1/10/2020

TEMA 1. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

X conjunto no vacío

<u>Def</u>: Una topología T en X es una familia de subconjuntos de X ($T \subset P(X)$) que verifica:

1. $\emptyset, X \in T$
2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$ ($U_i \in T \ \forall i \in I$) $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T$
3. $U_1, \dots, U_k \in T \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_k \in T$

A los elementos de T se les llama conjuntos abiertos para la topología T.

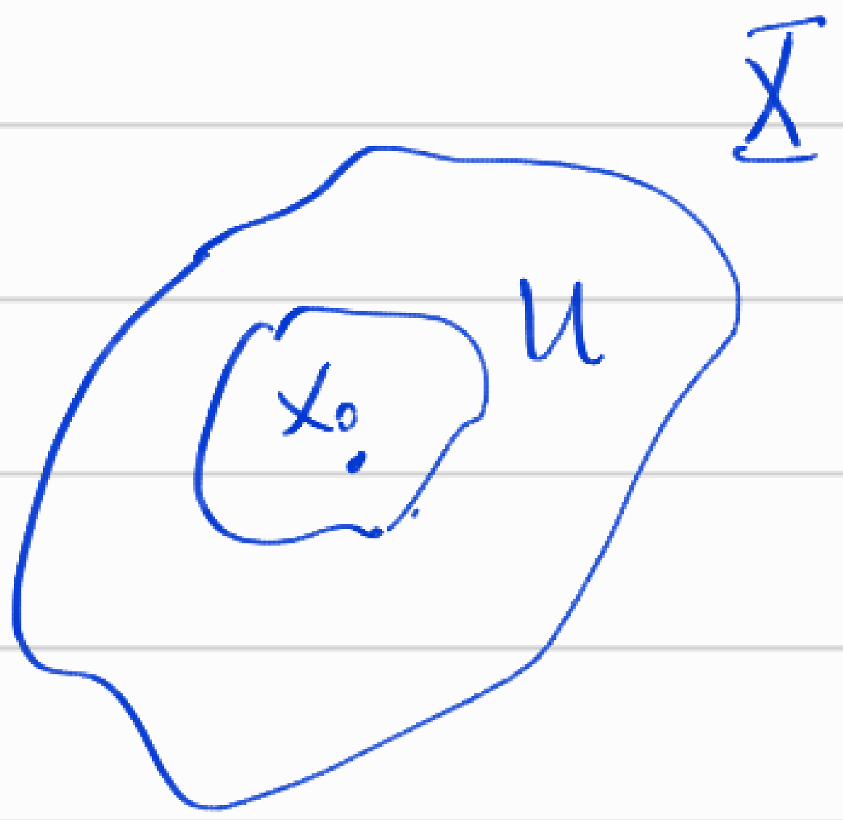
<u>Ejemplos</u>: 1. Si (X,d) es espacio métrico

$$T_d = \{U \subset X : \forall x \in U, \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset U\} \cup \{\emptyset\}$$

T_d es la topología en X asociada a d.

2. Topología trivial. $X \neq \emptyset$, $T_t = \{\emptyset, X\}$.

3. $X \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in X$



$$T_{x_0} = \{U \subset X : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

T_{x_0} es una topología en X

1. $\phi \in T_{x_0}$. $x_0 \in X \Rightarrow X \in T_{x_0}$

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset T_{x_0} \Rightarrow U_i = \phi$ ó $x_0 \in U_i$ $\forall i \in I$

- Si $\underline{U_i = \phi}$ $\forall i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i = \phi \in T_{x_0}$

- Si $\underline{U_{i_0} \neq \phi}$ para algún $i_0 \in I \Rightarrow x_0 \in U_{i_0} \Rightarrow x_0 \in \bigcup_{i\in I} U_i$

  $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in T_{x_0}$

3. $U_1, \dots, U_K \in T_{x_0} \Rightarrow U_i = \phi$ ó $x_0 \in U_i$

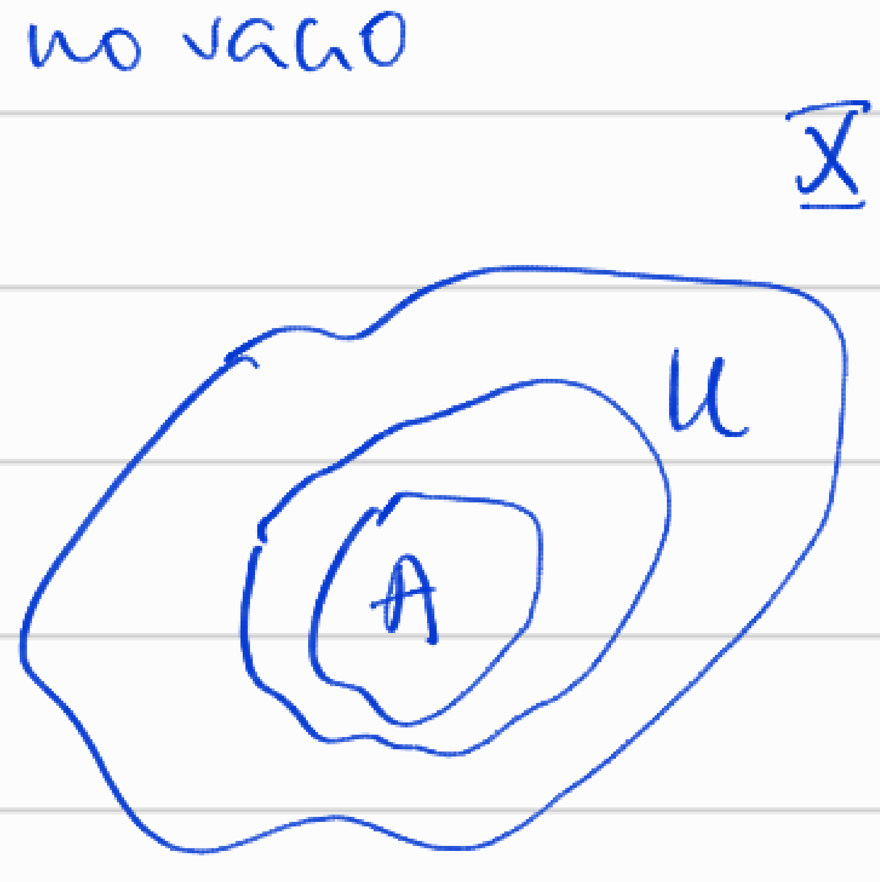
- Si algún $U_{i_0} = \phi \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_K = \phi$

- Si $U_i \neq \phi$ $\forall i \in \{1, \dots, K\} \Rightarrow x_0 \in U_i$ $\forall i \Rightarrow x_0 \in U_1 \cap \dots \cap U_K$

  $\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_K \in T_{x_0}$

4. Ejercicio. Sea $X \neq \phi$, $A \subset X$ subconjunto no vacío

$$T_A = \{U \subset X : A \subset U\} \cup \{\phi\}$$



Probar que T_A es una topología en X

$A = \{x_0\}$

5. Topología discreta. $X \neq \phi$. $T_D = P(X)$. Cualquier subconjunto es abierto en T_D.

Si d es la distancia discreta, entonces $T_d = T_D$

$T_d \subset P(X) = T_D$; $T_d \subset T_D$

$$\underbrace{U \in T_D} \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} \{x\} = \bigcup_{x \in U} \underbrace{B(x, 1/2)}_{\substack{\Uparrow \\ T_d}} \in T_d \Rightarrow \underbrace{U \in T_d}$$

$\Rightarrow T_D \subset T_d \Rightarrow T_D = T_d$ $\quad\quad$ $(B(x,r) = \{x\} \quad 0 < r \leq 1)$

6. Si $X \neq \phi$ y T es una topología en X, entonces

$$\{\phi, X\} = T_t \subset T \subset T_D = P(X)$$

<u>Def</u>: Sea X un conjunto y T_1, T_2 dos topologías en X. Diremos que T_1 es más fina que T_2 si $T_2 \subset T_1$. En la misma situación $T_2 \subset T_1$ diremos que T_2 es más gruesa que T_1.

6. $X \neq \phi$. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. T_x, T_y

$\{x\} \in T_x$, $\{x\} \notin T_y$ $\quad\quad$ $T_x \not\subset T_y$

$\{y\} \in T_y$, $\{y\} \notin T_x$ $\quad\quad$ $T_y \not\subset T_x$

7. $X \neq \emptyset$. Topología de los complementos finitos

$$T_{CF} = \{ U \subset X : X \setminus U \text{ es finito} \} \cup \{\emptyset\}$$

T_{CF} es una topología en X.

1. $\emptyset \in T_{CF}$. $X \setminus X = \emptyset$ finito (con 0 elementos) $\Rightarrow X \in T_{CF}$

2. $\{U_i\}_{i \in I} \subset T_{CF}$. Si $U_i = \emptyset \ \forall i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset \in T_{CF}$

Supongamos que $\exists\, i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} \neq \emptyset \Rightarrow X \setminus U_{i_0}$ es finito.

$$\left(X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \subset X \setminus U_{i_0} \text{ finito}$$

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i)$ finito (subconjunto de un conjunto finito)

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T_{CF}$

3. $U_1, \dots, U_K \in T_{CF}$. Si algún $U_i = \emptyset \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_K = \emptyset$

Supongamos $U_i \neq \emptyset \ \forall i \Rightarrow X \setminus U_i$ finito $\forall i$

$X \setminus (U_1 \cap \dots \cap U_K) = (X \setminus U_1) \cup \dots \cup (X \setminus U_K)$ finito (unión finita de conjuntos finitos)

$\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_K \in T_{CF}$

Si X es finito, $T_{CF} = T_D$ (Si X es finito, $A \subset X \Rightarrow X \setminus A$ es finito)

8. $X \neq \phi$. Topología complementos numerables

$$T_{CN} = \{U \subset X : X \setminus U \text{ es numerable}\} \cup \{\phi\}$$

Ejercicio (se necesita en el paso 3 que la unión finita de conjuntos numerables es numerable)

$T_{CF} \subset T_{CN}$

Si X es numerable $\Rightarrow T_{CN} = T_D$ ($\overset{\phi}{\underset{\neq}{U}} \subset X \Rightarrow X \setminus U$ es un subconjunto de X; X es numerable $\Rightarrow X \setminus U$ numerable $\Rightarrow U \in T_{CF}$)

Def: Un espacio topológico (X, T) es un par formado por un conjunto no vacío y una topología T en X

Def: Sea (X, T) un espacio topológico. Diremos que $C \subset X$ es un conjunto cerrado si $X \setminus C \in T$ (es un conjunto abierto).

A la familia de los subconjuntos cerrados de (X, T) la denotaremos por C_T.

Propiedades:
1. $\phi, X \in C_T$
2. $\{C_i\}_{i \in I} \subset C_T \Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i \in C_T$
3. $C_1, \dots, C_k \in C_T \Rightarrow C_1 \cup \dots \cup C_k \in C_T$

Dem: 1. $\phi = \mathbb{X} \setminus \underset{\substack{\cap \\ T}}{\mathbb{X}} \in G_T$ $\qquad$ $\mathbb{X} = \mathbb{X} \setminus \underset{\substack{\cap \\ T}}{\phi} \in G_T$

2. $\{G_i\}_{i\in I} \subset G_T \Rightarrow \mathbb{X} \setminus G_i \in T \ \forall i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} (\mathbb{X}\setminus G_i) \in T$

$$\bigcap_{i\in I} G_i \in G \Leftarrow \underbrace{\mathbb{X} \setminus \left(\bigcap_{i\in I} G_i\right)}$$

3. $G_1, \dots, G_k \in G_T \Rightarrow \mathbb{X}\setminus G_i \in T \ \forall i$

$$\mathbb{X}\setminus(G_1 \cup \dots \cup G_k) = (\underset{\substack{\cap \\ T}}{\mathbb{X}\setminus G_1}) \cap \dots \cap (\underset{\substack{\cap \\ T}}{\mathbb{X}\setminus G_k}) \in T$$

$\Rightarrow G_1 \cup \dots \cup G_k \in G_T$

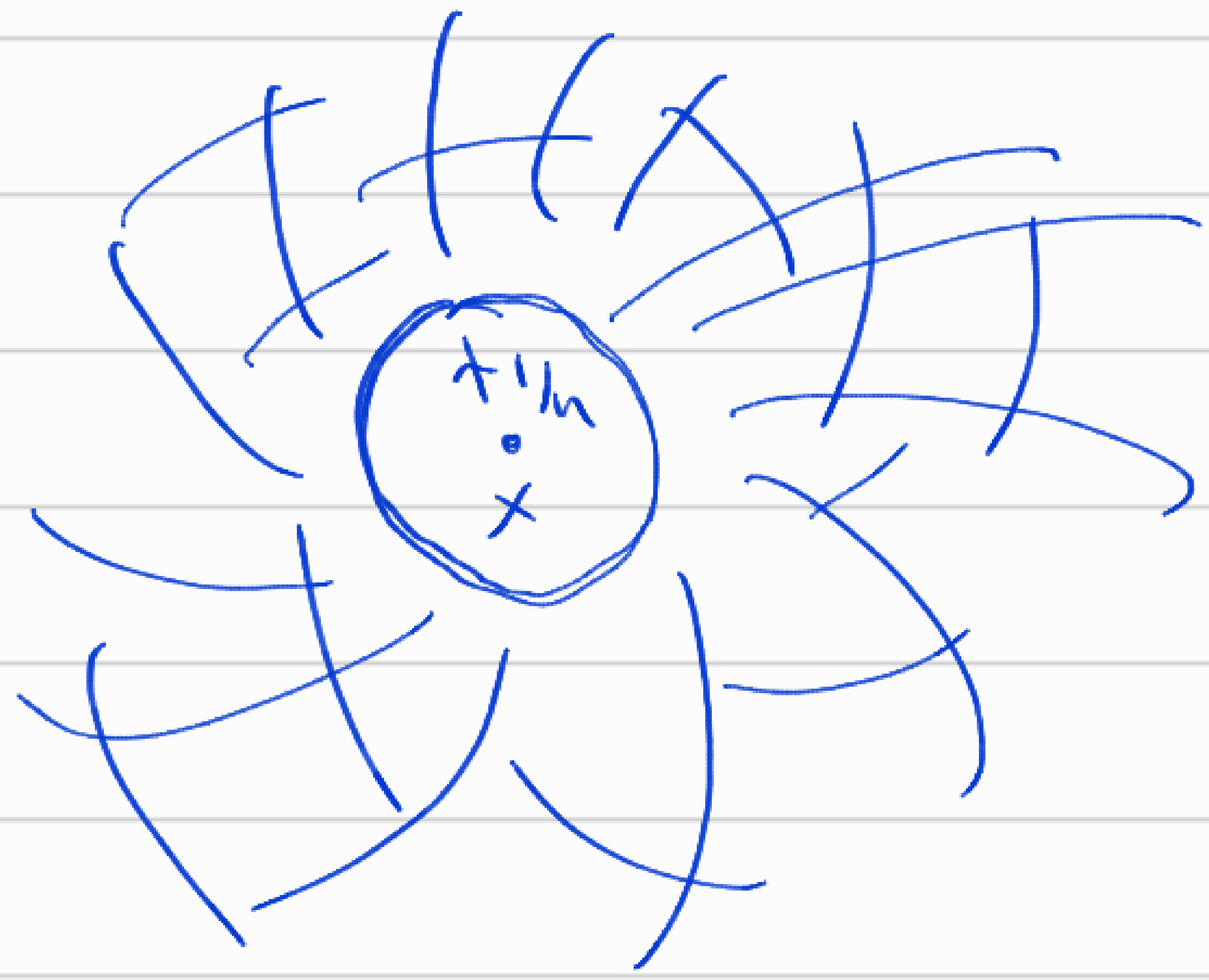
Consecuencia: $(\mathbb{X}, d)$ $\quad T_d$ $\quad x \in \mathbb{X}$. Sabemos que $\bar{B}(x, 1/n)$ son conjuntos cerrados

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(x, 1/n) \Rightarrow \{x\} \in G$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$, tomamos $x \in \mathbb{R}^2$

$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x, 1/n)$. Pasando al complementario

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{x\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^2 \setminus B(x, 1/n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{y \in \mathbb{R}^2 : d(y,x) \geq 1/n\}$$

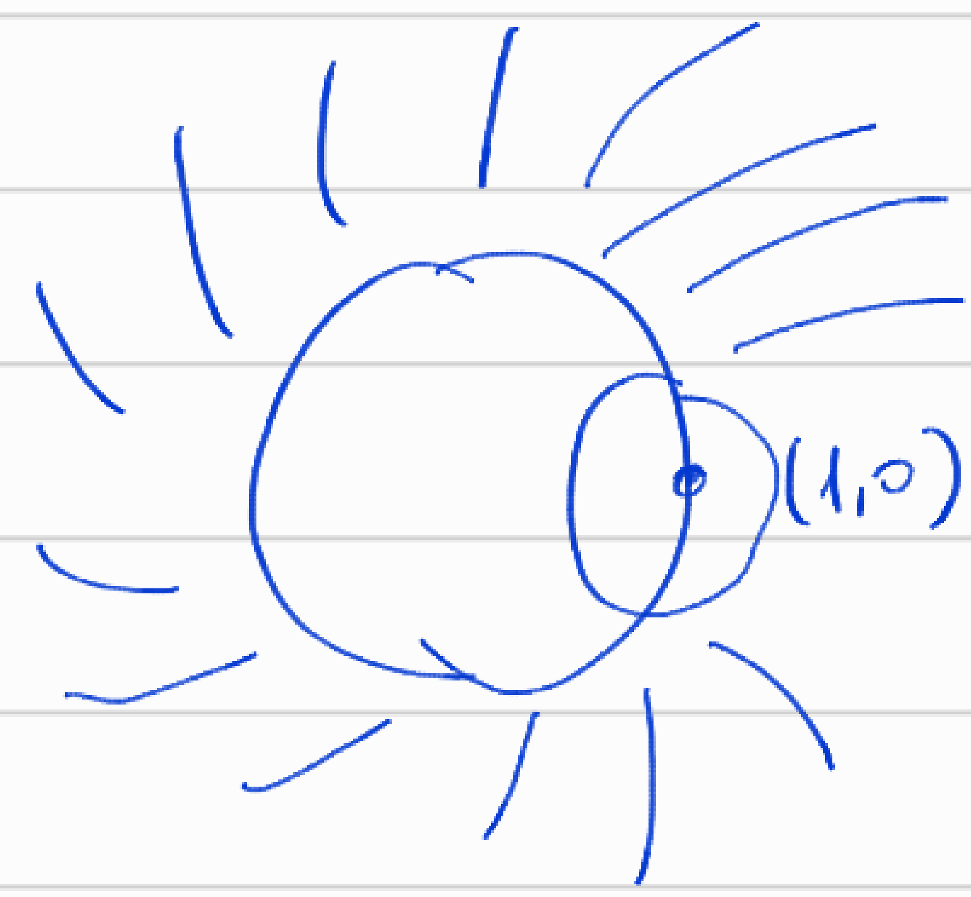


$\mathbb{R}^2 \setminus B(x,1/n)$

$\{\mathbb{R}^2 \setminus B(x,1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos cerrados cuya unión no es un conjunto cerrado.

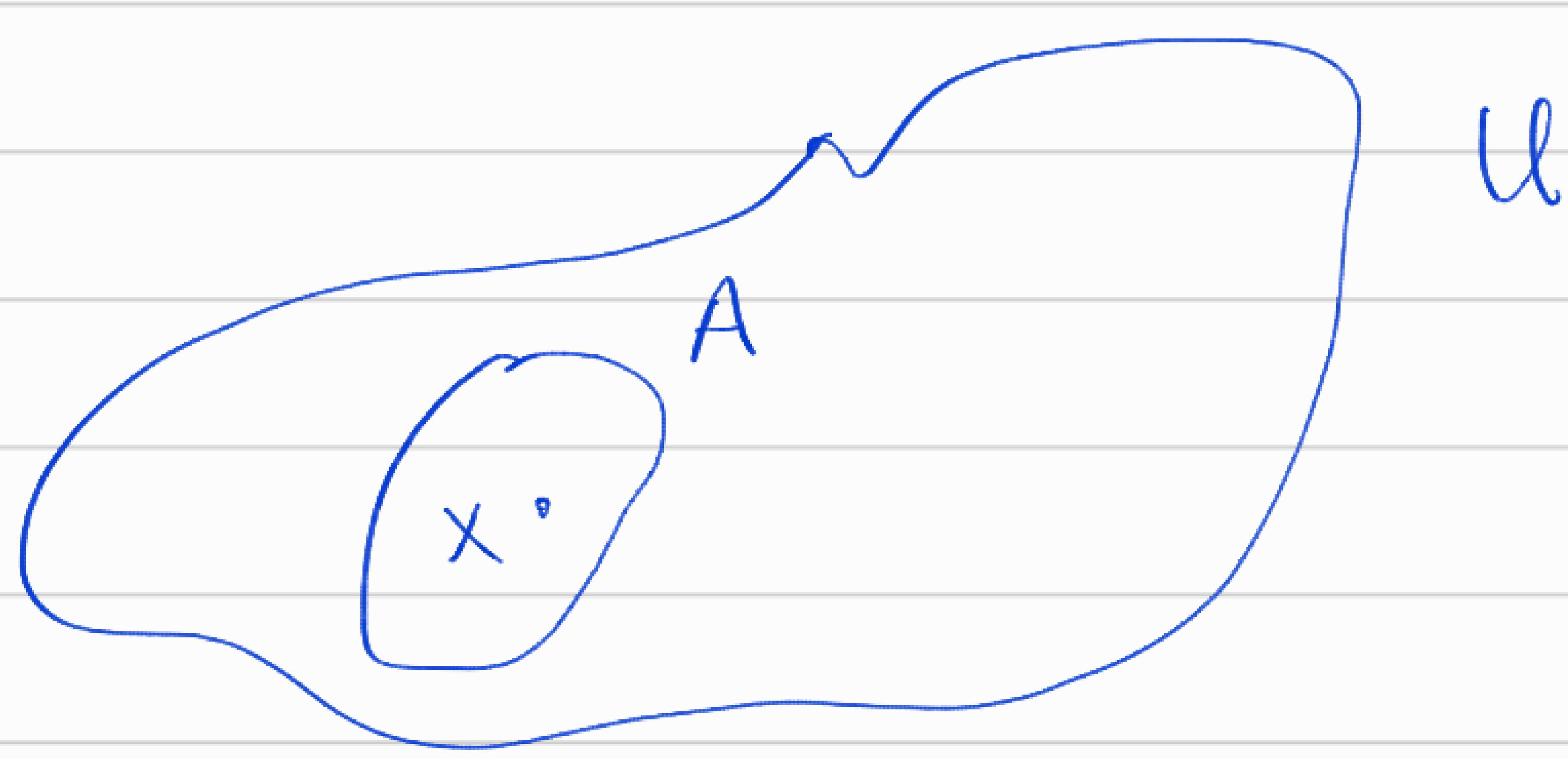
Otro contraejemplo:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}\left(0, 1-\frac{1}{n}\right) = B(0,1) \quad \text{en } (\mathbb{R}^2, d_2)$$

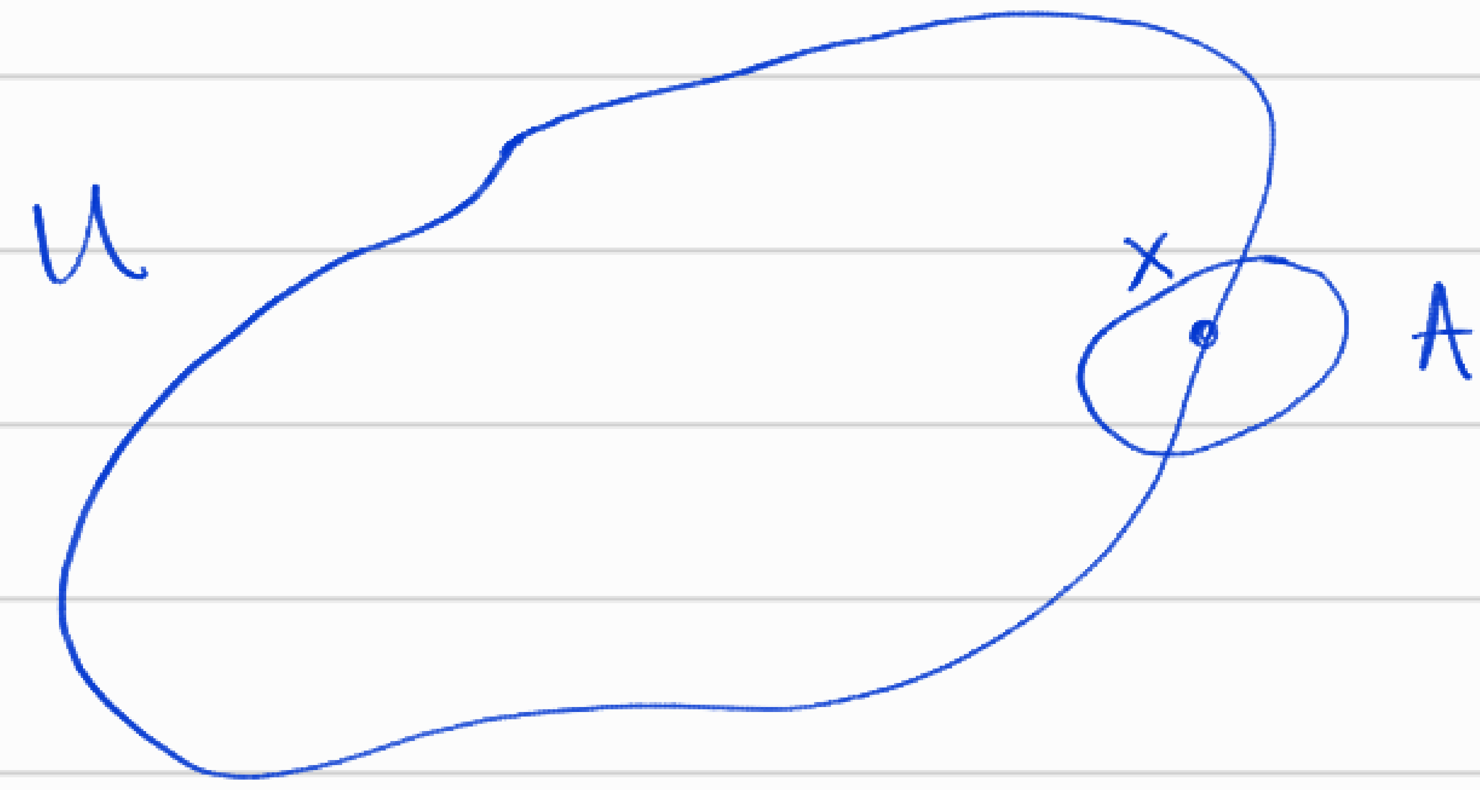


<u>Def</u> (entorno de un punto) Sea (X, T) un espacio topológico, $x \in X$. Diremos que un conjunto U es entorno del punto x si existe $A \in T$ tal que

$$x \in A \subset U$$



<u>Ejemplo</u>: ¿Cuándo U no sería entorno de x?



Cualquier abto. que contiene a x no está contenido en $\mathcal{U}$ (interseca a $X \setminus \mathcal{U}$).

Ejemplo: si $\mathcal{U} \subset X$ es abierto y $x \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ es entorno de x

Podemos tomar $A = \mathcal{U}$

Un conjunto abierto es entorno de cada uno de sus puntos.

Def. Al conjunto de entornos de $x \in X$ en un espacio topológico lo denotaremos por N_x.

(entorno = neighbourhood)

Ejemplo: (X, T_t) $\quad N_x = \{X\} \quad \forall x \in X$

Ejemplo: (X, T_D) $\quad \underline{N_x = \{U \subset X : x \in U\}}$

$$x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in \underbrace{\{x\}}_{\text{abierto}} \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in N_x \qquad \{U \subset X : x \in U\} \subset N_x$$

$N_x \subset \{U \subset X : x \in U\}$ siempre

Def: sea (X,T) un e. top. Una base $\mathcal{B}$ de la topología T es una subfamilia $\mathcal{B} \subset T$ tal que todo $U \in T$ no vacío se puede expresar como unión arbitraria de elementos de $\mathcal{B}$.

Ejemplo: (X,d) e. métrico $\{B(x,r) : x \in X, r>0\}$ es una base $\mathcal{B}$ de T_d.

$$U \in T_d,\ U \neq \emptyset \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B(x, r(x))$$

Ejemplo: (X,d) e. métrico $\mathcal{B}_{r_0} = \{B(x,r) : x \in X,\ 0<r<r_0\}$

$\mathcal{B}_{r_0}$ es base de T_d

EJERCICIO

Ejemplo: (X, T_D) $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base de T_D

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \qquad \mathcal{B} \subset T_D \qquad \{x\} \in T_D$$

Def: sea (X,T) un espacio topológico, $x \in X$. Una base de entornos del punto x es una familia $\mathcal{B}_x \subset N_x$ tal que $\forall\, U \in N_x$, $\exists\, B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset U$.

Ejemplo: Sea (X,d) un e. métrico, $x \in X$ $\mathcal{B}_x = \{B(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ es base de entornos de x en (X, T_d)

Sea $U \in N_x$. Sabemos que $\exists\, A \in T_d$ tal que $x \in A \subset U$
Por la def. de abierto en (X,d), $\exists\, r>0$ tal que $B(x,r) \subset A$
Como $r>0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < r$

$$\underbrace{B(x,\tfrac{1}{n_0})} \subset B(x,r) \subset A \subset \underbrace{U}$$

Dado $U \in N_x$, $\exists\, B(x,\frac{1}{n_0}) \in \mathcal{B}_x \,/\, B(x,\frac{1}{n_0}) \subset U$.

Ejemplo: (X, T_D) $\qquad \mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$

Si $U \in N_x \Rightarrow x \in \{x\} \subset U$

$\{x\} \in N_x$ porque es abierto y contiene a x