26/11/20

34. $(\mathbb{R}, T_S)$ T_S generado por $\mathcal{B}_S = \{[a,b) : a<b\}$ es AN-I, pero no es AN-II.

$x \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}_x = \{[x, x+\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es base de entornos de x.

$\mathcal{B}_x \subset N_x$ porque los elementos de $\mathcal{B}_x$ son conjuntos abiertos que contienen a x.

Sea $U \in N_x$, entonces existe $V \in T_S$ tal que $x \in V \subset U$. Como $V \in T_S$ y $x \in V$, existe $B \in \mathcal{B}_S$ tal que $x \in B \subset V \subset U$. B es de la forma $[a,b)$, con $a<b$. $\Rightarrow x \in [a,b) \Rightarrow x \in [x,b)$. Tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x + \frac{1}{n_0} < b$. $(\frac{1}{n_0} < b-x)$. Entonces $x \in [x, x+\frac{1}{n_0}) \subset [x,b)$

$$\underbrace{[x, x+\tfrac{1}{n_0})}_{\in\, \mathcal{B}_x} \subset [x,b) \subset [a,b) = B \subset V \subset U.$$

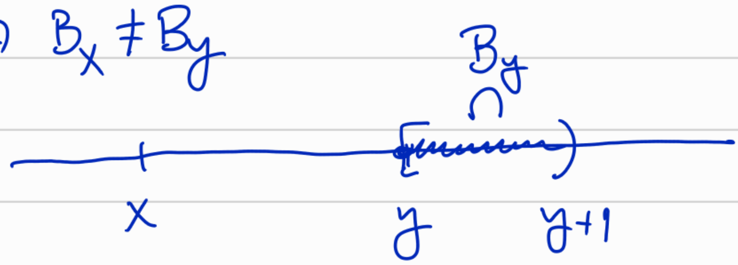
Como $\mathcal{B}_x$ es base de entornos numerable y $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario, entonces $(\mathbb{R}, T_S)$ es AN-I

$(\mathbb{R}, T_S)$ no es AN-II. Sea $\mathcal{B}$ una base cualquiera de $(\mathbb{R}, T_S)$. Vamos a probar que no es numerable. Para cada $x \in \mathbb{R}$, tomamos el conjunto $[x, x+1) \in T_S$. Como $\mathcal{B}$ es base, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_x \subset [x, x+1).$$

Vamos a comprobar que si $x \neq y$, entonces $B_x \neq B_y$. Si comprobamos esta propiedad, entonces $\{B_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ es una familia no numerable de conjuntos contenida en $\mathcal{B}$. Por tanto, $\mathcal{B}$ sería no numerable.

Si $x \neq y$, podemos suponer $x < y$. Entonces $x \in B_x$, pero $x \notin [y, y+1) \supset B_y$
$\Rightarrow x \notin B_y \Rightarrow B_x \neq B_y$



Esto significa que toda base $\mathcal{B}$ de $(\mathbb{R}, T_S)$ es no numerable. Por tanto, $(\mathbb{R}, T_S)$ no es AN-II.

(Si (X, T) es AN-II $\quad \mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ base ent. de x.
Si $\mathcal{B}$ es numerable, $\mathcal{B}(x)$ es numerable $\Rightarrow (X, T)$ es AN-I).

35. (X, T_D)

1. $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es base de entornos de x finita (numerable)

2. (X, T_D) es AN-II $\Leftrightarrow$ X es numerable

$\Leftarrow]$ Si X es numerable, $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base numerable de $T_D \Rightarrow (X, T_D)$ es AN-II

$\Rightarrow]$ (X, T_D) AN-II y $\mathcal{B}$ es una base, entonces:

$\{x\} \in \mathcal{B} \quad \forall x \in X$.

Tomamos $\{x\} \in T_D$. Como $\mathcal{B}$ es base existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset \{x\} \Rightarrow \{x\} \subset B \subset \{x\} \Rightarrow \{x\} = B \in \mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ es numerable, como acabamos de probar que

$$\{\{x\} : x \in X\} \subset \mathcal{B},$$

entonces $\{\{x\} : x \in X\}$ es numerable $\Rightarrow X$ es numerable. $\blacksquare$

36. (X,d) e. métrico. $x_i \to x \iff \forall \varepsilon > 0, \exists i_0 \in \mathbb{N} : d(x,x_i) < \varepsilon \quad \forall i \geq i_0$

$x_i \in B(x,\varepsilon)$

$d(x,x_i) = |x - x_i| \leftarrow (\mathbb{R}, d_u)$

(X,T). $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión en X. Diremos que x_i converge a x si $\forall U \in N_x$, $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in U \ \forall i \geq i_0$

(X,d)

(X,T)

(cada entorno del punto límite contiene a casi todos los elementos de la sucesión).

$$x = \lim_{i\to\infty} x_i \quad (\forall U \in N_x, \exists i_0 \in \mathbb{N} \,/\, x_i \in U \ \forall i \geq i_0)$$

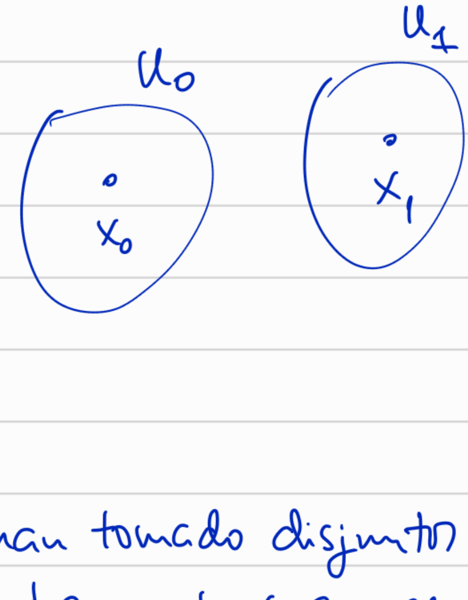
(a) En un e. top. una sucesión puede converger a más de un punto.

En $(\mathbb{X}, T_t)$ cualquier sucesión converge a todos los puntos del espacio.

Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathbb{X}$. Sea $x \in \mathbb{X}$ cualquiera, $N_x = \{\mathbb{X}\}$
$x_i \in \mathbb{X}$ $\forall i \geq 1$ y $\mathbb{X}$ es el único entorno de x. Por tanto,
$x = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$.

(b) En un e. top. Hausdorff, los límites de sucesiones son únicos.
Sea $(\mathbb{X}, T)$ Hausdorff, sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathbb{X}$ que converge a $x_0 \in \mathbb{X}$. Veamos que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no puede converger a otro punto.

Razonamos por contradicción suponiendo que existe $x_1 \neq x_0$ tal que $x_1 = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$. Como $x_0 \neq x_1$, existen entornos $U_0 \in N_{x_0}$, $U_1 \in N_{x_1}$ tales que $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.



Como $x_0 = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$, dado U_0, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in U_0$ $\forall i \geq i_0$
Como $x_1 = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$, dado U_1, existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in U_1$ $\forall i \geq i_1$
Si tomamos $i_{max} = \max\{i_0, i_1\}$, entonces

$$x_i \in U_0 \cap U_1 \qquad \forall i \geq i_{max}$$

Esto es una contradicción porque U_0, U_1 se han tomado disjuntos. Esta contradicción procede de suponer que hay otro punto x_1 que es límite de la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Por tanto, x_0 es el único límite de la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Pregunta: sea (X,T) un e.top. tal que los límites de sucesiones son únicos. ¿Es (X,T) Hausdorff?

(c) Sea (X,T) e.top., $A\subset X$. Si existe una sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de puntos de A que converge a $x\in X$, entonces $x\in\bar{A}$.

Sea $U\in N_x$. Sabemos que existe $i_0\in\mathbb{N}$ tal que $a_i\in U$ para todo $i\geq i_0$

$\Rightarrow a_i\in A\cap U \quad \forall i\geq i_0 \Rightarrow A\cap U\neq\emptyset$.

Por tanto, $x\in\bar{A}$.