^2$. En un primer momento uno puede pensar que en la nueva topología producto un conjunto abierto será el producto cartesiano de abiertos, es decir, de un abierto de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ por otro abierto de $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Se observa inmediatamente que no es una buena tentativa. En primer lugar porque una bola de $\mathbb{R}^2$, que es un conjunto abierto, no es producto de un abierto de $\mathbb{R}$ por otro abierto de $\mathbb{R}$, concretamente, no existen conjuntos (abiertos o no) A y B tales que una bola de $\mathbb{R}^2$ se expresa como $A \times B$. Por otro lado, cuando se definió la topología euclídea de $\mathbb{R}^2$ en el ejemplo 1.2.12, la familia de estos productos cartesianos formaban una base, pero no toda la topología.

Esto da pie a pensar en construir la topología producto mediante una base suya, concretamente, la familia formada por los productos de intervalos abiertos (ver figura 5.1). En el caso general se probará primero que el producto de abiertos es base de una topología en el producto cartesiano y es a esta topología a la que llamamos *topología producto.*

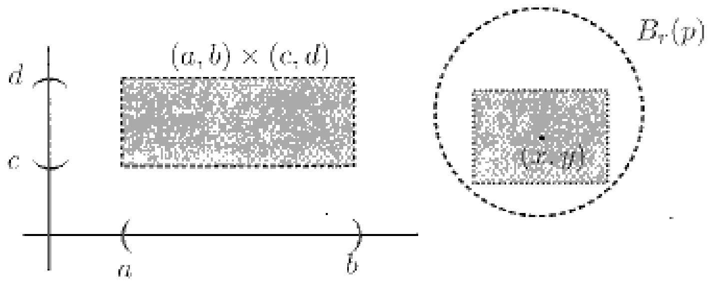


Figura 5.1: La familia de rectángulos abiertos de la forma $(a,b)\times(c,d)$ constituyen una base de la topología euclídea de $\mathbb{R}^2$

Proposición 5.1.1. *Sean dos espacios topológicos (X_1,τ_1) y (X_2,τ_2) y consideremos la familia de subconjuntos de $X_1\times X_2$ formada por*

$$\tau_1\times\tau_2=\{O_1\times O_2 : O_1\in\tau_1, O_2\in\tau_2\}.$$

Entonces $\tau_1\times\tau_2$ es base de una topología en el conjunto $X_1\times X_2$.

Demostración. Para probar que $\tau_1\times\tau_2$ es una base de abiertos, usamos el teorema 1.2.7.

1. La primera propiedad es evidente, pues $X_1\times X_2$ ya pertenece a $\tau_1\times\tau_2$.
2. Por la nota 1.2.8, la segunda propiedad se verifica inmediatamente pues si $O_1\times O_2,\ O_1'\times O_2'\in\tau_1\times\tau_2$, entonces

$$(O_1\times O_2)\cap(O_1'\times O_2')=(O_1\cap O_1')\times(O_2\cap O_2')\in\tau_1\times\tau_2.$$

□

Definición 5.1.2. Dados dos espacios topológicos (X_1,τ_1) y (X_2,τ_2), se llama topología producto en $X_1\times X_2$ a la topología que tiene por base $\tau_1\times\tau_2$. Se denota la topología producto por $\tau_1\times\tau_2$.

Observemos que desde el punto de vista de la notación, estamos representando con el mismo símbolo $\tau_1\times\tau_2$ tanto la base como la propia topología.

Una vez definida la topología producto, relacionamos los conceptos topológicos que hay en el espacio producto con cada una de las topologías de los factores (X_i, τ_i). Empezamos con las bases de topologías y las bases de entornos.

Proposición 5.1.3. *Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) dos espacios topológicos.*

1. *Si β_i es una base de la topología τ_i, $i = 1, 2$, entonces $\beta_1 \times \beta_2$ es base de la topología $\tau_1 \times \tau_2$.*
2. *Sean $x_i \in X_i$ y $\mathcal{U}^i_{x_i}$ el sistema de entornos de x_i en (X_i, τ_i), $i = 1, 2$. Entonces $\mathcal{U}^1_{x_1} \times \mathcal{U}^2_{x_2}$ es base de entornos de (x_1, x_2) en la topología $\tau_1 \times \tau_2$.*
3. *Si $\beta^i_{x_i}$ es base de entornos de $x_i \in X_i$, $i = 1, 2$, entonces $\beta^1_{x_1} \times \beta^2_{x_2}$ es una base de entornos de (x_1, x_2) en la topología $\tau_1 \times \tau_2$.*

De nuevo se observa que un entorno de (x_1, x_2) no tiene porqué ser un producto de entornos, pero el producto de entornos sí es un entorno en la topología producto.

Demostración. 1. Usamos la definición 1.2.1 de base de una topología. Demostramos primero que todo elemento de $\beta_1 \times \beta_2$ es un conjunto abierto. Sea $B_1 \times B_2 \in \beta_1 \times \beta_2$. Ya que $\beta_1 \subset \tau_1$ y $\beta_2 \subset \tau_2$, entonces $B_1 \times B_2 \in \tau_1 \times \tau_2$.

Por otra parte, sea un conjunto abierto G en la topología producto y $(x_1, x_2) \in G$. Ya que $\tau_1 \times \tau_2$ es base de la topología producto, existen abiertos $O_i \in \tau_i$ tales que

$$(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2 \subset G.$$

Por ser β_1 y β_2 bases de topologías, existen $B_i \in \beta_i$ tales que $x_i \in B_i \subset O_i$, $i = 1, 2$. Entonces

$$(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \subset O_1 \times O_2 \subset G.$$

2. Para probar que $\mathcal{U}^1_{x_1} \times \mathcal{U}^2_{x_2}$ es una base de entornos del punto (x_1, x_2), usamos la definición 1.4.6. Primero probamos que todos sus elementos son entornos. Sean $U_1 \in \mathcal{U}^1_{x_1}$ y $U_2 \in \mathcal{U}^2_{x_2}$. Ya que son entornos de x_1 y x_2, existen abiertos $O_i \in \tau_i$, tales que $x_i \in O_i \subset U_i$, $i = 1, 2$. Por tanto $(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2 \subset U_1 \times U_2$. Debido a que $O_1 \times O_2$ es un conjunto abierto en $\tau_1 \times \tau_2$, entonces $U_1 \times U_2$ es un entorno de (x_1, x_2).

Sea ahora un entorno W del punto (x_1, x_2) en la topología producto. Por la proposición 1.4.3, existe un elemento $O_1 \times O_2$ de la base de la topología tal que

$$(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2 \subset W.$$

Como $O_i \in \tau_i$ y $x_i \in O_i$, entonces $O_1 \times O_2 \in \mathcal{U}^1_{x_1} \times \mathcal{U}^2_{x_2}$.

3. Usamos de nuevo la definición 1.4.6. Sea $V_i \in \beta^i_{x_i}$. Entonces $V_i \in \mathcal{U}^i_{x_i}$ y así $V_1 \times V_2 \in \mathcal{U}_{(x_1,x_2)}$ por el apartado anterior. Sea $W \in \mathcal{U}_{(x_1,x_2)}$. Como $\mathcal{U}^1_{x_1} \times \mathcal{U}^2_{x_2}$ es base de entornos de (x_1, x_2), existe $U_i \in \mathcal{U}^i_{x_i}$ tal que $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset W$. Como $\beta^i_{x_i}$ es base de entornos de x_i en (X_i, τ_i), existe $V_i \in \beta^i_{x_i}$ tal que $x_i \in V_i \subset U_i$, $i = 1, 2$. Por tanto

$$V_1 \times V_2 \subset U_1 \times U_2 \subset W.$$

$\square$

Ejemplo 5.1.4. Consideramos $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_u \times \tau_d)$ donde τ_d es la topología a derechas. Hallamos el interior y la adherencia del conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Una base de entornos de (x, y) es

$$\beta^u_x \times \beta^d_y = \{(x - \epsilon, x + \epsilon) \times [y, \infty) : \epsilon > 0\}.$$

Ver figura 5.2. Ya que cada uno de estos conjuntos no es acotado, no hay

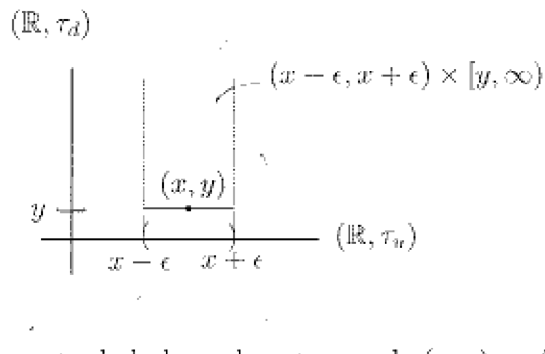


Figura 5.2: Un elemento de la base de entornos de (x, y) en $(\mathbb{R}^2, \tau_u \times \tau_d)$

ningún elemento de $\beta^u_x \times \beta^d_y$ incluido en A. Por tanto $\text{int}(A) = \emptyset$. Para hallar la adherencia, observemos que para todo (x, y) con $-1 \leq x \leq 1$, $y \leq 0$, el conjunto $(x - \epsilon, x + \epsilon) \times [y, \infty)$ interseca a A. Lo mismo ocurre para los puntos $x^2 + y^2 = 1$, excepto el punto $(0, 1)$. Por tanto,

$$\overline{A} = A \cup ([-1, 1] \times (-\infty, 0]) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \neq 1\}.$$

En el siguiente resultado se estudia el comportamiento de las operaciones interior, frontera y clausura en la topología producto. En general, dado un subconjunto $A \subset X_1 \times X_2$ no hay una forma directa que relacione, por ejemplo, el interior de A en $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ con el interior de algún conjunto de (X_i, τ_i). Sin embargo sí es posible establecerla en el caso particular que el subconjunto A sea un producto cartesiano de subconjuntos.

Proposición 5.1.5. *Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) dos espacios topológicos y $A_i \subset X_i$, $i = 1, 2$. Entonces:*

1. *$int(A_1 \times A_2) = \overset{\circ}{A_1} \times \overset{\circ}{A_2}$.*
2. *$Fr(A_1 \times A_2) = (Fr(A_1) \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times Fr(A_2))$.*
3. *$\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.*

Demostración. La demostración de las tres propiedades es sencilla y sólo se prueba el tercer apartado. Se hace por doble inclusión. Sea $(x_1, x_2) \in \overline{A_1 \times A_2}$. Entonces para todo $U_1 \in \mathcal{U}^1_{x_1}$ y $U_2 \in \mathcal{U}^2_{x_2}$, y como $U_1 \times U_2 \in \mathcal{U}_{(x_1, x_2)}$, se deduce que $(U_1 \times U_2) \cap (A_1 \times A_2) \neq \emptyset$, es decir, $(U_1 \cap A_1) \times (U_2 \cap A_2) \neq \emptyset$, luego $U_1 \cap A_1 \neq \emptyset$ y $U_2 \cap A_2 \neq \emptyset$. Por tanto, $x_1 \in \overline{A_1}$ y $x_2 \in \overline{A_2}$, es decir, $(x_1, x_2) \in \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.

Por otra parte, sea $(x_1, x_2) \in \overline{A_1} \times \overline{A_2}$. Para probar que (x_1, x_2) es adherente a $A_1 \times A_2$, basta con demostrar que todo entorno de una base de entornos de (x_1, x_2) interseca al conjunto $A_1 \times A_2$. Elegimos como base de entornos la dada por $\mathcal{U}^1_{x_1} \times \mathcal{U}^2_{x_2}$. Para todo $U_i \in \mathcal{U}_{x_i}$ y como $x_i \in \overline{A_i}$, tenemos $U_i \cap A_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Por tanto,

$$(U_1 \times U_2) \cap (A_1 \times A_2) = (U_1 \cap A_1) \times (U_2 \times A_2) \neq \emptyset.$$

□

Esta proposición se puede leer para el interior (análogamente para la adherencia) como que "el interior del producto es el producto de los interiores".

Igual que ocurre con los conjuntos abiertos, un conjunto cerrado en un espacio topológico producto no es necesariamente un producto de cerrados. Así la diagonal $F = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ pero F no es producto de cerrados de $\mathbb{R}$ (ver ejercicio 1 de este capítulo). En el caso que tengamos un producto de cerrados, y como consecuencia de la proposición 5.1.5, se deduce:

Corolario 5.1.6. *Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) dos espacios topológicos. Si $F_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$, entonces $F_1 \times F_2$ es un conjunto cerrado en la topología producto.*

Volviendo a la definición de la topología producto, nos detenemos en la topología euclídea. Tomamos ahora $\mathbb{R}^{n+m}$ como conjunto, el cual se puede escribir como $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, donde estamos identificando de forma natural un par de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ como una $(n+m)$-upla de $\mathbb{R}^{n+m}$. En cada uno de los factores tomamos la topología usual, y tal como anticipamos en la introducción de este capítulo, es natural preguntarse si la topología producto que acabamos de definir es la topología euclídea de $\mathbb{R}^{n+m}$. En este momento necesitamos precisar la notación. Así, denotamos por τ_u^n la topología usual de $\mathbb{R}^n$, que está dada en la definición 1.2.18 gracias a la base

$$\beta_u^n = \{\Pi_{i=1}^n (a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Teorema 5.1.7. *Se consideran los espacios euclídeos $(\mathbb{R}^n, \tau_u^n)$ y $(\mathbb{R}^m, \tau_u^m)$. Entonces*

$$\tau_u^n \times \tau_u^m = \tau_u^{n+m}.$$

Podemos expresar el resultado del siguiente modo:

> *La topología producto de espacios euclídeos es la topología euclídea en el producto cartesiano.*

Demostración. La demostración es evidente por la igualdad

$$(\Pi_{i=1}^n (a_i, b_i)) \times (\Pi_{i=1}^m (a_{n+i}, b_{n+i})) = \Pi_{i=1}^{n+m} (a_i, b_i).$$

Entonces $\beta_u^n \times \beta_u^m = \beta_u^{n+m}$ y la proposición 5.1.3 finaliza la demostración. $\square$

A continuación estudiamos algunas topologías productos de topologías que han aparecido anteriormente.

EJEMPLO 5.1.8. 1. Se considera dos espacios topológicos discretos (X, τ_D) e (Y, τ_D'). Sea $x \in X$ e $y \in Y$. Como $\{\{x\}\}$ e $\{\{y\}\}$ son base de entornos de x e y, respectivamente, la proposición 5.1.3 asegura que $\{\{x\} \times \{y\}\} = \{\{(x, y)\}\}$ es una base de entornos de (x, y) en la topología producto. Usando la proposición 1.1.4, $\tau_D \times \tau_D'$ es la topología discreta en $X \times Y$. Por tanto:

> *El producto topológico de dos topologías discretas es la topología discreta en el producto cartesiano.*

2. Sean (X, τ_T) e (Y, τ'_T) dos espacios triviales. Debido a que $\tau_T \times \tau'_T = \{\emptyset, X \times Y\}$, la topología producto es la topología trivial de $X \times Y$. Así,

   El producto topológico de dos topologías triviales es la topología trivial en el producto cartesiano.

3. En el siguiente ejemplo vamos a estudiar si el producto topológico de topologías cofinitas es la topología cofinita en el producto cartesiano. Ya anticipamos que la respuesta es que, en general, no coinciden. Para ilustrar el problema, consideramos un ejemplo particular y así, sean $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$. Se denota por τ_{CF} y τ'_{CF} la topología de los complementos finitos en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, respectivamente. Veamos que

$$\tau'_{CF} \subset \tau_{CF} \times \tau_{CF},$$

   pero

$$\tau_{CF} \times \tau_{CF} \not\subset \tau'_{CF}.$$

   Sea $O \in \tau'_{CF}$, que será de la forma $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$. Para probar que $O \in \tau_{CF} \times \tau_{CF}$, vemos que O es entorno de todos sus puntos en la topología producto. Para ello probamos que para todo $(x, y) \in O$, existen $O_i \subset \tau_{CF}$ tal que $(x, y) \in O_1 \times O_2 \subset O$.

   a) Si $x \neq x_i$, $y \neq y_j$, para todo i y para todo $j \neq 1$, tomamos $O_1 = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $O_2 = \mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$.
   b) Supongamos que $x = x_i$ para algún i, y sin perder generalidad, suponemos que $x = x_1$. Entonces $y \neq y_1$.
      1) Si $y \neq y_j$ para todo j, tomamos $O_1 = \mathbb{R} \setminus \{x_2, \ldots, x_n\}$ y $O_2 = \mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$.
      2) Si $y = y_j$ para algún $j \in \{2, \ldots, n\}$, tomamos el mismo O_1 que antes, pero $O_2 = \{y_1, \ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_n\}$.
   c) Si $y = y_j$ para algún j, el razonamiento es como en el caso anterior.

   Sin embargo, la topología $\tau_{CF} \times \tau_{CF}$ no está incluida en τ'_{CF}. Así $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \in \tau_{CF} \times \tau_{CF}$ pero no es un abierto en τ'_{CF} ya que su complementario, a saber, la recta horizontal $\mathbb{R} \times \{0\}$, no es un conjunto finito. Por tanto,

   El producto topológico de dos topologías cofinitas es más fina que la topología cofinita en el producto cartesiano.

4. Analizamos ahora el problema análogo con la topología del punto incluido. Precisamos el problema. Sean X e Y dos conjuntos, $p \in X$, $q \in Y$ y τ_p y τ_q las correspondientes topologías del punto incluido. En $X \times Y$ fijamos el punto (p, q) y denotamos por $\tau_{(p,q)}$ la topología del punto incluido para el punto (p, q). Probamos

$$\tau_p \times \tau_q \subset \tau_{(p,q)}.$$

   Si $O \subset \tau_p$ y $O' \subset \tau_q$, entonces el conjunto $O \times O'$ contiene al punto (p, q), es decir, $O \times O' \in \tau_{(p,q)}$. Esto prueba que $\tau_p \times \tau_q \subset \tau_{(p,q)}$, donde aquí $\tau_p \times$

τ_q denota la base de la topología producto. Usando la proposición 1.2.13, concluimos que la topología producto $\tau_p \times \tau_q$ está incluida en $\tau_{(p,q)}$.
Sin embargo, la inclusión $\tau_{(p,q)} \subset \tau_p \times \tau_q$ no es cierta en general y mostramos un ejemplo. Tomamos $X = \{a, p\}$, $Y = X$ y $q = p$. Sea $A = \{(p,p),(a,a)\}$. Este conjunto contiene al punto (p,p), luego $A \in \tau_{(p,p)}$. Sin embargo $A \not\in \tau_p \times \tau_p$: si fuera así y como $(a,a) \in A$, existirían $O, O' \in \tau_p$ tal que $(a,a) \in O \times O' \subset A$. En particular $O = O' = \{a,p\}$ y así, $O \times O' = X \times X$: contradicción. Por tanto:

El producto topológico de las topologías de puntos incluidos es menos fina que la topología del punto incluido en el producto cartesiano.

Finalizamos la sección analizando la topología producto en dos situaciones naturales: al hacer el producto de espacios métricos y al hacer el producto de topologías relativas.

En primer lugar, probamos que el producto topológico de espacios métricos es metrizable. Recordemos que si (X_1, d_1) y (X_2, d_2) son dos espacios métricos, en el ejercicio 16 del capítulo 2 se definió la distancia producto d como

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2).$$

Proposición 5.1.9. *La topología producto de dos espacios métricos es la topología inducida por la distancia producto.*

Demostración. Utilizamos el criterio de Hausdorff para base de entornos (teorema 1.4.13). Sea $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$ y consideramos las bases de entornos de x_i en X_i dada por

$$\beta^i_{x_i} = \{B^i_r(x_i) : r > 0\}, \quad i = 1, 2,$$

y la base de entornos de (x_1,x_2) en $(X_1 \times X_2, d)$

$$\beta_{(x_1,x_2)} = \{B^d_r(x_1,x_2) : r > 0\}.$$

Por otro lado, la proposición 5.1.3 asegura que una base de entornos de (x_1,x_2) en la topología producto es $\beta^1_{x_1} \times \beta^2_{x_2}$.

1. Dada una bola $B^d_\delta(x_1,x_2)$, elegimos $\epsilon = \delta/2$ y probamos que

   $$B^1_\epsilon(x_1) \times B^2_\epsilon(x_2) \subset B^d_\delta(x_1,x_2).$$

   Efectivamente, si $(y_1,y_2) \in B^1_\epsilon(x_1) \times B^2_\epsilon(x_2)$,

   $$d((y_1,y_2),(x_1,x_2)) = d_1(y_1,x_1) + d_2(y_2,x_2) < \epsilon + \epsilon = \delta.$$

2. Sea ahora un entorno del punto (x_1, x_2) en la topología producto del tipo $B^1_\epsilon(x_1) \times B^2_\eta(x_2)$. Sea $\delta = \text{mín}\{\epsilon, \eta\}$ y veamos la inclusión

$$B^d_\delta(x_1, x_2) \subset B^1_\epsilon(x_1) \times B^2_\eta(x_2).$$

Si $(y_1, y_2) \in B^d_\delta(x, y)$,

$$d_1(y_1, x_1) \leq d((y_1, y_2), (x_1, x_2)) < \delta \leq \epsilon,$$

luego $y_1 \in B^1_\epsilon(x_1)$. Del mismo modo se prueba $y_2 \in B^2_\eta(x_2)$.

□

Estudiamos ahora la topología producto de topologías relativas. Se consideran dos espacios topológicos (X_i, τ_i) y sean $A_i \subset X_i$, $i = 1, 2$. En el conjunto $A_1 \times A_2$ existen las dos siguientes topologías: una es $\tau_{1|A_1} \times \tau_{2|A_2}$, es decir, el producto topológico de las topologías relativas; la otra es la topología relativa del producto topológico $X_1 \times X_2$, es decir, $(\tau_1 \times \tau_2)_{|A_1 \times A_2}$. El resultado siguiente asegura que ambas topologías son iguales.

Teorema 5.1.10. *Sean* (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) *dos espacios topológicos. Si* $A_i \subset X_i$, $i = 1, 2$, *entonces*

$$\tau_{1|A_1} \times \tau_{2|A_2} = (\tau_1 \times \tau_2)_{|A_1 \times A_2}.$$

Demostración. Probamos que las dos topologías tienen una misma base de topología, demostrando así que ambas topologías son las mismas por el teorema 1.2.7. Primero recordamos que

$$\tau_{i|A_i} = \{O_i \cap A_i : O_i \in \tau_i\}, \ i = 1, 2.$$

Usando la proposición 5.1.3, una base de $\tau_{1|A_1} \times \tau_{2|A_2}$ es

$$\{(O_1 \cap A_1) \times (O_2 \times A_2) : O_1 \subset \tau_1, O_2 \in \tau_2\}.$$

Pero

$$(O_1 \cap A_1) \times (O_2 \cap A_2) = (O_1 \times O_2) \cap (A_1 \times A_2). \tag{5.1}$$

Por otra parte, y por el teorema 1.5.3, una base de $(\tau_1 \times \tau_2)_{|A_1 \times A_2}$ se construye tomando una base de $\tau_1 \times \tau_2$ e intersecándola con el conjunto $A_1 \times A_2$. Si consideramos como base del producto topológico el producto $\tau_1 \times \tau_2$, tenemos

$$\{(O_1 \times O_2) \cap (A_1 \times A_2) : O_1 \times O_2 \in \tau_1 \times \tau_2\}.$$

Usando (5.1), esta familia de conjuntos coincide con la base de $\tau_{1|A_1} \times \tau_{2|A_2}$.
□

Este teorema se lee de la siguiente forma:

> *El producto topológico de topologías relativas es la topología relativa del producto topológico.*

5.2. Topología producto y continuidad

En esta sección estudiamos criterios de continuidad de aplicaciones que tienen por dominio o codominio un espacio topológico producto. Como ya se había anticipado en la introducción, empezamos probando que la aplicación proyección en cada uno de los factores es continua. Subrayemos que el concepto de aplicación proyección no es topológico sino conjuntista. Así, si X_1 y X_2 son dos conjuntos, se definen las aplicaciones proyecciones como las aplicaciones

$$p_i : X_1 \times X_2 \to X_i, \quad p_i(x_1, x_2) = x_i, \ i = 1, 2.$$

Proposición 5.2.1. *Las aplicaciones proyecciones*

$$p_i : (X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2) \to (X_i, \tau_i), \ i = 1, 2,$$

son continuas y abiertas.

Demostración. Hacemos sólamente la demostración para $i = 1$.

1. Sea $O_1 \in \tau_1$. Entonces
$$p_1^{-1}(O_1) = O_1 \times X_2 \in \tau_1 \times \tau_2,$$
luego p_1 es continua.

2. Para probar que la aplicación p_1 es abierta, y por el teorema 4.3.7, es suficiente con demostrar que la imagen de un elemento de la base $\tau_1 \times \tau_2$ es abierto en (X_1, τ_1). Sea pues $O_1 \times O_2 \in \tau_1 \times \tau_2$. Entonces es inmediato
$$p_1(O_1 \times O_2) = O_1 \in \tau_1.$$

$\square$

Las aplicaciones proyecciones no tienen porqué ser cerradas. Un ejemplo se encuentra en el mismo plano euclídeo: el conjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ es cerrado pero $p_1(H) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es un cerrado de $\mathbb{R}$.

Caracterizamos las funciones continuas que tienen por codominio un espacio producto. El siguiente resultado es una generalización de la proposición 3.2.3.

Teorema 5.2.2. *Una aplicación $f:(X,\tau)\to(X_1\times X_2,\tau_1\times\tau_2)$ es continua si y sólo si las aplicaciones $p_i\circ f$ son continuas, $i=1,2$.*

Demostración. Es evidente que si f es continua, entonces $p_i\circ f$ es continua al ser composición de dos aplicaciones continuas. Veamos el recíproco y usamos el teorema 3.1.4. Tomamos como base de $\tau_1\times\tau_2$, el propio producto $\tau_1\times\tau_2$ y probamos que $f^{-1}(O_1\times O_2)$ es un conjunto abierto de (X,τ). Basta con darse cuenta que

$$f^{-1}(O_1\times O_2)=((p_1\circ f)^{-1}(O_1\times O_2))\cap((p_2\circ f)^{-1}(O_1\times O_2)).$$

Ya que $(p_i\circ f)^{-1}(O_1\times O_2)\in\tau_i$ puesto que $p_i\circ f$ es continua, entonces $f^{-1}(O_1,\times O_2)$ es abierto por ser la intersección de dos conjuntos abiertos. □

Cada uno de las funciones $p_1\circ f$ y $p_2\circ f$ son llamadas las *aplicaciones coordenadas* de f y escribimos $p_i\circ f=f_i$ y $f=(f_1,f_2)$.

Corolario 5.2.3. *Sean dos aplicaciones $f_i:X\to X_i$, $i=1,2$. Definimos la evaluación de f_1 y f_2 como*

$$e(f_1,f_2):X\to X_1\times X_2,\quad e(f_1,f_2)(x)=(f_1(x),f_2(x)).$$

Si las aplicaciones f_1,f_2 son continuas, entonces $e(f_1,f_2)$ es continua.

Demostración. Observemos que el diagrama de la figura 5.3 es conmutativo. Entonces $p_i\circ e(f_1,f_2)=f_i$, $i=1,2$, y utilizamos el teorema anterior. □

Mostramos ejemplos de aplicaciones evaluaciones.

1. Sean (X,τ), (Y,τ') dos espacios topológicos e $y_0\in Y$. Definimos la aplicación constante

   $$f:(X,\tau)\to(Y,\tau'),\quad f(x)=y_0.$$

   Como esta aplicación es continua, entonces $e(1_X,f)$ también lo es. La imagen de $e(1_X,f)$ es $X\times\{y_0\}$.

2. Sea una aplicación continua $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$. Entonces

   $$e(1_X,f):(X,\tau)\to(X\times Y,\tau\times\tau'),\quad e(1_X,f)(x)=(x,f(x))$$

   es continua. Observemos que la imagen de $e(1_X,f)$ es el grafo de f.

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 & \\
X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, "e(f_1, f_2)"] \arrow[dr, "f_2"'] & & X_1 \times X_2 \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
 & X_2 &
\end{tikzcd}$$

Figura 5.3: La aplicación evaluación $e(f_1, f_2)$ de dos aplicaciones f_1 y f_2

3. Si (X, τ) es un espacio topológico, la aplicación

$$e(1_X, 1_X) : X \to X \times X, \quad e(1_X, 1_X)(x) = (x, x)$$

es continua. La imagen de $e(1_X, 1_X)$ es la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ de $X \times X$.

El teorema 5.2.2 caracteriza la continuidad de aplicaciones que llegan a un producto topológico, pero ¿es posible dar una caracterización análoga para aplicaciones con dominio en un espacio producto? Analizamos la siguiente situación. Consideramos una aplicación $f : X_1 \times X_2 \to Y$ y fijamos variables en el dominio de f del siguiente modo. Para todo $x_2 \in X_2$, se define la aplicación

$$f_{x_2} : X_1 \to Y, \quad f_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2).$$

Análogamente, para todo $x_1 \in X_1$, se define la aplicación

$$f^{x_1} : X_2 \to Y, \quad f^{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2).$$

Supongamos ahora que τ_1, τ_2 y τ' son topologías en X_1, X_2 e Y, respectivamente.

1. Si $f : (X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2) \to (Y, \tau')$ es continua, las familias de aplicaciones f_{x_2} y f^{x_1} son continuas para todo $x_i \in X_i$. Así $f_{x_2} = f \circ i$, donde $i : X_1 \to X_1 \times X_2$ está dada por $i(x_1) = (x_1, x_2)$. La aplicación i es continua puesto que $p_1 \circ i = 1_{X_1}$ y $p_2 \circ i$ es constante, y por tanto, f_{x_2} es continua. Del mismo modo, $f^{x_1} = f \circ j$ es continua, donde $j : X_2 \to X_1 \times X_2$ es la aplicación $j(x_2) = (x_1, x_2)$.

2. Sin embargo puede suceder que las aplicaciones f^{x_1} y f_{x_2} sean *todas* continuas sin que lo sea la aplicación f. Un ejemplo de ello es la función

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Las aplicaciones f_y y f^x son continuas para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$. Veámoslo para $f^x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y del mismo modo se hace para f_y. Si $x=0$, $f^0=0$, que es constante. Si $x\neq 0$, f^x viene dada por

$$f^x:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f^x(y)=\frac{xy}{x^2+y^2},$$

que también es continua por ser cociente de funciones polinómicas en y. En cambio, la aplicación f no es continua en $(0,0)$ puesto que $\{(1/n,1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(0,0)$, pero $\{f(1/n,1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}\to 1/2\neq f(0,0)$.

Teorema 5.2.4. *Sean (X_i,τ_i), (Y_i,τ_i'), $i=1,2$, cuatro espacios topológicos y $f_i:X_i\to Y_i$, $i=1,2$ dos aplicaciones. Se define la aplicación producto $f_1\times f_2:X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2$ como*

$$(f_1\times f_2)(x_1,x_2)=(f_1(x_1),f_2(x_2)).$$

1. *La aplicación $f_1\times f_2$ es continua si y sólo si f_1 y f_2 son continuas*
2. *La aplicación $f_1\times f_2$ es homeomorfismo si y sólo si f_1 y f_2 son homeomorfismos.*

Demostración. 1. Denotamos $p_i:X_1\times X_2\to X_i$ y $p_i':Y_1\times Y_2\to Y_i$ las aplicaciones proyecciones, $i=1,2$. Supongamos que $f_1\times f_2$ es continua. Observemos que la aplicación $f_i\circ p_i$ es continua pues

$$f_i\circ p_i=p_i'\circ(f_1\times f_2).$$

Véase la figura 5.4. Para probar que f_i es una aplicación continua consideramos un abierto $O_i'\in\tau_i'$. Por ser $f_i\circ p_i$ una aplicación continua, $(f_i\circ p_i)^{-1}(O_i')\in\tau_1\times\tau_2$. Pero

$$(f_i\circ p_i)^{-1}(O')=p_i^{-1}(f_i^{-1}(O_i')).$$

Ya que la aplicación p_i es abierta (proposición 5.2.1), tenemos

$$p_i(p_i^{-1}(f_i^{-1}(O_i')))\in\tau_i,$$

pero este conjunto es justamente $f_i^{-1}(O_i')$ por ser p_i sobreyectiva.

Para el recíproco, supongamos que f_1 y f_2 son continuas. Entonces las aplicaciones
$$p_i' \circ (f_1 \times f_2) = f_i \circ p_i, \quad i = 1, 2,$$
son continuas por ser composición de aplicaciones continuas. Por tanto $f_1 \times f_2$ es continua por el teorema 5.2.2.

2. Ya que las aplicaciones f_1 y f_2 son biyectivas, la aplicación $f_1 \times f_2$ es biyectiva y su inversa es $f_1^{-1} \times f_2^{-1}$. Esta aplicación es continua pues f_1^{-1} y f_2^{-1} son continuas por el apartado anterior.

□

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d, "p_i"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "p_i'"] \\
X_i \arrow[r, "f_i"] & Y_i
\end{tikzcd}$$

Figura 5.4: Esquema de las aplicaciones f_1, f_2 y $f_1 \times f_2$

De este teorema se desprende el siguiente resultado y que ya fue anticipado en la introducción de este capítulo:

Corolario 5.2.5. *Si* $(X_i, \tau_i) \cong (Y_i, \tau_i')$, $i = 1, 2$, *entonces*
$$(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2) \cong (Y_1 \times Y_2, \tau_1' \times \tau_2').$$

Ejemplo 5.2.6. Usamos el resultado anterior para probar que el subconjunto del plano dado por $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1)\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Observemos que $A = (0, 1) \times \mathbb{R}$. Como $(0, 1) \cong \mathbb{R}$, el corolario anterior dice $A \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Para acabar, nos detenemos un poco más. Denotamos τ_u^1 la topología euclídea de $\mathbb{R}$ y por τ_u^2 la de $\mathbb{R}^2$. El corolario 5.2.5 afirma exactamente que
$$(A = (0, 1) \times \mathbb{R}, \tau^1_{u|(0,1)} \times \tau_u^1) \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_u^1 \times \tau_u^1).$$
Por otro lado, el teorema 5.1.10 asegura que $(A, \tau^1_{u|(0,1)} \times \tau_u^1) = (A, (\tau_u^1 \times \tau_u^1)_{|A})$ y el teorema 5.1.7 dice que $\tau_u^1 \times \tau_u^1 = \tau_u^2$. Entonces tenemos $(A, \tau^2_{u|A}) \cong (\mathbb{R}^2, \tau_u^2)$, que es justamente lo que se quería probar.

Ejemplo 5.2.7. Definimos el *toro* $\mathbb{T}^2$ de dimensión 2 como el espacio producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, donde cada factor $\mathbb{S}^1$ tiene la topología usual como subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{T}^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 - 1\}.$$

Ya sabemos por los teoremas 5.1.7 y 5.1.10 que esta topología producto es la misma que la topología inducida de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Sabemos también que la aplicación inclusión de $i : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ es un embebimiento. Planteamos ahora el problema que apareció en el capítulo anterior y que en el presente caso se pregunta si es posible embeber el toro en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con $n < 4$. La respuesta es afirmativa.

Demostramos que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ se embebe en $\mathbb{R}^3$ probando que es homeomorfo al subconjunto T de $\mathbb{R}^3$ que aparece en la figura 5.5. Dicho conjunto se obtiene al girar respecto del eje z una circunferencia del plano xz. Concretamente este conjunto T se describe del siguiente modo. Denotamos por G el conjunto de giros de $\mathbb{R}^3$ respecto del eje z, es decir,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Consideramos la circunferencia C contenida en el plano xz de centro $(a, 0, 0)$ y radio r, con $a > r$ y que viene dada por

$$C = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - a)^2 + z^2 = r^2\}.$$

Ya sabemos por el corolario 4.2.3 que $C \cong \mathbb{S}^1$. El conjunto T se obtiene al hacer girar esta circunferencia respecto del eje z y así $T = \{\phi(C) : \phi \in G\}$. Si parametrizamos C como $C = \{(a, 0, 0) + r(\cos(t), 0, \sin(t)) : t \in \mathbb{R}\}$, entonces

$$\begin{aligned} T &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r\cos(t) \\ 0 \\ r\sin(t) \end{pmatrix} : \theta, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{((a + r\cos(t))\cos\theta, (a + r\cos(t))\sin\theta, r\sin(t)) : \theta, t \in \mathbb{R}\} \quad (5.2) \end{aligned}$$

El hecho de que $a > r$ hace que T no tenga auto-intersecciones. No es difícil probar que

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\},$$

en particular, T es un cerrado de $\mathbb{R}^3$. El conjunto T es parte de una familia más grande formada por las superficies de revolución del espacio euclídeo, de la que la esfera, el cilindro o el hiperboloide reglado son otros ejemplos.

Gracias a la expresión (5.2), se define

$$f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to T, \quad f(x, y, x', y') = ((a + rx)x', (a + rx)y', ry).$$

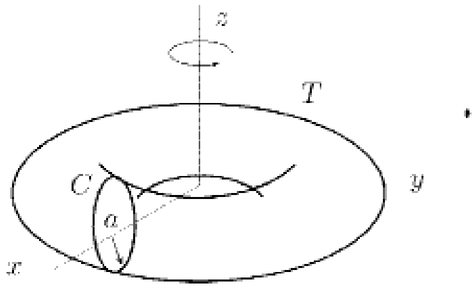


Figura 5.5: El toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ embebido en el espacio $\mathbb{R}^3$

Probamos que f es una aplicación continua y para ello usamos la proposición 4.2.5. Llamamos p'_i las proyecciones de $\mathbb{R}^3$ restringidas a T, por p_j las proyecciones de $\mathbb{R}^4$ y $q_j = p_{j|\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}$. Es fácil darse cuenta que

$$\begin{aligned} p'_1 \circ f &= (a + rq_1)q_3 \\ p'_2 \circ f &= (a + rq_1)q_4 \\ p'_3 \circ f &= rq_2. \end{aligned}$$

La aplicación inversa de f está dada por

$$f^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} - a}{r}, \frac{z}{r}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

De nuevo usamos la proposición 4.2.5 para estudiar la continuidad de f^{-1}. Si $\pi_i = p'_{i|T}$, entonces

$$\begin{aligned} p_1 \circ f^{-1} &= \frac{\sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2} - a}{r} \\ p_2 \circ f^{-1} &= \frac{\pi_3}{r} \\ p_3 \circ f^{-1} &= \frac{\pi_1}{\sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2}} \\ p_4 \circ f^{-1} &= \frac{\pi_2}{\sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, f es un homeomorfismo entre T y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Si i es la inclusión de T en $\mathbb{R}^3$, entonces $i \circ f$ es el embebimiento buscado.

También motivados por el ejemplo anterior, donde ya el espacio topológico de partida, a saber, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, ya estaba embebido en el espacio euclídeo de dimensión 4, nos preguntamos si es posible encontrar un embebimiento de un toro en $\mathbb{R}^2$ o incluso en $\mathbb{R}$. Intuitivamente, el toro es un *objeto bidimensional*.

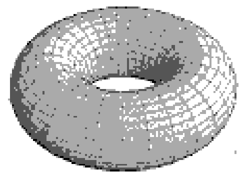


Figura 5.6: El toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ embebido en $\mathbb{R}^3$ como una superficie de revolución La figura está realizada con el programa Mathematica según la expresión (5.2), donde $a = 4$ y $r = 2$

lo que habitualmente entendemos por una superficie, del mismo modo que un plano afín o una esfera, y por tanto, uno podría pensar que sí se puede embeber en $\mathbb{R}^2$, aunque no en $\mathbb{R}$, ya que $\mathbb{R}$ es *unidimensional*. La respuesta es negativa en ambos casos aunque ahora no tenemos herramientas para responder satisfactoriamente a la pregunta planteada.

Vamos a proporcionar una condición suficiente para hallar un embebimiento de un espacio topológico en un espacio topológico producto. Previamente necesitamos las siguientes definiciones.

Definición 5.2.8. Sean (X, τ), $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ tres espacios topológicos y dos aplicaciones $f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i)$, $i = 1, 2$.

1. Se dice que $\{f_1, f_2\}$ separa puntos si para todo $x \neq y \in X$, existe $i_0 \in \{1, 2\}$ tal que $f_{i_0}(x) \neq f_{i_0}(y)$.
2. Se dice que $\{f_1, f_2\}$ separa puntos de cerrados si para todo conjunto cerrado $F \in \mathcal{F}$ de X y $x \notin F$, existe $i_0 \in \{1, 2\}$ tal que $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(F)}$

Lema 5.2.9 (de embebimiento). *Sean (X, τ), $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ tres espacios topológicos y dos aplicaciones continuas $f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i)$, $i = 1, 2$. Si $\{f_1, f_2\}$ separa puntos y separa puntos de cerrados, entonces la aplicación evaluación $e = e(f_1, f_2) : X \to X_1 \times X_2$ es un embebimiento.*

Demostración. Probamos las distintas condiciones para que $e(f_1, f_2)$ sea un embebimiento.

1. La aplicación e es inyectiva. Sean $x, y \in X$ y $x \neq y$. Como $\{f_1, f_2\}$ separa puntos, elegimos el índice $i_0 \in \{1,2\}$ tal que $f_{i_0}(x) \neq f_{i_0}(y)$. Por tanto $e(x) \neq e(y)$.

2. La aplicación e es continua. Es consecuencia del corolario 5.2.3 y de que las aplicaciones f_1 y f_2 son continuas.

3. La aplicación $e : (X,\tau) \to (e(X), (\tau_1 \times \tau_2)_{|e(X)})$ es un homeomorfismo. Es suficiente con probar que la aplicación e es abierta. Sea $O \in \tau$ y probamos que $e(O) \in (\tau_1 \times \tau_2)_{|e(X)}$. Para ello veamos que $e(O)$ es entorno de todos sus puntos. Sea $e(x) \in e(O)$ con $x \in O$. Entonces $x \notin X \setminus O$. Como $X \setminus O$ es un conjunto cerrado y $\{f_1, f_2\}$ separa puntos de cerrados, sea el índice $i_0 \in \{1,2\}$ tal que $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(X \setminus O)}$. Por tanto
$$f_{i_0}(x) \in X_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(X \setminus O)}.$$
Llamamos $O_{i_0}(x) = X_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(X \setminus O)}$, el cual es un abierto y satisface $O_{i_0}(x) \subset X_{i_0} \setminus f_{i_0}(X \setminus O)$. Si $i : e(X) \hookrightarrow X_1 \times X_2$ es la aplicación inclusión,
$$(p_{i_0} \circ i)^{-1}(O_{i_0}(x)) = i^{-1}(p_{i_0}^{-1}(O_{i_0}(x)) \in (\tau_1 \times \tau_2)_{|e(X)}.$$
Denotamos $G(x) = (p_{i_0} \circ i)^{-1}(O_{i_0}(x))$. Probamos que $e(x) \in G(x) \subset e(O)$.

   a) Sabemos que $e(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Como $(p_{i_0} \circ i)(e(x)) = f_{i_0}(x) \in O_{i_0}(x)$, entonces $e(x) \in G(x)$.

   b) Probamos que $G(x) \subset e(O)$. Ya que $e : X \to e(X)$ es biyectiva, es suficiente con probar que $e^{-1}(G(x)) \subset O$. Pero
$$\begin{aligned} e^{-1}(G(x)) &= e^{-1}(i^{-1}(p_{i_0}^{-1}(O_{i_0}(x)))) = f_{i_0}^{-1}(O_{i_0}(x)) \\ &\subset X \setminus f_{i_0}^{-1}(f_{i_0}(X \setminus O)) \subset O. \end{aligned}$$

   Ya que $G(x)$ es un abierto de $e(X)$, entonces $e(O)$ es un entorno de $e(x)$.

□

Corolario 5.2.10. *Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) dos espacios topológicos. Entonces (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) se embeben en $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ del siguiente modo: si $a_i \in X_i$, $i = 1, 2$, entonces $X_1 \cong X_1 \times \{a_2\}$ y $X_2 \cong \{a_1\} \times X_2$.*

Demostración. Sea $f_1 = 1_{X_1}$ y $f_2 : X_1 \to X_2$ la aplicación $f_2(x) = a_2$, donde $a_2 \in X_2$. Entonces $\{f_1, f_2\}$ son aplicaciones continuas y ya que f_1 es la identidad, $\{f_2, f_2\}$ separa puntos y separa puntos de cerrados. Por el lema de embebimiento, $X_1 \simeq e(X_1) = X_1 \times \{a_2\} \hookrightarrow X_1 \times X_2$. Del mismo modo, $X_2 \simeq \{a_1\} \times X_2 \hookrightarrow X_1 \times X_2$. $\square$

Corolario 5.2.11. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua. Entonces (X, τ) se embebe en $(X \times Y, \tau \times \tau')$ como el grafo de la aplicación f.*

Demostración. Usamos el lema de embebimiento con $f_1 = 1_X$ y $f_2 = f$. De nuevo,

$$X \cong e(1_X, f)(X) = G(f) = \{x, f(x)) : x \in X\}.$$

$\square$

Corolario 5.2.12. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces (X, τ) se embebe en $(X \times X, \tau \times \tau)$ como la diagonal $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ de $X \times X$.*

Demostración. Aplicamos el lema de embebimiento con $f_1 = f_2 = 1_X$. $\square$

Si usamos cada uno de los tres corolarios a la recta euclídea $X = \mathbb{R}$, hemos probado que $\mathbb{R}$ se embebe en $\mathbb{R}^2$ de tres formas diferentes: como la recta $\mathbb{R} \times \{a_2\}$, como el grafo de una aplicación continua $y = f(x)$ y como la diagonal de $\mathbb{R}^2$: ver figura 5.7.

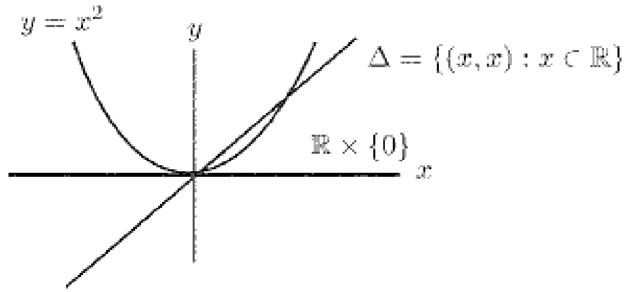


Figura 5.7: Tres ejemplos de embebimientos de la recta euclídea $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$: como $\mathbb{R} \times \{0\}$, como el grafo de la función $f(x) = x^2$ y como la diagonal Δ de $\mathbb{R}^2$

Nota 5.2.13. Los tres corolarios anteriores son aplicaciones del lema de embebimiento. Sin embargo uno puede probar directamente los tres resultados sin usar dicho lema. Concretamente, no es difícil demostrar para cada uno de los casos, que las siguientes aplicaciones φ son embebimientos:

1. Si $a_2 \in X_2$, $\varphi : X_1 \to X_1 \times X_2$, $\varphi(x_1) = (x_1, a_2)$.
2. Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua,
$$\varphi : X \to X \times Y, \quad \varphi(x) = (x, f(x)).$$
3. La aplicación $\varphi : X \to X \times X$ definida por $\varphi(x) = (x, x)$.

Nota 5.2.14. También se obtienen los corolarios 5.2.10 y 5.2.12 como consecuencia del corolario 5.2.11. Para el primero, consideramos la aplicación
$$f : X_1 \to X_2, \quad f(x_1) = a_2.$$
Esta aplicación es continua por ser constante y por tanto, $X_1 \cong G(f) = X_1 \times \{a_2\}$.

Para la diagonal, consideramos la aplicación identidad $1_X : (X, \tau) \to (X, \tau)$, que es una aplicación continua. Entonces $X \cong G(1_X) = \Delta$.

5.3. Topología inicial y producto topológico generalizado

En la sección anterior hemos definido el producto topológico de dos espacios. Del mismo modo se define el *producto topológico de una familia finita* de espacios topológicos $\{(X_i, \tau_i) : 1 \leq i \leq n\}$ de la siguiente forma: la topología tiene como base a
$$\tau_1 \times \ldots \times \tau_n = \{O_1 \times \ldots \times O_n : O_i \in \tau_i, 1 \leq i \leq n\}.$$
Sin mucho esfuerzo, los resultados obtenidos para el producto de dos espacios topológicos se pueden extender de forma natural a un producto topológico finito.

Para generalizar el producto de dos espacios topológicos al producto de una familia *arbitraria* de espacios, vamos a obtener una caracterización del producto topológico que permitirá establecer el concepto de topología inicial (definición 5.3.2). Gracias a este concepto se definirá el producto topológico generalizado (definición 5.3.8). Al final de la sección probaremos en el teorema 5.3.12 que, bajo unas hipótesis débiles, toda topología inicial es una topología producto.

Proposición 5.3.1. *Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) dos espacios topológicos y las correspondientes aplicaciones proyecciones p_i, $i = 1, 2$.*

1. *El conjunto $\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(O_i) : O_i \in \tau, i = 1, 2\}$ es una subbase de $\tau_1 \times \tau_2$.*
2. *La topología producto $\tau_1 \times \tau_2$ es la topología menos fina existente $X_1 \times X_2$ que hace continua a las proyecciones.*

Demostración. 1. Es evidente que $\mathcal{S} \subset \tau_1 \times \tau_2$, luego $\tau(\mathcal{S}) \subset \tau_1 \times \tau_2$, donde aquí $\tau_1 \times \tau_2$ denota la topología producto. Por otra parte, para todo $O_1 \times O_2 \in \tau_1 \times \tau_2$,

$$O_1 \times O_2 = (O_1 \times X_2) \cap (X_1 \times O_2) = p_1^{-1}(O_1) \cap p_2^{-1}(O_2) \in \tau(\mathcal{S}),$$

luego la base $\tau_1 \times \tau_2$ de la topología producto está incluida en $\tau(\mathcal{S})$. De aquí que toda la topología producto está incluida en $\tau(\mathcal{S})$.

2. Ya se probó que las aplicaciones proyecciones $p_i : (X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2) \to (X_i, \tau_i)$, $i = 1, 2$ son continuas. Sea ahora una topología τ en $X_1 \times X_2$ que haga continuas a las proyecciones. Entonces para todo $O_i \in \tau_i$, $p_i^{-1}(O_i) \in \tau$. Por tanto, para todo $O_1 \times O_2 \in \tau_1 \times \tau_2$,

$$O_1 \times O_2 = p_1^{-1}(O_1) \cap p_2^{-1}(O_2) \in \tau,$$

es decir, $\tau_1 \times \tau_2 \subset \tau$.

□

Definición 5.3.2. Sea una familia $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ de espacios topológicos y X un conjunto. Se considera una familia de aplicaciones $\{f_i : X \to X_i : i \in I\}$. Se llama topología inicial en X inducida por $\{f_i\}_{i \in I}$ a la topología en X que tiene por subbase $\mathcal{S} = \{f_i^{-1}(O_i) : O_i \in \tau_i, i \in I\}$.

Denotamos la topología inicial por $\tau(f_i)$. Observemos que esta notación no refleja que en el codominio de cada aplicación f_i hay un espacio topológico y que en la definición de $\mathcal{S}$ hay que considerar los abiertos de (X_i, τ_i). De la proposición 5.3.1 se deduce:

Corolario 5.3.3. *La topología producto $\tau_1 \times \tau_2$ de dos espacios topológicos (X_1, τ_1) y (X, τ_2) es la topología inicial $\tau(p_i)$, donde $p_i : X_1 \times X_2 \to (X_i, \tau_i)$ son las aplicaciones proyecciones.*

Extendemos el teorema 5.2.2 y la proposición 5.3.1.

Proposición 5.3.4. *Con la notación usada previamente, tenemos:*

1. *Las aplicaciones $f_i : (X, \tau(f_i)) \to (X_i, \tau_i)$ son continuas.*

2. *La topología inicial $\tau(f_i)$ es la topología menos fina que hace continuas a las aplicaciones f_i.*

3. *Si $f : (Y, \tau') \to (X, \tau(f_i))$ es una aplicación, entonces f es continua si y sólo si $f_i \circ f : (X, \tau(f_i)) \to (X_i, \tau_i)$ es continua para todo $i \in I$.*

Demostración. 1. Por la definición de la subbase $\mathcal{S}$ que define $\tau(f_i)$, la aplicación f_i es continua.

2. Si $\tilde{\tau}$ es una topología en X tal que $f_i : (X, \tilde{\tau}) \to (X_i, \tau_i)$ es una aplicación continua para todo $i \in I$, entonces $f_i^{-1}(O_i) \in \tilde{\tau}$, $\forall O_i \subset \tau_i$. Por tanto, $\mathcal{S} \subset \tilde{\tau}$, luego $\tau(\mathcal{S}) = \tau(f_i) \subset \tilde{\tau}$.

3. Si f es continua, entonces $f_i \circ f$ es continua al ser composición de aplicaciones continuas.

   Probamos el recíproco. Supongamos que $f_i \circ f$ es continua para todo $i \in I$. Sea $y \in Y$ y $W \in \mathcal{U}_{f(y)}$. Por definición de la topología inicial, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(y) \in f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_k}^{-1}(O_{i_k}) \subset W$$

   donde $O_{i_j} \in \tau_{i_j}$. Como las aplicaciones $f_i \circ f$ son continuas, existe $V_{i_j} \in \mathcal{U}'_y$ para cada $j = 1, \ldots, k$, tal que $(f_{i_j} \circ f)(V_{i_j}) \subset O_{i_j}$. Sea $V = V_{i_1} \cap \ldots \cap V_{i_k}$. Entonces $V \in \mathcal{U}_y$ al ser una intersección finita de entornos y además $(f_{i_j} \circ f)(V) \subset O_{i_j}$. Luego para cada $j = 1, \ldots, k$,

$$f(V) \subset f_{i_j}^{-1}\left(f_{i_j}(f(V))\right) \subset f_{i_j}^{-1}(O_{i_j})$$

   y por tanto

$$f(V) \subset \bigcap_{j=1}^{n} f_{i_j}(O_{i_j}) \subset W.$$

$\square$

En el caso de que $card(I) = 1$, se deduce (ver ejercicio 29 del capítulo 1):

Corolario 5.3.5. *Sea X un conjunto, un espacio topológico (Y, τ') y una aplicación $f : X \to (Y, \tau')$. Entonces la topología inicial en X inducida por f es*

$$\tau_f = \{f^{-1}(O') : O' \subset \tau'\}.$$

Demostración. Sólo hay que darse cuenta de que la subbase $\mathcal{S}$ que define la topología inicial $\tau(f)$ es τ_f. Por tanto, $\tau_f \subset \tau(\mathcal{S})$. Pero $f : (X, \tau_f) \to (Y, \tau')$ es continua, luego $\tau_f \supset \tau(\mathcal{S})$ por la proposición 5.3.4. □

La topología relativa de un subconjunto de un espacio topológico también es una topología inicial.

Proposición 5.3.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $\tau_{|A}$ es la topología inicial en A para la inclusión $i : A \hookrightarrow (X, \tau)$.*

Demostración. Es consecuencia de las proposiciones 3.1.12 y 5.3.4. □

Una vez que hemos introducido la topología inicial, estamos en condiciones de definir el producto topológico generalizado. En primer lugar recordamos el concepto conjuntista de producto cartesiano.

Definición 5.3.7. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos. El producto cartesiano de $\{X_i : i \in I\}$ es el conjunto de aplicaciones

$$\Pi_{i\in I} X_i = \left\{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i : x(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}.$$

Usualmente denotamos el elemento x como (x_i), donde $x_i = x(i) \in X_i$. Para cada $j \in I$, definimos las aplicaciones proyecciones como

$$p_j : \Pi_{i\in I} X_i \to X_j, \quad p_j((x_i)) = x_j.$$

Hagamos las siguientes observaciones sobre el producto cartesiano de conjuntos.

1. Los conjuntos X_i no son vacíos si y sólo si el producto $\Pi_{i\in I} X_i$ no es vacío. Esto es una consecuencia del axioma de elección.
2. Supongamos que el conjunto de índices I es finito. Sin perder generalidad, suponemos que $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces el espacio producto lo denotamos como hasta ahora venía siendo, es decir, por $X_1 \times \ldots \times X_n$, donde identificamos la aplicación (x_i) con la n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$.
3. Si para todo i, j, $X_i = X_j = X$, el espacio producto lo denotamos por X^I, que no es más que el conjunto de las aplicaciones de I en X. Un caso particular de éste es cuando $I = \mathbb{N}$, obteniendo el conjunto de sucesiones de elementos de X, denotando dicho conjunto por X^ω.

Gracias a la proposición 5.3.1, generalizamos la topología producto de dos espacios al producto de una familia arbitraria de espacios topológicos.

Definición 5.3.8. Sea $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Se llama topología producto (generalizada) en $\Pi_{i\in I} X_i$ a la topología inicial para la familia de las proyecciones $\{p_i : i \in I\}$.

Denotamos la topología producto por $\Pi_{i\in I}\tau_i$, y definimos $(\Pi_{i\in I} X_i, \Pi_{i\in I}\tau_i)$ el *producto topológico generalizado* de $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$. Por definición de la topología inicial, una subbase de la topología $\Pi_{i\in I}\tau_i$ es

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(O_i) : O_i \in \tau_i, i \in I\}$$

y una base es

$$\beta = \{p_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \ldots \cap p_{i_k}^{-1}(O_{i_k}) : O_{i_j} \in \tau_{i_j}, i_j \in I, k \in \mathbb{N}\}.$$

Ahora bien,

$$p_{i_j}^{-1}(O_{i_j}) = \Pi_{i\in I} G_i, \text{ con } G_i = \begin{cases} X_i & i \neq i_j \\ O_{i_j} & i = i_j, \end{cases}$$

luego

$$p_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \ldots \cap p_{i_k}^{-1}(O_{i_k}) = \Pi_{i\in I} O_i, \text{ con } \begin{cases} O_i = X_i & i \neq i_j \\ O_i = O_{i_j} & i = i_j. \end{cases}$$

Por tanto una base de la topología producto es

$$\beta = \{\Pi_{i\in I} O_i : O_i \in \tau_i, \text{ y, excepto un número finito de índices, } O_i = X_i\}.$$

El próximo resultado es inmediato.

Proposición 5.3.9. *Sea $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos.*

1. *Si β_i es una base de topología para τ_i para todo $i \in I$, entonces*

$$\Pi_{i\in I}\beta_i = \{\Pi_{i\in I} B_i : B_i \in \beta_i, B_j = X_j, j \notin J, J \subset I \text{ finito}\}$$

es una base de de la topología producto $\Pi_{i\in I}\tau_i$.

2. *Si para cada $i \in I$, $\beta^i_{x_i}$ es una base de entornos del punto x_i en (X_i, τ_i), entonces*

$$\Pi_{i\in I}\beta^i_{x_i} = \{\Pi_i V_i : V_i \in \beta^i_{x_i}, V_j = X_j, j \notin J, J \subset I \text{ finito}\}$$

es una base de entornos del punto (x_i).

3. *Sea una familia de aplicaciones* $\{h_i : (X_i, \tau_i) \to (Y_i, \tau_i') : i \in I\}$. *Se define la aplicación producto* $\Pi_{i\in I} h_i : \Pi_I X_i \to \Pi_I Y_i$ *como*

$$(\Pi_{i\in I} h_i)((x_i)) = (h_i(x_i)).$$

Entonces $\Pi_I h_i$ *es continua si y sólamente si la aplicación* h_i *es continua para todo* $i \in I$.

Estudiamos ahora el lema de embebimiento para una familia arbitraria de espacios topológicos. Primero relacionamos los conceptos de "separar puntos de cerrados" y el de topología inicial.

Proposición 5.3.10. *Consideramos* $\{f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i) : i \in I\}$ *una familia de aplicaciones continuas. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La familia* $\{f_i : i \in I\}$ *separa puntos de cerrados.*
2. *La familia de subconjuntos* $\{f_i^{-1}(O_i) : i \in I,\ O_i \in \tau_i\}$ *es base de la topología* τ.

Demostración. (1) $\to$ (2). Como las aplicaciones f_i son continuas, $f_i^{-1}(O_i) \in \tau$. Sea ahora $O \in \tau$ y $x \in O$. Entonces $x \notin X \setminus O$, que es un conjunto cerrado. Por tanto, existe $i_0 \in I$ tal que $f_{i_0}(x) \in X_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(X \setminus O)}$. El conjunto $O_{i_0}(x) = X_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(X \setminus O)} \in \tau_{i_0}$. Además $x \in f_{i_0}^{-1}(O_{i_0}(x)) \subset O$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $F \in \mathcal{F}$ y $x \notin F$. Por definición de base de topología, y como $X \setminus F \in \tau$, existe $i_0 \in I$ y existe $O_{i_0} \in \tau_{i_0}$ tal que $x \in f_{i_0}^{-1}(O_{i_0}) \subset X \setminus F$. Veamos que $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(F)}$. Como $O_{i_0} \in \mathcal{U}_{f_{i_0}(x)}$, si existe $z \in O_{i_0} \cap f_{i_0}(F)$, existe $y \in F$ tal que $f_{i_0}(y) = z$, luego $y \in f_{i_0}^{-1}(O_{i_0})$, lo cual no es cierto. □

Corolario 5.3.11. *Si* $\{f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i) : i \in I\}$ *es una familia de aplicaciones continuas que separa puntos de cerrados, entonces* τ *coincide con la topología inicial para la familia* $\{f_i : i \in I\}$.

Demostración. La familia $\beta = \{f_i^{-1}(O_i) : i \in I,\ O_i \subset \tau_i\}$ es base de τ y por tanto, subbase. □

Se prueba que, con mínimas hipótesis, toda topología inicial es una topología producto, y por tanto, en cierto sentido, el recíproco de la definición 5.3.8.

Teorema 5.3.12 (de embebimiento). *Sea una familia de aplicaciones continuas $\{f_i : (X,\tau) \to (X_i,\tau_i) : i \in I\}$, donde τ es la topología inicial $\tau(f_i)$ para las aplicaciones $\{f_i\}_{i\in I}$. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ separa puntos, entonces la aplicación evaluación*

$$e : (X,\tau) \to (\Pi_I X_i, \Pi_I \tau_i), \quad e(x) = (f_i(x))$$

es un embebimiento. En particular, la topología inicial $\tau(f_i)$ es homeomorfa a un subespacio topológico de un producto generalizado.

Demostración. La demostración es parecida a la del lema 5.2.9. Del mismo modo que allí, ahora la aplicación evaluación es continua e inyectiva. Por tanto basta con probar que es abierta. Probamos que si $O_i \in \tau_i$, entonces $e(f_i^{-1}(O_i)) \in (\Pi_I \tau_i)_{|e(X)}$. Ya que $f_i = p_i \circ i \circ e$, entonces

$$f_i^{-1}(O_i) = e^{-1}(i^{-1}(p_i^{-1}(O_i))),$$

luego $e(f_i^{-1}(O_i)) = i^{-1}(p_i^{-1}(O_i)) \in (\Pi_I \tau_i)\big|_{e(X)}$.

Sea ahora $O \in \tau$ y $x \in O$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_k}^{-1}(O_{i_k}) \subset O.$$

Como $e : X \to e(X)$ es una aplicación biyectiva, se obtiene

$$e(x) \in \bigcap_{j=1}^{k} e(f_{i_j}^{-1}(O_{i_j})) \subset e(O),$$

y dicha intersección es un abierto en la topología $\Pi_I \tau_{i|e(X)}$ □

Una vez llegados a este punto, recordamos que hemos definido la topología producto generalizada a partir de la siguiente caracterización de la topología producto de dos espacios como una topología inicial: es la topología menos fina que hace continuas las proyecciones (proposición 5.3.1). Sin embargo, uno podía haber tomado al principio de esta sección otro camino diferente y definir la topología como la que tiene por base el producto de abiertos de cada uno de los espacios, tal como se hizo en la propia definición 5.1.2. Esto da pie al siguiente concepto.

Definición 5.3.13. Dada una familia de espacios topológicos $\{(X_i,\tau_i) : i \in I\}$, se llama topología caja a la que tiene por base

$$\beta_c = \{\Pi_{i\in I} O_i : O_i \in \tau_i, i \in I\}.$$

Denotamos τ_c dicha topología. Hagamos varias observaciones:

1. La familia β_c es una base de una topología pues la intersección de dos elementos de β_c es otro elemento de β_c.
2. Si I es finito, la topología caja τ_c coincide con la topología producto.
3. En el caso de que el conjunto de índices I sea arbitrario, tenemos la inclusión
$$\Pi_{i\in I}\tau_i \subset \tau_c,$$
pues los elementos de la subbase estándar de $\Pi_{i\in I}\tau_i$ dada en la proposición 5.3.9 son elementos de β_c.
4. La otra inclusión no es cierta en general y así, la topología producto generalizada es menos fina que la topología caja.
5. Las aplicaciones proyecciones $p_j : (\Pi_{i\in I}X_i, \tau_c) \to (X_j, \tau_j)$ son continuas pues $p_j^{-1}(O_j) \in \Pi_{i\in I}\tau_i \subset \tau_c$.

En general, la topología caja no tiene las mismas propiedades que la topología producto generalizada. Esto sucede, por ejemplo, con el apartado 3 de la proposición 5.3.4, que es falso como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.3.14. Se considera $\mathbb{R}^\omega = \{h : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : h \text{ es aplicación}\}$ el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega, \quad f(x)(n) = x,$$
es decir, $f(x) = (x)$ es la sucesión constante x: $(x)_n = x$. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología euclídea τ_u.

1. La aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}^\omega, \Pi_I\tau_u)$ es continua. Para ello componemos con las proyecciones p_n. Observemos que $p_n \circ f = 1_\mathbb{R}$, y por tanto, la aplicación f es continua por la proposición 5.3.4.
2. La aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}^\omega, \tau_c)$ no es continua. Para ello tomamos la aplicación cero $h_0 \in \mathbb{R}^\omega$ dada por $h_0(n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Probamos que f no es continua en $x = 0$. Observemos que $f(0) = h_0$. Sea $O = \Pi_{n\in\mathbb{N}}(-1/n, 1/n)$, que es un entorno de h_0 en la topología τ_c. Si f fuera continua en 0, existiría $r > 0$ tal que $f((-r, r)) \subset O$. Entonces
$$p_n \circ f((-r, r)) \subset p_n(O) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$$
para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es falso: dado $r/2$,
$$p_n \circ f(r/2) = \left(\frac{r}{2}\right)_n = \frac{r}{2} \notin (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$$
si $n > 2/r$.

Otro ejemplo más de que la topología caja no se comporta del mismo modo que la topología producto generalizada es el siguiente (ver también 6.3.6).

EJEMPLO 5.3.15. En el ejercicio 23 del final de este capítulo, se prueba que $(\mathbb{R}^\omega, \Pi\tau_u)$ es metrizable. Sin embargo, $(\mathbb{R}^\omega, \tau_c)$ no es metrizable. Para ello vamos a probar que el teorema 2.4.8 no es cierto en este espacio. Sea el subconjunto A formado por las sucesiones cuyos términos son todos positivos, es decir, $A = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n > 0, n \in \mathbb{N}\}$. Sea $0 = \{0\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión nula.

1. $0 \in \overline{A}$. Tomamos un entorno básico de 0 del tipo $V = \Pi_{n\in\mathbb{N}}(-\epsilon_n, \epsilon_n)$, con $\epsilon_n > 0$. Entonces la sucesión $\{\epsilon_n/2\}_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece tanto a V como a A, luego $A \cap V \neq \emptyset$.
2. Si el espacio es metrizable, el teorema 2.4.8 asegura que existe $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}} \to 0$. Denotamos $a_m = \{x_n^m\}_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Consideramos el entorno de $0 \in \mathbb{R}^\omega$ dado por $U = \Pi_{n\in\mathbb{N}}(-x_n^n, x_n^n)$. Entonces $a_m \notin U$ para todo m: si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \in U$, entonces, $a_m^m = x_m^m \in (-x_m^m, x_m^m)$, lo cual es falso.

5.4. Grupo topológico

Acabamos este capítulo estudiando grupos topológicos. Un grupo topológico no va a ser más que un espacio topológico (G, τ) con una estructura de grupo en G de forma que la operación del grupo es continua. Como dicha operación está definida en un producto cartesiano, es este capítulo sobre la topología producto el marco adecuado para definir este concepto.

La característica más importante de un grupo topológico es que la estructura algebraica hace que, como espacio topológico, haya una mayor riqueza de propiedades. Por ejemplo, y se verá a lo largo de toda la sección, el estudio de la topología del grupo se centra en gran medida en el estudio de la topología alrededor de sólo de un elemento concreto, como puede ser en el elemento neutro. Por otra parte, espacios que nos son familiares son grupos topológicos, como son la circunferencia, el espacio euclídeo, el toro, etc. También algunos espacios de matrices son grupos topológicos. Los espacios de matrices actúan algebraicamente sobre los espacios euclídeos, originando nuevos espacios topológicos con interesantes propiedades. Se estudiarán estos espacios de forma más amplia en los capítulos 9 y 10.

Definición 5.4.1. Sea G un conjunto con una operación $\cdot$ de grupo y una topología τ. Se dice que es un grupo topológico, y se denota por $(G, \cdot, \tau)$, si las operaciones producto e inversa de grupo son continuas:

$$\varphi : (G \times G, \tau \times \tau) \to (G, \tau), \quad \varphi(x, y) = x \cdot y.$$

$$\theta : (G, \tau) \to (G, \tau), \quad \theta(x) = x^{-1}.$$

Como θ es biyectiva con $\theta^{-1} = \theta$, entonces θ es un homeomorfismo. También es inmediato el siguiente resultado:

Proposición 5.4.2. *La continuidad de las aplicaciones φ y θ es equivalente a la de la aplicación*

$$\psi : (G \times G, \tau \times \tau) \to (G, \tau), \; \psi(x, y) = x \cdot y^{-1}.$$

A continuación mostramos una serie de ejemplos de grupos topológicos.

Ejemplo 5.4.3.

1. Si a un grupo cualquiera $(G, \cdot)$ le dotamos de la topología discreta entonces se forma un grupo topológico. De esta forma, el grupo de los números enteros $(\mathbb{Z}, +)$ con la topología inducida de $\mathbb{R}$ es un grupo topológico, ya que hereda la topología discreta.
2. Sea un grupo topológico $(G, \cdot, \tau)$ y $H < G$ un subgrupo de G. Entonces $(H, \cdot, \tau_{|H})$ es un grupo topológico. Esto es consecuencia de restringir la aplicación ψ a $H \times H$ y usar el teorema 5.1.10.
3. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con la suma de vectores como operación de grupo y con la topología euclídea es un grupo topológico. Efectivamente, como consecuencia del teorema 5.1.7, la aplicación ψ se escribe como $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $\psi(x, y) = x - y$. Si p_i y p_i' son las proyecciones en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{2n}$ respectivamente, entonces $p_i \circ \psi = p_i' - p_{n+i}'$ para todo $1 \leq i \leq n$, probando la continuidad de ψ.
4. Se considera el conjunto $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ de los números complejos no nulos. Este conjunto es un grupo con la multiplicación usual de números complejos. Entonces $(\mathbb{C}^*, \cdot, \tau_u)$ es un grupo topológico, donde estamos identificando $\mathbb{C}$ con el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Las operaciones φ y θ se escriben como

$$\varphi((x, y), (x', y')) = (xx' - yy', xy' + yx')$$

$$\theta(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right),$$

   y ambas son continuas.
5. La circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$, con la topología usual, y la operación anterior del producto de números complejos, es un grupo topológico al ser subgrupo de $\mathbb{C}^*$.

6. Consideramos el conjunto de matrices reales de orden $n \times m$ y que denotamos por $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Este conjunto es un grupo respecto de la suma de matrices. Además es biyectivo de forma natural con el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{nm}$. Concretamente, una matriz se considera como el vector de $\mathbb{R}^{nm}$ determinado al escribir de forma seguida y una tras otra, todas las filas de la matriz. Se dota al espacio de matrices de la topología dada por el teorema 1.1.3. Ya que la suma de matrices se convierte en la suma de vectores de $\mathbb{R}^{nm}$ gracias a la identificación con $\mathbb{R}^{nm}$, el espacio $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ es un grupo topológico. Cuando $n = m$, denotaremos $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ por $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$.
7. Podemos extender el ejemplo de las matrices $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ de forma más general. Sea $(G', \cdot, \tau')$ un grupo topológico, G un conjunto y $f : G \to G'$ una aplicación biyectiva. Definimos en G una operación binaria para que G sea un grupo y f un isomorfismo de grupos. Para ello, si $x, y \in G$, definimos φ como
$$\varphi(x,y) = f^{-1}(\varphi'(f(x), f(y))).$$
La aplicación inversa $\theta : G \to G$ viene dada por
$$\theta(x) = f^{-1}(\theta'(f(x))).$$
Consideramos en G la topología $\tau'(f^{-1})$ del teorema 1.1.3 del capítulo 1. Entonces $(G, \cdot, \tau'(f^{-1}))$ es un grupo topológico pues
$$\varphi = f^{-1} \circ \varphi' \circ (f \times f), \quad \theta = f^{-1} \circ \theta' \circ f,$$
y las aplicaciones f, f^{-1} y $f \times f$ son continuas.

Ejemplo 5.4.4. Se considera el grupo lineal general
$$\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$
formado por las matrices cuadradas reales de orden n y determinante no nulo. Este conjunto es un grupo con el producto de matrices. Se le dota de la topología inducida de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ y probamos que $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ es un grupo topológico.

1. Se considera la aplicación producto de matrices
$$P : \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{R})$$
$$P(A, B) = AB. \tag{5.3}$$
Probamos que esta aplicación es continua. Con la identificación natural $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{nm}$, basta con componer con las proyecciones proyecciones de $p_{ij} : \mathbb{R}^{nr} \to \mathbb{R}$. Entonces
$$\begin{aligned} p_{ij} \circ P(A,B) &= (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}(A) p_{kj}(B) \\ &= \sum_{k=1}^{m} (p_{ik} \circ p_1)(p_{kj} \circ p_2)(A, B). \end{aligned}$$

Aquí p_1 y p_2 denotan las correspondientes proyecciones del espacio topológico producto $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{R})$. Por tanto, $p_{ij} \circ P$ es continua para todo i, j.

Para probar que la aplicación producto de matrices $P : Gl(n,\mathbb{R}) \times Gl(n,\mathbb{R}) \to Gl(n,\mathbb{R})$ es continua, basta darse cuenta que dicha aplicación no es más que la restricción de la aplicación P definida en (5.3) a $Gl(n,\mathbb{R}) \times Gl(n,\mathbb{R})$.

2. Demostramos que la aplicación inversa $\theta : Gl(n,\mathbb{R}) \to Gl(n,\mathbb{R})$ es continua en una serie de etapas.

   a) Probamos que la aplicación determinante $\det : \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua. Por la definición de determinante,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{sgn(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{sgn(\sigma)} (p_{1\sigma(1)} \cdots p_{n\sigma(n)})(A), \end{aligned}$$

   donde S_n es el grupo simétrico de orden n y $sgn(\sigma)$ es la signatura de la permutación $\sigma \in S_n$. Por tanto,

$$\det = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{sgn(\sigma)} p_{1\sigma(1)} \cdots p_{n\sigma(n)},$$

   que es continua.

   b) La aplicación traspuesta $t : \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ dada por $t(A) = A^t$ es continua. Basta darse cuenta que $p_{ij} \circ t = p_{ji}$.

   c) La aplicación $* : \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$, que lleva una matriz A en su adjunta A^* es continua. Si $i < j$,

$$\begin{aligned} p_{ij}(A^*) &= (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \\ &= (-1)^{i+j} \sum_{\tau\in S_{n-1}} a_{1\tau(1)} \cdots \\ &\quad a_{i-1\tau(i-1)} a_{i+1\tau(i)} \cdots a_{j\tau(j-1)} a_{j+1\tau(j+1)} \cdots a_{n\tau(n)} \\ &= (-1)^{i+j} \sum_{\tau\in S_{n-1}} \Big(p_{1\tau(1)} \cdots p_{i-1\tau(i-1)} \cdots p_{i+1\tau(i)} \\ &\quad \cdots p_{j\tau(j-1)} p_{j+1\tau(j+1)} \cdots p_{n\tau(n)}\Big)(A). \end{aligned}$$

Probamos finalmente que la aplicación inversa $\theta(A) = A^{-1}$ es continua. Para ello basta darse cuenta que

$$\theta(A) = \frac{1}{\det(A)} (t \circ *)(A).$$

Ejemplo 5.4.5. Consideramos los siguientes subgrupos de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$:

1. El *grupo ortogonal* $O(n) = \{A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) : AA^t = A^tA = I\}$.
2. El *grupo especial ortogonal* $SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$.
3. El *grupo lineal especial* $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.

Todos estos espacios son grupos topológicos.

EJEMPLO 5.4.6. Probamos que $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ es un conjunto abierto de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ y que en $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, los subespacios $O(n)$, $SO(n)$ y $SL(n, \mathbb{R})$ son conjuntos cerrados.

1. El espacio $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ es un conjunto abierto de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ ya que $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un abierto y la aplicación *det* es continua.
2. Se define $T : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ por $T(A) = AA^t$. Esta aplicación es continua ya que
$$(p_{ij} \circ T)(A) = (\sum_{k=1}^{n} p_{ik}p_{kj})(A).$$
También puede observarse que $T = t \circ P \circ F$. Aquí $t : Gl(n, \mathbb{R}) \to Gl(n, \mathbb{R})$ es la aplicación traspuesta, que también es continua; la aplicación $F : Gl(n, \mathbb{R}) \to Gl(n, \mathbb{R}) \times Gl(n, \mathbb{R})$, $F(A) = (A, A)$ y; P es la aplicación producto definida en (5.3).
Ya que $O(n) = T^{-1}(\{I\})$ e $\{I\} \in \mathbb{R}^{n^2}$ es un cerrado, el grupo ortogonal es un conjunto cerrado al ser un punto en un espacio métrico (corolario 2.2.12).
3. De forma análoga, $SL(n, \mathbb{R})$ es cerrado, pues coincide con el conjunto $\det^{-1}(\{1\})$.
4. El espacio $SO(n)$ es cerrado, pues $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ es la intersección de dos conjuntos cerrados.

Sean dos grupos G_1 y G_2. En el producto cartesiano $G_1 \times G_2$ existe una operación natural de grupo dada por
$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2). \tag{5.4}$$
Decimos que $G_1 \times G_2$ es el grupo producto de G_1 por G_2. El elemento neutro en este grupo es (e_1, e_2), donde e_i es el elemento neutro de G_i y si $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$, el inverso es (x_1^{-1}, x_2^{-1}). El siguiente resultado dice que el grupo producto y el producto topológico se llevan bien.

Proposición 5.4.7. *Si $(G_1, \cdot, \tau_1)$ y $(G_2, \cdot, \tau_2)$ son dos grupos topológicos, entonces $(G_1 \times G_2, \cdot, \tau_1 \times \tau_2)$ es un grupo topológico.*

Demostración. Denotamos por $\varphi : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2$ y $\theta : G_1$ $G_2 \to G_1 \times G_2$ las operaciones producto e inversa en $G_1 \times G_2$, respectivament Para probar que φ es continua, componemos con las proyecciones. Entonc

$$(p_i \circ \varphi)((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_i y_i = \varphi_i \circ e(p_i \circ \pi_1, p_i \circ \pi_2)((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

donde

$$\pi_1 : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2,\ \pi_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2)$$

$$\pi_2 : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2,\ \pi_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (y_1, y_2).$$

Esto prueba la continuidad φ. Para la aplicación inversa θ tenemos

$$p_i \circ \theta - \theta_i \circ p_i,\ i = 1, 2,$$

donde θ y θ_i son las operaciones inversas en $G_1 \times G_2$ y G_i, respectivamer

Corolario 5.4.8. *El toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es un grupo topológico.*

Proposición 5.4.9. *Sea (G, τ) un grupo topológico y $a \in G$. Se definen traslaciones a izquierda y las traslaciones a derecha respecto del element como*

$$l_a : G \to G, \qquad l_a(x) = ax$$

$$r_a : G \to G, \qquad r_a(x) = xa,$$

respectivamente. Entonces las traslaciones son homeomorfismos.

Demostración. La demostración sólo se realiza para las traslaciones a izqu da. Se define

$$f : G \to G \times G,\quad f(x) = (a, x).$$

Esta aplicación es continua pues $p_1 \circ f$ es constante y $p_2 \circ f = 1_G$. Com traslación a izquierda l_a se expresa como $l_a = \varphi \circ f$, entonces l_a es contin Por otra parte, la aplicación inversa de l_a es la traslación a izquierda $l_{\cdot}$ luego también es continua.

Corolario 5.4.10. *Denotamos por $\mathcal{U}$ el sistema de entornos del elem neutro e en un grupo topológico G. Entonces el sistema de entornos $\mathcal{U}_a$ $a \in G$ coincide con*

$$\mathcal{U}_a = a\mathcal{U} = \{aU : U \in \mathcal{U}\} = \mathcal{U}a - \{Ua : U \in \mathcal{U}\}.$$

Demostración. Ya que l_a es un homeomorfismo y $l_a(e) = a$, el corolario 4.1.6 asegura que $\mathcal{U}_a = \{l_a(U) : U \in \mathcal{U}\} = \{aU : U \in \mathcal{U}\}$. De la misma forma y razonando con las traslaciones a derecha r_a, tenemos $\mathcal{U}_a = \{r_a(U) : U \in \mathcal{U}\} = \{Ua : U \in \mathcal{U}\}$. $\square$

Proposición 5.4.11. *Sea e el elemento neutro de un grupo topológico G.*

1. *Para todo $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $VV \subset U$.*
2. *Para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$.*
3. *Para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $VV^{-1} \subset U$.*
4. *Para todo $U \in \mathcal{U}$ y para todo $a \in G$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $aVa^{-1} \subset U$.*
5. *Para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$, $V = V^{-1}$, tal que $V \subset U$.*

Demostración. 1. Consideramos la aplicación producto $\varphi : G \times G \to G$ en el grupo. Ya que $\varphi(e, e) = e$, si $U \in \mathcal{U}$, la continuidad de φ y las proposiciones 3.1.2 y 5.1.3 aseguran que existen $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$ tal que $\varphi(V_1, V_2) \subset U$. Entonces $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}_y$ satisface

$$VV = \varphi(V, V) \subset \varphi(V_1, V_2) \subset U.$$

2. Sea $\theta : G \to G$ la aplicación inversa en el grupo. Ya que $\theta(e) = e$ y θ es una aplicación continua, dado $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $\theta(V) = V^{-1} \subset U$.

3. La demostración es análoga a 1), pero usando la aplicación $\psi(x, y) = xy^{-1}$ y que $\psi(e, e) = e$.

4. Se define la aplicación $\eta_a : G \to G$, $\eta_a(x) = axa^{-1}$. Esta aplicación es un homeomorfismo, pues $\eta_a = l_a \circ r_{a^{-1}}$. La continuidad de la aplicación η_a y que $\eta_a(e) = e$ implica que dado $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $\eta_a(V) \subset U$, es decir, $aVa^{-1} \subset U$.

5. Sea $V = U \cap U^{-1}$. Entonces $V = V^{-1}$ y V es entorno de e, pues $U^{-1} = \theta(U) \in \mathcal{U}$.

$\square$

Corolario 5.4.12. *En un grupo topológico $(G, \cdot, \tau)$, la familia de entornos simétricos de e dada por*

$$\{U \in \mathcal{U} : U = U^{-1}\}$$

es una base de entornos de e.

El siguiente teorema sobre subgrupos es una muestra de cómo influye la estructura algebraica de un grupo topológico.

Teorema 5.4.13. *Sea $H < G$ un subgrupo de un grupo topológico G.*

1. *La adherencia $\overline{H}$ es un subgrupo topológico de G.*
2. *Si $H \lhd G$ es un subgrupo normal de G, también lo es $\overline{H}$.*
3. *Si H es un conjunto abierto, también es un conjunto cerrado.*

Demostración. 1. Sea la aplicación $\psi : G \times G \to G$ dada por $\psi(x, y) = xy^{-1}$. Para probar que $\overline{H}$ es un grupo, hay que demostrar que $\psi(\overline{H} \times \overline{H}) \subset \overline{H}$. Ya que ψ es continua y H es un subgrupo, el teorema 3.1.4 y la proposición 5.1.5 implican

$$\psi(\overline{H} \times \overline{H}) = \psi(\overline{H \times H}) \subset \overline{\psi(H \times H)} \subset \overline{H}.$$

2. Para probar que $\overline{H} \lhd G$, hay que demostrar que para todo $a \in G$, $a\overline{H}a^{-1} \subset \overline{H}$. Ya que la aplicación η_a definida en la proposición anterior es un homeomorfismo, y usando que $aHa^{-1} \subset H$ porque H es un subgrupo normal, tenemos

$$a\overline{H}a^{-1} = \eta_a(\overline{H}) = \overline{\eta_a(H)} = \overline{aHa^{-1}} \subset \overline{H},$$

donde hemos usado de nuevo el teorema 3.1.4.

3. En G se define la relación de equivalencia

$$x \sim y \quad \text{si } y^{-1}x \in H.$$

La clase de un elemento $x \in G$ es $xH = \{xh : h \in H\}$. Esta relación de equivalencia define una partición en G. Separamos la clase del elemento neutro, que es H, de la de los demás elementos:

$$G = \bigcup_{a \in G} aH = H \bigcup \left(\bigcup_{a \notin H} aH\right).$$

Ya que H es abierto, aH también es abierto pues $aH = l_a(H)$ y l_a es un homeomorfismo. Por tanto $\cup_{a \notin H} aH \in \tau$ por ser unión de conjuntos abiertos. Como $H = G \setminus \cup_{a \notin H} aH$, entonces H también es cerrado.

$\square$

El siguiente resultado es un claro ejemplo de cómo el estudio topológico alrededor de un punto de un grupo topológico es suficiente para el estudio de la topología del grupo. Concretamente, y para homomorfismos de grupos, las traslaciones a izquierda y derecha permiten estudiar la continuidad en cualquier punto de G en uno concreto.

Teorema 5.4.14. *Sea $f : (G, \tau) \to (G', \tau')$ un homomorfismo de grupos entre dos grupos topológicos. Si f es continua en el elemento neutro de G, entonces f es continua en G.*

Demostración. Sea $a \in G$ y veamos que f es continua en a. Dado $W' \in \mathcal{U}_{f(a)}$, sea un entorno V' del elemento neutro e' de G', tal que $W' = f(a)V'$, a saber, $V' = l^{-1}_{f(a)}(W)$. Por la continuidad en e, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f(U) \subset V'$. Entonces $aU = l_a(U) \in \mathcal{U}_a$ y, al ser f un homomorfismo de grupos,

$$f(aU) = f(a)f(U) \subset f(a)V' \subset W'.$$

□

Acabamos la sección recordando otro concepto algebraico. Una *acción algebraica* de un grupo G sobre un conjunto X es una aplicación

$$\Phi : G \times X \to X, \quad \Phi(g, x) = gx,$$

que satisface las dos siguientes propiedades:

1. $\Phi(e, x) = x$ para todo $x \in X$.
2. $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

A partir de ahora, escribiremos gx en vez de $\Phi(g, x)$. Dada una acción algebraica Φ, cada elemento $x \in X$ tiene asociado dos conjuntos:

- El *subgrupo de isotropía de x* (o *estabilizador de x*) es el conjunto $H_x = \{g \in G : gx = x\}$.
- La *órbita de x* es el conjunto $Gx = \{gx : g \in G\}$.

Si ahora consideramos topologías tanto en el grupo G como en el conjunto X, y suponemos que en el producto cartesiano $G \times X$ tomamos la topología producto, entonces extendemos la definición de acción algebraica del siguiente modo.

Definición 5.4.15. Sea $(G, \cdot, \tau')$ un grupo topológico y (X, τ) un espacio topológico. Una acción topológica de G sobre X es una acción algebraica $\Phi : (G \times X, \tau' \times \tau) \to (X, \tau)$ que también es continua.

Se muestra una serie de acciones continuas que serán usadas posteriormente en el capítulo 10.

EJEMPLO 5.4.16.

1. Se hace actuar $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^n$ como

$$\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (A, x) \longmapsto Ax.$$

Dos casos particularmente interesantes de esta acción son los siguientes:

a) Restringimos a $O(n+1)$ y $\mathbb{S}^n$, es decir,

$$O(n+1) \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \quad (A, x) \longmapsto Ax.$$

Esta acción está bien definida, pues $O(n+1)$ representa las isometrías de $\mathbb{R}^{n+1}$ y por lo tanto deja invariante, como conjunto, a $\mathbb{S}^n$.

b) Del mismo modo, tenemos la acción

$$SO(n+1) \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \quad (A, x) \longmapsto Ax.$$

2. Sea G un grupo finito con la topología discreta actuando algebraicamente sobre un espacio topológico (X, τ) mediante una acción $\Phi : G \times X \to X$. Para cada $g \in G$, se define

$$\Phi_g : X \to X, \quad \Phi_g(x) = gx.$$

Probamos que si las aplicaciones Φ_g son continuas para todo $g \in G$, entonces la acción algebraica Φ es una acción topológica.
Efectivamente, si $O \in \tau$,

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(O) &= \{(g, x) \in G \times X : gx \in O\} \\ &= \{(g, x) \in G \times X : \Phi_g(x) \in O\} \\ &= \bigcup_{g \in G} (\{g\} \times \Phi_g^{-1}(O)). \end{aligned}$$

Cada elemento $\{g\} \times \Phi_g^{-1}(O)$ es abierto en la topología producto de $G \times X$ pues $\{g\}$ es abierto y $\Phi_g^{-1}(O) \in \tau$ ya que Φ_g es continua. Por tanto $\Phi^{-1}(O)$ es abierto al ser unión de conjuntos abiertos.
Dos ejemplos de esta situación son los siguientes:

a) Consideramos $\mathbb{Z}$ como grupo y con su topología usual, que coincide con la discreta, y hacemos actuar $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}^2$ mediante

$$\Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \Phi(m, (x, y)) = (x + m, y).$$

Aquí la aplicación Φ_m no es más que una traslación del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$:

$$\Phi_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \Phi_m((x,y)) = (x,y) + (m,0).$$

b) Parecido al ejemplo anterior es considerar $G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ actuando sobre $\mathbb{R}^2$ del siguiente modo:

$$\Phi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \Phi((m,n),(x,y)) = (m+x, n+y).$$

De nuevo, si $n,m \in \mathbb{Z}$, la aplicación $\Phi_{(n,m)}$ es la traslación del plano euclídeo con vector de traslación (n,m).

3. Un caso particular del anterior es el siguiente. Sea un espacio topológico (X,τ) y un homeomorfismo $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ de orden finito, es decir, existe un menor número $p\in\mathbb{N}$ tal que $f^p = f\circ \overset{p}{\cdots} \circ f = 1_X$. Se define una acción algebraica $\Phi : \mathbb{Z}_p \times X \to X$ dada por

$$\Phi([n],x) = \left(f\circ \overset{n}{\cdots} \circ f\right)(x) = f^n(x).$$

Es fácil probar que está bien definida y que es una acción algebraica. Consideramos en $\mathbb{Z}_p$ la topología discreta. Entonces dicha acción es topológica, pues $\Phi_{[n]} = f^n$.
Un ejemplo de este contexto es el siguiente. La aplicación antípoda en la esfera $\mathbb{S}^n$, es decir,

$$A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \quad A(x) = -x,$$

es de orden 2. Por tanto $\mathbb{Z}_2$ actúa continuamente sobre $\mathbb{S}^n$.

5.5. Ejercicios

1. Probar que una bola de $\mathbb{R}^2$ no es el producto cartesiano de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Lo mismo para $F = \{(x,x)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$.

2. Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ una aplicación entre dos espacios topológicos y sea el grafo de f

$$G(f) = \{(x,f(x))\in X\times Y : y = f(x)\}.$$

Probar que son equivalentes los siguientes enunciados:

a) La aplicación f es continua.

b) La aplicación $x \longmapsto (x,f(x))$ de X en $G(f)$ es un homeomorfismo.

c) La aplicación $\phi : X \to X \times Y$ dada por $\phi(x) = (x, f(x))$ es un embebimiento.

3. En $\mathbb{R}^2$ se define el orden lexicográfico como

$$(x,y) \leq (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x < x' \\ x = x', y \leq y' \end{cases}$$

Se considera la topología del orden τ_o definida en el ejemplo 1.2.20. Esta topología se llama la topología del orden lexicográfico. Probar que dicha topología coincide con la topología $\tau_D \times \tau_u$.

4. Sean los espacios $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y $(\mathbb{R}, \tau_{CF})$ y el producto topológico $(\mathbb{R}^2, \tau_u \times \tau_{CF})$. Comparar con la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Estudiar el interior y la adherencia de $\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Estudiar si la aplicación

$$f : (\mathbb{R}^2, \tau_u) \to (\mathbb{R}^2, \tau_u \times \tau_{CF}), \quad f(x,y) = (y,x)$$

es continua y abierta.

5. Sean (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) dos espacios topológicos y $A \subset X_1 \times X_2$ un conjunto abierto (resp. cerrado) en la topología producto. Para cada $x_1 \in X_1$ se define

$$A_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A\}.$$

Probar que A_{x_1} es un conjunto abierto (resp. cerrado) de X_2. Dar ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que A no es abierto (resp. cerrado) pero A_x sí es abierto (resp. cerrado) para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Sean (X, τ) e (Y, τ') dos espacios topológicos. Supongamos que ambos satisfacen alguna de las siguientes propiedades: T_0, primer axioma de numerabilidad, segundo axioma de numerabilidad. Estudiar si $(X \times Y, \tau \times \tau')$ satisface las correspondientes propiedades que tienen X e Y.

7. Sea $(X, \tau(f_i))$ un espacio topológico, donde $\tau(f_i)$ es la topología inicial para una familia de aplicaciones $\{f_i : X \to (X_i, \tau_i) : i \in I\}$. Sea $A \subset X$. Probar que $\tau_{|A}$ es la topología inicial en A para la familia $\{f_{i|A} : A \to (X_i, \tau_i)\}$.

8. Se define $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \tau_{CF})$ por $f(x) = E[x]$, donde $E[x]$ denota la parte entera de x. Caracterizar los abiertos y cerrados para la topología inicial. Calcular el interior y adherencia del intervalo $[-1/2, 3/2]$.

9. Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto finito con la topología discreta y $\{f_i : (Y, \tau') \to (Y, \tau') : 1 \leq i < n\}$ una familia de aplicaciones continuas. Probar que

$$\phi : (X \times Y, \tau_D \times \tau') \to (Y, \tau'), \quad \phi(x_i, y) = f_i(y)$$

es continua.

10. Sean dos aplicaciones abiertas $f_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, 2$ (resp. cerradas). Probar que $f_1 \times f_2$ es una aplicación abierta (resp. cerrada) y estudiar si es cierto el recíproco.

11. Probar que $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ es homeomorfo a $(X_2 \times X_1, \tau_2 \times \tau_1)$

12. Sea X un conjunto, $p \subset X$ un punto fijo y τ_i la topología del punto incluido para p. Estudiar si las aplicaciones proyecciones de $(X \times X, \tau_i \times \tau_i)$ en (X, τ_i) son cerradas. Se considera la aplicación

$$f : (X \times X, \tau_i \times \tau_i) \to (X, \tau_i), \quad f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x, y \neq p \\ p & \text{si } x \text{ ó } y \text{ es } p. \end{cases}$$

Estudiar en qué puntos f es continua.

13. Si τ_S es la topología de Sorgenfrey, probar que $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ hereda la topología discreta de la topología producto $\tau_S \times \tau_S$.

14. Se considera $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_d)$, donde τ_S y τ_d son las topologías de Sorgenfrey y a derechas, respectivamente. Probar que la diagonal $A = \{(x, x) : x \subset \mathbb{R}\}$ con la topología inducida es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_S)$.

15. Sea $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y $A_i \subset X_i$ para cada $i \in I$. Probar

$$\Pi_{i \in I}(\tau_{i|A_i}) = (\Pi_{i \in I}\tau_i)_{|\Pi_{i \in I} A_i}.$$

16. Sean dos familias de espacios topológicos $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ e $\{(Y_i, \tau_i') : i \in I\}$ y una familia de aplicaciones $\{f_i : X_i \to Y_i : i \in I\}$. Probar que Πf_i es un homeomorfismo si y sólamente se da las dos siguientes condiciones:

    a) Para cada $i \in I$, f_i es un homeomorfismo local.

    b) Existe $J \subset I$ finito tal que para cada $i \notin J$, f_i es un homeomorfismo.

17. Probar que $\mathbb{R}$ con la topología inicial determinada por las aplicaciones

$$f_1, f_2 : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \tau_S), \quad f_1(x) = x + 1, f_2(x) = -x$$

coincide con la topología discreta.

18. Se consideran las aplicaciones

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to (\mathbb{R}, \tau_u), \quad f_1(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to (\mathbb{S}^1, \tau_{CF}), \quad f_2(x,y) = \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Describir una base de la topología inicial y compararla con la usual. Hallar la adherencia y el interior de los conjuntos

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\} \cup \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2\}.$$

19. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y $A_i \subset X_i$, para todo i. Estudiar si son ciertas las siguientes igualdades:

$$\Pi_{i\in I}\overline{A_i} = \overline{\Pi_{i\in I}A_i}, \quad \Pi_{i\in I}\mathrm{int}(A_i) = \mathrm{int}(\Pi_{i\in I}A_i).$$

20. Sea $\{(X_i, \tau_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $J \subset I$ un conjunto finito. Sea $a = (a_i) \in \Pi_{i\in I}$ un punto fijo. Probar que

$$B = \Pi_{i\in I}Y_i, \text{ con } Y_i = \begin{cases} \{a_i\} & \text{si } i \notin J \\ X_i & \text{si } i \in J \end{cases}$$

es homeomorfo a $\Pi_{j\in J}X_j$.

21. Se considera $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto de aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sea la topología producto, tomando en cada $\mathbb{R}$ la topología usual. Sea una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X y $f \in X$. Probar que $f_n \to f$ en la topología producto si y sólo si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f.

22. Probar que la primera acción algebraica del ejemplo 5.4.16 es continua.

23. Sea $\{(X_n, d_n) : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios métricos. Probar que $\Pi_{n\in\mathbb{N}}X_n$ es un espacio metrizable. *Sugerencia*: suponer, sin perder generalidad, que para todo d_n, se tiene $d_n < 1$, y definir

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}.$$

24. Construir un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^1$ y $SO(2)$ que sea un isomorfismo de grupos.

25. Demostrar la proposición 5.4.7.

26. Calcular los subgrupos de isotropía y las órbitas de las acciones topológicas definidas en el ejemplo 5.4.16.

27. Sea G un grupo abeliano. Para cada $A \subset G$, se define

$$r(A) = \{x \in G : \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \in A\}.$$

Probar que en G existe una única topología τ donde la familia de cerrados es $\mathcal{F} = \{A \subset G : r(A) = A\}$. Demostrar que la unión arbitraria de cerrados es cerrado y caracterizar los abiertos. Probar que G, con dicha topología, no es un grupo topológico.

Capítulo 6

Conexión

El primer invariante topológico que vamos a estudiar con profundidad es la conexión. Recordemos de la introducción de este libro que la idea intuitiva de espacio conexo era que estuviera formado por un único *trozo*. Precisaremos en este capítulo esta idea en términos topológicos. La sencillez del concepto de conexión no le resta importancia ya que será una herramienta potente que permitirá clasificar espacios topológicos y así se usará, por ejemplo, para probar que la recta euclídea $\mathbb{R}$ no es homeomorfa al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$. Del mismo modo, probaremos que la circunferencia $\mathbb{S}^1$ tampoco es homeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^n$ con $n > 1$.

Más importante aún es su utilidad en muchos campos de las matemáticas, donde a veces es importante conocer si cierta ecuación definida en un espacio abstracto tiene o no tiene solución. El ejemplo más sencillo, pero a la vez fundamental e ilustrativo, es el teorema de Bolzano (teorema 6.1.14) y que permite establecer si ecuaciones formadas por funciones continuas y definidas en espacios conexos tienen solución. Si volvemos a la figura 1 de la introducción, la particularidad esencial allí para que haya solución es que, por un lado, la aplicación es continua, y por otro, que un intervalo de $\mathbb{R}$ es conexo.

En este capítulo se analizará también las propiedades más importantes sobre la conexión y se abordará los conceptos de conexión local y conexión por arcos. Este último concepto es el punto de arranque de la rama de la topología llamada *topología algebraica* y que proseguiremos en el capítulo 11.

6.1. Espacio conexo

Desde un punto de vista conjuntista, todo conjunto X puede expresarse como unión de dos conjuntos disjuntos: basta con tomar cualquier subconjunto suyo A y escribir $X = A \cup (X \setminus A)$. Si ahora (X, τ) es un espacio topológico, se tiene que imponer condiciones topológicas sobre el conjunto A. La más natural es que tanto A como su complementario sean conjuntos abiertos.

Definición 6.1.1. Un espacio topológico (X, τ) es conexo si la única partición por conjuntos abiertos de X es la partición trivial $\{\emptyset, X\}$. Un subconjunto A de X se llama conexo si $(A, \tau_{|A})$ es un espacio topológico conexo.

Dicho de otro modo, (X, τ) no es conexo si existen $A, B \in \tau$, $A \neq \emptyset, X$, tal que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Ya que los conjuntos cerrados son complementarios de conjuntos abiertos, la definición de un espacio conexo es equivalente a decir que *la única partición por conjuntos cerrados del espacio topológico es la partición trivial*.

Proposición 6.1.2. *La conexión es un invariante topológico.*

Demostración. Sean dos espacios topológicos (X, τ) e (Y, τ') y un homeomorfismo $f : (Y, \tau') \to (X, \tau)$ entre ellos. Supongamos que X es conexo y probamos que Y también lo es. Sean A' y B' dos subconjuntos abiertos disjuntos de Y tales que $Y = A' \cup B'$. Usando que f es biyectiva y abierta, $\{f(A'), f(B')\}$ constituye una partición por subconjuntos abiertos de X. Como este espacio es conexo, $\{f(A'), f(B')\} = \{\emptyset, X\}$ y por tanto, $\{A', B'\} = \{\emptyset, Y\}$. □

Establecemos varias caracterizaciones de conjunto conexo.

Proposición 6.1.3. *Sea un espacio topológico (X, τ). Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El espacio topológico (X, τ) es conexo.*
2. *Los únicos subconjuntos de (X, τ) que son a la vez abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X.*
3. *Toda aplicación continua de (X, τ) en un espacio topológico discreto es constante.*
4. *No existen aplicaciones continuas y sobreyectivas de (X, τ) en $\{0, 1\}$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $A \subset X$ un conjunto que es abierto y cerrado a la vez. Sea el conjunto abierto $B = X \setminus A$. Entonces A y B forman una partición por conjuntos abiertos de X. Ya que (X, τ) es conexo, $\{A, B\}$ $\{\emptyset, X\}$, luego $A = \emptyset$ o $A = X$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea una aplicación continua $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_D)$. Si esta aplicación no es constante, existen $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Como Y tiene la topología discreta, $\{y_1\} \in \tau_D \cap \mathcal{F}_D$ y por tanto $f^{-1}(\{y_1\})$ es abierto y cerrado en (X, τ). Sin embargo $f^{-1}(\{y_1\}) \neq \emptyset$ pues $y_1 \in \mathrm{Im}(f)$ y $f^{-1}(\{y_1\}) \neq X$ ya que $y_2 \in \mathrm{Im}(f)$, llegando a una contradicción.

(3) $\Rightarrow$ (4). La topología de $\{0, 1\}$ es la discreta y por el apartado anterior, una aplicación continua de X en $\{0, 1\}$ es constante y por tanto no es sobreyectiva.

(4) $\Rightarrow$ (1). Si (X, τ) no es conexo, existen $A, B \in \tau$ tales que $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y A y B no son triviales. Se define

$$f : (X, \tau) \to \{0, 1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Esta aplicación es sobreyectiva y continua por el teorema 3.1.15 y no es constante pues $A, B \neq \emptyset$: contradicción. $\square$

Estudiamos la conexión de algunos espacios topológicos conocidos.

Ejemplo 6.1.4.

1. Un espacio topológico con la topología trivial es conexo pues por la propia definición de la topología trivial, los únicos conjuntos abiertos son el conjunto vacío y el conjunto total.
2. Sea (X, τ_D) un espacio topológico discreto. Entonces este espacio es conexo sólamente si X está formado por un único elemento (y en tal caso, coincide con la topología trivial). Efectivamente, si existen dos elementos distintos x e y, $\{x\}$ es un conjunto abierto y cerrado a la vez, y no es un subconjunto trivial.
3. Se considera la topología de los complementos finitos (X, τ_{CF}). Si $A \subset X$ es un conjunto no trivial abierto y cerrado, $X \setminus A$ es un conjunto finito por ser A abierto y A también es finito por ser cerrado. Por tanto $X = (X - A) \cup A$ es un conjunto finito, lo cual no es posible. Por tanto, este espacio es conexo.
4. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con la topología usual no es conexo pues $\{\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2}), \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)\}$ es una partición no trivial por abiertos.
5. El espacio de Sierpinski $X = \{a, b\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ es conexo ya que por la propia definición de τ se deduce que no se puede construir una partición no trivial por abiertos de X.

6. Sea X, $p \in X$ y la topología del punto incluido para el punto p. Ya que la familia de cerrados es $\mathcal{F}_{in} = \{A \subset X : p \notin A\} \cup \{X\}$, no hay conjuntos no triviales abiertos y cerrados a la vez.
7. El hiperboloide de dos hojas $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$ no es conexo (figura 6.1). Para ello se consideran los conjuntos
$$H^+ = \{(x, y, z) \in H : z > 0\}$$
$$H^- = \{(x, y, z) \in H : z < 0\}.$$
Ambos conjuntos H^+ y H^- son abiertos pues $H^+ = p_3^{-1}((0, \infty))$ y $H^- = p_3^{-1}((-\infty, 0))$, donde $p_3 : H \to \mathbb{R}$ es la proyección $p_3(x, y, z) = z$. Entonces H^+ y H^- es una partición no trivial por conjuntos abiertos de H.

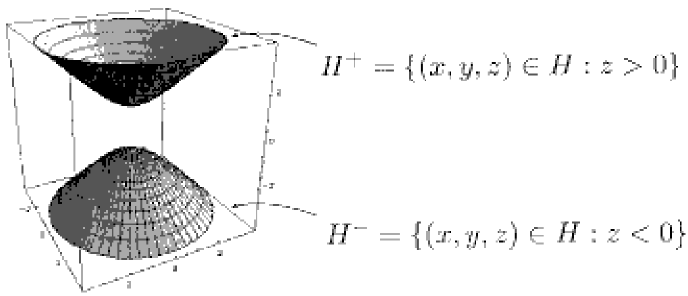


Figura 6.1: El hiperboloide de dos hojas no es conexo

8. Se considera $\mathbb{R}$ con la topología que tiene por base $\beta_o = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. El espacio $(\mathbb{R}, \tau(\beta_o))$ es conexo ya que dos conjuntos abiertos y no triviales siempre se intersecan.
9. El espacio de matrices cuadradas y regulares $Gl(n, \mathbb{R})$ no es conexo. La aplicación determinante
$$\det : Gl(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \longmapsto \det(A)$$
es continua y determina la partición por abiertos
$$Gl^+(n, \mathbb{R}) = \det{}^{-1}((0, \infty)), \quad Gl^-(n, \mathbb{R}) = \det{}^{-1}((-\infty, 0)).$$
Con el mismo razonamiento, el grupo ortogonal $O(n)$ no es conexo.

El primer espacio interesante que se presenta para estudiar su conexión es la recta euclídea $\mathbb{R}$. Demostraremos que los intervalos son los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ y la prueba de ello utiliza propiedades fundamentales de los números reales como es el axioma del supremo. Primero recordamos que un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un *intervalo* si satisface la siguiente propiedad:
$$\text{si } a, b \in I, \text{ entonces } [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \subset I.$$

Teorema 6.1.5. *Los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos.*

Demostración. Probamos primero que un subconjunto conexo $A \subset \mathbb{R}$ tiene que ser un intervalo. Si A no es un intervalo, existen $a, b \in A$ y $c \notin A$ tales que $a < c < b$. Entonces los conjuntos

$$O = A \cap (-\infty, c), \qquad G = A \cap (c, \infty)$$

son abiertos relativos de A, disjuntos y $A = O \cup G$. Además ninguno de ellos es vacío puesto que $a \in O$ y $b \in G$, lo que está en contradicción con la conexión de A. Obsérvese que éste fue el argumento que se usó en el ejemplo 6.1.4 para probar que $\mathbb{Q}$ no es conexo tomando $c = \sqrt{2}$.

Demostramos ahora que un intervalo es un conjunto conexo. La demostración es de nuevo por reducción al absurdo. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y supongamos que no es conexo. Entonces existen $A, B \in \tau_{u|I}$ no vacíos tales que $I = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Recordemos que A y B también son subconjuntos cerrados de I. Sean $a \in A$ y $b \in B$ y sin perder generalidad, supongamos que $a < b$. Se define el conjunto

$$C = \{x \in \mathbb{R} : [a, x) \subset A\}.$$

Vamos a obtener una contradicción siguiendo una serie de pasos.

1. El conjunto C no es vacío. Ya que $a \in A \in \tau_{u|I}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap I \subset A$. Se elige ϵ suficientemente pequeño para que $0 < \epsilon < b - a$. Se tiene ahora $a < a + \epsilon < b$, luego por ser I un intervalo, $a + \epsilon \in I$. De esta forma, $[a, a + \epsilon) \subset [a, a + \epsilon] \subset I$ y

   $$[a, a + \epsilon) = [a, b) \cap I \subset (a - \epsilon, a + \epsilon) \cap I \subset A.$$

   Esto prueba que $a + \epsilon \in C$ y por tanto $C \neq \emptyset$.

2. El conjunto C está acotado superiormente por b. Si no fuera así, existiría $x \in C$ tal que $b < x$. Por otra parte, $[a, x) \subset A$ y $a < b < x$, luego b pertenecería a A, lo cual no es cierto.

3. Sea $\alpha = \sup(C)$.

4. Probamos que $\alpha \in I$. Ya que b es una cota superior de C, $\alpha \leq b$. Usando que $a < \alpha \leq b$ y que I es un intervalo, $\alpha \in I$.

5. Demostramos que $\alpha \in \overline{A}$. Aquí estamos denotando por $\overline{A}$ la adherencia de A en el espacio $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Para ello probamos que para todo $\epsilon > 0$,

$(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)\cap A\neq\emptyset$. Ya que $a<\alpha$, sea $\epsilon>0$ suficientemente pequeño para que $a+\epsilon<\alpha$. Por la definición de supremo, existe $x\in C$ tal que $\alpha-\epsilon<x\leq\alpha$. Además $[a,x)\subset A$. Gracias a que $a<\alpha-\epsilon/2<x$ y $[a,x)\subset A$, tenemos $\alpha-\epsilon/2\in A$ y así $\alpha-\epsilon/2\in(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)\cap A$.

6. Probamos que $\alpha\in A$. De los dos apartados anteriores y de la proposición 1.6.12, se deduce que

$$\alpha\in\overline{A}\cap I=\overline{A}^I=A,$$

donde la última igualdad se debe a que A es un subconjunto cerrado en la topología $\tau_{u|I}$.

7. Finalizamos la demostración. Ya que $\alpha<b$ y $b\notin A$, entonces $\alpha<b$. Como A es un subconjunto abierto en I, sea $\epsilon>0$ tal que $(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)\cap I\subset A$ y elegimos ϵ suficientemente pequeño para que $a<\alpha-\epsilon<\alpha+\epsilon<b$. Entonces $(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)\subset I$ y por tanto, $(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)\subset A$. Por definición de supremo de C, existe $c\in C$ tal que $\alpha-\epsilon<c\leq\alpha$. Luego

$$[a,\alpha+\epsilon)=[a,c)\cup(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)\subset A.$$

Por tanto, $\alpha+\epsilon\in C$, lo cual es contradictorio con que α sea el supremo de C.

$\square$

Es inmediato ahora:

Corolario 6.1.6. 1. *La recta euclídea $(\mathbb{R},\tau_u)$ es conexa.*

2. *Si $A\subset\mathbb{R}$, los conjuntos conexos de $(A,\tau_{u|A})$ son los intervalos contenidos en A.*

El teorema 6.1.5 va a permitir distinguir definitivamente los intervalos de $\mathbb{R}$, cuyo estudio ya fue iniciado en el capítulo 4. Para ello, y teniendo en cuenta la proposición 4.1.9, se usará el siguiente hecho:

> Si X e Y son dos espacios homeomorfos y $f:X\to Y$ es un homeomorfismo, entonces $X\setminus A\cong Y\setminus f(A)$ para todo $A\subset X$. En particular, $X\setminus A$ e $Y\setminus f(A)$ tienen los mismos invariantes topológicos.

Teorema 6.1.7. *Todo intervalo I de $\mathbb{R}$ es homeomorfo a uno de los cuatro siguientes tipos, y cada uno de ellos no es homeomorfo a los restantes:*

1. $\{0\}$ *si* I *tiene sólo un elemento.*
2. $[0,1]$ *si* $I = [a,b]$ *con* $a < b$.
3. $[0,1)$ *si* $I = [a,b)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,a]$ *o* $(a,b]$.
4. $(0,1)$ *si* $I = (a,b)$, (a,∞), $(-\infty,a)$ *o* $\mathbb{R}$.

Demostración. Después de la discusión realizada en el ejemplo 4.1.16, sólo queda por probar que $[0,1)$ no es homeomorfo a $(0,1)$. Supongamos que existe un homeomorfismo $f:[0,1)\to(0,1)$. Entonces $[0,1)\setminus\{0\}=(0,1)$ es homeomorfo a $f([0,1])\setminus\{f(0)\}=(0,1)\setminus\{f(0)\}$. En el primer caso, $(0,1)$ es conexo, pero $(0,1)\setminus\{f(0)\}$ no lo es, al no ser un intervalo. $\square$

Recordemos que la prueba de que $[0,1]$ no era homeomorfo ni a $(0,1)$ ni a $[0,1)$ usaba el invariante topológico que decía que 'toda función continua con valores reales alcanza un máximo'. Para ello se usaba un resultado de cálculo que afirma que $[0,1]$ tiene dicha propiedad. Podemos ahora razonar que no son homeomorfos sin utilizar dicho invariante y usar conexión para distinguir $[0,1]$ de $(0,1)$ y de $[0,1)$. Por ejemplo, si $f:[0,1]\to(0,1)$ es un homeomorfismo, entonces $(0,1]\sim(0,1)\setminus\{f(0)\}$, llegando a una contradicción porque el primer espacio es conexo y el segundo no lo es, al no ser un intervalo. Por otro lado, si $f:[0,1]\to[0,1)$ es un homeomorfismo, entonces quitando los extremos del dominio tenemos $(0,1)\cong[0,1)\setminus\{f(0),f(1)\}$ y llegando a una contradicción del mismo modo.

Antes de continuar con el desarrollo de esta sección, se estudia la conexión en la recta de Sorgenfrey y se comparará así con la topología euclídea de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6.1.8. La topología de Sorgenfrey no es conexa.

Recordemos que una base de τ_S es $\beta_S=\{[a,b):a<b, a,b\in\mathbb{R}\}$. En este espacio, un intervalo de la forma $[a,b)$ es abierto y cerrado, luego $(\mathbb{R},\tau_S)$ no es conexo por la proposición 6.1.3. Como consecuencia, $(\mathbb{R},\tau_u)$ no es homeomorfo a $(\mathbb{R},\tau_S)$.

Estudiamos ahora qué subconjuntos de $(\mathbb{R},\tau_S)$ son conexos. Sea $A\subset(\mathbb{R},\tau_S)$ un subconjunto conexo. Entonces A tiene que ser un intervalo: el razonamiento es el mismo que el que se hizo con la topología usual en el teorema 6.1.5, ya que los conjuntos de la forma (c,∞) y $(-\infty,c)$ son también abiertos en τ_S. Resta por estudiar qué intervalos de $\mathbb{R}$, con la topología inducida de τ_S son conexos. Usando de nuevo que los intervalos de la forma $[a,b)$ son abiertos y cerrados, un intervalo conexo no puede contener a un intervalo de este tipo, luego los únicos intervalos con dicha propiedad son los formados por un único punto. Por tanto hemos probado:

Los conjuntos conexos de la recta de Sorgenfrey son los conjuntos unitarios.

De la proposición 6.1.3 se deduce que la conexión no sólo es un invariante topológico, sino que se mantiene por aplicaciones continuas.

Corolario 6.1.9. *La conexión se preserva por aplicaciones continuas, es decir, si $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ es una aplicación continua y (X,τ) es conexo, entonces $(f(X),\tau'_{|f(X)})$ es conexo.*

Demostración. Usamos la proposición 6.1.3. Sea $g:f(X)\to\{0,1\}$ una aplicación continua. Entonces $g\circ f:(X,\tau)\to\{0,1\}$ también es continua y sobreyectiva. Como (X,τ) es conexo, entonces $g\circ f$ no es sobreyectiva, en particular, g tampoco lo es. $\square$

Este corolario es útil a la hora de demostrar que un espacio es conexo pues basta con que sea la imagen continua de un conexo. Veamos varios ejemplos.

Corolario 6.1.10. *Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ una aplicación continua. Si (X,τ) es conexo, entonces el grafo de f es un conjunto conexo en $(X\times Y,\tau\times\tau')$.*

Demostración. Se define

$$F:X\to X\times Y,\quad F(x)=(x,f(x)).$$

Esta aplicación es continua, luego $F(X)$ es conexo por el corolario 6.1.9. Pero $F(X)$ es justamente el grafo de f. $\square$

También se podía haber probado este resultado usando el corolario 5.2.11 que afirma que X es homeomorfo a $G(f)$.

Corolario 6.1.11. *La circunferencia $\mathbb{S}^1$ es conexa. Además, $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos.*

Demostración. Se define

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1,\quad f(t)=(\cos(t),\sin(t)).$$

Esta aplicación es continua y sobreyectiva. Ya que que $\mathbb{R}$ es conexo, $\mathbb{S}^1$ también lo es.

Por otra parte, supongamos que $\phi:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{R}$ y sea $p\in\mathbb{S}^1$. Entonces $\mathbb{S}^1\setminus\{p\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}\setminus\{f(p)\}$. Sin embargo.

una circunferencia menos un punto es homeomorfo a $\mathbb{R}$ por el teorema 4.2.10, pero $\mathbb{R}$ menos un punto no es conexo al no ser un intervalo. $\square$

Corolario 6.1.12. *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, el segmento que une x con y definido por*

$$[x, y] = \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$$

es un conjunto conexo.

Demostración. Se define la aplicación

$$\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \quad \alpha(t) = x + t(y - x).$$

Esta aplicación es continua ya que al componer con las proyecciones $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, obtenemos $p_i \circ \alpha(t) = x_i + t(y_i - x_i)$, $1 \leq i \leq n$, que es una función polinómica en la variable t. Por otro lado, es evidente que $\alpha([0, 1]) = [x, y]$. Ya que $[0, 1]$ es conexo, también lo es $[x, y]$ por el corolario 6.1.9. $\square$

Se puede probar que el segmento $[x, y]$ es homeomorfo a $[0, 1]$, donde la restricción de α a la imagen, $\alpha : [0, 1] \to \alpha([0, 1]) = [x, y]$, es justamente el homeomorfismo. Este homeomorfismo no es más que la restricción del que se definió en el teorema 4.2.8 para probar que una recta afín era homeomorfa a la recta euclídea $\mathbb{R}$. En la última parte de aquella demostración, tomábamos $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Entonces la aplicación $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $g(t) = (t, 0, \ldots, 0)$ era el homeomorfismo entre $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y la recta afín $< e_1 >$. En el caso del segmento, consideramos la afinidad $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi(p) = Ap + x$ tal que el isomorfismo asociado $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisface $A(e_1) = y - x$. De esta manera, $\phi(\{te_1 : t \in [0, 1]\}) = [x, y]$. Entonces α es un homeomorfismo pues es composición de dos, $\alpha = \phi_{|g([0,1])} \circ g_{|[0,1]}$.

Otra consecuencia del corolario 6.1.9 es el siguiente teorema.

Teorema 6.1.13 (del valor intermedio). *Sea (X, τ) un espacio conexo y $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ una aplicación continua. Si $y_1, y_2 \in Im(f)$, entonces $[y_1, y_2] \subset Im(f)$.*

Demostración. Sean x_i tales que $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2$, y supongamos, sin perder generalidad que $y_1 \leq y_2$. Como $f(X)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, entonces $f(X)$ es un intervalo. Ya que este intervalo contiene a y_1 y a y_2, contiene al intervalo $[y_1, y_2]$, luego $[y_1, y_2] \subset f(X)$. $\square$

Es inmediato ahora el teorema de Bolzano.

Teorema 6.1.14 (Bolzano). *Sea (X,τ) un espacio topológico y $f:(X,\tau)\to(\mathbb{R},\tau_u)$ una aplicación continua. Si existen $a,b\in X$ tal que $f(a)f(b)<0$, entonces existe $x_0\in X$ tal que $f(x_0)=0$.*

Demostración. Sin perder generalidad, suponemos $f(a)<0<f(b)$. Por tanto, el intervalo cerrado $[f(a),f(b)]$ está incluido en $f(X)$, en particular, $0\in f(X)$. □

El teorema clásico de cálculo, llamado también teorema de Bolzano, se enuncia tomando $X=\mathbb{R}$ o un intervalo de $\mathbb{R}$. Este teorema permite asegurar que ciertas ecuaciones tienen solución. Así la ecuación $\sin(x)+e^x-2=0$ tiene solución en el intervalo $[0,\pi/2]$: la aplicación $f(x)=\sin(x)+e^x-2$ es continua con $f(0)<0$ y $f(\pi/2)>0$. Por tanto, existe $x_0\in[0,\pi/2]$ tal que $f(x_0)=0$.

Otra consecuencia del teorema del valor intermedio es el teorema del punto fijo.

Teorema 6.1.15 (del punto fijo). *Si $f:[0,1]\to[0,1]$ es una aplicación continua, entonces existe $x_0\in[0,1]$ tal que $f(x_0)=x_0$.*

Demostración. Se define la función continua

$$h:[0,1]\to[0,1],\quad h(x)=f(x)-x.$$

Entonces $h(0)=f(0)\geq 0$ y $h(1)=f(1)-1\leq 0$. Por el teorema del valor intermedio, $0\in\operatorname{Im}(h)$, es decir, existe $x_0\in[0,1]$ tal que $h(x_0)=0$ o lo que es lo mismo, $f(x_0)=x_0$ (figura 6.2). □

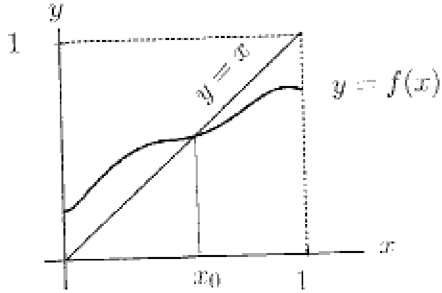


Figura 6.2: El teorema del punto fijo

Teorema 6.1.16 (de la invariancia del dominio). *Sea A un subconjunto abierto de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y un embebimiento $f : A \to \mathbb{R}$. Entonces $f(A)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Se hace la demostración en dos pasos.

1. Supongamos primero que A es un intervalo abierto (a, b). Como A es conexo, entonces $f(A)$ también es conexo y por tanto es un intervalo. Ya que $A \cong f(A)$, la clasificación de intervalos realizada en el teorema 6.1.7 implica que $f(A)$ es un intervalo abierto.

2. Sea ahora A un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Entonces $A = \cup_{j\in J} I_j$, donde $I_j \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Por tanto
$$f(A) = f(\bigcup\nolimits_{j\in J} I_j) = \bigcup\nolimits_{j\in J} f(I_j).$$
Ya que $f_{|I_j} : I_j \to \mathbb{R}$ es un embebimiento, el apartado anterior implica que $f(I_j)$ es un intervalo abierto. Entonces $f(A)$ es un conjunto abierto al ser unión de intervalos abiertos.

□

Acabamos esta sección con un resultado sobre conexión en grupos topológicos.

Teorema 6.1.17. *Sea (G, τ) un grupo topológico conexo. Si $U \in \mathcal{U}$ con $U^{-1} = U$, entonces el grupo generado por U es G.*

Demostración. Sea $O \in \tau$ tal que $e \in O \subset U$. Entonces $O^{-1} \subset U^{-1} = U$. Llamamos $V = O \cap O^{-1}$. Es evidente que $V \in \tau \cap \mathcal{U}$, $V = V^{-1}$ y $V \subset U$.

Es suficiente probar que el grupo generado por V es todo G. Definimos para todo $k \in \mathbb{N}$
$$V^k = \{g_1 g_2 \cdots g_k : g_i \in V, i = 1, \ldots, k\}.$$
Ya que para todo $k \in \mathbb{N}$, $V^{k+1} = VV^k$, por inducción tenemos $V^k \in \tau$. Sea el grupo $< V >$ generado por V. Ya que este grupo es el producto de todos los elementos de V y de sus inversos, y como los inversos de elementos de V siguen estando en V, entonces
$$< V >= \bigcup\nolimits_{k=1}^{\infty} V^k,$$
que es un conjunto abierto. Por otra parte se probó en el teorema 5.4.13 que en un grupo topológico, todo subgrupo abierto también es cerrado. Por tanto, ya que G es conexo y $< V >$ es no vacío, se tiene $< V >= G$. □

6.2. Más propiedades de conexión

En el siguiente resultado proporcionamos diferentes maneras para probar que un espacio topológico es conexo, y que nos serán particularmente útiles a la hora de estudiar la conexión de subconjuntos de espacios euclídeos.

Teorema 6.2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si se satisface algunas de las siguientes propiedades, el espacio (X, τ) es conexo:*

1. *Existe una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos conexos de X tal que $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ y $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.*
2. *Existe $x_0 \in X$ tal que para todo $x \in X$, existe un subconjunto conexo que contiene a x_0 y x.*
3. *Para cualesquiera puntos $x, y \in X$, existe un subconjunto conexo que contiene a x e y.*
4. *Existe una familia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos conexos de X tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

1. Sea $X = A \cup B$ una partición por conjuntos abiertos. Para cada $i \in I$ consideramos la partición de X_i dada por
$$X_i = (X_i \cap A) \cup (X_i \cap B),$$
con $X_i \cap A, X_i \cap B \in \tau_{|X_i}$. Ya que X_i es conexo entonces $X_i \cap A = \emptyset$ o $X_i \cap B = \emptyset$, es decir $X_i \subset B$ o $X_i \subset A$. Si para algún $j \neq k$, se tiene $X_j \subset A$ y $X_k \subset B$, entonces
$$\bigcap_{i\in I} X_i \subset X_j \cap X_k \subset A \cap B = \emptyset.$$
Esta contradicción implica que para todo $i \in I$, $X_i \subset A$, luego $A = X$, o para todo $i \in I$, $X_i \subset B$ y $B = X$.
2. Para cada $x \in X$ denotamos por X_x el conjunto conexo que, por hipótesis, contiene a x y a x_0. Aplicamos ahora el apartado anterior, observando que $x_0 \in \bigcap_{x\in X} X_x$.
3. Es consecuencia de apartado anterior, fijando como x_0 un punto cualquiera del espacio.
4. Definimos $Y_n = X_1 \cup \ldots \cup X_n$. Es evidente que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ y que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n \supset X_1 \neq \emptyset$. Se prueba por inducción que Y_n es conexo. Para

$n = 1$, $Y_1 = X_1$, que es conexo. Supongamos que Y_n es conexo y se prueba que Y_{n+1} es conexo. Por un lado, $Y_{n+1} = Y_n \cup X_{n+1}$, donde Y_n y X_{n+1} son conexos. Por otro,

$$Y_n \cap X_{n+1} = (X_{n+1} \cap X_1) \cup \ldots \cup (X_{n+1} \cap X_n) \supset X_{n+1} \cap X_n \neq \emptyset.$$

Utilizando el primer apartado, concluimos que Y_{n+1} es conexo. Una vez definidos los conjuntos Y_n, utilizamos de nuevo el primer apartado para obtener que (X, τ) es conexo.

□

En los siguientes resultados y ejemplos, mostramos cómo se usa el teorema 6.2.1

Corolario 6.2.2. *El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es conexo. También son conexos los subconjuntos estrellados y los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y se considera $[x, y]$ el segmento que une x con y. Este conjunto es conexo por el corolario 6.1.12 y evidentemente contiene a x e y.

Recordemos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama *estrellado* respecto de un punto $x_0 \in A$ si para todo $x \in A$, $[x_0, x] \subset A$. El conjunto se llama *convexo* si para todo $x, y \in A$, el segmento $[x, y]$ está incluido en A. Todo conjunto convexo es estrellado. La conexión en el caso que el conjunto sea estrellado es consecuencia directa del apartado 2) del teorema anterior. □

Ejemplo 6.2.3. Si $p \subset \mathbb{R}^2$, el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ es conexo.

Después de una traslación de $\mathbb{R}^2$, que es un homeomorfismo, se supone que $p = (0,0)$. Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Usando el teorema 6.2.1, vamos a encontrar un conjunto conexo que contiene a p_1 y a p_2 y que llamaremos Δ_{12}. Observemos que Δ_{12} tiene que ser un conjunto conexo *en* el espacio topológico, que aquí es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Por tanto, uno no puede simplemente tomar como Δ_{12} el segmento $[p_1, p_2]$ que une ambos puntos, pues podría ocurrir que dicho segmento no estuviera incluido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, como sucede, por ejemplo, si $p_2 = -p_1$. Por ello es necesario ir con más cuidado.

Sean $r_1 = |p_1|$ y $r_2 = |p_2|$ con $r_1 \leq r_2$. Se define

$$\Delta_{12} = [p_2, \frac{r_1}{r_2} p_2] \cup \mathbb{S}^1(r_1),$$

donde $\mathbb{S}^1(r_1)$ es la circunferencia centrada en el origen de radio r_1. Ver figura 6.3, izquierda. Ya que el segmento $[p_2, r_1 p_2 / r_2]$ y la circunferencia $\mathbb{S}^1(r_1)$ son conexos y

$$[p_2, \frac{r_1}{r_2}p_2] \cap \mathbb{S}^1(r_1) = r_1\frac{p_2}{r_2},$$

entonces el conjunto Δ_{12} es un conexo por el teorema 6.2.1. Obsérvese $\Delta_{12} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pues los puntos de la circunferencia tienen módulo r_1 y los del segmento tienen módulo mayor o igual que $r_1 > 0$.

EJEMPLO 6.2.4. Si $p, q \in \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ es conexo.

Después de una traslación, un giro y una homotecia en $\mathbb{R}^2$, se supone que $p = (0,0)$ y que $q = (0,1)$. Sean p_1 y p_2 dos puntos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$. El razonamiento es análogo al ejemplo 6.2.3 y se hace distinguiendo casos según si los módulos $r_i = |p_i|$ son 1 o no son 1.

1. Supongamos $r_i \neq 1$, $i = 1, 2$. Entonces tomamos

$$\Delta_{12} = \mathbb{S}^1(r_1) \cup [(0, -r_1), (0, -r_2)] \cup \mathbb{S}^1(r_2).$$

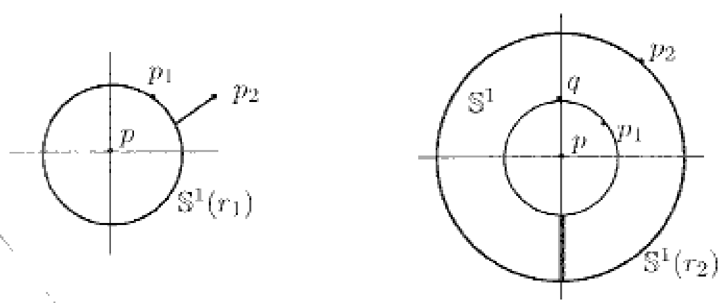
   Aquí $(0, -r_i)$ denota un punto de $\mathbb{R}^2$.
2. Supongamos $r_1 = 1$ y $r_2 \neq 1$. Se toma (ver figura 6.3, derecha)

$$\Delta_{12} = \mathbb{S}^1 \setminus \{q\} \cup [(0, -1), (0, -r_2)] \cup \mathbb{S}^1(r_2).$$

3. Si $r_1 = r_2 = 1$, basta con considerar $\Delta_{12} = \mathbb{S}^1 \setminus \{q\}$, que es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

En todos los casos, el conjunto Δ_{12} está incluido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$.

En los dos ejemplos anteriores hemos quitado uno o dos puntos a $\mathbb{R}^2$ y la conexión se mantiene. En el ejercicio 6 de este capítulo se generaliza este hecho a dimensiones arbitrarias y quitando un conjunto numerable de puntos.



juntos de los ejemplos 6.2.3 (izquierda) y 6.2.4 (derecha)

Nota 6.2.5. Por el teorema 6.2.1, la unión de dos conjuntos conexos que se intersecan es conexo. Sin embargo, no ocurre lo mismo para la intersección. Así $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\}$ y $\mathbb{S}^1$ son conexos pero $A \cap \mathbb{S}^1 = \{(1,0), (-1,0)\}$ no es conexo al ser un espacio discreto con dos elementos.

El siguiente teorema también será útil a la hora de determinar la conexión de un subespacio topológico.

Teorema 6.2.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$ un conjunto conexo. Si B es un subconjunto tal que*

$$A \subset B \subset \overline{A},$$

entonces B es conexo. En particular, si A es conexo, también lo es $\overline{A}$.

Este teorema dice que a un subconjunto conexo se le puede ir añadiendo puntos adherentes sin alterar la propiedad de conexión, lo cual era de esperar intuitivamente.

Demostración. Se utiliza la proposición 6.1.3. Sea una aplicación continua $f : B \to \{0,1\}$. Ya que $A \subset B$, $f_{|A} : A \to \{0,1\}$ es continua. Como A es conexo, entonces $f(A) \neq \{0,1\}$. Por otra parte, como $B \subset \overline{A}$, entonces la proposición 1.6.12 implica $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B = B$. Usando el teorema 3.1.4 para la aplicación $f : B \to \{0,1\}$ obtenemos

$$f(B) = f(\overline{A}^B) \subset \overline{f(A)} = f(A).$$

La última igualdad se debe a que la topología de $\{0,1\}$ es la topología discreta. Por tanto, $f(B) \subset f(A)$ y así la aplicación f no es sobreyectiva. □

Corolario 6.2.7. *La esfera $\mathbb{S}^n$ es conexa.*

Demostración. Se usa el teorema 6.2.6 de la siguiente forma. Sea $A = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, donde N es el polo norte de $\mathbb{S}^n$. Entonces A es conexo por ser homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (teorema 4.2.10) y por tanto $\overline{A}$ es conexo. Pero es evidente que $\overline{A} = \mathbb{S}^n$, luego $\mathbb{S}^n$ es conexo. □

Existen otras maneras de probar que la esfera $\mathbb{S}^n$ es conexa. Aquí presentamos tres demostraciones diferentes.

1. Utilizamos el primer apartado del teorema 6.2.1. Efectivamente, sea $X_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ y $X_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Entonces X_1 y X_2 son dos conexos (al ser homeomorfos a $\mathbb{R}^n$) tales que $\mathbb{S}^n = X_1 \cup X_2$ y $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

2. Otra forma de demostrar que $\mathbb{S}^n$ es conexo es por inducción sobre n. Para $n = 1$, $\mathbb{S}^1$ es conexo por el corolario 6.1.11. Probamos ahora que $\mathbb{S}^n$ es conexo suponiendo que $\mathbb{S}^{n-1}$ es conexo. Para ello usamos ciertas propiedades de la geometría de la esfera. La idea es que la intersección de $\mathbb{S}^n$ con un hiperplano afín de $\mathbb{R}^{n+1}$ es un conjunto homeomorfo a una esfera de dimensión $n-1$. Probamos que $\mathbb{S}^n$ es conexo utilizando el teorema 6.2.1 fijando como punto el polo norte N de $\mathbb{S}^n$. Sea $p \in \mathbb{S}^n$ y se considera un hiperplano vectorial $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que pasa por N y p. Entonces $H \cap \mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$ (ejercicio 28 del capítulo 4) es conexo por hipótesis de inducción y contiene a N y a p.

3. La última forma es utilizar el corolario 6.1.9, demostrando que $\mathbb{S}^n$ es la imagen continua de un conexo, tal como se hizo para $\mathbb{S}^1$. Para ello utilizaremos también que el producto topológico de dos espacios conexos es conexo: nos remitimos al corolario 6.3.4 para el caso particular $n = 2$.

A continuación se muestra otra aplicación del teorema 6.2.6 que resulta, en cierto modo, sorprendente.

Ejemplo 6.2.8. Se define el *seno del topólogo* como

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \bigcup \{(0,0)\}.$$

Este conjunto es conexo (figura 6.4). Para ello, se considera la aplicación

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ya que $(0,\infty)$ es conexo y $(0,\infty) \cong G(f)$ (corolario 5.2.11, también el ejercicio 5 del capítulo 4), se deduce que $G(f)$ es conexo. Utilizando el teorema 1.7.6, el punto $(0,0)$ es un punto adherente a $G(f)$ ya que

$$\left\{\left(\frac{1}{n\pi}, \sin(n\pi)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(\frac{1}{n\pi}, 0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0).$$

Entonces $A = G(f) \cup \{(0,0)\}$ es conexo. Con el mismo razonamiento, la adherencia de $G(f)$ es conexo, donde $\overline{G(f)} = G(f) \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

Corolario 6.2.9. *1. Si $p \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ es un conjunto conexo para $n \geq 2$.*

2. $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$.

3. $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfo a $\mathbb{S}^n$ para $n > 1$.

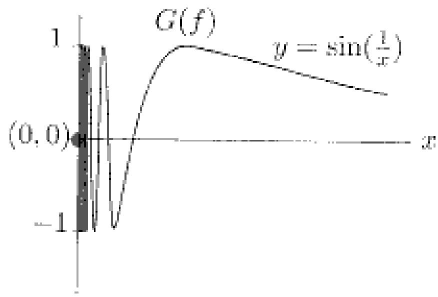


Figura 6.4: El seno del topólogo

Demostración. 1. Si $n > 2$, el razonamiento es análogo al que se hizo con $n = 2$ en el ejemplo 6.2.3, pero en vez de tomar circunferencias centradas en el origen, se toman esferas de dimensiones $n - 1$ también centradas en el origen.

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, entonces $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$. Por el apartado anterior $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ es conexo, pero $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es conexo al no ser un intervalo.

3. Si $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^n$ es un homeomorfismo y $p \in \mathbb{S}^1$, entonces $\mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^n \setminus \{f(p)\}$. Pero $\mathbb{S}^1 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^n \setminus \{f(p)\} \cong \mathbb{R}^n$, llegando a una contradicción.

□

Como consecuencia del teorema de Bolzano y de la conexión de $\mathbb{S}^n$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.2.10 (Borsuk-Ulam). *Sea una aplicación continua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$. Entonces existe $p_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(p_0) = f(-p_0)$.*

Demostración. Se define la aplicación

$$h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}, \quad h(p) = f(p) - f(-p).$$

El teorema queda demostrado si se prueba que hay una solución de la ecuación $h(p) = 0$. Sea $q \in \mathbb{S}^n$ y lo fijamos. Caben dos posibilidades. Si $h(q) = 0$, entonces q es el punto p_0 buscado. En caso contrario suponemos, sin perder generalidad, que $h(q) > 0$. Entonces

$$h(-q) = f(-q) - f(q) = -h(q) < 0.$$

Ya que $\mathbb{S}^n$ es conexo, el teorema de Bolzano asegura la existencia de $p_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $h(p_0) = 0$ y p_0 es el punto buscado. □

Habitualmente se interpreta el teorema de Borsuk-Ulam del siguiente modo. Se considera sobre la superficie terrestre la función $T = T(p)$ que mide la temperatura en el punto p de la Tierra. Podemos suponer que la superficie terrestre es la esfera de dimensión 2. Ya que la temperatura no cambia bruscamente de un punto a otro cercano, la función $T = T(p)$ es una función continua sobre $\mathbb{S}^2$. Entonces el teorema de Borsuk-Ulam afirma que *en la Tierra existen dos puntos antípodas con la misma temperatura*. Observemos también que el teorema no dice qué puntos de la Tierra son los que tienen la misma temperatura, sino que sólo asegura su existencia.

6.3. Conexión y producto topológico

En el siguiente resultado se prueba que la conexión se mantiene con la topología producto.

Teorema 6.3.1. *Sean (X,τ) e (Y,τ') dos espacios topológicos. Entonces $(X\times Y,\tau\times\tau')$ es conexo si y sólo si (X,τ) e (Y,τ') son conexos. Por inducción, el resultado sigue siendo cierto para el producto topológico de un número finito de espacios topológicos.*

Demostración. Supóngase que $X \times Y$ es conexo. Ya que las proyecciones son aplicaciones continuas y sobreyectivas, y la conexión se mantiene por aplicaciones continuas, tanto X como Y son espacios conexos.

Sean ahora dos espacios conexos X e Y. Para probar la conexión de $X \times Y$ usamos el tercer apartado del teorema 6.2.1 (ver figura 6.5). Sean $(a,b),(c,d)\in X\times Y$. Se define

$$\Delta = (X\times\{b\})\cup(\{c\}\times Y).$$

Este conjunto contiene a los puntos (a,b) y (c,d). Por otra parte, el corolario 5.2.10 implica $X\times\{b\}\cong X$ y $\{c\}\times Y\cong Y$, luego son conexos. Además $(X\times\{b\})\cap(\{a\}\times Y)\neq\emptyset$, ya que el punto (c,b) pertenece a ambos conjuntos. Por tanto Δ es un espacio conexo.

□

Corolario 6.3.2. *El cilindro $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ y el toro $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ son conexos.*

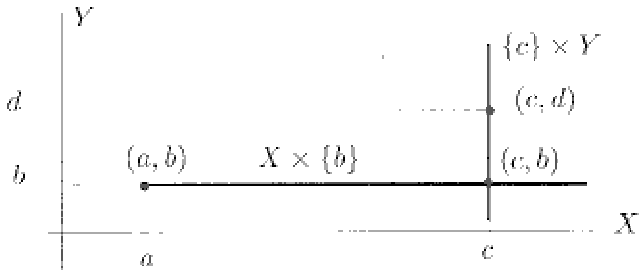


Figura 6.5: El conjunto Δ de la demostración del teorema 6.3.1

De este resultado obtenemos de nuevo que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es conexo (ejemplo 6.2.3) ya que este espacio es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ por el teorema 4.2.9.

Corolario 6.3.3. *Los espacios productos $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m$ y $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ son conexos.*

Hacemos una nueva demostración de que $\mathbb{S}^2$ es conexo.

Corolario 6.3.4. *La esfera $\mathbb{S}^2$ es conexa.*

Demostración. La esfera $\mathbb{S}^2$ puede obtenerse al considerar la semicircunferencia $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ y hacerla girar respecto del eje z. Una construcción parecida permitió en el ejemplo 5.2.7 definir un toro de revolución de $\mathbb{R}^3$, pero cambiando la curva generatriz por una circunferencia en el plano xz que no intersecaba al eje z. El conjunto A se escribe como $A = \{(\cos(t), 0, \sin(t) : t \in [-\pi/2, \pi/2]\}$. Por otro lado, un giro respecto del eje z es de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\theta \in \mathbb{R}$. Por tanto $\mathbb{S}^2 = F([-\pi/2, \pi/2] \times \mathbb{R})$, donde

$$F(t, \theta) = (\cos(t)\cos(\theta), \cos(t)\sin(\theta), \sin(t)).$$

Como F es continua y el dominio es conexo al ser producto de dos conexos, se deduce que $\mathbb{S}^2$ es conexo por el corolario 6.1.9. $\square$

En dimensión arbitraria, el argumento es análogo, pero la notación es más complicada y por esta razón sólo hemos hecho el caso $n = 2$.

Nos preguntamos ahora si es posible extender el teorema 6.3.1 a un espacio producto generalizado. La respuesta es afirmativa.

Teorema 6.3.5. *Sea $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia arbitraria de espacios topológicos conexos. Entonces $(\Pi_{i\in I}X_i, \Pi_{i\in I}\tau_i)$ es conexo.*

El recíproco del teorema es evidente ya que las proyecciones son continuas. Por dicha razón, hemos querido remarcar en el enunciado del teorema qué implicación es la importante en dicha equivalencia.

Demostración. Sea $a = (a_i) \in \Pi_{i\in I}X_i$ un punto fijo.

1. Para cada subconjunto finito $J \subset I$ definimos el conjunto $A_J = \{(x_i) : x_i = a_i, \forall i \notin J\}$. Observemos que $a \in A_J$. Probamos que A_J es conexo usando la parte 2 del teorema 6.2.1. Sea $x \in A_J$ y demostramos que el conjunto
$$B = \Pi_{i\in I}Y_i, \text{ con } Y_i = \begin{cases} \{a_i\} & \text{si } i \notin J \\ X_i & \text{si } i \in J \end{cases}$$
es conexo y contiene a a y a x. Sabemos por el ejercicio 20 del capítulo 5 que B es homeomorfo a $\Pi_{j\in J}X_j$. Como el conjunto de índices de este producto es finito y cada uno de los factores es conexo, se deduce que B es un espacio conexo (teorema 6.3.1).

2. Definimos
$$A = \bigcup\{A_J : J \subset I\ J \text{ es finito}\}.$$
Usando de nuevo el teorema 6.2.1, este conjunto es conexo al ser unión de espacios conexos cuya intersección es no vacía al contener al punto a.

3. El conjunto A es denso en $\Pi_{i\in I}X_i$. Para ello sea $x = (x_i) \in \Pi_{i\in I}X_i$ y veamos que x es adherente a A. Consideremos un entorno básico U de x en $\Pi_{i\in I}\tau_i$ dado por la proposición 5.3.9:
$$U = \Pi_{i\in I}U_i, \text{ con } U_i = \begin{cases} X_i & \text{si } i \notin J \\ U_i \in \mathcal{U}^i_{x_i} & \text{si } i \in J, \end{cases}$$
para cierto subconjunto finito $J \subset I$. Veamos que $U \cap A \neq \emptyset$. Para ello basta darse cuenta que el punto $y = (y_i)$ definido por
$$y_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \notin J \\ x_i & \text{si } i \in J, \end{cases}$$
pertenece tanto a U como a A_J.

4. Ya que A es conexo, finalizamos la demostración usando el teorema 6.2.6.

$\square$

Después de este resultado, es natural preguntarse si la topología caja definida en el capítulo anterior satisface el teorema anterior. La respuesta es negativa (ver ejemplo 6.3.6), lo cual nos confirma una vez más que la elección de la topología producto generalizada en el producto cartesiano es la correcta si uno espera tener resultados que generalicen lo que sucede con el producto finito de espacios topológicos.

EJEMPLO 6.3.6. Consideramos el conjunto de sucesiones de números reales $\mathbb{R}^\omega$ dotado con la topología caja τ_c, donde en cada uno de los factores del producto cartesiano tomamos la topología usual (ejemplo 5.3.14). Probamos que $(\mathbb{R}^\omega, \tau_c)$ no es conexo, concretamente, vemos que

$$A = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}, \quad B = \mathbb{R}^\omega \setminus A$$

es una partición por abiertos del espacio. Ya que $A \cap B = \emptyset$, demostramos que tanto A como B son conjuntos abiertos en τ_c.

1. Para probar que A es abierto, sea $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A$ y veamos que existe un entorno suyo U incluido en A. Sabemos que existe $M > 0$ tal que $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomamos el entorno $U = \Pi_{n\in\mathbb{N}}(x_n - M, x_n + M)$ de x en la topología caja τ_c. Para demostrar que $U \subset A$, sea $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$. Es evidente que la sucesión y es acotada pues, $|y_n| \leq |x_n| + M \leq 2M$, luego $y \in A$.
2. El conjunto B es abierto. Sea ahora $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in B$ y tomamos $V = \Pi_{n\in\mathbb{N}}(x_n - 1, x_n + 1)$. Entonces V es un entorno de x en la topología caja, y probamos que $V \subset B$. Sea $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V$. Entonces y es una sucesión no acotada, pues si lo fuera, $|x_n| \leq |y_n| + |x_n - y_n| \leq |y_n| + 1$ y x también sería una sucesión acotada.

Finalizamos esta sección comentando que, aunque se ha estudiado la conexión de numerosos subconjuntos de espacios euclídeos ($\mathbb{R}^n$, esferas, cilindros, coronas circulares, toros, etc), sólamente se ha hecho uso de la definición de conexión al probar que los intervalos son los subconjuntos conexos de $\overline{\mathbb{R}}$, ya que el estudio de la conexión en el resto de los ejemplos se ha basado en resultados posteriores sobre propiedades de la conexión.

6.4. Componente conexa

Siguiendo con la idea intuitiva de que un espacio conexo es aquél que no se puede dividir en *trozos*, vamos a definir de forma precisa qué entendemos por un trozo de un espacio topológico, al que llamaremos componente conexa. Es natural suponer que cada uno de estos subconjuntos tiene que ser conexo y también que no hay otro conjunto conexo que lo contenga.

Definición 6.4.1. Sea (X,τ) un espacio topológico y $x \in X$. Se llama componente conexa C_x de x a la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x, es decir,

$$C_x = \bigcup \{C \subset X : C \text{ es conexo}, x \in C\}.$$

Observemos que la componente conexa de un punto no es vacía, pues $\{x\}$ es un conjunto conexo que contiene al punto.

Se demuestra a continuación una serie de propiedades sobre las componentes conexas que reflejan que, efectivamente, no son nada más que los trozos de los que hemos hablado a lo largo de este capítulo.

Proposición 6.4.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $x \in X$.*

1. *El conjunto C_x es conexo y es el mayor conjunto conexo que contiene al punto x.*
2. *El espacio (X,τ) es conexo si y sólo si hay una única componente conexa.*
3. *Las componentes conexas determinan una partición de X.*
4. *Las componentes conexas son conjuntos cerrados.*

Demostración.

1. Por el teorema 6.2.1, el conjunto C_x es conexo ya que es unión de conexos, con intersección no vacía al contener al punto x. Además, por la propia definición, C_x es el mayor conjunto conexo que contiene a x.
2. Si (X,τ) es conexo, es el mayor conjunto conexo que contiene a cualquier punto, luego para todo $x \in X$, $C_x = X$. Recíprocamente, supongamos que hay una única componente conexa C_x. Entonces $C_x = C_y$ para todo $x, y \in X$, luego X es conexo por el teorema 6.2.1.

3. Sean C_x y C_y dos componentes conexas que se intersecan. Entonces $C_x \cup C_y$ es conexo y contiene a x e y. Luego por definición de componente conexa,
$$C_x \cup C_y \subset C_x \qquad C_x \cup C_y \subset C_y.$$
El primer apartado de esta proposición asegura que $C_x \cup C_y = C_x = C_y$.

4. Usando el teorema 6.2.6, el conjunto $\overline{C_x}$ es un conjunto conexo por ser la adherencia del conjunto conexo C_x. Como $x \in \overline{C_x}$ y C_x es el mayor conexo que contiene a x, entonces $\overline{C_x} \subset C_x$. Esto prueba que $\overline{C_x} = C_x$, es decir, C_x es un conjunto cerrado.

$\square$

Como las componentes conexas forman una partición del espacio, también es posible definir las componentes conexas mediante una relación de equivalencia. Concretamente, en X se considera la relación binaria

$$x \sim y \text{ si existe un conjunto conexo } C \subset X \text{ tal que } x, y \in C.$$

Esta relación $\sim$ es una relación de equivalencia y probamos que la clase de equivalencia $[x]$ de $x \in X$ es la componente conexa C_x de x. El conjunto $[x]$ es conexo por el apartado 2 del teorema 6.2.1. Como $x \in [x]$, entonces $[x] \subset C_x$ por definición de componente conexa. Para probar que $C_x \subset [x]$, sea $y \in C_x$. Como C_x es un conjunto conexo y $x \in C_x$, entonces $x \sim y$, es decir, $y \in [x]$.

Hallamos ahora las componentes conexas en algunos espacios topológicos conocidos.

Ejemplo 6.4.3. 1. Sea (X, τ_D) un espacio discreto. Como $C_x \subset X$ y la topología inducida en un subconjunto de un espacio discreto es de nuevo la topología discreta por el ejemplo 1.5.6, C_x tiene sólo un elemento, luego $C_x = \{x\}$.

2. El conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tiene exactamente dos componentes conexas, a saber, $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Efectivamente, ya que para un subconjunto de $\mathbb{R}$ los conexos son los intervalos dentro del mismo (corolario 6.1.6): si $x > 0$, el mayor intervalo que contiene a x y dentro de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es $(0, \infty)$, luego $C_x = (0, \infty)$. Análogamente, si $x < 0$, $C_x = (-\infty, 0)$.

3. Las componentes conexas de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ son los intervalos $(n, n+1)$, con $n \in \mathbb{Z}$ ya que son los mayores intervalos contenidos en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4. Las componentes conexas de $\mathbb{Q}$ son los propios puntos pues son los únicos intervalos contenidos en $\mathbb{Q}$. En este ejemplo las componentes conexas

no son conjuntos abiertos (comparar con el apartado 4 de la proposición 6.4.2). Obsérvese también que la topología inducida en $\mathbb{Q}$ no es la discreta. Este espacio da un ejemplo de un espacio que tiene las mismas componentes conexas que la topología discreta, pero la topología no es la discreta.

En $\mathbb{Q}$ también hay conjuntos que son abiertos y cerrados y no son las componentes conexas: basta con tomar $\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

Nota 6.4.4.

1. Si un espacio topológico no es conexo, existe una partición no trivial por abiertos, que a la vez es una partición por cerrados. Esta partición no tiene porqué ser la de las componentes conexas. Así, $X = \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{R}$ con su topología usual no es conexo y $\{0, 1\}$ y $\{2, 3\}$ es una partición por abiertos de X que no son las componentes conexas.

2. Si un espacio topológico es unión de conjuntos conexos disjuntos dos a dos, esta partición tampoco tiene porqué ser la partición definida por las componentes conexas. Por ejemplo, $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, \infty)$ es unión de dos conexos disjuntos y no son las componentes conexas de $\mathbb{R}$ ya que $\mathbb{R}$ es conexo.

A raíz de los dos ejemplos anteriores, el siguiente resultado da una condición suficiente para que una partición por conexos coincida con la de las componentes conexas.

Proposición 6.4.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\{A_i : i \in I\}$ una partición por subconjuntos conexos y abiertos. Entonces dicha familia de subconjuntos constituye la partición de las componentes conexas.*

Demostración. Sea $x \in X$ e $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$. Veamos que $A_{i_0} = C_x$. Como A_{i_0} es conexo, $A_{i_0} \subset C_x$. Por otro lado, si existiera $y \in C_x \setminus A_{i_0}$, entonces

$$C_x = (C_x \cap A_{i_0}) \bigcup (C_x \cap (\cup_{i \neq i_0} A_i))$$

es una partición no trivial por conjuntos abiertos de C_x, luego C_x no sería conexo, llegando a una contradicción. $\square$

EJEMPLO 6.4.6. El conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ tiene exactamente dos componentes conexas. Para ello, basta con darse cuenta que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1 = B_1(0) \cup \text{ext}(B_1(0))$. Ambos subconjuntos son abiertos y también son conexos ya que la bola $B_1(0)$ es un conjunto convexo y $\text{ext}(B_1(0))$ es una corona circular (homeomorfa al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$). Por tanto dichos conjuntos son las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$.

Ya que toda aplicación continua lleva conjuntos conexos en conexos, concluimos:

Proposición 6.4.7. *Se considera una aplicación continua $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ y sea $x \in X$. Entonces:*

1. $f(C_x) \subset C'_{f(x)}$.
2. *Si f es homeomorfismo, entonces* $f(C_x) = C'_{f(x)}$.

Demostración. 1. Ya que C_x es conexo y f es continua, $f(C_x)$ es un subconjunto conexo de Y que contiene a $f(x)$. Ya que $C'_{f(x)}$ es el mayor conexo que contiene a $f(x)$, entonces $f(C_x) \subset C'_{f(x)}$.

2. Es consecuencia del apartado anterior y de que f^{-1} también es un homeomorfismo.

$\square$

Corolario 6.4.8. *El número de componentes conexas es un invariante topológico.*

Definición 6.4.9. Un punto $x \in X$ de un espacio topológico (X, τ) se llama un punto de intersección de orden $k \in \mathbb{N}$ si $X \setminus \{x\}$ tiene exactamente k componentes conexas.

Por el corolario 6.4.8, el orden de intersección se mantiene por homeomorfismos, es decir, si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo entre dos espacios topológicos y $x \in X$ es un punto de intersección k, entonces $f(x)$ es un punto de intersección de orden k. Además, el cardinal del subconjunto de X formado por los puntos de intersección de orden k coincide con el correspondiente en Y.

Ejemplo 6.4.10. 1. Todo número real es un punto de intersección de orden 2 en $\mathbb{R}$.

2. Todo elemento de $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$, es un punto de intersección 1. Por tanto, $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$) no es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Así fue como se demostró el corolario 6.2.9.

3. Existen espacios topológicos (X, τ) que no son conexos y existe $x \in X$ tal que $X \setminus \{x\}$ tienen orden de intersección 1, es decir, $X \setminus \{x\}$ es conexo. Basta tomar $X = [0, 1] \cup \{2\}$ y $x = 2$.

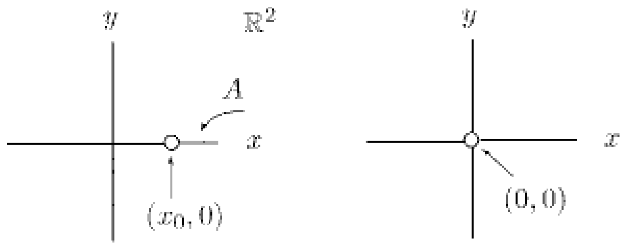


Figura 6.6: El conjunto $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ menos el punto $(x_0, 0)$ tiene dos componentes conexas, pero si se quita el origen, quedan cuatro componentes

4. Sea $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ los ejes de coordenadas del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. En X, todo punto, excepto $(0,0)$, tiene orden de intersección 2 y el origen tiene orden 4. Sea, por ejemplo, $p = (x_0, 0), x_0 > 0$. Entonces $X \setminus \{p\}$ tiene las siguientes componentes conexas (ver figura 6.6): $\{A = (x_0, \infty) \times \{0\}, X \setminus A\}$. Para ello usamos la proposición 6.4.5. Efectivamente $(x_0, \infty) \times \{0\}$ es conexo por ser producto de conexos. Por otro lado,
$$X \setminus A = ((-\infty, x_0) \times \{0\}) \bigcup (\{0\} \times \mathbb{R})$$
es conexo al ser unión de conjuntos conexos que se intersecan en el punto $(0,0)$: aquí usamos que $x_0 > 0$. Veamos que A y $X \setminus A$ son abiertos de $X \setminus \{p\}$. Basta darse cuenta que
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > x_0\} \cap (X \setminus \{p\})$$
$$X \setminus A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < x_0\} \cap (X \setminus \{p\}).$$
Del mismo modo, las componentes de $X \setminus \{(0,0)\}$ son los cuatros semiejes
$$\{(0,\infty) \times \{0\}, (-\infty, 0) \times \{0\}, \{0\} \times (0,\infty), \{0\} \times (-\infty, 0)\}.$$

Corolario 6.4.11. *La circunferencia $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfa a ningún subconjunto de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Ya que $\mathbb{S}^1$ es conexo, sería homeomorfo a un intervalo formado por más de un punto. Pero todo punto de $\mathbb{S}^1$ tiene orden 1 ya que $\mathbb{S}^1$ menos un punto es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Sin embargo, en cualquier intervalo hay puntos con orden 2. □

Se estudia cómo se comportan las componentes conexas en el producto topológico.

Proposición 6.4.12. *Sean* (X,τ) *e* (Y,τ') *dos espacios topológicos y* $(x,y)\in X\times Y$. *Entonces* $C_{(x,y)} = C_x \times C'_y$.

Demostración. El conjunto $C_x \times C'_y$ es conexo por el teorema 6.3.1 y contiene a (x,y), luego $C_x \times C_y \subset C_{(x,y)}$. Por otra parte

$$C_{(x,y)} \subset p_1(C_{(x,y)}) \times p_2(C_{(x,y)}) \subset C_x \times C'_y,$$

donde la primera inclusión es cierta para cualquier subconjunto de un producto cartesiano y la segunda se debe a la proposición 6.4.7. □

Sea un espacio topológico (X,τ) y la familia de componentes conexas $\{C_i : i\in I\}$. Nos preguntamos cuándo el estudio de la topología τ se puede reducir al estudio de las topologías inducidas en cada una de las componentes conexas. Responder a esta pregunta es útil en el sentido que el estudio topológico de (X,τ) quedaría determinado a cada una de sus componentes conexas. Dicho de otro modo, la cuestión que se plantea es si es posible reconstruir la topología de (X,τ) a partir de las topologías relativas de cada una de las componentes conexas. Necesitamos la siguiente definición.

Definición 6.4.13. Sea $\{(X_i,\tau_i) : i\in I\}$ una familia de espacios topológicos con $X_i\cap X_j=\emptyset$ si $i\neq j$ y sea $X=\bigcup_{i\in I}X_i$. Se llama topología suma, y se denota por $\sum_{i\in I}\tau_i$, a la topología en X que tiene por base $\beta=\bigcup_{i\in I}\tau_i$.

No es difícil probar que β es, efectivamente, base de una topología pues si $x\in B_i\cap B_j$, entonces $B_i\in\tau_i$, $B_j\in\tau_j$ y $B_i\cap B_j\neq\emptyset$. Por tanto, $\tau_i=\tau_j$ y así, $B_i\cap B_j\in\tau_i\subset\beta$.

La pregunta que nos hacíamos se formula ahora de la siguiente forma:

> Si $\{C_i : i\in I\}$ es la partición de las componentes conexas de un espacio topológico (X,τ) y si denotamos $\tau_i=\tau_{|C_i}$, ¿Bajo qué condiciones τ coincide con $\sum_{i\in I}\tau_i$?

La inclusión $\tau\subset\sum_{i\in I}\tau_i$ siempre es cierta, pues si $O\in\tau$, entonces $O=\bigcup_{i\in I}(C_i\cap O)$ y $C_i\cap O\in\tau_i$, luego $O\in\sum_{i\in I}\tau_i$.

Antes de proseguir, consideramos el siguiente ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 6.4.14. En el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con su topología usual τ_u sabemos que $C_x=\{x\}$ para todo $x\in\mathbb{Q}$. Denotamos $\tau_x=\tau_{u|\{x\}}$. Entonces

$$\beta=\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\tau_x=\{\{x\}: x\in\mathbb{Q}\}$$

y así $\sum_{x\in\mathbb{Q}}\tau_x$ es la topología discreta. En este caso tenemos que la inclusión $\tau_u \subset \sum_{x\in\mathbb{Q}}\tau_x$ es estricta y así la topología de $\mathbb{Q}$ no coincide con la topología suma de sus componentes conexas.

Teorema 6.4.15. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $\{X_i : i\in I\}$ una partición de X. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. $\tau = \sum_{i\in I}\tau_{|X_i}$.
2. *Para cada $i\in I$, $X_i\in\tau$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Ya que para todo $i\in I$, $X_i\in\tau_{|X_i}$, entonces $X_i\in\bigcup_{i\in I}\tau_{|X_i}=\tau$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Una base de $\sum_{i\in I}\tau_{|X_i}$ está dada por $\beta=\bigcup_{i\in I}\tau_{|X_i}$. Sea $O_i\in\tau_{|X_i}$. Existe $G_i\in\tau$ tal que $O_i=G_i\cap X_i$. Por tanto $O_i\in\tau$ al ser unión de dos conjuntos abiertos. Entonces $\beta\subset\tau$ y de esta forma $\sum_{i\in I}\tau_{|X_i}=\tau(\beta)\subset\tau$.

Sea ahora $O\in\tau$. Ya que los conjuntos $\{X_i : i\in I\}$ forman una partición, entonces $O=\bigcup_{i\in I}(O\cap X_i)$, donde $O\cap X_i\in\tau_{|X_i}$. Por tanto $O\subset\sum_{i\in I}\tau_{|X_i}$ y así $\tau\subset\sum_{i\in I}\tau_{|X_i}$. $\square$

Corolario 6.4.16. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\{C_i : i\in I\}$ la partición de las componentes conexas. Entonces $\tau=\sum_{i\in I}\tau_{|C_i}$ si y sólamente si C_i es un abierto en (X,τ) para todo $i\in I$.*

6.5. Conexión local

A veces es interesante que el espacio sea conexo 'alrededor de un punto', es decir, que cada punto tenga entornos conexos y arbitrariamente pequeños.

Definición 6.5.1. Un espacio topológico (X,τ) se llama localmente conexo si cada punto tiene una base de entornos conexos. Un subconjunto de un espacio topológico es localmente conexo si lo es con la topología relativa.

Se estudia la conexión local para algunos espacios topológicos conocidos.

Ejemplo 6.5.2.

1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo, pues las bolas centradas en un punto constituyen una base de entornos del punto y son conexas. Este espacio es conexo y localmente conexo.
2. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es localmente conexo, pues el único conexo que contiene a un punto es el formado por el propio punto

(ejemplo 6.4.14). Pero si $x \in \mathbb{Q}$, el conjunto $\{x\}$ no es un entorno de x. Por tanto $\mathbb{Q}$ es un espacio que no es conexo ni localmente conexo.

3. Un espacio topológico discreto es localmente conexo pues para todo $x \in X$, $\beta_x = \{\{x\}\}$ es una base de entornos de x. Este espacio no es conexo pero sí localmente conexo.

4. Sea $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Este espacio no es conexo porque no es un intervalo. Sin embargo es localmente conexo usando de nuevo las bolas como base de entornos. Concretamente, si $x > 0$, sabemos que $\{B_r(x) \cap A : 0 < r < x\}$ es una base de entornos en $\tau_{u|A}$. Pero $B_r(x) \cap A = (x - r, x + r)$ es conexo. El caso $x < 0$ es análogo.

5. Se considera el conjunto $A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología usual. Este espacio no es conexo, pues no es un intervalo de $\mathbb{R}$. Tampoco es localmente conexo, pues $x = 0$ no tiene una base de entornos conexos. Obsérvese que el único subconjunto conexo de A que contiene a 0 es $\{0\}$ ya que es el único intervalo de $\mathbb{R}$ contenido en A (corolario 6.1.6). Por otro lado, $\{0\}$ no es un entorno de $x = 0$ en A, pues debería existir $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap A \subset \{0\}$, que no es cierto. Sin embargo todo punto de la forma $1/n$ tiene como base de entornos conexos a $\{\{1/n\}\}$.

6. Se considera

$$A = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\{1\} \times \mathbb{R}) \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup \{(x, 1/n) : 0 \leq x \leq 1, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ver figura 6.7. Este conjunto, con la topología usual, no es localmente

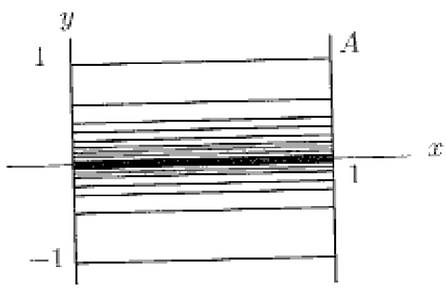


Figura 6.7: El conjunto A del ejemplo 6.5.2

conexo. Para ello, sea $p = (1/2, 0)$. La base de entornos de p dada por

$$\gamma_p = \{B_r(p) \cap A : 0 < \epsilon < \frac{1}{2}\}$$

está formada por entornos que no son conexos. Aunque intuitivamente es evidente que dichos entornos no son conexos (ver figura 6.8), realizamos una prueba de ello. Como $\epsilon < 1/2$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$ y sea $r > 0$

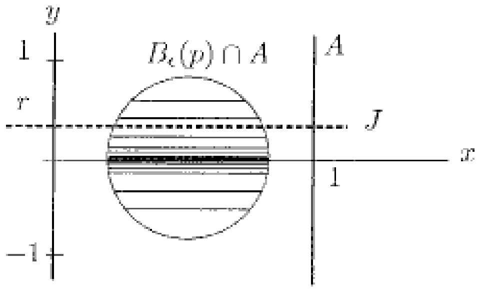


Figura 6.8: La bola $B_\epsilon(p) \cap A$ no es conexa

tal que $1/(n+1) < r < 1/n$. Sea la recta horizontal $J = \{(x,r) \subset \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Ya que $\epsilon < 1/2$,

$$B_\epsilon(p) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = B_\epsilon(p) \cap (\{1\} \times \mathbb{R}) = \emptyset. \tag{6.1}$$

Si $(x,y) \in J \cap (B_\epsilon(p) \cap A)$, por (6.1), $x \neq 0$ y $x \neq 1$. Entonces $y = 1/m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, lo cual es imposible pues $y = r$. Esta recta J permite ahora probar que $B_\epsilon(p) \cap A$ no es conexo pues

$$B_\epsilon(p) \cap A = ((B_\epsilon(p) \cap A \cap \{(x,t) : t > r\}) \bigcup (B_\epsilon(p) \cap A \cap \{(x,t) : t < r\})$$

es una partición no trivial por abiertos de $B_\epsilon(p) \cap A$. Observemos que $B_\epsilon(p) \cap A \cap \{(x, 1/n) \subset \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$ pues $1/n < \epsilon$.

Hemos probado que $B_\epsilon(p) \cap A$ no es conexo para $0 < \epsilon < 1/2$, pero esto no implica directamente que A no sea localmente conexo, pues podría haber otra base de entornos conexos diferente de γ_p.

Supongamos que β_p es una base de entornos conexos de p y lleguemos a una contradicción. Sea $U = B_{1/2}(p) \cap A \in \mathcal{U}_p^A$. Entonces existe $V \in \beta_p$ tal que $V \subset U$. Como γ_p también es base de entornos, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B_\epsilon(p) \cap A \subset V \subset B_{1/2}(p) \cap A.$$

En particular, $\epsilon < 1/2$. Por la prueba que se ha hecho antes de que $B_\epsilon(p) \cap A$ no es conexo, tomamos la misma recta horizontal J que tampoco interseca a V. Esto permite escribir

$$V = \left(V \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > r\}\right) \bigcup \left(V \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t < r\}\right)$$

y afirmar que V no es conexo, lo cual es contradictorio.

Obsérvese que para los puntos de A distintos de los de la forma $(x,0)$, $0 < x < 1$, sí existe una base de entornos conexos sin más que coger las bolas (en A) centradas en el punto y de radio suficientemente pequeño para que sean conexas.

7. Consideramos el seno del topólogo $A = \{(0,0)\} \cup \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\}$ (figura 6.4). Este espacio no es localmente conexo. Para ello se va a probar que el punto $p = (0,0)$ no tiene una base β de entornos conexos. El razonamiento es parecido al ejemplo anterior.

   La familia de las bolas $\gamma_p = \{B_r(p) \cap A : 0 < r < 1\}$ es una base de entornos de p, pero ninguno de estos entornos es conexo. Supóngase que A es localmente conexo. Sea $U = B_1(p) \cap A \in \mathcal{U}_p^A$. Entonces existe un entorno conexo $V \in \mathcal{U}_p^A$ tal que $V \subset U$. Como γ_p es una base de entornos, existe $r < 1$ tal que $B_r(p) \cap A \subset V \subset U$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < r$ y sea la recta vertical $J = \{(\frac{2}{(2k+1)\pi}, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Esta recta no interseca a U, pues el punto de intersección tendría ordenada $y = 1$ o $y = -1$, lo cual no es posible pues $r < 1$. Además separa a $B_r(p) \cap A$ en dos conjuntos abiertos no vacíos. Entonces también podemos escribir

$$V = \left(V \cap ((-\infty, \frac{2}{(2k+1)\pi}) \times \mathbb{R})\right) \bigcup \left(V \cap (\frac{2}{(2k+1)\pi}, \infty) \times \mathbb{R}\right),$$

   luego V no sería conexo, llegando a una contradicción.

8. La recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$ no es localmente conexa. Ya se probó en el ejemplo 6.1.8 que los únicos conjuntos conexos son los conjuntos unitarios, que no son entornos en esta topología.

9. Se considera $\mathbb{R}$ con la topología a derechas τ_d. Este espacio es localmente conexo. Recordemos que si $x \in \mathbb{R}$, $\beta_x = \{[x, \infty)\}$ es una base de entornos de x. Veamos que $[x, \infty)$ es conexo. Como los elementos básicos de τ_d son los intervalos de la forma $[a, \infty)$, es evidente que dos abiertos relativos no triviales de $[x, \infty)$ siempre se intersecan, luego $[x, \infty)$ es conexo.

Proposición 6.5.3. *1. La conexión local es un invariante topológico.*

2. Las componentes conexas en un espacio localmente conexo son conjuntos abiertos.

Demostración. 1. Un homeomorfismo lleva conexos en conexos y bases de entornos en bases de entornos.

2. Sea $x \in X$ y C_x la componente conexa de x. Sea $U \in \mathcal{U}_x$ un entorno conexo de x. Entonces $U \subset C_x$ por ser C_x el mayor conjunto conexo que contiene a x. Esto prueba que $x \in \text{int}(C_x)$ y así C_x es un conjunto abierto.

□

Damos una caracterización de un espacio localmente conexo.

Proposición 6.5.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El espacio (X,τ) es localmente conexo.*
2. *Las componentes conexas de cualquier conjunto abierto son conjuntos abiertos.*
3. *La familia de subconjuntos abiertos y conexos es una base de la topología.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $O \in \tau$, C una componente conexa de $(O, \tau_{|O})$ y $a \in C$. Como O es un abierto en X, $O \in \mathcal{U}_a$, luego existe un entorno conexo $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $U \subset O$. Entonces $U \in \mathcal{U}_a^O$ por la proposición 1.5.5 y al ser conexo, está incluido en la componente conexa de a, es decir, $U \subset C$. Esto prueba que $C \in \tau_{|O}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $O \in \tau$. Entonces $O = \bigcup_{x \in O} C_x^O$, donde C_x^O denota la componente conexa de x en el conjunto O. En particular, C_x^O es un conjunto conexo y $C_x^O \in \tau$ porque O es abierto: de nuevo usamos la proposición 1.5.5.

(3) $\Rightarrow$ (1). Por hipótesis, $\beta = \{O \subset \tau : O \text{ es conexo }\}$ es una base de τ. Usando el ejemplo 1.4.8, la familia $\beta_x = \{O \in \beta : x \in B\}$ es una base de entornos de x, probando que el espacio es localmente conexo. $\square$

Corolario 6.5.5. *El conjunto de las componentes conexas de un abierto de $\mathbb{R}^n$ es numerable.*

Demostración. Denotamos por $\mathcal{C}$ la familia de las componentes conexas de un abierto $O \subset \mathbb{R}^n$. Sea $C \in \mathcal{C}$. Por la proposición anterior, C es abierto en $\mathbb{R}^n$. Usando el teorema 2.2.13, tomamos β una base numerable de la topología de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe elementos de β incluidos en C. Por el axioma de elección, tomamos uno $B_C \in \beta$ y lo fijamos: $B_C \subset C$. Se define la aplicación

$$\phi : \mathcal{C} \to \beta, \quad \phi(C) = B_C$$

y probamos que ϕ es inyectiva. Supongamos que $\phi(C) = \phi(C')$, es decir, $B_C = B_{C'}$. Entonces $B_C \subset C \cap C'$ y así $C \cap C' \neq \emptyset$. Entonces $C = C'$ por la proposición 6.4.2. Una vez probado que ϕ es inyectiva, como β es numerable, entonces $\mathcal{C}$ es un conjunto numerable. $\square$

Estudiamos el comportamiento de la conexión local respecto del producto topológico.

Proposición 6.5.6. *Sean (X,τ), (Y,τ') dos espacios topológicos. Entonces $(X \times Y, \tau \times \tau')$ es localmente conexo si y sólo si $(X,\tau), (Y,\tau')$ son localmente conexos.*

Demostración. Supóngase que $X \times Y$ es localmente conexo. Sea $(x, y) \in X \times Y$ y $\beta_{(x,y)}$ una base de entornos conexos de (x, y) en $X \times Y$. Probamos que $\beta_x = \{p_1(W) : W \in \beta_{(x,y)}\}$ es una base de entornos conexos de x en (X, τ). En primer lugar, $p_1(W)$ es un entorno conexo de x, pues p_1 es una aplicación abierta y continua. Sea ahora $U \in \mathcal{U}_x$. Por la continuidad de la proyección $p_1 : X \times Y \to X$, y usando la proposición 3.1.2, existe $W \in \beta_{(x,y)}$ tal que $p_1(W) \subset U$.

Sean ahora X e Y dos espacios localmente conexos y sean β_x y β'_y bases de entornos conexos de x e y respectivamente. Entonces $\beta_x \times \beta'_y$ es una base de entornos de (x, y) por la proposición 5.1.3 y los elementos de $\beta_x \times \beta'_y$ son conexos por el teorema 6.3.1. □

La conexión local no se mantiene por aplicaciones continuas, pues éstas en general no llevan bases de entornos en bases de entornos. Una condición suficiente para que la aplicación lleve entornos en entornos es que la aplicación sea abierta.

Proposición 6.5.7. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua y abierta. Si (X, τ) es un espacio localmente conexo, entonces $f(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Sea $f(x) \in f(X)$ y $V' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$. Por la continuidad de la aplicación f, existe $U \in \mathcal{U}_x$ conexo tal que $f(U) \subset V'$. Por ser f una aplicación abierta, $f(U) \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ (proposición 4.3.6) y es además conexo al ser imagen continua de un conexo. □

6.6. Conexión por arcos

La conexión estudiada en el teorema 6.1.5 sobre la recta euclídea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ permitió más tarde el estudio de la conexión de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ utilizando para ello el concepto de segmento que une dos puntos. La idea ahora es generalizar la noción de segmento a un espacio arbitrario. Recuérdese que el segmento $[x, y] \subset \mathbb{R}^n$ está definido como $\alpha([0, 1])$, donde $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ es la aplicación dada por $\alpha(t) = x + t(y - x)$.

Definición 6.6.1. Un arco (o camino) en un espacio topológico (X, τ) es una aplicación continua $\alpha : I = [0, 1] \to X$. A los puntos $\alpha(0), \alpha(1)$ se llaman extremos del arco y se dice que α une los puntos $\alpha(0)$ con $\alpha(1)$.

En la definición de arco, se puede sustituir el intervalo I por cualquier otro intervalo cerrado $[a, b]$, con $a < b$. En tal caso, si $\alpha : [a, b] \to X$ es una aplicación continua tal que $\alpha(a) = x$ y $\alpha(b) = y$, se construye $\beta : I \to X$ como $\beta(t) = \alpha((b-a)t + a)$. Obsérvese también que si α es un arco que une x con y, entonces $\alpha(I)$ es un conjunto conexo.

Construimos ahora arcos a partir de otros dados. Si α es un arco, se define el *arco inverso*, y lo denotamos por α^{-1}, como la aplicación

$$\alpha^{-1} : I \to X,\ \alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t).$$

Obsérvese que α no tiene porqué ser una aplicación biyectiva. El arco inverso tiene por imagen la misma que α, es decir, $\alpha^{-1}(I) = \alpha(I)$, pero se recorre desde el extremo final de α hasta el extremo inicial, es decir, α^{-1} une $\alpha(1)$ con $\alpha(0)$.

Dados dos arcos α, β tales que $\alpha(1) = \beta(0)$ se define otro arco, al que se denota por $\alpha * \beta$, como

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Esta aplicación está bien definida pues α y β coinciden en $t = 1/2$ y $\alpha * \beta$ es continua ya que $[0, 1/2]$ y $[1/2, 1]$ son subconjuntos cerrados en $[0, 1]$ y α y β son aplicaciones continuas (teorema 3.1.15). El arco $\alpha * \beta$ no es más que colocar $\alpha(I)$ junto a $\beta(I)$ recorriendo primero α y luego β, ambos a doble velocidad.

Proposición 6.6.2. *En un espacio topológico (X, τ) se define la relación binaria*

$$x \sim y \text{ si existe un arco } \alpha \text{ tal que } \alpha(0) = x \text{ y } \alpha(1) = y.$$

Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia. Si $x \in X$, denotamos por A_x su clase de equivalencia y se llama la componente arcoconexa de x.

Demostración. Para probar la propiedad reflexiva, dado $x \in X$, definimos el arco constante $c_x : I \to X$, $c_x(t) = x$. Como c_x es continua, $x \sim x$.

Para las propiedades simétrica y transitiva usamos arcos inversos y la operación $*$ definida anteriormente. □

Definición 6.6.3. Un espacio topológico (X, τ) es arcoconexo (o conexo por arcos) si tiene una única componente arcoconexa.

Dicho de otro modo, un espacio es arcoconexo si cualesquiera dos puntos se pueden unir por un arco. Destacamos algunas propiedades de las componentes arcoconexas.

Proposición 6.6.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico.*

1. *Una componente arcoconexa es un conjunto arcoconexo.*
2. *Una componente arcoconexa es un conjunto conexo.*
3. *Un espacio arcoconexo es conexo.*
4. *La arcoconexión es una propiedad topológica.*

Demostración. Sea $x \in X$ y A_x la componente arcoconexa de x.

1. Para probar que A_x es un conjunto arcoconexo hay que demostrar que si y es un punto arbitrario de A_x, existe un arco *en* A_x que une x con y. Se sabe que existe un arco $\alpha : I \to X$ con $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. Veamos que $\alpha(I) \subset A_x$, es decir, $\alpha(t) \sim x$ para todo $t \in I$. Para ello basta con tomar el arco $\beta : [0,t] \to X$ definido por $\beta(s) = \alpha(s)$.
2. Dado $y \in A_x$, el conjunto $\alpha(I)$ es conexo y $x, y \in \alpha(I)$, luego A_x es conexo por el teorema 6.2.1.
3. Si el espacio es arcoconexo, tiene una única componente arcoconexa que coincide con todo el espacio. Pero una componente arcoconexa es conexa por la propiedad anterior.
4. Sea un homeomorfismo $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ entre dos espacios topológicos y supongamos que X es arcoconexo. Sean $y_0,\ y_1 \in Y$. Existen $x_0,\ x_1 \in X$ tales que $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$. Por ser X arcoconexo existe un arco $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$. Entonces $f \circ \alpha : I \to Y$ es un arco en Y que une y_0 e y_1.

□

Los siguientes resultados son análogos a los del teorema 6.2.1.

Proposición 6.6.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Si se satisface alguna de las siguientes propiedades, el espacio es arcoconexo.*

1. *Existe una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos arcoconexos de X tales que $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ y $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.*

2. *Existe $x_0 \in X$ tal que para todo $x \in X$, existe un subconjunto arcoconexo que contiene a x_0 y x.*

3. *Para cualesquiera puntos $x, y \in X$, existe un subconjunto arcoconexo que contiene a x e y.*

4. *Existe una familia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos arcoconexos de X tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Es fácil probar, de la misma forma que sucedía con las componentes conexas, que la componente arcoconexa de un punto $x \in X$ es el mayor conjunto arcoconexo que contiene a x, es decir,

$$A_x = \bigcup\{A \subset X : A \text{ es arcoconexo}, x \in A\}.$$

Sucede a veces que para estudiar que un espacio es conexo, previamente se demuestra que es arcoconexo. Así ha sucedido en gran parte de las demostraciones de conexión que se hicieron en la sección 6.1 para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, donde se demostraba en realidad que eran arcoconexos usando como arcos los segmentos entre dos puntos.

Existe un matiz importante entre estudiar conexión y arcoconexión. Para probar que un espacio es conexo, demostramos que *no* existen particiones no triviales por abiertos. Sin embargo para demostrar que es arcoconexo hay que *hallar* un arco entre dos puntos arbitrarios. En la práctica, saber si un espacio es arcoconexo se reduce a ingeniarse arcos en dicho espacio, tarea aún más intuitiva si el espacio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 6.6.6. 1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es arcoconexo, pues dos puntos cualesquiera se pueden unir por un segmento. Concretamente, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = x + t(y - x)$ es un arco que los une. Generalizando, todo conjunto estrellado o convexo de $\mathbb{R}^n$ es arcoconexo.

2. Los subconjuntos arcoconexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos. Efectivamente, un conjunto arcoconexo es un conexo, luego es un intervalo. Recíprocamente, todo intervalo es arcoconexo al ser convexo.

3. Un espacio discreto no es arcoconexo al no ser conexo. Además las componentes arcoconexas son los puntos, ya que $A_x \subset C_x = \{x\}$ para todo $x \in X$. Lo mismo sucede con el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$.

4. El conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ tiene exactamente dos componentes arcoconexas, a saber, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$. En este espacio, como en el ejemplo previo, las componentes arcoconexas coinciden con las componentes conexas.

5. Sea X un conjunto y $p \in X$. Se considera la topología del punto excluido. Este espacio es arcoconexo. Para ello se va a probar que el punto p se une con cualquiera otro. Sea $x \in X$ y $\alpha : I \to X$ el arco definido por

$$\alpha(t) = \begin{cases} p & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ x & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Entonces α es continua pues para todo conjunto abierto O cuya preimagen no es vacía, se tiene

$$\alpha^{-1}(O) = \begin{cases} (\frac{1}{2}, 1] & \text{si } p \not\in O \\ [0, 1] & \text{si } p \in O \end{cases}$$

y en ambos casos, $\alpha^{-1}(O)$ es un abierto en $[0, 1]$. Aquí hemos usado que el único abierto O que contiene a p es el propio conjunto X.

Ejemplo 6.6.7. Se considera el seno del topólogo $X = A \cup B$ definido por

$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in (0, \infty) \right\}, \quad B = \{(0, 0)\},$$

y que ya apareció en el ejemplo 6.2.8. Se va a probar que A y B son las componentes arcoconexas de X. El conjunto A es arcoconexo porque es homeomorfo a $(0, \infty)$. Por otro lado, B también lo es por ser un punto.

Para acabar de probar que A y B son las componentes arcoconexas, se demuestra que los puntos $(0, 0) \in B$ y $(1/\pi, 0) \in A$ no se pueden unir por un arco de X. Por reducción al absurdo, supongamos que $\alpha : I \to X$ es un arco uniendo ambos puntos y denotamos $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Como $\alpha(0) = (0, 0)$ y $\alpha(1) = (1/\pi, 0)$, tenemos

$$x(0) = 0, \ x(1) = \frac{1}{\pi}.$$

Por el teorema del valor intermedio, existe $t_2 \in (0, 1)$ tal que $x(t_2) = 2/3\pi$. Como $x(t_2) \neq 0$, entonces $\alpha(t_2) \in A$ y por tanto, por la definición de A, $y(t_2) = -1$. Nos restringimos al intervalo $[0, t_2]$ y haciendo un argumento similar, vamos construyendo una sucesión decreciente $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ tal que

$$x(t_n) = \frac{2}{(2n - 1)\pi}.$$

En particular, $y(t_n) = (-1)^{n+1}$. Como la sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada inferiormente y es decreciente, es convergente. Sea $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \to a$. Ya que que la aplicación $y : y(t)$ es continua, la sucesión $\{y(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente. Sin embargo, esta sucesión es $\{(-1)^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$, que no es convergente: contradicción.

Este ejemplo da pie a las siguientes observaciones.

1. Hay conjuntos conexos que no son arcoconexos.
2. La adherencia de un conjunto arcoconexo no tiene porqué ser arcoconexo: el conjunto $A = \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\}$ es arcoconexo, pero su adherencia es $A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$, que no es arcoconexo.
3. Una componente arcoconexa no tiene porqué ser cerrada. En el ejemplo anterior, la componente arcoconexa A no es cerrada. Tampoco son conjuntos abiertos pues el conjunto B no lo es (comparar con la proposición 6.5.4).

Caracterizamos los espacios conexos que son arcoconexos. Previamente se enuncia un resultado análogo a la proposición 6.5.4.

Lema 6.6.8. *Una componente arcoconexa es un conjunto abierto si y sólamente si cada punto tiene un entorno arcoconexo.*

Demostración. Supongamos que las componentes arcoconexas son abiertas y sea $x \in X$. Como $A_x \in \tau$, $A_x \in \mathcal{U}_x$ y es un conjunto arcoconexo.

Se supone ahora que cada punto tiene un entorno arcoconexo. Para probar que A_x es un conjunto abierto, se prueba que es entorno de todos sus puntos. Sea $y \in A_x$ y $U \in \mathcal{U}_y$ arcoconexo. Entonces $U \subset A_y = A_x$, es decir, $y \in \text{int}(A_x)$. □

Obsérvese que si las componentes arcoconexas son abiertas, también son cerradas, pues cada componente es el conjunto complementario de la unión de todas las demás componentes, que forman un conjunto abierto.

Teorema 6.6.9. *Sea (X, τ) un espacio conexo. Si cada punto tiene un entorno arcoconexo, entonces (X, τ) es arcoconexo.*

Demostración. Sea $x \in (X, \tau)$ y A_x su componente arcoconexa. Por tener x un entorno arcoconexo, el lema 6.6.8 afirma que la componente arcoconexa es un conjunto abierto. Por tanto toda componente arcoconexa del espacio es un conjunto abierto y, como se ha comentado anteriormente, también es un conjunto cerrado. Por ser el espacio conexo, $A_x = X$, luego X es arcoconexo. □

Corolario 6.6.10. *Si todo punto tiene un entorno arcoconexo, entonces las componentes arcoconexas coinciden con las componentes conexas.*

Corolario 6.6.11. *La esfera $\mathbb{S}^n$ es arcoconexa.*

Demostración. La esfera $\mathbb{S}^n$ es conexa. Por otra parte, si $p \in \mathbb{S}^n$, el conjunto $\mathbb{S}^n \setminus \{-p\}$ es un entorno de p y es arcoconexo por ser homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. □

Corolario 6.6.12. *Un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$ es arcoconexo.*

Demostración. Si A es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Dicha bola es un entorno arcoconexo de x ya que es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, luego el resultado se sigue del teorema 6.6.9. □

Este resultado no es cierto para conjuntos cerrados: continuando con el ejemplo 6.6.7, el conjunto $Y = A \cup (\{0\} \times [-1, 1]) = \overline{A}$ es cerrado, pero no es arcoconexo.

Nota 6.6.13. Las bolas en un espacio métrico no tienen porqué ser ni arcoconexas ni conexas. Así, consideramos el espacio métrico $X = [0, 1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$ con la distancia usual. Entonces $B_2(2) = X \setminus \{0\} = (0, 1) \cup \{2\}$, que no es conexo.

De la demostración del apartado 3 de la proposición 6.6.4, se deduce:

Proposición 6.6.14. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua. Si (X, τ) es arcoconexo, entonces $f(X)$ es arcoconexo.*

Se finaliza esta sección estudiando el comportamiento de la conexión por arcos respecto del producto topológico.

Proposición 6.6.15. *Sean $(X, \tau), (Y, \tau')$ dos espacio topológicos. Entonces $(X \times Y, \tau \times \tau')$ es arcoconexo si y sólo si (X, τ) e (Y, τ') son arcoconexos.*

Demostración. Usando las aplicaciones proyecciones y la proposición anterior, se deduce que si $X \times Y$ es arcoconexo, cada uno de los espacios X e Y también es arcoconexo.

Supongamos ahora que X e Y son arcoconexos y sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Se denota por α y β arcos en X e Y respectivamente que unen x_1 con x_2 e y_1 con y_2. Definimos la aplicación

$$\gamma : I \to X \times Y, \quad \gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t)).$$

Ver figura 6.9. Entonces γ es continua pues $p \circ \gamma = \alpha$ y $p' \circ \gamma = \beta$. Además γ une (x_1, y_1) con (x_2, y_2).

Existe también otro arco que une ambos puntos, concretamente $\alpha_1 * \beta_1$, donde

$$\alpha_1 : I \longrightarrow X \times Y,\ \alpha_1(t) = (\alpha(t), y_1)$$
$$\beta_1 : I \longrightarrow X \times Y,\ \beta_1(t) = (x_2, \beta(t)).$$

Obsérvese que α_1 y β_1 con continuas y que $\alpha_1(1) = \beta_1(0) = (x_2, y_1)$, luego se puede realizar la operación $\alpha_1 * \beta_1$.

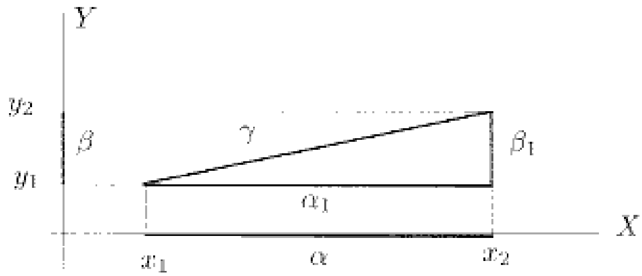


Figura 6.9: Los arcos de la demostración de la proposición 6.6.15

□

Corolario 6.6.16. *El cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, el n-toro $\mathbb{S}^1 \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{S}^1$ y los espacios productos $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m$, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$, son arcoconexos.*

6.7. Ejercicios

1. Sea el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ y

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

   Probar que τ es una topología y que (X, τ) no es conexo. Hallar las componentes conexas. Estudiar si el conjunto $A = \{b, d, e\}$ es conexo.

2. Hallar las componentes conexas de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$.

3. Sea un homeomorfismo $f : [a, b] \to [c, d]$ entre dos intervalos cerrados de $\mathbb{R}$. Probar que $f(\{a, b\}) = \{c, d\}$.

4. Sea (X, τ) un espacio topológico y una familia de subconjuntos conexos $\{X_i\}_{i \in I}$ tales que $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ y existe $i_0 \in I$ tal que $X_{i_0} \cap X_i \neq \emptyset$, $\forall i \in I$. Probar que (X, τ) es conexo. ¿Se obtiene un resultado análogo cambiando conexión por arcoconexión?

5. Estudiar la conexión, conexión local y arcoconexión de las cónicas de $\mathbb{R}^2$ y las cuádricas de $\mathbb{R}^3$.

6. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto numerable con $n > 1$. Probar que $\mathbb{R}^n \setminus A$ es conexo.

7. Se considera un conjunto X con dos topologías τ_1 y τ_2 siendo τ_1 más fina que τ_2. Relacionar todas las propiedades de conexión entre los espacios (X, τ_1) y (X, τ_2).

8. Sea $\mathbb{R}$ con la topología $\tau(\beta_o)$ del ejemplo 1.2.12. Sea $A = (0, \infty)$ y $f : (A, \tau(\beta_o)_{|A}) \to (\mathbb{R}, \tau(\beta_o))$, $f(x) = \arctan(x)$. Probar que f es un embebimiento, pero $f(A)$ no es abierto en $(\mathbb{R}, \tau(\beta_o))$.

9. Sea $H \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio afín con $n \geq 2$. Probar que $\mathbb{R}^n \setminus H$ no es conexo si y sólo si $\dim(H) = n - 1$.

10. Probar que un espacio topológico (X, τ) es conexo si y sólo si $\mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$ para cualquier subconjunto propio A de X.

11. Probar que un subconjunto no vacío, conexo, abierto y cerrado de un espacio topológico es una componente conexa de dicho espacio.

12. Estudiar las propiedades de conexión de $\mathbb{R}$ con la topología a derechas.

13. Sea (X, τ) un espacio topológico e $Y \subset X$. Probar que Y no es conexo si y sólo si existen $A, B \in \tau$ tales que $A \cap B \cap Y = \emptyset$, $A \cap Y \neq \emptyset$, $B \cap Y \neq \emptyset$ e $Y \subset A \cup B$.

14. Demostrar que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ es conexo.

15. Continuamos el ejercicio anterior del siguiente modo. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Probar que $\mathbb{R}^2 \setminus G(f)$ tiene exactamente dos componentes conexas. Generalizar a dimensiones arbitrarias.

16. Probar el corolario 6.1.9 y el teorema 6.2.6 usando las caracterizaciones de la proposición 6.1.3.

17. Probar que la familia β de la definición 6.4.13 es base de una topología.

18. Sean A y B dos subconjuntos conexos de un espacio topológico. Si $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, probar que $A \cup B$ es conexo.

19. Dar un ejemplo de un subconjunto de un espacio topológico que sea conexo pero no su interior.

20. Sea un conjunto abierto A de un espacio localmente conexo. Probar que A es localmente conexo. Dar un ejemplo de dos subconjuntos cerrados

de un espacio topológico localmente conexo, tal que uno sea localmente conexo y otro no.

21. Estudiar la conexión, conexión local y arcoconexión de las topologías del punto incluido y del punto excluido.

22. Sea $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ como subconjunto del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Probar que $(0,0)$ no tiene ningún entorno homeomorfo a $\mathbb{R}$.

23. Usar el apartado 3 del teorema 6.2.1 para probar que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es conexo.

24. Usando que el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es una superficie de revolución, probar que es conexo con un argumento parecido al del corolario 6.3.4.

25. Sean A y B dos subconjuntos de un espacio topológico (X, τ). Si A y B son conjuntos cerrados tales que $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, probar que A y B son también conexos. Mostrar un ejemplo que no se obtiene el mismo resultado si uno de los conjuntos no es cerrado.

26. Un espacio topológico se llama *totalmente disconexo* si los únicos subconjuntos conexos son los subconjuntos unitarios. Probar que la topología discreta es totalmente disconexa. Mostrar con un ejemplo que existen espacios totalmente disconexos que no tienen la topología discreta.

27. Se considera $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico definida en el ejercicio 3 del capítulo 5. Probar que X es conexo, pero no existe un arco que una $(0,0)$ con el punto $(1,1)$.

28. Hallar las componentes conexas de $\mathbb{R}^\omega$ con la topología caja.

29. Sean (X, τ) e (Y, τ') espacios conexos y $A \subsetneq X$ y $B \subsetneq Y$ subconjuntos propios. Probar que $X \times Y \setminus A \times B$ es conexo.

30. Probar que la esfera, el toro y el cilindro no son homeomorfos a ningún subconjunto de $\mathbb{R}$.

31. Sean $p, q \in \mathbb{S}^1$. Probar que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{p, q\}$ es conexo y localmente conexo.

32. Sea $\mathbb{Q}$ y $p \notin \mathbb{Q}$. Se considera $X^* = \mathbb{Q} \cup \{p\}$ y la topología τ^* formada por los elementos de la topología usual τ_u junto con los conjuntos $A \subset X^*$ tales que $\mathbb{Q} \setminus A$ es finito. Estudiar la conexión y conexión local.

33. Estudiar la conexión y la conexión local del conjunto X de $\mathbb{R}^2$ formado por $(1/2, 1] \times \{0\}$ y los segmentos que unen $(0,0)$ con los puntos de la forma $(1, 1/n)$. Ver figura 6.10.

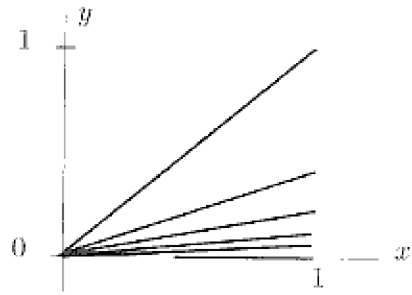


Figura 6.10: El conjunto X del ejercicio 33

34. Para todo punto de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ hallar una base de entornos no conexos.

35. Estudiar la conexión, conexión local y arcoconexión del espacio topológico (X, τ), donde $X = [-1, 1]$ y
$$\tau = \{O \subset X : 0 \notin O\} \cup \{O \subset X : (-1, 1) \subset O\}.$$

36. Se considera el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dada por
$$X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right).$$
Ver figura 6.11. Probar que X es conexo pero no es localmente conexo.

Figura 6.11: El conjunto X del ejercicio 36

37. Siguiendo con el ejemplo anterior, sea $Y = X \setminus (\{0\} \times (0, 1))$. Probar que Y es conexo pero no existe un arco en Y uniendo $(0, 0)$ con el punto $(0, 1)$.

38. Estudiar la arcoconexión de la topología de los complementos finitos.

Capítulo 7

Separación y numerabilidad

En este capítulo introducimos los conceptos de separación y numerabilidad en un espacio topológico. Como su propio nombre indican, los primeros tratan de *separar* cierto tipo de subconjuntos (puntos y cerrados) mediante conjuntos abiertos. Los axiomas de numerabilidad están relacionados con la existencia de una cantidad numerable de determinados elementos topológicos, como por ejemplo base de abiertos y base de entornos. Algunos de estos conceptos, como el axioma Hausdorff y Lindelöff, se retomarán en los próximos capítulos. De la misma forma que se ha hecho en los temas precedentes, se estudiará también el comportamiento de los nuevos conceptos respecto de la topología inducida, de la topología producto y de las aplicaciones continuas.

Aunque todos estos conceptos son invariantes topológicos, y como tales, permiten clasificar espacios topológicos, también están relacionados con otros problemas topológicos, uno de los cuales ya ha aparecido en anteriores capítulos: ¿bajo qué condiciones un espacio topológico es metrizable? En el teorema 7.6.9 daremos una respuesta parcial a esta pregunta.

7.1. Los axiomas T_0 y T_1

Recordamos el axioma de separación que ya se definió en el ejemplo 4.1.18.

Definición 7.1.1. Un espacio topológico (X, τ) se llama T_0 si para todo $x, y \in X$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $y \notin U$ o existe $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $x \notin V$.

A continuación se define otro axioma de separación.

Definición 7.1.2. Un espacio topológico (X,τ) se dice que es T_1 si para todo $x,y \in X$, existen $U \in \mathcal{U}_x$, $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $x \notin V$ e $y \notin U$.

En las definiciones anteriores, y por la definición de entorno, se puede cambiar "entorno de un punto" por "conjunto abierto que contiene al punto". Evidentemente ambos axiomas de separación son invariantes topológicos. Por otro lado, todo espacio que es T_1 también es T_0. El axioma de separación T_1 tiene la siguiente caracterización.

Proposición 7.1.3. *Un espacio topológico es T_1 si y sólamente si todo punto es un conjunto cerrado.*

Demostración. Supóngase que (X,τ) es T_1. Si $\{x\}$ no es cerrado, existe $y \in \overline{\{x\}}$ tal que $x \neq y$. Por ser el espacio T_1, existe $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $x \notin V$. Por tanto y no sería un punto adherente a $\{x\}$, lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que todo punto del espacio es un conjunto cerrado. Sean $x,y \in X$. Ya que $y \notin \{x\} = \overline{\{x\}}$, existe $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $\{x\} \cap V = \emptyset$, es decir, $x \notin V$. De forma análoga, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $y \notin U$.

Estudiamos estos axiomas de separación en algunos espacios topológicos.

EJEMPLO 7.1.4.
1. Un espacio topológico con la topología discreta es T_1 pues todo punto es un conjunto cerrado.
2. Un espacio con la topología trivial no es T_0 porque un punto no es cerrado.
3. Un espacio métrico es T_1. Si x e y son dos puntos de un espacio métrico (X,d), entonces el número positivo $r = d(x,y)$ satisface $y \notin B_r(x)$ y $x \notin B_r(y)$.
4. Se muestra un ejemplo de un espacio topológico que es T_0 pero no satisface la propiedad T_1. Sea un conjunto con dos elementos, $X = \{a, b\}$ con la topología de Sierpinski $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Este espacio es T_0, pues $\{a\} \in \mathcal{U}_a$ y $b \notin \{a\}$. Sin embargo no es T_1, pues $\{a\}$ no es un conjunto cerrado.
5. Se considera $\mathbb{R}$ con la topología a derechas τ_d. Este espacio es T_0, ya que si $x < y$, entonces $x \notin [y,\infty)$ e $[y,\infty) \in \mathcal{U}_y$. Por otro lado, no es T_1 pues $\overline{\{x\}} = (-\infty, x]$, luego $\{x\}$ no es cerrado.

El último ejemplo permite relacionar la propiedad T_0 y la relación de orden en un conjunto del siguiente modo.

Teorema 7.1.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico T_0 y con la propiedad que la intersección arbitraria de abiertos es abierto. Entonces existe una re* *ción de orden $\leq$ en X de forma que la topología a derechas τ_d que determina coincide con τ.*

Demostración. Motivados por lo que sucede en la topología a derechas en $\mathbb{R}$, definimos una relación binaria en X de la siguiente forma:

$$x \leq y \text{ si } x \in \overline{\{y\}}.$$

Comprobamos que $\leq$ es una relación de orden en X.

1. La reflexividad es inmediata, pues siempre un conjunto está incluido en su adherencia.

2. Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq x$, es decir, $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{x\}}$. Si $x \neq y$, y ya que el espacio es T_0, podemos suponer que existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $y \notin U$. Como $x \in \overline{\{y\}}$, la intersección $U \cap \{y\}$ no es vacía, es decir, $y \in U$, lo cual es una contradicción.

3. Para probar la propiedad transitiva, supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$, es decir, $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{z\}}$. Entonces $\overline{\{y\}} \subset \overline{\overline{\{z\}}} = \overline{\{z\}}$, luego $x \in \overline{\{y\}} \subset \overline{\{z\}}$, es decir, $x \leq z$.

Además, de la definición de $\leq$ se deduce que

$$\overline{\{x\}} = (\leftarrow, x] = \{y \in X : y \leq x\}.$$

Una vez definida la relación de orden, por el ejemplo 1.2.21 existe una topología a derechas asociada, es decir, aquélla que tiene por base a $\beta = \{[x, \rightarrow) : x \in X\}$, donde $[x, \rightarrow) = \{y \in X : x \leq y\}$.

Probamos ahora que $\tau = \tau_d$. Para ello se verá que $\overline{A} = \overline{A}^d$ para todo $A \subset X$, lo cual es suficiente por el comentario que se hizo después de la proposición 1.6.13. También sabemos que $\overline{\{x\}}^d = (\leftarrow, x]$, es decir, $\overline{\{x\}} = \overline{\{x\}}^d$. Sea $A \subset X$. Probamos que $\overline{\cup_{x\in A}\{x\}} = \cup_{x\in A}\overline{\{x\}}$ y $\overline{\cup_{x\in A}\{x\}}^d = \cup_{x\in A}\overline{\{x\}}^d$. Por hipótesis, la unión arbitraria de cerrados es un conjunto cerrado. Ya que

$$\overline{\bigcup_{x\in A}\{x\}} \supset \bigcup_{x\in A}\overline{\{x\}} \supset \bigcup_{x\in A}\{x\},$$

tomando adherencia en esta inclusión, y ya que la unión de cerrados es un conjunto cerrado, tenemos

$$\overline{\bigcup_{x\in A}\{x\}} \supset \overline{\bigcup_{x\in A}\overline{\{x\}}} = \bigcup_{x\in A}\overline{\{x\}} \supset \overline{\bigcup_{x\in A}\{x\}}.$$

luego hay igualdad. La otra igualdad con la topología τ_d es análoga. Ya q $\overline{\{x\}} = \overline{\{x\}}^d$, se concluye

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{\bigcup_{x\in A}\{x\}} = \bigcup_{x\in A}\overline{\{x\}} = \bigcup_{x\in A}\overline{\{x\}}^d \\ &= \overline{\bigcup_{x\in A}\{x\}}^d = \overline{A}^d.\end{aligned}$$

Veamos ahora algunas propiedades de los axiomas T_0 y T_1, concretamer se estudia cómo se comportan respecto a la topología relativa y al produc topológico. Ya que estas cuestiones se plantearán para las demás propie des de separación y numerabilidad de este capítulo, damos previamente siguientes definiciones.

1. Una propiedad $\mathcal{P}$ se dice que es *hereditaria* si dado un espacio q satisface dicha propiedad $\mathcal{P}$, todo subconjunto suyo, como subespa topológico, también la cumple.
2. Una propiedad $\mathcal{P}$ se llama *productiva* si dados dos espacios topoló cos que satisfacen dicha propiedad, el producto topológico también cumple.

Proposición 7.1.6. *Las propiedades T_0 y T_1 son hereditarias y productiv*

Demostración. Se demuestra la proposición sólo para la propiedad T_0.

1. Sea (X,τ) un espacio topológico que es T_0 y $A \subset X$. Sean $a, b \in$ Como X es T_0, se puede suponer que existe $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $b \notin$ Entonces $U \cap A \in \mathcal{U}_a^A$ y $b \notin U \cap A$.
2. Se consideran dos espacios topológicos (X,τ) e (Y,τ') que satisfacen propiedad T_0 y sean $(x,y),(x',y') \in X \times Y$. Supóngase por ejemplo c $x \neq x'$. Ya que X satisface el axioma T_0, ssuponemos que existe $U \in$ tal que $x' \notin U$. Entonces $U \times Y \in \mathcal{U}_{(x,y)}$ y $(x',y') \notin U \times Y$.

7.2. El axioma Hausdorff

Definición 7.2.1. Un espacio topológico (X,τ) satisface el axioma de se ración Hausdorff, también llamado T_2, si para todo $x, y \in X$ existen $U \in$ y $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $U \cap V = \emptyset$.

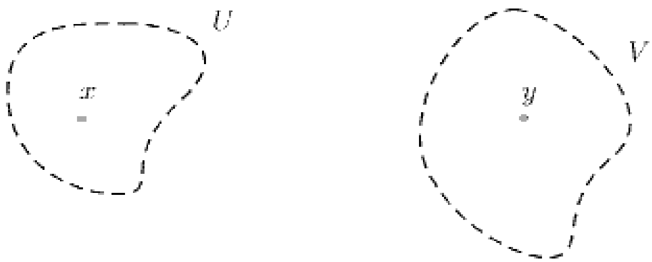


Figura 7.1: La propiedad Hausdorff

Hacemos algunas observaciones:

1. En la definición se puede cambiar entornos por conjuntos abiertos que contienen a cada uno de los puntos.
2. Todo espacio que es T_2 también es T_1. La topología de los complementos finitos es un ejemplo de un espacio T_1 que no es T_2.
3. Un espacio métrico es Hausdorff (proposición 2.2.11).

Un espacio topológico Hausdorff posee propiedades interesantes, más que los axiomas T_0 y T_1, como se pondrá de manifiesto, por ejemplo, en el capítulo 8. Sin duda, la propiedad más importante es la siguiente:

Proposición 7.2.2. *En un espacio Hausdorff las sucesiones convergentes tienen un único límite.*

Demostración. Supóngase que x, y son dos límites de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ya que el espacio es Hausdorff, existen $U \in \mathcal{U}_x$, $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $U \cap V = \emptyset$. Por la convergencia de la sucesión, sea $\nu_x \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu_x$, $x_n \in U$ y sea $\nu_y \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para cualquier $n \geq \nu_y$. Entonces para $n \geq \max\{\nu_x, \nu_y\}$, $x_n \in U \cap V$, lo cual es una contradicción. $\square$

Observemos que este resultado generaliza el dado en la proposición 2.4.5, ya que un espacio métrico es Hausdorff. Además la demostración es formalmente la misma. Sin embargo la prueba allí usaba la proposición 2.2.11 que estaba dada en términos de distancia, ocultando la verdadera naturaleza topológica del resultado.

Es inmediato el siguiente resultado.

Proposición 7.2.3. *La propiedad Hausdorff es una propiedad topológica, productiva y hereditaria.*

Establecemos varias caracterizaciones de la propiedad Hausdorff.

Teorema 7.2.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El espacio es Hausdorff.*
2. *Para cada $x\in X$, $\{x\}=\bigcap\{\overline{U}:U\in\mathcal{U}_x\}$.*
3. *El conjunto diagonal $\Delta=\{(x,x)\in X\times X: x\in X\}$ es cerrado en el espacio producto $(X\times X,\tau\times\tau)$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $y\in\bigcap\{\overline{U}:U\in\mathcal{U}_x\}$ y supongamos que $y\neq x$. Entonces para todo $U\in\mathcal{U}_x$, $y\in\overline{U}$, es decir, para todo $V\in\mathcal{U}_y$, $U\cap V\neq\emptyset$, lo cual está en contradicción con que el espacio sea Hausdorff.

(2) $\Rightarrow$ (3). Para probar que Δ es un conjunto cerrado, se va a demostrar que $X\times X\setminus\Delta$ es un conjunto abierto. Sea $(x,y)\notin\Delta$. Entonces $x\neq y$. Por tanto $y\neq\bigcap\{\overline{U}:U\in\mathcal{U}_x\}$, lo cual quiere decir que existe $U\in\mathcal{U}_x$ tal que $y\notin\overline{U}$ y por tanto existe $V\in\mathcal{U}_y$ tal que $U\cap V=\emptyset$. El conjunto $U\times V$ es un entorno de (x,y) y no interseca a Δ, pues si $(z,z)\in\Delta\cap(U\times V)$, entonces $z\in U\cap V$, lo cual es falso. Ya que $(U\times V)\cap\Delta=\emptyset$, se deduce la inclusión $U\times V\subset(X\times X)\setminus\Delta$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sean $x\neq y$, es decir, $(x,y)\notin\Delta$. Ya que el conjunto $X\times X\setminus\Delta$ es abierto, y usando la proposición 5.1.3, existen $U\in\mathcal{U}_x$, $V\in\mathcal{U}_y$ tales que $U\times V\subset(X\times X)\setminus\Delta$ y es evidente que $U\cap V=\emptyset$. $\square$

Corolario 7.2.5. *Sean $f,g:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ dos aplicaciones continuas donde (Y,τ') es un espacio Hausdorff. Entonces*

$$A=\{x\in X: f(x)=g(x)\}$$

es un subconjunto cerrado de (X,τ). En particular, si A es denso, $f=g$.

Demostración. Se considera la aplicación evaluación

$$e:X\to Y\times Y,\quad e(x)=(f(x),g(x)).$$

Ya que Y es un espacio Hausdorff, el conjunto diagonal Δ' de Y es cerrado en $Y\times Y$ por el teorema 7.2.4. Como la aplicación e es continua, $e^{-1}(\Delta')$ es un conjunto cerrado de X, pero dicho conjunto es justamente A. $\square$

Mostramos un ejemplo de cómo se utiliza este resultado.

Ejemplo 7.2.6. Se considera una aplicación $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con la siguiente propiedad
$$f(x+y)=f(x)f(y),\quad x,y\in\mathbb{R}. \tag{7.1}$$
Probamos que si f *es continua* entonces $f\equiv 0$ ó existe $a>0$ tal que $f(x)=a^x$. La demostración consiste en probar que f coincide con la función nula o existe una función del tipo a^x tal que f coincide con ella en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, el cual es denso en $\mathbb{R}$. Basta entonces aplicar el corolario 7.2.5 para establecer la igualdad deseada.

Primero probamos que la función f es no negativa. Esto es consecuencia de
$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)^2\geq 0.$$

Caben ahora dos posibilidades.

1. Supongamos que f se anula en algún punto x_0. En tal caso probamos que $f=0$. Sea $x\in\mathbb{R}$ un número arbitrario. Usando (7.1), tenemos
$$f(x)=f(x-x_0+x_0)=f(x-x_0)f(x_0)=0.$$

2. La otra posibilidad es que $f(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Denotamos $a=f(1)$ y definimos la función $g(x)=a^x$. Vamos a probar que $f(x)=g(x)$ para todo $x\in\mathbb{Q}$, y esto finalizaría la demostración. La relación (7.1) da $f(0)=f(0+0)=f(0)^2$ y entonces $f(0)=1$. Por tanto, $f(0)=g(0)$. Por otra parte, si $x\in\mathbb{R}$, (7.1) implica
$$f(x)f(-x)=f(x-x)=f(0)=1,$$
luego $f(-x)=1/f(x)$.
Sea $n\in\mathbb{N}$. Entonces por (7.1),
$$f(n)=f(1+\overset{n}{\dots}+1)=f(1)^n=a^n=g(n).$$
Si $n\in\mathbb{Z}^-$, entonces
$$f(n)=\frac{1}{f(-n)}=\frac{1}{a^{-n}}=a^n=g(n).$$
Por otro lado, para todo $n\in\mathbb{N}$,
$$a=f(1)=f\left(\frac{1}{n}+\overset{n}{\dots}+\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$
por tanto $f(1/n)=a^{1/n}=g(1/n)$.

Sea ahora $q \in \mathbb{Q}$ de la forma $q = m/n$, donde $m, n > 0$. Entonces

$$f(q) = f\left(\frac{1}{n} + \overset{m}{\cdots} + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^m = a^q = g(q).$$

Si $q \in \mathbb{Q}^-$,

$$f(q) = \frac{1}{f(-q)} = \frac{1}{a^{-q}} = a^q = g(q).$$

Hemos probado por tanto que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Para acabar, generalizamos el ejemplo 2.3.5 en el que se probaba que el grafo de una función real era un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.

Proposición 7.2.7. *Consideramos una aplicación continua $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ entre dos espacios topológicos, donde (Y, τ') es un espacio Hausdorff.*

1. *El grafo de f es un subconjunto cerrado en $(X \times Y, \tau \times \tau')$.*
2. *Si además f es una aplicación inyectiva, (X, τ) es un espacio Hausdorff.*

Demostración. 1. Usando que (Y, τ') es un espacio Hausdorff, el teorema 7.2.4 asegura que su diagonal Δ' es un subconjunto cerrado de $Y \times Y$. La aplicación

$$\phi : X \times Y \to Y \times Y, \quad \phi(x, y) = (f(x), y)$$

es continua y por tanto, $G(f) = \phi^{-1}(\Delta')$ es un conjunto cerrado.

2. Sean $x_1, x_2 \in X$. Ya que f es inyectiva, $f(x_1) \neq f(x_2)$, luego existen respectivos entornos V_1' y V_2' tales que $V_1' \cap V_2' = \emptyset$. Por la continuidad de la aplicación f, existen entornos $U_i \in \mathcal{U}_{x_i}$, $i = 1, 2$, tales que $f(U_i) \subset V_i'$ y es evidente que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Esto demuestra que (X, τ) es un espacio Hausdorff.

□

7.3. El axioma de separación T_3

Los axiomas previos han ido separando de distintas formas dos puntos en un espacio topológico. En el siguiente axioma separamos un punto de un conjunto cerrado.

Definición 7.3.1. Un espacio topológico (X, τ) es regular si para todo $x \in X$ y $F \in \mathcal{F}$ con $x \notin F$, existen $U \in \mathcal{U}_x$ y $O \in \tau$ con $F \subset O$, tal que $U \cap O = \emptyset$. Un espacio topológico satisface el axioma T_3 si es T_1 y regular.

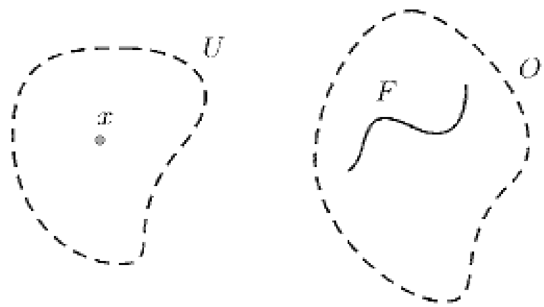


Figura 7.2: La propiedad de regularidad

Proposición 7.3.2. *Un espacio métrico es T_3.*

Demostración. Basta con probar que es regular. Sea (X,d) el espacio métrico, $x \in X$ y F un conjunto cerrado tal que $x \not\in F$. Como $x \not\in F = \overline{F}$, la proposición 2.4.10 asegura que $d(x,F) > 0$. Sea $2r = d(x,F)$. Llamamos $U = B_r(x)$ y $O = \cup_{y\in F} B_r(y)$. Entonces O es un conjunto abierto que contiene a F. Por otra parte, si existe $z \in U \cap O$, entonces existe $y \in F$ tal que $z \in B_r(x) \cap B_r(y)$ y por tanto, la desigualdad triangular da

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2r = d(x,F),$$

lo cual es una contradicción. $\square$

La propiedad de regularidad no implica Hausdorff, pues en un espacio regular los puntos pueden no ser cerrados. Sin embargo se tiene el siguiente resultado.

Proposición 7.3.3. *Un espacio T_3 es T_2.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Como el espacio es T_1, el conjunto $\{x\}$ es cerrado y así $y \not\in \overline{\{x\}}$. Usando que el espacio es regular, existen $O \in \tau$ con $x \in O$ (y por tanto, $O \in \mathcal{U}_x$) y $U \in \mathcal{U}_y$ tal que $U \cap O = \emptyset$. Esto prueba que el espacio es Hausdorff. $\square$

Teorema 7.3.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El espacio (X,τ) es regular.*
2. *Para cada $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{U}_x$ tal que $\overline{V} \subset U$.*

3. Todo punto tiene una base de entornos cerrados.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}_x$. Sea $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset U$. Consideramos el conjunto cerrado $F = X \setminus O$. Por ser el espacio regular, existen $V \in \mathcal{U}_x$ y $G \in \tau$ con $F \subset G$ y $V \cap G = \emptyset$. Entonces

$$V \subset \overline{V} \subset \overline{X \setminus G} = X \setminus G \subset O \subset U.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $x \in X$ y $\beta_x = \{U \in \mathcal{U}_x : U = \overline{U}\}$. La hipótesis dice que esta familia de entornos es una base de entornos del punto x. Observemos que $\beta_x \neq \emptyset$ pues $X \in \beta_x$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $x \in X$ y F un conjunto cerrado tal que $x \notin F$. El conjunto $X \setminus F$ es un abierto que contiene a x, luego es un entorno suyo. Por hipótesis, existe $U \in \mathcal{U}_x$ cerrado tal que $U \subset X \setminus F$. Llamamos $O = X \setminus U$, el cual es un conjunto abierto por ser complementario de un subconjunto cerrado. Ya que $U \subset X \setminus F$, entonces $F \subset X \setminus U = O$ y evidentemente $U \cap O = \emptyset$. $\square$

Corolario 7.3.5. *La recta de Sorgenfrey es un espacio regular.*

Demostración. Basta observar que para todo $x \in \mathbb{R}$, la familia $\beta_x^S = \{[x, z) : z > x\}$ es una base de entornos de x y que cada uno de los conjuntos $[x, z)$ es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_S)$. $\square$

Mostramos ahora un ejemplo de un espacio topológico que es Hausdorff pero no es regular.

Ejemplo 7.3.6. En $\mathbb{R}$ definimos una topología τ a partir de los entornos de cada punto. Para todo $x \neq 0$, los entornos de x coinciden con los entornos de la topología usual τ_u; si $x = 0$, los entornos del 0 son, además de los entornos de la topología usual, los conjuntos de la forma $U \setminus A$, donde U es un entorno de la topología usual del 0 y A es un subconjunto de la sucesión $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Denotamos por $\mathcal{U}_x^u$ el sistema de entornos de x en $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Ya que $\mathcal{U}_x^u \subset \mathcal{U}_x$, entonces $\tau_u \subset \tau$, es decir, la topología τ es más fina que la euclídea. Por tanto, como $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es Hausdorff, también lo es el espacio $(\mathbb{R}, \tau)$.

Demostramos que $(\mathbb{R}, \tau)$ no es regular. Para ello consideramos $F = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $0 \notin F$. Veamos que F es cerrado y que para todo $O \in \tau$ tal que $F \subset O$ y para todo $U \in \mathcal{U}_0$, $U \cap O \neq \emptyset$.

1. F es cerrado. Para ello es suficiente con probar que el 0 no es un punto adherente. Sea un entorno U cualquiera del 0 en la topología usual. Entonces $U \setminus F$ es un entorno de 0 en la nueva topología τ y por otra parte $(U \setminus F) \cap F = \emptyset$.

2. Si $U \in \mathcal{U}_0^a$, es evidente que $U \cap O \neq \emptyset$ ya que $U \cap F \neq \emptyset$. Por tanto, suponemos que $U \notin \mathcal{U}_0^a$. Entonces $U = V \setminus A$, donde $V \in \mathcal{U}_0^u$ y $A \subset F$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $(-\epsilon, \epsilon) \subset V$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon/2$. Entonces $1/n \in F \subset O$. Como O es abierto, y el sistema de entornos de $1/n$ es el de la topología usual, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(1/n) \subset O$. Sea $\eta = \min\{\delta, \epsilon/2\} > 0$ y $r \in (1/n - \eta, 1/n + \eta)$ tal que $r \notin F$. Entonces

$$r \in B_\eta\left(\frac{1}{n}\right) \subset B_\delta\left(\frac{1}{n}\right) \subset O.$$

Además

$$|r| \leq |r - \frac{1}{n}| + |\frac{1}{n}| < \eta + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

Por tanto $r \in (-\epsilon, \epsilon) \cap O$ y $r \notin F$, probando que $U \cap O \neq \emptyset$.

El siguiente resultado es evidente.

Proposición 7.3.7. *La propiedad de regularidad es una propiedad topológica, productiva y hereditaria.*

7.4. El axioma de separación T_4

Definición 7.4.1. Un espacio topológico (X, τ) se dice que es normal si para cualesquiera $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, con $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, existen $O_1, O_2 \in \tau$ con $F_i \subset O_i$, $i = 1, 2$ y tales que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Un espacio topológico satisface el axioma T_4 si es T_1 y es normal.

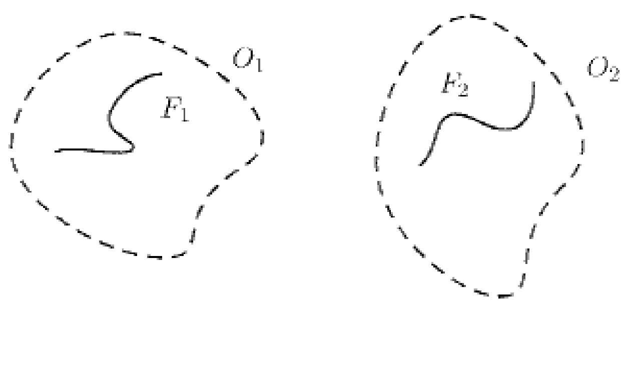


Figura 7.3: La propiedad de espacio normal

La propiedad de normalidad es una propiedad topológica. El primer ejemplo de un espacio normal lo encontramos de nuevo en un espacio métrico.

Proposición 7.4.2. *Un espacio métrico es normal.*

Demostración. Sean F_1 y F_2 dos conjuntos cerrados disjuntos de un espacio métrico (X, d). Utilizamos de nuevo la proposición 2.4.10. Si $x \in F_1$, existe $\delta_x > 0$ tal que $B_{3\delta_x}(x) \cap F_2 = \emptyset$. Análogamente, para todo $y \in F_2$, existe $\epsilon_y > 0$ tal que $B_{3\epsilon_y}(y) \cap F_1 = \emptyset$.

Llamamos

$$O_1 = \bigcup_{x \in F_1} B_{\delta_x}(x), \qquad O_2 = \bigcup_{y \in F_2} B_{\epsilon_y}(y).$$

Evidentemente O_1 y O_2 son conjuntos abiertos que contienen respectivamente a F_1 y F_2. Por otra parte, si existe $z \in O_1 \cap O_2$, entonces $z \in B_{\delta_x}(x) \cap B_{\epsilon_y}(y)$ para algún $x \in F_1$ e $y \in F_2$. Si suponemos por ejemplo que $\epsilon_y \leq \delta_x$, la desigualdad triangular asegura que

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \delta_x + \epsilon_y \leq 2\delta_x < 3\delta_x.$$

Por tanto, $y \in B_{3\delta_x}(x)$, lo cual es una contradicción con que F_1 y F_2 sean disjuntos. □

Observemos que en el plano $\mathbb{R}^2$ existen conjuntos cerrados y disjuntos a distancia 0 que se pueden separar por abiertos. Así tomamos

$$F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}, \quad F_2 = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}.$$

Ya que $d((x, 0), (x, 1/x)) = 1/x \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces $d(F_1, F_2) = 0$. Sin embargo si definimos la aplicación continua

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = y - \frac{1}{2x},$$

entonces $F_i \subset O_i$, donde O_1 y O_2 son los conjuntos abiertos definidos por $O_1 = f^{-1}((-\infty, 0))$ y $O_2 = f^{-1}((0, \infty))$.

Enunciamos ahora otra caracterización de espacio normal.

Proposición 7.4.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Son equivalentes:*

1. *El espacio (X, τ) es normal.*
2. *Para todo $F \in \mathcal{F}$ y para todo $O \in \tau$ con $F \subset O$, existe $G \in \tau$ tal que $F \subset G \subset \overline{G} \subset O$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean F y O un conjunto cerrado y un conjunto abierto respectivamente tales que $F \subset O$. Llamamos $F_1 = F$ y $F_2 = X \setminus O$. Usando que el espacio es normal, existen abiertos G y O_2 tales que $F \subset G$, $X \setminus O \subset O_2$ y $G \cap O_2 = \emptyset$. Entonces

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset \overline{X \setminus O_2} = X \setminus O_2 \subset O.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ con $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Entonces $X \setminus F_2$ es un conjunto abierto que contiene a F_1. Por hipótesis, existe $G \in \tau$ tal que $F_1 \subset G \subset \overline{G} \subset X \setminus F_2$. Luego $F_2 \subset X \setminus \overline{G}$. Llamamos $O_2 = X \setminus \overline{G}$. Entonces los abiertos G y O_2 contienen respectivamente a F_1 y F_2, y además son disjuntos pues

$$G \cap O_2 = G \cap (X \setminus \overline{G}) \subset \overline{G} \cap (X \setminus \overline{G}) = \emptyset.$$

□

De nuevo, la propiedad T_4 es un invariante topológico. Por otro lado, es evidente que si un espacio es T_4 también es T_3, pues los puntos en un espacio T_1 son cerrados. Sin embargo, un espacio normal no tiene porqué ser regular. Antes de poner un ejemplo de ello, vamos a probar un resultado sencillo que nos será útil en este capítulo.

Lema 7.4.4. *Si un espacio topológico tiene la propiedad de que cualesquiera dos cerrados no triviales se intersecan, entonces el espacio es normal.*

Demostración. Para probar que es normal, tenemos que tomar dos cerrados F_1 y F_2 disjuntos. Por hipótesis, la única posibilidad es que $F_1 = \emptyset$ y $F_2 = X$. Basta pues tomar $O_1 = \emptyset$ y $O_2 = X$, probando que el espacio es normal. □

Ejemplo 7.4.5. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología dada por $\tau = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Este espacio es normal, pues la familia de cerrados es $\mathcal{F} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, y por tanto, dos conjuntos cerrados no triviales siempre se intersecan.

El espacio no es regular. Para ello, consideramos el conjunto cerrado $F = (-\infty, 0]$ y sea $1 \not\in F$. Ya que el único conjunto abierto que contiene a F es $\mathbb{R}$, no podemos separar F del punto $x = 1$ por conjuntos disjuntos.

A diferencia de los anteriores axiomas de separación, la propiedad de ser normal no es hereditaria ni productiva. Sin embargo, observemos que un subespacio de un espacio métrico y el producto de dos espacios métricos son normales porque ambos espacios son también métricos (proposiciones 2.2.18 y 5.1.9 respectivamente).

Se muestra ahora un ejemplo de que la propiedad no es hereditaria.

Ejemplo 7.4.6. Consideramos $X = \{a,b,c,d\}$ con la topología

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Este espacio es normal. Para ello basta darse cuenta que la familia de cerrados es $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{c,d\}, \{b,d\}, \{d\}\}$, y por tanto, dos conjuntos cerrados no triviales siempre se intersecan.

Sin embargo, el subconjunto $A = \{a,b,c\}$, con su topología inducida $\tau_{|A}$, no es un espacio normal. Efectivamente, los elementos de $\tau_{|A}$ y $\mathcal{F}_{|A}$ son

$$\tau_{|A} = \{\emptyset, A, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\} \qquad \mathcal{F}_{|A} = \{\emptyset, A, \{b,c\}, \{c\}, \{b\}\}.$$

Entonces los conjuntos cerrados $\{b\}$ y $\{c\}$ son disjuntos pero no hay abiertos que los separen.

Para dar un ejemplo que muestre que la propiedad de ser normal no es productiva necesitamos un resultado previo.

Lema 7.4.7 (Jones). *Sea (X,τ) un espacio topológico y un subconjunto cerrado F tal que $\tau_{|F}$ es la topología discreta. Supongamos que existe un subconjunto denso $D \subset X$ tal que*

$$card(\mathcal{P}(D)) \leq card(F).$$

Entonces (X,τ) no es un espacio normal.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que (X,τ) es normal. Sea $F' \subset F$ un subconjunto cualquiera. Ya que F tiene la topología discreta, F' y $F \setminus F'$ son cerrados relativos de F y por tanto, cerrados de X por la proposición 1.5.5. Como F' y $F \setminus F'$ son disjuntos y el espacio es normal, existen $O_{F'}, O_{F\setminus F'} \in \tau$ tales que $F' \subset O_{F'}$, $F \setminus F' \subset O_{F\setminus F'}$ y $O_{F'} \cap O_{F\setminus F'} = \emptyset$. Para cada cerrado F', pueden existir muchos abiertos $O_{F'}$ con la propiedad anterior, pero usando el axioma de elección, fijamos un único $O_{F'}$ para cada F'.

Se define la aplicación

$$h : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(D), \quad h(F') = O_{F'} \cap D.$$

Como el conjunto D es denso en X, $O_{F'} \cap D \neq \emptyset$. Probamos que la aplicación h es inyectiva. Supongamos, por reducción al absurdo, que $F_1 \neq F_2$ pero $O_{F_1} \cap D = O_{F_2} \cap D$. Sea $x \in F_1 \setminus F_2$. Como $x \in O_{F_1} \cap O_{F\setminus F_2}$, entonces $O_{F_1} \cap O_{F\setminus F_2}$ es un abierto no vacío y ya que D es denso, $O_{F_1} \cap O_{F\setminus F_2} \cap D \neq \emptyset$. Por tanto,

$$\emptyset \neq O_{F_1} \cap O_{F\setminus F_2} \cap D = (O_{F_1} \cap D) \cap O_{F\setminus F_2} = (O_{F_2} \cap D) \cap O_{F\setminus F_2}.$$

Sin embargo $O_{F_2} \cap O_{F \setminus F_2} = \emptyset$, llegando a una contradicción. Ya que h es una aplicación inyectiva, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(F)) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(D))$ y así $\mathrm{card}(\mathcal{P}(F)) \leq \mathrm{card}(F)$: contradicción. $\square$

Estamos ahora en condiciones de dar un ejemplo que muestra que la propiedad de ser normal no es productiva.

Ejemplo 7.4.8. Demostramos primero que la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es normal. Sean dos conjuntos cerrados disjuntos F_1, F_2. Entonces para cada $x \in F_1$, existe $x' > x$ tal que $[x, x') \subset X \setminus F_2$. De la misma forma, para cada $y \in F_1$, existe $y' > y$ tal que $[y, y') \subset X \setminus F_1$. Sea

$$O_1 = \bigcup_{x \in F_1} [x, x') \qquad O_2 = \bigcup_{y \in F_2} [y, y').$$

Estos dos conjuntos son abiertos por ser unión de abiertos. Probamos que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Si no fuera así, $z \in [x, x') \cap [y, y')$ para algún $x \in F_1$, $y \in F_2$. Supongamos sin perder generalidad que $x < y$. Entonces

$$x \leq z < x' \qquad y \leq z < y'.$$

Por tanto $x < y \leq z < x'$ y así, $y \in [x, x'] \subset F_1$, lo cual es falso.

El espacio producto $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_S)$ no es normal. Usamos para ello el lema de Jones. Sea $F = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.

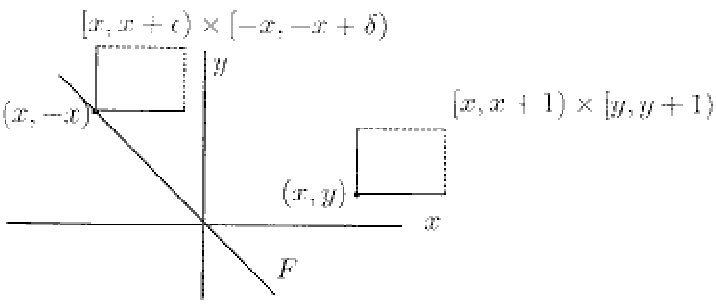


Figura 7.4: El conjunto F hereda de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_S)$ la topología discreta

1. El conjunto F es cerrado en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_S)$. Sea $(x, y) \notin F$. Si $y > -x$, entonces $[x, x+1) \times [y, y+1)$ es un entorno de (x, y) y evidentemente no interseca a F. Si $y < -x$, basta tomar $\epsilon = |x+y|/\sqrt{2}$ y el entorno $[x, x+\epsilon) \times [y, y+\epsilon)$ tampoco interseca a F.
2. El cardinal de F es el mismo que el de $\mathbb{R}$.

3. La topología inducida en F es la topología discreta (ejercicio 13 de la sección 5.5).
4. El conjunto $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable y también es denso, pues $\overline{D} = \overline{\mathbb{Q}} \times \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Por tanto $\mathrm{card}(\mathcal{P}(D)) = \mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(F)$.

El mismo ejemplo muestra un espacio T_3 que no es T_4, puesto que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_S)$ es regular al ser producto topológico de espacios regulares (proposición 7.3.7).

La importancia del axioma de normalidad se encuentra en que dicha propiedad está relacionada con el problema de extensión de funciones continuas y a su vez, con el problema de metrización. Con este fin, vamos a probar un teorema de extensión debido a Tietze. Para ello necesitamos un resultado previo, llamado el lema de Urysohn, que por sí solo tiene ya su importancia no sólo en topología, sino también en otros campos del análisis y la geometría. Consiste en reformular el concepto de espacio normal en términos de separación de subconjuntos cerrados mediante aplicaciones continuas.

Lema 7.4.9 (Urysohn). *Sea (X, τ) un espacio topológico. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El espacio (X, τ) es normal.*
2. *Para todo $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, existe una aplicación continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f_{|F_1} = 0$ y $f_{|F_2} = 1$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ y disjuntos. Entonces $F_1 \subset X \setminus F_2 \in \tau$. Por la proposición 7.4.3, existe $G_{1/2} \in \tau$ tal que

$$F_1 \subset G_{\frac{1}{2}} \subset \overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset X \setminus F_2.$$

Usando de nuevo la proposición en la primera y última inclusión, se deduce que existen $G_{1/4}, G_{3/4} \in \tau$ tales que

$$F_1 \subset G_{\frac{1}{4}} \subset \overline{G_{\frac{1}{4}}} \subset G_{\frac{2}{4}} \subset \overline{G_{\frac{2}{4}}} \subset G_{\frac{3}{4}} \subset \overline{G_{\frac{3}{4}}} \subset X \setminus F_2.$$

Reiterando el proceso, obtenemos una familia de conjuntos abiertos $\{G_{k/2^n} : k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1, n \in \mathbb{N}\}$, con las dos siguientes propiedades:

1. $F_1 \subset G_r \subset \overline{G_r} \subset X \setminus F_2$.
2. $\overline{G_r} \subset G_s, \quad r < s$,

donde $r, s \in A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{k/2^n : k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$.

Estamos ahora en condiciones de definir la aplicación f. Se define $f : X \to [0, 1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \cup_{r\in A} G_r \\ \inf\{r : x \in G_r\} & \text{si } x \in G_r \text{ para algún } r \in A. \end{cases}$$

Demostramos ahora las propiedades de f.

1. Si $x \in F_1$, entonces $x \in G_r$ para todo $r \in A$. Por tanto $f(x) = \text{ínf}(A) = 0$.

2. Si $x \notin F_2$, entonces $x \notin G_r$ para todo $r \in A$, es decir, $x \notin \cup_{r\in A} G_r$. Por tanto $f(x) = 1$.

3. Queda probar que la función f es continua en todo punto $x \in X$. Hacemos una distinción de casos.

   a) Caso $f(x) = 0$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces $0 = \text{ínf}\{r \in A : x \in G_r\}$. Existe $r \in A$, $r < \epsilon$, tal que $x \in G_r$. Veamos que $f(G_r) \subset [0, \epsilon]$. Si $y \in G_r$, entonces $f(y) \leq r < \epsilon$, probando la inclusión buscada.

   b) Caso $f(x) = 1$. En tal caso, $x \notin \cup_{r\in A} G_r$. Además $x \notin \overline{G_r}$, pues si $x \in \overline{G_r}$ para algún $r \in A$, entonces $x \in G_s$ para todo $s > r$.

   Sea $\epsilon > 0$. Como el supremo del A es 1, tomamos $r \in A$ con $r > 1 - \epsilon$. Entonces $x \in X \setminus \overline{G_r} \in \mathcal{U}_x$. Veamos que $f(X \setminus \overline{G_r}) \subset (1 - \epsilon, 1]$. Sea $y \in X \setminus \overline{G_r}$, es decir, $y \notin G_s$, $s < r$. Entonces

   $$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \notin G_r,\ \forall r \in A \\ \geq r & \text{si existe } t \in A \text{ tal que } y \in G_t. \end{cases}$$

   En el primer caso, $|f(y) - f(x)| = 0 < \epsilon$. En el segundo, $|f(y) - f(x)| = 1 - f(y) \leq 1 - r < \epsilon$.

   c) Caso $f(x) \in (0, 1)$. Sea $\epsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2/2^n < \epsilon$ y

   $$\frac{m-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{m}{2^n},$$

   con $1 \leq m - 1 < m + 1 < 2^n - 1$. Consideramos el conjunto abierto $V = G_{(m+1)/2^n} \setminus \overline{G_{(m-1)/2^n}}$. Para probar que V es un entorno de x, basta con ver que $x \in V$. Se hace por reducción al absurdo. Si $x \notin G_{(m+1)/2^n}$, entonces $x \notin G_r$ para todo $r \leq (m+1)/2^n$, luego $f(x) \geq (m+1)/2^n$, lo cual es falso. Por otro lado, si $x \in \overline{G_{(m-1)/2^n}}$,

$x \in G_r$, con $r > (m-1)/2^n$ y por tanto $f(x) \leq (m-1)/2^n$, que también es falso.

Probamos ahora que $f(V) \subset B_\epsilon(f(x))$. Sea $y \in V$. Entonces $f(y) \leq (m+1)/2^n$. Por otra parte, $y \notin G_r$, con $r \leq (m-1)/2^n$ y así, $f(y) \geq (m-1)/2^n$. Se deriva pues que

$$|f(y)-f(x)| \leq \frac{m+1}{2^n} - \frac{m-1}{2^n} = \frac{2}{2^n} < \epsilon.$$

(2) $\rightarrow$ (1). Para probar que (X,τ) es normal, sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ y disjuntos. Por hipótesis, existe una aplicación continua $f : (X,\tau) \rightarrow [0,1]$ tal que $f_{|F_1} = 0$ y $f_{|F_2} = 1$. Consideramos los conjuntos abiertos de $[0,1]$ dados por $[0,1/2)$ y $(1/2,1]$. Definimos $O_1 = f^{-1}([0,1/2))$ y $O_2 = f^{-1}((1/2,1])$, que son conjuntos abiertos en (X,τ). Entonces estos abiertos son disjuntos y $F_i \subset O_i$, para $i = 1,2$. $\square$

Observemos que en el lema de Uryhson podemos cambiar el intervalo $[0,1]$ por cualquier otro intervalo cerrado $[a,b]$.

La aplicación f de la demostración del lema de Urysohn es una aplicación con la que difícil de trabajar en la práctica. Sin embargo, lo importante no es la forma en la que está definida, sino su propia existencia. En espacios métricos existen aplicaciones que satisfacen el lema de Urysohn pero más sencillas que la dada por la demostración: ver ejercicio 9 de la sección 7.8.

Para espacios regulares no existe un resultado del tipo del lema de Urysohn. Sin embargo, un espacio topológico (X,τ) se llama *completamente regular* si para todo $x \in X$ y $F \in \mathcal{F}$ con $x \notin F$, existe una aplicación continua $f : X \rightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f_{|F} = 1$. Un *espacio Tichonoff* es un espacio topológico que es T_1 y completamente regular y se denota por T_{3a}.

El lema de Urysohn puede verse como un resultado sobre extensión de aplicaciones continuas. En efecto, si F_1 y F_2 son dos conjuntos cerrados disjuntos de un espacio topológico (X,τ), se define la aplicación

$$g : F_1 \cup F_2 \rightarrow [0,1], \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in F_1 \\ 1 & \text{si } x \in F_2. \end{cases}$$

Esta aplicación es continua por el teorema 3.1.15. Entonces el lema de Urysohn asegura que si el espacio es normal, la aplicación g se extiende a una aplicación continua $f : (X,\tau) \rightarrow [0,1]$

Teorema 7.4.10 (de extensión de Tietze). *Sea un espacio topológico* (X,τ). *Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El espacio (X,τ) es normal.*

2. *Para todo $F \in \mathcal{F}$ y para todo función continua $f : F \to \mathbb{R}$, existe $\bar{f} : (X,\tau) \to \mathbb{R}$ continua tal que $\bar{f} = f$ en F.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $f : F \to \mathbb{R}$ una función continua definida en el cerrado F.

1. Suponemos primero que $f(F) \subset [-1,1]$. Se definen los siguientes conjuntos cerrados de F y por tanto, también de X (proposición 1.5.5):

$$A_1 = \left\{x \in F : f(x) \geq \frac{1}{3}\right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}, 1\right]\right)$$

$$B_1 = \left\{x \in F : f(x) \leq \frac{-1}{3}\right\} = f^{-1}\left(\left[-1, \frac{-1}{3}\right]\right).$$

Por el lema de Urysohn, existe una aplicación continua

$$f_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \quad f_1(A_1) = \frac{1}{3}, f_1(B_1) = -\frac{1}{3}.$$

Además, si $x \in F$, entonces $|f(x) - f_1(x)| \leq 2/3$. Sea la aplicación continua

$$g_1 = f - f_1 : F \to \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

De nuevo se definen dos conjuntos de F como

$$A_2 = \left\{x \in F : g_1(x) \geq \frac{2}{9}\right\}, \qquad B_2 = \left\{x \in F : g_1(x) \leq \frac{-2}{9}\right\}.$$

Ambos son cerrados de (X,τ) y por el lema de Urysohn, existe una aplicación continua

$$f_2 : X \to \left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right], \quad f_2(A_2) = \frac{2}{9}, f_2(B_2) = -\frac{2}{9}.$$

Si $x \in F$, $|g_1(x) - f_2(x)| \leq 4/9 = (2/3)^2$.

Siguiendo con el proceso, se obtiene una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con las siguientes dos propiedades:

$$f_n : X \to \left[-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right]$$

$$|f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n, \ \forall x \in F.$$

Dado $x \in X$, $|f_n(x)| \leq 1/2(2/3)^n$. Como la sucesión mayorante es geométrica de razón menor que 1, la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ es absolutamente convergente y por tanto, la aplicación suma $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua. Además

$$|\tilde{f}(x)| = |\sum_{n\geq 1} f_n(x)| \leq \sum_{n\geq 1} |f_n(x)| = 1,$$

es decir, el codominio de $\tilde{f}$ es $[-1,1]$ y así podemos escribir, $\tilde{f} : X \to [-1,1]$. Sea $x \in F$. Entonces

$$0 \leq |f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)| < \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Tomando límites, se concluye que $f(x) = \tilde{f}(x)$ y así $\tilde{f} = f$ en F.

2. Supongamos ahora el caso general $f : F \to \mathbb{R}$. Sea $h : \mathbb{R} \to (-1,1)$ un homeomorfismo cualquiera y definimos $g = h \circ f : F \to [-1,1]$. Por el apartado anterior, existe una aplicación continua $\tilde{g} : X \to [-1,1]$ tal que $\tilde{g} = g$ en F. Sea el subconjunto cerrado de X dado por

$$F_0 = \{x \in X : |\tilde{g}(x)| = 1\}.$$

Entonces $F \cap F_0 = \emptyset$. Por el lema de Urysohn, existe una aplicación continua $G : X \to [0,1]$ tal que $G_{|F_0} = 0$ y $G_{|F} = 1$. Se define

$$g' : X \to [-1,1], \quad g' = \tilde{g}G.$$

Si $x \in X$, $|g'(x)| = 1$, luego $|\tilde{g}(x)| = 1$ y $G(x) = 1$, lo que implica $x \in F_0$, lo cual es una contradicción. Por tanto para todo $x \in X$, $g'(x) \in (-1,1)$. Si $x \in F$, $g'(x) = g(x)$, es decir, $g' = g$ en F.

Finalmente, la aplicación buscada es

$$\tilde{f} = h^{-1} \circ g' : X \to \mathbb{R}.$$

Efectivamente, la aplicación $\tilde{f}$ es continua al ser composición de aplicaciones continuas y si $x \in F$, entonces $g'(x) = g(x)$, luego por la definición de g, $\tilde{f}(x) = f(x)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Para probar que (X,τ) es un espacio normal, se consideran $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$. Se define la aplicación continua f como

$$f : F_1 \cup F_2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in F_1 \\ 1 & \text{si } x \in F_2. \end{cases}$$

Por hipótesis, existe una función continua $\tilde{f} : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ que la extiende. Sean $O_1 = \tilde{f}^{-1}((-1, 1/2))$ y $O_2 = \tilde{f}^{-1}((1/2, 2))$. Estos dos conjuntos son abiertos disjuntos de X y contienen respectivamente a F_1 y F_2. □

Corolario 7.4.11. *Sea (X, τ) un espacio normal y $F \in \mathcal{F}$. Si $f : F \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua, entonces existe una extensión continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Se consideran las aplicaciones coordenadas de f, $f_i = p_i \circ f : F \to \mathbb{R}$. Por el teorema de extensión de Tietze, existen aplicaciones continuas $\tilde{f}_i$ que las extienden a todo X. Entonces la aplicación continua que extiende a f es $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$. □

Corolario 7.4.12. *El teorema de Tietze sigue siendo cierto si cambiamos el codominio de las aplicaciones por un intervalo cerrado.*

Demostración. Esta es la primera parte de la demostración del apartado 2 en la demostración (1) → (2) del teorema de Tietze. □

Corolario 7.4.13. *Sea (X, τ) un espacio normal y $F \in \mathcal{F}$. Sea $f : F \to \mathbb{R}$ una aplicación continua tal que existe $m > 0$ con $-m < f(x) < m$, para todo $x \in F$. Entonces existe una aplicación continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ que extiende a f y tal que $-m < \tilde{f}(x) < m$ para todo $x \in X$.*

Ejemplo 7.4.14. Sea el disco $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Como es un espacio métrico, es normal. Sea una función continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$. Entonces el teorema de Tietze afirma que existe una extensión continua al disco.

Una curiosa consecuencia de este ejemplo es la siguiente. Tomamos la temperatura como una función continua. Supongamos que tenemos una moneda, y la identificamos como el disco unidad $\mathbb{D}^2$ del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Podemos afirmar que dada una temperatura en el borde de la moneda, es posible repartir calor en toda la moneda de forma que la temperatura en el borde coincida con la dada inicialmente.

Nota 7.4.15. 1. El teorema de extensión de Tietze no es cierto si se cambia el espacio codominio de las aplicaciones. Por ejemplo, se probará en el último capítulo (corolario 11.4.11) que la aplicación identidad $1_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ en la circunferencia $\mathbb{S}^1$ no se puede extender de forma continua a una aplicación $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$: intuitivamente, tal extensión rompería el disco $\mathbb{D}^2$.

2. El lema de Urysohn y el teorema de Tietze no son ciertos si se cambian conjuntos cerrados por conjuntos abiertos. Así la aplicación continua

$$f:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in(0,1)\\ 1 & \text{si } x\in(1,2)\end{cases}$$

no se extiende a una aplicación continua definida en $\mathbb{R}$, pues el punto $x=1$ es adherente a $(0,1)$ y $(1,2)$ y por tanto, su valor sería a la vez 0 y 1.

7.5. Axiomas de separación y grupos topológicos

La estructura algebraica de un grupo topológico facilita el estudio de los axiomas de separación en él, ya que se ve favorecido por las traslaciones a izquierda y derecha existentes en el grupo.

Teorema 7.5.1. *Sea (G,τ) un grupo topológico.*

1. *El grupo (G,τ) es T_1 si y sólamente si $\{e\}$ es un conjunto cerrado, donde e es el elemento neutro de G.*
2. *Si (G,τ) es T_1, entonces también es Hausdorff.*
3. *El grupo (G,τ) es un espacio regular.*

Demostración. 1. Basta con darse cuenta de que si $g\in G$, $\{g\}=l_g(\{e\})$. Luego $\{g\}$ es cerrado si y sólo si $\{e\}$ lo es también, pues l_g es un homeomorfismo.

2. Supongamos que el grupo es T_1. Para probar que es Hausdorff, probamos que la diagonal Δ es un subconjunto cerrado de $G\times G$ (teorema 7.2.4). Sea la aplicación continua

$$\psi:G\times G\to G,\quad \psi(g,h)=gh^{-1}.$$

Ya que $\{e\}$ es un conjunto cerrado, $\psi^{-1}(\{e\})$ es un conjunto cerrado en $G\times G$, pero este conjunto es precisamente Δ.

3. Para probar que es regular, y usando el teorema 7.3.4, basta con probar que el elemento neutro tiene una base de entornos cerrados. Sea $W\in\mathcal{U}$. Por la proposición 5.4.11 existe un entorno $U\in\mathcal{U}$ tal que $UU^{-1}\subset W$. Probamos que $\overline{U}\subset UU^{-1}$. Sea $x\in\overline{U}$. Ya que $xU\in\mathcal{U}_x$, entonces

$xU \cap U \neq \emptyset$, luego existe $y \in U$ tal que $xy \subset U$. Por tanto $x \in Uy^{-1} \subset UU^{-1}$. Hemos probado así que si $W \in \mathcal{U}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{U} \subset W$. $\square$

Corolario 7.5.2. *Una condición necesaria para que un espacio topológico sea un grupo topológico es que sea regular.*

De esta forma, en un conjunto X dotado con la topología cofinita τ_{CF} no se puede definir una estructura de grupo $\cdot$ tal que $(X, \cdot, \tau_{CF})$ sea un grupo topológico.

7.6. Los axiomas de numerabilidad *ANI* y *ANII*

Definición 7.6.1. Sea (X, τ) espacio topológico.

1. Se dice que el espacio satisface el primer axioma de numerabilidad (o ANI) si todo punto tiene una base numerable de entornos.
2. Se dice que el espacio satisface el segundo axioma de numerabilidad (o ANII) si la topología tiene una base numerable.

Ambos conceptos ya aparecieron en el capítulo 2. Así se probaba en el teorema 2.2.13 que $\mathbb{R}^n$ era ANII y después de la definición 2.2.16, que todo espacio métrico era ANI.

Proposición 7.6.2. *Si un espacio topológico es ANII, entonces es ANI.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico y β una base numerable del espacio. Si $x \in X$, sabemos por el ejemplo 1.4.8 que $\beta_x = \{B \in \beta : x \in B\}$ es una base de entornos de x. Ya que $\beta_x \subset \beta$, el conjunto β_x es numerable. $\square$

Ya se puso de manifiesto en el ejemplo 1.7.7 que, en general, no es posible estudiar la topología en un espacio topológico a partir de sucesiones tal como sucede en un espacio métrico (teorema 2.4.8). Sin embargo, si el espacio topológico satisface el primer axioma de numerabilidad, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 7.6.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico ANI. Sea $x \in X$ y $A \subset X$.*

1. *$x \in int(A)$ si y sólamente si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n > \nu$, $x_n \in A$.*

2. *$x \in \overline{A}$ si y sólamente si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a x.*

Por otra parte, si tenemos una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$, entonces f es continua en x si y sólamente si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\subset\mathbb{N}}$ convergente a x, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\subset\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

Demostración. Para todo $x \in X$, vamos a construir una base numerable de entornos $\beta_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $B_{n+1} \subset B_n$. Para ello sea $\gamma_x = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de entornos de x. Definimos $B_n = V_1 \cap \ldots \cap V_n$. Es evidente que $B_n \in \mathcal{U}_x$ y que $B_{n+1} \subset B_n$. Para finalizar de probar que β_x es base de entornos, sea $U \in \mathcal{U}_x$. Debido a que γ_x es base de entornos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subset U$. Entonces $B_n \subset V_n \subset U$.

Una vez construida esta base β_x, la demostración del teorema es análoga a la que se hizo en los teoremas 2.4.8 y 3.3.1. □

También es evidente el siguiente resultado.

Proposición 7.6.4. *Los axiomas de numerabilidad ANI y ANII son invariantes topológicos, hereditarios y productivos.*

Demostración. Es consecuencia, respectivamente, del corolario 4.1.6, el teorema 1.5.3 y la proposición 5.1.3. □

Estudiamos a continuación las propiedades ANI y ANII para algunos espacios topológicos.

EJEMPLO 7.6.5.
1. Sea un espacio topológico discreto (X, τ_D). Este espacio es ANI pues para todo $x \in X$, el conjunto $\beta_x = \{\{x\}\}$ es una base de entornos de x. Para el estudio del segundo axioma de numerabilidad, recordemos que en el ejemplo 1.2.4 se probó que la base de topología más pequeña es $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$. Por tanto (X, τ_D) es ANII si y sólo si X es un conjunto numerable.
2. Un espacio topológico (X, τ) donde τ sea finita satisface los axiomas ANI y ANII. Ésto sucede con la topología trivial o si el conjunto X es finito.
3. Consideramos la topología cofinita (X, τ_{CF}). Si X es numerable, la familia de cerrados $\mathcal{F}$ es numerable pues la familia de subconjuntos finitos de un conjunto numerable es numerable. Si $\mathcal{F}$ es numerable, la familia de abiertos, formada por los complementarios de los cerrados, también es numerable. Esto prueba que el espacio es ANII.

Por el contrario, si X no es numerable, no es ANI: si fuera así, existiría una base de entornos $\beta_x = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $x \in X$. Cada uno de estos entornos es de la forma $U_n = X \setminus F_n$, donde F_n es un conjunto finito y $x \notin F_n$. Como X no es numerable, sea y un elemento distinto de x y que no pertenezca a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Entonces $U = X \setminus \{y\} \in \mathcal{U}_x$ y como β_x es base de entornos, $U_n \subset U$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $y \in F_n$, llegando a una contradicción.

4. La recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es ANI pues $\beta_x = \{[x,q) : x < q, q \in \mathbb{Q}\}$ es una base numerable de entornos de $x \in \mathbb{R}$.

En el caso de la topología de Sorgenfrey se nos plantea la siguiente cuestión relativa al axioma ANII. Sabemos que $\beta_S = \{[a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base de τ_S y que no es numerable. Sin embargo no podemos afirmar que el espacio no sea ANII, pues podría haber otra base de la topología que sí fuera numerable. La siguiente proposición y posterior corolario estudian este problema.

Proposición 7.6.6. *Sea (X,τ) un espacio topológico, β una base infinita de τ y β' otra base de τ. Entonces existe una base β'', tal que $\beta'' \subset \beta'$ y card$(\beta'') \leq$ card(β).*

Demostración. Se considera el conjunto

$$\Gamma = \{(B_i, B_j) \in \beta \times \beta : \exists B' \in \beta', B_i \subset B' \subset B_j\}.$$

Usando que el cardinal de β es infinito, tenemos $\text{card}(\Gamma) \leq \text{card}(\beta \times \beta) = \text{card}(\beta)$. Por otra parte, y usando el axioma de elección, para cada $(B_i, B_j) \in \Gamma$ tomamos un elemento fijo $B'_{ij} \in \beta'$ tal que $B_i \subset B'_{ij} \subset B_j$. Consideramos la familia de conjuntos abiertos

$$\beta'' = \{B'_{ij} : (B_i, B_j) \in \Gamma\}.$$

Observemos que $\text{card}(\beta'') \leq \text{card}(\Gamma) \leq \text{card}(\beta)$. Por tanto la demostración finaliza si probamos que β'' es una base de τ. Efectivamente, sea $O \in \tau$ y $x \in O$. Ya que β es base, existe $B_j \in \beta$ tal que $x \in B_j \subset O$. Del mismo modo, como $x \in B_j$ y β' es base, existe $B' \in \beta'$ tal que $x \in B' \subset B_j$. Del mismo modo, existe i tal que $x \in B_i \subset B'$. Por tanto, existen $B_i, B_j \in \beta$, $B' \in \beta'$ tal que

$$x \in B_i \subset B' \subset B_j \subset O,$$

luego $(B_i, B_j) \in \Gamma$. Para este par de conjuntos abiertos consideramos el correspondiente elemento $B'_{ij} \in \beta''$ que satisface $B_i \subset B'_{ij} \subset B_j$. En particular, $x \in B'_{ij} \subset O$. $\square$

Corolario 7.6.7. *Sea (X,τ) un espacio ANII y sea β' una base de τ. Entonces existe una base numerable β'' tal que $\beta'' \subset \beta'$.*

Demostración. Sea una base numerable β. Si esta base es infinita, la proposición 7.6.6 afirma que existe una base $\beta'' \subset \beta'$ con $\text{card}(\beta'') \leq \text{card}(\beta) = \text{card}(\mathbb{N})$. Si la base β es finita, entonces τ es finita y lo mismo ocurre para β'. Entonces tomamos $\beta'' = \beta'$. □

Ahora estamos en condiciones de afirmar que la recta de Sorgenfrey no satisface el segundo axioma de numerabilidad. En caso contrario, del corolario anterior existiría una base numerable β'' e incluida en β_S, es decir, β'' se expresa de la forma

$$\beta'' = \{[a_n, b_n) : a_n < b_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Sin embargo esto no es posible. Efectivamente, sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y consideremos el conjunto abierto $[x, x+1)$. Como β'' es una base, y $x \in [x, x+1)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in [a_n, b_n) \subset [x, x+1).$$

Esto implica que $x = a_n$, lo cual es falso.

Otra forma de probar que $(\mathbb{R}, \tau_S)$ no es ANII es la siguiente. Si lo fuera, $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tau_S \times \tau_S)$ también lo sería y todo subconjunto también, en particular, el conjunto $F = \{(x, -x,) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Pero este subconjunto, que no es numerable, hereda la topología discreta (ver ejemplo 7.4.8), que no es ANII.

Proposición 7.6.8 (Lindelöff). *Sea (X,τ) un espacio topológico ANII, $A \subset X$ y una familia de abiertos $\{O_i : i \in I\}$ tal que $A \subset \cup_{i\in I} O_i$. Entonces existe un conjunto numerable $J \subset I$ tal que*

$$A \subset \bigcup_{j\in J} O_j.$$

Demostración. Sea $\beta = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de τ y tomamos el conjunto $K = \{n \in \mathbb{N} : \exists i \in I, B_n \subset O_i\}$. Se define la aplicación $f : K \to I$ por $f(n) \in I$ un índice fijo tal que $B_n \subset O_{f(n)}$. Sea $J = f(K)$ y por tanto J es un conjunto numerable.

Probamos que $A \subset \cup_{j\in J} O_j$. Sea $x \in A$. Existe $i \in I$ con $x \in O_i$. Ya que β es base de la topología, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset O_i$. Entonces $n \in K$ y $x \in B_n \subset O_{f(n)}$. □

Damos ahora un teorema de metrización en cuya demostración se usa el lema de Urysohn.

Teorema 7.6.9 (de metrización). *Un espacio topológico T_1 y ANII es metrizable.*

Demostración. La idea de la demostración es probar que dicho espacio topológico (X,τ) se embebe en $[0,1]^\omega$ y ya que este espacio es metrizable (ejercicio 23 del capítulo 5), (X,τ) también lo es.

Sea β una base numerable de abiertos y definamos el siguiente conjunto numerable:

$$\Gamma = \{(B,B') \in \beta \times \beta : \overline{B} \subset B'\}.$$

Ya que el espacio es normal, para todo $(B,B') \in \Gamma$ el lema de Urysohn asegura la existencia de una aplicación continua $f_{BB'} : (X,\tau) \to [0,1]$ que toma el valor 0 en $\overline{B}$ y 1 en $X \setminus B'$. Sea $\mathcal{S} = \{f_{BB'} : (B,B') \in \Gamma\}$. Probamos que la familia $\mathcal{S}$ separa puntos de cerrados. Sea $F \in \mathcal{F}$ y $x \notin F$. Entonces $x \in X \setminus F$ y como β es base, existe $B' \in \beta$ tal que $x \in B' \subset X \setminus F$. Como el espacio también es regular, existe una base de entornos cerrados de x. Sea $U \in \mathcal{U}_x$ cerrado tal que $U \subset B'$. De nuevo usando que β es base, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U$. Tomando adherencias y como U es cerrado, obtenemos

$$x \in \overline{B} \subset B' \subset X \setminus F.$$

Esto prueba que $(B,B') \in \Gamma$ y así $f_{BB'}(x) = 0$ y $f_{BB'}(F) = 1$. Por tanto $f_{BB'}(x) \notin \overline{f_{BB'}(F)}$. De la proposición 5.3.10 y el corolario 5.3.11, la topología de X es la topología inicial para la familia $\mathcal{S}$. Ya que el espacio es T_1, los puntos son conjuntos cerrados y así dicha familia también separa puntos. Entonces el teorema de embebimiento 5.3.12 asegura que la aplicación evaluación de las aplicaciones $f_{BB'}$ es un embebimiento de (X,τ) en $[0,1]^\omega$. $\square$

Para finalizar esta sección, damos la definición de variedad topológica.

Definición 7.6.10. Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff, ANII y localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Las variedades de dimensión 1 se llaman *curvas* y las de dimensión 2, *superficies*. Observemos que cada punto tenga un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ no asegura que el espacio sea Hausdorff (ver ejemplo 7.6.12 posterior).

El número n que indica la dimensión de una variedad topológica está unívocamente determinado, es decir, si es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, no puede serlo a $\mathbb{R}^m$, con $m \neq n$. Esto es una consecuencia del resultado que hemos

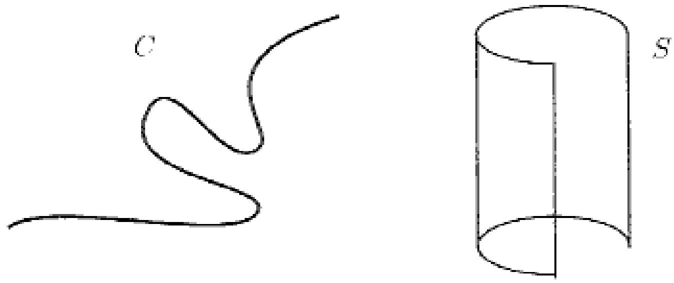


Figura 7.5: Una curva y una superficie en el espacio euclídeo

enunciado varias veces a lo largo de este libro (y demostrado sólo para $n = 1$) y que afirma que $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ si $n \neq m$.

Mostramos ahora algunos ejemplos de variedades topológicas.

Ejemplo 7.6.11. 1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es una variedad de dimensión n.

2. Todo conjunto abierto de una variedad topológica de dimensión n es una variedad topológica de dimensión n.

3. La esfera $\mathbb{S}^n$ es una variedad de dimensión n. Para probarlo, sea $p \in \mathbb{S}^n$ un punto cualquiera. Después de un homeomorfismo de $\mathbb{S}^n$, suponemos que p no es el polo norte N. Consideramos el entorno de p dado por $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$: sabemos que mediante la proyección estereográfica, este entorno es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Por otra parte, como $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, hereda las propiedades Hausdorff y ANII.

4. El producto de variedades topológicas de dimensiones n y m es una variedad topológica de dimensión $n + m$. Esto se debe a que las propiedades Hausdorff y ANII son productivas y que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$. En particular, el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una variedad topológica de dimensión 2.

A continuación mostramos un ejemplo de un espacio localmente homeomorfo a $\mathbb{R}$ que no es Hausdorff.

Ejemplo 7.6.12. Consideramos el conjunto $X = (\mathbb{R}\times\{0\})\cup([0,\infty)\times\{1\})$ y se define una topología τ en X mediante base de entornos (teorema 1.4.10). Una base de entornos de un punto cualquiera, excepto $p = (0, 1)$, está formada por las bolas de X como subespacio métrico de $\mathbb{R}^2$; para p, una base de entornos es la familia

$$\beta_p = \{((a, 0) \times \{0\}) \cup ([0, b) \times \{1\}) : a < 0 < b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Algunas propiedades de esta topología τ son las siguientes:

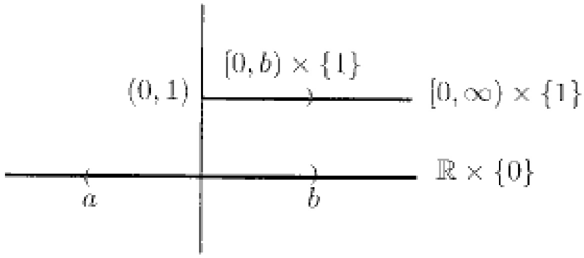


Figura 7.6: El conjunto X es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}$ pero no es Hausdorff

1. El conjunto $\mathbb{R}\times\{0\}$ es abierto pues si $(x,0)\in\mathbb{R}\times\{0\}$, $B_{1/2}((x,0))\subset\mathbb{R}\times\{0\}$.
2. La topología inducida en $\mathbb{R}\times\{0\}$ es la topología usual como subconjunto de $\mathbb{R}^2$. En particular, $\mathbb{R}\times\{0\}$ es homeomorfo a la recta euclídea $(\mathbb{R},\tau_u)$.
3. Análogamente, $(0,\infty)\times\{1\}$ es un abierto de (X,τ), cuya topología inducida es la euclídea de $\mathbb{R}^2$. Además es homeomorfo a $(0,\infty)$ y así también es homeomorfo a $\mathbb{R}$.
4. El espacio (X,τ) es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}$. El único problema que se plantea es para el punto p. Basta darse cuenta que el entorno $U=((-1,0)\times\{0\})\cup([0,1)\times\{1\})$ es homeomorfo a $(-1,1)$ sin más que considerar el homeomorfismo
$$f:U\to(-1,1),\quad f(x,y)=x.$$
5. El espacio (X,τ) no es Hausdorff. Esto sucede porque no se puede separar por entornos disjuntos los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$. Efectivamente, cualquier elemento de la base de entornos usual de $(0,0)$, a saber, $\{(-\epsilon,\epsilon)\times\{0\}:\epsilon>0\}$, interseca cualquiera de β_p.

7.7. Espacios separables y Lindelöff

Para finalizar este capítulo, damos dos definiciones acerca de la numerabilidad de conjuntos densos y sobre la numerabilidad de recubrimientos por conjuntos abiertos de un espacio.

Definición 7.7.1. Un espacio topológico (X,τ) se llama separable si existe un subconjunto denso y numerable.

EJEMPLO 7.7.2.
1. La recta euclídea $\mathbb{R}$ es separable pues $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. De forma más general, $\mathbb{R}^n$ es separable ya que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.
2. Ya que todo subconjunto de un espacio discreto es cerrado, el único subconjunto denso es todo el espacio. Por tanto un espacio discreto es separable si y sólamente si el conjunto es numerable.
3. La recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es separable pues $\mathbb{Q}$ es denso.

Una familia destacable de espacios separables es la formada por los espacios ANII.

Proposición 7.7.3. *Si un espacio topológico es ANII, entonces es separable.*

Demostración. Sea (X,τ) un espacio topológico que sea ANII y sea $\beta = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de τ. Por el axioma de elección, fijamos un punto x_n de cada abierto B_n. Llamamos $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y probamos que es denso. Si $O \in \tau$ y es no vacío, y usando que β es base de τ, consideramos un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_n \subset O$. Entonces $x_n \in D \cap B_n \subset D \cap O$, probando que $D \cap O \neq \emptyset$. □

La propiedad de separabilidad tiene las siguientes propiedades:

Teorema 7.7.4.
1. *La imagen continua de un espacio separable es separable. En particular, es un invariante topológico.*
2. *La propiedad separable es productiva.*
3. *La propiedad separable se hereda a subconjuntos abiertos.*

Demostración.
1. Es consecuencia del teorema 3.1.4.
2. Se deduce de la proposición 5.1.5.
3. Sea (X,τ) un espacio separable y $D \subset X$ un subconjunto numerable denso. Sea $A \subset X$ un conjunto abierto. Para probar que $(A, \tau_{|A})$ es separable demostramos que $A \cap D$ es un conjunto denso (y evidentemente es numerable). Como D es denso y $A \in \tau$, $A \cap D \neq \emptyset$. Para probar que es denso, veamos que interseca a todo subconjuuto abierto no vacío de A. Sea $G \in \tau_{|A}$. Ya que A es un subconjunto abierto, la proposición 1.5.5 prueba que $G \in \tau$ y por tanto $G \cap D \neq \emptyset$. Entonces

$$(A \cap D) \cap G = D \cap (A \cap G) = D \cap G \neq \emptyset.$$

□

Ejemplo 7.7.5. La recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es separable pero no es ANII. También en este ejemplo se muestra que la propiedad de ser separable no es hereditaria. Si lo fuera, también lo sería $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_S)$. Sin embargo el subconjunto $F = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ no es separable, pues su topología relativa es la topología discreta y el conjunto no es numerable.

Definición 7.7.6. Un espacio topológico (X, τ) se llama Lindelöff si dada una familia de conjuntos abiertos $\{O_i : i \in I\}$ tal que $X = \cup_{i \in I} O_i$, existe un subconjunto numerable de índices $J \subset I$ tal que $X = \cup_{j \in J} O_j$.

En otras palabras, decimos que un espacio topológico es Lindelöff si dado cualquier recubrimiento por abiertos del espacio, existe un subrecubrimiento del mismo que sea numerable.

Ejemplo 7.7.7.

1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es Lindelöff. Para ello usamos la proposición 7.6.8 y que $\mathbb{R}^n$ es ANII.
2. Un espacio discreto (X, τ_D) es Lindelöff si y sólo si X es un conjunto numerable. Efectivamente, la familia de abiertos $\{\{x\} : x \in X\}$ es un recubrimiento por abiertos del espacio. Entonces el espacio es Lindelöff si y sólo se puede extraer un subrecubrimiento numerable, es decir, si y sólo si X es numerable.

Proposición 7.7.8.

1. *La imagen continua de un espacio Lindelöff es Lindelöff.*
2. *Un subconjunto cerrado de un espacio Lindelöff es Lindelöff.*

Demostración.

1. Podemos considerar que $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es una aplicación continua y sobreyectiva. Veamos que si (X, τ) es Lindelöff, entonces (Y, τ') también lo es. Sea $\{O'_i : i \in I\}$ una familia de abiertos de Y tal que $Y = \cup_{i \in I} O'_i$. Por la continuidad de f, $O_i = f^{-1}(O'_i) \in \tau$. Entonces $\{O_i : i \in I\}$ es una familia de abiertos cuya unión es X. Ya que (X, τ) es un espacio Lindelöff, sea $J \subset I$ el conjunto numerable tal que $X = \cup_{j \in J} O_j$. Entonces
$$Y = \bigcup_{j \in J} f(O_j) \subset \bigcup_{j \in J} O'_j.$$
2. Se considera un subconjunto cerrado F de un espacio Lindelöff (X, τ). Sea $\{O_i : i \in I\}$ una familia de abiertos relativos de F tal que $F = \cup_{i \in I} O_i$. Para cada $i \in I$, escribimos $O_i = G_i \cap F$, con $G_i \in \tau$. Entonces $X = (X \setminus F) \cup (\cup_{i \in I} G_i)$. Ya que X es Lindelöff, existe un conjunto $J \subset I$

numerable tal que $X = (X \setminus F) \cup (\cup_{j\in J} G_j)$. Entonces $F \subset \cup_{j\in J} G_j$. Si en esta inclusión intersecamos a ambos lados con F, obtenemos $F = \cup_{j\in J} O_j$.

□

Ejemplo 7.7.9. Probamos que la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es Lindelöff. Supongamos que $\mathbb{R} = \cup_{i\in I} O_i$, con $O_i \in \tau_S$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $i_x \in I$ y existe $\epsilon_x > 0$ tal que $x \in [x, x+\epsilon_x) \subset O_{i_x}$. Entonces $\{I_x = [x, x+\epsilon_x) : x \in \mathbb{R}\}$ es un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{R}$. Consideramos el conjunto

$$A = \{y \in \mathbb{R} : y \notin I_x - \{x\}\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

1. Definimos $\phi : A \to \mathbb{Q}$ como $\phi(y) = q_y$, donde $q_y \in \mathbb{Q}$ es un número racional que se ha fijado en el intervalo I_y. Probamos que ϕ es inyectiva. En caso contrario, existen $y_1, y_2 \in A$ tal que $I_{y_1} \cap I_{y_2} \neq \emptyset$. Sea $z \in I_{y_1} \cap I_{y_2}$. Entonces $z \in [y_1, y_1+\epsilon_1) \cap [y_2, y_2+\epsilon_2)$. Si por ejemplo $y_1 < y_2$, entonces $y_1 < y_2 \leq z < y_1 + \epsilon_1$, luego $y_2 \in I_{y_1} - \{y_1\}$: contradicción.
2. La inyectividad de ϕ prueba que A es un conjunto numerable.
3. Sea $B = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}, y \in I_x - \{x\}\}$. Entonces $\{I_x - \{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ es un recubrimiento por abiertos de la topología usual de B. Como B es ANII para la topología usual, es un espacio Lindelöff, luego existe $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $B \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} (I_{x_n} \setminus \{x_n\})$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= A \cup B \subset \Big(\bigcup_{x\in A} I_x\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{x_n} \setminus \{x_n\}\Big) \\ &\subset \Big(\bigcup_{x\in A} O_{i_x}\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_{i_{x_n}}\Big) \end{aligned}$$

y por tanto el recubrimiento numerable buscado es $\{O_{i_x} : x \in A\} \cup \{O_{i_{x_n}} : n \in \mathbb{N}\}$.

Proposición 7.7.10. *Un espacio regular y Lindelöff es normal.*

Demostración. Sean dos cerrados disjuntos F_1 y F_2. Para cada $x \in F_1$, existe $U_x \in \mathcal{U}_x$ y $O_x \in \tau$ tal que $F_2 \subset O_x$ y $O_x \cap U_x = \emptyset$. Sea $G_x \in \tau$ tal que $x \in G_x \subset U_x$. Por tanto la familia $\{G_x : x \in F_1\}$ recubre a F_1. Ya que F_1 es Lindelöff por ser un subconjunto cerrado de un espacio Lindelöff, $F_1 \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} G_j$. Trabajando del mismo modo con el cerrado F_2, existe una familia de abiertos $\{H_j : j \in \mathbb{N}\}$ tal que $F_2 \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} H_j$.

Definimos los siguientes conjuntos

$$S_1 = G_1 \qquad T_1 = H_1 \setminus \overline{G_1}$$

$$S_2 = G_2 \setminus \overline{T_1} \qquad T_2 = H_2 \setminus \overline{(S_1 \cup S_2)}$$

$$S_3 = G_3 \setminus \overline{(T_1 \cup T_2)} \qquad T_3 = H_3 \setminus \overline{(S_1 \cup S_2 \cup S_3)}$$

y así sucesivamente. Sean $S = \cup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ y $T = \cup_{i\in\mathbb{N}} T_i$. Entonces estos conjuntos son abiertos disjuntos que contienen a F_1 y F_2 respectivamente. □

Esta proposición permite mostrar que la propiedad Lindelöff no es productiva.

EJEMPLO 7.7.11. Se ha probado en el ejemplo 7.7.9 que la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es Lindelöff. Por otra parte, se ha probado también que es regular, lo cual implica que $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tau_S \times \tau_S)$ también es regular. Si $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tau_S \times \tau_S)$ fuera Lindelöff, sería un espacio normal, lo cual es falso por el ejemplo 7.4.8.

7.8. Ejercicios

1. Probar que un espacio topológico (X, τ) es T_1 si y sólamente si para todo $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}_x\}$.
2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ se llama un *retracto* de X si existe una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. A la aplicación r se llama *retracción*. En tal caso, demostrar que si X es Hausdorff, el conjunto A es cerrado.
3. Sea (X, τ) un espacio Hausdorff y $A \subset X$. Probar que son equivalentes los siguientes enunciados:

    a) x es un punto de acumulación de A.

    b) Para cada $U \in \mathcal{U}_x$, $U \cap A$ es un conjunto infinito.
4. Sea (X, τ) un espacio topológico con la siguiente propiedad: para todo $x \in X$ existe un entorno cerrado $U \in \mathcal{U}_x$, tal que $(U, \tau_{|U})$ es Hausdorff. Probar que el espacio es Hausdorff.
5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación continua tal que

    $$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

    Probar que f es una aplicación lineal, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lambda x$.
6. Probar que los espacios definidos en los ejemplos 7.3.6 y 7.6.12 a partir de sus sistemas de entornos son, efectivamente, espacios topológicos.
7. Probar la proposición 7.3.7.

8. Sea un subconjunto cerrado F de un espacio regular. Probar que $F = \bigcap\{O \in \tau : F \subset O\}$.

9. Sean A y B dos cerrados disjuntos en un espacio métrico (X, d). Probar que la función
$$f : X \to \mathbb{R}, \quad f(p) = \frac{d(p, A)}{d(p, A) + d(p, B)}$$
es continua y separa A de B.

10. Demostrar el lema de Urysohn a partir del teorema de Tietze.

11. Probar que un subconjunto cerrado de un espacio normal también es normal.

12. En el espacio $(\mathbb{R}, \tau)$, donde $\tau = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, estudiar si la propiedad de normalidad es hereditaria.

13. Estudiar los axiomas de separación y numerabilidad de los siguientes espacios topológicos:

    a) La topología a derechas $(\mathbb{R}, \tau_d)$.

    b) La topología del punto incluido.

    c) La topología del punto excluido.

    d) $X = [-1, 1]$ y $\tau = \{O \subset [-1, 1] : 0 \not\in O\} \cup \{O \subset [-1, 1] : (-1, 1) \subset O\}$.

    e) Sea (X, τ) un espacio topológico y p un objeto que no pertenezca a X. Sea $X' = X \cup \{p\}$. Se define en X' la topología dada por $\tau' = \tau \cup \{X'\}$.

    f) El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con la topología de los divisores.

14. Sea X un conjunto con dos topologías τ_1, τ_2. Supongamos que $\tau_1 \subset \tau_2$. Estudiar qué propiedades de separación o numerabilidad que satisface (X, τ_1) se conservan en el espacio (X, τ_2).

15. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Probar que A es Lindelöff si y sólamente si para cualquier familia $\{O_i : i \in I\} \subset \tau$, tal que $A \subset \cup_{i \in I} O_i$, existe un subconjunto numerable $J \subset I$ tal que $A \subset \cup_{j \in J} O_j$.

16. Acabar los detalles de la demostración de la proposición 7.7.10.

17. Si un espacio métrico satisface alguna de las propiedades ANII, separable y Lindelöff, probar que también satisface las otras dos.

Capítulo 8

Compacidad

La compacidad es, junto a la conexión, el otro invariante topológico importante que estudiamos en este libro. No es fácil dar una idea intuitiva de qué significa que un espacio topológico sea compacto, aunque podemos decir que, en cierto sentido, está relacionado con la 'finitud'. Después de dar el concepto de espacio Lindelöff en el capítulo anterior, es sencillo decir qué es un espacio compacto: si un espacio Lindelöff era aquél que de todo recubrimiento por abiertos existía un subrecubrimiento numerable, a un espacio compacto le pedimos que dicho subrecubrimiento sea finito.

La compacidad, como invariante topológico, va a permitir distinguir espacios topológicos, pero a igual que la conexión, la compacidad es un concepto que va más allá y que se usa en numerosos campos de las matemáticas. De nuevo, su utilidad se refiere a la resolución de ecuaciones y una vez más para mostrar cómo se utiliza, recurrimos al cálculo de una variable.

En un primer curso de análisis matemático se prueba que una función continua $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto A cerrado y acotado alcanza un mínimo, es decir, existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in A$. El hecho topológico aquí es que en $\mathbb{R}$, con su topología usual, los conjuntos compactos son los conjuntos cerrados y acotados y por tanto podemos decir que toda función continua definida en un conjunto compacto de $\mathbb{R}$ alcanza un mínimo. Para simplificar, supongamos que A es un intervalo $A = [a, b]$ y que f es más que continua, concretamente, que sea diferenciable. Si además $x_0 \in (a, b)$, entonces x_0 es un punto crítico de f, es decir, $f'(x_0) = 0$.

Es justo al asegurar la existencia de una solución de $f'(x_0) = 0$ donde aparece el interés de un espacio compacto, pues en otros campos de las matemáticas, como la teoría de las ecuaciones diferenciales, existen problemas que consisten en determinar que cierta ecuación del tipo $f'(x) = 0$ tiene solución, donde f está definida en un espacio más abstracto que $\mathbb{R}$ y donde existe cierto concepto de diferenciabilidad. La idea consiste pues en dotar a dicho espacio de una topología que lo haga compacto, y si nuestra ecuación es todo lo buena que queramos, concretamente, que sea continua, el mismo esquema que hemos hecho antes para $\mathbb{R}$ se puede reproducir para obtener el resultado deseado.

8.1. Espacio compacto

Se considera un espacio topológico (X, τ) y $\mathcal{O} = \{O_i : i \in I\} \subset \tau$ una familia de conjuntos abiertos de X. Se dice que $\mathcal{O}$ es un *recubrimiento* por abiertos de X si $X = \bigcup_{i\in I} O_i$. Un *subrecubrimiento* del recubrimiento $\mathcal{O}$ es un subconjunto de $\mathcal{O}$ que también es un recubrimiento de X.

Definición 8.1.1. Un espacio topológico (X, τ) es compacto si todo recubrimiento por conjuntos abiertos $\mathcal{O}$ de X tiene un subrecubrimiento finito, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X = O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$, con $O_{i_j} \in \mathcal{O}$. Un subconjunto $A \subset X$ se dice que es compacto si el espacio topológico $(A, \tau_{|A})$ es compacto.

Por tanto, todo espacio compacto es Lindelöff. Una dificultad cuando se estudia la compacidad de un subespacio topológico es la utilización de la topología relativa. Por ello sería deseable tener una caracterización de la compacidad de un subespacio mediante abiertos del espacio ambiente. El siguiente resultado da una respuesta satisfactoria (comparar con el ejercicio 15 de la sección 7.8 para espacios Lindelöff).

Proposición 8.1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces A es compacto si y sólo si para cualquier familia de abiertos de X, $\{O_i : i \in I\} \subset \tau$, con $A \subset \cup_{i\in I} O_i$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$.*

Demostración. Supongamos que A es compacto y que $\mathcal{O} = \{O_i : i \in I\}$ es una familia de abiertos de X tal que $A \subset \cup_{i\in I} O_i$. Con la familia $\mathcal{O}$ construimos un recubrimiento de A por abiertos de A mediante $\mathcal{G} = \{O_i \cap A : i \in I\}$. Por ser A compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A = (O_{i_1} \cap A) \cup \ldots \cup (O_{i_n} \cap A)$. Entonces se deduce que $A \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$.

Recíprocamente, sea ahora un recubrimiento de A por abiertos relativos: $A = \cup_{i\in I} G_i$, donde $G_i \in \tau_{|A}$. Para cada $i \in I$, existe $O_i \in \tau$ tal que $G_i = O_i \cap A$. Entonces $A \subset \cup_{i\in I} O_i$ y por hipótesis, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$. Si en esta inclusión intersecamos por A, tenemos $A = G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_n}$. $\square$

En este contexto, si $\mathcal{O} = \{O_i : i \in I\} \subset \tau$ satisface $A \subset \cup_{i \in I} O_i$, diremos igualmente que $\mathcal{O}$ es un recubrimientos por abiertos de A, y del mismo modo usaremos la palabra subrecubrimiento.

Estudiamos la compacidad de algunos espacios topológicos conocidos.

EJEMPLO 8.1.3.

1. Cualquier espacio topológico que tiene una topología finita es compacto. Un ejemplo de esta situación es un espacio topológico trivial o un espacio (X, τ) donde X es un conjunto finito.
2. La recta euclídea $\mathbb{R}$ no es compacta pues la familia de abiertos de $\mathbb{R}$ formada por $\mathcal{O} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento de $\mathbb{R}$, pero dado cualquier subrecubrimiento finito, la unión de los abiertos del mismo es de la forma $(-m, m)$, $m \in \mathbb{N}$. Como veremos, la compacidad es una propiedad topológica, luego un intervalo abierto (a, b) tampoco es compacto.
3. El plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ no es compacto. Para ello tomamos el mismo recubrimiento $\mathcal{O}$ que hemos usado para probar que $\mathbb{R}$ no es compacto, y consideramos $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ como recubrimiento de $\mathbb{R}^2$, del que no se puede extraer un subrecubrimiento finito.
4. Cualquier subconjunto A no acotado de $\mathbb{R}^n$ no es compacto. Así, consideramos la familia de bolas centradas en el origen $0 \in \mathbb{R}^n$ y radio n dada por $\{B_n(0) : n \in \mathbb{N}\}$. Esta familia es un recubrimiento de A. Sin embargo, no es posible extraer un subrecubrimiento finito ya que en tal caso, $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_{n_j}(0) = B_m(0)$, donde $m = \max\{n_j : 1 \leq j \leq k\}$ y A sería un conjunto acotado.
5. Siguiendo con el ejemplo anterior, la acotación no es suficiente para asegurar que un espacio métrico sea compacto. Así, $(0, 1)$ es acotado pero no es compacto. Es más, ya hemos visto en el capítulo 2 que en un espacio métrico (X, d), existen distancias equivalentes que son acotadas, como por ejemplo,
$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$
Así tomando en $\mathbb{R}$ la distancia d como la usual, el espacio $(\mathbb{R}, d')$ está acotado pero no es compacto.
6. Consideramos una sucesión convergente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio topológico y sea x un límite. Entonces $A = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto. Usando la proposición 8.1.2, sea $A \subset \cup_{i \in I} O_i$, donde $O_i \in \tau$. Sea O_k un abierto que contenga a x. Por la convergencia, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O_k$ para $n \geq \nu$. Por otra parte, si $x_n \in O_{i_n}$, para $1 \leq n \leq \nu - 1$, entonces es evidente que
$$A \subset (O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_{\nu-1}}) \cup O_k.$$

7. Un espacio topológico discreto (X, τ_D) es compacto si y sólamente si X es un conjunto finito. Si X fuera infinito, $\mathcal{O} = \{\{x\} : x \in X\}$ es un recubrimiento por abiertos de X del cual no se puede extraer uno finito.
8. El espacio topológico de los complementos finitos (X, τ_{CF}) es compacto. Si $\mathcal{O} = \{O_i : i \in I\}$ es un recubrimiento por abiertos de X, tomamos O_k un conjunto abierto cualquiera del recubrimiento y lo fijamos. Entonces $X \backslash O_k$ es finito, llámese, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ con $x_i \subset X$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, existe $i_j \in I$ tal que $x_j \subset O_{i_j}$. Tenemos entonces $X = O_k \cup O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$, obteniendo el recubrimiento finito.

Podemos generalizar lo que sucede en $\mathbb{R}^n$ a un espacio métrico en general. Primero precisamos el concepto métrico de acotación (ver también ejercicio 6 del capítulo 2).

Definición 8.1.4. Un espacio métrico (X, d) se dice que está acotado si está incluido en una bola.

Es evidente que esta definición es equivalente a los dos siguientes enunciados:

1. Existe $M > 0$ tal que $d(p, q) \leq M$ para todo $p, q \in X$.
2. Para todo $p \in X$, existe $r_p > 0$ tal que $X = B_{r_p}(p)$.

Proposición 8.1.5. *Un espacio métrico compacto está acotado.*

Demostración. Sea $p \in X$ un punto fijo. Entonces $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n(p)$ y por la compacidad, existen $n_1, \ldots, n_k \subset \mathbb{N}$ tales que $X \subset B_{n_1}(p) \cup \ldots \cup B_{n_k}(p)$. Si $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, y como todas las bolas están centradas en p, tenemos $X = B_m(p)$, luego X está acotado. □

A continuación establecemos varias caracterizaciones de la compacidad en términos de conjuntos cerrados y de bases de topologías.

Teorema 8.1.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico y β una base de τ. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *El espacio (X, τ) es compacto.*
2. *Para cualquier familia de cerrados $\{F_i : i \in I\} \subset \mathcal{F}$ tal que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = \emptyset$.*
3. *De todo recubrimiento de X por elementos de β, existe un subrecubrimiento finito.*

Demostración. La equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) y la implicación (1) $\Rightarrow$ (3) son evidentes.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $X = \cup_{i\in I} O_i$, $O_i \in \tau$. Para cada $i \in I$ existe un conjunto de índices J_i tal que $O_i = \cup_{j\in J_i} B_j$. Por tanto, $X = \cup_{i\in I} \cup_{j\in J_i} B_j$ y se obtiene un recubrimiento por elementos de la base β. Por hipótesis, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X = B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_n}$. Como $B_{i_j} \subset O_{i_j}$, entonces $X = O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$ □

Igual que sucedía con la propiedad Lindelöff, la compacidad se mantiene respecto de aplicaciones continuas. Razonando del mismo modo que la proposición 7.7.8, se deduce:

Proposición 8.1.7. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua entre dos espacios topológicos.*

1. *Si (X, τ) es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.*
2. *La compacidad es una propiedad topológica.*

Volvemos a considerar la recta euclídea. Hemos mostrado ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son compactos, como son los conjuntos no acotados o el intervalo abierto $(0, 1)$. Sin embargo, y aparte de los conjuntos finitos, no hemos dado un ejemplo de un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. El caso destacado es el de un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. .

Teorema 8.1.8. *Un intervalo $[a, b]$ es compacto.*

Demostración. Basta considerar el intervalo $[0, 1]$. Sea $\mathcal{O} = \{O_i : i \in I\}$ un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{R}$ del intervalo $[0, 1]$. Definimos

$$A = \{x \in [0, 1] : \exists n \in \mathbb{N},\ [0, x] \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}\}.$$

Dicho conjunto no es vacío pues $0 \in A$. De la definición de A es evidente la siguiente propiedad:

$$\text{Si } x \in A \text{ e } y \in [0, 1] \text{ con } y \leq x, \text{ entonces } y \in A. \tag{8.1}$$

Para probar que $[0, 1]$ es compacto es suficiente con probar que $1 \in A$. Para ello se va a demostrar que A es un conjunto *cerrado y abierto* en $[0, 1]$ y ya que $[0, 1]$ es conexo y $A \neq \emptyset$, entonces $A = [0, 1]$, en particular, $1 \in A$.

1. El conjunto A es un conjunto cerrado en $[0, 1]$. Usamos el teorema 2.4.8. Sea $x \in \overline{A}^{[0,1]}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Si algún a_n satisface

$x \leq a_n$, la propiedad (8.1) prueba que $x \in A$. Supongamos pues que $a_n < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $k \in I$ tal que $x \in O_k$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset O_k$. Para este número ϵ, y por la convergencia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \to x$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, luego

$$[0, x] \subset [0, a_n] \cup (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset [0, a_n] \cup O_k.$$

Ya que $x_n \in A$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $[0, x_n] \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_m}$. Por tanto

$$[0, x] \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_m} \cup O_k.$$

Esto prueba que $x \in A$.

2. El conjunto A es un conjunto abierto en $[0, 1]$. Probamos que $A \subset \mathrm{int}(A)$ en la topología relativa de $[0, 1]$. Sea $x \in A$. Sea $i_0 \in I$ tal que $x \in O_{i_0}$ y como O_{i_0} es un abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset O_{i_0}$. Probamos ahora que

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap [0, 1] \subset A,$$

lo cual demuestra que $x \in \mathrm{int}(A)$. Sea $y \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap [0, 1]$. Si $y \leq x$ y como $x \in A$, entonces (8.1) prueba que $y \in A$. Supongamos ahora $y > x$. Ya que $[x, y] \subset [0, 1]$, tenemos

$$[0, y] = [0, x] \cup [x, y] \subset [0, x] \cup (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset [0, x] \cup O_{i_0},$$

y usando un razonamiento análogo al del párrafo anterior, se concluye que $y \in A$.

□

De la misma forma que sucedía con la propiedad de conexión, esta proposición se utiliza para probar que ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son compactos. Así el segmento $[x, y]$ determinado por dos puntos x e y de $\mathbb{R}^n$ es compacto: basta con darse cuenta que $[x, y] = \alpha([0, 1])$, donde $\alpha(t) = (1 - t)x + ty$. En general, la imagen de cualquier arco en un espacio topológico es un conjunto compacto. Otro ejemplo es el siguiente.

Corolario 8.1.9. *La circunferencia $\mathbb{S}^1$ es compacta.*

Demostración. Se define la aplicación

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Esta aplicación es continua, $[0, 1]$ es compacto y $\mathbb{S}^1 = f([0, 1])$. Finalizamos usando la proposición 8.1.7 y el teorema 8.1.8. □

El intervalo $(0,1)$ no es compacto, y es un subconjunto del espacio compacto $[0,1]$. Esto demuestra que la compacidad no es una propiedad hereditaria. Sin embargo sí se hereda a subconjuntos cerrados. Omitimos la demostración ya que es análoga a la de la proposición 7.7.8 para espacios Lindelöff.

Proposición 8.1.10. *Sea (X,τ) un espacio topológico compacto. Si $F \in \mathcal{F}$, entonces F es compacto.*

Cuando el espacio ambiente es Hausdorff, podemos darle la vuelta a este resultado del siguiente modo.

Proposición 8.1.11. *Sea (X,τ) un espacio topológico Hausdorff. Si $A \subset X$ es compacto, entonces A es un conjunto cerrado.*

Demostración. Demostramos que $X \setminus A$ es un conjunto abierto. Sea $x \in X \setminus A$. Para cada $y \in A$, $x \neq y$, y como el espacio es Hausdorff, existen $U^y \in \mathcal{U}_x$, $V_y \in \mathcal{U}_y$ tal que $U^y \cap V_y = \emptyset$. Sea $O_y \in \tau$ un abierto tal que $y \in O_y \subset V_y$: ver figura 8.1.

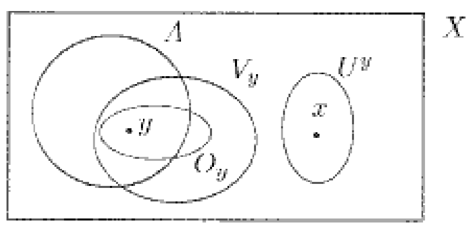


Figura 8.1: Un conjunto compacto en un espacio Hausdorff es cerrado

Entonces $\{O_y : y \in A\}$ es un recubrimiento por abiertos del conjunto A. Por ser A compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset O_{y_1} \cup \ldots \cup O_{y_n}$. Llamamos $U = U^{y_1} \cap \ldots \cap U^{y_n} \in \mathcal{U}_x$. Es evidente que $U \subset X \setminus A$ y esto prueba que $x \in \operatorname{int}(X \setminus A)$. $\square$

Si en la proposición eliminamos la hipótesis Hausdorff, entonces el resultado no es cierto como muestra el siguiente ejemplo. Sea (X, τ_{CF}) el espacio topológico de los complementos finitos. Dado $x \in X$, el conjunto $A = X \setminus \{x\}$ no es un conjunto cerrado de X al no ser finito. Sin embargo el conjunto A es compacto pues la topología inducida es la topología de los complementos finitos (ejemplo 1.5.6) y por tanto A es compacto.

Nos fijamos también en el siguiente espacio.

Ejemplo 8.1.12. Consideramos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología $\tau = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$. Este espacio no es compacto, pues el recubrimiento formado por toda la topología no tiene un subrecubrimiento finito. Los conjuntos cerrados $(-\infty, a]$ no son compactos por la misma razón que $\mathbb{R}$ no lo es, pero los conjuntos finitos son compactos y no son cerrados.

De la proposición 8.1.11, junto con que todo espacio métrico es Hausdorff y que los conjuntos compactos en un espacio métrico son acotados, se obtiene:

Corolario 8.1.13. *En un espacio métrico, todo subconjunto compacto es cerrado y acotado.*

De la proposición 8.1.11 se obtiene también el siguiente resultado, el cual no es trivial.

Corolario 8.1.14. *Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff. Si $A, B \subset X$ son compactos, entonces $A \cap B$ es compacto.*

Demostración. Ya que A y B son compactos, son conjuntos cerrados por la proposición 8.1.11. Luego $A \cap B$ es un conjunto cerrado incluido en el compacto A. Ahora la proposición 8.1.10 implica que es un conjunto compacto. □

Teorema 8.1.15. *Sean (X, τ) y (Y, τ') dos espacios topológicos, donde (X, τ) es compacto e (Y, τ') es Hausdorff. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua.*

1. *La aplicación f es cerrada.*
2. *Si f es una aplicación biyectiva, entonces es un homeomorfismo.*
3. *Si f es una aplicación inyectiva, entonces es un embebimiento.*

Demostración.

1. Sea $F \in \mathcal{F}$. Por la proposición 8.1.10, F es un conjunto compacto y la proposición 8.1.7 implica que $f(F)$ es un compacto. Debido a que (Y, τ') es un espacio Hausdorff, la proposición 8.1.11 asegura que $f(F)$ es un conjunto cerrado.
2. Es consecuencia del apartado anterior y del teorema 3.1.4.
3. Si consideramos $f : X \to f(X)$, se obtiene una aplicación biyectiva, continua. Ya que la propiedad es Hausdorff es hereditaria, entonces

$f(X)$ es un espacio Hausdorff. Por tanto, $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo por el apartado anterior.

$\square$

Probamos a continuación que la compacidad es una propiedad productiva.

Teorema 8.1.16 (Tichonoff). *Sean (X,τ) e (Y,τ') dos espacios topológicos. Entonces $(X\times Y,\tau\times\tau')$ es compacto si y sólo si (X,τ) e (Y,τ') son compactos.*

Demostración. Si $X \times Y$ es un espacio compacto, $X = p_1(X \times Y)$ e $Y = p_2(X \times Y)$, donde p_1 y p_2 son las aplicaciones proyecciones. Ya que la compacidad se mantiene por aplicaciones continuas (proposición 8.1.7), tanto X como Y son compactos.

Veamos el recíproco. Supongamos que X e Y son espacios compactos. Para probar que $X\times Y$ es compacto, usamos el teorema 8.1.6. Consideramos la base de la topología dada por $\beta = \tau\times\tau'$ y supongamos que $X\times Y = \cup_{i\in I}(O_i\times V_i)$, donde $O_i \times V_i \in \tau \times \tau'$. Ya que $\{x\} \times Y \cong Y$ (corolario 5.2.10), el conjunto $\{x\} \times Y$ es compacto, luego existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{x\} \times Y \subset (O_1^x \times V_1^x) \cup \ldots \cup (O_{n_x}^x \times V_{n_x}^x).$$

Suponemos sin perder generalidad que en todos los conjuntos abiertos O_j^x está el punto x para $j = 1, \ldots, n_x$. Llamamos $O^x = O_1^x \cap \ldots \cap O_{n_x}^x$, que es un entorno abierto del punto x. Entonces

$$O^x \times Y \subset (O_1^x \times V_1^x) \cup \ldots \cup (O_{n_x}^x \times V_{n_x}^x).$$

Sea ahora el recubrimiento por abiertos $\{O^x : x \in X\}$ del espacio (X,τ). Por ser éste compacto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $X = O^{x_1} \cup \ldots \cup O^{x_k}$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} X \times Y &= (O^{x_1} \cup \ldots \cup O^{x_k}) \times Y = (O^{x_1} \times Y) \cup \ldots \cup (O^{x_k} \times Y) \\ &\subset \left((O_1^{x_1} \times V_1^{x_1}) \cup \ldots \cup (O_{n_{x_1}}^{x_1} \times V_{n_{x_1}}^{x_1})\right) \cup \ldots \\ &\cup \left((O_1^{x_k} \times V_1^{x_k}) \cup \ldots \cup (O_{n_{x_k}}^{x_k} \times V_{n_{x_k}}^{x_k})\right). \end{aligned}$$

$\square$

Con una demostración análoga a la anterior, aunque con una notación más complicada, se demuestra el mismo resultado para un número finito de espacios topológicos.

Corolario 8.1.17. *Sean $\{(X_i, \tau_i) : 1 \leq i \leq n\}$ una familia finita de espa cios topológicos. Entonces $(X_1 \times \ldots, \times X_n, \tau_1 \times \ldots, \times \tau_n)$ es compacto si sólamente si (X_i, τ_i) es compacto para todo $1 \leq i \leq n$.*

8.2. Compacidad y espacios métricos

Una consecuencia del teorema de Tichonoff es el conocido teorema d Heine-Borel que caracteriza un subconjunto compacto de un espacio euclíde Recordemos que por el corolario 8.1.13, un conjunto compacto en un espaci métrico tiene que ser cerrado y acotado. En el espacio euclídeo el recípro también es cierto.

Teorema 8.2.1 (Heine-Borel). *Un subconjunto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ compacto si y sólamente si es cerrado y acotado.*

Demostración. Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotad Por estar acotado, existe $M > 0$ tal que $|x| \leq M$ para todo $x \in A$. $x = (x_1, \ldots, x_n)$, tenemos $|x_i| \leq |x| \leq M$, $1 \leq i \leq n$, para todo $x \in A$. P tanto,

$$A \subset [-M, M] \times \overset{n}{\cdots} \times [-M, M].$$

Pero el producto de intervalos cerrados es compacto por el teorema de Tich noff, y ya que A es un subconjunto cerrado de dicho compacto, la proposici 8.1.10 concluye que A es compacto.

Observamos que, aunque la demostración del teorema ha sido sencilla, se usado, aparte del teorema de Tichonoff y la proposición 8.1.10, dos hechos q no se pueden extender a todo espacio métrico. Primero, que por ser acotad el conjunto A está incluido en el producto cartesiano de intervalos cerrad y acotados. Por otro, que un intervalo del tipo $[a, b]$ es compacto.

Corolario 8.2.2. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$, los subconjuntos compactos de $(A, \tau_{|A})$ son l conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$ incluidos en A.*

Como la adherencia de un conjunto acotado también es acotado (ejercic 6 del capítulo 2) tenemos:

Corolario 8.2.3. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, entonces $\bar{A}$ es compacto.*

Mostramos ejemplos de subconjuntos compactos de espacios euclídeos.

Corolario 8.2.4. *1. La esfera $\mathbb{S}^n$ es compacta.*

2. El toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \overset{n}{\ldots} \times \mathbb{S}^1$ es compacto.

3. El elipsoide de $\mathbb{R}^3$ es la única cuádrica que es compacta.

Corolario 8.2.5. *Los espacios de matrices $O(n)$ y $SO(n)$ son compactos. Por otro lado, $SL(n,\mathbb{R})$ no es compacto, $n \geq 2$.*

Demostración. Observemos que estamos considerando estos conjuntos como subespacios topológicos del espacio métrico $gl(n,\mathbb{R})$ con su topología usual. Recordemos que dicho espacio no es más que el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n^2}$, donde la distancia usual de $\mathbb{R}^{n^2}$ se expresa en $gl(n,\mathbb{R})$ al considerar la métrica $\langle A, B\rangle = \text{traza}(AB^t)$. Por tanto, el módulo de $A \in gl(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ no es más que $|A| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \text{traza}(AA^t)$.

Se ha probado en el ejemplo 5.4.4 que $O(n)$ y $SO(n)$ son conjuntos cerrados de $gl(n,\mathbb{R})$. Por otra parte, para todo $A \in O(n)$,

$$|A|^2 = \langle A, A\rangle = \text{traza}(AA^t) = n,$$

luego $O(n)$ está acotado y por tanto compacto. Concretamente tenemos que $O(n)$ es un subconjunto de la esfera $\mathbb{S}^{n^2-1}(\sqrt{n})$. El grupo $SO(n)$ es compacto por ser un subconjunto cerrado de $O(n)$.

Por otra parte, $SL(n,\mathbb{R})$ no es compacto porque no está acotado. Concretamente, existen matrices de $SL(n,\mathbb{R})$ con módulo arbitrariamente grande: basta con tomar, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

y darse cuenta que $|A_n|^2 = n^2 + \frac{1}{n^2} + (n-2) \to \infty$. $\square$

Una consecuencia del teorema de Heine-Borel es el resultado anunciado en la introducción de este capítulo de que toda función continua definida en un espacio compacto alcanza un mínimo. Aunque llegados a este punto, dicha demostración es sencilla, no debemos de restar su importancia.

Corolario 8.2.6. *Sea (X,τ) un espacio topológico compacto y $f : (X,\tau) \to (\mathbb{R},\tau_u)$ una aplicación continua. Entonces f está acotada y alcanza un máximo y un mínimo*

Demostración. El conjunto $f(X)$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}$, luego es acotado. Esto quiere decir que la aplicación f está acotada. Por tanto, el supremo e ínfimo de $f(X)$, que son puntos adherentes (ejercicio 44 de la sección 1.8), pertenecen a $f(X)$ al ser éste un conjunto cerrado, es decir, son máximo y mínimo respectivamente. $\square$

La primera parte de la tesis del resultado anterior no es topológica, sino métrica. Efectivamente, podemos cambiar en $\mathbb{R}$ la distancia euclídea por otra equivalente que sea acotada y por tanto, toda función (continua o no) que llegue a $\mathbb{R}$ es acotada para esta nueva distancia. Pero la segunda parte sí es topológica, ya que necesitamos que (X,τ) sea compacto. Si el dominio (X,τ) no es compacto, el resultado del corolario 8.2.6 no es cierto. Veamos dos ejemplos:

1. Si $X=\{(x,1/x):x\in(0,\infty)\}$, este conjunto es cerrado en $\mathbb{R}^2$ pero no es compacto por no ser acotado. La proyección $p:X\to\mathbb{R}$, $p(x,y)=y$ es continua y su imagen es $(0,\infty)$, que no tiene mínimo ni está acotada.
2. El conjunto $X=(-\pi/2,\pi/2)$ es acotado pero no es compacto porque no es cerrado. La aplicación $f(x)=\tan(x)$, $x\in X$, es continua pero su imagen es $\mathbb{R}$, que no es un conjunto acotado.

Sea (X,d) un espacio métrico. Se define el *diámetro* de X como

$$\delta(X)=\sup\{d(x,y):x,y\in X\}.$$

Este número puede ser infinito. Sin embargo, es evidente que el diámetro es finito si y sólo (X,d) está acotado.

Corolario 8.2.7. *Si (X,d) es un espacio métrico compacto, entonces existen $a,b\in X$ tales que $\delta(X)=d(a,b)$.*

Demostración. Se define la aplicación

$$f:X\times X\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=d(x,y).$$

Sabemos que esta aplicación es continua por la proposición 3.3.3. Observemos que por la proposición 5.1.9, la topología producto es la misma que la topología determinada por la distancia producto. Ya que $X\times X$ es compacto, la función f alcanza su máximo, obteniendo el resultado. $\square$

Teorema 8.2.8 (Bolzano-Weierstrass). *Sea (X,τ) un espacio compacto. Entonces todo subconjunto infinito de X posee un punto de acumulación.*

Demostración. La demostración es por reducción al absurdo. Sea $A \subset X$ un conjunto infinito sin puntos de acumulación. Entonces para cada $x \in X$ existe un conjunto abierto O_x tal que $(O_x \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. Se considera el recubrimiento de X dado por $\{O_x : x \in X\}$. Por ser el espacio compacto, $X = O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, luego $A = (O_{x_1} \cap A) \cup \ldots \cup (O_{x_n} \cap A)$. Como $O_{x_i} \cap A$ contiene a lo más un punto de A, el conjunto A es finito, llegando a una contradicción. □

Corolario 8.2.9. *Todo subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene un punto de acumulación.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto infinito y acotado. Por estar acotado, existe $r > 0$ tal que $A \subset [-r, r] \times \overset{n}{\cdots} \times [-r, r]$. Entonces A es un conjunto infinito de un conjunto compacto, luego posee un punto de acumulación por el teorema de Bolzano-Weiertrass. □

Corolario 8.2.10. *Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $A \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, a)$.*

Demostración. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $d(a_n, x) \to d(x, A)$. Entonces la sucesión $\{d(a_n, x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Podemos suponer que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in B_r(x)$ para algún $r > 0$. Esto prueba que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finito, entonces $\{d(a_n, x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es constante a partir de cierto lugar, probando que $d(x, A)$ se alcanza para algún a_m. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es infinito, entonces el teorema de Bolzano-Weierstrass prueba que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación que denotamos por y. Entonces existe una parcial $\{a_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a y. Como A es cerrado, el teorema 2.4.8 asegura que $y \in A$. Por la continuidad de la función distancia,

$$d(a_{\sigma(n)}, x) \to d(y, x),$$

luego $d(y, x) = d(x, A)$. □

El resultado no es cierto si, por ejemplo, A es abierto. Así en $\mathbb{R}$, tomamos $A = (0, 1)$ y $x = 2$. Entonces $d(x, A) = 1$, pero la distancia nunca se alcanza en un punto de A.

8.3. Compacidad y axiomas de separación

En la proposición 8.1.11 y en el teorema de Heine-Borel, observamos que si a un espacio compacto le añadimos el axioma de separación Hausdorff, obtenemos resultados interesantes. Por ello nos vamos a detener en estudiar cómo influyen los axiomas de separación en un espacio compacto.

El primer resultado informa sobre la numerabilidad o no numerabilidad de un espacio compacto que es Hausdorff. Primero necesitamos un lema previo.

Lema 8.3.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico Hausdorff sin puntos aislados, $G\in\tau$ y $x\in X$. Entonces existe $O\in\tau$, $O\subset G$ tal que $x\notin\overline{O}$.*

Demostración. Sea $y\in G$ con $x\neq y$: esto es posible si $x\notin G$ y si $x\in G$, entonces G es un entorno de x, y como éste no es un punto aislado, $(G\setminus\{x\})\cap X\neq\emptyset$ y por tanto, podemos tomar un elemento y en dicha intersección. Por la propiedad Hausdorff, existen $W,W'\in\tau$, $x\in W$, $y\in W'$ y $W\cap W'=\emptyset$. El abierto que buscamos es $O = W'\cap G$. Entonces $O\subset G$. Si $x\in\overline{O}$, entonces $W\cap O=W\cap(W'\cap G)\neq\emptyset$, una contradicción. □

Teorema 8.3.2. *Sea (X,τ) un espacio Hausdorff y compacto. Si (X,τ) no tiene puntos aislados, entonces X no es numerable.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que X es numerable. Un primer caso es que X sea un conjunto finito $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Para cada $i\geq 2$, existen entornos $U_i\in\mathcal{U}_{x_1}$ y $V_i\in\mathcal{U}_{x_i}$ tales que $U_i\cap V_i=\emptyset$. Por tanto, $U=U_2\cap\ldots\cap U_n$ es un entorno de U y evidentemente $(U\setminus\{x_1\})\cap X=\emptyset$, es decir, x_1 es un punto aislado, llegando a una contradicción.

Por tanto, suponemos que X es infinito numerable, es decir, $X=\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$. Por el lema previo, y tomando como $G=X$, existe $O_1\in\tau$ tal que $x_1\notin\overline{O_1}$. Ahora tomamos x_2 y el abierto O_1. Por el lema de nuevo, sea $O_2\in\tau$ tal que $O_2\subset O_1$ y $x_2\notin\overline{O_2}$. Así se va construyendo una sucesión de abiertos $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con la propiedad $O_{n+1}\subset O_n$ y $x_n\notin\overline{O_n}$.

Tomamos la familia de cerrados $\{\overline{O_n}: n\in\mathbb{N}\}$. Por un lado tenemos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{O_n}=\emptyset$, pues si existe un punto $x_m\in X$ en la intersección, en particular, $x_m\in\overline{O_m}$, lo cual no es posible. Por otro lado, como el espacio (X,τ) es compacto, el teorema 8.1.6 asegura que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\overline{O_{i_1}}\cap\ldots\cap\overline{O_{i_{n_0}}}=\emptyset.$$

Pero dicha intersección no es más que $\overline{O_m}$ donde $m=\max\{i_1,\ldots,i_{n_0}\}$, que obviamente no es un conjunto vacío. □

Una consecuencia de este resultado es una demostración *topológica* de la no numerabilidad del conjunto de los números reales.

Corolario 8.3.3. *El conjunto de los números reales no es numerable.*

Demostración. El intervalo $[0, 1]$ es Hausdorff y compacto. Además $[0, 1]$ no tiene puntos aislados. Por el teorema anterior, $[0, 1]$ no es numerable. Como $\mathbb{R}$ contiene a un subconjunto no numerable, tampoco puede ser numerable. $\square$

En un espacio Hausdorff dos puntos distintos se pueden separar por conjuntos abiertos. Si el espacio también es compacto, dichos puntos son conjuntos compactos. Podemos generalizar aquel resultado a dos compactos disjuntos.

Teorema 8.3.4. *Sean A y B dos subconjuntos compactos y disjuntos en un espacio Hausdorff. Entonces existen conjuntos abiertos disjuntos O_1 y O_2 tales que $A \subset O_1$, $B \subset O_2$.*

Demostración. Sea $a \in A$ y lo fijamos. Como el espacio es Hausdorff, para cada $b \in B$, existen $G_b, O_b \in \tau$ y disjuntos con $a \in G_b$, $b \in O_b$. Ya que $\{O_b : b \in B\}$ es un recubrimiento de B y B es compacto, existe un subrecubrimiento finito: $B \subset O_{b_1} \cup \ldots \cup O_{b_n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces el entorno de a dado por $G^a = G_{b_1} \cap \ldots \cap G_{b_n}$ y el abierto $O^a = O_{b_1} \cup \ldots O_{b_n}$ son disjuntos.

Consideramos ahora el recubrimiento por abiertos del compacto A definido por $\{G^a : a \in A\}$. De nuevo existe un subrecubrimiento finito: $A \subset G^{a_1} \cup \ldots \cup G^{a_m}$ con $m \in \mathbb{N}$. Finalmente los abiertos

$$O_1 = G^{a_1} \cup \ldots \cup G^{a_m}, \quad O_2 = O^{a_1} \cap \ldots \cap O^{a_m}$$

son disjuntos y contienen respectivamente a A y a B. $\square$

Como consecuencia de este teorema y de la proposición 8.1.10, concluimos:

Teorema 8.3.5. *Un espacio topológico compacto y Hausdorff es regular, normal y T_4.*

Corolario 8.3.6. *Un espacio topológico compacto y regular es normal.*

Demostración. Sean $F_1, F_2 \subset \mathcal{F}$ dos cerrados disjuntos. Como el espacio es regular, para todo $x \in F_1$ existe $G_x \in \tau$ que contiene a x y $O_x \in \tau$, $F_2 \subset O_x$ tal que $G_x \cap O_x = \emptyset$. Se sigue ahora los mismos pasos que en la demostración del teorema 8.3.4. $\square$

8.4. Compacidad local

Aunque el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ no es compacto, las bolas cerradas centradas en cada uno de sus puntos es una base de entornos compactos. De la misma forma que sucedía con la conexión, nos interesa propiedades locales de compacidad.

Definición 8.4.1. Un espacio topológico (X, τ) se llama localmente compacto si todo punto tiene una base de entornos compactos. Un subconjunto $A \subset X$ se llama localmente compacto si lo es $(A, \tau_{|A})$.

EJEMPLO 8.4.2.

1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto.
2. Un espacio topológico discreto (X, τ_D) es localmente compacto pues para todo $x \in X$, $\beta_x = \{\{x\}\}$ es una base de entornos compactos.
3. Del mismo modo que en el caso anterior, si la topología es finita (por ejemplo, si X es finito), el espacio es localmente compacto.
4. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con la topología usual no es localmente compacto, pues ningún entorno de un punto es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$, y por tanto, al ser un espacio Hausdorff, dicho entorno tampoco es compacto. Con este ejemplo, se muestra que la compacidad local no es una propiedad hereditaria.
5. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y τ_u su topología usual. Definimos un espacio topológico (X, τ), donde $X = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$ y $\tau = \tau_u \cup \{X\}$. Observemos que $\tau_{|\mathbb{Q}} = \tau_u$ y por tanto (X, τ) no es localmente compacto, pues $\mathbb{Q}$ no lo es. Sin embargo, X es compacto porque en cualquier recubrimiento por abiertos de X, el abierto que contiene a $\sqrt{2}$ debe ser necesariamente X, obteniendo así el subrecubrimiento finito.

Teorema 8.4.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff. Si todo punto tiene un entorno compacto, entonces el espacio es localmente compacto.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}_x$ un entorno compacto. Como U es Hausdorff, el teorema 8.3.5 asegura que $(U, \tau_{|U})$ es regular. Entonces existe β_x una base de entornos cerrados de x en $(U, \tau_{|U})$. Por tanto, todo elemento de β_x es compacto por la proposición 8.1.10 y es evidente que β_x también es base de entornos de x en (X, τ). □

Corolario 8.4.4. *Un espacio compacto y Hausdorff es localmente compacto.*

Demostración. Usando el teorema 8.4.3, es suficiente con tomar como entorno compacto todo el espacio topológico. □

Corolario 8.4.5. *Sea (X,τ) un espacio Hausdorff. Si $A, B \subset X$ son localmente compactos, entonces $A \cap B$ es localmente compacto.*

Demostración. Sea $x \in A \cap B$ y sean $U, V \in \mathcal{U}_x$ tales que $U \cap A$ y $V \cap B$ son conjuntos compactos. Entonces $(U \cap A) \cap (V \cap B)$ es un compacto por el corolario 8.1.14 y es entorno de x en $A \cap B$. □

EJEMPLO 8.4.6. La recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$ no es localmente compacta. Para ello vamos a probar que ningún entorno de un punto es compacto. Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $\beta_x = \{[x,y) : y > x\}$ la base usual de entornos del punto x. Ninguno de estos entornos de la base es compacto, ya que podemos escribir $[x,y) = \cup_{n\in\mathbb{N}}[x, y - 1/n)$ y no se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Sea ahora $U \in \mathcal{U}_x$ y, por reducción al absurdo, supongamos que es compacto. Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $[x,y) \subset U$. Debido a que $[x,y)$ es un conjunto cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_S)$ y está incluido en un compacto, es compacto, llegando a una contradicción.

Tanto en el teorema 8.4.3 como en el corolario anterior, se puede sustituir el axioma Hausdorff por regular. Veámoslo en la siguiente proposición.

Proposición 8.4.7. *Un espacio topológico regular donde todo punto tiene un entorno compacto es localmente compacto. En particular, un espacio compacto y regular es localmente compacto.*

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema 8.4.3. □

Teorema 8.4.8. *Sea (X,τ) un espacio Hausdorff y localmente compacto y $A \subset X$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *A es localmente compacto.*
2. *A es la intersección de un conjunto abierto y un conjunto cerrado de (X,τ).*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Probamos que A es un conjunto abierto en $\overline{A}$. Si demostramos esto, existiría $O \in \tau$ tal que $A = O \cap \overline{A}$, es decir, A es la intersección de un conjunto abierto y de un conjunto cerrado.

Sea $x \in A$. Por ser (X,τ) localmente compacto, existe $U \in \mathcal{U}_x$ compacto y ya que X es un espacio Hausdorff, U es cerrado. Sea $O \in \tau$ y $V \in \mathcal{U}_x$ tal que $x \in O \cap A \subset V \cap A = U$. Ya que U es un conjunto cerrado en X, $\overline{O \cap A} \subset U$ y $\overline{O \cap A}$ es compacto por ser un conjunto cerrado de U. Observemos que $O \cap \overline{A} \subset \mathcal{U}_x^{A}$. Probamos que $O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A}$. Sea $y \in O \cap \overline{A}$ y

$W \in \mathcal{U}_y$. Entonces $W \cap O \in \mathcal{U}_y$ y $(W \cap O) \cap A = W \cap (O \cap A) \neq \emptyset$. Entonces $O \cap \overline{A} \in \mathcal{U}_x^A$ y $O \cap \overline{A} \subset A$ ya que

$$O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A} \subset V \cap A \subset A.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Ya que A es Hausdorff, para probar que es localmente compacto, es suficiente con hallar para todo $x \in A$ un entorno en A compacto. Caben varias posibilidades:

1. El conjunto A es cerrado. Como X es localmente compacto, sea $V \in \mathcal{U}_x$ un entorno compacto. Llamamos $U = V \cap A \subset \mathcal{U}_x^A$. Por ser U la intersección de dos conjuntos cerrados, es cerrado dentro del compacto V, luego es compacto.

2. El conjunto A es abierto. Ya que $A \in \mathcal{U}_x$, sea $V \in \mathcal{U}_x$ compacto tal que $x \in V \subset A$. Entonces $V \in \mathcal{U}_x^A$ y es compacto.

3. Si $A = O \cap F$ donde $O \subset \tau$ y $F \in \mathcal{F}$, entonces A es localmente compacto por ser intersección de dos espacios Hausdorff localmente compactos (corolario 8.4.5).

□

Corolario 8.4.9. *En un espacio localmente compacto y Hausdorff, la compacidad local se hereda a conjuntos abiertos y a conjuntos cerrados.*

A continuación se estudia el comportamiento de la compacidad local respecto de las aplicaciones continuas y el producto topológico de espacios topológicos. La aplicación identidad $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_D) \to (\mathbb{R}, \tau_S)$ entre la topología discreta y la recta de Sorgenfrey muestra que la compacidad local no se mantiene por aplicaciones continuas. Sin embargo, y como sucede para la conexión, tenemos:

Proposición 8.4.10. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación sobreyectiva, continua y abierta. Si (X, τ) es localmente compacto, entonces (Y, τ') es localmente compacto.*

Demostración. Sea $f(x) \in f(X)$ y $U' \in \mathcal{U}'_{f(x)}$. Por la continuidad de f y la compacidad local de X, existe $V \in \mathcal{U}_x$ compacto tal que $f(V) \subset U'$. Entonces $f(V) \in \mathcal{U}'_{f(x)}$ por ser f abierta, y es compacto por serlo V. □

Corolario 8.4.11. *Sean (X,τ) e (Y,τ') dos espacios topológicos. Entonces (X,τ) e (Y,τ') son localmente compactos si y sólo si $(X\times Y,\tau\times\tau')$ es localmente compacto.*

Demostración. Sean X e Y dos espacios localmente compactos y $(x,y)\in X\times Y$. Sean β_x y β'_y bases de entornos compactos de x e y respectivamente. Por tanto $\beta_x\times\beta'_y$ es una base de entornos de (x,y) y cada entorno de esta base es compacto al ser producto de compactos.

Sean ahora dos espacios topológicos (X,τ) e (Y,τ') y supongamos que $(X\times Y,\tau\times\tau')$ es un espacio localmente compacto. Entonces $X=p_1(X\times Y)$, $Y=p_2(X\times Y)$ y la compacidad se mantiene por aplicaciones continuas, sobreyectivas y abiertas. □

Se probó en el teorema 8.3.5 que un espacio compacto y Hausdorff satisfacía el axioma de separación T_4. Vamos a obtener ahora un resultado en la misma línea para un espacio localmente compacto.

Teorema 8.4.12. *Un espacio localmente compacto y Hausdorff es T_3.*

Demostración. Sólo hay que probar que el espacio es regular. Por hipótesis, todo punto tiene una base de entornos compactos. Ya que el espacio es Hausdorff, estos entornos son conjuntos cerrados. Por tanto el espacio es regular porque todo punto tiene una base de entornos cerrados (teorema 7.3.4). □

Podemos afinar más el resultado del siguiente modo.

Teorema 8.4.13. *Un espacio localmente compacto y Hausdorff es completamente regular.*

Demostración. Sea $x\in X$ y $F\in\mathcal{F}$ tal que $x\notin F$. Gracias a que $X\setminus F$ es un entorno de x, la compacidad local asegura que existe $V_2\in\mathcal{U}_x$ con $\overline{V_2}$ compacto y $\overline{V_2}\subset X\setminus F$. Usando de nuevo la compacidad local, sea $V_1\in\mathcal{U}_x$ tal que $\overline{V_1}$ compacto y

$$\overline{V_1}\subset V_2\subset\overline{V_2}\subset X\setminus F.$$

Sea $O_1\in\tau$ tal que $x\in O_1\subset V_1$.Ya que $\overline{V_2}$ es un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff, es un espacio normal. Usamos el lema de Urysohn para los cerrados $\{x\}$ y $\overline{V_2}\setminus O_1$. Existe pues una aplicación continua $f:\overline{V_2}\to[0,1]$ tal que $f(x)=0$ y $f=1$ en $\overline{V_2}\setminus V_1$. Definimos la aplicación

$$h:(X,\tau)\to[0,1],\quad h(z)=\begin{cases} f(z) & \text{si } z\in\overline{V_2}\\ 1 & \text{si } z\in X\setminus O_1.\end{cases}$$

La aplicación está bien definida pues en $\overline{V_2} \cap (X \setminus O_1)$, $f(z) = 1$. Usando el teorema 3.1.15, la aplicación h es continua. Veamos que h separa x y F. Ya que $x \in \overline{V_2}$, $h(x) = f(x) = 0$. Por otra parte, como $F \subset X \setminus O_1$, la función h coincide con la función constante 1 en F. □

Para finalizar demostramos el teorema de Baire y una consecuencia suya, que serán usados en el capítulo 10.

Teorema 8.4.14 (Baire). *Sea (X, τ) un espacio localmente compacto y Hausdorff y sea $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \tau$ y $\overline{O_n} = X$. Entonces*

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = X.$$

Demostración. Es suficiente probar que si $O \in \tau$, entonces $O \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n) \neq \emptyset$. Ya que O_1 es denso, $O \cap O_1 \neq \emptyset$. Sea $x_1 \in O \cap O_1$. Por ser el espacio localmente compacto, existe $K_1 \in \mathcal{U}_{x_1}$ compacto tal que $K_1 \subset O \cap O_1$. Sea $V_1 \in \tau$ tal que $x \in V_1 \subset K_1$. Como K_1 es un conjunto cerrado, $\overline{V_1} \subset K_1$ y $\overline{V_1}$ es compacto.

Usamos que O_2 es denso. Ya que $V_1 \in \tau$, entonces $V_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Razonando de la misma forma, existe $V_2 \in \tau$ cuya adherencia es compacta y $\overline{V_2} \subset V_1 \cap O_2$. De esta forma, y por recurrencia, existe una familia de abiertos $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $V_n \neq \emptyset$, $\overline{V_n}$ compacto y $V_n \subset V_{n-1} \cap O_n$.

Se va a probar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \neq \emptyset$. La sucesión $\{\overline{V_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, pues $\overline{V_n} \subset V_{n-1} \cap O_n \subset V_{n-1} \subset \overline{V_{n-1}}$. Por reducción al absurdo, si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} = \emptyset$, entonces

$$\overline{V_1} = \overline{V_1} \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\overline{V_1} \setminus \overline{V_n}).$$

Ya que $\overline{V_1}$ es compacto, y $\overline{V_1} \setminus \overline{V_n}$ es un conjunto abierto en $\overline{V_1}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\overline{V_1} = (\overline{V_1} \setminus \overline{V_{i_1}}) \cup \ldots \cup (\overline{V_1} \setminus \overline{V_{i_n}}),$$

es decir

$$\bigcap_{j=1}^{n} \overline{V_{i_j}} = \emptyset,$$

lo cual es falso pues $\bigcap_{j=1}^{n} \overline{V_{i_j}} = \overline{V_{i_0}}$, donde $i_0 = \max\{i_1, \ldots, i_n\}$. Finalmente tenemos

$$\begin{aligned} O \bigcap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n) &= (O \cap O_1) \bigcap (\bigcap_{n=2}^{\infty} O_n) \supset \overline{V_1} \bigcap (\bigcap_{n=2}^{\infty} O_n) \\ &\supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

□

Corolario 8.4.15. *Sea un espacio (X,τ) localmente compacto y Hausdorff tal que $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$, con $F_n\subset\mathcal{F}$. Entonces existe $O\in\tau$ no vacío y existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $O\subset F_k$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que para todo $n\in\mathbb{N}$, $F_n\not\supset O$ para cualquier conjunto abierto O no vacío. Sea $O_n=X\setminus F_n\in\tau$. Probamos que O_n es denso. Tenemos

$$X\setminus\overline{O_n}\subset X\setminus O_n=F_n,$$

y entonces F_n contiene al conjunto abierto $X\setminus\overline{O_n}$. Por tanto $X\setminus\overline{O_n}=\emptyset$, es decir, $\overline{O_n}=X$.

Por el teorema de Baire, $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n}=X$. Pero

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n}=\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}X\setminus F_n}=\overline{X\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n}=\emptyset,$$

llegando a una contradicción. $\square$

8.5. Compactificación de un espacio topológico

A lo largo del desarrollo del presente capítulo hemos visto que un espacio compacto posee numerosas propiedades interesantes. Sería conveniente que un espacio que no fuera compacto estuviera embebido en un espacio compacto y poder usar, en cierta medida, estas propiedades. El problema de embeber un espacio topológico no compacto en un espacio compacto se llama *compactificación de un espacio* y lo estudiamos en esta sección. Previamente ponemos varios ejemplos de embebimientos de un espacio topológico no compacto dentro de uno que sí lo es y de esta manera clarificamos el problema.

Ejemplo 8.5.1.

1. Se considera la proyección estereográfica $\pi:\mathbb{S}^n\setminus\{N\}\to\mathbb{R}^n$ y $f:i\circ\pi^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^n$, donde $i:\mathbb{S}^n\setminus\{N\}\hookrightarrow\mathbb{S}^n$ es la aplicación inclusión. Entonces f es un embebimiento de $\mathbb{R}^n$ en el espacio compacto $\mathbb{S}^n$. Además, $f(\mathbb{R}^n)$ es casi todo la esfera, concretamente, la imagen es densa en $\mathbb{S}^n$ y $\mathrm{card}(\mathbb{S}^n\setminus f(\mathbb{R}^n))=1$.
2. Consideramos la aplicación inclusión $i:(0,1)\hookrightarrow[0,1]$. Entonces i es un embebimiento. Además $i((0,1))=(0,1)$ es un conjunto denso en $[0,1]$ y $\mathrm{card}([0,1]\setminus i(0,1))=2$.
3. Podemos también considerar la aplicación inclusión $i:(0,1)\hookrightarrow[0,2]$. Esta aplicación es un embebimiento del intervalo $(0,1)$ en un espacio

compacto. Sin embargo, y a diferencia del caso anterior, el conjunto $[0,2] \setminus (0,1)$ es 'grande' respecto del ejemplo considerado anteriormente

4. Se considera cualquier homeomorfismo $g : \mathbb{R} \to (0,1)$ y sea $i : (0,1) \hookrightarrow [0,1]$ la aplicación inclusión. De nuevo, $i \circ g$ es un embebimiento de $\mathbb{R}$ en el espacio compacto $[0,1]$. También, $\overline{i \circ g(0,1)} = [0,1]$. Como en el primer ejemplo (para $n = 1$), $\mathbb{R}$ se ha embebido en un espacio compacto, en este caso, el intervalo $[0,1]$, pero los espacios $\mathbb{S}^1$ y $[0,1]$ no son homeomorfos. Por tanto, además de saber qué es una compactificación, es necesario definir cuándo dos compactificaciones son iguales.

Definición 8.5.2. Una compactificación de un espacio topológico (X,τ) es un par $((X',\tau'), f)$ donde:

1. El espacio topológico (X',τ') es compacto.
2. La aplicación $f : (X,\tau) \to (X',\tau')$ es un embebimiento.
3. El conjunto $f(X)$ es denso en X'.

Dos compactificaciones $((X_1,\tau_1), f_1)$ y $((X_2,\tau_2), f_2)$ de X son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : X_1 \to X_2$ tal que $h \circ f_1 = f_2$

La equivalencia topológica es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las compactificaciones de un mismo espacio y se sobreentenderá que cuando buscamos una compactificación de un espacio, lo hacemos salvo dicha equivalencia. Así las dos compactificaciones de $\mathbb{R}$ dadas en el ejemplo 8.5. no son equivalentes porque $\mathbb{S}^1$ y $[0,1]$ no son homeomorfos.

Antes de enunciar un teorema de existencia, y resultado principal de esta sección, estudiamos qué sucede si intentamos compactificar un espacio compacto. En general, y bajo adecuadas condiciones de separación, no tiene sentido compactificar un espacio compacto.

Proposición 8.5.3. *Toda compactificación Hausdorff de un espacio compacto (X,τ) es equivalente a $((X,\tau), 1_X)$*

Demostración. Sea $((X',\tau'), f)$ una compactificación de (X,τ). En particular, $f(X)$ es un subconjunto compacto de X'. Ya que X' es Hausdorff el conjunto $f(X)$ es cerrado. Entonces $f(X) = \overline{f(X)} = X'$. Por tanto $f : (X,\tau) \to (X',\tau')$ es un homeomorfismo. Evidentemente $f^{-1} \circ f = 1_X$ probando que (X,τ) es equivalente a (X',τ').

Cuando la compactificación no es Hausdorff, el resultado no es cierto como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.5.4. Sea (X,τ) un espacio topológico y $p \notin X$. Definimos $X' = X \cup \{p\}$ y consideramos la topología $\tau' = \tau \cup \{X'\}$. La topología τ' se llama topología Gran Hermano. Probamos que $((X',\tau'),i)$ es una compactificación de (X,τ), donde $i : X \hookrightarrow X'$ es la inclusión.

1. La inclusión $i : X \to X'$ es un embebimiento, pues $\tau'_{|X} = \tau$.
2. El espacio (X',τ') es compacto pues el único abierto que contiene a p es X', luego en todo recubrimiento de X' se encuentra el propio X', y así, $\{X'\}$ es el recubrimiento finito buscado.
3. Finalmente, $i(X) = X$ es denso en X' ya que $p \in \overline{X}$ pues, de nuevo, el único abierto que contiene a p es X', el cual interseca a X.

Por otro lado, (X',τ') no es Hausdorff ya que el único entorno de p es X' y por tanto el punto p no se puede separar de cualquier otro punto. Finalmente, si el espacio (X,τ) es compacto y Hausdorff, (X',τ') no es homeomorfo a (X,τ) por no ser Hausdorff.

Una última observación es que si $f : (X,\tau) \to (X',\tau')$ es un embebimiento y (X',τ') es compacto, el par $((X',\tau'),f)$ no tiene porqué ser una compactificación pues la imagen de X puede no ser densa en X'. Sin embargo, cambiamos X' por $\overline{f(X)}$ y entonces sí es una compactificación: $\overline{f(X)}$ es un conjunto cerrado en X' y por tanto compacto. Un ejemplo es el siguiente. Sea la aplicación

$$g : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

cuya gráfica es parte del seno del topólogo. Entonces

$$f : (0,1) \to [0,1] \times [-1,1], \quad f(x) = (x, g(x))$$

es un embebimiento en un espacio compacto. Sin embargo la imagen $f((0,1))$ no es densa. Podemos ahora cambiar $[0,1] \times [-1,1]$ por $\overline{f(X)}$ y concluir que $(\overline{f(X)}, f)$ es una compactificación de $(0,1)$. Observemos que

$$\overline{f(X)} = G(g) \cup (\{0\} \times [-1,1]).$$

Por tanto esta compactificación no es equivalente ni a $\mathbb{S}^1$ ni a $[0,1]$, ya que $\overline{f(X)}$ no es arcoconexo por el ejemplo 6.6.7.

A continuación construimos una compactificación en un espacio topológico no compacto, añadiendo al espacio de partida un único punto.

Teorema 8.5.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico no compacto y ∞ un objeto que no pertenece a X. Se define el conjunto $X^* = X \cup \{\infty\}$ y la familia de* *subconjuntos*

$$\tau^* = \tau \cup \{O \subset X^* : X^* \setminus O \text{ es cerrado y compacto en } X\}.$$

Entonces $((X^*, \tau^*), i)$ *es una compactificación de* X, *donde* $i : X \hookrightarrow X'$ *es la aplicación inclusión.*

Esta compactificación se llama *compactificación de Alexandroff por un punto*. Observemos que $\mathrm{card}(X^* \setminus i(X)) = 1$.

Demostración. El elemento ∞ sólo pertenece a los conjuntos abiertos del segundo tipo y, por otra parte, todos los abiertos que no están en τ contienen a ∞.

1. Probamos que τ^* es una topología en X^*. Es evidente que $\emptyset \in \tau \subset \tau^*$. Por otra parte $\{\emptyset\}$ es cerrado y compacto en X luego $X^* \setminus \emptyset = X^* \in \tau^*$.

   Sean O_1, $O_2 \in \tau^*$. Si ambos pertenecen a τ, entonces su intersección también pertenece a $\tau \subset \tau^*$. Si $\infty \in O_1 \cap O_2$, entonces $X^* \setminus O_1$, $X^* \setminus O_2$ son cerrados y compactos en X, luego su unión es un conjunto cerrado y compacto en X. Por tanto

   $$X^* \setminus ((X^* \setminus O_1) \cup (X^* \setminus O_2)) = O_1 \cap O_2 \in \tau^*.$$

   El caso que queda por estudiar es que $O_1 \in \tau$ e $\infty \in O_2$. En particular, $X^* \setminus O_2 \in \mathcal{F}$. Entonces $\infty \notin O_1 \cap O_2$. Se concluye que

   $$\begin{aligned} O_1 \cap O_2 &= O_1 \cap (O_2 \setminus \{\infty\}) = O_1 \cap (O_2 \cap X) \\ &= O_1 \cap (X \setminus (X^* \setminus O_2)) \in \tau. \end{aligned}$$

   Sea ahora $\{O_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos de τ^*. Si para todo $i \in I$, $O_i \in \tau$ entonces la unión está en $\tau \subset \tau^*$. Supongamos ahora que $\exists i_0 \in I$ tal que $\infty \in O_{i_0}$. Llamamos $J \subset I$ el conjunto de índices tal que $\infty \in O_j$, $j \in J$ y sea $K = I \setminus J$. El conjunto $X^* \setminus O_{i_0}$ es cerrado y compacto en (X, τ). Entonces

   $$X^* \setminus \bigcup\nolimits_I O_i = \left(\bigcap\nolimits_{j\in J}(X^* \setminus O_j)\right) \bigcap \left(\bigcap\nolimits_{k\in K}(X \setminus O_k)\right)$$

   es un subconjunto cerrado en X. Ya que $X^* \setminus \cup_{i\in I} O_i \subset X^* \setminus O_{i_0}$ y $X^* \setminus O_{i_0}$ es compacto, la proposición 8.1.10 implica que $X^* \setminus \cup_{i\in I} O_i$ es compacto. Esto prueba que $\cup_{i\in I} O_i \subset \tau^*$.

2. Probamos que la inclusión $i : (X, \tau) \hookrightarrow (X^*, \tau^*)$ es un embebimiento. Esto equivale a probar que $\tau = \tau^*_{|X}$. Sea $O \in \tau \subset \tau^*$. Entonces $O = O \cap X \in \tau^*_{|X}$. Por otra parte sea $O \in \tau^*_{|X}$. Existe $O^* \in \tau^*$ tal que $O = O^* \cap X$. Caben dos posibilidades. Si $O^* \in \tau$, entonces $O^* \cap X \in \tau$. La otra posibilidad es que $\infty \in O^*$. Entonces $X^* \setminus O^* \in \mathcal{F}$ y así
$$O = (O^* \setminus \{\infty\}) \cap X = X \setminus (X^* \setminus O^*) \in \tau.$$

3. Demostramos que (X^*, τ^*) es un espacio compacto. Tomamos $\{O_i : i \in I\}$ un recubrimiento por abiertos de X^*. Sea $i_0 \in I$ un índice tal que $\infty \in O_{i_0}$ y lo fijamos. Entonces $X^* \setminus O_{i_0}$ es un conjunto compacto en (X, τ) y ya que $\tau^*_{|X} = \tau$, también es un subconjunto compacto en X^*. Por la proposición 8.1.2, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$X^* \setminus O_{i_0} \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}.$$
De aquí concluimos que
$$X^* = O_{i_0} \cup O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n},$$
obteniendo el subrecubrimiento finito que estábamos buscando.

4. Por último, probamos que $i(X) = X$ es denso en (X^*, τ^*). En caso contrario, existiría $O \in \tau^*$, $O^* \neq \emptyset$, tal que $O \cap X = \emptyset$. Entonces $O \notin \tau$ y por tanto $\infty \in O$. En particular, $X^* \setminus O$ es un compacto de (X, τ). Por tanto, $X \subset X^* \setminus O$, es decir, $X = X^* \setminus O$ y esto quiere decir que X es compacto, lo cual es falso.

□

Observemos que en la construcción de la compactificación de Alexandroff, si el espacio de partida (X, τ) es Hausdorff, entonces todo subconjunto compacto es cerrado. En tal caso, la topología τ^* está descrita como
$$\tau^* = \tau \cup \{O \subset X^* : X^* \setminus O \text{ es compacto en } X\}.$$

Ejemplo 8.5.6. Hallamos la compactificación de Alexandroff de la recta euclídea. Tomamos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, donde ∞ tiene el mismo significado dado anteriormente, es decir, un objeto que no pertenece a $\mathbb{R}$. Si $O \subset \mathbb{R}^*$ es un conjunto tal que $\mathbb{R}^* \setminus O$ es un compacto de $\mathbb{R}$, entonces es un conjunto cerrado y acotado. Si tomamos $\mathbb{R}^* \setminus O = [a, b]$, con $a < b$, entonces $O = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \cup \{\infty\}$. Aquí, y en lo que sigue, el símbolo ∞ en $(-\infty, a)$

o (b, ∞) no coincide con el objeto ∞, y su sentido es el habitual al considerar intervalos de $\mathbb{R}$. De aquí no es difícil probar que una base de τ^* es

$$\beta = \{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \cup (b, \infty) \cup \{\infty\} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

De la definición de τ^* y la proposición 1.4.7, una base de entornos de ∞ es

$$\beta_\infty = \{(-\infty, a) \cup (b, \infty) \cup \{\infty\} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Si escribimos ahora $\mathbb{R}$ como $(-\infty, +\infty)$, podemos imaginar la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}$ como si $\mathbb{R}$ estuviera formada por dos extremos, a saber, '$-\infty$' y '$+\infty$' y que ambos están pegados formando una circunferencia. Esto será clarificado en el corolario 8.5.10.

Teorema 8.5.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico no compacto. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *(X^*, τ^*) es Hausdorff.*
2. *(X, τ) es Hausdorff y localmente compacto.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Ya que la propiedad Hausdorff es hereditaria y $\tau = \tau^*_{|X}$, el espacio (X, τ) es Hausdorff. Por otra parte el espacio (X^*, τ^*) es Hausdorff y compacto, luego el corolario 8.4.4 implica que es localmente compacto. Ya que X es un conjunto abierto en τ^*, usamos el corolario 8.4.9 para concluir que es localmente compacto.

(1) $\Rightarrow$ (2). Probamos que (X^*, τ^*) es Hausdorff. Sean $x, y \in X^*$. Caben dos posibilidades.

1. Los puntos x e y pertenecen a X. Ya que X es Hausdorff, existen entornos de X, y por tanto de X^*, que los separan.
2. El caso que queda es que $x = \infty$. Por ser X Hausdorff y localmente compacto, existe $V \in \mathcal{U}_y$ que es compacto y cerrado en X. Por tanto $U = X^* \setminus V \in \tau \subset \tau^*$ y contiene a ∞, es decir, $U \in \mathcal{U}^*_\infty$. Evidentemente U y V son disjuntos.

□

Teorema 8.5.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico no compacto.*

1. *El espacio (X, τ) admite una compactificación Hausdorff por un punto si y sólamente si (X, τ) es Hausdorff y localmente compacto.*

2. *Si (X,τ) es un espacio Hausdorff y localmente compacto, dos compactificaciones Hausdorff por un punto son topológicamente equivalentes y por tanto equivalentes a la compactificación de Alexandroff.*

Demostración. 1. Consideramos $((X',\tau'),f)$ una compactificación por un punto y Hausdorff del espacio (X,τ) y sea $\omega = X' \setminus f(X)$. El espacio (X,τ) es Hausdorff pues es homeomorfo al conjunto $(f(X),\tau'_{|f(X)})$ que es Hausdorff. Ya que $\{\omega\}$ es un conjunto cerrado, el conjunto $f(X)$ es un subconjunto abierto en (X',τ'). Debido a que éste es Hausdorff y localmente compacto, $f(X)$ es localmente compacto por el corolario 8.4.9. Por último, y ya que X es homeomorfo a $f(X)$, (X,τ) es localmente compacto.

2. Sea $((X',\tau'),f)$ una compactificación Hausdorff por un punto de X con $X' = f(X)\cup\{\omega\}$. Se define

$$h : X' \to X^*, \quad h(x') = \begin{cases} \infty & x' = \omega \\ x & x' = f(x). \end{cases}$$

Entonces h es una aplicación biyectiva y $h\circ f = i$. Probamos que h es una aplicación abierta. Sea $O' \in \tau'$. Si $O' \subset f(X)$, entonces $O' \in \tau'_{|f(X)} = f(\tau)$, luego existe $O \in \tau$ tal que $f(O) = O'$. Por tanto $h(O') = O \in \tau^*$. Si $\omega \in O'$, el conjunto $X' \setminus O'$ es cerrado en X', luego es compacto. Como $X' \setminus O' \subset f(X)$, existe un subconjunto $K \subset X$ que es cerrado y compacto y tal que $f(K) = X' \setminus O'$. Entonces $h(O') = X^* \setminus K \in \tau^*$.

Ya que el espacio X' es compacto y X^* es Hausdorff, la aplicación h es un homeomorfismo por el teorema 8.1.15.

□

Corolario 8.5.9. *La única compactificación Hausdorff por un punto de un espacio no compacto Hausdorff y localmente compacto es la compactificación de Alexandroff.*

De este corolario y del ejemplo 8.5.1, se obtiene:

Corolario 8.5.10. *La esfera $\mathbb{S}^n$ es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$.*

Corolario 8.5.11. *La compactificación de Alexandroff de $\mathbb{N}$ es $\{0\}\cup\{1/n : n\in\mathbb{N}\}$.*

Demostración. Sea $X = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y $f : \mathbb{N} \to X$, $f(x) = 1/x$. Por el corolario 8.5.9, y ya que $\mathbb{N}$ no es compacto, es Hausdorff y es localmente compacto, es suficiente con probar que $((X, \tau_u), f)$ es una compactificación de $\mathbb{N}$.

1. El espacio X es compacto por ser una sucesión convergente junto con su límite (ejemplo 8.1.3).
2. La inyectividad de f es evidente. Por otra parte, la aplicación $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ es un homeomorfismo, ya que ambos espacios $\mathbb{N}$ y $f(\mathbb{N})$ tienen la topología discreta.
3. El punto 0 es adherente a $f(\mathbb{N})$ al ser el límite de la sucesión. Esto prueba que $f(\mathbb{N})$ es denso en X.

$\square$

Corolario 8.5.12. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $p \in A$. Entonces A es la compactificación de Alexandroff de $A \setminus \{p\}$.*

Demostración. Observemos que $A \setminus \{p\}$ es un conjunto abierto de A pues $\{p\}$ es un cerrado. Como A es Hausdorff y localmente compacto por ser compacto, el teorema 8.4.8 asegura que $A \setminus \{p\}$ es localmente compacto en A. Si consideramos la inclusión $i : A \setminus \{p\} \hookrightarrow A$, entonces (A, i) es una compactificación Hausdorff por un punto y el teorema 8.5.8 establece que es la de Alexandroff. $\square$

Corolario 8.5.13. *La compactificación de Alexandroff de $[0, 1)$ es $[0, 1]$.*

Del corolario 8.5.12 se deduce que la compactificación de Alexandroff de $[0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ también es el intervalo $[0, 1]$. De esta forma, $[0, 1]$ es la compactificación de Alexandroff para dos espacios topológicos que no son homeomorfos entre sí.

En la compactificación de Alexandroff, el espacio (X, τ) es un subconjunto abierto en (X^*, τ^*). Esto se generaliza en el siguiente corolario.

Corolario 8.5.14. *Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Si $((X', \tau'), f)$ es una compactificación Hausdorff de X, entonces $f(X) \in \tau'$.*

Demostración. Se ha probado en el teorema 8.4.8 que un subconjunto A localmente compacto en un espacio Hausdorff y localmente compacto (X', τ')

satisface $A \in \tau'_A$. En nuestro caso, tomamos $A = f(X)$. Entonces existe $O \in \tau'$ tal que $f(X) = O \cap \overline{f(X)}$. Ya que $f(X)$ es denso, $\overline{f(X)} = X'$ probando que $f(X) \in \tau'$. $\square$

Para finalizar esta sección, mostramos una *compactificación por dos puntos* de la recta euclídea $\mathbb{R}$, el cual está motivado por el ejemplo 8.5.6 .

EJEMPLO 8.5.15. Sean $p, q \notin \mathbb{R}$. En $X = \mathbb{R} \cup \{p, q\}$ se define la topología τ generada por la base

$$\beta = \{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\{p\} \cup (-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \cup \{q\} : a \in \mathbb{R}\}.$$

En particular, la topología usual τ_u de $\mathbb{R}$ está incluida en τ. Consideramos la aplicación inclusión $i : \mathbb{R} \hookrightarrow X$. Entonces $((X, \tau), i)$ es una compactificación Hausdorff por dos puntos de $\mathbb{R}$.

1. La inclusión es un embebimiento. Basta con probar que $\tau_u = \tau_{|\mathbb{R}}$. La inclusión $\tau_u \subset \tau_{|\mathbb{R}}$ es evidente pues la base de intervalos abiertos que genera τ_u está incluida en β. Sea ahora un intervalo de la base β y lo intersecamos con $\mathbb{R}$. Entonces las posibilidades de la intersección según la definición de β son (a,b), $(-\infty, a)$ y (a, ∞), con $a, b \in \mathbb{R}$. En cualquier caso, son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Por tanto $\{B \cap \mathbb{R} : B \in \beta\} \subset \tau_u$, luego $\tau_{|\mathbb{R}} \subset \tau_u$.
2. El espacio (X, τ) es compacto. Para ello sea $\{O_i : i \in I\}$ un recubrimiento por abiertos de β. Sean $\{p\} \cup (-\infty, a)$, $(b, \infty) \cup \{q\}$ abiertos del recubrimiento que contengan a p y q respectivamente. Podemos suponer que $a \leq b$, pues en caso contrario, dichos abiertos ya formarían un subrecubrimiento finito de X. Entonces $[a, b] \subset \cup_{i \in I} O_i$. Ya que el intervalo $[a, b]$ es compacto en X pues $\tau_{|\mathbb{R}} = \tau_u$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

   $$[a, b] \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}.$$

   Entonces

   $$X = (\{p\} \cup (-\infty, a)) \cup ((b, \infty) \cup \{q\}) \cup O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n},$$

   obteniendo un subrecubrimiento finito.
3. El conjunto $i(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ es denso en (X, τ). Usando el ejemplo 1.4.8, una base de entornos de p es

   $$\beta_p = \{B \in \beta : p \in B\} = \{\{p\} \cup (-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

   Por tanto p es adherente a $\mathbb{R}$ y del mismo modo, q también es adherente a $\mathbb{R}$.

Finalmente probamos que el espacio (X, τ) es Hausdorff. Sean $x, y \in X$.

1. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces se pueden separar por abiertos de τ_u pues τ_u es una topología Hausdorff. Pero estos abiertos son abiertos de (X, τ), pues $\tau_u \subset \tau$
2. Si $x \in \mathbb{R}$ e $y = p$, basta tomar $U_x = (x-1, x+1)$ y $V_p = \{p\} \cup (-\infty, x-1)$. De la misma forma se separa q de un elemento de $\mathbb{R}$.
3. Si $x = p$ e $y = q$, tomamos $U_p = \{p\} \cup (-\infty, 0)$ y $V_q = (0, \infty) \cup \{q\}$ sendos entornos de p y q y también son disjuntos.

Una vez desarrollado este ejemplo, hay que indicar que este espacio $(\mathbb{R}^*, \tau)$ ya apareció en el ejemplo 4.2.7, donde se probaba que era homeomorfo a $[-1, 1]$, y por tanto, estamos diciendo que $[-1, 1]$ es una compactificación por dos puntos de la recta euclídea. Siguiendo la notación seguida allí, esto es consecuencia de que $\mathbb{R} \cong h(\mathbb{R}) = (-1, 1) \hookrightarrow [-1, 1]$.

8.6. Ejercicios

1. Dado un espacio topológico (X, τ) y dos subconjuntos compactos $A, B \subset X$, estudiar si $A \cup B$ y $A \cap B$ son compactos. Dar un ejemplo de dos subconjuntos no compactos de $\mathbb{R}$ cuya unión sea compacta.
2. Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre dos espacios compactos y Hausdorff. Probar que f es continua si y sólo si el grafo de f es un conjunto cerrado en $X \times Y$.
3. Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ un subconjunto compacto y $B \subset X$. Probar que existe $a \in A$ tal que $d(a, B) = d(A, B)$. Como consecuencia, si B es cerrado y $A \cap B = \emptyset$, deducir que $d(A, B) > 0$.
4. Consideramos la recta real $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos numerables τ_{CN}. Se considera el espacio $(\mathbb{R} \times \{0, 1\}, \tau_{CN} \times \tau_T)$, donde τ_T es la topología trivial. Probar que todo subconjunto infinito posee puntos de acumulación, pero el espacio no es compacto.
5. Estudiar la compacidad y la compacidad local de $((0, 1), \tau)$, donde $\tau = \{(0, 1 - 1/n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, (0, 1)\}$. Caracterizar los subconjuntos compactos.
6. En $\mathbb{R}$ probar que
$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[0, a) : a \geq 0\}$$
es una topología. Estudiar la compacidad y la compacidad local.
7. Caracterizar los subconjuntos compactos del espacio topológico (X, τ), donde $X = [-1, 1]$ y $\tau = \{O \subset X : 0 \notin O\} \cup \{O \subset X : (-1, 1) \subset O\}$.

8. Si A es un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff, probar que el conjunto de puntos de acumulación de A también es compacto.

9. Probar que $H_+^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z \geq 0\}$ es compacto y localmente compacto. Demostrar que la proyección $p : H_+^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $p(x,y,z) = (x,y)$ es un embebimiento.

10. Estudiar la compacidad y la compacidad local de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

    a) $A = \{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

    b) $B = \mathbb{N}$.

    c) $C = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

    d) $D = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$.

11. En cada uno de los siguientes casos, dar un ejemplo de un espacio topológico y de un subconjunto suyo A satisfaciendo:

    a) A no es compacto y $\overline{A}$ sí lo es.

    b) A es compacto y $\overline{A}$ no lo es.

    c) A es compacto y $\mathring{A}$ no lo es.

    d) A no es compacto y $\mathring{A}$ sí lo es.

12. Demostrar que no existe ninguna función continua $f : [0,1] \to \mathbb{Q}$ que satisface $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) \in \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

13. Sea $X = [0,1] \cup \{2\}$. Se define en X una topología τ mediante base de entornos. Para los puntos de $[0,1]$, la base de entornos es la usual de la recta euclídea. Para $x = 2$, $\beta_2 = \{(a,1) \cup \{2\} : a \in [0,1)\}$. Probar que, efectivamente, se define una topología. Probar que $\tau_{|[0,1]}$ es la topología usual de $[0,1]$. Estudiar la compacidad y la compacidad local de (X,τ).

14. Sea $f : (X,d) \to (Y,d')$ una aplicación continua entre dos espacios métricos donde X es compacto. Probar que la aplicación es uniformemente continua, es decir, $\forall\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x_1,x_2) < \delta$, entonces $d'(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

15. Sea (X,τ) un espacio topológico tal que para todo punto existe una base de entornos cerrados y ninguno de ellos es compacto. Probar que (X,τ) no es localmente compacto. Usar este resultado para probar que la recta de Sorgenfrey no es localmente compacta.

16. Probar que $(\mathbb{R}, \tau_{CF})$ es una compactificación de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \tau_{CF})$ con la aplicación inclusión. Estudiar si también lo es de $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \tau_{CF})$.

17. Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto y no compacto. Sea $((X', \tau'), f)$ una compactificación Hausdorff de (X, τ). Probar que existe una aplicación continua y sobreyectiva $g : X' \to X^*$ tal que $g \circ f = i$.

18. Probar que la compactificación de $\mathbb{R}$ por dos puntos del apartado 4 del ejemplo 8.5.15 es equivalente a la dada por $[0, 1]$ en el ejemplo 8.5.1.

19. Sean (X, τ) e (Y, τ') dos espacios topológicos. Se considera $((X_1, \tau_1), f)$ e $((Y_1, {\tau'}_1), g)$ dos compactificaciones de X e Y respectivamente. Probar que $((X_1 \times Y_1, \tau_1 \times {\tau'}_1), f \times g)$ es una compactificación de $X \times Y$. Si ambas son las compactificaciones de Alexandroff por un punto, ¿es $X_1 \times Y_1$ la compactificación de Alexandroff por un punto de $X \times Y$?

20. Sea $X = [0, 1) \cup [2, 3) \cup [4, 5)$ Probar que la compactificación de Alexandroff por un punto de X es el subconjunto $([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ de $\mathbb{R}^2$.

Capítulo 9

Topología cociente

Sea (X, τ) un espacio topológico y supongamos que en el conjunto X hay establecida una relación de equivalencia R. Queremos definir una topología en el conjunto cociente X/R, y que llamaremos topología cociente, que esté relacionada con la topología τ que ya existe en X. Este tipo de construcción de nuevos espacios topológicos a partir de otros ya dados hay que enlazarlo con los que han aparecido a lo largo de este libro, donde a partir de un espacio topológico y conceptos de la teoría de conjuntos, hemos definido otros espacios topológicos. Recordamos los que hemos definido hasta ahora:

1. Topología a partir de una aplicación biyectiva. En el teorema 1.1.3 de capítulo 1 se consideraba un espacio topológico (X, τ) y un conjunto Y tal que existía una aplicación biyectiva $f : X \to Y$. Entonces se dotaba a Y de una topología $\tau(f)$ que hacía que $f : (X, \tau) \to (Y, \tau(f))$ fuera un homeomorfismo.

2. Subespacio topológico. Dado un espacio topológico (X, τ), en la definición 1.5.1 se estableció una estructura topológica en un subconjunto $A \subset X$ y que llamábamos topología relativa.

3. Topología producto. En el capítulo 5 se definió una estructura topológica en el producto cartesiano $X_1 \times X_2$ de dos conjuntos X_1 y X_2 y donde (X_i, τ_i) eran dos espacios topológicos, $i = 1, 2$.

La topología cociente aparece habitualmente en procesos de 'pegado' o de 'identificación'. Podemos ilustrarlo con el siguiente ejemplo. Sea A un subconjunto de X y definimos en X la relación de equivalencia

$$xRy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, & \text{ó} \\ x, y \in A. \end{cases}$$

Esta relación nos hace identificar en el conjunto cociente, como un único punto, todo el subconjunto A de X. Las clases de equivalencia son

$$[x] = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \notin A \\ A & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Así, sea el disco $\mathbb{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y tomamos $A = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}^2$. Con la relación de equivalencia anterior, se identifica toda la circunferencia $\mathbb{S}^1$ como un único punto. Entonces es fácil imaginarse que el conjunto cociente $\mathbb{D}^2/R$ consiste en coger el disco y pegar todo su borde como si fuera un único punto. Intuitivamente, el conjunto cociente, después de una apropiada deformación, es la esfera $\mathbb{S}^2$.

Un segundo ejemplo que mostramos consiste en tomar el cuadrado $Q = [0,1]\times[0,1]$ del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ y donde definimos la relación de equivalencia que identifica cada punto del borde $\{0\} \times [0,1]$ con el correspondiente del borde $\{1\} \times [0,1]$ que se encuentra a la misma altura. El resto de los puntos de Q sólo están relacionados con ellos mismos.

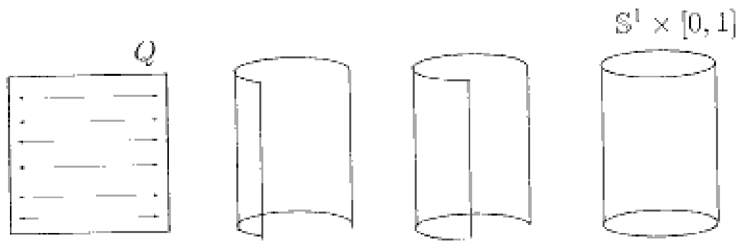


Figura 9.1: El cilindro como espacio cociente de un cuadrado de $\mathbb{R}^2$

Si imaginamos que Q es parte de una hoja de papel, el conjunto cociente aparece cuando doblamos el cuadrado Q de forma que pegamos cada punto $(0,s)$ con el punto $(1,s)$ (figura 9.1). La figura que obtenemos es un cilindro de altura acotada. La topología cociente que se va a definir en el conjunto cociente Q/R, donde en Q tenemos la topología euclídea, permitirá probar que, efectivamente, el espacio cociente es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

Cabe esperar que la topología cociente que se defina en el conjunto cociente X/R, llamémosla τ/R, sea buena en los dos siguientes sentidos. Primero, que la aplicación proyección $p : (X,\tau) \to (X/R, \tau/R)$ que lleva todo elemento en su clase de equivalencia sea continua. Por otro, que para estudiar la continuidad de una aplicación f que tenga por dominio $(X/R, \tau/R)$, sea suficiente con estudiar la continuidad de la aplicación $f \circ p$. Recordemos que algo similar se planteaba al definir la topología producto en el producto cartesiano de dos espacios topológicos.

9.1. Espacio cociente

Vamos a motivar la definición de la topología cociente con el ejemplo de la figura 9.1. Denotamos $K = \{0,1\} \times [0,1]$ los dos bordes verticales de Q. En el cuadrado Q, las clases de equivalencia son

$$[(t,s)] = \begin{cases} \{(t,s)\} & \text{si } t \notin \{0,1\} \\ \{(1,s),(0,s)\} & \text{si } t = 0 \text{ o } t = 1. \end{cases}$$

Podemos imaginar que hay dos tipos de abiertos en Q. Por un lado, si $A \subset Q$ es un abierto y $A \cap K = \emptyset$, entonces las clases de equivalencia de A coincide con el propio conjunto A y por tanto podemos decir que A va a ser un abierto en la topología cociente. Así, al doblar Q para convertirlo en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$, A es efectivamente un abierto del mismo. Ver figura 9.2.

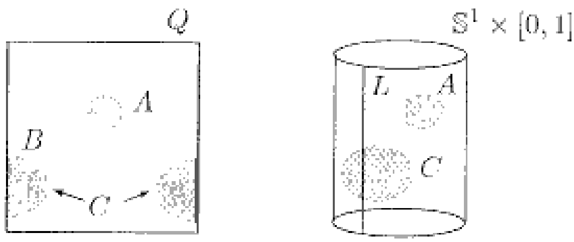


Figura 9.2: Topología cociente en el cuadrado Q

Sea ahora un abierto $B \subset Q$ que interseque a K, tal como aparece en la figura 9.2. En tal caso, dicho conjunto no puede ser un abierto en la topología cociente pues cuando doblamos Q, el conjunto resultante en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ no es abierto. Además, al conjunto B, visto en el cociente, le falta los puntos correspondientes del borde de la derecha. Por tanto tenemos que añadir puntos de Q, concretamente, el conjunto $\{(1,s) : (0,s) \in B\}$. Ahora sin embargo, el conjunto $B \cup \{(1,s) : (0,s) \in B\}$ no es abierto en Q. Para que finalmente el conjunto en Q sea un abierto en el cilindro, después de doblar Q, habría que añadir puntos de Q cercanos a $\{(1,s) : (0,s) \in B\}$ para obtener un conjunto abierto en Q, tal como es el conjunto C de la figura 9.2.

Podemos hacer un proceso inverso del cilindro y desdoblarlo para descubrir cuáles son los abiertos de la topología cociente. En la figura 9.2 hemos marcado con una línea L los dos bordes K pegados de Q vistos en el cilindro. Así, el conjunto C es un abierto del cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ y aparece como dos subconjuntos disjuntos en Q después de desdoblar.

Estamos ahora en condiciones de definir y comprender mejor la definición de la topología cociente que viene a continuación. Consideramos una relación de equivalencia R en un conjunto X. Denotamos por X/R el conjunto cociente y a la clase de equivalencia de $x \in X$ la representamos por $[x]$, es decir, $[x] = \{y \in X : xRy\}$. Sea

$$p : X \to X/R, \quad p(x) = [x]$$

la aplicación proyección en el cociente. Si $A \subset X$, se llama la *R-saturación de A* al conjunto definido por $R[A] = p^{-1}(p(A))$, es decir,

$$R[A] = \{x \in X : \exists y \in A,\ xRy\}.$$

La saturación de A no es más que todos los puntos de X relacionados con algún punto de A. El conjunto A se llama *R-saturado* si $A = R[A]$. Son evidentes las siguientes propiedades:

1. Si $x \in X$, entonces $R[\{x\}] = [x]$.
2. Si $A \subset X$, entonces $A \subset R[A]$.
3. El conjunto $R[A]$ es saturado, es decir, $R[R[A]] = R[A]$.
4. Si $A \subset B$, entonces $R[A] \subset R[B]$.

Sea ahora un espacio topológico (X, τ) y R una relación de equivalencia en X. Consideramos la familia de subconjuntos de X/R dada por

$$\frac{\tau}{R} = \{p(O) : O \in \tau,\ R[O] = O\}. \tag{9.1}$$

Probamos que τ/R define una topología en X/R y por tanto,

> *Los conjuntos abiertos en la topología cociente son los que se obtienen al proyectar sobre X/R los abiertos saturados de X.*

En un paso previo, demostramos la igualdad

$$\frac{\tau}{R} = \{\tilde{O} \subset X/R : p^{-1}(\tilde{O}) \in \tau\}. \tag{9.}$$

1. Sea $O \in \tau$ un conjunto abierto R-saturado. Llamamos $\tilde{O} = p(O)$. Entonces $p^{-1}(\tilde{O}) = R[O] = O \in \tau$.
2. Sea $\tilde{O} \subset X/R$ tal que $p^{-1}(\tilde{O}) \subset \tau$. Llamamos $O = p^{-1}(\tilde{O})$. Entonces O es R-saturado pues
$$R[O] = p^{-1}(p(O)) = p^{-1}(p(p^{-1}(\tilde{O}))) = p^{-1}(\tilde{O}) = O,$$
donde en la penúltima igualdad hemos utilizado que p es sobreyectiva.

Una vez probada la igualdad (9.2), pasamos a demostrar que τ/R es una topología en X/R.

Demostración.

1. El conjunto vacío pertenece a τ/R pues $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Por otra parte, y ya que p es una aplicación sobreyectiva, $X/R \in \tau/R$ pues $p^{-1}(X/R) = X \in \tau$.
2. Sea ahora $\{\tilde{O}_i\}_{i\in I} \subset \tau/R$. Entonces
$$p^{-1}(\bigcup_{i\in I}\tilde{O}_i) = \bigcup\nolimits_{i\in I} p^{-1}(\tilde{O}_i) \in \tau,$$
ya que $p^{-1}(\tilde{O}_i) \in \tau$.
3. Sean $\tilde{O}_1$ y $\tilde{O}_2$ dos conjuntos de τ/R. Entonces
$$p^{-1}(\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2) = p^{-1}(\tilde{O}_1) \cap p^{-1}(\tilde{O}_2) \in \tau,$$
pues $p^{-1}(\tilde{O}_1), p^{-1}(\tilde{O}_2) \in \tau$.

$\square$

Observemos que la demostración se ha llevado a cabo sin haber hecho uso de la relación de equivalencia R sino sólo de las propiedades de la imagen recíproca de una aplicación, en este caso, de p.

Definición 9.1.1. Se considera un espacio topológico (X, τ) con una relación de equivalencia R. Se define el espacio topológico cociente por la relación R al espacio topológico $(X/R, \tau/R)$. La topología τ/R se llama topología cociente.

En los dos siguientes resultados, describimos la familia de cerrados y del sistema de entornos en la topología cociente.

Proposición 9.1.2. *La familia de cerrados $\mathcal{F}/R$ en la topología cociente es*
$$\frac{\mathcal{F}}{R} = \{\tilde{F} \subset X/R : p^{-1}(\tilde{F}) \in \mathcal{F}\} = \{p(F) : F \in \mathcal{F}, R[F] = F\}. \qquad (9.3)$$

Demostración. La igualdad se hace por doble inclusión. La segunda iguald sigue los mismos pasos que en (9.2) y la omitimos. Para la primera tenem

1. Sea $\tilde{F} \in \mathcal{F}/R$. Entonces $X/R\setminus\tilde{F} \in \tau/R$, es decir, $p^{-1}(X/R\setminus\tilde{F}) \in \tau/$
   Por las propiedades de la imagen recíproca, tenemos
   $$p^{-1}(X/R \setminus \tilde{F}) = p^{-1}(X/R) \setminus p^{-1}(\tilde{F}) = X \setminus p^{-1}(\tilde{F}),$$
   lo que prueba que $p^{-1}(\tilde{F}) \in \mathcal{F}$.
2. Sea ahora $\tilde{F} \subset X/R$ tal que $p^{-1}(\tilde{F}) \in \mathcal{F}$. Entonces $X \setminus p^{-1}(\tilde{F}) \in$
   Como la aplicación p es sobreyectiva,
   $$X/R \setminus \tilde{F} = p(p^{-1}(X/R \setminus \tilde{F})) = p(X/p^{-1}(\tilde{F})).$$
   Observemos que $X \setminus p^{-1}(\tilde{F})$ es R-saturado pues, como p es sobreyec
   $$\begin{aligned} p^{-1}(p(X \setminus p^{-1}(\tilde{F}))) &= p^{-1}(p(p^{-1}(X/R \setminus \tilde{F}))) = p^{-1}(X/R \setminus \tilde{F} \\ &= X \setminus p^{-1}(\tilde{F}) \end{aligned}$$
   y ya que $X \setminus p^{-1}(\tilde{F}) \in \tau$, entonces $\tilde{F} \in \mathcal{F}/R$.

Proposición 9.1.3. *Para todo $[x] \in X/R$, el sistema de entornos de [*

$$\mathcal{U}_{[x]} = \{\tilde{U} \subset X/R : p^{-1}(\tilde{U}) \in \mathcal{U}_x\} = \{p(U) : U \in \mathcal{U}_x, R[U] = U\}.$$

Si volvemos ahora al ejemplo del cuadrado y del cilindro que mot definición de la topología cociente, el abierto A en la figura 9.2 es satu y por tanto, en el cociente, es decir, en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$, también abierto. Por otro lado, el abierto B no es saturado, ya que no conti conjunto $\{(1,s) : (0,s) \in B\}$. Al abierto B le podemos añadir los pondientes puntos del borde vertical de la derecha para que sea satura decir, considerar el conjunto $B \cup \{(1,s) : (0,s) \in B\}$, pero ahora este c to no es un abierto de Q. Por eso tenemos que añadir más puntos pa sea abierto, sin dejar de estar saturado, tal como sucede con el conju

Probamos a continuación el resultado que ya se comentó, en part introducción de este capítulo.

Proposición 9.1.4. *Sea $(X/R, \tau/R)$ un espacio topológico cociente.*

1. *La aplicación proyección $p : (X,\tau) \to (X/R, \tau/R)$ es continua.*

2. *La topología τ/R es la topología más fina que existe en X/R que hace que la aplicación p sea continua.*

3. *Si $f : (X/R, \tau/R) \to (Y, \tau')$ es una aplicación, entonces f es continua si y sólamente si la aplicación $f \circ p$ es continua.*

Demostración. 1. La continuidad de p es evidente a partir de la definición de la topología τ/R dada en (9.2).

2. Sea una topología τ'' en X/R tal que la aplicación $p : (X, \tau) \to (X/R, \tau'')$ es continua. Por la continuidad de p, para todo $O \in \tau''$, $p^{-1}(O) \in \tau$. Pero por (9.2), $O \in \tau/R$. Esto prueba que $\tau'' \subset \tau/R$.

3. Supongamos que $f \circ p$ es continua y probamos que f es continua. Sea $O' \in \tau'$. Utilizando 9.2, $f^{-1}(O') \in \tau/R$ si $p^{-1}(f^{-1}(O')) \in \tau'$. Pero $p^{-1}(f^{-1}(O')) = (f \circ p)^{-1}(O')$ es un conjunto abierto en (X, τ) pues $f \circ p$ es continua.

□

La topología cociente X/R tal como aparece en (9.1) se ha construido a partir de la aplicación proyección $p : X \to X/R$ y de la topología τ existente en X. En este sentido, podemos decir que dicha construcción es dual a la que se hizo para la topología producto, pues en ésta había que definir la topología en el dominio de las aplicaciones $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$, a partir de las topologías existentes en X_1 y X_2.

Una consecuencia de la continuidad de la aplicación proyección, del corolario 6.1.9 y la proposición 8.1.7 es el siguiente resultado.

Corolario 9.1.5. *Si un espacio topológico es conexo (resp. compacto), cualquier cociente suyo también es conexo (resp. compacto).*

Estudiamos ahora cómo se comporta los axiomas de separación con la topología cociente.

Proposición 9.1.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico con una relación de equivalencia R. Entonces X/R es T_1 si y sólo si $[x] \in \mathcal{F}$ para todo $x \in X$, donde la clase de equivalencia $[x]$ se considera como subconjunto de X.*

Demostración. El resultado es evidente usando la proposición 7.1.3, (9.3) y porque el subconjunto $[x]$ es R-saturado. □

Estudiamos ahora el axioma de separación Hausdorff en $(X/R, \tau/R)$. Por la definición de la propiedad Hausdorff y por la forma del sistema de entornos en X/R, el espacio cociente $(X/R, \tau/R)$ es Hausdorff si para cualesquiera $x, y \in X$ que no estén relacionados, existen sendos entornos R-saturados $U \in \mathcal{U}_x$ y $V \in \mathcal{U}_y$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Enunciamos una condición suficiente para que un espacio cociente sea Hausdorff.

Proposición 9.1.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico con una relación de equivalencia R. Si la aplicación proyección p es abierta y el conjunto*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : xRy\}$$

es cerrado en $(X \times X, \tau \times \tau)$, entonces $(X/R, \tau/R)$ es Hausdorff.

Demostración. Sean $[x] \neq [y]$. Entonces $(x, y) \notin \mathcal{R}$. Como $(X \times X) \setminus \mathcal{R}$ es un conjunto abierto, existen $O_x, O_y \in \tau$ tal que

$$(x, y) \in O_x \times O_y \subset X \times X \setminus \mathcal{R}.$$

En particular, $(O_x \times O_y) \cap \mathcal{R} = \emptyset$. Como p es abierta, $p(O_x), p(O_y) \in \tau/R$ así $p(O_x) \in \mathcal{U}_{[x]}$ y $p(O_y) \in \mathcal{U}_{[y]}$. Finalmente es evidente que $p(O_x) \cap p(O_y) =$ $\emptyset$.

Volvamos a la demostración que se ha realizado al probar que la familia $\tau/$ es una topología. Como ya hemos comentado, sólamente se hace uso de l propiedades que posee la imagen inversa de un conjunto por una aplicació lo cual permite generalizar el concepto de topología cociente del siguien modo.

Definición 9.1.8. Sea una aplicación sobreyectiva $f : (X, \tau) \to Y$. Se llar topología final en Y determinada por f a

$$\tau(f) = \{O' \subset Y : f^{-1}(O') \in \tau\}.$$

La demostración de que $\tau(f)$ es una topología es análoga a la que se realizado en la topología cociente (también apareció en el ejercicio 28 capítulo 1) y no hace uso de que la aplicación f sea sobreyectiva. Sin embar y ahora bajo la hipótesis de la sobreyectividad de f, evitamos que cualq subconjunto que no interseque a la imagen de f tenga la topología discr Observemos también que si f es biyectiva, $\tau(f)$ coincide con la topolo definida en el teorema 1.1.3 y que denotábamos de la misma manera.

Proposición 9.1.9. *Para una topología final $\tau(f)$, se tiene*

$$\mathcal{F}(f) = \{F' \subset Y : f^{-1}(F') \subset \mathcal{F}\}.$$

Si $y \in Y$ con $f(x) = y$, entonces

$$\mathcal{U}'_y = \{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in \mathcal{U}_x\}.$$

Un caso particular de topología final es la topología cociente y lo destacamos del siguiente modo:

> *La topología cociente es la topología final determinada por la aplicación proyección sobre el conjunto cociente definido por una relación de equivalencia en un espacio topológico.*

Definición 9.1.10. Una identificación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es una aplicación sobreyectiva tal que $\tau' = \tau(f)$.

Estudiamos algunas propiedades de las identificaciones.

Proposición 9.1.11.

1. *Sea una identificación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau(f))$. Entonces $\tau(f)$ es la topología más fina en Y que hace continua a la aplicación f.*
2. *Sea una identificación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau(f))$ y $g : (Y, \tau(f)) \to (Z, \tau')$ una aplicación. Entonces g es continua si y sólamente si $g \circ f$ es continua.*
3. *La composición de dos identificaciones es una identificación.*
4. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau(f))$ una identificación y $g : (Y, \tau(f)) \to (Z, \tau'')$ una aplicación tal que $g \circ f$ es una identificación. Entonces g es una identificación.*
5. *Si $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es inyectiva, entonces f es una identificación si y sólamente si f es un homeomorfismo.*

Demostración.

1\. y 2. La demostración de estos apartados es análoga a la que se hizo en la proposición 9.1.4.

3\. Por una parte, $g \circ f$ es sobreyectiva y es continua y por tanto $\tau'' \subset \tau(g \circ f)$. Sea ahora $O'' \in \tau(g \circ f)$. Entonces $(g \circ f)^{-1}(O'')$ es un conjunto abierto de X, luego $g^{-1}(O'') \in \tau(f) = \tau'$. Esto quiere decir que $O'' \in \tau'(g) = \tau''$.

4. Ya que $g \circ f$ es sobreyectiva, g también lo es. Debido a que $g \circ f$ e continua y f es identificación, la aplicación g es continua y por tant $\tau'' \subset \tau(f)(g)$. Sea ahora $O'' \in \tau(f)(g)$. Entonces $g^{-1}(O'') \in \tau(f)$. D nuevo $f^{-1}(g^{-1}(O'')) \in \tau$, luego $O'' \in \tau(g \circ f) = \tau''$.

5. Supongamos que f es una identificación. Para probar que f es un h meomorfismo basta con probar que f es abierta. Sea pues $O \in \tau$. Con la aplicación es biyectiva, $O = f^{-1}(f(O)) \in \tau$, luego $f(O) \in \tau(f) =$ Por otra parte, si f es un homeomorfismo, ya se probó en el corola 4.1.6 que $\tau(f) = \tau'$.

Presentamos varias condiciones suficientes para que una aplicación sea u identificación y que serán de gran utilidad para los casos que aparecerán a largo de éste y del próximo capítulo.

Proposición 9.1.12. *Sea una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ entre espacios topológicos. En cualquiera de los siguientes casos, f es una iden cación:*

1. *La aplicación f es sobreyectiva, continua y abierta.*
2. *La aplicación f es sobreyectiva, continua y cerrada.*
3. *Existe una aplicación $s : Y \to X$ tal que $f \circ s = 1_Y$ y f y s continuas.*

Demostración. En los tres casos, la proposición 9.1.11 y la continuida la aplicación f asegura la inclusión $\tau' \subset \tau(f)$. Probamos ahora la inclu $\tau(f) \subset \tau'$.

1. Si $O' \in \tau(f)$, entonces $f^{-1}(O') \in \tau$. Ya que f es abierta y sobreyec $O' = f(f^{-1}(O')) \in \tau'$. Por tanto, $\tau(f) \subset \tau'$.
2. El razonamiento es análogo al apartado anterior usando la propos 9.1.9.
3. Si $O' \in \tau(f)$, entonces $f^{-1}(O') \in \tau$. De la igualdad $f \circ s = 1_Y$, se c que $O' = s^{-1}(f^{-1}(O')) \in \tau'$, pues s es continua.

Una consecuencia del teorema 8.1.15 es el siguiente resultado.

Corolario 9.1.13. *Una aplicación continua y sobreyectiva de un espacio compacto en un espacio Hausdorff es una identificación.*

Estudiamos ahora cómo se comporta una topología final respecto de la topología relativa planteando el siguiente problema. Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\tau(f))$ una identificación y $B\subset Y$. En B existen dos topologías:

1. La topología inducida de Y, es decir, $\tau(f)_{|B}$.
2. La topología final determinada por la aplicación
$$f:(f^{-1}(B),\tau_{|f^{-1}(B)})\to B$$
es decir, con la notación usada, $\tau_{|f^{-1}(B)}(f)$.

Ya que $f:(X,\tau)\to(Y,\tau(f))$ es una aplicación continua, el teorema 3.1.13 asegura que
$$f:(f^{-1}(B),\tau_{|f^{-1}(B)})\to(B,\tau(f)_{|B})$$
es continua, y por tanto, $\tau(f)_{|B}\subset\tau_{|f^{-1}(B)}(f)$. Sin embargo la otra inclusión no tiene porqué ser cierta, y lo vemos en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 9.1.14. Se considera $B=[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ e $Y=B\cup\{1\}$. Se define
$$f:[0,1]\to Y,\quad f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in B\\ 1 & \text{si } x\notin B.\end{cases}$$
Observemos que $f^{-1}(B)=B$. Sea τ la topología usual de $[0,1]$.

1. El conjunto $(0,1/2)\cap B$ es un elemento de $\tau_{|f^{-1}(B)}(f)$, pues
$$f^{-1}\left((0,\frac{1}{2})\cap B\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap B\in\tau_{|B}=\tau_{|f^{-1}(B)}.$$
2. Sin embargo $(0,1/2)\cap B\notin\tau(f)_{|B}$. Si fuera así, existiría $O\in\tau(f)$ tal que $(0,1/2)\cap B=O\cap B$.
   a) Si $1\notin O$, entonces $f^{-1}(O)=O\notin\tau$, que no es abierto en $[0,1]$ ya que todo abierto interseca a $\mathbb{Q}$: contradicción.
   b) Si $1\in O$, entonces $O=\{1\}\cup((0,1/2)\cap B)$. Pero
   $$f^{-1}(O)=\left((0,\frac{1}{2})\cap B\right)\cup(\mathbb{Q}\cap[0,1])=[0,\frac{1}{2}]\cup\left((\frac{1}{2},1]\cap\mathbb{Q}\right),$$
   que tampoco es un conjunto abierto en $[0,1]$.

Damos condiciones suficientes para que las dos topologías coincidan.

Proposición 9.1.15. *Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una identificación y* I *Y. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones, entonces* $\tau(f)_{|}$ $\tau_{|f^{-1}(B)}(f)$:

1. *El conjunto B es abierto.*
2. *El conjunto B es cerrado.*
3. *La aplicación f es abierta.*
4. *La aplicación f es cerrada.*

Demostración. Probamos sólamente las propiedades 1 y 3. Recordemos por el razonamiento previo, sólo hay que probar la inclusión $\tau_{|f^{-1}(B)}($ $\tau(f)_{|B}$.

1. Supongamos que $B \in \tau'$. Para cada $O' \in \tau_{|f^{-1}(B)}(f)$, $f^{-1}(O$ $\tau_{|f^{-1}(B)}$, luego $f^{-1}(O') = O \cap f^{-1}(B)$ donde $O \in \tau$. Ya que f es cont y B es abierto, $f^{-1}(B)$ es abierto y por tanto, $f^{-1}(O') \in \tau$. Ent $O' \in \tau(f)$ está incluido en B, es decir, $O' \in \tau(f)_{|B}$.

3. Supongamos que f es abierta. Dado $O' \in \tau_{|f^{-1}(B)}(f)$, $f^{-1}(O') =$ $f^{-1}(B)$ donde $O \in \tau$. Ya que f es una aplicación sobreyectiva

$$O' = f(f^{-1}(O')) = f(O \cap f^{-1}(B)) = f(O) \cap B.$$

Debido a que f es abierta, $f(O) \subset \tau'$ y por tanto, $O' \in \tau'_{|B} = \tau(f$

Particularizamos este resultado al caso de la topología cociente.

Corolario 9.1.16. *Sea (X,τ) un espacio topológico y R una relació equivalencia en X. Sea $B \subset X/R$ y $A = p^{-1}(B)$. Si B es abierto, o cerrado, o p es abierta, o p es cerrada, entonces*

$$\frac{\tau_{|A}}{R} = \left(\frac{\tau}{R}\right)_{|B}.$$

Demostración. Sólo hay que observar que la aplicación proyección se p restringir a A ya que A es R-saturado. Así, tiene sentido tomar como es cociente A/R y considerar $(\tau_{|A})/R$.

9.2. Homeomorfismos en espacios cocientes

En la figura 9.1, el cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ se obtiene como espacio cociente del cuadrado Q mediante un proceso de doblado y pegado. En esta sección queremos precisar este hecho dando resultados que establezcan un homeomorfismo entre un espacio cociente y otro espacio topológico (en nuestro caso, entre Q/R de la figura 9.1 y el cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$). Un primer resultado en esta línea es el teorema de factorización de una aplicación. Este teorema iguala topológicamente un espacio cociente con una topología final.

En primer lugar, recordamos de la teoría de conjuntos el resultado de factorización de una aplicación $f : X \to Y$ entre dos conjuntos (ver el apéndice 9.6). Se define en X la relación de equivalencia R_f dada por

$$x \; R_f \; x' \text{ si } f(x) = f(x').$$

Si X/R_f denota el conjunto cociente, la aplicación

$$\tilde{f} : \frac{X}{R_f} \to Y, \quad \tilde{f}([x]) = f(x)$$

satisface $i \circ \tilde{f} \circ p = f$, donde $\tilde{f}$ es biyectiva e $i : \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow Y$ es la aplicación inclusión.

Teorema 9.2.1. *Sea una aplicación $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$. Entonces*

$$\tilde{f} : \left(\frac{X}{R_f}, \frac{\tau}{R_f}\right) \to (Y,\tau'), \quad \tilde{f}([x]) = f(x)$$

es un homeomorfismo si y sólo si f es una identificación.

Demostración. Ya que $\tilde{f}$ es un homeomorfismo, es una identificación. De la igualdad $\tilde{f} \circ p = f$ y como p es una identificación, se desprende que f es una identificación por la proposición 9.1.11.

Supongamos ahora que f es una identificación. Como $\tilde{f} \circ p$ es una identificación y p también lo es, $\tilde{f}$ es una identificación por la proposición 9.1.11. Al ser inyectiva, de nuevo dicha proposición implica que f es un homeomorfismo. □

Corolario 9.2.2. *Toda topología final es una topología cociente.*

Demostración. Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau(f))$ una identificación y $\tau(f)$ la correspondiente topología final en Y. Entonces f es una identificación y el teorema 9.2.1 implica que $(X/R_f, \tau/R_f)$ es homeomorfo a $(Y,\tau(f))$. □

Este resultado es la contrapartida al que se obtuvo para la topología producto y la topología inicial en el teorema 5.3.12.

Corolario 9.2.3. *Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si (X,τ) es compacto e (Y,τ') es Hausdorff, entonces*

$$\left(\frac{X}{R_f},\frac{\tau}{R_f}\right)\cong(Y,\tau').$$

Demostración. Por el teorema 8.1.15, f es una aplicación cerrada y por la proposición 9.1.12, f es una identificación. Aplicamos ahora el teorema 9.2.1. □

La forma de utilizar el teorema anterior es del siguiente modo. Se tiene un espacio topológico (X,τ) y una relación de equivalencia R en X. Supongamos que uno se imagina el espacio (Y,τ') al cual es homeomorfo el espacio cociente $(X/R,\tau/R)$. Entonces el objetivo es definir una cierta aplicación f entre X e Y de forma que, por una parte, la relación R_f coincida con R y por otra, que dicha aplicación sea una identificación. Para ilustrar esta idea, mostramos cuatro ejemplos.

Ejemplo 9.2.4. En el intervalo cerrado $[0,1]$ se define la relación de equivalencia

$$t\ R\ s\Longleftrightarrow\begin{cases}t=s, & \text{ó}\\ |t-s|=1.\end{cases}$$

Por tanto, todo elemento de $[0,1]$ está relacionado sólo consigo mismo, excepto el 0 y el 1, que están relacionados entre sí. Si nos imaginamos que $[0,1]$ está hecho de plastilina, lo que estamos haciendo es pegar los extremos del intervalo, quedando una circunferencia. Por tanto, vamos a probar que el espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Consideramos la aplicación

$$f:[0,1]\to\mathbb{S}^1,\quad f(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t)).$$

La aplicación f enrolla el intervalo $[0,1]$ en la circunferencia $\mathbb{S}^1$ dando una vuelta a la misma (figura 9.3). Es evidente que f es sobreyectiva y continua. Ya que el intervalo $[0,1]$ es un conjunto compacto y la circunferencia $\mathbb{S}^1$ es un espacio Hausdorff, la aplicación f es cerrada. Por tanto f es una identificación y $\bar{f}$ es un homeomorfismo entre $[0,1]/R_f$ y $\mathbb{S}^1$ (teorema 9.2.1).

Para finalizar, demostramos que $R=R_f$.

1. Sean $t,s\in[0,1]$ tales que $t\ R\ s$. Si son iguales, es evidente que $f(t)=f(s)$, luego tR_fs. Si $|t-s|=1$, entonces $t,s\in\{0,1\}$, luego $2\pi t$ y $2\pi s$ se

diferencia en un múltiplo entero de 2π, y sus senos y cosenos coinciden, es decir, $f(t) = f(s)$.

2. Supongamos que $tR_f s$, es decir, $f(t) = f(s)$. Entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2\pi t - 2\pi s = 2\pi k$. Ya que $t, s \in [0,1]$, el entero k es $0, 1$ o -1. Si $k = 0$, $t = s$. Y si k es 1 o -1, se tiene la igualdad $|t - s| = 1$.

Por tanto $[0,1]/R \cong \mathbb{S}^1$. Con la notación usada al principio del capítulo (ver también el apéndice 9.6), este homeomorfismo se denota por

$$\frac{[0,1]}{\{0,1\}} \cong \mathbb{S}^1.$$

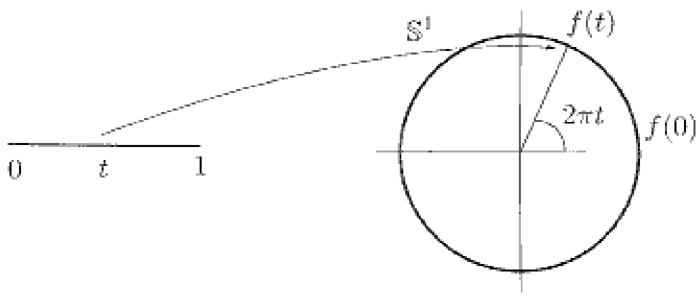


Figura 9.3: La circunferencia $\mathbb{S}^1$ como espacio cociente de $[0,1]$

EJEMPLO 9.2.5. Se considera en $\mathbb{R}$ la relación de equivalencia

$$t\ R\ s \Longleftrightarrow t - s \in \mathbb{Z}.$$

Observemos que la clase de equivalencia de $t \in \mathbb{R}$ es $t + \mathbb{Z}$. Ahora nos imaginamos la recta real hecha de plastilina, y tenemos que pegar $t \in \mathbb{R}$ con todos los de la forma $t + n$, $n \in \mathbb{Z}$, y además hacerlo para todo $t \in \mathbb{R}$. Una manera de hacerlo es tomar la recta real y enrollarla sobre una circunferencia, de forma que al dar vueltas sobre $\mathbb{S}^1$ se vayan solapando los puntos relacionados entre sí.

Se define la aplicación

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Esta aplicación es sobreyectiva y continua. Probamos que es abierta y por tanto será una identificación. Para probar que es abierta y haciendo uso del teorema 4.3.7, basta con demostrar que la imagen de un intervalo abierto es un conjunto abierto en $\mathbb{S}^1$. Se considera un intervalo (a, b). Si $|b - a| > 1$, entonces $f((a, b)) = \mathbb{S}^1$. Supongamos ahora que $|b - a| \leq 1$. Entonces

$$\mathbb{S}^1 - f((a, b)) = f([b, a + 1]).$$

Pero $f([b, a+1])$ es un conjunto cerrado al ser un conjunto compacto y Hausdorff. Por tanto $\mathbb{R}/R_f \cong \mathbb{S}^1$. Finalmente la igualdad $R_f = R$ es evidente y así $\mathbb{R}/R \cong \mathbb{S}^1$.

Es claro que f va enrollando toda la recta real en la circunferencia $\mathbb{S}^1$ de forma que cuando se está recorriendo un intervalo de longitud 1 en $\mathbb{R}$, la imagen está dando una vuelta en la circunferencia: figura 9.4.

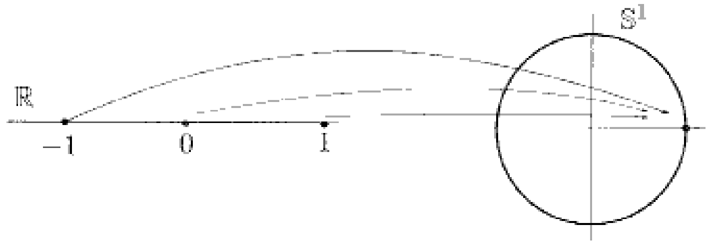


Figura 9.4: La circunferencia $\mathbb{S}^1$ como espacio cociente de $\mathbb{R}$

Ejemplo 9.2.6. En el cuadrado $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ se define la relación de equivalencia

$$(t,s)R(t',s') \Longleftrightarrow \begin{cases} (t,s) = (t',s'), & \text{ó} \\ |t-t'| = 1, & s = s'. \end{cases}$$

Demostramos que $[0,1] \times [0,1]/R$ es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$. Éste es justamente el espacio cociente que apareció al principio del capítulo en la figura 9.1. Lo que hacemos es doblar el cuadrado Q como aparecía allí, enrollando las rectas horizontales de Q dando una vuelta a la circunferencia $\mathbb{S}^1$.

Se define la aplicación

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1 \times [0,1], \quad f(t,s) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), s).$$

Esta aplicación es continua, sobreyectiva y cerrada, pues el dominio $[0,1]\times[0,1]$ es un espacio compacto y el codominio $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$ es Hausdorff. Por otra parte es evidente que la relación R_f es igual a R.

La aplicación f lleva el cuadrado unidad en el cilindro compacto $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ identificando los bordes $\{0\} \times [0,1]$ y $\{1\} \times [0,1]$. Así, el segmento vertical $A_t = \{t\} \times [0,1]$ se aplica a la recta vertical del cilindro correspondiente al punto $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in \mathbb{S}^1$. Por otro lado, el segmento horizontal $B_s = [0,1] \times \{s\}$ se lleva a la circunferencia del cilindro a altura s.

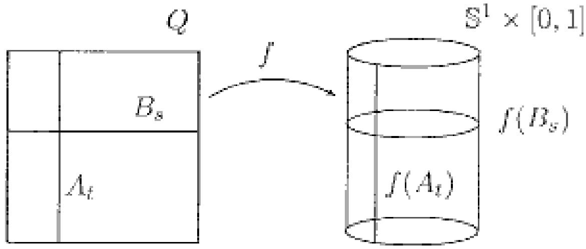


Figura 9.5: El cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ como espacio cociente del cuadrado Q

EJEMPLO 9.2.7. Se considera el disco de dimensión n dado por $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ y la relación de equivalencia

$$xRy \longleftrightarrow \begin{cases} x = y, & \text{ó} \\ x, y \in \mathrm{Fr}(\mathbb{D}^n) = \mathbb{S}^{n-1} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Probamos que $\mathbb{D}^n/R \cong \mathbb{S}^n$. Recordemos que para $n = 2$, éste fue uno de los ejemplos que apareció en la introducción del capítulo. Definimos

$$f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n, \quad f(x) = \begin{cases} N & \text{si } |x| = 1 \\ \pi^{-1} \circ h(x) & \text{si } |x| < 1, \end{cases}$$

donde N es el polo norte de la esfera, $h : \mathbb{D}^n \setminus \mathrm{Fr}(\mathbb{D}^n) \to \mathbb{R}^n$ está dada por

$$h(x) = \frac{x}{1 - |x|},$$

y $\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ es la proyección estereográfica. La aplicación h es un homeomorfismo y ya apareció en el teorema 4.2.6. Observemos que $\mathbb{D}^n \setminus \mathrm{Fr}(\mathbb{D}^n) = \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1} = B_1(0)$ es la bola de $\mathbb{R}^n$ centrada en el origen y de radio 1. De nuevo es evidente que f es sobreyectiva y que $R_f = R$.

Por otra parte, la aplicación f es cerrada pues $\mathbb{D}^n$ es compacto y $\mathbb{S}^n$ es Hausdorff. Luego para probar que f es identificación es suficiente con probar que f es continua.

El estudio de la continuidad la hacemos punto a punto. En el abierto $\mathbb{D}^n \setminus \mathrm{Fr}(\mathbb{D}^n)$, la aplicación f es continua pues coincide con $\pi^{-1} \circ h$. Si $x \in \mathrm{Fr}(\mathbb{D}^n)$, probamos la continuidad de f por sucesiones (teorema 3.3.1). Consideramos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Si $x_n \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces $f(x_n) = N$; si $|x_n| < 1$, entonces $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}} \to 1$, luego $\{h(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ y $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to N$. En cualquier caso, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to N$.

En el siguiente teorema estudiamos cómo relacionar topológicamente dos espacios cocientes a partir de aplicaciones entre los espacios ambiente donde están definidas las relaciones de equivalencia.

Teorema 9.2.8. *Sean (X,τ) e (Y,τ') dos espacios topológicos con sendas relaciones de equivalencias R y R'. Sea una aplicación $f: X \to Y$ con la propiedad:*

$$x_1 \; R \; x_2 \Longrightarrow f(x_1) R' f(x_2).$$

Consideramos la aplicación

$$\tilde{f}: \left(\frac{X}{R}, \frac{\tau}{R}\right) \to \left(\frac{Y}{R'}, \frac{\tau'}{R'}\right), \quad \tilde{f}([x]) = [f(x)],$$

es decir, $p' \circ f = \tilde{f} \circ p$, donde $p: X \to X/R$ y $p': Y \to Y/R'$ son las correspondientes proyecciones sobre los conjuntos cocientes.

1. *Si f es continua, entonces $\tilde{f}$ es continua.*
2. *Si f es identificación, entonces $\tilde{f}$ también es una identificación.*

Demostración.

1. Si f es continua, $p' \circ f$ es continua. Ya que $p' \circ f = \tilde{f} \circ p$, la aplicación $\tilde{f} \circ p$ es continua. Por tanto, $\tilde{f}$ es continua por la proposición 9.1.4.
2. Ya que p' y f son identificaciones, $\tilde{f} \circ p$ es una identificación por la proposición 9.1.11. Como p también es identificación, $\tilde{f}$ es una identificación de nuevo por la misma proposición.

□

Observemos que si en el teorema 9.2.8, R' es la relación de equivalencia identidad, es decir, $yR'y'$ si $y = y'$, entonces obtenemos el teorema 9.2.1.

Corolario 9.2.9. *Sean $(X,\tau), (Y,\tau')$ dos espacios topológicos con respectivas relaciones de equivalencia R y R' y una aplicación continua $f: (X,\tau) \to (Y,\tau')$ que satisface*

$$x_1 \; R \; x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) R' f(x_2).$$

Si f es una identificación entonces $\tilde{f}$ es un homeomorfismo entre $(X/R, \tau/R)$ e $(Y/R', \tau'/R')$.

Demostración. La aplicación $\tilde{f}$ es inyectiva y usamos la proposición 9.1.11 y el teorema 9.2.8. □

Corolario 9.2.10. *Sea $f: (X,\tau) \to (Y,\tau')$ un homeomorfismo entre dos espacios topológicos y R una relación de equivalencia en X. En el conjunto Y se define la relación de equivalencia R'*

$$y_1 \; R' \; y_2 \Longleftrightarrow f^{-1}(y_1) \; R \; f^{-1}(y_2).$$

Entonces $\tilde{f}$ definida por $\tilde{f} \circ p = p' \circ f$ es un homeomorfismo.

Veamos algunos ejemplos de cómo se usa este teorema y sus corolarios.

EJEMPLO 9.2.11. Se considera en el intervalo cerrado $[a, b]$ la relación de equivalencia R' que identifica los extremos a y b. Sea ahora la relación de equivalencia R en $[0, 1]$ que identifica 0 con el 1. Entonces

$$\frac{[a, b]}{R'} \cong \frac{[0, 1]}{R}.$$

Para ello basta definir el homeomorfismo

$$f : [0, 1] \to [a, b], \quad f(t) = (b - a)t + a$$

y aplicar el corolario 9.2.10.

EJEMPLO 9.2.12. Usando el teorema 9.2.8, probamos que los espacios cocientes $[0, 1]/\{0, 1\}$ y $\mathbb{R}/R'$ son homeomorfos donde R' es la relación definida por

$$x \; R' \; y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Ya sabemos por los ejemplos 9.2.4 y 9.2.5 que ambos son homeomorfos a la circunferencia $\mathbb{S}^1$ pero ahora vamos a probar que los espacios cocientes son homeomorfos sin usar este hecho. Para ello se define la aplicación

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

Sea R la relación en $[0, 1]$ que identifica $t = 0$ con $t = 1$. Entonces es evidente que $t \; R \; s$ si y sólo si $f(t) \; R' \; f(s)$. Se induce así una aplicación inyectiva $\tilde{f} : [0, 1]/\{0, 1\} \to \mathbb{R}/R'$ entre los espacios cocientes. Observemos, antes de proseguir, que la aplicación f no es sobreyectiva y por tanto no podemos usar de forma directa el segundo apartado del teorema 9.2.8.

Para probar que $\tilde{f}$ es un homeomorfismo, es suficiente con probar que $\tilde{f}$ es una identificación (proposición 9.1.11).

1. La aplicación $\tilde{f}$ es sobreyectiva. Si $[t] \in \mathbb{R}/R$, tomamos $[t - E(t)] \in [0, 1]/\{0, 1\}$, donde $E(t)$ es la parte entera de t. Entonces

$$\tilde{f}([t - E(t)]) = [f(t - E(t))] = [t - E(t)] = [t].$$

2. La aplicación $\tilde{f}$ es continua pues $\tilde{f} \circ p = f$ es continua (teorema 9.2.8).
3. La aplicación $\tilde{f}$ es cerrada. El dominio de $\tilde{f}$ es un conjunto compacto por ser cociente de un espacio compacto y el codominio es Hausdorff. Para probar esto último sin usar que $\mathbb{R}/R' \cong \mathbb{S}^1$, utilizamos la proposición

9.1.7. Por una parte, $p' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/R'$ es una aplicación abierta ya que si $O \subset \mathbb{R}$ es un abierto,

$$p'^{-1}(p'(O)) = R[O] = O + \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + O)$$

y $n+O$ es un conjunto abierto pues $n+O = t_n(O)$, donde $t_n(x) = x+n$ es una traslación en $\mathbb{R}$. Por otro lado,

$$\mathcal{R} = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : tRs\} = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t - s \in \mathbb{Z}\}$$

es un conjunto cerrado por ser $\mathcal{R} = h^{-1}(\mathbb{Z})$, donde

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(t,s) = t - s$$

es continua y $\mathbb{Z}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

También el teorema 9.2.8 permite relacionar la topología cociente respecto del producto topológico. La cuestión que se plantea es la siguiente. Sean dos espacios topológicos (X, τ), (Y, τ'), donde hay definidas sendas relaciones de equivalencia, R y R'. Se define en el espacio producto cartesiano $X \times Y$ la siguiente relación de equivalencia que denotamos por $R \times R'$:

$$(x_1, y_1)(R \times R')(x_2, y_2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 \ R \ x_2 \\ y_1 \ R' \ y_2. \end{array} \right.$$

Sean p, p' las proyecciones asociadas a las relaciones R y R' y consideramos la aplicación producto $p \times p' : X \times Y \to X/R \times Y/R'$. La relación de equivalencia asociada a $p \times p'$, y que denotamos por $R_{p \times p'}$, es la misma que $R \times R'$. Sabemos entonces que existe una aplicación biyectiva

$$\overline{p \times p'} : \frac{X \times Y}{R \times R'} \to \frac{X}{R} \times \frac{Y}{R'}$$

tal que $(\overline{p \times p'}) \circ \pi = p \times p'$, donde $\pi : X \times Y \to (X \times Y)/(R \times R')$ es la proyección sobre el cociente, es decir,

$$\overline{p \times p'}([(x,y)]) = ([x], [y]).$$

Además las aplicaciones p y p' son continuas y por tanto $\overline{p \times p'}$ también lo es. Esto prueba que la aplicación $\overline{p \times p'}$ es una aplicación continua y biyectiva entre los espacios $(X \times Y)/(R \times R')$ y $X/R \times Y/R'$.

Llegados a este punto, queda poco para probar que si $\overline{p \times p'}$ es una identificación. La aplicación $p \times p'$, que es producto de dos identificaciones, no tiene porqué ser una identificación. Sin embargo, puede darse alguna de las condiciones suficientes de la proposición 9.1.12 para que lo sea. Veámoslo en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 9.2.13. Sean $X = Y = [0,1]$ y $R = R'$ la relación

$$t \; R \; s \Longleftrightarrow \begin{cases} t = s, & \text{ó} \\ |t - s| = 1. \end{cases}$$

En este ejemplo (figura 9.6), la aplicación

$$p \times p' : [0,1] \times [0,1] \to \frac{[0,1]}{R} \times \frac{[0,1]}{R} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

es una aplicación cerrada ya que el dominio es compacto y el codominio es Hausdorff, luego $p \times p'$ es una identificación y así

$$\frac{[0,1] \times [0,1]}{R \times R} \cong \frac{[0,1]}{R} \times \frac{[0,1]}{R} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

La relación $R \times R$ se expresa también de la siguiente forma: en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ la relación de equivalencia $R \times R$ es la que identifica dos a dos los lados opuestos del cuadrado tal como aparece en la figura 9.6. Tenemos así el toro homeomorfo a un cociente del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

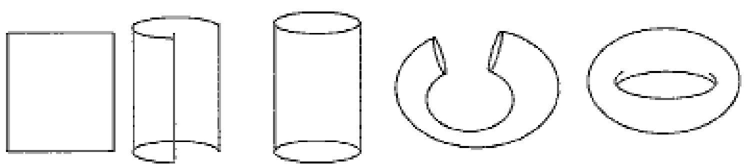


Figura 9.6: El toro como espacio cociente de un cuadrado de $\mathbb{R}^2$

EJEMPLO 9.2.14. Haciendo un razonamiento análogo al ejemplo previo, pero con la relación de equivalencia que determina el homeomorfismo $\mathbb{R}/R \simeq \mathbb{S}^1$ del ejemplo 9.2.5, la aplicación $p \times p$ es una identificación pues es el producto de aplicaciones abiertas. Entonces

$$\frac{\mathbb{R}^2}{R \times R} \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

La relación $R \times R$ viene dada por

$$\begin{aligned} (x,y)(R \times R)(x',y') &\Longleftrightarrow (x,y) - (x',y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}, y - y' \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En este ejemplo, el toro aparece como un espacio cociente del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Llegados a este punto observemos que el toro se ha expresado a lo largo del libro de cuatro formas, todas topológicamente equivalentes, y que a continuación recordamos.

1. El espacio topológico producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Fue así como se definió el toro en el ejemplo 5.2.7. También, por los teoremas 5.1.7 y 5.1.10, el toro es un subconjunto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ con la topología inducida de la euclídea.
2. Un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ con la topología inducida de la euclídea, tal como aparece en el ejemplo 5.2.7. Esta es la forma habitual de imaginarse el toro como la superficie de un donut, es decir, como una superficie de revolución de $\mathbb{R}^3$.
3. Un grupo topológico: véase el corolario 5.4.8.
4. Un espacio topológico cociente del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ (ejemplo 9.2.13) o del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ (ejemplo 9.2.14). Aquí el toro se obtiene por un proceso de pegado e identificación de una hoja de papel (figura 9.6).

9.3. Topología del espacio proyectivo

La topología del espacio proyectivo será estudiada a lo largo de esta sección y la próxima. El espacio proyectivo es un objeto que tiene importancia en matemáticas, incluso motivando y dando nombre a una rama de la geometría llamada *geometría proyectiva*. Aquí sólo vamos a recordar su definición y a trabajar con su topología natural, y sólo en algunos momentos haremos uso de algunas de sus propiedades geométricas.

El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ es un espacio cociente definido del siguiente modo. Para $n \geq 1$, se define en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ la relación de equivalencia

$$xRy \text{ si existe } \lambda \in \mathbb{R},\, y = \lambda x.$$

El correspondiente espacio cociente se llama el *espacio proyectivo* de dimensión n y lo denotamos por $\mathbb{RP}^n$:

$$\mathbb{RP}^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{R}.$$

Llamamos la *topología usual de* $\mathbb{RP}^n$ a la topología cociente de la topología euclídea de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ con la relación de equivalencia R.

Proposición 9.3.1. *El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ es compacto y conexo.*

Demostración. Por el corolario 6.2.9, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es conexo si $n \geq 1$ y por tanto, $\mathbb{RP}^n$ es conexo (corolario 9.1.5).

Para la compacidad no es posible usar directamente el corolario 9.1.5 ya que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ no es compacto. Lo que hacemos es probar que $\mathbb{RP}^n$ es homeomorfo a un cociente de la esfera $\mathbb{S}^n$, y ya que $\mathbb{S}^n$ es compacto, también lo será $\mathbb{RP}^n$.

En la esfera $\mathbb{S}^n$ definimos la relación de equivalencia

$$x\ R'\ y \Longleftrightarrow x = y \text{ ó } x = -y.$$

Observemos que R' no es más que la restricción de la relación R a $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Probamos que $\mathbb{S}^n/R' \simeq \mathbb{RP}^n$. Se define la aplicación

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n, \quad f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Esta aplicación es sobreyectiva, continua y tiene inversa continua por la derecha, concretamente la inclusión $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Entonces f es una identificación. Por tanto $\tilde{f} : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{S}^n/R'$ es una identificación por el teorema 9.2.8. Ya que $xRx' \Longleftrightarrow f(x)R'f(x')$, la aplicación $\tilde{f}$ es inyectiva y por tanto es un homeomorfismo.

□

Proposición 9.3.2. *El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ es Hausdorff.*

Demostración. Demostramos en primer lugar que la aplicación proyección $p' : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/R'$ es abierta. Consideramos en $\mathbb{S}^n$ la aplicación antípoda

$$A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \quad A(x) = -x.$$

Sea $O \subset \mathbb{S}^n$ un subconjunto abierto. Entonces

$$p'(O) = p'(R'[O]) = p'(O \cup A(O)).$$

Ya que A es un homeomorfismo, $A(O) \subset \mathbb{S}^n$ es un abierto y por tanto, $R'[O]$ es un abierto de $\mathbb{S}^n$. Esto prueba que $p'(O) \in \tau/R'$ y así p' es abierta.

Sea $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n/R'$ y sean ahora $[x], [y] \in \mathbb{RP}^n$, es decir, $x \neq y$ y $x \neq -y$. Entonces $d(x, y), d(x, -y) > 0$. Sea $\epsilon = \min\{|x - y|, |x + y|\}$ y llamamos $V_x = B_{\epsilon/2}(x) \cap \mathbb{S}^n$, $V_y = B_{\epsilon/2}(y) \cap \mathbb{S}^n$, que son entornos abiertos de x y de y en $\mathbb{S}^n$. Consideramos ahora $W_{[x]} = p'(V_x)$ y $W_{[y]} = p'(V_y)$, entornos de $[x]$

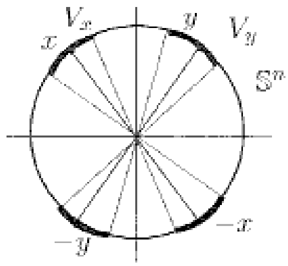


Figura 9.7: El espacio proyectivo es Hausdorff

y de $[y]$ respectivamente ya que p' es abierta (proposición 4.3.6). Ver figura 9.7.

Comprobamos que $W_{[x]} \cap W_{[y]} = \emptyset$. Si no fuera así, existirá $[z] \in \mathbb{RP}^n$ en la intersección. Entonces $z \in V_x$ ó $-z \in V_x$ y $z \in V_y$ ó $-z \in V_y$. Analizamos las distintas posibilidades:

1. Si $z \in V_x \cap V_y$, entonces $|x-y| \leq |x-z| + |z-y| < \epsilon \leq |x-y|$, lo cual es una contradicción.
2. Si $-z \in V_x \cap V_y$, se hace el mismo razonamiento para llegar a una contradicción.
3. Si $z \in V_x$ y $-z \in V_y$, entonces
$$|x+y| \leq |x-z| + |z+y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$
lo cual es una contradicción.

$\square$

Como consecuencia del teorema 8.3.5, obtenemos:

Corolario 9.3.3. *El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ es T_4.*

Corolario 9.3.4. *La aplicación proyección $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ es abierta.*

Demostración. Demostramos en primer lugar que la aplicación
$$f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n, \quad f(x) = \frac{x}{|x|}$$

es abierta utilizando el teorema 2.4.8. Sea O un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ y sea $x\in O$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{S}^n$ una sucesión con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\to f(x)$. Por tanto $\{|x|a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\to x$. Ya que O es abierto, el teorema 2.4.8 asegura que existe $\nu\in\mathbb{N}$ tal que $|x|a_n\in O$ para $n\geq\nu$. Entonces

$$f(|x|a_n)=\frac{|x|a_n}{|x||a_n|}=a_n\in f(O),$$

luego $f(x)$ es un punto interior de $f(O)$. La inclusión $f(O)\subset\operatorname{int}(f(O))$ prueba que $f(O)$ es un conjunto abierto.

Probamos ahora que p es una aplicación abierta. Sea O un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$. Entonces probar que $p(O)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{RP}^n$ equivale a probar que $(\tilde{f}\circ p)(O)$ es abierto en $\mathbb{S}^n/R'$ donde $\tilde{f}:\mathbb{RP}^n\to\mathbb{S}^n/R'$ es el homeomorfismo natural (ver proposición 9.3.1). Ya que $\tilde{f}\circ p=p'\circ f$ y p' y f son aplicaciones abiertas, entonces $\tilde{f}\circ p$ es abierta, probando que $(\tilde{f}\circ p)(O)$ es abierto. □

De la proposición 9.1.15 tenemos:

Corolario 9.3.5. *Sea $\tilde{B}\subset\mathbb{RP}^n$ y $B=p^{-1}(\tilde{B})$. Consideramos la topología usual τ de $\mathbb{RP}^n$ y denotamos por τ_u la topología euclídea de $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$. Entonces*

$$\tau_{|\tilde{B}}=\frac{\tau_{u|B}}{R}.$$

Hemos definido el espacio proyectivo como espacio cociente de $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ y posteriormente como cociente de la esfera $\mathbb{S}^n$. En los dos siguientes ejemplos, expresaremos $\mathbb{RP}^n$ como cociente de una semiesfera y de un disco.

Ejemplo 9.3.6. Consideramos el hemisferio superior de la esfera $\mathbb{S}^n$ dado por

$$H^n_+=\{(x_1,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{S}^n: x_{n+1}\geq 0\}.$$

Observemos que H^n_+ es un espacio compacto al ser cerrado y acotado en $\mathbb{R}^{n+1}$. Se define en él la relación de equivalencia R_+ que no es más que la restricción de la relación R' definida en $\mathbb{S}^n$. También podemos escribir R_+ como

$$xR_+y\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} x=y, & \text{ó}\\ x_i=-y_i & 1\leq i\leq n \text{ si } x_{n+1}=y_{n+1}=0.\end{array}\right.$$

Sea la inclusión $i:H^n_+\hookrightarrow\mathbb{S}^n$. Si xR_+y entonces $i(x)R'i(y)$ y por tanto se induce una aplicación $\tilde{i}:H_n^+/R_+\to\mathbb{S}^n/R'$. Observemos que i no es una identificación por que no es sobreyectiva y por tanto no estamos en condiciones de utilizar el teorema 9.2.1.

Probamos directamente que $\tilde{i}$ es un homeomorfismo. Denotamos por $[[x]]$ la clase de equivalencia de $x \in H_+^n$ con la relación R_+.

1. La aplicación $\tilde{i}$ es inyectiva. Si $i(x)R'i(y)$, entonces $xR'y$. Pero como R_+ no es más que la restricción de la relación R' a $H_+^n \subset \mathbb{S}^n$, entonces xR_+y y por tanto, $[[x]] = [[y]]$.
2. La aplicación $\tilde{i}$ es sobreyectiva. Sea $[x] \in \mathbb{S}^n/R'$. Entonces x o $-x$ pertenecen a H_+^n, luego un representante de $[x]$ se encuentra en H_+^n. Sin perder generalidad, suponemos que es x. Entonces $\tilde{i}([[x]]) = [i(x)] = [x]$.
3. La aplicación $\tilde{i}$ es continua ya que i lo es.
4. La aplicación $\tilde{i}$ es cerrada. Esto es consecuencia de que $\tilde{i}$ es continua, H_+^n/R_+ es compacto y que $\mathbb{S}^n$ es Hausdorff.

Como conclusión,

$$\frac{H_+^n}{R_+} \cong \frac{\mathbb{S}^n}{R'} \simeq \mathbb{RP}^n.$$

Ejemplo 9.3.7. Se considera el disco de dimensión n

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

con la topología usual. Se define la relación de equivalencia:

$$xRy \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y, & \text{ó} \\ x = -y & \text{si } x, y \in \mathbb{S}^{n-1}. \end{cases}$$

Probamos que $\mathbb{D}^n/R$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^n$. Sea el homeomorfismo

$$h : \mathbb{D}^n \to H_+^n, \quad h(x) = (x, \sqrt{1 - |x|^2}),$$

esto es, H_+^n es el grafo de la función $x_{n+1} = \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}$. Si xRy, entonces $h(x)R_+h(y)$ y viceversa, luego por el corolario 9.2.10, h induce un homeomorfismo $\tilde{h}$ entre $\mathbb{D}^n/R$ y H_+^n/R_+. Por tanto

$$\frac{\mathbb{D}^n}{R} \cong \frac{H_+^n}{R_+} \cong \mathbb{RP}^n.$$

De este ejemplo y del corolario 9.2.10, se obtiene:

Corolario 9.3.8. *La recta proyectiva $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. Observemos que $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$. Usando los ejemplos 9.3.7 y 9.2.11, tenemos

$$\mathbb{RP}^1 \cong \frac{[-1,1]}{\{-1,1\}} \simeq \frac{[0,1]}{\{0,1\}} \simeq \mathbb{S}^1.$$

□

Recordamos ahora algunos conceptos geométricos relacionados con el espacio proyectivo.

Definición 9.3.9. Un subespacio proyectivo de dimensión $k \leq n$ en el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ es un subconjunto $H \subset \mathbb{RP}^n$ tal que $p^{-1}(H) \cup \{0\}$ es un subespacio vectorial en $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimensión $k+1$.

Una aplicación proyectiva $\pi : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ es una aplicación para la cual existe una aplicación lineal de espacios vectoriales $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ tal que $p \circ f_{|\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}} = \pi \circ p$, donde con el mismo símbolo p estamos indicando tanto la proyección $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ como $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^m$. Una proyectividad es una aplicación proyectiva que es biyectiva. En particular, $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y la inversa de una proyectividad es otra proyectividad.

En ambas definiciones es cierto el recíproco en el siguiente sentido.

1. Sea un subespacio vectorial $H' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de dimensión $k+1$. Entonces $H = p(H' \setminus \{0\})$ es un subespacio proyectivo de dimensión k. Esto se debe a que $H' \setminus \{0\}$ es un conjunto R-saturado.
2. Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ una aplicación lineal. Entonces existe una aplicación proyectiva $\pi : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ tal que $p \circ f_{|\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}} = \pi \circ p$. La razón es que la aplicación f preserva las relaciones de equivalencia R y R' definidas en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ que definen los espacios proyectivos $\mathbb{RP}^n$ y $\mathbb{RP}^m$, respectivamente:
$$xR\, x' \Leftrightarrow x' = \lambda y \Leftrightarrow f(x') = f(\lambda x) = \lambda f(x) \Rightarrow f(x')R' f(x).$$

En los próximos resultados estudiamos la topología de una aplicación proyectiva y de un subespacio proyectivo.

Proposición 9.3.10. *Una aplicación proyectiva es continua. En particular, una proyectividad es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $\pi : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ una una aplicación proyectiva y $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ la aplicación lineal tal que $\pi \circ p = p \circ f_{|\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$. Entonces el teorema 9.2.8 asegura la continuidad de π. $\square$

Proposición 9.3.11. *Sea $H \subset \mathbb{RP}^n$ un subespacio proyectivo de dimensión k. Entonces H es homeomorfo a $\mathbb{RP}^k$. Además H es subconjunto cerrado en $\mathbb{RP}^n$.*

Demostración. Se va a hacer la demostración para hiperplanos proyectivos ($k = n - 1$) y en los casos de dimensión menor, el razonamiento es análogo. La prueba consiste en varias etapas.

1. Sea $H \subset \mathbb{RP}^n$ un hiperplano proyectivo dado por $H = p(H' \setminus \{0\})$ con $H' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un subespacio vectorial de dimensión n. Sea $H_0 \subset \mathbb{RP}^n$ el subespacio proyectivo que procede del subespacio $H'_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de ecuación $x_{n+1} = 0$. Consideramos un isomorfismo $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ de espacio vectoriales tal que $f(H') = H'_0$. Este isomorfismo tiene una proyectividad asociada que denotamos por π. Entonces,

$$\pi(H) = (\pi \circ p)(H' \setminus \{0\}) = (p \circ f)(H' \setminus \{0\}) = p(H'_0 \setminus \{0\}) = H_0.$$

   Ya que π es un homeomorfismo por la proposición 9.3.10, entonces $H \cong H_0$.

2. A continuación probamos que H_0 es homeomorfo a $\mathbb{RP}^{n-1}$. Se define

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0).$$

   Ya que f es lineal, f es compatible con las relaciones de equivalencia que definen a los espacios proyectivos. Sea $\tilde{f} : \mathbb{RP}^{n-1} \to \mathbb{RP}^n$ la aplicación inyectiva que induce. Ya que f es continua, $\tilde{f}$ también lo es por el teorema 9.2.8. Por otra parte, $\tilde{f}$ tiene como dominio un espacio compacto y llega a un espacio Hausdorff, luego es cerrada. Por tanto $\tilde{f}$ es un embebimiento. Entonces $\mathbb{RP}^{n-1} \cong \tilde{f}(\mathbb{RP}^{n-1})$. Finalmente tenemos

$$\tilde{f}(\mathbb{RP}^{n-1}) = (p \circ f)(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = p(H'_0 \setminus \{0\}) = H_0.$$

3. Un hiperplano proyectivo es un conjunto cerrado por ser un subconjunto compacto del espacio Hausdorff $\mathbb{RP}^n$.

□

Corolario 9.3.12. *El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^m$, $m \leq n$, se embebe en $\mathbb{RP}^n$ como un subespacio proyectivo de dimensión m.*

Los resultados anteriores extienden, en cierto sentido, lo que sucede en los espacios euclídeos. Así se probaba en el teorema 4.2.8 que un subespacio afín de dimensión m en $\mathbb{R}^n$ era homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ y que era un conjunto cerrado (ejemplo 3.2.5). También se probó en el ejercicio 23 del capítulo 4 que $\mathbb{R}^m$ se embebe en $\mathbb{R}^n$ para $m \leq n$.

Teorema 9.3.13. *El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ se embebe en $\mathbb{RP}^n$.*

Demostración. Con la misma notación seguida hasta ahora, se define

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus H_0' \to \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right).$$

Esta aplicación es continua y tiene una aplicación inversa continua por la derecha, a saber,

$$s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus H_0', \quad s(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_n, 1).$$

La relación R_f es la relación R que define el espacio proyectivo: efectivamente, si $(y_1, \ldots, y_{n+1}) = \lambda(x_1, \ldots, x_{n+1})$, entonces

$$f(y_1, \ldots, y_{n+1}) = \left(\frac{\lambda x_1}{\lambda x_{n+1}}, \ldots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_{n+1}} \right) = f(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Recíprocamente, si se tiene la igualdad $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(y_1, \ldots, y_{n+1})$ entonces

$$\frac{x_i}{x_{n+1}} = \frac{y_i}{y_{n+1}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Podemos escribir

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}),$$

es decir, $(x_1, \ldots, x_{n+1})R(y_1, \ldots, y_{n+1})$. Por tanto existe $\tilde{f} : \mathbb{RP}^n \setminus H_0 \to \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{f} \circ p = f$. Como f es una identificación, $\tilde{f}$ es un homeomorfismo. Por último, la proposición 9.3.11 implica que $\mathbb{RP}^n \setminus H_0$ es un conjunto abierto de $\mathbb{RP}^n$ y por el corolario 9.1.16, la topología cociente en $\mathbb{RP}^n \setminus H_0$ coincide con la topología inducida de $\mathbb{RP}^n$.

El embebimiento buscado no es más que el homeomorfismo $\tilde{f}^{-1}$ seguido de la inclusión de $\mathbb{RP}^n \setminus H_0$ en $\mathbb{RP}^n$. □

Corolario 9.3.14. *El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ es una compactificación de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Se considera el embebimiento

$$h = \tilde{f}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{RP}^n \setminus H_0 \hookrightarrow \mathbb{RP}^n$$

definido en el teorema anterior. Para probar que $\mathbb{RP}^n$ es una compactificación de $\mathbb{R}^n$ queda ver que la imagen es densa en $\mathbb{RP}^n$. Ya que el interior de un subespacio afín de $\mathbb{R}^{n+1}$ es vacío, tenemos

$$\overline{\mathbb{R}^{n+1} \setminus H_0'} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \operatorname{int}(H_0') = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \emptyset = \mathbb{R}^{n+1}.$$

Por tanto $\mathbb{R}^{n+1} \setminus H_0'$ también es denso en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Usando el teorema 3.1.4, concluimos

$$h(\overline{\mathbb{R}^n}) = \overline{p(\mathbb{R}^{n+1} \setminus H_0')} \supset p\left(\overline{\mathbb{R}^{n+1} \setminus H_0'}\right) = p(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \mathbb{RP}^n.$$

□

Corolario 9.3.15. *En el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$, el conjunto complementario de un hiperplano proyectivo es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Corolario 9.3.16. *El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ es una variedad topológica de dimensión n.*

Demostración. Ya se probó en la proposición 9.3.2 que el espacio proyectivo es Hausdorff. Por otra parte, también satisface el segundo axioma de numerabilidad, pues $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ lo es y la aplicación proyección $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/R$ es continua, abierta y sobreyectiva.

Sea $x = [(x_1, \ldots, x_{n+1})] \in \mathbb{RP}^n$ y supongamos, sin perder generalidad, que $x_{n+1} \neq 0$. Consideramos $U = \mathbb{RP}^n \setminus H_0$. Entonces $x \in U$ y por el corolario 9.3.15, U es un subconjunto abierto de $\mathbb{RP}^n$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. □

Llegados a este punto del estudio topológico de los espacios proyectivos, es natural preguntarse si es posible imaginarse de alguna forma el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$. Usando los términos que hemos usado en este libro, estamos planteando si es posible embeber $\mathbb{RP}^n$ en algún espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$ de forma que podamos 'ver' $\mathbb{RP}^n$ con ojos euclídeos. Ya sabemos por el corolario 9.3.8 que $\mathbb{RP}^1$ no es más que la circunferencia $\mathbb{S}^1$. El siguiente espacio proyectivo donde consideramos este problema es el plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$. Aunque no tenemos las herramientas topológicas necesarias, podemos anunciar que el plano proyectivo no se embebe en el espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$. Sin embargo sí se embebe en $\mathbb{R}^4$ como muestra la siguiente proposición.

Proposición 9.3.17. *El plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ se embebe en $\mathbb{R}^4$.*

Demostración. Se define la aplicación

$$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Es fácil probar que la relación R_f coincide con la relación de equivalencia R' definida en $\mathbb{S}^2$ que determina $\mathbb{RP}^2$. Entonces f induce una aplicación $\tilde{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ que es continua e inyectiva. Ya que el dominio es compacto y el codominio es Hausdorff, la aplicación $\tilde{f}$ es un embebimiento. □

9.4. Cónicas y cuádricas proyectivas

Estudiamos en esta sección la topología de las cónicas y cuádricas proyectivas. Una cónica en $\mathbb{R}^2$ es un subconjunto del tipo

$$C = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0\},$$

donde $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$. En coordenadas homogéneas, esta expresión se transforma en

$$C = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0\}.$$

Esta ecuación se escribe en forma matricial como

$$(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} a & c/2 & d/2 \\ c/2 & b & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Si $\lambda \neq 0$, entonces $(x,y,z) \in C$ si y sólo si $\lambda(x,y,z) \in C$ y por tanto induce un conjunto en el espacio cociente $\mathbb{RP}^2$.

Definición 9.4.1. Una cónica $\mathcal{C} \subset \mathbb{RP}^2$ es la proyección $p(C)$ de un conjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ de la forma $C = \{X \in \mathbb{R}^3 : XAX^t = 0\}$, donde $A \in gl(3,\mathbb{R})$ es una matriz simétrica y $p : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^2$ es la proyección sobre el cociente. Se dice que $\mathcal{C}$ es una cónica no degenerada si A es una matriz regular.

Para el estudio topológico de las cónicas proyectivas, elegimos un sistema de referencia de forma que la matriz A de la forma cuadrática se exprese en forma diagonal. Esto es posible porque la matriz A es una matriz simétrica. Para la elección del nuevo sistema de referencia en $\mathbb{R}^3$, se realiza un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$, el cual induce una proyectividad en el plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$. Por tanto, el estudio topológico de las cónicas proyectivas se reduce a considerar la cónica después de esta proyectividad, ya que una proyectividad es un homeomorfismo y no altera sus propiedades topológicas.

Observemos que la elipse e hipérbola definen la misma cónica proyectiva y que se corresponde con la matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

Esto quiere decir que en el plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ sólo hay una cónica no degenerada.

Teorema 9.4.2. *La cónica proyectiva*

$$\mathcal{C} = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{RP}^2 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$$

es homeomorfa a la circunferencia $\mathbb{S}^1$.

Demostración. Sea $H_0 \subset \mathbb{R}^2$ el plano de ecuación $x_3 = 0$. Por el teorema 9.3.13,

$$h : \mathbb{RP}^2 \setminus p(H_0) \to \mathbb{R}^2, \quad h([(x_1, x_2, x_3)]) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$$

es un homeomorfismo. Ya que $\mathcal{C} \cap p(H_0) = \emptyset$, entonces $\mathcal{C} \subset \mathbb{RP}^2 \setminus p(H_0) \simeq \mathbb{R}^2$. Entonces $\mathcal{C} \cong h(\mathcal{C})$ y es fácil darse cuenta que $h(\mathcal{C}) = \mathbb{S}^1$. $\square$

El siguiente paso es estudiar las cuádricas proyectivas no degeneradas.

Definición 9.4.3. Una cuádrica $\mathcal{Q} \subset \mathbb{RP}^3$ es la proyección $p(Q)$ de un conjunto $Q \subset \mathbb{R}^4$ de la forma $Q = \{X \in \mathbb{R}^4 : XAX^t = 0\}$, donde $A \in gl(4, \mathbb{R})$ es una matriz simétrica y $p : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^3$ es la proyección sobre el cociente. Se dice $\mathcal{Q}$ es una cuádrica no degenerada si A es regular.

Igual que ocurre con las cónica proyectivas, después de una proyectividad de $\mathbb{RP}^3$, podemos suponer que la matriz A es diagonal. Existen sólo dos cuádricas proyectivas no degeneradas:

1. Aquéllas cuya matriz diagonal es

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

   y que se corresponden con el elipsoide, paraboloide e hiperboloide de dos hojas.

2. Las que tienen por matriz diagonal

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

   y que en el espacio afín se corresponden con el hiperboloide reglado.

Teorema 9.4.4. *Sea $\mathcal{Q} \subset \mathbb{RP}^3$ una cuádrica proyectiva no degenerada.*

1. *Si la matriz diagonal asociada es A_1, entonces $\mathcal{Q} \cong \mathbb{S}^2$.*
2. *Si la matriz diagonal asociada es A_2, entonces $\mathcal{Q} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

Demostración. De forma análoga al teorema anterior, sea $H_0 \subset \mathbb{R}^4$ el hiperplano de ecuación $x_4 = 0$ y el homeomorfismo

$$h : \mathbb{RP}^3 \setminus p(H_0) \to \mathbb{R}^3, \quad h([(x_1, x_2, x_3, x_4)]) = \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right).$$

Sea $Q \subset \mathbb{R}^4$ la cuádrica afín tal que $\mathcal{Q} = p(Q)$.

1. En el primer caso,
$$p(Q) \subset \mathbb{RP}^3 \setminus p(H_0) \simeq \mathbb{R}^3.$$
Ya que $\mathcal{Q} \cong h(p(Q))$, queda por calcular la imagen de $p(Q)$ mediante h. Pero ya que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$, no es difícil demostrar que la imagen es la esfera $\mathbb{S}^2$.
2. Para el segundo caso, se define $f : Q \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ como
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_3}{x_3^2 + x_4^2}, \frac{x_4}{x_3^2 + x_4^2}\right).$$
Esta aplicación es continua y tiene una inversa continua por la derecha que no es más que la inclusión $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow Q \setminus \{0\}$. Entonces f es una identificación. Por otra parte, si consideramos en $\mathbb{S}^1$ la relación R' que define la recta proyectiva $\mathbb{RP}^1$, entonces f es compatible con la relación $R' \times R'$. Por tanto, f induce un homeomorfismo $\tilde{f} : p(Q) \to \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ y así la cuádrica $\mathcal{Q}$ es homeomorfa a $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$, es decir, a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

$\square$

9.5. Una introducción a las superficies compactas

Volvemos a los conjuntos cocientes que definen el cilindro y el toro en los ejemplos 9.2.6 y 9.2.13. Ambos son espacios cocientes del cuadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Podemos representar la relación de equivalencia según aparece en la figura 9.8, donde dos flechas iguales indica que los lados correspondientes se identifican punto a punto en el cociente.

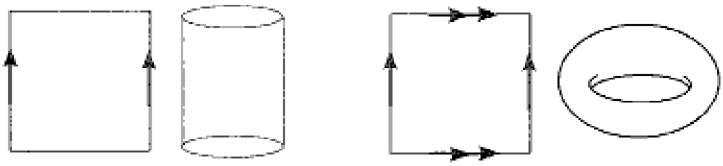


Figura 9.8: El cilindro y el toro como espacios espacios cocientes del cuadrado Q

La esfera también ha sido construida como cociente de Q, aunque no ha aparecido de forma explícita. Para ello, volvemos al ejemplo 9.2.7 para el caso concreto $n = 2$. Sabemos que $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{D}^2/R$, donde R es la relación de equivalencia que identifica todo el borde $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}^2$ en un sólo punto. Mediante un homeomorfismo, cambiamos el disco $\mathbb{D}^2$ al cuadrado Q y llevamos la relación de equivalencia a una relación S en Q. Aplicando el corolario 9.2.10, el cociente Q/S sigue siendo homeomorfo a la esfera. En el cuadrado la relación es de nuevo aquélla en la que todos los puntos del borde, a saber, $\mathrm{Fr}(Q) = \mathbb{S}^1$ están relacionados. En la figura 9.9 se representa dicha relación de equivalencia.

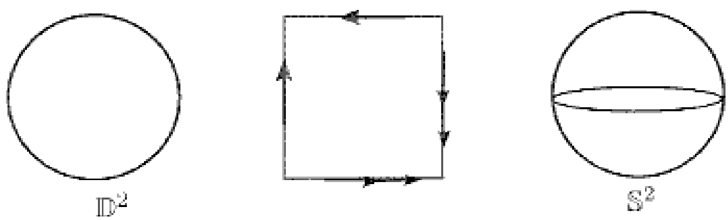


Figura 9.9: La esfera $\mathbb{S}^2$ como espacio espacio cociente del cuadrado Q

Esta forma de construir espacios cocientes sobre Q se extiende sin más que invertir el orden de las flechas. Un primer ejemplo es

$$(t,s)R(t',s') \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (t,s) = (t',s'), & \text{ó} \\ |t-t'| = 1, & s' = 1-s. \end{array} \right. \tag{9.4}$$

El espacio cociente lo visualizamos en la figura 9.10.

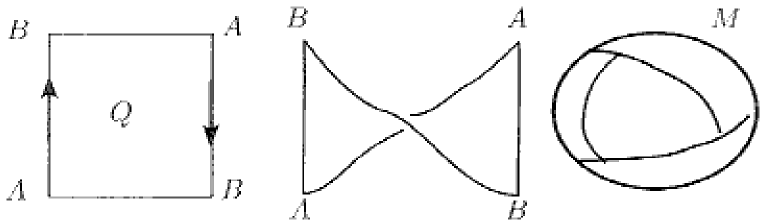


Figura 9.10: La banda de Moebius. A la derecha, un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a la banda de Moebius

Definición 9.5.1. La banda de Moebius es el espacio cociente Q/R para la relación de equivalencia definida en (9.4).

En la figura 9.10, y para visualizar el espacio cociente, hemos definido un embebimiento del espacio cociente en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. Para ello consideramos Q como una hoja de papel y la doblamos para que los puntos A y B coincidan. El subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que aparece es lo que habitualmente se entiende como banda de Moebius y desde el punto de vista topológico, ambos son homeomorfos. Sería interesante construir explícitamente dicho homeomorfismo, es decir, la forma en cómo se dobla la hoja de papel, y esto lo hacemos en el siguiente teorema.

Teorema 9.5.2. *La banda de Moebius se embebe en* $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Se considera la circunferencia de radio 2 en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ dada por

$$C = \{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=4\}$$

y el segmento $L=\{1\}\times\{0\}\times[-1,1]$. Llamamos $A=(2,0,1)$, $O=(2,0,0)$ y $B=(2,0,-1)$. Hacemos girar el segmento L de forma que el punto intermedio O de L permanezca siempre en C y L se encuentre en un plano perpendicular tanto al plano $z=0$ como al vector velocidad de C. Además se hace girar L de forma que al volver al punto de partida, L sólo ha girado 180 grados. No es complicado ver que el conjunto que determina L es

$$\begin{aligned} M &= \Big\{(2\cos\theta,2\sin\theta,0)+(2t-1)(\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta,\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\cos\frac{\theta}{2}) : \\ &\quad \theta\in[0,2\pi], t\in[0,1]\Big\}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Definimos la aplicación $f : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to M$ como

$$f(\theta, t) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0) + (2t-1)(\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta, \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \cos\frac{\theta}{2}).$$

Ver figura 9.11. Esta aplicación continua tiene como dominio un espacio compacto y codominio un espacio Haussdorf, luego f es cerrada. Con algo más de trabajo, se prueba que$f$ es sobreyectiva y la relación R_f es la relación que define la banda de Moebius. Concretamente:

1. Si $f(0,t) = f(\theta', t')$, nos queda $f(0,t) = (2, 0, 2t-1)$. Luego $\sin\frac{\theta'}{2}\sin\theta' = 0$, es decir, $\theta' = 0$ o $\theta' = 2\pi$. En este último caso, igualando la tercera coordenada, tenemos $2t - 1 = -2t' + 1$, es decir, $t' = 1 - t$. Esto prueba que los puntos $(0, t)$ y $(2\pi, 1-t)$ están relacionados con la relación R que da como cociente la banda de Moebius.

2. El recíproco es inmediato, es decir, los puntos $(0, t)$ y $(2\pi, 1-t)$ que están relacionados con la relación R que define la banda de Moebius, tienen las mismas imágenes, es decir, $f(0, t) = f(2\pi, 1-t)$.

$\square$

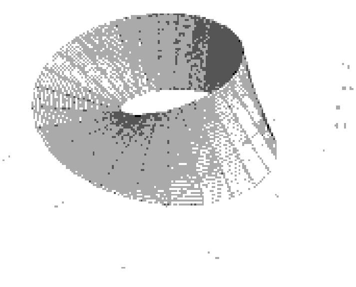


Figura 9.11: La banda de Moebius construida con el programa Mathematica según la parametrización (9.5)

Los ejemplos construidos en esta sección, tanto los espacios cocientes como los subconjuntos del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ a los que son homeomorfos, tienen la apariencia de ser superficies. Recordemos que una superficie es una variedad topológica de dimensión 2. Sin embargo esto no sucede en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ o en su espacio cociente, ya que los puntos del borde de arriba o de abajo en el cilindro, es decir, los de la forma $(\cos(t), \sin(t), 0)$ o $(\cos(t), \sin(t), 1)$ no tienen entornos homeomorfos a $\mathbb{R}^2$. Lo mismo sucede con los puntos del borde de arriba o de abajo del cuadrado Q, es decir, de la forma $(t,1)$ y $(t,0)$, ya que éstos no tienen entornos homeomorfos a $\mathbb{R}^2$. Sí en cambio los de los bordes de la izquierda y derecha, es decir, de los puntos, $(0,s)$ o $(1,s)$, como aparecen en la figura 9.12.

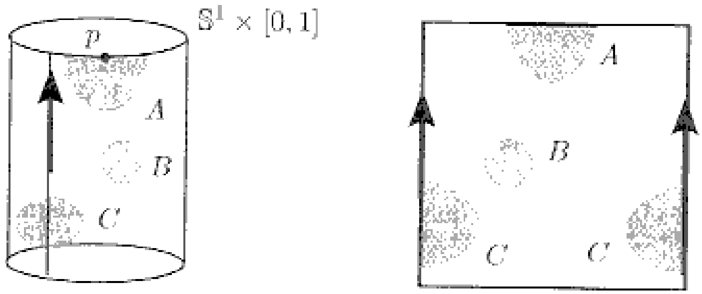


Figura 9.12: En el cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$, como en su cociente, hay puntos que no tienen abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}^2$, como sucede en los puntos del borde de arriba. Así el entorno A del punto p no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Por tanto, no es una superficie. Sí hay otros puntos que tienen abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}^2$, como son los abiertos B y C

Nota 9.5.3. Intuitivamente, el entorno A de la figura 9.12 no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ ya que tiene 'borde'. Supongamos que A es homeomorfo al semidisco

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}.$$

Sin embargo no tenemos las herramientas necesarias para probar que X no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Así, no se puede distinguir usando conexión o el orden de intersección ya que si a X le quitamos un punto, nos queda conexo, lo mismo que le ocurre a $\mathbb{R}^2$. Para probar que no son homeomorfos, necesitamos el concepto del grupo fundamental (capítulo 11). De todas formas, esto no prueba que el cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ no sea una superficie ya que lo único que hemos observado es que A no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, pero no descarta otro tipo de entornos de p que sí pudieran ser homeomorfos a $\mathbb{R}^2$.

Si nos concentramos en superficies compactas, podemos realizar construcciones parecidas a como se han hecho con el toro y la esfera. Así tenemos las dos siguientes definiciones.

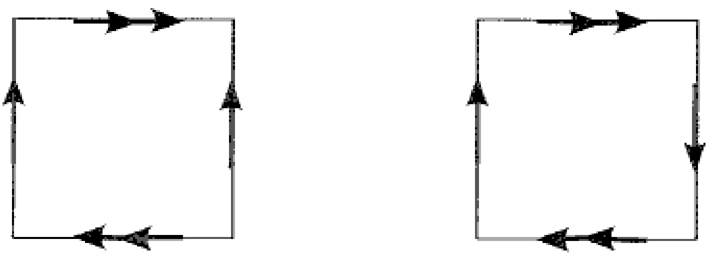
Definición 9.5.4. La botella de Klein es el espacio cociente Q/R, donde R es la relación de equivalencia

$$(t,s)R(t',s') \Longleftrightarrow \begin{cases} (t,s)=(t',s'), & \text{ó} \\ |t-t'|=1, & s'=s, \ \text{ó} \\ |s-s'|=1, & t'=1-t. \end{cases}$$

Definición 9.5.5. Se llama plano proyectivo al espacio cociente Q/R, donde R es la relación de equivalencia

$$(t,s)R(t',s') \Longleftrightarrow \begin{cases} (t,s)=(t',s'), & \text{ó} \\ |t-t'|=1, & s'=1-s, \ \text{ó} \\ |s-s'|=1, & t'=1-t. \end{cases}$$

Siguiendo la misma idea que en el toro y en la esfera, podemos representar la botella de Klein y y el plano proyectivo según la figura 9.13.



botella de Klein plano proyectivo

Figura 9.13: La botella de Klein (izquierda) y el plano proyectivo (derecha)

Para justificar el nombre del segundo espacio cociente, probamos que dicho espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{RP}^2$. Para ello volvemos al ejemplo 9.3.6 donde se probaba que $\mathbb{RP}^2$ era homeomorfo a un cociente del disco $\mathbb{D}^2$, donde cada punto de su borde se identificaba con su antípoda. Si ahora hacemos una deformación del disco en el cuadrado Q, la relación de equivalencia es justo la que aparece en la definición anterior y por tanto, los espacios cocientes son homeomorfos por el corolario 9.2.10. Ver figura 9.14.

Existe una manera algebraica de representar las superficies compactas que han aparecido como cocientes de un cuadrado y consiste en asignar una letra a cada uno de los lados del cuadrado, por ejemplo, la letra a, y en el caso

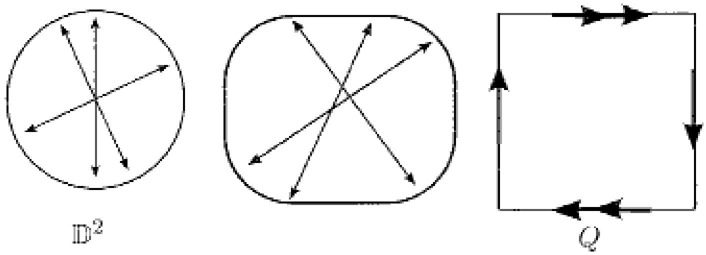


Figura 9.14: El plano proyectivo como cociente de un disco y de un cuadrado. En el disco identificamos los puntos antípodas del borde de $\mathbb{D}^2$. Después de deformar $\mathbb{D}^2$ por un homeomorfismo hasta conseguir el cuadrado, la relación de equivalencia resultante en Q es la que aparece a la derecha

que el lado opuesto con el que se identifica no se le 'da la vuelta', entonces de nuevo se escribe a, pero si se le 'da la vuelta', entonces escribimos a^{-1}. Así:

1. La esfera es $aa^{-1}bb^{-1}$.
2. El toro es $aba^{-1}b^{-1}$.
3. La botella de Klein es $aba^{-1}b$.
4. El plano proyectivo es $abab$.

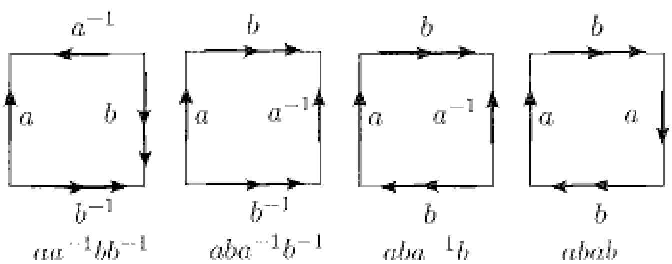


Figura 9.15: Las cuatro superficies compactas y su notación

Proposición 9.5.6. *La botella de Klein y el plano proyectivo contiene bandas de Moebius.*

Demostración. Basta considerar apropiados subconjuntos B en Q que en el espacio cociente sean una banda de Moebius. Ver figura 9.16. También estamos usando el corolario 9.1.16, ya que B es un conjunto cerrado de Q. □

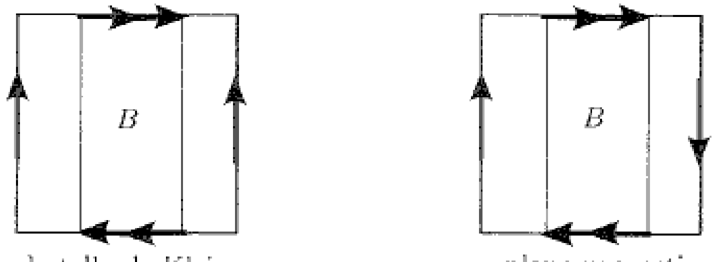


Figura 9.16: Los subconjuntos B del cuadrado Q determinan banda de Moebius en la botella de Klein y en el plano proyectivo

Igual que sucedía con el plano proyectivo, nos preguntamos si es posible embeber la botella de Klein en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. La respuesta es negativa. Si uno quisiera construir dicho embebimiento a partir del cuadrado Q, haciendo algo parecido al toro, primero pegaríamos los bordes verticales, obteniendo un cilindro. Ahora tendríamos que pegar los bordes de arriba y de abajo del cilindro, pero retorciendo uno de los bordes para coincidir, según la regla $t' = 1 - t$, con el otro borde. Una manera de hacerlo sería atravesar uno de los bordes el cilindro, y ya estando dentro del mismo, pegarlo con el otro borde. Ver figura 9.17. Sin embargo, este proceso no representa un embebimiento ya que al atravesar el cilindro, se pierde la inyectividad.

9.6. Apéndice: relaciones de equivalencia

En esta parte del capítulo hacemos una revisión de los conceptos básicos relativos a relaciones de equivalencia.

Una *relación binaria* en un conjunto X es un subconjunto $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $X \times X$. Si un par (x, y) pertenece a $\mathcal{R}$, escribimos xRy, es decir,

$$(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x\ R\ y.$$

Definición 9.6.1. Una relación binaria $\mathcal{R}$ en un conjunto X se dice que es una relación de equivalencia si tiene las siguientes propiedades:

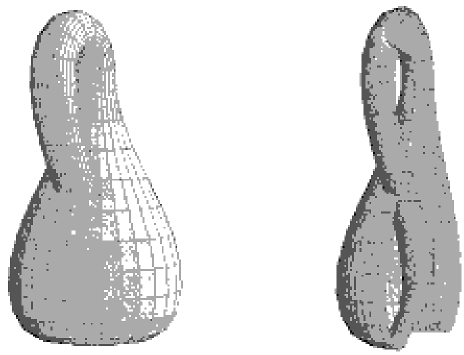


Figura 9.17: La botella de Klein representada como subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Observemos que dicha figura no es homeomorfa a la botella de Klein ya que la figura se autointerseca y se pierde la inyectividad

1. (reflexiva) xRx para todo $x \in X$.
2. (simétrica) Si xRy entonces yRx.
3. (transitiva) Si xRy e yRz, entonces xRz.

Si $x \in X$, definimos la clase de equivalencia de x como el subconjunto

$$[x] = \{y \in X : xRy\}.$$

Algunos ejemplos de relaciones de equivalencia son los siguientes:

1. En un conjunto X decimos que xRy si $x = y$. Para cada $x \in X$, $[x] = \{x\}$. Observemos que en este caso, $\mathcal{R} = \{(x,x) : x \in X\}$. Esta relación es la más pequeña posible, respecto de la inclusión, que hay en el conjunto X.
2. En un conjunto X se define R diciendo que dos elementos de X siempre están relacionados. En este caso, $\mathcal{R} = X \times X$ y es la relación de equivalencia más grande que hay en X. Si $x \in X$, entonces $[x] = X$.
3. Sea X un conjunto y A un subconjunto suyo. Si $x, y \in X$, decimos que xRy si $x, y \in A$. Las clases de equivalencia son:

$$[x] = \begin{cases} A & \text{si } x \in A \\ \{x\} & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

El conjunto cociente se denota por X/A.

4. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $m \in \mathbb{Z}$ un número fijo. Si $x, y \in \mathbb{R}$, definimos
$$xRy \text{ si existe } k \in \mathbb{Z} : x - y = km.$$
Si $x \in \mathbb{R}$, entonces
$$[x] = \{x + km : k \in \mathbb{Z}\} = x + m\mathbb{Z}.$$

5. Sean dos conjuntos X e Y con sendas relaciones de equivalencia R y S respectivamente. En el conjunto $X \times Y$ se define la relación de equivalencia T como
$$(x, y)T(x', y') \Longleftrightarrow xRx',\ ySy'.$$
Observemos que $R \times S \neq T$, ya que ambos conjuntos son subconjuntos de diferentes conjuntos: el primero, de $(X \times X) \times (Y \times Y)$ y el segundo de $(X \times Y) \times (X \times Y)$. Sin embargo, haciendo la identificación natural
$$((x, x'), (y, y')) \longmapsto ((x, y), (x', y')),$$
entonces
$$((x, x'), (y, y')) \in R \times S \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x, x') \in R \\ (y, y') \in S \end{array} \right. ,$$
es decir, $(x, y)T(x', y')$. Por otro lado, es fácil comprobar que
$$[x] \times [y] = [(x, y)].$$

Definición 9.6.2. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto X. Se define el conjunto cociente de X respecto de la relación R al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia y se denota por X/R. Se define la aplicación proyección como
$$p : X \to \frac{X}{R},\quad p(x) = [x].$$

Demostramos ahora algunas propiedades de las clases de equivalencia.

Proposición 9.6.3. *Sea R una relación de equivalencia en un conjunto X.*

1. *Para cada $x \in X$, $x \in [x]$.*
2. *Sean $x, y \in X$. Entonces $[x] = [y]$ si y sólamente xRy.*

3. *Sean $x, y \in X$. Entonces $[x] \cap [y] = \emptyset$ si y sólamente x no está relacionado con y.*

4. *Sean $x, y \in X$. Entonces $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ si y sólamente $[x] = [y]$.*

Demostración. 1. Ya que xRx por la propiedad reflexiva, entonces $x \in [x]$.

2. Supongamos $[x] = [y]$. En particular, $x \in [x] = [y]$, es decir, xRy. Recíprocamente, supongamos que xRy y sea $z \in [x]$. Entonces zRx. Por tanto, zRy, es decir $z \in [y]$. Esto prueba la inclusión $[x] \subset [y]$. De la misma forma se prueba la otra inclusión.

3. Supongamos que $[x] \cap [y] = \emptyset$. Si xRy, ya hemos probado que $[x] = [y]$: contradicción. Supongamos ahora que x no está relacionado con y. Si existiera $z \in [x] \cap [y]$, entonces zRx y zRy y por la propiedad transitiva, xRy: contradicción.

4. Es consecuencia de las dos propiedades previas.

$\square$

Corolario 9.6.4. *Si R es una relación de equivalencia en un conjunto X, entonces las clases de equivalencia forman una partición de X.*

Es cierto el recíproco de este resultado en el siguiente sentido.

Proposición 9.6.5. *Sea $\{A_i : i \in I\}$ una partición de un conjunto X, es decir, una familia de subconjuntos con las dos siguientes propiedades:*

1. $\bigcup_{i\in I} A_i = X$.
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$.

Entonces existe una única relación de equivalencia R en X tal que $X/R = \{A_i : i \in I\}$.

Demostración. Se define una relación binaria R por

$$xRy \text{ si existe } i_0 \in I\text{: } x, y \in A_{i_0}.$$

Probamos que R es una relación de equivalencia. Sea $x \in X$. Por la primera propiedad, $x \in A_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$. Por tanto xRx. La propiedad simétrica es evidente. Sean $x, y, z \in X$ tales que xRy e yRz. Entonces existen $i, j \in I$ tales que $x, y \in A_i$ e $y, z \in A_j$. Como $y \in A_i \cap A_j$, entonces $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Por tanto, $i = j$ y de aquí, que $x, z \in A_i$, es decir, xRz.

Es evidente que si $x \in X$, entonces $[x] = A_{i_0}$ donde $i_0 \in I$ es el índice tal que $x \in A_{i_0}$. Esto prueba $X/R = \{A_i : i \in I\}$. Por último, veamos la unicidad. Supongamos que S es una relación de equivalencia tal que $X/S = \{A_i : i \in I\}$. Si $x \in X$, $[x]_S = A_i$ para algún $i \in I$. Por tanto, xSy si y sólamente $y \in [x]_S = A_i$, es decir, $x, y \in A_i$, o lo que es lo mismo, xRy. $\square$

Sean dos conjuntos X e Y y una aplicación $f : X \to Y$. Se define en X la relación de equivalencia R_f como

$$xR_fx' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Teorema 9.6.6 (de isomorfía). *En las condiciones anteriores, existe una aplicación biyectiva $\tilde{f} : X/R \to f(X)$ tal que $i \circ \tilde{f} \circ p = f$, donde $i : f(X) \hookrightarrow Y$ es la aplicación inclusión.*

Observemos que p es una aplicación sobreyectiva y que i es inyectiva.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\
X/R \arrow[r, "\tilde{f}"] & f(X) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Figura 9.18: El diagrama conmutativo del teorema de isomorfía

Demostración. Definimos $\tilde{f}$ como

$$\tilde{f} : \frac{X}{R} \to f(X), \quad \tilde{f}([x]) = f(x).$$

Esta 'definición' tiene el siguiente problema: dado $[x]$, que es un subconjunto de X, se ha tomado el elemento x, y se ha 'definido' $\tilde{f}([x])$ como $f(x)$. Pero si tomamos otro elemento de $[x]$, llámese y, entonces tendríamos $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([y]) = f(y)$. Tenemos que asegurarnos que $f(x) = f(y)$. Este problema se lee también como que "hay que probar que $\tilde{f}$ está bien definida". Supongamos, pues, que $y \in [x]$. Entonces xR_fy, es decir, $f(x) = f(y)$ y por tanto $\tilde{f}$ está bien definida.

Veamos ahora que $\tilde{f}$ es una aplicación biyectiva. La sobreyectividad es evidente. Sea ahora $[x], [y]$ tales que $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([y])$. Entonces $f(x) = f(y)$, es decir, $xR_f y$ y por tanto, $[x] = [y]$.

Por último, la igualdad $i \circ \tilde{f} \circ p = f$ es trivial por la propia definición de $\tilde{f}$.

□

Teorema 9.6.7. *Sean dos conjuntos X e Y con relaciones de equivalencia R y S respectivamente, y $f : X \to Y$ una aplicación compatible con las relaciones R y S, es decir,*

$$xRx' \Longrightarrow f(x)Sf(x').$$

Entonces existe una aplicación

$$\tilde{f} : \frac{X}{R} \to \frac{Y}{S}$$

tal que $p' \circ \tilde{f} \circ p = f$, donde $p : X \to X/R$ y $p' : Y \to Y/S$ son las correspondientes aplicaciones proyecciones en los conjuntos cocientes.

Si la aplicación f satisface también la propiedad

$$f(x)Sf(x') \Longrightarrow xRx' \tag{9.6}$$

entonces $\tilde{f}$ es una aplicación inyectiva.

Demostración. Se define

$$\tilde{f} : \frac{X}{R} \to \frac{Y}{S}, \quad \tilde{f}([x]) = [f(x)].$$

Esta aplicación está 'bien definida', ya que si $x' \in [x]$, entonces xRx'. Por tanto, $f(x)Sf(x')$, es decir, $[f(x)] = [f(x')]$. La composición $p' \circ \tilde{f} \circ p = f$ es evidente.

Si además es cierto (9.6), probamos que $\tilde{f}$ es inyectiva. Sean $[x], [x'] \in X/R$ tal que $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([x'])$, es decir, $[f(x)] = [f(x')]$. Esto quiere decir que $f(x)Sf(x')$. Por la propiedad (9.6), xRx', es decir, $[x] = [x']$, probando la inyectividad de $\tilde{f}$.

□

9.7. Ejercicios

1. Sea R una relación de equivalencia en un espacio topológico (X,τ) y sea la aplicación proyección $p:(X,\tau)\to(X/R,\tau/R)$. Probar:

   a) La aplicación p es abierta si y sólamente si $R[O]\in\tau$ para todo $O\in\tau$.

   b) La aplicación p es cerrada si y sólamente si $R[F]\in\mathcal{F}$ para todo $F\in\mathcal{F}$.

2. Obtener el cono $z^2 = x^2+y^2$ como cociente del cilindro $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$.

3. Obtener $\mathbb{S}^2$ como cociente del cilindro $\mathbb{S}^1\times[-1,1]$.

4. En $\mathbb{R}^2$ se define la siguiente relación de equivalencia:

$$(t,s)\ R\ (t',s')\Longleftrightarrow t-t'\in\mathbb{Z}\ \text{ y } s=s'.$$

   Probar que el espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$.

5. En $[0,1]\times\mathbb{R}$ se considera la relación que identifica los puntos con las mismas ordenadas de las rectas $x=0$ y $x=1$. Probar que el espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$.

6. Se define la aplicación $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ como

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

   Probar que el único entorno de 0 en la topología final $([-1,1],\tau(f))$ es todo el intervalo $[-1,1]$.

7. En $\mathbb{R}$ se considera la relación de equivalencia R dada por

$$xRy\Leftrightarrow\begin{cases} x=y, \text{ ó}\\ x,y\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

   Probar que el espacio cociente no es regular.

8. Sea (X,τ) un espacio topológico T_4 y R una relación de equivalencia. Si la proyección $p:X\to X/R$ es abierta y cerrada, probar que X/R también es T_4.

9. Sea un homeomorfismo $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ tal que $f\circ f=1_X$. Supongamos que X es un espacio regular. Se define la siguiente relación de equivalencia:

$$x\ R\ y\Leftrightarrow\begin{cases} x=y, \text{ ó}\\ f(x)=y\end{cases}$$

Probar que X/R es regular. Deducir que $\mathbb{RP}^n$ es regular.

10. Consideramos el intervalo $X = [-1, 1]$ y R la relación de equivalencia determinada por la partición:

$$\{-1\} \cup \{1\} \cup \{\{x, -x\} : x \in (-1, 1)\}.$$

Probar que X/R es T_1 pero no es Hausdorff.

11. Sea (X, τ) un espacio topológico e $Y = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$. En Y se define la relación de equivalencia

$$(x, t)R(x', t') \Leftrightarrow x = x'.$$

Probar que $Y/R \cong X$.

12. Sea $A \subset X$ un conjunto cerrado. Si X es regular (resp. normal), probar que X/A es Hausdorff (resp. normal).

13. Sea $X = [-1, 2]$ y $A = [-1, 0] \cup [1, 2]$. Probar que X/A es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

14. Sea $X = [0, 2]$ y $A = \{0, 1, 2\}$. Probar que X/A es homeomorfo a $C_1 \cup C_{-1}$, donde $C_1, C_{-1} \subset \mathbb{R}^2$ son las circunferencias de radio 1 centradas en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ respectivamente.

15. Probar que la aplicación proyección $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ no es cerrada.

16. Se define en $\mathbb{R}^2$ la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow {x_1}^2 + {y_1}^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2.$$

Probar que el espacio cociente es homeomorfo a $[0, \infty)$.

17. Se define en $\mathbb{R}^2$ la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow {x_1}^2 + y_1 = {x_2}^2 + y_2.$$

Identificar el espacio cociente con algún espacio conocido. Hacer lo mismo, pero poniendo $x_1^3 + y_1 = x_2^3 + y_2$.

18. Probar que la aplicación

$$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^6, \quad f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$$

induce un embebimiento del plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ en un espacio euclídeo de dimensión 5.

19. Una aplicación continua $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ se dice que es una curva cerrada si existe $T > 0$ tal que $\alpha(t + T) = \alpha(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si además α es inyectiva en $[0, T)$ se dice que α es simple. Probar que si α es cerrada, $\alpha(\mathbb{R})$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y si además es simple, entonces $\alpha(\mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

20. En $\mathbb{R}$ se define la relación de equivalencia

$$xRy \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y, \text{ ó} \\ x, y \text{ son enteros pares, ó} \\ x, y \text{ son enteros impares.} \end{cases}$$

Estudiar la conexión y compacidad del espacio cociente.

21. Sea $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Se define la relación de equivalencia R_a dada por

$$xR_ay \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } y = x + na.$$

Sea C_a el espacio cociente. Probar que si a y b son dos vectores no nulos, entonces $C_a \simeq C_b$ son homeomorfos. Probar que la proyección de $\mathbb{R}^2$ sobre el cociente C_a es abierta ¿A qué espacio conocido es homeomorfo C_a?

22. Sea $X = \{0\} \times [0, 1]$ e $Y = \{1\} \times [0, 1]$. Identificamos $(0, 0)$ con $(1, 0)$ y $(0, 1)$ con $(1, 1)$. Probar que el espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

23. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Se define la relación de equivalencia $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ si son iguales o

$$\left|\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right| = 1, \qquad (x_2, y_2) = \lambda(x_1, y_1), \lambda > 0.$$

Probar que el espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

24. En $\mathbb{R}$ se considera la relación de equivalencia

$$xRy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, & \text{ó} \\ \exists n \in \mathbb{Z}, x, y \in [2n, 2n + 1] \end{cases}$$

Probar que $\mathbb{R}/R$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

25. Sea el cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0, \infty)$ y $A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Probar que $\mathbb{S}^1 \times [0, \infty)/A$ es homeomorfo al semicono $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$.

Capítulo 10

Espacio homogéneo

Una familia interesante de espacios topológicos que apareció en la sección 5.4 es la formada por los grupos topológicos. La importancia de estos espacios se debe a la riqueza de propiedades que poseen gracias a que su estructura de grupo es compatible con la topología subyacente. También se definió la acción topológica de un grupo sobre un espacio topológico, y veremos que toda acción induce un conjunto cociente. Una vez que hemos definido en el capítulo anterior la topología cociente, estamos ahora en condiciones de profundizar más en el estudio topológico de dichas acciones.

En este capítulo se va a hacer un estudio de los grupos topológicos cocientes y se analizarán las acciones topológicas, en particular, la de ciertos espacios de matrices sobre espacios euclídeos y esferas. Para finalizar el capítulo, y como consecuencia de este estudio, obtendremos resultados que caracterizan la conexión del grupo ortogonal $O(n)$ y del grupo lineal general $Gl(n, \mathbb{R})$. A lo largo del capítulo iremos recordando los conceptos algebraicos necesarios para el desarrollo del mismo.

10.1. Grupo cociente

Sea G un grupo y $H < G$ un subgrupo de G. Definimos en G la relación de equivalencia R_H dada por

$$x\, R_H y \Longleftrightarrow x^{-1}y \in H.$$

El correspondiente conjunto cociente lo denotamos por G/H. La clase de equivalencia de un elemento $x \in G$, $[x]$, coincide con el conjunto $xH = \{xh : h \in H\}$.

Definición 10.1.1. Un espacio homogéneo $(G/H, \tau/H)$ es un espacio to pológico, donde G es un grupo, $H < G$ es un subgrupo suyo, la relación d equivalencia es R_H y τ/H es la topología cociente correspondiente a est relación.

Estudiamos en primer lugar los espacios cocientes G/H donde H es u subgrupo trivial.

1. Si $H = \{e\}$ es el elemento neutro, la relación de equivalencia R_H e la igualdad, el conjunto cociente es G y la topología cociente es l topología de G.

2. Si $H = G$, todos los elementos de G están relacionados, luego $G/$ posee un único elemento y la topología cociente es la topología trivia

El primer ejemplo que muestra cómo la estructura algebraica influye e las propiedades topológicas que tiene un espacio homogéneo lo encontram en la aplicación proyección sobre el espacio cociente.

Teorema 10.1.2. *Sea (G, τ) un grupo topológico y $H < G$. Entonces aplicación proyección $p : (G, \tau) \to (G/H, \tau/H)$ es abierta. En particular, es una identificación.*

Demostración. Sea $O \in \tau$. Entonces $p(O) \in \tau/H$ si $p^{-1}(p(O)) \in \tau$. Pero

$$p^{-1}(p(O)) = \bigcup_{x \in O} xH = \bigcup_{h \in H} Oh.$$

Cada conjunto Oh es un abierto de G pues $Oh = r_h(O)$, donde r_h es l traslación a derechas a partir de h. Finalmente, $p^{-1}(p(O))$ es un conjun abierto en G ya que es unión de abiertos.

Proposición 10.1.3. *Sean (G, τ) y (G', τ') dos grupos topológicos y $f : G$ - G' un homomorfismo de grupos. Entonces la aplicación f es una identific ción si y sólo si f es abierta, continua y sobreyectiva.*

Demostración. Si f es una identificación, entonces es continua, sobreyecti y $\tau' = \{O' \subset G' : f^{-1}(O') \in \tau\}$. Probamos que f es una aplicación abiert Sea $O \in \tau$. Entonces $f(O) \in \tau'$ si $f^{-1}(f(O)) \in \tau$. Pero usando que f es u homomorfismo de grupos, el conjunto

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(O)) &= \{x \in G : \exists y \in O, f(x) = f(y)\} \\ &= \{x \in G : \exists y \in O, xy^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)\} \\ &= \{x \in G : \exists k \in \mathrm{Ker}(f), k^{-1}x \in O\} \\ &= \bigcup\nolimits_{k \in \mathrm{Ker}(f)} kO, \end{aligned}$$

es abierto en G por ser unión de los conjuntos $kO = l_k(O)$, que son abiertos en G. El recíproco es evidente por la proposición 9.1.12. $\square$

Estudiamos algunas propiedades topológicas de un espacio homogéneo que se obtienen del hecho de que p sea abierta. Primero caracterizamos los entornos en dichos espacios.

Corolario 10.1.4. *Sea $(G/H, \tau/H)$ un espacio homogéneo y $x \in G$. Sean $\mathcal{U}_x$ y $\mathcal{U}_{[x]}$ los sistemas de entornos de x y xH, respectivamente. Entonces*

$$\mathcal{U}_{[x]} = \{p(U) : U \in \mathcal{U}_x\}.$$

Demostración. Probamos la igualdad por doble inclusión. Sea $V \in \mathcal{U}_{[x]}$. Entonces $p^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$ pues p es continua. Llamamos $U = p^{-1}(V)$. Ya que p es sobreyectiva, $V = p(p^{-1}(U)) = p(U)$.

Sea ahora $p(U)$ con $U \in \mathcal{U}_x$. Ya que p es abierta, entonces $p(U) \in \mathcal{U}_{[x]}$ por la proposición 4.3.6. $\square$

Corolario 10.1.5. *Sea (G, τ) un grupo topológico y $H < G$. Si (G, τ) es localmente conexo (resp. localmente compacto), el espacio cociente G/H es localmente conexo (resp. localmente compacto).*

Demostración. Estas dos propiedades locales se conservan por aplicaciones abiertas y continuas gracias a las proposiciones 6.5.7 y 8.4.10. $\square$

Analizamos el axioma de separación Hausdorff en un grupo cociente.

Teorema 10.1.6. *Sea un subgrupo $H < G$ de un grupo topológico (G, τ). Entonces G/H es Hausdorff si y sólo si H es un subconjunto cerrado en G.*

Demostración. Si el espacio topológico G/H es Hausdorff, también es T_1 y por tanto $\{p(e)\}$ es un conjunto cerrado. Por ser p una aplicación continua, $p^{-1}(\{p(e)\}) = H$ es un conjunto cerrado.

Supongamos que H es un conjunto cerrado. Usamos la proposición 9.1.7. Por una parte, la aplicación proyección es abierta por el teorema 10.1.2. Por otra, el conjunto $\mathcal{R} = \{(x,y) \in G \times G : x^{-1}y \in H\}$ es justamente $\psi^{-1}(H)$, donde $\psi : G\times G \to G$ es la aplicación continua $\psi(x,y) = x^{-1}y$. Debido a que H es un conjunto cerrado, $\mathcal{R} = \psi^{-1}(H)$ es cerrado en $G \times G$. □

Volvemos ahora a conceptos algebraicos. Es natural preguntarse si en el cociente G/H existe una operación de forma que sea un grupo. Ya anticipamos que la respuesta es negativa y necesitamos imponer condiciones sobre el subgrupo H. La operación natural a definir sería

$$(xH)(yH) = (xy)H. \tag{10.1}$$

En general, dicha operación no está bien definida pero se tiene la siguiente proposición.

Proposición 10.1.7. *Si $H \lhd G$ es un subgrupo normal de un grupo G, entonces la operación* (10.1) *convierte a G/H en un grupo.*

Un ejemplo de esta situación sucede cuando G es un grupo abeliano ya que todo subgrupo es normal, o cuando H es el núcleo de un homomorfismo de grupos definido en G.

Una vez definido el grupo cociente, es natural preguntarnos si G/H es un grupo topológico si en G tenemos una topología τ.

Proposición 10.1.8. *Si $H \lhd G$ un subgrupo normal de un grupo topológico (G,τ), entonces $(G/H, \tau/H)$ es un grupo topológico.*

Demostración. La prueba pasa por probar que la aplicación

$$\alpha : \frac{G}{H} \times \frac{G}{H} \to \frac{G}{H}, \quad \alpha(xH, yH) = (x^{-1}y)H$$

es continua. Sea $\psi : G \times G \to G$ la aplicación continua dada por $\psi(x,y) = x^{-1}y$. Por el esquema conmutativo de la figura 10.1, la aplicación $\alpha \circ (p \times p)$ es continua. Probamos ahora que α es continua. Sea $\tilde{O} \in \tau/H$. Entonces $(\alpha \circ (p\times p))^{-1}(\tilde{O}) \in \tau \times \tau$, es decir $(p\times p)^{-1}(\alpha^{-1}(\tilde{O})) \in \tau\times\tau$. Ya que p es una aplicación abierta, $p \times p$ también es abierta por el ejercicio 10 de la sección 5.5. Usando ahora que $p \times p$ es sobreyectiva y abierta, tenemos

$$(p\times p)\left((p\times p)^{-1}(\alpha^{-1}(\tilde{O}))\right) = \alpha^{-1}(\tilde{O}) \in \frac{\tau}{H} \times \frac{\tau}{H},$$

es decir, α es continua. □

$$
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p \times p"] & G \arrow[d, "p"] \\
\frac{G}{H} \times \frac{G}{H} \arrow[r, "\alpha"] & \frac{G}{H}
\end{tikzcd}
$$

Figura 10.1: Demostración de la proposición 10.1.8

Un teorema importante en la teoría de grupos es el primer teorema de isomorfía y que se enuncia del siguiente modo. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos sobreyectivo y sea $\mathrm{Ker}(f)$ su núcleo. Entonces f induce un isomorfismo $\tilde{f} : G/\mathrm{Ker}(f) \to G'$. Observemos que $\mathrm{Ker}(f)$ siempre es un subgrupo normal de G, luego $G/\mathrm{Ker}(f)$ es un grupo topológico.

Es natural preguntarse qué ocurre cuando el grupo G es, además, un grupo topológico y la aplicación f es continua. Se tiene entonces el siguiente teorema, que es una versión topológica del primer teorema de isomorfía y por ello mantenemos el mismo nombre.

Teorema 10.1.9 (Primer teorema de isomorfía). *Sean (G, τ) y (G', τ') dos grupos topológicos y $f : G \to G'$ un homomorfismo continuo de grupos y sobreyectivo. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La aplicación f es abierta.*
2. *El espacio $(G/Ker(f), \tau/Ker(f))$ es homeomorfo a G'.*

Demostración. Sean $x, y \in G$ tales que $xR_f y$. Entonces $f(x) = f(y)$ y por ser f un homomorfismo de grupos, $x^{-1}y \in \mathrm{Ker}(f)$, es decir, $xR_{\mathrm{Ker}(f)}y$. Por tanto la relación $R_f = R_{\mathrm{Ker}(f)}$.

El hecho de que $\tilde{f}$ sea un homeomorfismo es equivalente a que f sea una identificación. Por la proposición 10.1.3, la aplicación f es una identificación si y sólo si f es abierta. $\square$

EJEMPLO 10.1.10. Consideramos $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ el plano complejo menos el origen como grupo multiplicativo y la circunferencia $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ como subgrupo suyo (ejemplo 5.4.3). Demostramos que

$$\frac{\mathbb{C}\setminus\{0\}}{\mathbb{S}^1}\cong(0,\infty).$$

Si $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, su clase de equivalencia es $z\mathbb{S}^1$, es decir, la circunferencia centrada en el origen y de radio $|z|$. En cualquier semirrecta que sale del origen, se puede encontrar un único representante de cada clase de equivalencia. Esto da pie a definir la aplicación

$$f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to(0,\infty),\quad f(z)=|z|.$$

Consideramos $(0,\infty)$ como grupo multiplicativo, lo que implica que f sea un homomorfismo de grupos pues

$$f(z_1z_2)=|z_1z_2|=|z_1||z_2|=f(z_1)f(z_2).$$

Por otra parte es evidente que f es sobreyectiva y continua y su núcleo es

$$\mathrm{Ker}(f)=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:f(z)=1\}=\mathbb{S}^1.$$

Probamos que la aplicación f es abierta. Para ello, usando el teorema 4.3.7 y las traslaciones del grupo, basta con probar que la imagen de una base de entornos abiertos del elemento neutro son conjuntos abiertos. El elemento neutro de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ es $z=1$ y tomamos como base de entornos abiertos $\beta_1=\{B_r(1):0<r<1\}$. Es evidente que para todo $r<1$,

$$f(B_r(1))=(1-r,1+r),$$

que es un subconjunto abierto de $(0,\infty)$. Por tanto la aplicación $\tilde{f}$ es un homeomorfismo.

También es posible probar que f es una identificación observando que la aplicación

$$s:(0,\infty)\to\mathbb{C}\setminus\{0\},\quad s(x)=x,$$

es una inversa continua por la derecha de f (comparar con el ejercicio 17 de la sección 9.7).

EJEMPLO 10.1.11. Consideramos el grupo aditivo $(\mathbb{R},+)$ y $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ el subgrupo de los números enteros. Probamos que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Se define

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1,\quad f(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t)).$$

Si vemos la circunferencia $\mathbb{S}^1$ como subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, esta aplicación es un homomorfismo de grupos. Para ello basta escribir en notación compleja $(\cos(t),\sin(t))\in\mathbb{S}^1$ como e^{it}, donde i es el número complejo tal que $i^2=-1$. Entonces $f(t)=e^{2\pi it}$ y así

$$f(t+s)=e^{2\pi i(t+s)}=e^{2\pi it}e^{2\pi is}=f(t)f(s).$$

Por otra parte,

$$\operatorname{Ker}(f) = \{t \in \mathbb{R} : \cos(2\pi t) = 1, \sin(2\pi t) = 0\} = \mathbb{Z}.$$

Por el ejemplo 9.2.5, f es una aplicación abierta y por tanto $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Si realizamos n veces el producto cartesiano de f, y como el producto de homomorfismos de grupos es un homomorfismo y el producto de aplicaciones abiertas es una aplicación abierta, se deduce que

$$\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \times \overset{n}{\cdots} \times \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1 \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{S}^1$$

y así el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ es un grupo topológico. Esto generaliza el resultado probado en el corolario 5.4.8.

El primer teorema de isomorfía identifica un espacio cociente con un grupo topológico. Sin embargo, un espacio homogéneo no tiene porqué ser un grupo topológico. A pesar de ello, es posible usar resultados sobre espacios cocientes para identificar cocientes de grupos. A continuación mostramos un ejemplo con el grupo ortogonal.

Sea $O(n+1)$ el grupo ortogonal

$$O(n+1) = \{A \in \mathrm{gl}(n+1, \mathbb{R}) : AA^t = A^t A = I\}.$$

Consideramos $O(n+1)$ como subgrupo del grupo multiplicativo $Gl(n+1, \mathbb{R})$. Por el corolario 8.2.5, $O(n+1)$ es compacto. Se considera el subgrupo

$$H = \left\{ A \in O(n+1) : A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},\ B \in O(n) \right\}. \tag{10.2}$$

Demostramos que H es homeomorfo a $O(n)$. Para ello basta con probar que la aplicación

$$q : O(n) \to O(n+1), \quad q(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

es un embebimiento. Efectivamente, en primer lugar, q está bien definida, es decir, $q(B) \in O(n+1)$. También es evidente que q es inyectiva. Para probar que q es continua usamos la proposición 4.2.5 y componemos con las proyecciones $p'_{ij} : gl(n+1, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Entonces $p'_{ij} \circ q$ es constante o es una proyección $p_{kl} : O(n) \to \mathbb{R}$. Finalmente, el dominio de q es un espacio compacto y el codominio es Hausdorff, luego q es cerrada. Como la imagen de q es H, $q : O(n) \to H$ es un homeomorfismo.

Nota 10.1.12. Observemos que la aplicación q no es más que un embebimiento de un espacio X en un espacio producto $X\times Y$ del tipo $X\cong X\times\{a_2\}$, donde $a_2\in Y$ es un elemento fijo. Para ello consideramos $O(n)\subset\mathbb{R}^{n^2}$. Si llamamos $m=n^2$ y $k=(n+1)^2-n^2=2n+1$, entonces q puede verse como una aplicación
$$q:O(n)\subset\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}^{(n+1)^2}$$
del tipo
$$(x_1,\ldots,x_{n^2})\longmapsto(a_1,\ldots,a_k,x_1,\ldots,x_{n^2}),$$
donde $k=2n+1$, salvo que ahora el vector $(a_1,\ldots,a_k)\in\mathbb{R}^k$ no está en las primeras posiciones del vector correspondiente de $\mathbb{R}^{k+n^2}$, sino que los elementos a_j están intercalados dentro de la $(n+1)^2$-upla.

Teorema 10.1.13. *Para cada $n\geq 1$, tenemos*
$$\frac{O(n+1)}{O(n)}\cong\mathbb{S}^n.$$

Demostración. Definimos la aplicación
$$f:O(n+1)\to\mathbb{S}^n,\quad f(A)=Ax_0,$$
donde $x_0=(1,0,\ldots,0)\in\mathbb{S}^n$ es un punto fijo. Esta aplicación está bien definida pues $|Ax_0|=|x_0|=1$ ya que A conserva los módulos de los vectores.

Probamos que la relación de equivalencia R_f es R_H. Si $A,B\in O(n+1)$ tales que $A\,R_fB$, se deriva que $B^{-1}Ax_0=x_0$. Calculamos las matrices ortogonales de orden $n+1$ que fijan el punto x_0. Sea $C\in O(n+1)$ tal que $Cx_0=x_0$. Si $C=(c_{ij})$, se tiene $c_{21}=\ldots=c_{n+1\,1}=0$ y $c_{11}=1$. Por otra parte, ya que $CC^t=I$, se deduce que $1+c_{12}^2+\ldots+c_{1n+1}^2=1$, de donde $c_{12}=\ldots=c_{1n+1}=0$. Por tanto $C\in H$, siendo H el subgrupo definido en (10.2). Luego $B^{-1}A\in H$, lo que equivale a que $A\,R_HB$. El recíproco es evidente, pues si $\begin{pmatrix}1&0\\0&B\end{pmatrix}\in H$, entonces $\begin{pmatrix}1&0\\0&A\end{pmatrix}x_0=x_0$. Esto permite definir la aplicación
$$\tilde f:\frac{O(n+1)}{O(n)}\to\mathbb{S}^n$$
con la propiedad $\tilde f\circ p=f$. Probamos que $\tilde f$ es un homeomorfismo.

1. La aplicación $\tilde f$ es sobreyectiva. Sea $x\in\mathbb{S}^n$. Consideramos la base usual $B=\{x_0,e_2,\ldots,e_{n+1}\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $B'=\{x,v_2,\ldots,v_{n+1}\}$ una base

ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sea $A \in Gl(n+1,\mathbb{R})$ la matriz de cambio de base de B a B'. Esta matriz es ortogonal pues las bases B y B' son ortonormales y es evidente que $f(A) = Ax_0 = x$.

2. La aplicación f es continua. Dicha aplicación puede verse como la multiplicación de matrices, donde una de éstas es fija. Así, sea

$$P : \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}), \quad P(A,B) = AB.$$

Ya se probó en el ejemplo 5.4.4 que P es continua. Si $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ es fija, se define la aplicación

$$h : \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}), \quad h(A) = (A,B),$$

que es continua. Entonces $f = P \circ h_{|O(n+1)}$, tomando $B = x_0 \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

3. La aplicación f es cerrada pues el dominio es compacto y el codominio es Hausdorff.

□

Corolario 10.1.14. *Para* $n = 1$,

$$\frac{O(2)}{\{-1,1\}} \cong \mathbb{S}^1.$$

Haciendo un razonamiento análogo al teorema anterior, deducimos:

Teorema 10.1.15. *Para* $n \geq 1$, *tenemos*

$$\frac{SO(n+1)}{SO(n)} \cong \mathbb{S}^n.$$

Demostración. La demostración sigue los mismos pasos que los del teorema 10.1.13 , con las siguientes observaciones.

1. El grupo

$$H' = \left\{ A \in SO(n+1) : A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \ B \in SO(n) \right\}$$

es homeomorfo a $SO(n)$.

2. La aplicación f es la misma sin más que considerar $f : SO(n+1) \to \mathbb{S}^n$.

3. Las matrices de $SO(n+1)$ que fijan x_0 son justamente las de H'.
4. La aplicación f es sobreyectiva. Si la matriz A dada en la demostración del teorema 10.1.13 no pertenece a $SO(n+1)$, cambiamos de signo la última columna, obteniendo una matriz de $SO(n+1)$ que lleva x_0 en $x \in \mathbb{S}^n$.

$\square$

10.2. Acción de un grupo sobre un espacio topológico

Sea G un grupo topológico, (X,τ) un espacio topológico y $\Phi : G \times X \to X$ una acción continua. Usamos, como es habitual, la notación gx en vez de $\Phi(g,x)$. Recordemos que en la sección 5.4 se definió el subgrupo de isotropía de $x \in G$, denotado por H_x, y la órbita Gx de $x \in G$. Ahora definimos una relación de equivalencia en X de la siguiente forma:

$$xRy \text{ si } \exists g \in G : gx = y.$$

Observemos que la clase de equivalencia $[x]$ de $x \in G$ no es más que la órbita Gx. Al espacio cociente X/R se llama *espacio de órbitas* y lo denotamos por X/G. La acción se llama *transitiva* si existe una única órbita, es decir, si

$$\forall x, y \in X \ \exists g \in G : gx = y.$$

La cuestión que surge es identificar X/G con algún espacio conocido. Si la acción es transitiva, X/G sólo tiene un elemento y la topología cociente es la topología trivial.

Para cada $g \in G$, se define

$$\Phi_g : X \to X, \quad \Phi_g(x) = gx.$$

Esta aplicación es continua pues $\Phi_g = \Phi \circ \psi$, donde $\psi : X \to G \times X$ está dada por $\psi(x) = (g,x)$. Es evidente que Φ_g es biyectiva y que su inversa es $\Phi_{g^{-1}}$ y por tanto Φ_g es un homeomorfismo.

Ejemplo 10.2.1. Sea un grupo topológico (G,τ) y $H < G$ un subgrupo suyo. Se define la acción

$$\Phi : G \times \frac{G}{H} \to \frac{G}{H}, \quad \Phi(x, yH) = (xy)H.$$

Entonces Φ es una aplicación continua tomando en el conjunto G/H la topología cociente y en $G \times G/H$ la topología producto. Efectivamente, en primer lugar, la aplicación $\Phi \circ (1_G \times p)$ es continua: ya que $\Phi \circ (1_G \times p)(x, y) = (xy)H$, entonces $\Phi \circ (1_G \times p) = p \circ \varphi$, donde $\varphi : G \times G \to G$ es la aplicación dada por $\varphi(x, y) = xy$.

Probamos que Φ es continua. Sea $\tilde{O} \in \tau/H$, entonces $(1_G \times p)^{-1}\Phi^{-1}(\tilde{O}) \in \tau \times \tau$. Gracias a que las aplicaciones 1_G y p son abiertas y sobreyectivas,

$$\Phi^{-1}(\tilde{O}) = (1_G \times p)\left((1_G \times p)^{-1}((\Phi^{-1})(\tilde{O}))\right) \in \tau/H.$$

Teorema 10.2.2. *Sea G un grupo topológico compacto y (X, τ) un espacio topológico Hausdorff. Supongamos que $\Phi : G \times X \to X$ es una acción continua. Si $x \in X$, entonces*

$$\frac{G}{H_x} \cong Gx.$$

Demostración. Se define la aplicación

$$f : G \to X, \quad f(g) = gx$$

1. La aplicación f es continua pues $f = \Phi \circ \psi$, donde $\psi(g) = (g, x)$.
2. La imagen de f es la órbita de x, esto es, Gx.
3. La relación R_f coincide con R_{H_x}: si $g, h \in G$ tales que gR_fh, entonces $g^{-1}h \in H_x$, es decir, $gR_{H_x}h$.
4. La aplicación f es cerrada por ser G compacto y Gx Hausdorff.

Por tanto $f : G \to Gx$ es una identificación y de aquí, $G/H_x \cong Gx$. □

Como consecuencia de este corolario y del teorema 10.1.6, tenemos

Corolario 10.2.3. *Sea $\Phi : G \times X \to X$ una acción continua. Si (X, τ) es T_1, entonces H_x es un subconjunto cerrado en G para $x \in X$.*

Demostración. Por la demostración del resultado anterior, sabemos que la aplicación

$$f : G \to X, \quad f(g) = gx$$

es continua. Ya que $\{x\}$ es un conjunto cerrado en X, $f^{-1}(\{x\}) = H_x$ es cerrado en G. □

Corolario 10.2.4. *Sea $\Phi : G \times X \to X$ una acción continua. Si (X, τ) es Hausdorff, entonces G/H_x es Hausdorff.*

Veamos un ejemplo de cómo se utiliza el teorema 10.2.2.

EJEMPLO 10.2.5. Se hace actuar $O(2)$ sobre $\mathbb{R}^2$ mediante

$$\Phi : O(2) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \Phi(A, x) = Ax.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^2$, es fácil darse cuenta que su órbita es

$$O(2)x = \begin{cases} \{(0,0)\} & x = 0 \\ \mathbb{S}^1(|x|) & x \neq 0, \end{cases}$$

donde $\mathbb{S}^1(|x|)$ es la circunferencia centrada en $(0,0)$ de radio $|x|$. El grupo de isotropía de un punto x es

$$H_x = \{A \in O(2) : Ax = x\} = \{1_{\mathbb{R}^2}, \sigma_x\},$$

donde σ_x es la simetría en $\mathbb{R}^2$ que fija x. Por tanto H_x es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Por otra parte, G es compacto y $\mathbb{R}^2$ es Hausdorff, luego tenemos dos posibilidades:

1. Si $x \neq 0$, $O(2)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{S}^1$. En este caso no es difícil probar de una manera directa que $O(2)/H_x$ es homeomorfo a $SO(2)$. Concretamente, si se define

   $$h : O(2) \to SO(2), \quad h(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \in SO(2) \\ A\sigma_x & \text{si } A \notin SO(2), \end{cases}$$

   entonces h es una identificación y $R_h = R_{H_x}$.
2. Si $x = 0$, $O(2)/O(2) \simeq \{0\}$.
   Para completar este ejemplo, probamos que para el espacio de órbitas tenemos

   $$\frac{\mathbb{R}^2}{O(2)} \simeq [0, \infty).$$

   (ver también el ejercicio 17 de la sección 9.7). Se define la aplicación

   $$f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty), \quad f(x) = |x|.$$

   Esta aplicación es una identificación pues tiene una inversa continua por la derecha, a saber,

   $$s : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2, \quad s(x) = (x, 0).$$

   Luego $\mathbb{R}^2/R_f \cong [0, \infty)$. La relación de equivalencia R_f es la relación que define las órbitas de $\mathbb{R}^2$ y así:

   $$\frac{\mathbb{R}^2}{O(2)} = \frac{\mathbb{R}^2}{R_f} \cong [0, \infty).$$

Corolario 10.2.6. *Sea G un grupo topológico compacto que actúa transitivamente sobre un espacio Hausdorff (X,τ). Entonces para todo $x \in X$ se tiene*

$$\frac{G}{H_x} \simeq X.$$

En particular, (X,τ) es un espacio homogéneo.

El siguiente teorema es una generalización del corolario anterior. La idea es de nuevo probar que la aplicación f es una identificación. En el caso del teorema 10.2.2, las hipótesis de compacidad del grupo y Hausdorff del espacio aseguraban que la aplicación era cerrada. Ahora, con unas hipótesis más débiles, probamos que f es una aplicación abierta.

Teorema 10.2.7. *Sea G un grupo topológico que actúa transitivamente sobre un espacio (X,τ). Supongamos que G y X son localmente compactos. Si G es Lindelöff y X es Hausdorff, entonces para todo $x \in X$,*

$$\frac{G}{H_x} \simeq X$$

Demostración. Probamos que la aplicación $f : G \to X$ del teorema 10.2.2 es abierta. Sea $V \subset G$ un conjunto abierto y probamos que $f(V) \subset \operatorname{int}(f(V))$. Sea $g_0 \in V$. Ya que $g_0^{-1}V \in \mathcal{U}$, usamos la proposición 5.4.11 para encontrar $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^{-1}W \subset g_0^{-1}V$. Utilizando que G es localmente compacto, existe $U \in \mathcal{U}$ compacto tal que $U \subset W$. Por tanto

$$U^{-1}U \subset W^{-1}W \subset g_0^{-1}V.$$

Por otra parte, la familia $\{gU : g \in G\}$ es un recubrimiento por entornos de G. Como G es un espacio Lindelöff, existe un subrecubrimiento numerable $\{g_nU : g_n \in G\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además

$$X = f(G) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(g_nU).$$

Ya que U es compacto, $g_nU = l_{g_n}(U)$ también lo es y así $f(g_nU)$ es compacto por la proposición 8.1.7. Como X es Hausdorff, $f(g_nU)$ es un conjunto cerrado. El corolario 8.4.15 afirma que existe $k \in \mathbb{N}$, $O \in \tau$ con $O \neq \emptyset$ y tal que

$$O \subset f(g_kU) = g_kf(U).$$

Luego $g_k^{-1}O \subset f(U)$. Esto prueba que $\operatorname{int}(f(U)) \neq \emptyset$. Sea $f(h) \in \operatorname{int}(f(U))$ con $h \in U$. Entonces

$$f(g_0) = g_0x = g_0h^{-1}hx \in g_0h^{-1}\operatorname{int}(f(U))$$

El conjunto $g_0h^{-1}(\mathrm{int}(f(U)))$ es un conjunto abierto pues es la imagen del abierto $\mathrm{int}(f(U))$ por el homeomorfismo $l_{g_0h^{-1}}$ y por tanto es un entorno de $f(g_0)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} f(g_0) &\in g_0h^{-1}\mathrm{int}(f(U)) \subset g_0h^{-1}f(U) \\ &\subset f(g_0h^{-1}U) \subset f(g_0U^{-1}U) \subset f(V). \end{aligned}$$

□

El enunciado del teorema se ha establecido para acciones transitivas. Si dicha acción no lo fuera, podemos usar la misma aplicación f para deducir que $G/H_x \cong Gx$ imponiendo la hipótesis de que Gx es Hausdorff y localmente compacto.

10.3. Ejemplos de acciones sobre un espacio topológico

Consideramos $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ el espacio de las matrices cuadradas de orden n, con la topología usual procedente del homeomorfismo natural con el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n^2}$. Recordemos los siguientes subconjuntos suyos:

$$\begin{aligned} Gl(n,\mathbb{R}) &= \{A \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\} \\ Gl^+(n,\mathbb{R}) &= \{A \in Gl(n,\mathbb{R}) : \det(A) > 0\} \\ O(n) &= \{A \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) : AA^t = A^tA = I\} \\ SO(n) &= \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}. \end{aligned}$$

En particular, todos son Hausdorff, ANII y Lindelöff. Por otra parte también son localmente compactos, pues la compacidad local se hereda a conjuntos abiertos o cerrados. De esta forma, podemos aplicar el teorema 10.2.7 a todos estos grupos topológicos.

Ejemplo 10.3.1. Consideramos la acción continua

$$O(n+1) \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \ (A,x) \mapsto Ax.$$

El subgrupo de isotropía de un punto de $\mathbb{S}^n$ es homeomorfo a $O(n)$. Concretamente, si $x_0 = (1,0,\ldots,0)$, el subgrupo de isotropía H_{x_0} coincide con el conjunto H definido en el teorema 10.1.13. Por otra parte, la acción es transitiva ya que es justamente la sobreyectividad de la aplicación f en dicho teorema. Entonces

$$\frac{O(n+1)}{O(n)} \simeq \mathbb{S}^n.$$

De la misma forma, la acción transitiva

$$SO(n+1) \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \ (A, x) \longmapsto Ax$$

produce el homeomorfismo

$$\frac{SO(n+1)}{SO(n)} \cong \mathbb{S}^n.$$

EJEMPLO 10.3.2. Se define la acción de grupos

$$\Phi : O(n+1) \times \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n, \quad \Phi(A, [x]) = [Ax],$$

donde estamos identificando $\mathbb{RP}^n$ con $\mathbb{S}^n/R'$.

Esta acción está bien definida, pues si $x = -y$, $Ax = -Ay$, luego $[Ax] = [Ay]$.

1. La acción es continua. Para ello consideramos la aplicación

   $$1_{O(n+1)} \times p' : O(n+1) \times \mathbb{S}^n \to O(n+1) \times \mathbb{RP}^n,$$

   donde $p' : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ es la proyección sobre el cociente. Entonces $\Phi \circ (1_{O(n+1)} \times p') = p \circ \alpha$, donde

   $$\alpha : O(n+1) \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \quad \alpha(A, x) = Ax.$$

   Ya que $p \circ \alpha$ es continua y $1_{O(n+1)} \times p'$ es sobreyectiva y abierta, entonces Φ es continua.

2. La acción Φ es transitiva. Sea $x_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^n$ y $[x] \in \mathbb{RP}^n$. Del ejemplo 10.3.1 sabemos que existe $A \in O(n+1)$ tal que $Ax_0 = x$. Entonces

   $$\Phi(A, [x]) = [Ax_0] = [x].$$

   Como $O(n+1)$ es compacto y $\mathbb{RP}^n$ es Hausdorff, $\mathbb{RP}^n \cong O(n+1)/H_{[x_0]}$. Por último, hallamos el subgrupo de isotropía $H_{[x_0]}$,

   $$H_{[x_0]} = \{A \in O(n+1) : A[x_0] = [x_0]\}.$$

   Razonando de una forma parecida al teorema 10.1.13, una matriz $A \in H_{[x_0]}$ es de la forma

   $$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

   donde $B \in O(n)$. Entonces $H_{[x_0]} \cong \mathbb{Z}_2 \times O(n)$ como producto topológico, donde $\mathbb{Z}_2$ tiene la topología discreta y el homeomorfismo no es más que

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \longmapsto ([0], B)$$

   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \longmapsto ([1], B).$$

Observemos que estamos usando el teorema 3.1.15 donde los conjuntos

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in O(n)\right\}, \ \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in O(n)\right\}$$

son cerrados en $H_{[x_0]}$ (ver también ejercicio 9 del capítulo 5). Por tanto

$$\mathbb{RP}^n \simeq \frac{O(n+1)}{\mathbb{Z}_2 \times O(n)} \cong \frac{O(n+1)}{O(1) \times O(n)}.$$

Ejemplo 10.3.3. Sea $S(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) : A = A^t\}$ el espacio de las matrices simétricas de orden n. Este conjunto es un subespacio vectorial de $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ de dimensión $n(n+1)/2$. Se considera el subconjunto

$$X = \{M \in S(n,\mathbb{R}) : \mathrm{traza}(M) = 1, M^2 = M\}.$$

Demostramos que X es homeomorfo al espacio proyectivo $\mathbb{RP}^{n-1}$. Para ello se define la acción continua de grupos

$$O(n) \times S(n,\mathbb{R}) \to S(n,\mathbb{R}), \ (A, M) \longmapsto AMA^t.$$

Si consideramos la acción restringida a X, entonces determina una acción $O(n) \times X \to X$ pues si $M \in X$, $AMA^t \in X$. Probamos que esta acción es transitiva. Si $M \in X$, y como es una matriz simétrica, es diagonalizable por matrices ortogonales, es decir, existe $A \in O(n)$ tal que

$$AMA^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Como $AMA^t \in X$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ \ \lambda_i^2 = \lambda_i, 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto hay un valor propio igual a 1 y los demás son cero. Después de un cambio de base ortonormal, existe $A \in O(n)$ tal que

$$(A, M) \longmapsto AMA^t = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Llamamos M_0 a esta última matriz. Esto prueba que la acción es transitiva ya que toda matriz M está relacionada con M_0.

Por otra parte el grupo $O(n)$ es compacto y X es Hausdorff, luego $X \simeq O(n)/H_{M_0}$. Un simple cálculo prueba que el grupo de isotropía de M_0 es

$$H_{M_0} = \left\{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in O(n-1)\right\}.$$

Por tanto H_{M_0} es homeomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times O(n-1)$. Usando el ejemplo 10.3.2.

$$X \cong \frac{O(n)}{O(1) \times O(n-1)} \cong \mathbb{RP}^{n-1},$$

que era el resultado que queríamos probar. En este homeomorfismo vamos a particularizar al caso $n = 3$. Entonces

$$\mathbb{RP}^2 \cong \{A \in S(3, \mathbb{R}) : \text{traza}(A) = 1, A^2 = A\} \subset \mathbb{R}^6,$$

es decir, el plano proyectivo se embebe en $\mathbb{R}^6$ como un espacio de matrices. Consideramos ahora

$$\Pi = \{A \in S(3, \mathbb{R}) : \text{traza}(A) = 1\} = \{A \in S(3, \mathbb{R}) : a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1\},$$

donde $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{ji}$. Como $S(3, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^6$ y el conjunto

$$\{(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}) : a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1\}$$

es un hiperplano de $\mathbb{R}^6$, entonces Π define un hiperplano afín de $\mathbb{R}^6$, luego homeomorfo a $\mathbb{R}^5$ por el teorema 4.2.8. Por tanto el plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ se embebe en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^5$. Por otra parte, y como A es una matriz simétrica,

$$\langle A, A \rangle = \text{traza}(AA) = \text{traza}(A^2) = \text{traza}(A) = 1,$$

luego $|A|^2 = 1$. Entonces $X \subset \mathbb{S}^5 \cap \Pi$. La intersección de la esfera $\mathbb{S}^5 \subset \mathbb{R}^6$ con un hiperplano de $\mathbb{R}^6$ define una esfera de dimensión 4, la cual podemos suponer que es $\mathbb{S}^4$ (ejercicio 28 del capítulo 4).

Como consecuencia del ejemplo anterior, tenemos la siguiente definición.

Definición 10.3.4. El embebimiento de Veronese es el embebimiento de $\mathbb{RP}^2$ en $\mathbb{S}^4$ definido anteriormente.

Observemos que hemos probado que $\mathbb{RP}^2$ es homeomorfo a un espacio homogéneo, en este caso, como cociente del grupo ortogonal. Recordemos también que en el ejemplo 9.3.6 se ha identificado el espacio proyectivo con otros espacios cocientes.

Ejemplo 10.3.5. Consideramos el grupo topológico

$$Gl^+(n+1, \mathbb{R}) = \{A \in Gl(n+1, \mathbb{R}) : \det(A) > 0\}.$$

Se hace actuar este grupo sobre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ de la forma

$$Gl^+(n+1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad (A, x) \longmapsto Ax.$$

Sea $x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Observemos que $Gl^+(n+1, \mathbb{R})$ es un conjunto abierto de $Gl(n+1, \mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ también es un espacio abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Se deriva pues

$$\frac{Gl^+(n+1, \mathbb{R})}{H_{x_0}} \simeq Gl^+(n+1, \mathbb{R})x_0.$$

Usando un argumento como en los ejemplos anteriores, el subgrupo de isotropía de x_0 es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 \ldots a_n \\ 0 & B \end{pmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, B \in Gl^+(n, \mathbb{R}) \right\}$$

y este espacio es homeomorfo al producto topológico $\mathbb{R}^n \times Gl^+(n, \mathbb{R})$.

Demostramos ahora que la órbita de x_0 es todo $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, es decir, la acción es transitiva. Sea $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y sea $B = \{x_0, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ la base usual de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sea $B' = \{x, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ una base de $\mathbb{R}^{n+1}$. Llamamos A la matriz de cambio de base de B a B'. Esta matriz tiene determinante no nulo al ser justamente la matriz de un cambio de base y además, $Ax_0 = x$. Si A tiene determinante positivo, x_0 y x están relacionados. Si el determinante de A fuera negativo, cambiamos de signo el segundo vector de B' y llamamos A' a la nueva matriz. Entonces el determinante de A' es positivo y de nuevo $A'x_0 = x$. Una vez probado la transitividad de la acción, el teorema 10.2.7 asegura

$$\frac{Gl^+(n+1, \mathbb{R})}{\mathbb{R}^n \times Gl^+(n, \mathbb{R})} \cong \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

EJEMPLO 10.3.6. Consideramos el subgrupo de $O(3)$ dado por

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : B \in O(2) \right\}.$$

Este grupo es homeomorfo al grupo ortogonal $O(2)$, luego es compacto. Concretamente G es el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$ que dejan fijo punto a punto el eje z de coordenadas. Se define la acción natural

$$G \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (A, x) \longmapsto Ax.$$

Probamos que el espacio de órbitas es homeomorfo al semiplano cerrado

$$Y = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0\}.$$

Para ello se define la aplicación

$$f : \mathbb{R}^3 \to Y, \quad f(x, y, z) = (0, \sqrt{x^2 + y^2}, z).$$

Esta aplicación es una identificación porque tiene una inversa por la derecha, justamente la inclusión de Y en $\mathbb{R}^3$. Entonces $\mathbb{R}^3/R_f \cong Y$. Por último, veamos que la relación R_f es la relación que define las órbitas de la acción:

$$(x, y, z)R_f(x', y', z') \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2, z = z'.$$

Como los vectores (x, y) y (x', y') tienen el mismo módulo, existe $B \in O(2)$ tal que

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ satisface que $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. El recíproco es evidente. Por tanto

$$\frac{\mathbb{R}^3}{G} \simeq Y.$$

EJEMPLO 10.3.7. Sea el grupo de traslaciones horizontales de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$G = \{T_n : n \in \mathbb{Z}\}, \quad T_n(x, y) = (x, y) + n(1, 0).$$

Observemos que $T_n \circ T_m = T_{n+m}$ y que $(T_n)^{-1} = T_{-n}$. Probamos que el espacio de órbitas es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Basta con escribir la relación de equivalencia. Así $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ si y sólamente si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (n, 0) = (x_1, y_1) + n(1, 0),$$

es decir, la relación de equivalencia del ejercicio 4 de la sección 9.7.

10.4. Conexión de $O(n)$ y $Gl(n, \mathbb{R})$

En esta sección probamos que $O(n)$ y $Gl(n, \mathbb{R})$ son espacios con exactamente dos componentes conexas. Para ello, vamos a hacer uso de ejemplos de la anterior sección.

Teorema 10.4.1. *Sea (G, τ) un grupo topológico y $H < G$. Si H y G/H son conexos, entonces G es conexo.*

Demostración. Supongamos que $G = O_1 \cup O_2$, donde $O_1, O_2 \in \tau$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Ya que $p : G \to G/H$ es una aplicación abierta y sobreyectiva, $G/H = p(O_1) \cup p(O_2)$, con $p(O_1), p(O_2) \in \tau/H$. Probamos que estos dos subconjuntos son disjuntos. Sea $gH \in p(O_1) \cap p(O_2)$. Entonces existen $g_i \in O_i$ tal que $gH = g_1H = g_2H$. Ya que $\{O_1, O_2\}$ es una partición de G,

$$g_1H = (g_1H \cap O_1) \cup (g_1H \cap O_2).$$

Entonces $\{g_1H \cap O_1, g_1H \cap O_2\}$ es una partición por abiertos de g_1H. Como $g_1H \cong H$ y H es conexo, $g_1H \cap O_1 = \emptyset$ o $g_1H \cap O_2 = \emptyset$. Ya que $g_1 \in g_1H \cap O_1$, entonces $g_1H \cap O_2 = \emptyset$, es decir, $g_1H \subset O_1$. De la misma forma se prueba que $g_2H \subset O_2$. Por tanto,

$$gH = g_1H = g_2H \subset O_1 \cap O_2 = \emptyset,$$

lo que es una contradicción.

Finalmente, usando que G/H es conexo, se concluye que $p(O_1) = \emptyset$ o $p(O_2) = \emptyset$ lo que equivale a que $O_1 = \emptyset$ u $O_2 = \emptyset$. □

Corolario 10.4.2. *El grupo especial ortogonal $SO(n)$ es conexo.*

Demostración. Hacemos la demostración por inducción. Recordemos por el teorema 10.1.15 que

$$\mathbb{S}^n \cong \frac{SO(n+1)}{SO(n)}.$$

Para $n = 1$, $SO(1) = \{1\}$, que es evidentemente conexo. Supongamos cierto para n y demostramos que $SO(n+1)$ es conexo. Ya que $SO(n)$ y $SO(n+1)/SO(n) \cong \mathbb{S}^n$ son conexos, el teorema 10.4.1 implica que $SO(n+1)$ es conexo. □

Corolario 10.4.3. *El grupo $Gl^+(n,\mathbb{R})$ es conexo.*

Demostración. La demostración es análoga al corolario previo usando para ello el homeomorfismo

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \frac{Gl^+(n+1,\mathbb{R})}{Gl(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n}$$

del ejemplo 10.3.5. Observemos que $Gl^+(1,\mathbb{R}) = (0,\infty)$ es un espacio conexo y que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es conexo para $n \geq 1$. □

Antes de proseguir, necesitamos conocer algo más sobre la componente conexa del elemento neutro.

Teorema 10.4.4. *Sea (G,τ) un grupo topológico y G_0 la componente conexa del elemento neutro.*

1. *$G_0 \lhd G$ es un subgrupo normal y es un conjunto cerrado.*
2. *Si $g \in G$, entonces la componente conexa de g es $gG_0 = G_0g$.*
3. *Si G es localmente conexo, entonces G/G_0 tiene la topología discreta.*

Demostración. 1. *a*) Sea $g \in G_0$. Entonces $g^{-1}G_0 = l_{g^{-1}}(G_0)$ es conexo y $e \in g^{-1}G_0$, luego $g^{-1}G_0 \subset G_0$. Como consecuencia, $g^{-1} \in G_0$. Hemos probado que $G_0^{-1}G_0 \subset G_0$, es decir, G_0 es un subgrupo de G.

   b) Dado $g \in G$, $g^{-1}G_0 g = (l_{g^{-1}} \circ r_g)(G_0)$. Ya que $l_{g^{-1}} \circ r_g$ es un homeomorfismo y G_0 es la componente conexa del elemento neutro, $g^{-1}G_0 g$ es la componente conexa del elemento neutro, es decir, $g^{-1}G_0 g = G_0$. Esta igualdad quiere decir que G_0 es un subgrupo normal.

   c) Las componentes conexas son cerradas en G, luego G_0 es un subconjunto cerrado de G.

2. Las traslaciones a izquierda y derecha son homeomorfismos y por tanto llevan componentes conexas en componentes conexas. Ya que $l_g(e) = r_g(e)g$ y G_0 es la componente conexa de e, entonces $l_g(G_0) = gG_0 = r_g(G_0) = G_0 g$ es la componente conexa de g.

3. Ya que el espacio es localmente conexo, las componentes conexas son abiertas, luego G_0 es un conjunto abierto. Sea A un subconjunto cualquiera de G/G_0 y probemos que es un conjunto abierto. Entonces

$$p^{-1}(A) = \{g \in G : gG_0 \in A\} = \bigcup_{g \in G} gG_0.$$

Este conjunto es abierto por ser unión de conjuntos abiertos. Como $p^{-1}(A) \in \tau$ y p es abierta, $A = p(p^{-1}(A))$ es abierto.

□

Estamos ahora en condiciones de estudiar la conexión de los grupos topológicos $O(n)$ y $Gl(n, \mathbb{R})$. Recordemos del ejemplo 6.1.4 que estos dos espacios no son conexos.

Teorema 10.4.5. *El grupo ortogonal $O(n)$ tiene dos componentes conexas, a saber, $SO(n)$ y $O^-(n) = \{A \in O(n) : det(A) = -1\}$.*

Demostración. Probamos primero que la componente conexa de la matriz identidad I, que denotamos por $O(n)_I$, es $SO(n)$. Ya se ha probado en el corolario 10.4.2 que $SO(n)$ es conexo y como contiene a la matriz I, $SO(n) \subset O(n)_I$. Consideramos la aplicación determinante $\det : O(n) \to \{-1, 1\}$. Como esta aplicación es continua, $\det(O(n)_I)$ es un conexo de $\{-1, 1\}$ y es justamente $\{1\}$ pues $\det(I) = 1$. Por tanto si $A \in O(n)_I$, $A \in SO(n)$. Esto prueba la otra inclusión $O(n)_I \subset SO(n)$.

Sea ahora $A \in O(n)$. Si $\det(A) = 1$, su componente conexa es $SO(n)$. Si $\det(A) = -1$, el teorema 10.4.4 afirma que la componente conexa que contiene a A es $l_A(SO(n)) = A \cdot SO(n)$. Pero es evidente que si $\det(A) = -1$, entonces

$$A \cdot SO(n) = \{AB : B \in SO(n)\} = O^-(n).$$

□

Con un razonamiento parecido obtenemos:

Teorema 10.4.6. *El espacio $Gl(n, \mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas, a saber, $Gl^+(n, \mathbb{R})$ y $Gl^-(n, \mathbb{R}) = \{A \in gl(n, \mathbb{R}) : det(A) < 0\}$.*

10.5. Ejercicios

1. Sea $H < G$ un subgrupo de un grupo topológico y R y S las relaciones de equivalencias definidas por

$$xRy \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

$$xSy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

   Probar que $(G/H, \tau/R)$ es homeomorfo a $(G/H, \tau/S)$.

2. Sea $G = \{1_{\mathbb{R}^2}, S\}$, donde $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(x, y) = (x, -y)$. Se considera la acción natural de G sobre $\mathbb{R}^2$ dada por

$$G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (g, (x, y)) \longmapsto g(x, y).$$

   Identificar el espacio de órbitas.

3. Sea $G = \{T_a : a \in \mathbb{R}\}$, donde

$$T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_a(x, y) = (x + a, y).$$

   Demostrar que $\mathbb{R}^2/G$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

4. Sea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Se define la acción natural $G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de la forma $(A, x) \longmapsto Ax$. Identificar el espacio de órbitas.

5. Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico y $H < G$ un subgrupo suyo. Entonces G/H tiene la topología discreta si y sólo si $H \in \tau$.

6. Sea $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y

$$\phi_v : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \phi_v(n,p) = p + nv.$$

Probar que ϕ_v define una acción topológica y que el espacio de órbitas es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

7. Se considera en $\mathbb{R}^2$ el grupo generado por $\{T_1, T_2\}$, donde T_1 es la traslación de vector de traslación $(1,0)$ y T_2 la traslación con vector de traslación $(0,1)$. Haciendo actuar este grupo sobre el plano $\mathbb{R}^2$, probar que el espacio de órbitas es el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

8. Sea

$$R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad R(x,y,z) = (x,y,-z)$$

la reflexión respecto del plano $\{z = 0\}$. Se considera el grupo $G = \{1_{\mathbb{R}^3}, R\}$ actuando de forma natural sobre $\mathbb{S}^2$. Probar que el espacio de órbitas es homeomorfo al disco $\mathbb{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

9. Sobre $\mathbb{S}^1$ se hace actuar el grupo generado por la rotación de 180 grados del plano. Probar que el espacio de órbitas es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

10. Se considera $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el giro de 180 grados respecto del eje z y se considera el grupo $G = \{1_{\mathbb{S}^2}, A_{|\mathbb{S}^2}\}$ actuando sobre la esfera $\mathbb{S}^2$. Probar que el espacio de órbitas es homeomorfo al disco $\mathbb{D}^2$.

Capítulo 11

Grupo fundamental

En este capítulo continuamos dando criterios para discernir si dos espacios topológicos son o no homeomorfos. Hemos visto a lo largo de este libro que para demostrar que dos espacios no son homeomorfos es suficiente con encontrar una propiedad topológica que satisfaga uno de los espacios pero no el otro. De esta forma se ha podido demostrar que $[0,1]$ no es homeomorfo a $(0,1)$, o que $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

También se han establecido diferentes invariantes topológicos, como conexión, compacidad, propiedades de separación y numerabilidad, etc, que nos permiten, en la medida de lo posible, tener herramientas suficientes para esta tarea. Podemos afirmar que dicho estudio ha ido encaminado a clasificar los espacios topológicos. Sin embargo ninguna propiedad topológica de las que han aparecido hasta ahora ha podido responder a cuestiones tan simples como saber si $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$ o si la esfera $\mathbb{S}^2$ es homeomorfa al toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

En este último capítulo se estudiará el espacio de lazos de un espacio topológico y que en parte ya fue anunciado en la introducción del libro. Recordemos también que en el capítulo 6 se estableció el concepto de arco como una generalización del concepto de segmento existente en un espacio euclídeo. Nos dedicaremos a dotar de estructura algebraica de grupo a un cierto espacio de arcos definidos en un espacio topológico. El grupo resultante, llamado grupo fundamental, va a ser un invariante topológico en el sentido de que si dos espacios son homeomorfos, sus grupos fundamentales son isomorfos. Esto permitirá ampliar nuestra capacidad de diferenciar espacios topológicos, mostrando la utilidad de los métodos algebraicos en topología. En particular, probaremos que $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^n$ si $n \neq 2$ y que $\mathbb{S}^2 \not\cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Finalmente tenemos que indicar que con este último capítulo nos adentramos en la rama de la topología llamada *topología algebraica*. La topología algebraica introduce las herramientas del álgebra en la topología, permite ampliar las técnicas de ésta y abre el abanico a ser usada en otras ramas de las matemáticas.

11.1. Lazos y homotopías

Definición 11.1.1. Sea (X,τ) un espacio topológico y $x_0, x_1 \in X$. Se considera el conjunto Ω_{x_0,x_1} de arcos que unen x_0 con x_1, es decir,

$$\Omega_{x_0,x_1} = \{\alpha : I \to X : \alpha \text{ es continua }, \alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1\},$$

donde $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Si $\alpha(0) = \alpha(1)$ se dice que α es un lazo con base x_0.

Si $\alpha, \beta \in \Omega_{x_0,x_1}$, se dice que α es homotópico a β, y escribimos $\alpha \sim \beta$, si existe una aplicación continua $F : I \times I \to X$ con las siguientes propiedades

$$F(t,0) = \alpha(t),\ F(t,1) = \beta(t), t \in I,$$

$$F(0,s) = x_0,\ F(1,s) = x_1,\ s \in I.$$

A la aplicación F se llama una homotopía entre α y β.

Observemos que las aplicaciones $F_s : I \to X$, definidas por $F_s(t) = F(t,s)$ son arcos uniendo x_0 con x_1, es decir, $F_s \in \Omega_{x_0,x_1}$ (ver figura 11.1). Además $F_0 = \alpha$ y $F_1 = \beta$. Por tanto, una homotopía entre dos arcos no es más que una deformación continua entre ellos a partir de una familia de arcos con el mismo punto inicial y el mismo punto final.

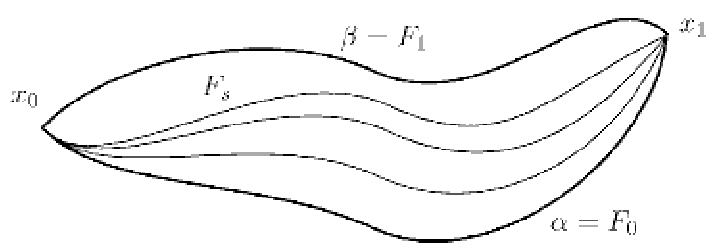


Figura 11.1: Una homotopía F entre el arco α y el arco β

Proposición 11.1.2. *En un espacio topológico (X, τ) y $x_0, x_1 \in X$, la relación "ser homotópico" es una relación de equivalencia en el conjunto Ω_{x_0,x_1}.*

Demostración.

1. La propiedad reflexiva es evidente pues si $\alpha \in \Omega_{x_0,x_1}$, basta con definir la homotopía $F(t,s) = \alpha(t)$, probando que $\alpha \sim \alpha$.

2. Supongamos que $\alpha \sim \beta$ y sea una homotopía $F : I \times I \to X$ entre α y β. Entonces $\beta \sim \alpha$ sin más que definir la homotopía entre β y α como $G(t,s) = F(t, 1-s)$.

3. Sean ahora tres arcos α, β, γ y supongamos que F es una homotopía entre α y β y G una homotopía entre β y γ. Entonces

$$H(t,s) = \begin{cases} F(t, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(t, 2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

   es una homotopía entre α y γ.

□

El conjunto cociente de Ω_{x_0,x_1} por la relación $\sim$ definida anteriormente se denota por $\overline{\Omega}_{x_0,x_1}$. A los elementos de $\overline{\Omega}_{x_0,x_1}$ se llaman *clases de homotopía* y a la clase de un arco α lo notaremos por $[\alpha]$.

Estamos ya en condiciones para hallar las clases de homotopía que existen en un espacio euclídeo. La estructura de espacio afín de $\mathbb{R}^n$ es fundamental para este cálculo.

Proposición 11.1.3. *Sea $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \Omega_{x_0 x_1}$. Entonces α es homotópico al arco β.*

Demostración. Basta con definir la homotopía $F(t,s) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$. □

Por tanto en $\mathbb{R}^n$ todo lazo con base en $x = x_0$ es homotópico al lazo constante $c_{x_0}(t) = x_0$. Observemos que si fijamos t, $F(t,s)$ no es más que una parametrización del segmento $[\alpha(t), \beta(t)]$ que une $\alpha(t)$ con $\beta(t)$. Por tanto si reemplazamos el espacio $\mathbb{R}^n$ por un subconjunto suyo $A \subset \mathbb{R}^n$, la aplicación F no tiene porqué estar definida ya que el segmento con extremos en A puede no estar contenido en dicho conjunto. Por tanto, y con la misma demostración de la proposición anterior, se deduce:

Corolario 11.1.4. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto convexo, entonces todo lazo en A es homotópico al lazo constante.*

Comenzamos ahora con la construcción del grupo fundamental en un espacio topológico y que se desarrollará en varias etapas. Sea $\alpha \in \Omega_{x_0,x_1}$ y $\beta \in \Omega_{x_1,x_2}$. Sabemos del capítulo 6 que podemos definir un arco $\alpha*\beta : I \to X$ mediante

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Recordemos que $\alpha * \beta$ no es más que recorrer a doble velocidad el arco α y a partir del punto $\alpha(1)$, continuar con el arco β. Esta operación $*$ no es asociativa, es decir $\alpha * (\beta * \gamma) \neq (\alpha * \beta) * \gamma$. Sin embargo, sí lo es si pasamos al cociente. Concretamente, definimos

$$* : \overline{\Omega}_{x_0,x_1} \times \overline{\Omega}_{x_1,x_2} \to \overline{\Omega}_{x_0,x_2}$$

$$([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Estudiamos algunas propiedades sobre esta operación $*$. Previamente observamos que la operación $*$ está bien definida. Efectivamente, sean $\alpha_1 \sim \alpha_2 \in \Omega_{x_0,x_1}$ y $\beta_1 \sim \beta_2 \in \Omega_{x_1,x_2}$. Probamos que $\alpha_1 * \beta_1$ es homotópico a $\alpha_2 * \beta_2$. Supongamos primero que $\alpha_1 = \alpha_2$. Si F es una homotopía entre β_1 y β_2, se define $G : I \times I \to X$ como

$$G(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(2t-1,s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces G es una homotopía entre $\alpha*\beta_1$ y $\alpha*\beta_2$, probando que $\alpha*\beta_1 \sim \alpha*\beta_2$.

El caso $\beta_1 = \beta_2$ es análogo al anterior y el caso general se deriva del hecho

$$\alpha_1 * \beta_1 \sim \alpha_1 * \beta_2 \sim \alpha_2 * \beta_2.$$

1. La operación $*$ es asociativa. Sean $\alpha \in \Omega_{x_0,x_1}$, $\beta \in \Omega_{x_1,x_2}$ y $\gamma \in \Omega_{x_2,x_3}$. Probamos que

$$\alpha * (\beta * \gamma) \sim (\alpha * \beta) * \gamma.$$

Tenemos

$$\alpha * (\beta * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$(\alpha * \beta) * \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La homotopía buscada entre $\alpha * (\beta * \gamma)$ y $(\alpha * \beta) * \gamma$ es

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{2-s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{2-s}{4} \\ \beta(4t+s-2) & \text{si } \frac{2-s}{4} \leq t \leq \frac{3-s}{4} \\ \gamma(\frac{4t+s-3}{s+1}) & \text{si } \frac{3-s}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

2. Existen unidades en la operación $*$. Sean c_{x_0} y c_{x_1} los arcos constantes en x_0 y en x_1, respectivamente. Probamos que para todo $\alpha \in \Omega_{x_0,x_1}$,

   $$\alpha \sim \alpha * c_{x_1}, \quad c_{x_0} * \alpha \sim \alpha.$$

   Para la primera igualdad, definimos la siguiente homotopía entre α y $\alpha * c_{x_1}$:

   $$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{2-s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{2-s}{2} \\ x_1 & \text{si } \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

   De la misma forma se prueba que $c_{x_0} * \alpha \sim \alpha$.

3. Existen elementos inversos a izquierda y a derecha, concretamente, si $\alpha \in \Omega_{x_0,x_1}$, entonces

   $$c_{x_0} \sim \alpha * \alpha^{-1}, \quad c_{x_1} \sim \alpha^{-1} * \alpha.$$

   Para probar que $c_{x_0} \sim \alpha * \alpha^{-1}$ se define la homotopía

   $$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(s) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{2-s}{2} \\ \alpha(2-2t) & \text{si } \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

En el caso que $x_0 = x_1 = x_2$, las anteriores propiedades se expresan del siguiente modo:

Proposición 11.1.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $x \in X$. Entonces la operación*

$$* : \overline{\Omega}_{xx} \times \overline{\Omega}_{xx} \to \overline{\Omega}_{xx}$$

dota de estructura de grupo a $\overline{\Omega}_{xx}$. Este grupo se denota por $\pi(X,x)$ y se llama el grupo fundamental de X con base el punto x.

A partir de ahora escribiremos $[\alpha][\beta]$ en vez de $[\alpha] * [\beta]$.

En un espacio topológico hemos asociado un grupo fundamental para todo elemento suyo. Puede suceder que cada uno de estos grupos cambie al cambiar el punto base $x \in X$. Sin embargo, en una gran variedad de espacios topológicos todos estos grupos serán isomorfos, concretamente, para espacios arcoconexos.

Proposición 11.1.6. *Sea (X,τ) un espacio arcoconexo, $x, y \in X$. Entonces los grupos $\pi(X,x)$ y $\pi(X,y)$ son isomorfos.*

Demostración. Ya que el espacio es arcoconexo, existe un arco $\gamma : I \to X$ que une x con y. Se define

$$\phi : \pi(X,x) \to \pi(X,y), \quad \phi([\alpha]) = [\gamma^{-1}][\alpha][\gamma],$$

y probamos que ϕ es un isomorfismo de grupos.

1. La aplicación ϕ es un homomorfismo de grupos pues

$$\phi([\alpha][\beta]) = [\gamma^{-1}][\alpha][\beta][\gamma] = [\gamma^{-1}][\alpha][\gamma][\gamma^{-1}][\beta][\gamma] = \phi([\alpha])\phi([\beta]).$$

2. La aplicación ϕ es biyectiva pues su inversa es

$$\phi^{-1} : \pi(Y,y) \to \pi(X,x), \quad \phi^{-1}([\beta] = [\gamma][\beta][\gamma^{-1}].$$

□

Definición 11.1.7. Sea (X,τ) un espacio topológico arcoconexo. Se llama grupo fundamental de (X,τ) a cualquier grupo $\pi(X,x)$ con $x \in X$ y se denotará por $\pi(X,\tau)$ o simplemente $\pi(X)$.

Desde el punto de vista algebraico, que es el que nos interesa aquí, no existe distinción de dichos grupos $\pi(X,x)$ al ir cambiando el punto base $x \in X$ ya que todos ellos son isomorfos algebraicamente por la proposición 11.1.6.

A partir de ahora supondremos que todos los espacios topológicos que estamos considerando son arcoconexos.

Probamos a continuación que el grupo fundamental se mantiene por homeomorfismos y es justamente esta propiedad la que necesitamos para distinguir espacios topológicos. En un primer momento estudiamos el comportamiento del grupo fundamental respecto de las aplicaciones continuas, probando que toda aplicación continua induce de manera natural un homomorfismo de grupos entre los grupos fundamentales.

Proposición 11.1.8. *Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una aplicación continua entre dos espacios topológicos y $x \in X$. Entonces la aplicación*

$$f_* : \pi(X,x) \to \pi(Y, f(x)), \quad f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

es un homomorfismo de grupos.

Demostración. La aplicación f_* está bien definida, es decir, si $\alpha \sim \beta$, entonces $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$: basta con darse cuenta que si F es una homotopía entre α y β, entonces $f \circ F$ es una homotopía entre $f \circ \alpha$ y $f \circ \beta$.

Por la definición de * se desprende que

$$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)]$$

y

$$f_*([\alpha])f_*([\beta]) = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)].$$

Para finalizar, basta darse cuenta de la igualdad

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta).$$

□

Nota 11.1.9. De la misma forma, observamos que f_* no sólo se define en $\pi(X, x) = \overline{\Omega_{xx}}$ sino también en $\overline{\Omega_{xx'}}$, donde $x, x' \in X$. Así

$$f_* : \overline{\Omega_{xx'}} \to \overline{\Omega_{f(x)f(x')}}, \quad f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

Es fácil probar ahora el siguiente resultado.

Proposición 11.1.10. *1. Si $1_X : (X, \tau) \to (X, \tau)$ es la aplicación identidad, entonces $(1_X)_* = 1_{\pi(X)}$.*

2. Si $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$, $g : (Y, \tau') \to (Z, \tau'')$ son dos aplicaciones continuas, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Teorema 11.1.11. *Sean (X, τ) e (Y, τ') dos espacios topológicos. Si $(X, \tau) \cong (Y, \tau')$ entonces $\pi(X) \cong \pi(Y)$.*

Demostración. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo entre los dos espacios. Entonces $h \circ h^{-1} = 1_Y$ y $h^{-1} \circ h = 1_X$. Por la proposición anterior,

$$(h \circ h^{-1})_* = h_* \circ h_*^{-1} = 1_{\pi(Y)}, \quad (h^{-1} \circ h)_* = h_*^{-1} \circ h_* = 1_{\pi(X)},$$

es decir, h_* es un isomorfismo entre $\pi(X)$ y $\pi(Y)$. □

Definición 11.1.12. Un espacio topológico se llama simplemente conexo si su grupo fundamental es trivial.

Los primeros ejemplos de espacios simplemente conexos son los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Por el corolario 11.1.4, tenemos

Corolario 11.1.13. *Un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo. En particular, el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.*

Corolario 11.1.14. *Un subconjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.*

Demostración. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado respecto de x_0, consideramos el grupo $\pi(A, x_0)$. Si $\alpha \in \Omega_{x_0,x_0}$, definimos

$$F : I \times I \to A, \quad F(t,s) = (1-s)\alpha(t) + sx_0.$$

Observemos que F está bien definida porque $\{F(t,s) : s \in I\}$ es el segmento $[\alpha(t), x_0]$, el cual está incluido en A. Como F es continua, $\alpha(t) = F(t,0) \sim F(t,1) = \epsilon_{x_0}(t)$. $\square$

Otro ejemplo trivial pero útil, es el siguiente:

Corolario 11.1.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico con card$(X) = 1$. Entonces X es simplemente conexo.*

Demostración. Si $X = \{x\}$, el conjunto Ω_{xx} sólo tiene un elemento y lo mismo sucede con $\pi(X, x)$. $\square$

Corolario 11.1.16. *En un espacio simplemente conexo, si $\alpha, \beta \in \Omega_{x_0 x_1}$, entonces $[\alpha] = [\beta]$.*

Demostración. El arco $\alpha * \beta^{-1}$ es un lazo con punto base x_0. Ya que el espacio es simplemente conexo, $[\alpha * \beta^{-1}] = 1$, es decir, $[\alpha][\beta]^{-1} = 1$. $\square$

Hemos probado que el grupo fundamental es un invariante topológico. A la hora de distinguir dos espacios topológicos necesitamos hallar explícitamente el grupo fundamental de ambos. A simple vista este cálculo es difícil y es necesario pues, dar algunas técnicas para ello. En este capítulo se va a calcular el grupo fundamental de la esfera $\mathbb{S}^n$ de dimensión arbitraria. Junto a este cálculo, y el grupo fundamental del espacio euclídeo, se podrá calcular el grupo fundamental de bastantes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

La primera propiedad que se estudiará es el comportamiento del grupo fundamental respecto del producto de espacios topológicos.

Proposición 11.1.17. *Si $(X, \tau), (Y, \tau')$ son dos espacios topológicos, entonces $\pi(X \times Y) \cong \pi(X) \times \pi(Y)$.*

Demostración. Sea $(x, y) \in X \times Y$. Entonces la aplicación

$$\phi : \pi(X \times Y, (x, y)) \to \pi(X, x) \times \pi(Y, y)$$

$$\phi([\alpha]) = ((p_1)_*([\alpha]), (p_2)_*([\alpha]))$$

es el isomorfismo buscado ya que la aplicación inversa es

$$\phi^{-1}([\alpha], [\beta]) = [\alpha \times \beta],$$

donde $(\alpha \times \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. □

Gracias a esta proposición el grupo fundamental del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es producto de los grupos fundamentales de $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{R}$ por un lado y de $\mathbb{S}^1$ por sí mismo respectivamente. Por tanto, por el corolario 11.1.13, $\pi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) = \pi(\mathbb{S}^1)$ y $\pi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \pi(\mathbb{S}^1) \times \pi(\mathbb{S}^1)$. Sin embargo aún no conocemos el grupo fundamental de la circunferencia $\mathbb{S}^1$. La próxima sección está dedicada a calcularlo.

11.2. Grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$

En esta sección nos centramos en el grupo fundamental de la esfera de dimensión más baja, es decir, de la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Para el estudio del grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$, y ya que este espacio es arcoconexo, fijamos el punto $x_0 = (1, 0) = 1$ como origen de los lazos: aquí estamos identificando $\mathbb{R}^2$ con el cuerpo de números complejos $\mathbb{C}$. Probaremos que $\pi(\mathbb{S}^1)$ es $\mathbb{Z}$, asociando a cada lazo de $\mathbb{S}^1$ el número de vueltas que da en la propia circunferencia.

Se define

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad p(t) = e^{2\pi i t} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

donde $i^2 = -1$. Esta aplicación es continua, periódica de periodo 1 y sobreyectiva. También sabemos del ejemplo 10.1.11 que p es un homomorfismo de grupos topológicos considerando en $\mathbb{R}$ la estructura de suma y en $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ la multiplicación de números complejos. Además $\mathrm{Ker}(p) = \mathbb{Z}$.

Proposición 11.2.1 (Levantamiento de lazos). *Sea un arco $\alpha : I \to \mathbb{S}^1$ con $\alpha(0) = 1$. Entonces existe un único arco $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$, tal que $\tilde{\alpha}(0) = 0$ y $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[dr, "p"] & \\
{[0,1]} \arrow[ur, dashed, "\tilde{\alpha}"] \arrow[rr, "\alpha"] & & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

Figura 11.2: Levantamiento de un arco de $\mathbb{S}^1$

Demostración. Ya que el intervalo I es un espacio compacto, α es una aplicación uniformemente continua. Sea $\epsilon = 2$ y $\delta > 0$ tal que si $|t - t'| < \delta$, $|\alpha(t) - \alpha(t')| < 2$. En particular, $\alpha(t) \neq -\alpha(t')$.

Sea el homeomorfismo $p : (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ y $\psi = p^{-1}$. Si $t, t' \in I$, entonces

$$|t - t'| < \delta \to \psi\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(t')}\right) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 1/\delta$ y consideramos $\{0, \frac{1}{N}t, \frac{2}{N}t, \ldots, \frac{N-1}{N}t, t\}$. Ya que $|\frac{j}{N}t - \frac{j-1}{N}t| \leq \frac{1}{N} < \delta$,

$$\psi\left(\frac{\alpha(\frac{j}{N}t)}{\alpha(\frac{j-1}{N}t)}\right) \in \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Definimos para $1 \leq j \leq N$,

$$\tilde{\alpha}_j : I \to \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \tilde{\alpha}_j(t) = \psi\left(\frac{\alpha(\frac{j}{N}t)}{\alpha(\frac{j-1}{N}t)}\right).$$

Debido a que $\mathbb{S}^1$ es un grupo topológico, la aplicación $\tilde{\alpha}_j$ es continua. Además

$$p \circ \tilde{\alpha}_j(t) = \frac{\alpha(\frac{j}{N}t)}{\alpha(\frac{j-1}{N}t)}.$$

Sea $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ la aplicación continua definida por

$$\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}_1(t) + \ldots + \tilde{\alpha}_N(t),$$

que satisface $\tilde{\alpha}(0) = 0$ y

$$p \circ \tilde{\alpha}(t) = (p\tilde{\alpha}_1(t)) \ldots (p\tilde{\alpha}_N(t)) = \frac{\alpha(\frac{t}{N})}{\alpha(0)} \cdots \frac{\alpha(t)}{\alpha(\frac{N-1}{N}t)} = \alpha(t).$$

Para la unicidad, supongamos que $\tilde{\beta}$ es otra aplicación satisfaciendo lo mismo que $\tilde{\alpha}$ y sea $h = \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$. Entonces

$$p \circ h(t) = \frac{p(\tilde{\alpha}(t))}{p(\tilde{\beta}(t))} = 1.$$

Entonces $h(t) \in \mathbb{Z}$, luego $h : I \to \mathbb{Z}$ es una aplicación continua en $\mathbb{Z}$. Como el intervalo I es conexo y $\mathbb{Z}$ tiene la topología discreta, la proposición 6.1.3 implica que h es una aplicación constante. Ya que $h(0) = 0$, entonces $h(t) = 0$, $t \in I$ y $\tilde{\alpha}$ coincide con $\tilde{\beta}$. □

Enunciamos un resultado para homotopías en los mismos términos que para arcos y cuya demostración es análoga.

Proposición 11.2.2 (Levantamiento de homotopías). *Sea una aplicación continua $F : I \times I \to \mathbb{S}^1$ tal que $F(0,0) = 1$. Entonces existe una única aplicación continua $\tilde{F} : I \times I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{F}(0,0) = 0$ y $p \circ \tilde{F} = F$.*

Definición 11.2.3. Sea un lazo $\alpha : I \to \mathbb{S}^1$ con $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$. Se considera el levantamiento $\tilde{\alpha}$ dado por la proposición 11.2.1 con $\tilde{\alpha}(0) = 0$. Llamamos grado de α al número entero

$$d(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}.$$

También se denomina el número de vueltas de α.

Observemos que $p(\tilde{\alpha}(1)) = 1$, luego $\tilde{\alpha}(1) \in \mathrm{Ker}(p) = \mathbb{Z}$. El nombre de número de vueltas se justifica por el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.2.4. Dado $n \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\alpha : I \to \mathbb{S}^1, \quad \alpha(t) = (\cos(2\pi n t), \sin(2\pi n t)).$$

Podemos observar que al recorrer t de 0 a 1, el lazo α da n vueltas (en el sentido contrario a las agujas del reloj si n es positivo y en sentido opuesto si n es negativo). Para este lazo α, el levantamiento $\tilde{\alpha}$ de la proposición 11.2.1 está dado por $\tilde{\alpha}(t) = nt$ ya que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ y $\tilde{\alpha}(0) = 0$. Por tanto $d(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = n$.

Proposición 11.2.5. *Sean α, β dos lazos en $\mathbb{S}^1$ con punto base $x_0 = 1$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *Los arcos α y β son homotópicos.*
2. *$d(\alpha) = d(\beta)$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea una homotopía F entre α y β y sea $\tilde{F}$ el levantamiento de F dado por la proposición 11.2.2. Entonces $p\circ\tilde{F}(t,0)=\alpha(t)$ y $p\circ\tilde{F}(t,1)=\beta(t)$. Además, $p\circ\tilde{F}(0,s)=F(0,s)=1$, luego $\tilde{F}(0,s)\in\mathbb{Z}$. La aplicación

$$I\to\mathbb{Z},\quad s\longmapsto\tilde{F}(0,s)$$

es continua, luego es constante: de nuevo usamos que I es conexo y que $\mathbb{Z}$ tiene la topología discreta. Ya que $\tilde{F}(0,0)=0$, entonces $\tilde{F}(0,s)=\tilde{F}(0,0)=\tilde{\alpha}(0)=0$. Por otra parte $\tilde{F}(t,0)=\tilde{\alpha}(t)$ y $\tilde{F}(t,1)=\tilde{\beta}(t)$ por la unicidad de la proposición 11.2.2. La aplicación

$$I\to\mathbb{R},\quad s\longmapsto\tilde{F}(1,s)$$

es continua con valores en $\mathbb{Z}$, luego también es constante. Por tanto

$$d(\alpha)=\tilde{\alpha}(1)=\tilde{F}(1,0)=\tilde{F}(1,1)=\tilde{\beta}(1)=d(\beta).$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que α,β son dos lazos tales que $d(\alpha)=d(\beta)$. Probamos que $\tilde{\alpha}\sim\tilde{\beta}$. Ya que $\tilde{\alpha}(1)=\tilde{\beta}(1)$, entonces $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son dos arcos en $\mathbb{R}$ que tienen el mismo origen y el mismo final. Por el corolario 11.1.13, $\tilde{\alpha}\sim\tilde{\beta}$, es decir, $[\tilde{\alpha}]=[\tilde{\beta}]$. Usando la proposición 11.1.8, tenemos $[p\circ\tilde{\alpha}]=[p\circ\tilde{\beta}]$. Por tanto, $[\alpha]=[\beta]$. $\square$

Teorema 11.2.6. *El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Se define la aplicación

$$\phi:\pi(\mathbb{S}^1)\to\mathbb{Z},\quad \phi([\alpha])=d(\alpha).$$

Demostramos que esta aplicación es un isomorfismo de grupos. La proposición 11.2.5 asegura que ϕ está bien definida, es decir, $d(\alpha)$ no depende si tomamos otro lazo homotópico a α.

1. La aplicación ϕ es un homomorfismo de grupos. Tenemos

$$\phi([\alpha][\beta])=\phi([\alpha*\beta])=d(\alpha*\beta)=\widetilde{(\alpha*\beta)}(1).$$

Probamos que el levantamiento $\widetilde{(\alpha*\beta)}$ es el arco $\gamma:I\to\mathbb{R}$ dado por

$$\gamma(t)=\begin{cases}\tilde{\alpha}(2t) & \text{si } 0\leq t\leq\frac{1}{2}\\ \tilde{\alpha}(1)+\tilde{\beta}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Esta aplicación es continua. Demostramos que $p \circ \gamma = \alpha * \beta$. Si $0 \leq t \leq 1/2$, $p\tilde{\alpha}(2(t) = \alpha(2t)$. Si $1/2 < t \leq 1$, y usando que $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = 1$, tenemos

$$p(\tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(2t-1)) = p\tilde{\alpha}(1)p(\tilde{\beta}(2t-1)) = p\tilde{\beta}(2t-1) = \beta(2t-1).$$

Además $\gamma(0) = 0$, luego γ es el levantamiento de $\alpha * \beta$ dado por la proposición 11.2.1. Finalmente,

$$d(\alpha * \beta) = \gamma(1) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1) = d(\alpha) + d(\beta).$$

2. La aplicación ϕ es inyectiva por la proposición anterior.

3. La aplicación ϕ es sobreyectiva como consecuencia del ejemplo 11.2.4.

□

A partir del grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$, podemos calcular el grupo fundamental de otros espacios topológicos. Ya que la recta proyectiva $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^1$, concluimos:

Corolario 11.2.7. *El grupo fundamental de la recta proyectiva $\mathbb{RP}^1$ es $\mathbb{Z}$.*

De la proposición 11.1.17 se obtiene la siguiente consecuencia.

Corolario 11.2.8. *1. El grupo fundamental del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es $\mathbb{Z}$.*

2. El grupo fundamental del toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ es $\mathbb{Z}^n$.

Podemos ahora dar respuesta a un problema que se dejó sin resolver en la nota 9.5.3.

Corolario 11.2.9. *El semidisco $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$ no es homeomorfo a la bola $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.*

Demostración. Supongamos que $f : A \to B$ es un homeomorfismo. Entonces $A \setminus \{(0, 0)\} \cong B \setminus \{f(0, 0)\}$. Sin embargo el grupo fundamental de $A \setminus \{(0, 0)\}$ es trivial al ser estrellado desde el punto $(0, 1/2)$, pero el de $B \setminus \{f(0, 0)\}$ es $\mathbb{Z}$ por ser homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. □

Acabamos esta sección con dos aplicaciones del teorema 11.2.6. Un primer resultado es la extensión a dimensión $n = 2$ del teorema del punto fijo (teorema 6.1.15).

Teorema 11.2.10 (del punto fijo). *Sea el disco $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$. Si $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ es una aplicación continua, entonces existe $x \in \mathbb{D}^2$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que para todo $x \in \mathbb{D}^2$, $f(x) \neq x$. Entonces la semirrecta que sale de $f(x)$ y pasa por x interseca a $\mathbb{S}^1$ en un punto que denotamos por $r(x)$. Se define así una aplicación $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$. Esta aplicación es continua, pues el punto de corte es

$$r(x) = f(x) + \lambda(x - f(x)),$$

donde el valor de λ viene dado por la condición de que $|r(x)| = 1$. No es difícil darse cuenta que

$$\lambda = \frac{-\langle f(x), x - f(x)\rangle + \sqrt{\langle f(x), x - f(x)\rangle^2 - |x - f(x)|^2(|f(x)|^2 - 1)}}{|x - f(x)|^2}.$$

Si introducimos este valor de λ en la expresión anterior de $r(x)$, obtenemos $r(x)$ en términos algebraicos de funciones continuas. Si i es la inclusión $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2$, entonces $r \circ i = 1_{\mathbb{S}^1}$. De la proposición 11.1.10, $r_* \circ i_*$ es la identidad, y por tanto, $r_* : \pi(\mathbb{D}^2) \to \pi(\mathbb{S}^1)$ es un epimorfismo. Pero $\pi(\mathbb{D}^2)$ es trivial ya que $\mathbb{D}^2$ es convexo y $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, llegando a una contradicción. □

Si hubiésemos definido $r(x)$ como el punto de intersección de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ con la semirrecta de origen x y que pasa por $f(x)$, entonces no se tendría asegurado que al restringir r a $\mathbb{S}^1$ coincidiera con la identidad.

El siguiente resultado es el teorema fundamental del álgebra y del que hacemos una demostración *topológica*.

Teorema 11.2.11 (fundamental del álgebra). *El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos es algebraicamente cerrado.*

Demostración. Tenemos que probar que todo polinomio complejo $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$, tiene una raíz. Escribimos $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ con $a_i \in \mathbb{C}$ y sin perder generalidad, suponemos que $a_n = 1$. La demostración es por reducción al absurdo y así, suponemos que $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{Z}$. Se define la aplicación

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad H(r, \theta) = \frac{P(re^{i\theta})}{|P(re^{i\theta})|} \frac{|P(r)|}{P(r)},$$

donde estamos escribiendo un número complejo $z \in \mathbb{C}$ como $z = re^{i\theta}$, siendo $r = |z|$ y θ el argumento de z. Esta aplicación H es continua y tiene las siguientes propiedades:

1. $H(0, \theta) = 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$;
2. $H(r, 2k\pi) = 1$ si $k \in \mathbb{Z}$;
3. $\lim_{r\to\infty} H(r, \theta) = e^{in\theta} = (\cos(n\theta), \sin(n\theta))$.

Por tanto la aplicación $F : I \times I \to \mathbb{S}^1$, definida por

$$F(t,s) = \begin{cases} H(\frac{s}{1-s}, 2\pi t) & \text{si } 0 \leq s < 1 \\ e^{2\pi n i t} & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

es continua. Sea $\alpha(t) = F(t, 0)$ y $\beta(t) = F(t, 1)$. Por otra parte, $F(0, s) = F(1, s) = 1$, probando que α y β son dos lazos en $\mathbb{S}^1$ con punto base 1. Ya que F es una homotopía, $\alpha \sim \beta$. Escribimos cómo son α y β:

$$\alpha(t) = F(t, 0) = H(0, 2\pi t) = 1,$$

$$\beta(t) = F(t, 1) = e^{2\pi n i t}.$$

La proposición 11.2.5 implica $d(\alpha) = d(\beta)$. Pero $d(\alpha) = 0$, por ser α un lazo constante, y $d(\beta) = n$ (ejemplo 11.2.4), llegando a un absurdo. □

11.3. Grupo fundamental de $\mathbb{S}^n$

Calculamos el grupo fundamental de la esfera $\mathbb{S}^n$ para $n \geq 2$. Para ello mostraremos una nueva técnica para calcular grupos fundamentales y permitirá probar que $\mathbb{S}^n$, con $n \geq 2$, es simplemente conexo. Además será útil en el cálculo del grupo fundamental de otros espacios (ver ejercicio 6 de la sección 11.7). Previamente damos un lema sobre espacios compactos en $\mathbb{R}^n$.

Lema 11.3.1. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Entonces para todo recubrimiento $\{V_i : i \in I\}$ por abiertos de K existe $\epsilon > 0$, llamado el número de Lebesgue del recubrimiento, tal que para todo $x \in K$, $B_\epsilon(x) \subset V_i$ para algún $i \in I$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un recubrimiento $\{V_i : i \in I\}$ tal que existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ con $B_{1/n}(x_n) \not\subset V_i$ para todo $i \in I$. Como el conjunto K es compacto, el teorema de Bolzano-Weiertrass asegura que existe un punto adherente a la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y que llamamos x. Sea $i_0 \in I$ tal que $x \in V_{i_0}$ y sea $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $B_{1/\nu}(x) \subset V_{i_0}$. Luego para todo $n \geq \nu$, $B_{1/n}(x_n) \not\subset B_{1/\nu}(x)$, es decir, existe $y_n \in K$ con $d(y_n, x_n) < 1/n$ y $d(x, y_n) \geq 1/\nu$. Entonces

$$\frac{1}{\nu} \leq d(x, y_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) < d(x, x_n) + \frac{1}{n}.$$

Como x es adherente a la sucesión, existe una parcial $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$. Entonces

$$\frac{1}{\nu} < d(x, x_{\sigma(n)}) + \frac{1}{\sigma(n)}$$

y al tomar límites concluimos $1/\nu \leq 0$: contradicción. □

A continuación damos la herramienta que nos será útil para calcular el grupo fundamental de la esfera $\mathbb{S}^n$, pero que también se utiliza en una gran variedad de casos.

Teorema 11.3.2 (Seifert-Van Kampen). *Sea (X, τ) un espacio arcoconexo y $O_1, O_2 \in \tau$ tales que $X = O_1 \cup O_2$. Supongamos:*

1. *Los conjuntos O_1, O_2 y $O_1 \cap O_2$ son arcoconexos.*
2. *Los conjuntos O_1 y O_2 son simplemente conexos.*

Entonces (X, τ) es simplemente conexo.

Demostración. Sea $x_0 \in O_1 \cap O_2$ y $\alpha : I \to X$ un lazo con punto base x_0. Entonces $\{\alpha^{-1}(O_1), \alpha^{-1}(O_2)\}$ es un recubrimiento por abiertos de $[0,1]$. Ya que $[0,1]$ es compacto, sea $\epsilon > 0$ el número de Lebesgue de este recubrimiento. Sea $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ con $|t_{j+1} - t_j| < \epsilon$. Entonces $\alpha([t_j, t_{j+1}]) \subset V_j$ donde V_j es O_1 u O_2. Para cada j se define

$$\alpha_j : I \to X, \quad \alpha_j(s) = \alpha((1-s)t_j + st_{j+1}).$$

Esta aplicación es continua y $\alpha_j(0) = \alpha(t_j)$, $\alpha_j(1) = \alpha(t_{j+1})$. Entonces $\alpha_j \in \Omega_{\alpha(t_j),\alpha(t_{j+1})}$. Por otra parte, $\alpha(t_j) \in V_j \cap V_{j-1}$. Esta intersección es O_1, O_2 u $O_1 \cap O_2$. Como los tres son arcoconexos, existe un arco ρ_j en $V_j \cap V_{j-1}$ que une x_0 con $\alpha(t_j)$.

Por una parte, $[\alpha] = [\alpha_0 * \alpha_1 * \ldots * \alpha_{n-1}]$ (ver ejercicio 4 de la sección 11.7). Luego

$$\begin{aligned} [\alpha] &= [\alpha_0][\alpha_1]\ldots[\alpha_{n-1}] = [\alpha_0][\rho_1^{-1}][\rho_1][\alpha_1]\ldots[\rho_{n-1}^{-1}][\rho_{n-1}][\alpha_{n-1}] \\ &= [\alpha_0 * \rho_1^{-1}][\rho_1 * \alpha_1 * \rho_2^{-1}]\ldots[\rho_{n-1} * \alpha_{n-1}]. \end{aligned}$$

Pero $[\rho_j * \alpha_j * \rho_{j+1}^{-1}] = [c_{x_0}]$, pues $\rho_j * \alpha_j * \rho_{j+1}^{-1}$ es un arco en V_j y el espacio V_j es simplemente conexo. Por otra parte,

$$[\alpha_0 * \rho_1^{-1}] = [\rho_{n-1} * \alpha_{n-1}] = [c_{x_0}].$$

Por tanto α es homotópico al arco constante. □

Corolario 11.3.3. *La esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa para $n \geq 2$.*

Demostración. Sean N y S el polo norte y sur de la esfera $\mathbb{S}^n$, respectivamente. Llamamos $O_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ y $O_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Entonces O_1 y O_2 son dos conjuntos abiertos de la esfera que la recubren y además son simplemente conexos al ser homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Por otra parte, $O_1 \cap O_2$ es arcoconexo, pues este conjunto es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con $n \geq 2$. □

De este resultado, junto al corolario 11.2.8, concluimos:

Corolario 11.3.4. *El toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ no es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$.*

11.4. Retracciones

Esta sección está dedicada a proporcionar nuevas técnicas para el cálculo del grupo fundamental. Estas herramientas consisten en 'deformar' el espacio topológico sin alterar el grupo fundamental, aunque ahora estas deformaciones no van a ser homeomorfismos.

Sea $A \subset X$ un subconjunto de un espacio topológico (X, τ). La pregunta que hacemos es de qué forma se puede relacionar $\pi(A)$ con $\pi(X)$, concretamente queremos obtener información de $\pi(X)$ a partir del grupo fundamental de A. En el caso que nos interesa, vamos a estudiar subconjuntos A que tienen la particularidad de que todo el espacio se 'deforma' de forma continua en ellos, de manera que su grupo fundamental coincide con el de X.

Definición 11.4.1. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Una retracción de X en A es una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$, es decir, $r \circ i = 1_A$, donde i es la inclusión de A en X. Se dice que A es un retracto de X.

Se dice que A es un retracto fuerte de deformación si existe una retracción de X en A y existe una aplicación continua $G : X \times I \to X$ tal que

$$G(x, 0) = x, \quad G(x, 1) = r(x), x \in X$$
$$G(a, s) = a, a \in A.$$

A la aplicación G se le llama deformación fuerte.

Si fijamos la primera variable en G, la aplicación

$$G_x : I \to X, \quad G_x(s) = G(x, s)$$

es un arco que une el punto x con el punto de A dado por $r(x)$. Este hecho hace que digamos que estamos deformando X en el conjunto A.

EJEMPLO 11.4.2. Consideramos los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ dados por

$$X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \quad A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}.$$

Entonces A es un retracto fuerte de deformación de X, definiendo

$$r : X \to A, \quad r(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Ver figura 11.3. Esta aplicación es continua y $r(x, y, 0) = (x, y, 0)$ para todo $(x, y, 0) \in A$. Se define $G : X \times I \to X$ como

$$G((x, y, z), s) = (1 - s)(x, y, z) + sr(x, y, z) = (x, y, (1 - s)z).$$

Esta aplicación está bien definida, es decir, $\mathrm{Im}(G) \subset \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ y satisface las propiedades de deformación fuerte. Observemos que si $(x, y, z) \subset X$ es fijo, la aplicación

$$I \to X, \quad s \longmapsto G((x, y, z), s)$$

es un arco que une el punto (x, y, z) con $r(x, y, z) = (x, y, 0)$, concretamente el segmento que une (x, y, z) con $(x, y, 0)$, el cual está contenido en X.

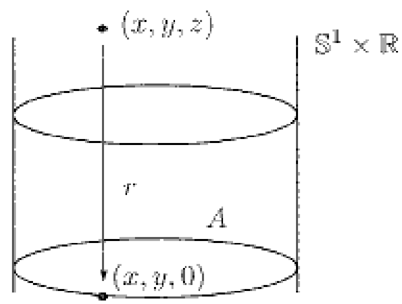


Figura 11.3: La circunferencia $A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ es un retracto fuerte de deformación del cilindro $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$

EJEMPLO 11.4.3. Sean las circunferencias de $\mathbb{R}^2$ dadas por

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + {x_2}^2 = 1\}$$

$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 + 1)^2 + {x_2}^2 = 1\}.$$

Los conjuntos C_1 y C_2 representan dos circunferencias que son tangen-

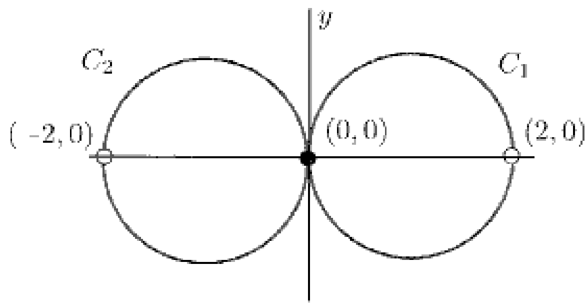


Figura 11.4: El conjunto $(C_1 \cup C_2) \setminus \{(-2,0),(2,0)\}$ tiene como retracto fuerte de deformación el origen de coordenadas

tes exteriormente en el origen de coordenadas. Definimos $X = C_1 \cup C_2 \setminus \{(-2,0),(2,0)\}$. Probamos que el punto $A = \{(0,0)\}$ es un retracto fuerte de deformación de X. Para ello, sea

$$p : (0,1) \to \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}, \quad p(t) = e^{2\pi i t}$$

y sea $\psi = p^{-1}$. Sea también la traslación

$$T_1 : \mathbb{S}^1 \setminus \{1\} \to C_1 \setminus \{(2,0)\}, \quad T_1(x,y) = (x,y) + (1,0).$$

Tanto p como T_1 son homeomorfismos. Se define

$$H : (C_1 \setminus \{(2,0)\}) \times I \to C_1 \setminus \{(2,0)\}$$

$$H(x,s) = (T_1 \circ p)\left((1-s)(\psi \circ T_{-1})(x) + \frac{s}{2}\right)$$

donde T_{-1} es la traslación de vector de traslación $(-1,0)$. Entonces H es una deformación fuerte de $C_1 \setminus \{(2,0)\}$ en el origen.

Análogamente, sean $q : (-1/2, 1/2) \to \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$, $q(t) = e^{2\pi i t}$, $\phi = q^{-1}$ y $T_{-1} : \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\} \to C_2 \setminus \{(-2,0)\}$. Se define

$$F : (C_2 \setminus \{(-2,0)\}) \times I \to C_2 \setminus \{(-2,0)\}$$

$$F(x,s) = (T_{-1} \circ q)((1-s)(\phi \circ T_1)(x) + \frac{s}{2}).$$

Por último, la deformación buscada de X en $(0,0)$ viene dada por $G : X \times I \to X$

$$G(x,s) = \begin{cases} H(x,s) & x \in C_1 \setminus \{(2,0)\} \\ F(x,s) & x \in C_2 \setminus \{(-2,0)\}. \end{cases}$$

Esta aplicación es continua por que está definida de manera continua en dos cerrados de X.

Teorema 11.4.4. *Sea $A \subset X$ un retracto de un espacio topológico (X,τ) y $r : X \to A$ la correspondiente retracción.*

1. *La aplicación $r_* : \pi(X,a) \to \pi(A,a)$ es un epimorfismo e $i_* : \pi(A,a) \to \pi(X,a)$ es un monomorfismo.*
2. *Si A es un retracto fuerte de deformación, entonces i_* es un isomorfismo.*

Demostración. 1. Como $r \circ i = 1_A$, $(r \circ i)_* = 1_{\pi(A)}$. Ya que $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$ es un isomorfismo, entonces r_* es un epimorfismo e i_* es un monomorfismo.

2. Es suficiente con probar que i_* es sobreyectiva. Fijamos $a \in A$. Sea $[\alpha] \in \pi(X,a)$ y $r \circ \alpha : I \to A$. Entonces $r \circ \alpha(0) = r(a) = a$ y $r \circ \alpha(1) = r(a) = a$, luego $[r \circ \alpha] \in \pi(A,a)$. Demostramos que $i_*([r \circ \alpha]) = [\alpha]$. Para ello, se define

$$F : I \times I \to X, \quad F(t,s) = G(\alpha(t),s).$$

Esta aplicación es continua y cumple

$$\begin{array}{l} F(t,0) = G(\alpha(t),0) = r \circ \alpha(t). \\ F(t,1) = G(\alpha(t),1) = \alpha(t). \\ F(0,s) = G(\alpha(0),s) = a = F(1,s). \end{array}$$

Por tanto F es una homotopía entre $r \circ \alpha$ y r y así, $r \circ \alpha \sim \alpha$.

□

Corolario 11.4.5. *Si A es un retracto fuerte de deformación de X, entonces $\pi(X) = \pi(A)$.*

Ya que un espacio topológico de cardinal 1 es simplemente conexo, tenemos:

Corolario 11.4.6. *Si un espacio arcoconexo se deforma fuertemente en un punto, entonces es simplemente conexo.*

Hacemos una nueva demostración del corolario 11.1.14.

Corolario 11.4.7. *Un subconjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.*

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto estrellado y supongamos que $x_0 \in X$ es el punto tal que para todo $x \in X$, $[x_0, x] \subset X$. Se considera la retracción constante $r : X \to \{x_0\}$ y se define

$$G : X \times I \to X, \quad G(x, s) = sx_0 + (1 - s)x.$$

Observemos que $G(x, s) \in X$ porque fijando x, $\{G(x, s) : s \in I\}$ es el segmento $[x_0, x]$, el cual está incluido en X por la propiedad de ser estrellado. Entonces G es una deformación fuerte y por tanto, $A = \{x_0\}$ es un retracto fuerte de deformación de X. Ahora basta usar el corolario anterior. □

Corolario 11.4.8. *El espacio $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es simplemente conexo para $n \geq 3$.*

Demostración. Definimos

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad r(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Esta aplicación es una retracción. Probamos que es una retracción fuerte de deformación. Se define

$$G : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad G(x, s) = (1 - s)x + sr(x).$$

Entonces G es continua, $G(x, 0) = x$, $G(x, 1) = r(x)$ y $G(a, s) = a$, para todo $a \in \mathbb{S}^{n-1}$. Luego $\mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto fuerte de deformación. Aplicando el teorema anterior y el corolario 11.3.3, concluimos

$$\pi(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi(\mathbb{S}^{n-1}) = \{1\}.$$

□

Como $\mathbb{S}^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^n$, obtenemos:

Corolario 11.4.9. *El plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$.*

Un resultado más general afirma que $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ si $n \neq m$, pero se necesitan invariantes topológicos más sofisticados. Esto muestra al lector que, aunque parece intuitivo que $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$, la demostración requiere de una maquinaria topológica y algebraica más fuerte que la que hemos empleado hasta ahora:

Corolario 11.4.10. *La esfera $\mathbb{S}^2$ no es homeomorfa a $\mathbb{S}^n$ para $n \geq 3$.*

Demostración. Si fueran homeomorfos, $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \cong \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$, $p \in \mathbb{S}^n$ y N el polo norte de $\mathbb{S}^2$. Por tanto $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^n$, lo que es una contradicción. □

A continuación retomamos un problema de extensión de aplicaciones continuas que fue planteado al final de la sección 7.4.

Corolario 11.4.11. *La aplicación identidad de $\mathbb{S}^1$ no se extiende a una aplicación continua del disco $\mathbb{D}^2$ a $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. Si dicha extensión existiera, sería una retracción $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ y por tanto, $r_* : \pi(\mathbb{D}^2) \to \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ sería un epimorfismo, lo cual es imposible. □

Del mismo modo tenemos.

Corolario 11.4.12. *Sea (X, τ) un espacio topológico simplemente conexo y $A \subset X$. Si existe una aplicación continua $f : X \to A$ tal que $f(a) = a$ para todo $a \in A$, entonces A es simplemente conexo.*

Para acabar con esta sección, concluimos con una serie de resultados que serán útiles en el cálculo de grupos fundamentales mediante retracciones fuertes de deformación.

Proposición 11.4.13. *Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo entre dos espacios topológicos y sea $A \subset X$ un retracto fuerte de deformación. Entonces $f(A)$ es un retracto fuerte de deformación de Y.*

Corolario 11.4.14. *Si un espacio topológico se deforma fuertemente en un punto, todo espacio homeomorfo a él también se deforma fuertemente en un punto.*

Proposición 11.4.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico, $X = A \cup B$, donde A y B son dos conjuntos abiertos (o dos cerrados). Supongamos que B se deforma fuertemente en $A \cap B$. Entonces X se deforma fuertemente en A.*

11.5. Teorema de Borsuk-Ulam

En el capítulo de conexión se enunció el teorema de Borsuk-Ulam:

> *Si $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ es un aplicación continua, entonces existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

En esta sección generalizamos dicho resultado a aplicaciones de $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^2$. La falta de técnicas para el cálculo del grupo fundamental del plano proyectivo hace que la demostración de dicho teorema sea algo artificial en un momento determinando. Salvando esta situación, el resultado permitirá distinguir topológicamente nuevos espacios, por lo que de por sí posee su propio interés.

Para empezar, recordamos de nuevo que $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, y por tanto, todo lazo en $\mathbb{RP}^1$ puede verse como un lazo en la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Vamos a estudiar un poco más detalle el espacios de lazos en $\mathbb{RP}^1$, estudiando el número de vueltas de lazos en $\mathbb{RP}^1$ que proceden de arcos en la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Sea R' la relación de equivalencia en $\mathbb{S}^1$ que identifica puntos opuestos, $H^1_+ \subset \mathbb{S}^1$ la semicircunferencia superior y R_+ la restricción de R' a H^1_+. Sea $f(t) = e^{2\pi i t}$ y $\tilde{f} : [0,1]/\{0,1\} \to \mathbb{S}^1$ el homeomorfismo inducido. Sea también

$$\phi : [0,1] \to H^1_+, \quad \phi(t) = e^{i\pi t} = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)),$$

que no es más que el arco cuya imagen es la semicircunferencia superior. Entonces existe un homeomorfismo $\tilde{\phi} : [0,1]/\{0,1\} \to H^1_+/R_+ = \mathbb{RP}^1$. Si $\alpha : I \to H^1_+/R_+$ es un lazo, definimos el número de vueltas de α como $d(\alpha) = d(\tilde{f}\tilde{\phi}^{-1}\alpha)$, el cual está bien definido pues $\tilde{f}$ y $\tilde{\phi}$ son homeomorfismos.

Comenzamos tomando el arco

$$\alpha = \phi : I \to H^1_+, \quad \alpha(t) = e^{i\pi t},$$

que une el punto $1 = (1,0)$ con $-1 = (-1,0)$. Entonces $\alpha(0)R_+\alpha(1)$. Si $p' : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{RP}^1$ es la proyección, $p' \circ \alpha$ es un lazo en $\mathbb{RP}^1$ con punto base $[1]$. Calculamos su grado:

$$d(p' \circ \alpha) = d(\tilde{f}\tilde{\phi}^{-1}p'\alpha) = d(\tilde{f}\alpha) = d(e^{2\pi i t}) = 1.$$

Por tanto $d([e^{i\pi t}]) = 1$. Si hacemos el mismo razonamiento con el arco $\beta(t) = e^{-i\pi t}$ que une -1 con 1 a lo largo de la semicircunferencia inferior $\{(x,y) \in \mathbb{S}^1 : y \leq 0\}$, se concluye también que $d([e^{-i\pi t}]) = 1$. Sea ahora $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in I$, que es un lazo en $\mathbb{S}^1$ que da una vuelta. Ya que $\gamma \sim \alpha * \beta$, se deduce

$$d(p' \circ \gamma) = d((p' \circ \alpha) * (p' \circ \beta)) = d(p' \circ \alpha) + d(p' \circ \beta) = 1 + 1 = 2.$$

Del mismo modo, el lazo en $\mathbb{S}^1$ que da n vueltas del ejemplo 11.2.4, a saber, $\sigma(t) = e^{2\pi n i t}$, se proyecta en $\mathbb{RP}^1$ como un lazo que da $2n$ vueltas, pues

$$p' \circ \sigma \sim (p' \circ \alpha) * \overset{n}{\ldots} * (p' \circ \alpha).$$

Proposición 11.5.1. *Sea $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1/R'$ y $p' : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{RP}^1$ la correspondiente proyección sobre el cociente. Entonces:*

1. $d(p'(e^{i\pi t})) = 1$.
2. $d(p'(e^{2\pi nit})) = 2n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Generalizamos este lema del siguiente modo.

Proposición 11.5.2. 1. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{S}^1$ un lazo con punto base $x_0 = 1$. Entonces $d(p' \circ \alpha) = 2d(\alpha)$.*

2. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{S}^1$ un arco tal que $\alpha(0) = 1$ y $\alpha(1) = -1$. Entonces $d(p' \circ \alpha)$ es impar.*

Demostración. 1. La aplicación $p' \circ \alpha$ es un lazo en $\mathbb{RP}^1$ con punto base $[1]$. Sea $n = d(\alpha)$. Entonces $\alpha \sim e^{2\pi nit}$. Por tanto $p' \circ \alpha \sim p'(e^{2\pi nit})$ y así

$$d(p' \circ \alpha) = d(p'(e^{2\pi nit})) = 2n.$$

2. Sea $\beta : I \to \mathbb{S}^1$ el arco $\beta(t) = e^{i\pi t}$ que une el punto 1 con el punto -1. Consideramos el lazo $\alpha * \beta^{-1}$ con punto base 1. El grado de este lazo es par por el apartado anterior. Por tanto

$$d(p'(\alpha * \beta^{-1})) = d(p'(\alpha)) + d(p'(\beta^{-1})) = d(p' \circ \alpha) - 1,$$

luego el grado de $p' \circ \alpha$ es impar.

□

Teorema 11.5.3. *No existen aplicaciones continuas $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ tal que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$.*

Demostración. Supongamos que existiera tal aplicación. Entonces f induce una aplicación $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^1$ tal que $f \circ p = p' \circ f$, donde $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ y $p' : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{RP}^1$ son las correspondiente proyecciones. Sea $a = (0, 0, 1)$ y el arco

$$\alpha : I \to \mathbb{S}^2, \quad \alpha(t) = (0, \sin(\pi t), \cos(\pi t)),$$

el cual satisface $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = -a$. Tomemos el correspondiente lazo $p \circ \alpha$ en $\mathbb{RP}^2$. Demostramos que $[p \circ \alpha]^2 = [\bar{e}_{[a]}]$. Observemos que

$$(p \circ \alpha) * (p \circ \alpha)(t) = p(0, \sin(2\pi t), \cos(2\pi t)).$$

Definimos $F : I \times I \to \mathbb{S}^2$ como

$$F(t,s) = \left(\sqrt{2s(1-s)(1-\cos(2\pi t))}, (1-s)\sin(2\pi t), s + (1-s)\cos(2\pi t)\right).$$

Entonces $p \circ F : I \times I \to \mathbb{RP}^2$ es una aplicación continua y es una homotopía entre $(p \circ \alpha) * (p \circ \alpha)$ y el lazo constante $[a]$. Ya que $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$, su grupo fundamental es $\mathbb{Z}$. Como $\overline{f}_* : \pi(\mathbb{RP}^2) \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos, $\overline{f}_*([p\circ\alpha]) = 0$, es decir, $\overline{f}_*([p\circ\alpha])$ es el lazo constante. Por tanto, $[p' \circ f \circ \alpha] = 1$.

Sea $\beta = f \circ \alpha$. Este arco en $\mathbb{S}^1$ une el punto $f(a)$ con $-f(a)$. Por la proposición 11.5.2, $p' \circ \beta$ es un lazo en $\mathbb{RP}^1$ que da un número impar de vueltas en $\mathbb{S}^1$, luego no es homotópico al lazo constante, llegando a una contradicción. $\square$

Corolario 11.5.4. *Sea $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación continua tal que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Entonces existe $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = (0,0)$.*

Demostración. Si no fuera así, la aplicación continua

$$g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1, \quad g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

satisface $g(-x) = -g(x)$, lo cual es contradictorio con el teorema anterior. $\square$

Corolario 11.5.5 (Borsuk-Ulam). *Si $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación continua, entonces existe $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \neq f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Se define la aplicación continua

$$g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x) = f(x) - f(-x).$$

La aplicación g satisface $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$ y $g(x) \neq 0$, lo que es una contradicción con el corolario anterior. $\square$

De nuevo hacemos un comentario parecido al que se hizo después del teorema 6.2.10. El resultado anterior afirma que en la superficie terrestre existen dos puntos antípodas con la misma temperatura y presión atmosférica. Para ello basta con definir una función de $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^2$ cuyas funciones coordenadas sean las funciones temperatura y presión atmosférica, las cuales son continuas y aplicar el teorema.

Otra consecuencia del corolario 11.5.5 es una generalización a dimensión 2 del hecho probado en el corolario 6.4.11 de que $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}$.

Corolario 11.5.6. *La esfera $\mathbb{S}^2$ no es homeomorfa a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Si $\mathbb{S}^2$ es homeomorfa a un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, entonces existe una aplicación continua $f : \mathbb{S}^2 \subset A \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ que sería inyectiva, en contradicción con el corolario 11.5.5. □

Corolario 11.5.7. *El plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ tiene un elemento en el grupo fundamental de orden 2 y por tanto su grupo fundamental no es trivial ni $\mathbb{Z}$. En particular, $\mathbb{RP}^2$ no es homeomorfo ni a la esfera $\mathbb{S}^2$ ni al toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

Demostración. De la prueba del teorema 11.5.3 se deduce que el lazo

$$\alpha : I \to \mathbb{RP}^2,\ \alpha(t) = p(0, \sin(2\pi t), \cos(2\pi t))$$

tiene orden dos. □

Concretamente, el resultado que se tiene (aunque no lo podemos demostrar) es que el grupo fundamental del plano proyectivo es $\mathbb{Z}_2$. Conociendo este hecho, la demostración del teorema 11.5.3 se simplifica ya que, con la misma notación usada allí, $f_* : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos. Ya que en $\mathbb{Z}$ no hay elementos de orden 2, entonces $f_* = 0$. Sin embargo el mismo lazo α que aparecía allí tiene la propiedad $f_*([\alpha]) = 1$, llegando a la contradicción buscada.

11.6. Grupo fundamental de un grupo topológico

El objetivo de esta sección es probar que el grupo fundamental de un grupo topológico $(G, \cdot, \tau)$ es abeliano. Denotamos por e el elemento neutro de G. Ya que la traslación a izquierda l_g es un homeomorfismo, la aplicación $(l_g)_* : \pi(G, e) \to \pi(G, g)$ es un isomorfismo de grupos. Por tanto, en un grupo topológico todos los grupos $\pi(G, g)$ son isomorfos y basta pues considerar uno, como por ejemplo $\pi(G, e)$.

En esta sección retomamos la notación $[\alpha] * [\beta]$. Para $\alpha, \beta \in \Omega_{ee}$ definimos

$$\alpha\beta : I \to G, \quad (\alpha\beta)(t) = \alpha(t)\beta(t),$$

donde $\alpha(t)\beta(t)$ indica el producto con la operación del grupo de $\alpha(t)$ por $\beta(t)$. Esta aplicación es continua, pues si $\varphi : G \times G \to G$ es la operación producto en G, entonces $\alpha\beta = \varphi \circ E$, donde $E : I \to G \times G$ es la aplicación evaluación de α y β, es decir, $E(t) = (\alpha(t), \beta(t))$.

Lema 11.6.1. *Sean lazos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ con punto base e y supongamos que $\alpha_1 \sim \alpha_2$ y que $\beta_1 \sim \beta_2$. Entonces $\alpha_1\beta_1 \sim \alpha_2\beta_2$.*

Demostración. Sean F y G las homotopías entre α_1 y α_2 y entre β_1 y β_2, respectivamente. La homotopía entre $\alpha_1\beta_1$ y $\alpha_2\beta_2$ es

$$H : I \times I \to G, \quad H(t,s) = F(t,s)G(t,s).$$

□

Definición 11.6.2. Se considera un grupo topológico G y se define

$$\pi(G,e) \times \pi(G,e) \to \pi(G,e), \quad \pi([\alpha],[\beta]) = [\alpha\beta].$$

Esta operación está bien definida gracias al lema anterior. El siguiente resultado es evidente.

Lema 11.6.3. *Sean $\alpha, \beta \in \Omega_{ee}$ y sea c el lazo constante en e. Entonces:*

$$\alpha * \beta = (\alpha * c)(c * \beta)$$

$$\beta * \alpha = (c * \alpha)(\beta * c).$$

Lema 11.6.4. *Sean $\alpha, \beta \in \Omega_{ee}$. Entonces*

$$[\alpha][\beta] = [\alpha] * [\beta].$$

Demostración. Del lema anterior se tiene

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * c][c * \beta] = [(\alpha * c)(c * \beta)] = [\alpha * \beta] = [\alpha] * [\beta]$$

$$[\alpha][\beta] = [c * \alpha][\beta * c] = [(c * \alpha)(\beta * c)] = [\beta * \alpha] = [\beta] * [\alpha].$$

□

Teorema 11.6.5. *El grupo fundamental de $\pi(G,e)$ es abeliano.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \Omega_{ee}$. Entonces

$$(c * \alpha)(\beta * c)(t) = \left(\begin{cases} c(2t) & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \right) \left(\begin{cases} \beta(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \right)$$

Ya que $c(t) = e$ para todo $t \in I$, se deduce $(c * \alpha)(\beta * c) = (\beta * \alpha)$. Usando el lema anterior, se tiene

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha][\beta] = [c * \alpha][\beta * c] = [\beta * \alpha] = [\beta] * [\alpha].$$

□

Corolario 11.6.6. *Una condición necesaria para que un espacio topológico sea un grupo topológico es que su grupo fundamental sea abeliano.*

11.7. Ejercicios

1. Dar un ejemplo de una aplicación continua e inyectiva $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ (resp. sobreyectiva) tal que $f_* : \pi(X) \to \pi(Y)$ no es inyectiva (resp. sobreyectiva).

2. Se define la aplicación $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ por $f(z) = z^n$, donde $n \in \mathbb{Z}$. Describir $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

3. Sea $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ y
$$A = \{x \in \mathbb{D}^2 : \mathbb{D}^2 \setminus \{x\} \text{ es simplemente conexo }\}.$$
Probar que $A = \mathbb{S}^1$.

4. Sea un arco $\alpha : I \to X$ y $t_0 \in I$. Se definen los arcos $\alpha_1, \alpha_2 : I \to X$ mediante
$$\alpha_1(s) = \alpha(st_0), \qquad \alpha_2(s) = \alpha(t_0 + s(1 - t_0)).$$
Probar que α es un arco homotópico al arco $\alpha_1 * \alpha_2$.

5. Si $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ es un homeomorfismo, probar que $f(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.

6. Sea (X,τ) un espacio topológico, $A \subset B \subset X$ tal que A es un retracto de B y B un retracto de X. Probar que A es un retracto de X. Probar el mismo resultado pero cambiando por retracto fuerte de deformación.

7. Sean retractos $A \subset (X,\tau)$ y $B \subset (Y,\tau')$ (resp. retractos fuertes de deformación). Probar que $A \times B$ es un retracto de $X \times Y$ (resp. retracto fuerte de deformación).

8. Sea $x_0 \in \mathbb{S}^1$. Entonces $\mathbb{S}^1 \times \{x_0\}$ es un retracto de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ pero no es un retracto fuerte de deformación.

9. Probar las proposiciones 11.4.13 y 11.4.15.

10. Calcular el grupo fundamental de los siguientes espacios topológicos:

    a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

    b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$.

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z < 0\}$.

d) El paraboloide $z = x^2 + y^2$.

e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\} \cup \{(0,1,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1\} \cup (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$.

g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\} \cup (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$.

h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1\} \cup \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$.

i) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}^2$.

j) Dos esferas de $\mathbb{R}^3$ tangentes exteriormente en un punto.

k) $\mathbb{S}^2 \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1\}$.

l) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z \leq 0\} \cup (\{0\} \times \mathbb{S}^1)$.

m) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \leq 1\}$.

n) $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

11. Sea $\alpha(t) : I \to \mathbb{S}^1$ un lazo con $\alpha(0) = 1$. Supongamos que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ donde x, y son funciones diferenciables en la variable t. Probar que
$$d(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (xy' - x'y)dt,$$
donde x', y' son, respectivamente, las derivadas respecto de t de las funciones $x(t), y(t)$. Usando esta identidad, calcular de nuevo el grado del lazo $\alpha(t) = e^{2\pi i n t}$;

12. Sea $\alpha : I \to X$ un arco. Se llama una *reparametrización* de α a un arco de la forma $\beta = \alpha \circ \phi$, donde $\phi : I \to I$ es una aplicación continua con $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 1$. Probar que $\alpha \sim \alpha \circ \phi$.

13. En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, probar que el lazo $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ no es homotópico al lazo constante.

14. Estudiar el grupo fundamental de un espacio discreto y trivial.

Bibliografía y otras referencias

1. Armstrong, M. A.: Topología Básica. Reverté, Barcelona, 1987.
2. Bujalance, E., Tarrés, J.: Problemas de Topología. Cuadernos de la UNED, 1989.
3. Dugundji, J.: Topology. Allyn and Bacon. Boston. 1966.
4. Kelley, J. L.: Topología General. Editorial Universitaria de Buenos Aires. Buenos Aires. 1975.
5. Lipschutz, S.: General Topology. Schaum Publishing Co. New York. 1965.
6. López, R.: Curso de Topología General. Granada, 1995.
7. López, R.: Ejercicios de Topología General. Nativola, Granada, 2009.
8. Margalef, J., Outerelo, E.: Introducción a la Topología. Editorial Complutense. Madrid, 1993.
9. Munkres, J. R.: Topology, a first course. Prentice-Hall, 1970.
10. Steen, L. A., Seebach Jr., J. A: Counterexamples in Topology. Dover Publications. New York, 1995.
11. Willard, S.: General Topology. Addison-Wesley, 1970.

Por internet:

1. Blog de Topología I.

   `http://topologia-i.blogspot.com/`

2. Juegos Topológicos.

`Juegos topológicos: http://topologia.wordpress.com`

Índice alfabético

m mejor

manuales

Ciencias Experimentales y Exactas

Este libro presenta las nociones y los resultados básicos de topología general que tienen que abordar por primera vez los estudiantes del grado en matemáticas. La exposición teórica se complementa con una abundancia de ejemplos, junto con una colección de ejercicios propuestos al final de cada capítulo, que permite al estudiante alcanzar una comprensión de los conceptos teóricos previamente explicados.

Los contenidos incluyen: espacios topológicos, espacios métricos, aplicaciones continuas, homeomorfismos, espacios productos, separación y numerabilidad, conexión, compacidad, espacios cocientes y grupo fundamental.

DISEÑO CUBIERTA: JOSEMARÍA MEDINA

eug EDITORIAL UNIVERSIDAD DE GRANADA

I.S.B.N.: 978-84-338-567

9 788433 856760