13/01/2021

5. $f:[0,1]\to[0,1]$ continua. Probar que, para todo $n\in\mathbb{N}$, existe $x_n\in[0,1]$ tal que $f(x_n)=x_n^n$.

Aplicamos el teorema del valor intermedio.

Consideramos $g_n(x)=f(x)-x^n$ $\qquad g_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua

$$\left.\begin{array}{l} g_n(0)=f(0)-0=f(0)\geq 0 \\ g_n(1)=f(1)-1\leq 1-1=0 \end{array}\right\} \underset{\text{T.V.I.}}{\Longrightarrow} \exists\, x_n\in I \,/\, g_n(x_n)=0$$

$$g_n(x_n) = f(x_n)-x_n^n$$

6. $(X,T)=([-1,1],T)$

$$T=\{U\subset X : 0\notin U \text{ ó } (-1,1)\subset U\}$$

- $(-1,1)$ es conexo: Si $(-1,1)\subset A\cup B$, $A,B\in T$, $A\cap B\cap(-1,1)=\emptyset$
  $A\cap(-1,1)$, $B\cap(-1,1)\neq\emptyset$, $(-1,1)$

$0\in(-1,1)\subset A\cup B \Rightarrow \underline{\underline{0\in A}}$ ó $0\in B$. Si $0\in A\Rightarrow(-1,1)\subset A$

$\Rightarrow (-1,1)\cap A=(-1,1)$ ¡¡

$(-1,1)$ además es abierto.

- $\{1\}$, $\{-1\}$ son conjuntos conexos y abiertos

$(-1,1)$, $\{-1\}$, $\{1\}$ forman una partición de X por conjuntos conexos y abiertos. $\Rightarrow$ son las componentes conexas de X.

⊙ $X = \bigcup P_i$ $\qquad$ P_i es componente conexa $\forall i$

Si $P_i \subset C$ conexo $\Rightarrow$ $C \cap P_i$ $\quad C \cap \left(\bigcup_{j \neq i} P_j \right)$ es

abta.

una partición de P_i es dos abiertos $\Rightarrow$ $C \cap \bigcup_{j \neq i} P_j = \phi \Rightarrow C \subset P_i$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{C = P_i}}$

8. $(\mathbb{R}, T_S)$ $\qquad$ $C_x = \{x\}$. $\qquad$ $a, b \in C \quad a \neq b$.

$(-\infty, a)$, $[b, +\infty) \in T_S$

$(-\infty, a) \cap C$, $[b, +\infty) \cap C$

partición en conjuntos abtos disjuntos, no vacíos $\Rightarrow$ C no conexo

9. (X, T) c.p.a. $\qquad$ $f: (X,T) \to (Y, T')$ continua $\Rightarrow$ $\underline{\underline{f(X)}}$ es c.p.a.

$\to$ $y_1, y_2 \in f(X) \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

Como (X,T) es c.p.a. $\exists\, \gamma: [0,1] \to X$ continua tal que $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$

Entonces $f\circ\gamma : [0,1] \to f(X)$ es una apl. continua tal que $f\circ\gamma(0) = f(x_1) = y_1$, $f\circ\gamma(1) = f(x_2) = y_2$.

10. (X_i, T_i) $i = 1, \dots n$.

$(X_1 \times \dots \times X_n, T_1 \times \dots \times T_n)$ es c.p.a. $\Leftrightarrow$ (X_i, T_i) es c.p.a. $\forall i = 1, \dots, n$.

- Si $(X_1 \times \dots \times X_n, T_1 \times \dots \times T_n)$ es c.p.a $\Rightarrow$ $X_i = \underset{\text{cont.}}{\Pi_i}\, (\underset{\text{c.p.a.}}{X_1 \times \dots \times X_n})$

Por el ejercicio 9, (X_i, T_i) es c.p.a. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

- Supongamos ahora que (X_i, T_i) es c.p.a. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Sean $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$. $x_i, y_i \in X_i$ $\forall i = 1, \dots n$.
Como (X_i, T_i) es c.p.a. $\exists\, \gamma_i : [0,1] \to X_i$ continua tal que $\gamma_i(0) = x_i$, $\gamma_i(1) = y_i$

Definimos $\gamma : [0,1] \to X_1 \times \dots \times X_n$ por $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

γ continua $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\Pi_i \circ \gamma}_{\gamma_i} : [0,1] \to X_i$ es continua $\forall i = 1, \dots, n$ $\Leftrightarrow$ γ_i cont. $\forall i$

$\Rightarrow$ γ es un arco en $X_1 \times \dots \times X_n$. $\gamma(0) = (\gamma_1(0), \dots, \gamma_n(0)) = (x_1, \dots, x_n)$
$\gamma(1) = (\gamma_1(1), \dots, \gamma_n(1)) = (y_1, \dots, y_n)$.

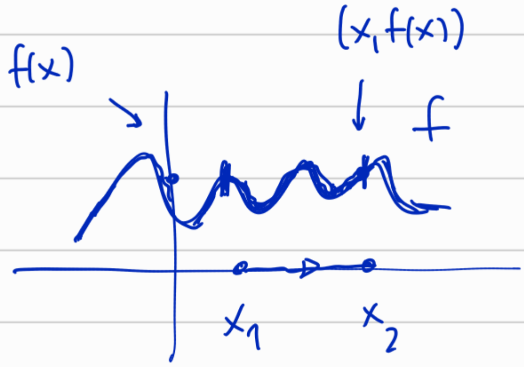
$\Rightarrow$ $(X_1 \times \dots \times X_n, T_1 \times \dots \times T_n)$ c.p.a.

11. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin(1/x)$

$$G(f) = \{ (x, \sin(1/x)) : x > 0 \} \subset \mathbb{R}^2$$

$f : X \to Y$ $\qquad G(f) \subset X \times Y$

$$\quad = \{ (x, f(x)) : x \in X \}$$



$G(f) \approx X$.

---

1. $G(f) \approx (0, +\infty) \Rightarrow G(f)$ conexo en $\mathbb{R}^2$ (es c.p.a.)

Si $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in G(f)$, tomamos

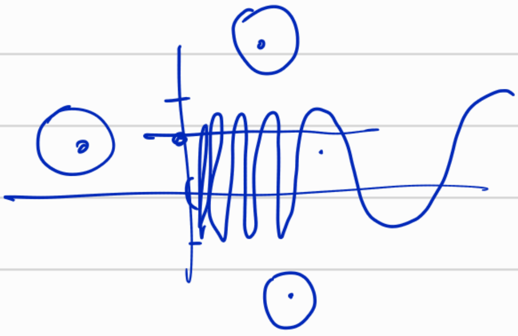
$$\gamma(t) = (x_1 + t(x_2 - x_1), f(x_1 + t(x_2 - x_1)))$$

$\gamma : I \to G(f)$ es continua y $\gamma(0) = (x_1, f(x_1))$, $\gamma(1) = (x_2, f(x_2))$

2. $\overline{G(f)} = G(f) \cup (\{0\} \times [-1, 1])$

$\supseteq$

$\subseteq$ es una comprobación de casos (ningún punto de $\mathbb{R}^2 \setminus (G(f) \cup (\{0\} \times [-1,1]))$ está en $\overline{G(f)}$. No lo haremos)



$G(f) \subset \overline{G(f)}$. Veamos que $\{0\} \times [-1,1] \subset \overline{G(f)}$. Sea $(0,t) \in$
$\in \{0\} \times [-1,1]$. $(t \in [-1,1])$

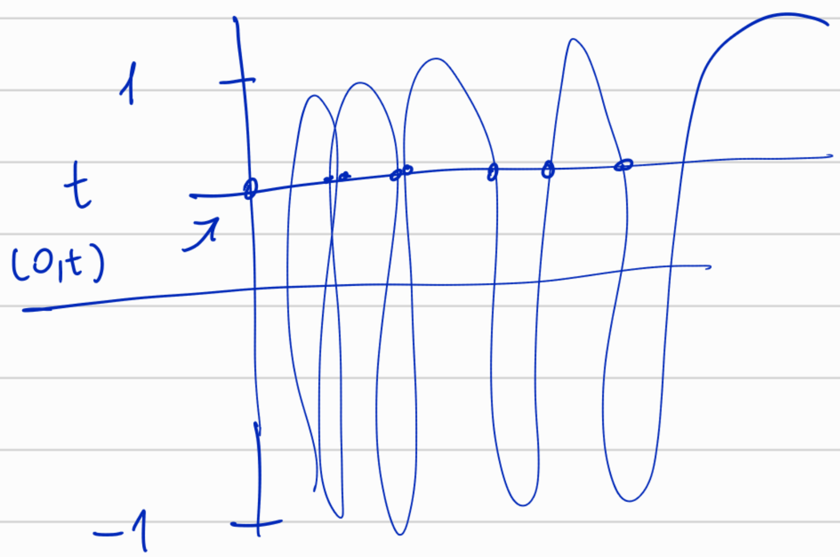
Sea ahora $s \in (0,+\infty)$ tal que $t = \sin(s)$. Entonces $\sin(s+2k\pi)$
$= \sin(s) = t$

Sea $a_n = \dfrac{1}{s+2n\pi} \in (0,+\infty)$ $\quad a_n \to 0$

$(a_n, f(a_n)) \in G(f)$ $\quad (a_n, f(a_n)) = (a_n, \sin(\frac{1}{a_n}))$

$= (a_n, \sin(s+2n\pi)) = (a_n, t)$

$\lim_{n\to\infty} (a_n, f(a_n)) = (0,t)$

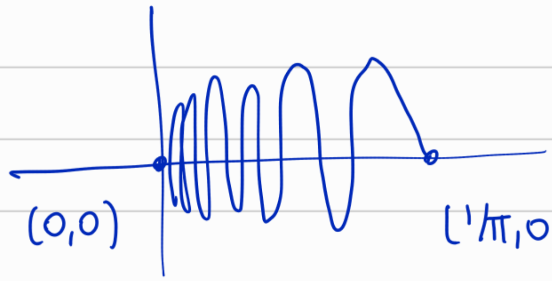


$(0,t) \in \overline{G(f)}$

Acabamos de ver que $G(f) \cup (\{0\} \times [-1,1]) \subset \overline{G(f)}$

3. $G(f) \cup (\{0\} \times [-1,1])$ es conexo. Veamos que no es conexo por arcos.

Veamos que no existe ninguna aplicación continua $\gamma : [0,1] \to$
$\to G(f) \cup (\{0\} \times [-1,1])$ tal que $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(1) = (1/\pi, 0) \in G(f)$
$\gamma((0,1]) \subset G(f)$.



$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ $\qquad \gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas.

$\gamma_1(0) = 0 \qquad \gamma_1(1) = 1/\pi.$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = +1$ si $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi = \frac{\pi}{2}(1+4k) \iff x = \frac{1}{1+4k} \cdot \frac{2}{\pi}$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1$ si $\frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2}(3+4k) \iff x = \frac{1}{3+4k} \cdot \frac{2}{\pi}$

$\exists \; t_1 \in [0,1] \; / \; \gamma_1(t_1) = \frac{2}{5\pi} \in [0, \frac{1}{\pi}]$

$\exists \; t_2 \in [0,t_1] \; / \; \gamma_1(t_2) = \frac{2}{7\pi} \in [0, \frac{2}{5\pi}]$.

$\exists \; t_3 \in [0,t_2] \; / \; \gamma_1(t_3) = \frac{2}{9\pi} \in [0, \frac{2}{7\pi}]$.

$\exists \ t_4 \in [0, t_3] \ / \ \gamma_1(t_4) = \frac{2}{11\pi} \in [0, \frac{2}{9\pi}]$

$\vdots$

De esta forma construimos $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ decreciente. $t_i \downarrow t_\infty \in [0,1]$.

$$f(\gamma_1(t_i)) = \begin{cases} +1, & i \text{ impar} \\ -1, & i \text{ par} \end{cases}$$

γ continua $\quad \gamma(t_\infty) = \lim_{i\to\infty} \gamma(t_i) = \lim_{i\to\infty} (\gamma_1(t_i), \gamma_2(t_i))$

$$= (\gamma_1(t_\infty), \lim_{i\to\infty} \gamma_2(t_i))$$

$$= (\gamma_1(t_\infty), \lim_{i\to\infty} \underbrace{f(\gamma_1(t_i))}_{\substack{= \\ \pm 1 \\ \text{alternativamente}}})$$