14/01/2021

12. (X,T) e.t. compacto, $T' \subset T$. Probar que (X,T') es compacto.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X por abiertos de T'. Como $T' \subset T$, $\{U_i\}_{i\in I}$ es también un recubrimiento de X por abiertos de T. Como (X,T) es compacto, existe $J \subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{j\in J} U_j$.

¿Si $T \subset T'$? $\quad X$ conjunto infinito. $T = T_t$, $T' = T_D$

(X, T_t) siempre es compacto

(X, T_D) no es compacto.

Si $T \subset T'$, entonces (X,T) compacto no implica que (X,T') compacto $\blacksquare$

13. $(\mathbb{N}, T_{CF})$ ¿Qué subconjuntos son compactos? Todos

- (X, T_{CF}) es compacto $\forall X$.
- $A \subset X$, $\quad (T_{CF})_A$ = top. complementos en finitos en A.

14. $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{B} = \{(a,b) : a<b\} \cup \{(a,b)\setminus K : a<b\}$

$$[-\infty,0] \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \right) \in T_K \qquad \notin T_u$$

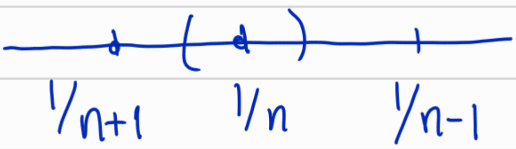
$A \subset \mathbb{R} \quad 0 \notin A \Rightarrow (T_K)_A = (T_u)_A.$

1. $[0,1]$ ¿es compacto en $(\mathbb{R}, T_K)$? NO

$U_0 = \mathbb{R} \setminus K \in T_K$

$\{\frac{1}{n}\} = (\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n} + \varepsilon_n) \cap K$

$U_n = \left(\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n} + \varepsilon_n\right) \in T_K$



$$0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$[0,1] \subset \underbrace{U_0 \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \right)}$$

rec. abto. de $[0,1]$. del que no se puede extraer ningún subrec. finito

2. $(\mathbb{R}, T_K)$

$A = (-\infty, 0) \qquad (T_K)_A = (T_u)_A$

$B = (0, +\infty) \qquad (T_K)_B = (T_u)_B$

A, B son subconjuntos conexos de $(\mathbb{R}, T_K)$ porque $(A, (T_K)_A) =$
$= (A, (T_u)_A)$ y $(A, (T_u)_A)$ es conexo por ser un intervalo.
Igual para B.

$0 \in \bar{A}$, $0 \in \bar{B}$. $\quad \mathcal{B}_0 = \{(a,b) : a<0<b\} \cup \{(a,b)\setminus K : a<0<b\}$

$0 \in \bar{A}$ porque $(a,b) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$ y $((a,b)\setminus K) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$
$\forall$ intervalo tal que $a<0<b$.

Análogamente $0 \in \bar{B}$.

$(-\infty, 0) = A$ conexo $\Rightarrow$ $(-\infty, 0]$ es conexo porque $(-\infty, 0] \subset \bar{A}$
Análogamente $[0, +\infty)$ es conexo porque $[0, +\infty) \subset \bar{B}$

$\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$ es conexo para la topología T_K porque es unión de dos conjuntos con intersección no vacía.

3. $(\mathbb{R}, T_K)$ no es c.p.a.

Sea $\gamma : ([0,1], T_u) \to (\mathbb{R}, T_K)$ aplicación continua (arco) tal que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$.

$T_u|_{[0,1]}$

$t_0 = \inf \{t \in [0,1] : \gamma(s) > 0 \ \forall s > t\}$.

$\gamma(t_0)=0 \qquad \underline{\gamma(t)>0} \quad \underline{\forall\, t>t_0}.$

Como γ es continua, $\gamma^{-1}(\mathbb{R}\setminus K)$ es abierto en $\mathcal{T}_{u_{[0,1]}}$

$\gamma^{-1}(\mathbb{R}\setminus K) \ni t_0 \quad (\gamma(t_0)=0\in\mathbb{R}\setminus K)$

existe $\varepsilon>0$ tal que $[t_0,t_0+\varepsilon)\subset\gamma^{-1}(\mathbb{R}\setminus K)$

$$\Rightarrow 0=\gamma(t_0)\in \underbrace{\gamma\underset{\text{cont.}}{(}\underset{\text{conexo en } \mathcal{T}_{u_{[0,1]}}}{[t_0,t_0+\varepsilon)})}_{\text{conexo en } \mathcal{T}_K}\subset\mathbb{R}\setminus K.$$

C_0 = componente conexa de $\mathbb{R}\setminus K$ que contiene a 0, entonces $\gamma([t_0,t_0+\varepsilon))\subset C_0$. Veamos que $C_0=(-\infty,0]$. Una vez que veamos esto ya tenemos una contradicción porque $\gamma([t_0,t_0+\varepsilon))\subset C_0=(-\infty,0]\Rightarrow\gamma(t)\leq 0$ $\forall\, t\in[t_0,t_0+\varepsilon)$, pero $\gamma(t)>0$ $\forall\, t\in(t_0,1]$.

Falta ver que $C_0=(-\infty,0]$. $\quad(-\infty,0]$ es conexo en $(\mathbb{R},\mathcal{T}_K)$ y contiene a 0 $\Rightarrow(-\infty,0]\subset C_0$

Supongamos que $(-\infty,0]\subsetneq C_0$. $\Rightarrow$ existe $\underline{x\in C_0\setminus(-\infty,0]}$.
$\Rightarrow x>0$. $\Rightarrow\exists\, n\in\mathbb{N}$ tal que $0<\frac{1}{n}<x \Rightarrow$

$$\mathbb{R}\setminus K=\left[\left(-\infty,\tfrac{1}{n}\right)\cup\left(\tfrac{1}{n},\infty\right)\right]\setminus K$$

$$=\left(\left(-\infty,\tfrac{1}{n}\right)\setminus K\right)\cup\left(\left(\tfrac{1}{n},+\infty\right)\setminus K\right)$$

$$C_0 = C_0\cap(\mathbb{R}\setminus K) = \Big[\underbrace{C_0\cap\big((-\infty,\tfrac{1}{n})\setminus K\big)}_{\supseteq(-\infty,0]\ \neq\ \emptyset}\Big]\cup\Big[\underbrace{C_0\cap\big((\tfrac{1}{n},+\infty)\setminus K\big)}_{\ni x\ \neq\ \emptyset}\Big]$$

abtos disjuntos

$\Rightarrow C_0$ no conexo. !!

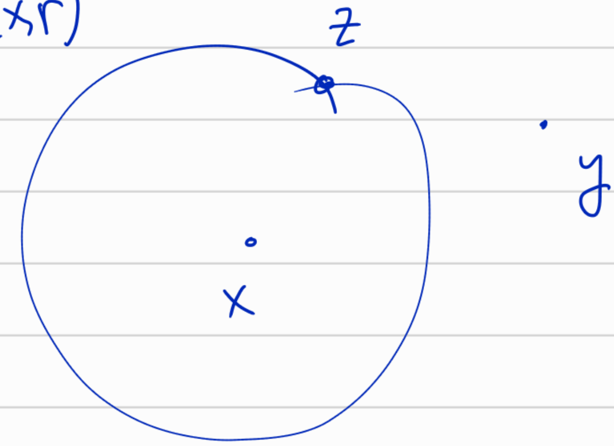
Por tanto $C_0 = (-\infty, 0]$. $\blacksquare$

15. Si (X,d) es un espacio métrico conexo con más de un punto, entonces X es no numerable.

Si (X,d) es conexo. Sean $x,y\in X$, con $x\neq y$. Sea $r\in(0,d(x,y))$

$\{z\in X : d(x,z)=r\} = \bar{B}(x,r)\setminus B(x,r)$

$\supseteq \overline{B(x,r)}\setminus B(x,r) = \partial B(x,r)$



Si (X,d) es conexo, $\partial B(x,r)\neq\emptyset$

$\Rightarrow \{z\in X : d(x,z)=r\}\neq\emptyset$

Para cada $r\in(0,d(x,y))$, tomamos z_r tal que $d(x,z_r)=r$

Por tanto $X \supseteq \underbrace{\{z_r : r\in(0,d(x,y))\}}_{\text{no numerable}} \Rightarrow X$ no numerable $\blacksquare$