16/12/2020

El último día probamos el Teorema de Tijonov: $(X_1 \times \cdots \times X_k, T_1 \times \cdots \times T_k)$ es compacto si y sólo si $(X_i, T_i)$ es compacto para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Teorema (Heine-Borel). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $A$ es un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^n, T_u)$ si y sólo si $A$ es cerrado y acotado para la distancia Euclídea.

Dem: En cualquier espacio métrico, si un subconjunto es compacto, es cerrado y acotado. Como $T_u$, la topología usual de $\mathbb{R}^n$, coincide con $T_{d_2}$ ($d_2$ = distancia Euclídea), entonces $A \subset (\mathbb{R}^n, T_u^n)$ compacto implica que $A$ es cerrado, y acotado para $d_2$.
Supongamos que $A$ es cerrado y acotado para $d_2$. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$A \subset \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bola con } d_2}}{\bar{B}(0,r)} \subset [-r,r] \times \cdots \times [-r,r].$$

El intervalo $[-r,r]$ es compacto en $(\mathbb{R}, T_u^1)$ y $[-r,r] \times \cdots \times [-r,r]$ es compacto en $(\mathbb{R}^n, T_u^1 \times \cdots \times T_u^1)$ por el Teorema de Tijonov. Como $T_u^1 \times \cdots \times T_u^1 = T_u^n$, entonces $[-r,r] \times \cdots \times [-r,r]$ es compacto en $(\mathbb{R}^n, T_u^n)$. Como $A$ es cerrado en $[-r,r] \times \cdots \times [-r,r]$, entonces $A$ es compacto. ∎

Nota: Es importante que la distancia sea la Euclídea. Por ejemplo, si tomamos $d = \min\{1, d_2\}$, $T_d = T_{d_2}$, pero $d$ es globalmente acotada. Si el Teorema de Heine-Borel fuera cierto para la distancia $d$: $A$ es compacto si $A$ es cerrado y acotado para $d$, esto implicaría que $\mathbb{R}^n$, que es cerrado y acotado para la distancia $d$ ($\mathbb{R}^n = \bar{B}_d(0,1)$), sería compacto.

Corolario: Sea $(X,T)$ un e. top. compacto, $f:(X,\mathbb{R}) \to (\mathbb{R},T_u)$ es continua. Entonces existen $x_{min}, x_{max} \in X$ tales que

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

para todo $x \in X$. ($f$ alcanza máximo y mínimo).

Dem: $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Por tanto es cerrado y acotado. Entonces $a = \inf f(X)$, $b = \sup f(X)$ existen por ser $f(X)$ acotado y pertenecen a $f(X)$ por ser $f(X)$ cerrado. Entonces $a = \min f(X)$, $b = \max f(X)$. Elegimos $x_{min}, x_{max} \in X$ tales que $a = f(x_{min})$ $b = f(x_{max})$. Entonces

$$a = f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) = b.$$

■

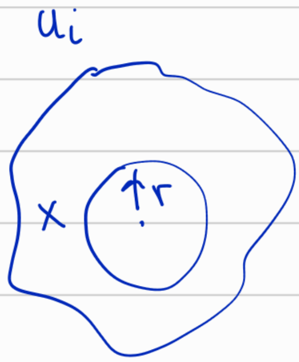
A partir de ahora consideramos espacios métricos.

Teorema (número de recubrimiento de Lebesgue). Si $(X,d)$ es un espacio métrico compacto, y $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $X$, entonces $r>0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $i \in I$ tal que $B(x,r) \subset U_i$.

Dem: La observación fundamental es que $B(x,r) \subset U_i$ si y solo si

$$d(x, X\setminus U_i) = \inf\{d(x,y) : y \in X \setminus U_i\}$$

es mayor o igual que $r$. Si llamamos $f_i(x) = d(x, X\setminus U_i)$ $\forall x \in X$ entonces $B(x,r) \subset U_i$ si y solo si $f_i(x) \geq r$.




Si $B(x,r)\subset U_i$ y $f_i(x)<r$

$\Rightarrow \inf\{d(x,y): y\in X\setminus U_i\}<r$

$\Rightarrow \exists\, y\in X\setminus U_i$ tal que $d(x,y)<r$

$\Rightarrow \exists\, y\in X\setminus U_i$ tal que $y\in B(x,r)$. !!

$(y\in B(x,r)\not\subset U_i)$

Si $f_i(x)\geq r \Rightarrow \inf\{d(x,y): y\in X\setminus U_i\}\geq r \Rightarrow d(x,y)\geq r$ $\forall y\in X\setminus U_i \Rightarrow X\setminus B(x,r)\supset X\setminus U_i \Rightarrow B(x,r)\subset U_i$

Como $(X,T_d)$ es compacto, sea $\{U_j\}_{j\in J}$, $J\subset I$ finito, un subrecubrimiento finito de $X$. Cada $f_j(x)=d(x,X\setminus U_j)$ es una aplicación continua por ser lipschitziana $(|f_j(x)-f_j(y)|\leq d(x,y))$. Entonces

$$f=\max_{j\in J}\{f_j\} \qquad (*)$$

es una aplicación continua (el máximo de una familia finita de aplicaciones continuas es continua

$$\max\{f_1,f_2\}=\frac{(f_1+f_2)+|f_2-f_1|}{2}$$

es continua por ser suma y composición de aplicaciones continuas. La igualdad $\max\{f_1,\dots,f_k\}=\max\{f_1,\max\{f_2,\dots,f_{k-1}\}\}$ permite probar la continuidad por inducción.).

Como $f:(X,d)\to(\mathbb{R},T_u)$ es continua y $f(x)\geq 0$ $\forall x\in X$, entonces $f$ alcanza un mínimo $r\geq 0$. Veamos que $r>0$. Razonamos por contradicción suponiendo que $r=0$. Sea $x\in X$ tal que

$$0 = r = f(x) = \max_{j\in J} \{f_j(x)\} \geq f_j(x) \qquad \text{para todo } j\in J.$$

Entonces $f_j(x)=0$ para todo $j\in J$. Entonces $d(x, X\setminus U_j)=0$ para todo $j\in J$. Veamos que $x\in X\setminus U_j$: si $x\notin X\setminus U_j$, entonces $x\in U_j$ y, como $U_j$ es abierto, existe $\delta>0$ tal que $B(x,\delta)\subset U_j$ y $f_j(x)\geq \delta>0$ !!. Por tanto $x\in X\setminus U_j$ $\forall j\in J$. Entonces $x\notin U_j$ $\forall j\in J$. Esto es imposible porque $\{U_j\}_{j\in J}$ es subrecubrimiento de $X$. Esta contradicción demuestra que $r>0$.

Si $x\in X$, entonces $f(x)=f_j(x)$ para algún $j\in X$ y se tiene que:

$$r\leq f(x) = f_j(x)$$

Por tanto $B(x,r)\subset U_j$. ∎

**Def:** una aplicación $f:(X,d)\to(Y,d')$ entre dos espacios métricos es uniformemente continua si, para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $d(x,y)<\delta$ implica $d'(f(x),f(y))<\varepsilon$.

**Teorema:** una aplicación continua $f:(X,d)\to(Y,d')$ entre dos espacios métricos con $(X,d)$ compacto es uniformemente continua.

**Dem:** sea $\varepsilon>0$. Entonces para todo $y\in Y$, $f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))$ es un conjunto abierto de $(X,d)$ por la continuidad de $f$. La familia $\{f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))\}_{y\in Y}$ es un recubrimiento abierto de $X$. $(x\in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon/2)))$. Como $(X,d)$ es compacto, existe $\delta>0$ número de Lebesgue asociado al recubrimiento. (para todo $x\in X$, existe $y\in Y$ tal que $B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))$).

Sean $x, z \in X$ tales que $d(x,z) < \delta$. Entonces existe $y \in Y$ tal que $B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))$. Por tanto $x, z \in B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))$. Entonces $f(x), f(z) \in B(y,\varepsilon/2)$. Es decir, que $d'(f(x),y) < \varepsilon/2$, $d'(f(z),y) < \varepsilon/2$. Por la desigualdad triangular

$$d'(f(x),f(z)) \leq d'(f(x),y) + d'(y,f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

**Def:** Un espacio métrico es secuencialmente compacto si toda sucesión admite una subsucesión convergente.

**Teorema:** Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Son equivalentes:

1. $(X,d)$ es compacto
2. $(X,d)$ es secuencialmente compacto