Capítulo 1

Espacios topológicos. Bases. Subespacios

Ejercicio 1.1 *Sea un conjunto Y con dos distancias d_1 y d_2 que satisfacen las siguientes relaciones: $kd_1 \leq d_2$, $ld_2 \leq d_1$, donde k y l son dos números positivos. Se considera una aplicación $f : (X, d) \to Y$. Probar que f es una aplicación continua para la distancia d_1 si y sólo si lo es para d_2.*

Solución: Supongamos que f es una aplicación continua para la distancia d_1. Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Ya que $f : (X, d) \to (Y, d_1)$ es una aplicación continua en el punto x, sea $\delta > 0$ tal que si $d(x', x) < \delta$, $d_1(f(x'), f(x)) < l\epsilon$. Entonces

$$d_2(f(x'), f(x)) \leq \frac{1}{l} d_1(f(x'), f(x)) < \frac{1}{l} l\epsilon = \epsilon.$$

Si suponemos ahora que f es es una aplicación continua para d_2, la prueba de que f es continua para la distancia d_1 es análoga sin más que tomar la desigualdad $d_1 \leq \frac{1}{k} d_2$.

Ejercicio 1.2 *Se considera un espacio métrico (X, d). Se define*

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \qquad x, y \in X.$$

Probar que d' es una distancia en X y estudiar si es equivalente a d.

Solución: 1. La propiedad de simetría y el hecho de que $d' \geq 0$ son evidentes. Supongamos que $d'(x, y) = 0$. Entonces $d(x, y) = 0$, y como d es una distancia, $x = y$. Por último, probamos la desigualdad triangular para d'. Sean $x, y, z \in X$ y $a = d(x, y)$, $b = d(y, z)$ y $c = d(x, z)$. Se define $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(t) = \frac{t}{1 + t}.$$

Probar la desigualdad triangular para la distancia d' es probar que $f(c) \leq f(a)+f(b)$. Ya que la derivada de f satisface $f' > 0$, entonces f es una aplicación creciente. La desigualdad triangular para d nos dice que $c \leq a+b$ y por tanto, $f(c) \leq f(a+b)$. Por último queda probar que $f(a+b) \leq f(a)+f(b)$. Sabemos que

$$f(a+b) = \frac{a+b}{1+a+b}, \qquad f(a)+f(b) = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \frac{a+2ab+b}{1+a+b+ab}.$$

Entonces $f(a+b) \leq f(a)+f(b)$ si y solamente si $0 \leq 2ab + a^2b + ab^2$, lo cual es evidente.

2. Probamos que las distancias d y d' son equivalentes. De la definición de d' se tiene que $d' \leq d$. Por tanto, si una sucesión es convergente en (X,d), entonces también es convergente en (X,d'). Veamos ahora el recíproco. Sea $\{x_n\} \to x$ una sucesión convergente para la distancia d'. Entonces

$$d'(x_n,x) = \frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)} \longrightarrow 0.$$

Como $1+d(x_n,x) \geq 1$, esto implica que $d(x_n,x) \to 0$, es decir, $\{x_n\} \to x$ para d.

Ejercicio 1.3 *Sea (X,d) un espacio métrico. Se define $d'(x,y) = \min\{d(x,y),1\}$. Probar que d' es una distancia acotada y que es equivalente a d. Sin embargo, demostrar que si $X = \mathbb{R}$ y $d = d_u$ es la distancia usual, no existe $k > 0$ tal que $kd_u \leq d'$.*

Solución: 1. Es evidente que d' está acotada por 1. Veamos que d' es una distancia. El hecho de que $d' \geq 0$ y que es simétrica, es evidente. Supongamos que $d'(x,y) = 0$. Entonces, de la definición de d', $d(x,y) = 0$, luego $x = y$. Por último, veamos la desigualdad triangular para d'. Sean $x,y,z \in X$, $a = d(x,y)$, $b = d(y,z)$ y $c = d(x,z)$. Hay que probar que

$$\min\{c,1\} \leq \min\{a,1\} + \min\{b,1\} \quad (*)$$

La desigualdad triangular para d nos dice que $c \leq a+b$. Si alguno de los dos números de la derecha en (*) son 1, la desigualdad es evidente, pues $\min\{c,1\} \leq 1$. Supongamos pues que en la parte de la derecha de (*) se tiene $a+b$. Entonces usando la desigualdad triangular para la distancia d tenemos

$$\min\{c,1\} \leq c \leq a+b,$$

probando (*).

2. De la definición de d' se tiene $d' \leq d$, luego si una sucesión es convergente en el espacio métrico (X,d), entonces también lo es en (X,d'). Sea ahora $\{x_n\} \to x$ para d', es decir, $d'(x_n,x) \to 0$. Entonces, a partir de un lugar de la sucesión $\{d'(x_n,x)\}$, los términos de ésta son menores que 1, luego por la definición de d', $d(x_n,x) = d'(x_n,x)$, es decir, $d(x_n,x) \to 0$ y la sucesión converge a x para la distancia d.

3. Supongamos que existe dicho número positivo k. Entonces se llega a una contradicción de la siguiente forma:

$$2 = k|\frac{2}{k} - 0| = k\ d_u(\frac{2}{k}, 0) \leq d'(\frac{2}{k}, 0) \leq 1,$$

donde en la primera desigualdad hemos usado que $kd_u \leq d'$.

Ejercicio 1.4 *Se define* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ *mediante*

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & si\ x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Probar que d *es una distancia en* $\mathbb{R}^2$ *y estudiar si es equivalente a la distancia usual de* $\mathbb{R}^2$.

Solución: 1. Es evidente que $d \geq 0$ y que es simétrica. Por otra parte, si $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, entonces $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0$. Supongamos ahora que $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0$. Si $x_1 \neq y_1$, entonces $|x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| = 0$, es decir, $|x_1 - y_1| = 0$ y así $x_1 = y_1$, llegando a una contradicción. Por tanto, $x_1 = y_1$. Entonces, de la definición de d, $|x_2 - y_2| = 0$, es decir, $x_2 = y_2$.

Veamos ahora la desigualdad triangular. Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Hay que probar que

$$d((x_1, x_2), (z_1, z_2)) \leq d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d((y_1, y_2), (z_1, z_2)) \quad (*)$$

Distinguimos varios casos:

- Si $x_1 = z_1$, tenemos las siguientes posibilidades:
  a) si $x_1 = y_1$, entonces (*) se escribe

  $$|x_2 - z_2| \leq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|,$$

  lo cual es cierto por la desigualdad triangular para el valor absoluto.

  b) Si $x_1 \neq y_1$, entonces (*) es

  $$|x_2 - z_2| \leq |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| + |y_2 - z_2|,$$

  que es cierto pues

  $$|x_2 - z_2| \leq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \leq |x_2| + |y_2| + |y_2 - z_2|.$$

- Supongamos ahora que $x_1 \neq z_1$. De nuevo caben varias posibilidades:

a) $x_1 = y_1$. Entonces (*) es

$$|x_2| + |x_1 - z_1| + |z_1| \leq |x_2 - y_2| + |y_2| + |\overset{x}{\cancel{y}}_1 - z_1| + |z_2|,$$

lo cual es cierto.

b) El caso $y_1 = z_1$ es análogo.

c) x_1, y_1 y z_1 son tres números distintos. Entonces (*) se escribe

$$|x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| \leq |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_1 - z_1| + |z_2|.$$

Esta desigualdad también se satisface, ya que simplificando tendríamos

$$|x_1 - z_1| \leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |y_2|.$$

2. Las distancias d y la usual de $\mathbb{R}^2$ no son equivalentes. Para ello basta con ver que la sucesión $\{(\frac{1}{n}, 1)\}$ converge al punto $(0,1)$ para la distancia usual, pero no para la distancia d:
$$d((\frac{1}{n}, 1), (0,1)) = 1 + \frac{1}{n} + 1 \longrightarrow 2.$$

Ejercicio 1.5 *Se considera un conjunto X y una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$. Se define $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante*
$$d(x,y) = |f(x) - f(y)|.$$
Probar que d no es necesariamente una distancia y dar condiciones necesarias y suficientes para que lo sea.

Solución: Si tomamos $X = \mathbb{R}$ y $f(x) = x^2$, entonces

$$d(1,-1) = |f(1) - f(-1)| = 0,$$

pero $1 \neq -1$. Veamos que la condición necesaria y suficiente para que d sea una distancia es que f sea inyectiva.

Las propiedades de simetría y la desigualdad triangular son consecuencias de las mismas propiedades para la distancia usual de $\mathbb{R}$. Por otra parte, $d \geq 0$. Supongamos ahora que $d(x,y) = 0$. Entonces $|f(x) - f(y)| = 0$, luego $f(x) = f(y)$. Entonces $x = y$ si y sólo si f es inyectiva.

Ejercicio 1.6 *Consideramos el subconjunto de la recta real $A = [0,1] \cup (2,3) \cup \{5\}$ y en él la distancia usual.*

1. *Estudiar si $\{5\}$ es abierto o cerrado en A.*

2. *Hacer lo mismo para* $(2,3)$.

3. *Calcular la adherencia de* $[0,1)$ *en* A.

4. *Estudiar si* $[0,\frac{1}{2}]$ *es entorno de* 0 *en* A.

Solución: Si $x \in A$, denotaremos por $B_r^A(x)$ la bola en A de radio r y centrada en x, es decir $B_r^A(x) = (x-r, x+r) \cap A$.

1. El conjunto $\{5\}$ es abierto, pues $5 \in B_1^A(5) = \{5\} \subset \{5\}$. También es un conjunto cerrado, pues si $x \in A$ y $x \neq 5$, entonces $x < 3$ y $B_1^A(x) \cap \{5\} = \emptyset$.

2. El conjunto $(2,3)$ es abierto: si $x \in (2,3)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) = (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset (2,3)$. Entonces
$$x \in B_\epsilon^A(x) = B_\epsilon(x) \subset (2,3).$$
También es cerrado: si $x \notin (2,3)$, entonces $x = 5$ o $x \leq 1$. En el primer caso, $B_1^A(5) \cap (2,3) = \emptyset$. En el segundo, $B_1^A(x) \cap (2,3) = \emptyset$.

3. La adherencia de $[0,1)$ en A es $[0,1]$. Por una parte, es evidente que los puntos de $(2,3) \cup \{5\}$ no son adherentes. Por otra, $\forall \epsilon \in (0,1/2)$,
$$B_\epsilon^A(1) \cap [0,1) = (1-\epsilon, 1] \cap [0,1) \neq \emptyset,$$
luego 1 es un punto adherente.

4. El conjunto $[0,\frac{1}{2}]$ sí es un entorno de 0, pues entre 0 y $[0,\frac{1}{2}]$ existe una bola: $B_{1/4}^A(0)$:
$$0 \in B_{\frac{1}{4}}^A(0) = [0, \frac{1}{4}) \subset [0, \frac{1}{2}].$$

Ejercicio 1.7 *Calcular el interior y adherencia de cada uno de los siguientes subconjuntos de* $\mathbb{R}^2$:

1. $A = \{(x,y); y = 0\}$.

2. $B = \{(x,y); x > 0, y \neq 0\}$.

3. $C = A \cup B$.

4. $D = \{(x,y); x \in \mathbb{Q}\}$.

5. $E = \{(x,y); 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución: 1. El conjunto A tiene interior vacío: si $(x,0) \in A$ y $r > 0$, entonces $B_r(x,0) \not\subset A$, pues $(x,r/2) \in B_r(x,0)$ y $(x,r/2) \notin A$.

La adherencia de A es A: si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $y \neq 0$, sea $r = |y| > 0$. Entonces $B_r(x,y) \cap A = \emptyset$. Por tanto, cualquier punto de $\mathbb{R}^2 \setminus A$ no es adherente.

2. El interior de B es B: si $(x,y) \in B$, se toma $r = \min\{x, |y|\}$ y entonces $B_r((x,y)) \subset B$.

   Por otra parte, la adherencia es el conjunto $[0,\infty) \times \mathbb{R}$. Para ello, si (x,y) es un punto adherente a B, entonces existe $\{(x_n, y_n)\} \subset B$ que converge a (x,y), es decir, $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Por tanto, y ya que $x_n > 0$, se tiene $x \geq 0$. Luego $\overline{B} \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}$. Veamos que se da la igualdad. Para ello, se consideran los siguientes casos:

   - Los puntos de la forma $(0,y)$, con $y \neq 0$, son adherentes, pues $\{(\frac{1}{n}, y)\} \subset B \to (0,y)$.
   - Los puntos de la forma $(x,0)$, con $x > 0$, también son adherentes: $\{(x, \frac{1}{n})\} \subset B \to (x,0)$.
   - El punto $(0,0)$ es adherente: $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\} \subset B \to (0,0)$.

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} = A \cup ([0,\infty) \times \mathbb{R})$.

   Veamos que $int(A \cup B) = int(B) = (0,\infty) \times \mathbb{R}$. Por una parte, es evidente que $int(B) \subset int(A \cup B)$. Sea ahora $(x,y) \notin int(B)$. Tenemos dos posibilidades: si $y = 0$, $x < 0$, entonces $\{(x, \frac{1}{n})\} \to (x,y)$, pero ningún punto de la sucesión se encuentra en $A \cup B$. La otra posibilidad es que $x = 0$ e $y \in \mathbb{R}$. Entonces $\{(\frac{-1}{n}, y - \frac{1}{n})\} \to (0,y)$ y sucede lo mismo que en la otra sucesión.

4. El interior de D es vacío, pues cualquier bola centrada en puntos de D, va a contener puntos con abscisa no racional.

   La adherencia es el plano $\mathbb{R}^2$: si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, con $x \notin \mathbb{Q}$, entonces toda bola contiene puntos con abscisa racional.

5. Veamos que el interior del conjunto E es $\{(x,y); 0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Si (x,y) es un punto en dicho conjunto, entonces llamando $r = \min\{1 - \sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{x^2+y^2}\} > 0$, la bola $B_r(x,y)$ está contenida en E. Por otra parte, los puntos con $x^2 + y^2 = 1$ no son interiores: la sucesión $\{(x,y) + \frac{1}{n}(x,y)\}$ converge a (x,y), pero ningún punto pertenece a E: el módulo de un punto de la sucesión es $1 + 1/n > 1$.

   Probamos que la adherencia es $\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1$: si (x,y) es un punto adherente, existe una sucesión $\{(x_n, y_n)\}$ en E que converge a (x,y), luego $x_n^2 + y_n^2 \to x^2 + y^2 \leq 1$. Sólo queda probar que el origen es un punto adherente, pero esto es evidente, pues la siguiente sucesión de E converge al origen $\{(\frac{1}{n}, 0)\}$.

Ejercicio 1.8 *Estudiar la adherencia en* $\mathbb{R}^2$ *del grafo de la aplicación* $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $x > 0$.

Solución: Sea $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})); x > 0\}$ el grafo de f. Veamos que la adherencia es el conjunto $A \cup (\{0\} \times [-1,1])$. Por una parte, los puntos de la forma $(0, y)$, con $y \in [-1,1]$

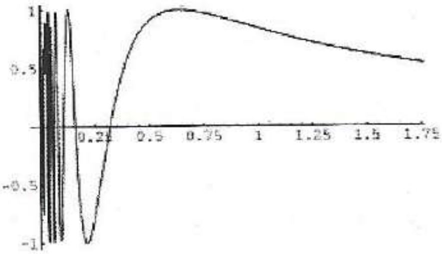

Figura 1.1: El grafo de la función f del ejercicio 1.8

son puntos adherentes: sea $x > 0$ tal que $\sin(x) = y$. Entonces la sucesión

$$\left\{(\frac{1}{x+2\pi n}, y); n \in \mathbb{N}\right\}$$

está incluida en A, pues

$$\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{x+2\pi n}}\right) = \sin(x + 2\pi n) = \sin(x) = y.$$

Por otra parte, esta sucesión satisface $\{(\frac{1}{x+2\pi n}, y)\} \to (0, y)$, luego $(0, y)$ es un punto adherente.

Para finalizar, si (x, y) es un punto adherente de A, entonces existe una sucesión $\{(x_n, y_n)\} \subset A$ que converge a (x, y). En particular, $x_n \to x$, es decir, $x \geq 0$ e $y_n = \sin(\frac{1}{x_n}) \to y$. Ya que $x_n \to x$, se tiene:

- si $x \neq 0$, $y = \sin(1/x)$, es decir, $(x, y) \in A$.
- si $x = 0$, entonces, $|y| \leq 1$ y por tanto, $(x, y) \in \{0\} \times [-1, 1]$.

Ejercicio 1.9 *Dado un conjunto X, estudiar cuáles son las sucesiones convergentes en X, si consideramos las topologías discreta y trivial.*

Solución: 1. Supongamos que X tiene la topología discreta. Veamos que las sucesiones convergentes son aquéllas que son constantes a partir de un lugar de la sucesión. Es evidente que en cualquier espacio topológico, este tipo de sucesiones son convergentes.

Veamos ahora que si $\{x_n\} \to x$, entonces la sucesión es constante a partir de un lugar. Sea el entorno de x dado por $U = \{x\}$. Por definición de convergencia existe $\nu \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq \nu$, $x_n \in U$, es decir, $x_n \in \{x\}$, y por tanto, la sucesión, a partir del lugar ν, es constante (y constantemente igual a x).

2. Probamos que cualquier sucesión en un espacio con la topología trivial es convergente. Sea $\{x_n\} \subset X$ y sea $x \in X$ arbitrario. Veamos que $x_n \to x$. Para ello, sea U un entorno de x. Pero el único entorno de x es X. Es evidente que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$, luego la sucesión es convergente. Como conclusión, cualquier elemento de X es límite de cualquier sucesión (la cual es convergente) de X.

Ejercicio 1.10 *Se considera un espacio topológico (X, τ). Un subconjunto suyo D se llama denso si $\overline{D} = X$. Probar que esta propiedad es equivalente a que para cualquier abierto no vacío O, $O \cap D \neq \emptyset$. Sea un conjunto infinito X con la topología de los complementos finitos. Probar que todo abierto es denso.*

Solución: 1. Supongamos que D es denso y sea O un abierto no vacío. Sea $x \in O$. Ya que $x \in X = \overline{D}$, cualquier entorno suyo interseca a D. En particular, el entorno O.

Por otra parte, sea ahora D un conjunto que satisface que $\forall O \in \tau$, $O \cap D \neq \emptyset$, siendo O un conjunto no vacío. Sea $x \in X$ y U un entorno suyo. Sea $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset U$. Ya que O contiene a x, es un conjunto no vacío, luego $O \cap D \neq \emptyset$ y por tanto, $U \cap D \neq \emptyset$.

2. Usamos la caracterización anterior. Sea $G \in \tau_{CF}$. Si $G = X$, es evidente que X es denso. Consideramos ahora $G = X \setminus F$, donde F es un conjunto finito. Sea $O \in \tau_{CF}$ no vacío. Si $O = X$, entonces $G \cap O = G \neq \emptyset$. Si $O = X \setminus F'$, donde F' es un conjunto finito, entonces

$$G \cap O = (X \setminus F) \cap (X \setminus F') = X \setminus (F \cup F') \neq \emptyset,$$

pues X es un conjunto con cardinal infinito.

Ejercicio 1.11 *Se considera un espacio topológico (X, τ) y $A \subset X$. Demostrar que*

- $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ *si y solamente si $X \setminus A$ es denso en X.*
- $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ *si y solamente si $\forall D$ subconjunto denso en X, $D \cap A \neq \emptyset$.*

Solución: 1. Ya que $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathrm{int}(A)$, el conjunto $X \setminus A$ es denso si y sólo si $X \setminus \mathrm{int}(A) = X$, es decir, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

2. Si $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ y si D es un conjunto denso, por el anterior ejercicio, dicho conjunto interseca a cualquier abierto no vacío, en particular, a $\overset{\circ}{A}$. Pero

$$D \cap A \supset D \cap \overset{\circ}{A} \neq \emptyset.$$

Supongamos ahora que A es un conjunto que satisface que para cualquier conjunto denso D, $D \cap A \neq \emptyset$. Si $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, por el anterior apartado, $X \setminus A$ es denso, luego $(X \setminus A) \cap A \neq \emptyset$, lo cual es contradictorio.

Ejercicio 1.12 *Sea $X = \{a, b\}$. Se define el espacio de Sierpinski como el espacio topológico (X, τ), donde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Calcular el interior, adherencia y frontera de los conjuntos $\{a\}$ y $\{b\}$.*

Solución: A partir de los conjuntos abiertos, obtenemos la familia de cerrados: $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.

1. El interior del conjunto $\{a\}$ es el propio conjunto, pues $\{a\} \in \tau$. El cerrado más pequeño que contiene a $\{a\}$ es X, luego $\overline{\{a\}} = X$ (el conjunto es denso). Por último, $\mathrm{Fr}(\{a\}) = \overline{\{a\}} - \mathrm{int}(\{a\}) = \{b\}$.
2. El interior de $\{b\}$ es el vacío: es el único abierto incluido en $\{b\}$. El conjunto $\{b\}$ es cerrado, luego coincide con su adherencia. Como consecuencia, $\mathrm{Fr}(\{b\}) = \{b\}$.

Ejercicio 1.13 *1. Se considera en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ la familia τ_1 formada por $\emptyset, \mathbb{N}$ y los conjuntos $A_n = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que τ_1 es una topología en $\mathbb{N}$.*

2. Análogamente al apartado anterior, cambiando los A_n por $B_n = \{n, n+1, \ldots\}$.

3. Determinar el interior, la adherencia y la frontera del conjunto $A = \{3, 4\}$ en ambos espacios topológicos.

Solución: 1.
- El hecho de que $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$ está en τ_1 es trivial.
- Sea $\{A_{n_i}; i \in I\} \subset \tau_1$ y veamos que su unión también está en τ_1. Descartamos los casos triviales de que algunos de estos abiertos es trivial. Si el conjunto $\{n_i; i \in I\}$ está acotado superiormente, es finito y por tanto, tenemos una unión finita. Llamando $n = \max\{n_i; i \in I\}$

$$\bigcup_{i \in I} A_{n_i} = A_n \in \tau_1.$$

Si el conjunto $\{n_i; i \in I\}$ no está acotado superiormente, entonces

$$\bigcup_{i \in I} A_{n_i} = \mathbb{N} \in \tau_1.$$

- Probamos que la intersección de dos elementos de τ, pertenece a τ_1. Sea $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$A_n \cap A_m = \{1, \ldots, n\} \cap \{1, \ldots, m\} = A_{\text{mín}\{n,m\}} \in \tau_1.$$

2. - $\emptyset, \mathbb{N} \in \tau_2$.
   - Sea $\{B_{n_i}; i \in I\} \subset \tau_2$. Es evidente que $\bigcup_{i \in I} B_{n_i} = B_n \in \tau_2$, donde $n = \text{mín}\{n_i; i \in I\}$.
   - También es evidente que $B_n \cap B_m = B_{\text{máx}\{n,m\}} \in \tau_2$.

3. - Primero consideramos la topología τ_1. El único abierto contenido en A es el vacío, luego el interior de A es vacío. Los cerrados que contienen a A son $\{X, X \setminus A_1, X \setminus A_2\}$. Como $\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A, $\overline{A} = X \setminus A_2 = \{3, 4, 5, \ldots\}$. Por tanto $\text{Fr}(A) = \{3, 4, 5, \ldots\}$.
   - En la topología τ_2 no hay ningún abierto distinto del vacío incluido en A, luego el interior de A es de nuevo el conjunto vacío. Los cerrados que contienen a A son $\{\mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus B_5, \mathbb{N} \setminus B_6, \ldots\}$; luego $\overline{A} = \mathbb{N} \setminus B_5 = \{1, 2, 3, 4\}$. Por último, $\text{Fr}(A) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ejercicio 1.14 *Hallar base de entornos de los espacios topológicos del ejercicio anterior.*

Solución: 1. Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \{A_n\}$ es base de entornos de n. Es evidente que A_n es un abierto y contiene a n, luego A_n es un entorno de n. Sea ahora un abierto O que contiene a n. Esto quiere decir que $O = A_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. En particular, $n \leq m$. Consecuentemente, $A_n \subset A_m = O$.

2. Ahora demostramos que $\beta_n = \{B_n\}$ es una base de entornos de n. De nuevo, B_n es un entorno de n ya que es un abierto que lo contiene. Sea ahora $O \in \tau$ tal que $n \in O$. Entonces $O = B_m$, para algún $m \in \mathbb{N}$. En particular, $m \leq n$. Por tanto, $B_n \subset B_m = O$.

Ejercicio 1.15 *En el conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$ *se define*

$$\tau = \{O \subset \mathbb{N}; \textit{si } n \in O, \textit{ y } m \textit{ divide a } n, \textit{ entonces } m \in O\}.$$

Probar que τ *es una topología en* $\mathbb{N}$ *y hallar una base de entornos de cada punto.*

Solución: Es evidente que $\emptyset$ y $\mathbb{N}$ pertenecen a τ. Sean ahora O_1 y $O_2 \in \tau$ y $n \in O_1 \cap O_2$. Ya que todos los divisores de n se encuentran tanto en O_1 como en O_2, también están en $O_1 \cap O_2$. Esto prueba que $O_1 \cap O_2 \in \tau$. Sea ahora $\{O_i; \in I\} \subset \tau$ y sea $n \in \cup_{i \in I} O_i$. Si

n está en la unión, quiere decir que $n \in O_j$, para algún $j \in I$. En particular, todos los divisores se encuentran en O_j, y por tanto, en la unión. De esta forma $\cup_{i \in I} O_i \in \tau$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = \{\text{divisores de } n\}$. Veamos que $\beta_n = \{U_n\}$ constituye una base de entornos de n. Veamos primero que U_n es un abierto. Sea $m \in U_n$ y $p|m$. Como $m|n$, entonces $p|n$, luego $p \in U_n$. Por tanto U_n es un abierto, y al contener a n, es un entorno suyo. Sea ahora $O \in \tau$ tal que $n \in O$. Probamos que $U_n \subset O$. Si $m \in U_n$, entonces $m|n$. Como $n \in O$, todos sus divisores se encuentran en O, en particular, m. Por tanto, $m \in O$, probando la inclusión $U_n \subset O$.

Ejercicio 1.16 *Determinar todas las topologías que existen sobre el conjunto $X = \{a, b, c\}$.*

Solución: Las topologías que existen en dicho conjunto son las siguientes: (con la salvedad de que podemos intercambiar las letras)

1. La topología discreta.
2. $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$.
3. $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$.
4. $\tau_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
5. $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$.
6. La topología trivial.

Ejercicio 1.17 *Sea X un conjunto no vacío y A, B dos subconjuntos no triviales y distintos de X. Se define $\tau = \{\emptyset, X, A, B\}$. Determinar qué propiedades deben satisfacer A y B para que τ sea una topología en X. Hallad el interior, adherencia, frontera y exterior de $C = \{p\}$.*

Solución: Por una parte, $A \cup B \in \tau$, luego las posibilidades son

1. $A \cup B = X$. También es necesario que $A \cap B \in \tau$. Esta intersección no puede ser ni A, ni B (en estos casos, uno de los conjuntos está contenido en el otro), ni X (esto implicaría que $A = B = X$). Por tanto, la condición necesaria y suficiente, en este caso, es que $\{A, B\}$ sea una partición de X.
2. $A \cup B = \emptyset$. Entonces A y B serían triviales, lo cual es falso.
3. $A \cup B = A$. Entonces $B \subset A$. En este caso, $A \cap B = B \in \tau$. Por tanto, si $B \subset A$, τ es una topología.

4. $A \cup B = B$. De forma análoga, τ también es una topología.

Para hallar el interior y la adherencia de C usamos las caracterizaciones que nos dicen que el interior es el mayor conjunto abierto en C y la adherencia es el menor cerrado que contiene a C. Para cada una de las anteriores topologías, tenemos

1. En este caso, $\mathcal{F} = \tau$. Supongamos que $p \in A$. Entonces $\text{int}(C) = \emptyset$ si $\{p\} \neq A$ o $\text{int}(C) = \{p\}$ si $A = \{p\}$. En cualquiera de los dos casos, $\overline{C} = A$. Si $p \in B$, el razonamiento es análogo, cambiando A por B.
2. Supongamos que $B \subset A$.
    a) Si $p \in B$, entonces $\text{int}(C) = \emptyset$ si $\{p\} \neq B$ o $\text{int}(C) = \{p\}$ si $B = \{p\}$. En cualquier caso, $\text{ext}(C) = \emptyset$.
    b) Si $p \in A - B$, entonces $\text{int}(C) = \emptyset$ y $\text{ext}(C) = B$.
    c) Si $p \in X - A$, entonces $\text{int}(C) = \emptyset$ y $\text{ext}(C) = A$.
3. Este caso es análogo al anterior, cambiando A por B.

Ejercicio 1.18 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $f : X \to Y$ una aplicación. Se define en Y la siguiente familia de subconjuntos*

$$\tau(f) = \{O' \subset Y, f^{-1}(O') \in \tau\}.$$

Probar que $\tau(f)$ es una topología en Y. Esta topología se llama topología final determinada por f.

Solución: 1. $Y \in \tau(f)$, pues $f^{-1}(Y) = X \in \tau$. El conjunto vacío también está en $\tau(f)$, pues $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$.

2. Sea $\{O'_i; i \in I\} \subset \tau(f)$. Entonces $f^{-1}(O'_i) \in \tau$. Por tanto, $\bigcup_{i\in I} O'_i \in \tau(f)$, ya que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} O'_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O'_i) \in \tau.$$

3. Sean O'_1 y O'_2 dos elementos de $\tau(f)$. Entonces $O'_1 \cap O'_2 \in \tau(f)$ puesto que

$$f^{-1}(O'_1 \cap O'_2) = f^{-1}(O'_1) \cap f^{-1}(O'_2) \in \tau$$

Ejercicio 1.19 *Sea un espacio topológico (Y, τ') y una aplicación $f : X \to Y$. Probar que la siguiente familia de subconjuntos de X determinan una topología en X:*

$$\tau_f = \{f^{-1}(O'); O' \in \tau'\}.$$

Usando la notación del ejercicio anterior, ¿es cierto que $\tau_f(f) = \tau'$

Solución: Veamos que $\tau(f)$ es una topología en X:

- Por una parte $X = f^{-1}(Y)$ y $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$, luego X y $\emptyset$ pertenecen a $\tau(f)$.
- Sea $\{O_i; i \in I\} \subset \tau(f)$, es decir, para cada $i \in I$, existe $O'_i \in \tau'$ tal que $O_i = f^{-1}(O'_i)$. Veamos que la unión pertenece a $\tau(f)$:

  $$\bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O'_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O'_i) \in \tau(f),$$

  pues $\cup_{i\in I} O'_i \in \tau'$.
- Probamos que la intersección de dos abiertos también están en τ_f. Sean $O_1 = f^{-1}(O'_1)$ y $O_2 = f^{-1}(O'_2)$ dos elementos de $\tau(f)$. Entonces

  $$O_1 \cap O_2 = f^{-1}(O'_1) \cap f^{-1}(O'_2) = f^{-1}(O'_1 \cap O'_2) \in \tau(f),$$

  ya que $O'_1 \cap O'_2 \in \tau'(\cancel{f})$.

Veamos que se da la inclusión $\tau' \subset \tau_f(f)$ y con un contraejemplo, mostramos que no se da la otra.

1. Si $O' \in \tau'$, entonces también pertenece a $\tau_f(f)$, pues $f^{-1}(O') \in \tau_f$.
2. Sea $f : \{0, 1\} \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ la aplicación constantemente cero, donde τ_u es la topología usual de $\mathbb{R}$. Entonces τ_f es la topología trivial de $\{0, 1\}$, ya que si $O \in \tau_u$, $f^{-1}(O) = \emptyset$ si $0 \notin O$ y $f^{-1}(O) = \{0, 1\}$ si $0 \in O$.

   Por otra parte, el conjunto $[0, 1] \notin \tau_u$ pero sí pertenece a $\tau_f(f)$, ya que $f^{-1}([0, 1]) = \{0, 1\}$ que es abierto en $\{0, 1\}$.

Ejercicio 1.20 *Dar un ejemplo no trivial de un espacio topológico en el que coincidan los abiertos y los cerrados.*

Solución: Usamos el ejercicio 1.16. Sea $X = \{a, b, c\}$ y se define la siguiente topología en X: $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$. Entonces la familia de cerrados es $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a\}\} = \tau$.

Ejercicio 1.21 *Se considera en $\mathbb{R}^2$ la familia de conjuntos $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{G_k; k \in \mathbb{R}\}$, donde $G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > y + k\}$. Probar que es una topología. Estudiar si $\tau \subset \tau_u$ o $\tau_u \subset \tau$. Caracterizar los cerrados.*

Solución: 1. - Por definición de τ los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{R}^2$ pertenecen a τ.

- Sea $\{G_{k_i}; i \in I\} \subset \tau$ y veamos que la unión está en τ. Caben dos posibilidades, según si el conjunto de números reales $\{-k_i; i \in I\}$ está o no acotado superiormente.

  En el primer caso, sea $-k$ su supremo. Veamos que $\bigcup_{i \in I} G_{k_i} = G_k$. Ya que $-k_i \leq -k$, cada G_{k_i} está contenido en G_k ($x > y + k_i \geq y + k$), luego también la unión. Por otra parte, sea $(x, y) \in G_k$. Entonces $x > y + k$, es decir, $y - x < -k$. Por definición de supremo, existe k_i tal que $y - x < -k_i \leq -k$, es decir, $x > y + k_i$, luego (x, y) pertenece a G_{k_i} para algún $i \in I$.

  En el segundo caso, veamos que la unión es $\mathbb{R}^2$. Para ello, sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ya que el conjunto $\{-k_i; i \in I\}$ no está acotado superiormente, existe $i \in I$, tal que $y - x < -k_i$, es decir, $x > y + k_i$, y por tanto, $(x, y) \in G_{k_i}$.

- Sean $G_k, G_l \in \tau$. Es evidente que $G_k \cap G_l = G_{\text{mín}\{k,l\}} \in \tau$.

2. Veamos que $\tau \subset \tau_u$ pero no se da la otra inclusión. Sea $G_k \in \tau$. Se define $f : (\mathbb{R}^2, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ mediante $f(x, y) = x - y - k$. Esta aplicación es continua, luego $f^{-1}(0, \infty) = \{(x, y); x - y - k > 0\} = G_k$ es un abierto en la topología usual.

   Por otra parte, cualquier bola euclídea no es un abierto en $(\mathbb{R}^2, \tau)$, pues en tal caso, existiría algún G_k (que es un conjunto no acotado) contenido en la bola.

3. La familia de cerrados se obtiene al tomar complementarios de los conjuntos abiertos, luego $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{F_k; k \in \mathbb{R}\}$, donde $F_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq y + k\}$.

Ejercicio 1.22 *Sea $A \subset (X, \tau)$ y $x \in X$. Se dice que x es un punto de acumulación si*

$$(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \qquad \forall U \in \mathcal{U}_x.$$

Se denotará por A' el conjunto de los puntos de acumulación. Probar que $\overline{A} = A' \cup A$. Probar también que en un espacio métrico, un punto x es de acumulación si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de términos diferentes de A que converge a x. Un punto de A se llama aislado si no es un punto de acumulación.

Solución: 1. Sea $x \in \overline{A}$ y supongamos que $x \notin A$. Veamos que es un punto de acumulación. Para ello, sea U un entorno suyo. Entonces $U \cap A \neq \emptyset$. Ya que $x \notin A$

$$(U - \{x\}) \cap A = U \cap A \neq \emptyset.$$

Sea ahora $x \in A' \cup A$. Si el punto pertenece a A, es adherente. Supongamos ahora que $x \notin A$, y sea U un entorno arbitrario de x. Ya que x no pertenece al conjunto A y es de acumulación,

$$U \cap A = (U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

2. Supongamos que el punto x es un punto de acumulación. Definimos la sucesión que buscamos de la siguiente forma: sea $x_1 \in (B_1(x) - \{x\}) \cap A$. Sea $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_2 < d(x, x_1)$ (observemos que esta distancia es positiva, pues $x \neq x_1$ y $n_2 > 1$) y sea $x_2 \in (B_{\frac{1}{n_2}}(x) - x) \cap A$. Entonces $0 < d(x, x_2) < 1/n_2 < d(x, x_1)$. Sea ahora $n_3 \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $\frac{1}{n_3} < d(x, x_2)$ (observemos que esto implica que $n_3 > n_2$) y sea $x_3 \in B_{\frac{1}{n_3}}(x_3) \cap A$. De esta forma, la sucesión $\{x_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es la sucesión pedida. El recíproco es inmediato.

Ejercicio 1.23 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se define la distancia de $x \in X$ a A como*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}.$$

Probar que $x \in \overline{A}$ si y sólo si $d(x, A) = 0$. Probar:

1. *$x \in \overset{\circ}{A}$ si y sólo si $d(x, X \setminus A) > 0$.*
2. *$x \in A' \cap A$ si y sólo si $d(x, A - \{x\}) = 0$.*

Solución: Supongamos que $x \in \overline{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera la bola $B_{1/n}(x)$. Como x es adherente, existe $a_n \in B_{1/n}(x) \cap A$. Entonces $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$. Por tanto $\inf\{d(x, a_n); n \in \mathbb{N}\} = 0$, y ya que $d(x, A) \geq 0$, se tiene que $d(x, A) = 0$.

Supongamos ahora que $d(x, A) = 0$ y veamos que x es adherente a A. Dado $\epsilon > 0$, por definición de ínfimo, existe $a \in A$ tal que $0 \leq d(x, a) < \epsilon$. Por tanto, $a \in B_\epsilon(x)$ y así, $A \cap B_\epsilon(x) \neq \emptyset$.

1. Es equivalente el hecho de que un punto x sea interior a A a que $x \notin \overline{X \setminus A}$. Finalmente $x \notin \overline{X \setminus A}$ si y solamente si $d(x, X \setminus A) > 0$.
2. Por definición de punto de acumulación, podemos cambiar $(U - \{x\}) \cap A$ por $U \cap (A - \{x\})$ y ahora se usa la caracterización de punto adherente.

Ejercicio 1.24 *Se considera un espacio topológico (X, τ) y $A \subset X$. Probar:*

1. *A es abierto si y sólo si $A \cap Fr(A) = \emptyset$.*
2. *A es cerrado si y sólo si $Fr(A) \subset A$ si y sólo si $A' \subset A$.*
3. *A es abierto y cerrado si y sólo si $Fr(A) = \emptyset$.*

Solución: 1. Ya que $\{\mathrm{int}(A), \mathrm{Fr}(A), \mathrm{ext}(A)\}$ forman una partición del espacio, entonces

$$A = (A \cap \mathrm{int}(A)) \cup (A \cap \mathrm{Fr}(A)) \cup (A \cap \mathrm{ext}(A)).$$

Ya que $A \cap \mathrm{ext}(A) = \emptyset$ e $\mathrm{int}(A) \subset A$, tenemos $A = \mathrm{int}(A) \cup (A \cap \mathrm{Fr}(A))$. Por tanto, $A = \mathrm{int}(A)$ si y sólo si $A \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.

2. Como $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A)$, entonces $\overline{A} = A$ si y sólo si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$.

   Por otra parte, del ejercicio 1.22, $\overline{A} = A' \cup A$. Entonces A es cerrado si y sólo si $A' \subset A$.

3. Es consecuencia de los dos apartados anteriores.

Ejercicio 1.25 *Probar que la intersección de dos topologías en un conjunto sigue siendo una topología, aunque no ocurre lo mismo para la unión.*

Solución: 1. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en un conjunto X y veamos que $\tau_1 \cap \tau_2 = \{O \subset X; O \in \tau_1 \text{ y } O \in \tau_2\}$ es una topología.

- Ya que X y $\emptyset$ se encuentran en las dos topologías, también está en la intersección.
- Sea ahora $\{O_i; i \in I\} \subset \tau_1 \cap \tau_2$. Para cada $i \in I$, $O_i \in \tau_1$ y $O_i \in \tau_2$. Por tanto, $O_i \in \tau_1 \cap \tau_2$. Luego la unión también está en la topología intersección $\tau_1 \cap \tau_2$.
- Si $O_1, O_2 \in \tau_1 \cap \tau_2$, entonces $O_1, O_2 \in \tau_1$ y $O_1, O_2 \in \tau_2$. Por tanto, $O_1 \cap O_2 \in \tau_1 \cap \tau_2$.

2. Sean τ_1 y τ_2 las topologías definidas en el conjunto de números naturales en el ejercicio 1.13. Entonces $A_2, B_2 \in \tau_1 \cup \tau_2$, pero la intersección, $A_2 \cap B_2 = \{2\}$ no pertenece a $\tau_1 \cup \tau_2$.

Ejercicio 1.26 *Sea X un conjunto, $p \in X$ y sea la familia de conjuntos:*

$$\tau = \{O \subset X; p \notin O\} \cup \{X\}.$$

Demostrar que es una topología y caracterizar los cerrados. Para $X = \mathbb{R}$, $p = 0$, comparar con la usual de $\mathbb{R}$. Determinar las sucesiones convergentes. Esta topología se llama la topología del punto excluido.

Solución: 1. - El conjunto X pertenece a la topología, y el conjunto vacío no contiene a p, luego está en τ.

- Sea $\{O_i; i \in I\}$ una familia de τ. Si alguno de ellos es X, su unión es X, que pertenece a τ. Supongamos que ninguno de ellos es X. Entonces $p \notin O_i$, $\forall i \in I$, y por tanto, tampoco la unión, es decir, $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$.
- Sean O_1 y O_2 dos elementos de τ. Si alguno de ellos es X, entonces la intersección es el otro conjunto, que está en τ. Si ninguno de ellos es X, ninguno contiene a p y por tanto, tampoco la intersección, es decir, $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

2. La familia de cerrados está formada por los conjuntos complementarios de todos los abiertos, es decir,
$$\mathcal{F} = \{F \subset X; p \in F\} \cup \{\emptyset\}.$$

3. Sea $\{x_n\} \to x$ una sucesión convergente, donde x es un límite. Si $x = p$, el único entorno es X, y por tanto, no hay ninguna restricción sobre la sucesión. Si x no es p, entonces $\{x\}$ es un entorno de x; por tanto, a partir de un lugar $\nu \in \mathbb{N}$, $x_n \in \{x\}$, $n \geq \nu$, es decir, $x_n = x$. Por tanto se tiene:
   - Cualquier sucesión en X es convergente y tiene por límite a p.
   - Las sucesiones que tienen otro límite, aparte de p, son las que son constantes a partir de un lugar, las cuales tienen por límite, el elemento que se va repitiendo.

Ejercicio 1.27 *Sea X un conjunto, $p \in X$ y sea la familia de conjuntos:*
$$\tau = \{O \subset X; p \in O\} \cup \{\emptyset\}.$$
Hacer lo mismo que el ejercicio anterior. Esta topología se llama la topología del punto incluido.

Solución: 1.
- Es evidente que $X, \emptyset \in \tau$.
- Sea $\{O_i; i \in I\}$ una familia de τ. Como todos contienen a p, entonces lo mismo sucede para la unión.
- Sean O_1 y O_2 dos elementos de τ. Ya que $p \in O_1$ y $p \in O_2$, entonces $p \in O_1 \cap O_2$.

2. La familia de cerrados está formada por los conjuntos complementarios de todos los abiertos, es decir,
$$\mathcal{F} = \{F \subset X; p \notin F\} \cup \{X\}.$$

3. Sea $\{x_n\} \to x$ una sucesión convergente, donde x es un límite. Tomamos $U = \{x, p\}$ entorno de x. Entonces existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $x_n \in U$. Por tanto, los términos de la sucesión a partir de cierto lugar de la sucesión son x o p.

Ejercicio 1.28 *Sea un conjunto X y $p \in X$ un punto fijo. Se consideran las dos siguientes topologías en X:*

$$\tau = \{O \subset X; p \in O\} \cup \{\emptyset\}, \qquad \sigma = \{O \subset X; p \notin O\} \cup \{X\}.$$

Calcular una base de de la topología y una base de entornos para cada punto.

Solución: 1. Probamos que $\beta = \{\{x,p\}; x \in X\}$ es una base de abiertos. Por una parte es evidente que cada uno de los elementos de dicha familia es abierto. Por otra, si $O \in \tau$, entonces

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x,p\}.$$

Demostramos que si $x \in X$, entonces $\beta_x = \{U_x\}$, donde $U_x = \{p,x\}$, es una base de entornos del puntos x: ya que cada U_x contiene a p, es un abierto y como también contiene a x, es un entorno suyo. Es evidente que es el entorno más pequeño que tiene x.

2. Sea $\beta = \{\{x\}; x \neq p\} \cup \{X\}$. Probamos que es una base de abiertos. Es evidente que cada elemento de β es un abierto. Por otra parte, si $O \in \sigma$ y $O \neq X$, entonces $p \notin O$, luego $O = \bigcup_{x \in O}\{x\}$. Si el abierto O es X, entonces pertenece a β.

   Ya que cada punto x distinto de p es abierto, entonces $\beta_x = \{\{x\}\}$ es una base de entornos de x. Si $x = p$, el único entorno de p es X y por tanto $\beta_x = \{X\}$ es una base de entornos de p.

Ejercicio 1.29 *Sea X un conjunto infinito y se considera $\mathcal{S} = \{A \subset X;\ A \text{ es finito}\}$. Calcular la topología que tiene por subbase $\mathcal{S}$.*

Solución: La base de la topología está formada por las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$, luego $\beta = \{\text{conjuntos finitos}\}$. En particular, todos los puntos de X son abiertos, es decir, la topología es la discreta.

Ejercicio 1.30 *Sea $X = \{a,b,c\}$ y $\mathcal{S} = \{\{a\},\{b\}\}$. Calcular la topología que tiene por subbase $\mathcal{S}$ y hallar el interior y adherencia de los conjuntos $\{a,c\}$, $\{b\}$. Lo mismo pero con $\mathcal{S} = \{\{a,b\}\}$.*

Solución: 1. La base que determina $\mathcal{S}$ es $\beta = \{\emptyset,\{a\},\{b\}\}$. La topología está formada por uniones arbitrarias de elementos de β, luego $\tau = \{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. La familia de cerrados es $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{b,c\},\{a,c\},\{c\}\}$. Por tanto el interior y la adherencia de $\{a,c\}$ es $\{a\}$ y $\{a,c\}$ respectivamente. Y del conjunto $\{b\}$ son $\{b\}$ y $\{b,c\}$.

2. La base que determina $\mathcal{S}$ es $\beta = \{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}\}$. De la misma forma que en el apartado anterior, la topología es $\tau = \{X, \emptyset, \{a, c\}, \{b\}\}$. Por tanto $\tau = \mathcal{F}$. En este caso los conjuntos $\{a, c\}$ y $\{b\}$ son abiertos y cerrados.

Ejercicio 1.31 *Sea $X = [-1, 1]$ y se define $\beta = \{\{x\}; x \neq 0\} \cup \{(-1, 1)\}$. Probad que β es base de una topología en X. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0, 1]$.*

Solución: 1. Es evidente que la unión de todos los elementos de β es $[-1, 1]$. Incluso menos, pues $[-1, 1] = \{-1\} \cup \{1\} \cup (-1, 1)$. Por otro lado, si $B_1, B_2 \in \beta$ con $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, es porque uno es $B_1 = \{x\}$, $x \neq 0$ y el otro es $B_2 = (-1, 1)$. Como $B_1 \cap B_2 = B_1 \in \beta$, la segunda propiedad de bases es evidente.

2. Para calcular el interior de A estudiamos el mayor abierto dentro de A. Es evidente que $\cup_{x \in (0,1]}\{x\} = (0, 1]$ es un abierto incluido en A. Veamos que $0 \notin \text{int}(A)$. En tal caso, existiría $B \in \beta$ tal que $0 \in B \subset A$. Como $0 \in B$, entonces $B = (-1, 1)$ pero $(-1, 1) \not\subset [0, 1]$. Esto quiere decir que 0 no es interior. Como consecuencia $\text{int}(A) = (0, 1]$.

   Por otro lado, $[-1, 1] \setminus A = [-1, 0) = \cup_{x \in [-1,0)}\{x\}$. Entonces $[-1, 1] \setminus A$ es abierto, es decir, A es cerrado. Por tanto $\overline{A} = A$.

Ejercicio 1.32 *En $\mathbb{R}$ se define la familia $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{O \subset \mathbb{R}; \mathbb{N} \subset O\}$. Probar que τ es una topología, y calcular el interior y la adherencia de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$.*

Solución: Es evidente que $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ pertenecen a τ. Por otro lado, la intersección de elementos (no triviales) de τ contiene a $\mathbb{N}$ ya que cada uno de ellos lo contiene. Por otro lado, dada una familia arbitraria $\{O_i; i \in I\}$ de τ, cada uno de ellos contiene a $\mathbb{N}$, luego también la unión.

Sea $A \subset \mathbb{R}$. El interior el el conjunto abierto más grande dentro de A, luego, se tiene $\mathbb{N} \subset \text{int}(A) \subset A$. Por tanto, $\text{int}(A) = A$ si $\mathbb{N} \subset A$ e $\text{int}(\text{A}) = \emptyset$ en otro caso.

La familia de cerrados es $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{F; F \subset \mathbb{R} - \mathbb{N}\}$. Ya que la adherencia de un conjunto es el menor cerrado que lo contiene, se tendría $A \subset \overline{A} \subset \mathbb{R} - \mathbb{N}$. Por tanto, $\overline{A} = \emptyset$ si $A \not\subset \mathbb{R} - \mathbb{N}$, y $\overline{A} = A$ si $A \subset \mathbb{R} - \mathbb{N}$. También se podía haber calculado la adherencia a partir de la igualdad $\overline{A} = X - \text{int}(X - A)$.

Ejercicio 1.33 *Se considera $\mathbb{R}$ con la topología usual τ. Probad que $\tau_{|\mathbb{Z}}$ es la topología discreta en $\mathbb{Z}$. Si $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, probad $\tau_{|A}$ no es la topología discreta en A.*

Solución: Una base de entornos para cada $x \in \mathbb{R}$ es $\beta_x = \{(x-r, x+r); 0 < r < 1\}$. Por tanto, una base de entornos de $n \in \mathbb{Z}$ es

$$\beta_n^{\mathbb{Z}} = \{(n-r, n+r) \cap \mathbb{Z}; 0 < r < 1\} = \{\{n\}\}.$$

Ya que todo punto es abierto, se sabe entonces que la topología es la discreta.

En el conjunto A, una base de entornos de 0 es

$$\beta_0^A = \{(-r, r) \cap A; r > 0\}.$$

Si la topología fuera la discreta, el conjunto $\{0\}$ sería abierto en A, y por tanto, 0 sería interior en $\{0\}$. En tal caso, existiría $r > 0$ tal que

$$0 \in (-r, r) \cap A \subset \{0\}.$$

Pero el conjunto $(-r, r) \cap A$ tiene más de un punto, puesto que $\{\frac{1}{n}\} \to 0$. Esta contradicción prueba que $\{0\} \notin \tau_{|A}$.

Ejercicio 1.34 *En* $\mathbb{R}$ *se considera* $\tau = \{O \cup G; O \in \tau_u, G \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. *Probar que* τ *es una topología en* $\mathbb{R}$. *Estudiar el interior y la adherencia de* $[0, \sqrt{2})$.

Solución:

1. En primer lugar, $\mathbb{R}, \emptyset \in \tau_u \subset \tau$. Si $\{O_i \cup G_i; i \in I\} \subset \tau$, entonces

$$\cup_{i\in I}(O_i \cup G_i) = (\cup_{i \in I} O_i) \cup \ (\cup_{i\in I} G_i) \in \tau_u \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),$$

ya que la unión de conjuntos irracionales es también un conjunto irracional. De la misma forma, ya que la intersección de dos conjuntos irracionales es otro irracional, y cualquier subconjunto de un irracional también es irracional, se tiene

$$(O_1 \cup G_1) \cap (O_2 \cup G_2) = (O_1 \cap O_2) \cup \Big((G_1 \cap O_2) \cup (G_2 \cap O_1) \cup (G_1 \cap G_2)\Big) \in \tau.$$

2. Como $(0, \sqrt{2}) \in \tau_u \subset \tau$, entonces $\text{int}([0, \sqrt{2})) \supset (0, \sqrt{2})$. Pero 0 no es interior, pues en tal caso, existiría $\epsilon > 0$ y $G \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que

$$0 \in (-\epsilon, \epsilon) \cup G \subset [0, \sqrt{2}),$$

que no puede ser cierto pues entonces $(-\epsilon, \epsilon) \subset [0, \sqrt{2})$.

Para la adherencia, como $\mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}$, y $[0, \sqrt{2}] \in \mathcal{F}_u$, entonces $\overline{[0, \sqrt{2})} \subset [0, \sqrt{2}]$. Pero $\sqrt{2}$ no es adherente ya que $\{\sqrt{2}\} \in \tau$, contiene a $\sqrt{2}$ y no interseca al conjunto. Por tanto, $\overline{[0, \sqrt{2})} = [0, \sqrt{2})$, es decir, es cerrado. También se podía haber probado que el conjunto es cerrado tomando complementarios:

$$\mathbb{R} \setminus [0, \sqrt{2}) = (-\infty, 0) \cup [\sqrt{2}, \infty) = ((-\infty, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)) \cup \{\sqrt{2}\} \in \tau.$$

Ejercicio 1.35 *Para cada $x \in \mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera el conjunto*

$$U_n(x) = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cup (n, \infty)$$

y $\beta_x = \{U_n(x); n \in \mathbb{N}\}$. Probar que β_x define para cada $x \in \mathbb{R}$ una base de entornos para cierta topología. Calcular el interior y la adherencia de los conjuntos $[2, \infty)$ y $(-\infty, 2]$.

Solución: 1. - Es evidente que $x \in U_n(x)$.

- Si $U_n(x), U_m(x) \in \beta_x$, entonces $U_n(x) \cap U_m(x) = U_{\text{máx}\{n,m\}}(x)$.
- Sea $U_n(x) \in \beta_x$ y sea $V = U_n(x)$. Entonces $\forall y \in V$, caben dos posibilidades: si $y \in (x-1/n, x+1/n)$, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $(y-1/m, y+1/m) \subset (x-1/n, x+1/n)$ (esto implica que $m \geq n$). Entonces

  $$y \in U_m(y) = (y - \frac{1}{m}, y + \frac{1}{m}) \cup (m, \infty) \subset U_n.$$

  En el caso de que $y \in (n, \infty)$, entonces sea $m > n$ tal que $((y-1/m, y+1/m) \subset (n, \infty)$. Entonces

  $$y \in U_m(y) = (y - \frac{1}{m}, y + \frac{1}{m}) \cup (m, \infty) \subset U_n.$$

2. Veamos que $\text{int}([2, \infty)) = (2, \infty)$: si $x > 2$, sea $n \geq 2$ tal que $2 < x - 1/n$. Entonces $x \in U_n(x) \subset [2, \infty)$. Sin embargo el punto $x = 2$ no es interior, pues $(2 - 1/n, 2 + 1/n) \not\subset [2, \infty)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

   Probamos que la adherencia es todo $\mathbb{R}$. Para ello, si $x \in \mathbb{R}$ y $U_n(x)$ es un entorno básico de x, entonces $(n, \infty) \cap [2, \infty) \neq \emptyset$, luego $U_n(x) \cap [2, \infty) \neq \emptyset$.

3. El interior de $(-\infty, 2]$ es el conjunto vacío: si x es un punto interior, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(n, \infty) \subset U_n(x) \subset (-\infty, 2]$, lo cual es falso. Veamos que la adherencia es el conjunto $(-\infty, 2]$: si $x > 2$, sea $n \geq 2$ tal que $2 < x - \frac{1}{n}$. Entonces $U_n(x) \cap (-\infty, 2] = \emptyset$.

Ejercicio 1.36 *Caracterizar la convergencia de sucesiones mediante abiertos, cerrados, bases de topología y bases de entornos.*

Solución: Se considera un espacio topológico (X, τ), donde τ es la familia de abiertos, $\mathcal{F}$ la de cerrados, β es una base de la topología y β_x es una base de entornos para cada punto $x \in X$. Sea también $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a $x \in X$.

- Sea $O \in \tau$ tal que $x \in O$. Ya que $O \in \mathcal{U}_x$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $x_n \in O$.

- Sea F un cerrado que no contenga a x. Entonces $X \setminus F$ es un abierto que contiene a x, luego es un entorno suyo. Por tanto, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $x_n \in X \setminus F$, es decir, $x_n \notin F$.
- Sea $B \in \beta$ tal que $x \in B$. Ya que B es un abierto que contiene a x, es un entorno suyo. Por tanto, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $x_n \in B$.
- Sea $V \in \beta_x$. Como V es un entorno, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $x_n \in V$.

Por tanto, las caracterizaciones pedidas son: $\{x_n\}$ converge a x si y sólo si

- Para cada $O \in \tau$, con $x \in O$, existe $\nu \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq \nu$, $x_n \in O$.
- Para cada $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin F$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $x_n \notin F$.
- Para cada $B \in \beta$, con $x \in B$, existe $\nu \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq \nu$, $x_n \in B$.
- Para cada $V \in \beta_x$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $x_n \in V$.

Ejercicio 1.37 *Se considera un espacio topológico (X, τ) y para cada $x \in X$, una base de entornos β_x tal que $\beta_x \subset \tau$. Entonces $\beta = \cup_{x \in X} \beta_x$ es base de la topología.*

Solución: Por una parte y por hipótesis, todo elemento de β_x es abierto. Por otra, sea $O \in \tau$ y $x \in O$. Ya que O es un entorno de x y β_x es una base de entornos de x, existe $V \in \beta_x$ tal que $V \subset O$. Por tanto, $V \in \beta$.

Ejercicio 1.38 *En $\mathbb{R}$ se define $\beta = \{[x, y); x < y, x, y \in \mathbb{R}\}$. Probar que β es base para una topología. Esta topología τ_S se llama topología de Sorgenfrey. Probar que $\beta_x = \{[x, y); y > x\}$ es base de entornos de x.*

Solución: Es evidente que la unión de todos los elementos de β es $\mathbb{R}$. Sean ahora $[x, y)$, $[a, b)$ elementos de β y $z \in [x, y) \cap [a, b)$. En particular, $x, a \leq z$. Por tanto

$$z \in [z, \min\{y, b\}) \subset [x, y) \cap [a, b).$$

Por otro lado, los elementos de β_x son abiertos que contienen a x, luego son entornos de x. Sea ahora $O \in \tau$ tal que $x \in O$. Entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [a, b) \subset O$. En particular, $a \leq x$, y por tanto,

$$x \in [x, b) \subset [a, b) \subset O.$$

Ejercicio 1.39 *En* $\mathbb{R}^2$ *se define* $\beta = \{(a,b) \times \mathbb{R}; a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. *Probar que* β *es base para una topología de* $\mathbb{R}^2$. *Probar que* $\beta_{(x,y)} = \{(x-r, x+r) \times \mathbb{R}; r > 0\}$ *es base de entornos de* (x,y).

Solución: Es elemental que la unión de todos los elementos de β es $\mathbb{R}^2$. Sea ahora $(x,y) \in ((a,b) \times \mathbb{R}) \cap ((c,d) \times \mathbb{R})$. Como $(a,b) \cap (c,d) = (p,q)$, con $p = \text{máx}\{a,c\}$ y $q = \text{mín}\{b,d\}$, entonces
$$(x,y) \in (p,q) \times \mathbb{R} = \Big((a,b) \times \mathbb{R}\Big) \cap \Big((c,d) \times \mathbb{R}\Big).$$

Para probar que $\beta_{(x,y)}$ es base de entornos de (x,y), se tiene por un lado que son abiertos que contienen a (x,y). Si $(x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R}$, entonces $x \in (a,b)$. Luego existe $r > 0$ tal que $x \in (x-r, x+r) \subset (a,b)$. Por tanto,
$$(x-r, x+r) \times \mathbb{R} \subset (a,b) \times \mathbb{R}.$$

Ejercicio 1.40 *Sea* X *un conjunto infinito y* $p \in X$. *Comparar la topología* τ_{CF} *de los complementos finitos con la topología* τ *del punto incluido para el punto* p: $\tau = \{O \subset X; p \in O\} \cup \{\emptyset\}$.

Solución: El conjunto $\{p\}$ pertenece a τ; sin embargo, no es un abierto en la topología de los complementos finitos, pues su complementario es un conjunto infinito.

Por otra parte, $X \setminus \{p\}$ es un abierto en la topología de los complementos finitos. Ya que no contiene a p, no pertenece a τ. Por tanto, las topologías τ y la topología cofinita no son comparables.

Capítulo 2

Aplicaciones continuas. Homeomorfismos

Ejercicio 2.1 *Se definen las aplicaciones proyecciones $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, por $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Considerando las topologías usuales, probar que estas aplicaciones son continuas.*

Solución: Sea $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $a_i = p_i(a_1, \ldots, a_n)$. Dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \epsilon$. Entonces si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $d((x_1, \ldots, x_n), (a_1, \ldots, a_n)) < \delta$,

$$|p_i(x_1, \ldots, x_n) - p_i(a_1, \ldots, a_n)| = |x_i - a_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)^2} < \delta = \epsilon.$$

Ejercicio 2.2 *Consideramos las cuádricas de $\mathbb{R}^3$, a saber,*

1. *elipsoide:* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, $a, b, c \neq 0$.
2. *paraboloide:* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2\}$.
3. *hiperboloide reglado:* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.
4. *hiperboloide de dos hojas:* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$.
5. *cono:* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2\}$.
6. *paraboloide hiperbólico:* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$.

Probar que todas ellos son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^3$.

Solución: Para demostrar que son conjuntos cerrados, veamos que cada una de la cuádricas es la imagen inversa mediante una aplicación continua $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de un cerrado de $\mathbb{R}$. Denotaremos por $p_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, las proyecciones de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ (véase ejercicio 2.1).

1. La aplicación $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ es continua pues $f = p_1^2/a^2 + p_2^2/b^2 + p_3^2/c^2$. Entonces el elipsoide es $f^{-1}(\{1\})$.
2. Se define $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Esta aplicación coincide con $p_1^2 + p_2^2 - p_3$, luego es continua. Además el paraboloide es $f^{-1}(\{0\})$.
3. En este caso, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ y $f = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2$. El hiperboloide reglado es $f^{-1}(\{1\})$.
4. Sea la aplicación continua $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Entonces $f^{-1}(\{-1\})$ es el hiperboloide de dos hojas.
5. La aplicación $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ es continua. El cono es la imagen inversa mediante f del conjunto $\{0\}$.
6. El paraboloide hiperbólico es $f^{-1}(\{0\})$, donde $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$.

Ejercicio 2.3 *Sea un espacio métrico (X, d) y $a \in X$. Se define la aplicación distancia al punto $x = a$ como $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x, a)$. Probar que f es una aplicación continua.*

Solución: Sea $x_0 \in X$. Para cada $x \in X$, y por la desigualdad triangular,

$$d(x, a) \leq d(x_0, a) + d(x, x_0), \qquad d(x_0, a) \leq d(x, a) + d(x, x_0).$$

Como consecuencia,

$$|d(x, a) - d(x_0, a)| \leq d(x, x_0).$$

Por tanto, dado $\epsilon > 0$, se elige $\delta = \epsilon$. Si $d(x, x_0) < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| = |d(x, a) - d(x_0, a)| \leq d(x, x_0) < \delta = \epsilon.$$

Ejercicio 2.4 *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar que la aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, A)$ es continua.*

Solución: Vamos a demostrar que $|f(x) - f(x_0)| \leq d(x, x_0)$, lo que prueba inmediatamente que f es continua en x_0. Sea $a \in A$. Entonces

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a).$$

Por tanto, $d(x, A) - d(x, x_0) \leq d(x_0, a)$. Haciendo variar a y tomando ínfimos, $d(x, A) - d(x, x_0) \leq d(x_0, A)$. Esto prueba que $f(x) - f(x_0) \leq d(x, x_0)$. Cambiando los papeles de x y x_0, tenemos $f(x_0) - f(x) \leq d(x, x_0)$, lo que demuestra que $|f(x) - f(x_0)| \leq d(x, x_0)$.

Ejercicio 2.5 *Sea* $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *el conjunto de las funciones continuas con valores en* $\mathbb{R}$ *y con dominio el intervalo cerrado* $I = [0,1]$. *En* $\mathbb{R}$ *consideramos la distancia usual. Se define la siguiente función* $F : X \to \mathbb{R}$ *mediante* $F(f) = \max_{x \in I} |f(x)|$.

1. *Probar que* f *es continua tomando en* X *la distancia* $d_\infty(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)|; x \in I\}$.
2. *Probar que* F *no es continua con la distancia* $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$.

Solución:

1. Ya que $F(f) = d_\infty(f, 0)$, el ejercicio 2.3 nos dice que F es continua.
2. Sea la función nula $f = 0$ y veamos que F no es continua en 0 encontrando una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que va a converger a la función 0 para la distancia d, pero $\{F(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no va a converger a $F(0)$. Definimos la aplicación continua f_n mediante

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1 - \frac{1}{n+1}] \\ (n+1)x - n & \text{si } x \in [1 - \frac{1}{n+1}, 1] \end{cases}$$

Se tiene

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{2(n+1)},$$

luego $d(f_n, 0) \to 0$. Por otra parte, $\max_{x \in I} |f_n(x)| = 1$, es decir $\{F(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \to 1$. Pero $F(0) = 0 \neq \lim_{n \to \infty} F(f_n)$. Como consecuencia, las distancias d_∞ y d definidas en X no son equivalentes.

Ejercicio 2.6 *Se considera* X *un conjunto con dos topologías* τ_1, τ_2. *Probar que la aplicación identidad* $1_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ *es un homeomorfismo si y sólo si* $\tau_1 = \tau_2$.

Solución: Si las topologías coinciden, entonces es evidente que la aplicación identidad es un homeomorfismo.

Si 1_X es un homeomorfismo, entonces es una aplicación abierta. Por tanto, dado $O_1 \in \tau_1$, $1_X(O_1) = O_1 \in \tau_2$. Luego $\tau_1 \subset \tau_2$. De la misma manera, se hace la otra inclusión, empleando para ello la inversa de 1_X, que es de nuevo 1_X y el hecho de que también es abierta.

Ejercicio 2.7 *Probar que una aplicación* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *entre dos espacios topológicos es continua en* X *si y solamente satisface alguna de las siguientes propiedades:*

1. $f^{-1}(int(B)) \subset int(f^{-1}(B)), \forall B \subset Y$.

2. $f^{-1}(ext(B)) \subset ext(f^{-1}(B)), \forall B \subset Y$.

3. $Fr(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Fr(B)), \forall B \subset Y$.

Solución: 1. Supongamos que f es una aplicación continua y sea $B \subset Y$. Como $\text{int}(B)$ es un conjunto abierto, $f^{-1}(\text{int}(B))$ es un conjunto abierto de X, luego coincide con su interior. Por tanto $f^{-1}(\text{int}(B)) = \text{int}(f^{-1}(\text{int}(B))) \subset \text{int}(f^{-1}(B))$, donde la última inclusión se debe a que $\text{int}(B) \subset B$.

Probamos ahora que f es una aplicación continua suponiendo la hipótesis del ejercicio. Sea O' un abierto de Y y llamamos $B = O$. Teniendo en cuenta que $\text{int}(B) = B$, la hipótesis asegura que $f^{-1}(O) \subset \text{int}(f^{-1}(O))$. Esto quiere decir que se da igualdad, es decir, que el conjunto $f^{-1}(B)$ es abierto, como se quería probar.

2. Usamos el apartado anterior, teniendo en cuenta que $ext(B) = \text{int}(Y \setminus B)$.

3. Por los dos apartados anteriores: $\text{Fr}(B) = (X \setminus (\text{int}(B) \cup ext(B))$. Entonces decir que f es una aplicación continua es equivalente a que

$$\begin{aligned} \text{Fr}(f^{-1}(B)) &= X \setminus \left(f^{-1}(\text{int}(B)) \cup f^{-1}(ext(B))\right) \\ &\subset f^{-1}\left(Y \setminus (\text{int}(B) \cup ext(B)\right) = f^{-1}(\text{Fr}(B)) \end{aligned}$$

Ejercicio 2.8 *Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$. Estudiar la continuidad de $f : (\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$, donde $\tau_i \in \{\tau_u, \tau\}$ siendo τ la topología del punto incluido para $p = 0$.*

Solución: Supongamos que $\tau_1 = \tau_u$ y $\tau_2 = \tau$. Se toma $O \in \tau$. Entonces $0 \in O$. Por otro lado $f^{-1}(O) = (-\infty, 0)$ o $f^{-1}(O) = \mathbb{R}$. Por tanto, f es continua.

Sea ahora $\tau_1 = \tau$ y $\tau_2 = \tau_u$. Sea $O = (-1/2, 1/2) \in \tau_u$. Entonces $f^{-1}(O) = (-\infty, 0)$ que no es abierto en τ, luego f no es continua.

Ejercicio 2.9 *Sea una aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_{CN}) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$, donde τ_{CN} es la topología de los complementos numerables y τ_u es la topología usual de $\mathbb{R}$. Probar que f es continua si y sólo si f es una aplicación constante.*

Solución: Si f es constante es continua. Probamos el recíproco. Supongamos que a y b son dos números distintos en la imagen. Sean dos abiertos disjuntos U y V conteniendo respectivamente a a y b. Entonces $f^{-1}(U) = \mathbb{R} \setminus N_1$ y $f^{-1}(V) = \mathbb{R} \setminus N_2$ para ciertos conjuntos numerables N_1 y N_2. Ya que $U \cap V = \emptyset$, entonces

$$\emptyset = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = (\mathbb{R} \setminus N_1) \cap (\mathbb{R} \setminus N_2) = \mathbb{R} \setminus (N_1 \cup N_2).$$

Por tanto $\mathbb{R} = N_1 \cup N_2$, es decir, $\mathbb{R}$ es unión de dos conjuntos numerables, lo cual es falso.

Ejercicio 2.10 *Un espacio topológico (X, τ) se dice que satisface la propiedad $\mathcal{P}$ si toda aplicación continua $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ alcanza máximo. Probar que $\mathcal{P}$ es un invariante topológico. Aplicar esta propiedad para probar que $[0, 1]$ no es homeomorfo a $(0, 1)$.*

Solución: Sea (X, τ) un espacio que satisface la propiedad $\mathcal{P}$ y $\phi : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ un homeomorfismo. Probamos que toda aplicación continua definida en (Y, τ') con valores reales, alcanza su máximo. Para ello, se considera una aplicación continua $g : (Y, \tau') \to \mathbb{R}$ y la aplicación $g \circ \phi$ definida en (X, τ). Por hipótesis, existe $x_0 \in X$ tal que $(g \circ \phi)(x) \leq (g \circ \phi)(x_0)$ para cualquier $x \in X$. Luego, por ser ϕ una aplicación biyectiva, g alcanza en $\phi(x_0)$ un máximo.

Se sabe que en un intervalo cerrado y acotado, toda función continua alcanza un máximo. Sin embargo en $(0, 1)$ es posible definir funciones continuas que no alcanzan máximo, como por ejemplo, $f(x) = 1/x$.

Ejercicio 2.11 *Probar que la aplicación $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ es un homeomorfismo.*

Solución: La aplicación inversa de f está dada por

$$g(y) = \frac{y}{1 + |y|}.$$

Tanto f como g son aplicaciones continuas, luego son homeomorfismos.

Ejercicio 2.12 *Probar que toda bola bola $B_r(a)$ de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.*

Solución: Primero se prueba que la bola $B_r(a)$ es homeomorfa a la bola $B_1(0)$. Para ello se define la aplicación $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F = T_a \circ h_r$, donde h_r es la homotecia de razón $r > 0$ y T_a es la traslación de vector de traslación a, es decir, $h_r(x) = rx$ y $T_a(x) = x + a$. Entonces F es un homeomorfismo y evidentemente $F(B_1(0)) = B_r(a)$.

Demostramos ahora que $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $B_1(0)$ (el caso $n = 1$ es el ejercicio 2.11). Sea un homeomorfismo creciente h entre $[0, 1)$ y el intervalo $[0, \infty)$ de forma que $h(0) = 0$ y $h(1) = \infty$ (por ejemplo, $h(r) = \frac{r}{1-r}$). Se define para cada $x \in B_1(0)$,

$$F(x) = \frac{h(|x|)}{|x|} x = \frac{x}{1 - |x|}.$$

Esta aplicación es biyectiva y su inversa es

$$G(y) = \frac{y}{1+|y|}.$$

Finalmente, las aplicaciones F y G son continuas pues sus funciones coordenadas son continuas. Por ejemplo, para F se tiene

$$p_i \circ F = \frac{p_i}{1-\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2}},$$

y para la aplicación G,

$$p_i \circ G = \frac{p_i}{1+\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2}}.$$

Ejercicio 2.13 *Poner un ejemplo de un espacio métrico donde haya bolas que no sean homeomorfas entre sí, ni al espacio ambiente.*

Solución: Sea $X = \mathbb{R}$ y la distancia

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Entonces $B_1(0) = \{0\}$ y $B_2(0) = \mathbb{R}$. Por tanto, estas bolas no son biyectivas entre sí y la primera bola no es biyectiva a $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.14 *Se considera un conjunto con dos elementos: $X = \{a,b\}$ y se definen en X las topologías $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. Probar que (X,τ_1) es homeomorfo a (X,τ_2).*

Solución: Se define $f:(X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$ mediante $f(a) = b$ y $f(b) = a$. Esta aplicación es biyectiva y su aplicación inversa es ella misma. Por tanto, es suficiente con probar que f es una aplicación continua. La aplicación f es continua, pues $\{b\} \in \tau_2$ y $f^{-1}(\{b\}) = \{a\} \in \tau_1$.

Ejercicio 2.15 *Probar que la propiedad* ser metrizable *es una propiedad topológica.*

Solución: Sea un espacio topológico (X,τ) metrizable y d una distancia cuya topología es τ. Sea $f:(Y,\tau') \to (X,\tau)$ un homeomorfismo. Veamos que (Y,τ') es metrizable. Para ello se define una distancia $d': Y \times Y \to \mathbb{R}_0^+$ de la siguiente manera:

$$d'(y_1,y_2) = d(f(y_1), f(y_2)), \quad y_1, y_2 \in Y.$$

Por otra parte, $g : (Y, \delta) \to (X, d)$ dada por $g(y) = f(y)$ es una isometría por la definición de la distancia d'. En particular, es un homeomorfismo. Por tanto, $1_Y : (Y, \tau') \to (Y, d')$ es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos: $1_Y = g^{-1} \circ f$, luego la topología que induce la distancia d' es la misma que τ', según el ejercicio 2.6.

Ejercicio 2.16 *Se considera $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Probar que $G(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R}; y = f(x)\}$ es homeomorfo a A. Como consecuencia, probar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.*

Solución: Definimos la aplicación $\phi : A \to G(f)$ mediante $\phi(x) = (x, f(x))$. Veamos que ϕ es un homeomorfismo.

1. La aplicación ϕ es biyectiva y su inversa es la aplicación $\psi : G(f) \to A$ dada por $\psi(x, f(x)) = x$. Para probar que ϕ es una aplicación continua y ya que el codominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$, basta con componer ϕ con las proyecciones $p_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n+1$:
$$p_{i|G(f)} \circ \phi = q_{i|A}, \quad 1 \leq i \leq n$$
donde $q_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son las correspondientes aplicaciones proyecciones en $\mathbb{R}^n$. En este caso, la composición es una aplicación continua. Por otra lado, $p_{n+1|G(f)} \circ \phi = f$, que es una aplicación continua. Finalmente, la aplicación ψ es continua ya que $\psi = (q_{1|A}, \ldots, q_{n|A})$.

2. El paraboloide es el grafo de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x, y) = x^2 + y^2$. Esta aplicación es continua, ya que $f = p_1^2 + p_2^2$.

Ejercicio 2.17 *Se define el conjunto $\mathbb{S}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n; x_{n+1} > 0\}$. Probar que la aplicación $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n_+$ dada por*
$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}\right)$$
es un homeomorfismo.

Solución: La aplicación ϕ es la del ejercicio anterior, tomando como $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1\}$ y $f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}$.

Ejercicio 2.18 *Probar que la aplicación $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, no es abierta. Estudiar si es cerrada.*

Solución: El abierto $(-1,1)$ tiene como imagen $[0,1)$, que no es abierto en $\mathbb{R}$.

Veamos ahora que f es cerrada. Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$ y $a \in \overline{f(F)}$, es decir, existe $\{x_n\} \subset F$, tal que $f(x_n) = x_n^2 \to a$. Por tanto, la sucesión $\{x_n\}$ está acotada. Existe pues $x \in \mathbb{R}$ y una parcial de $\{x_n\}$ que converge a x: $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$. Como F es cerrado, $x \in F$. Ya que f es una aplicación continua, $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$ y por unicidad del límite, $a = f(x) \in f(F)$.

Ejercicio 2.19 *Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ un embebimiento entre dos espacios topológicos y $g : (Y,\tau') \to (Z,\tau'')$ un homeomorfismo. Probar que $g \circ f : (X,\tau) \to (Z,\tau'')$ es un embebimiento.*

Solución: Hay que probar que $g \circ f : X \to g(f(X))$ es un homeomorfismo. Como g es un homeomorfismo, la restricción $g_{|f(X)} : f(X) \to g(f(X))$ es un homeomorfismo. También $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo por ser f un embebimiento. Componiendo ambas aplicaciones, se tiene probado el ejercicio.

Ejercicio 2.20 *Si $m \leq n$, probar que la esfera unidad $\mathbb{S}^m$ de $\mathbb{R}^{m+1}$ se embebe en $\mathbb{S}^n$.*

Solución: Se define la aplicación $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ como

$$f(x_1,\ldots,x_{m+1}) = (x_1,\ldots,x_{m+1},0,\ldots,0).$$

Esta aplicación no es más que la restricción del embebimiento $i : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$i(x_1,\ldots,x_{m+1}) = (x_1,\ldots,x_{m+1},0,\ldots,0).$$

Por tanto, $i : \mathbb{R}^{m+1} \to i(\mathbb{R}^{m+1})$ es un homeomorfismo. Si restringimos a $\mathbb{S}^m$ y a su imagen, $i(\mathbb{S}^m) = f(\mathbb{S}^m)$, entonces $f = i_{|\mathbb{S}^m} : \mathbb{S}^m \to f(\mathbb{S}^n)$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 2.21 *Se considera la aplicación $f : [0,2\pi] \to \mathbb{S}^1$ por $f(t) = (\cos(t),\sin(t))$. Probar que esta aplicación es cerrada pero no es abierta.*

Solución:
1. Sea F un cerrado de $[0,2\pi]$ y probamos que $f(F)$ es cerrado en $\mathbb{S}^1$. Sea $(x,y) \in \overline{f(F)}$. Entonces existe $\{t_n\} \subset F$, tal que $f(t_n) \to (x,y)$. Ya que la sucesión $\{t_n\} \subset [0,2\pi]$ está acotada, existe una parcial convergente: $t_{\sigma(n)} \to t'$. Como F es cerrado, $t' \in F$. Además por continuidad, $f(t_{\sigma(n)}) \to f(t')$ y por unicidad del límite, $f(t') = (x,y) \in f(F)$, como queríamos probar.
2. El conjunto $[0,\pi)$ es abierto en $[0,2\pi]$, ya que $[0,\pi) = [0,2\pi] \cap (-\pi,\pi)$, pero su imagen no lo es: el punto $f(0) = (1,0)$ no es un punto interior de $f([0,\pi))$ pues la sucesión $\{f(2\pi - \frac{1}{n})\}$ no pertenece a $f([0,\pi))$ ya que $\sin(2\pi - \frac{1}{n}) < \sin(t)$, $\forall t \in [0,\pi)$ y su límite es $f(2\pi) = f(0)$.

Ejercicio 2.22 *Se considera la aplicación* $f:[0,1]\to\{0,1\}$ *dada por*

$$f(x)=\begin{cases} 1 & si\ x\in[0,\frac{1}{2}] \\ 0 & si\ x\in(\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Probar que f *es sobreyectiva, cerrada, abierta y no es una aplicación continua.*

Solución: La sobreyectividad es evidente. Por otro lado, el codominio tiene la topología discreta, luego f es abierta y cerrada. La sucesión $\{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\}$ converge a $1/2$, pero $f(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})=0\to 0\neq f(1/2)$. Esto prueba que f no es continua. También se podía haber tomado $\{1\}$ como abierto en $\{0,1\}$ y entonces $f^{-1}(\{1\})=[0,\frac{1}{2}]$ que no es abierto en $[0,1]$.

Ejercicio 2.23 *En* $\mathbb{R}$, *denotamos por* τ_{in} *y* τ_{ex} *las topologías del punto incluido para* $p=0$ *y punto excluido para* $p=1$, *respectivamente. Sea la aplicación* $f:(\mathbb{R},\tau_{in})\to(\mathbb{R},\tau_{ex})$ *dada por* $f(x)=x^2$. *Probad que* f *es continua en* $x=1$ *pero no en* $x=2$.

Solución: En $(\mathbb{R},\tau_{in})$, una base de entornos de $x=1$ es $\beta_1=\{U=\{0,1\}\}$, de $x=2$, $\beta_2=\{V=\{0,2\}\}$. Sabemos que $f(1)=1$ y $f(2)=4$. En $(\mathbb{R},\tau_{ex})$, $\beta'_1=\{W=\mathbb{R}\}$ y $\beta'_4=\{O=\{4\}\}$.

La aplicación f es continua en $x=1$ pues $f(U)=U\subset W$. No es continua en $x=2$ pues $f(V)=\{0,4\}\not\subset O$.

Ejercicio 2.24 *Construir un homeomorfismo entre* $\mathbb{S}^1$ *y la elipse*

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1\}.$$

Solución: Se define la aplicación $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y)=(x,2y)$. Esta aplicación es una afinidad ya que

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por tanto es un homeomorfismo. Por otro lado, es evidente que $f(\mathbb{S}^1)=E$. Luego $f_{|\mathbb{S}^1}:\mathbb{S}^1\to f(\mathbb{S}^1)=E$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 2.25 *Construir un homeomorfismo entre* $X=\{(0,y);y\in\mathbb{R}\}$ *e* $Y=\{(x,x^2);-1<x<1\}$.

Solución: X es homeomorfo a $\mathbb{R}$ mediante $f : X \to \mathbb{R}$, $f((0,y)) = y$ ($X \cong \{(y,0) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}$ mediante un giro de 90 grados, y el último conjunto es homeomorfo a $\mathbb{R}$).

La recta real $\mathbb{R}$ es homeomorfa al intervalo $(-1,1)$, por ejemplo, con $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$.

El conjunto Y es homeomorfo al intervalo $(-1,1)$ por ser el grafo de la función x^2; concretamente el homeomorfismo es $h : (-1,1) \to Y$, $h(x) = (x, x^2)$ (ejercicio 2.16). Finalmente el homeomorfismo buscado es $h \circ g \circ f$, es decir,

$$(0,y) \longmapsto \Big(\frac{y}{1-|y|}, \frac{y^2}{(1-|y|)^2}\Big).$$

Ejercicio 2.26 *Estudiar si la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es abierta o cerrada.*

Solución:

- La aplicación no es abierta, pues $f((-1,1)) = [\frac{1}{2}, 1]$, que no es abierto en $\mathbb{R}$.
- La aplicación no es cerrada, pues $\mathbb{R}$ es cerrado y $f(\mathbb{R}) = (0,1]$, que no es cerrado en $\mathbb{R}$

Ejercicio 2.27 *Se considera $A \subset X$, donde (X,τ) es un espacio topológico y sea la aplicación inclusión $i : (A, \tau_{|A}) \to (X,\tau)$. Probar que i es una aplicación abierta si y sólo si $A \in \tau$.*

Solución:

1. Supongamos que i es abierta. Ya que $A \in \tau_{|A}$, $i(A) = A \in \tau$.
2. Sea ahora A un subconjunto abierto y veamos que i es abierta. Sea $O \in \tau_{|A}$. Entonces existe $G \in \tau$ tal que $O = G \cap A$. Ya que A es abierto, $O \in \tau$. Por tanto $i(O) = O \in \tau$.

Ejercicio 2.28 *Sea (X, τ_d) un espacio topológico dotado de la topología a derechas, es decir, τ_d es la topología que por base a la familia $\beta = \{[x, \to [; x \in X\}$. Caracterizar las aplicaciones continuas de X en X.*

Solución: Supongamos que $f : X \to X$ es una aplicación continua. Dado $x \in X$, $\beta_x = \{[x, \to [\}$ es una base de entornos del punto x. Ya que la aplicación es continua en x, y usando la caracterización de continuidad mediante base de entornos,

$$f([x, \to [) \subset [f(x), \to [,$$

es decir, para todo $y \in X$ con $x \leq y$, $f(x) \leq f(y)$. Por tanto, si la aplicación f es continua entonces es creciente.

El recíproco es inmediato, es decir, toda aplicación creciente es continua. Por tanto el conjunto de las aplicaciones continuas de (X, τ_d) en sí mismo lo constituye el conjunto de las aplicaciones crecientes.

Ejercicio 2.29 *Se consideran X e Y dos conjuntos, p y q sendos puntos en X e Y respectivamente y consideramos las topologías del punto excluido τ_p y τ_q (ejercicio 1.26). Probar que $f : (X, \tau_p) \to (Y, \tau_q)$ es una aplicación continua si y sólamente si $f(p) = q$ ó f es constante.*

Solución: Supongamos que f es una aplicación continua y que no es constante. Si $f(p) \neq q$, entonces $\{f(p)\}$ es un conjunto abierto de Y, luego $f^{-1}(\{f(p)\})$ es un abierto en X. Este abierto no es el conjunto X, pues entonces f sería constante. Por tanto, $p \notin f^{-1}(\{f(p)\})$, lo cual es falso, llegando a una contradicción.

Supongamos ahora que f es una aplicación no constante tal que $f(p) = q$ y veamos que f es continua. Para ello, sea $O' \in \tau_q$, es decir, $q \notin O'$ (si $O' = Y$, entonces $f^{-1}(Y) = X$ y f es constante). Si $p \in f^{-1}(O')$, entonces $f(p) = q \in O'$, lo cual es falso. Por tanto $p \notin f^{-1}(O')$ y $f^{-1}(O') \in \tau_p$.

Ejercicio 2.30 *Construir un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$.*

Solución: Como $X = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, consideramos un homeomorfismo f entre $\mathbb{R}$ y el intervalo $(0, \infty)$. Entonces la aplicación $\phi : \mathbb{R}^2 \to X$ dada por

$$\phi(x, y) = (x, f(x))$$

es un homeomorfismo: la aplicación inversa es $\psi(x, y) = (x, f^{-1}(y))$. Las aplicaciones ϕ y ψ son continuas. Para ϕ, tenemos

$$p_{1|X} \circ \phi = p_{1|X} \qquad p_{2|X} \circ \phi = f,$$

donde p_1, p_2 son las aplicaciones proyecciones de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Para la aplicación ψ, $p_1 \circ \psi = p_1$ y $p_2 \circ \psi = f^{-1} \circ p_2$. Como ejemplo de funciones f basta tomar $f(x) = \log(x)$, luego $\phi(x, y) = (x, \log(y))$ y $\psi(x, y) = (x, e^y)$.

Ejercicio 2.31 *Probar que son homeomorfos los conjuntos*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

Solución: Se define la aplicación $F : D \to K$ mediante

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\text{máx}\{|x|,|y|\}}(x, y) & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La aplicación inversa de F es

$$G(x,y)=\begin{cases} \frac{\max\{|x|,|y|\}}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) & (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0) & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

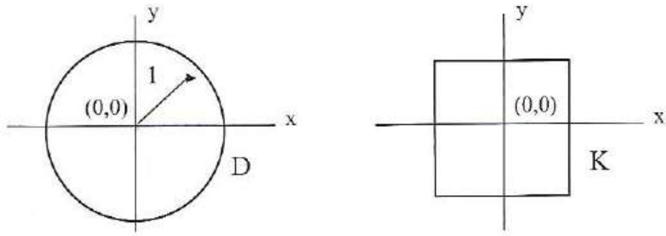

Figura 2.1: Los conjuntos D y K del ejercicio 2.31

El único problema que se plantea es la continuidad de F y G en el origen. Sin embargo, para F se tiene

$$|F(x,y)|=\frac{x^2+y^2}{\max\{|x|,|y|\}}\leq 2\max\{|x|,|y|\}\longrightarrow 0$$

si $(x,y)\to(0,0)$. En el caso de la aplicación G, tenemos

$$|G(x,y)|=\max\{|x|,|y|\}\longrightarrow (0,0)$$

si $(x,y)\to(0,0)$.

Ejercicio 2.32 *Probar que la esfera $\mathbb{S}^2$ es homeomorfa al elipsoide $(a^2,b^2,c^2>0)$*

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}.$$

Solución: Se define la aplicación $f:\mathbb{S}^2\to E$ mediante

$$f(x,y,z)=(ax,by,cz).$$

Esta aplicación está bien definida, pues si $(x,y,z)\in\mathbb{S}^2$,

$$\frac{(ax)^2}{a^2}+\frac{(by)^2}{b^2}+\frac{(cz)^2}{c^2}=x^2+y^2+z^2=1.$$

Esta aplicación f vista como $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es una afinidad, luego es un homeomorfismo. Por tanto, $f_{|\mathbb{S}^2}:\mathbb{S}^2\to f(\mathbb{S}^2)=E$ es un homeomorfismo (comparar con el ejercicio 2.24).

Ejercicio 2.33 *Hallar un homeomorfismo entre el cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 = 1\}$ y el hiperboloide reglado $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2-z^2 = 1\}$.*

Solución: Se define la aplicación $f : C \to H$ mediante

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+z^2}}, z\right).$$

Esta aplicación es biyectiva y su inversa es

$$g(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z\right).$$

Tanto f como g son aplicaciones continuas, sin más que componer con las proyecciones de $\mathbb{R}^3$.

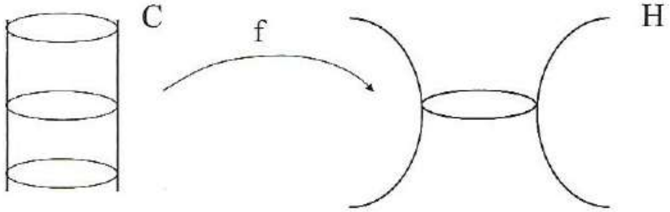

Figura 2.2: Los conjuntos C y H del ejercicio 2.33

Ejercicio 2.34 *Probar que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son homeomorfos:*

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; r^2 \le x^2+y^2 \le R^2\}, \quad C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; s^2 \le x^2+y^2 \le S^2\},$$

donde $0 < r < R < \infty$ y $0 < s < S < \infty$.

Solución: Se considera un homeomorfismo $f : [r,R] \to [s,S]$. Se define $\phi : C_1 \to C_2$, mediante

$$\phi(x,y) = \frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y).$$

La aplicación inversa es

$$\psi(x,y) = \frac{f^{-1}(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y).$$

Tanto ϕ como ψ son continuas. Por ejemplo,

$$p_1 \circ \phi = \frac{f \circ \sqrt{p_1^2+p_2^2}}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}} p_1, \quad p_2 \circ \phi = \frac{f \circ \sqrt{p_1^2+p_2^2}}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}} p_2.$$

Ejercicio 2.35 *Probar que la corona circular dada por*

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; r < \sqrt{x^2+y^2} < R\},$$

donde $0 \leq r < R \leq \infty$, *es homeomorfo al cilindro*

$$C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 = 1\} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}.$$

Solución: Se considera un homeomorfismo $h : (r,R) \to \mathbb{R}$ que satisfaga $h(r) = -\infty$ y $h(R) = +\infty$. Se define entonces $F : C_1 \to C_2$ por

$$F(p) = \left(\frac{p}{|p|}, h(|p|)\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, h(\sqrt{x^2+y^2})\right), \quad p = (x,y).$$

Esta aplicación es continua pues

$$p_1 \circ F = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}, \quad p_2 \circ F = \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}, \quad p_3 \circ F = h \circ \sqrt{p_1^2+p_2^2}.$$

La inversa es la aplicación $G(a,b,c) = (ah^{-1}(c), bh^{-1}(c))$, que de nuevo es continua. Por tanto, F es un homeomorfismo.

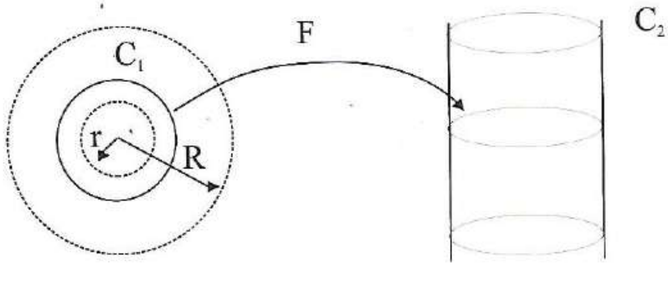

Figura 2.3: Los conjuntos C_1 y C_2 del ejercicio 2.35

Ejercicio 2.36 *Sea* $0 \leq r < R \leq \infty$. *Obtener un homeomorfismo entre la corona circular* $C = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; r^2 < u^2+v^2 < R^2\}$ *y el hiperboloide reglado* $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

Solución: Consideramos el homeomorfismo $\phi : C \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, h(\sqrt{u^2+v^2})\right)$$

donde $h : (r,R) \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo cualquiera y sea el homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to H$ dado en el ejercicio 2.33. Entonces el homeomorfismo que estamos buscando es $f \circ \phi$.

Ejercicio 2.37 *Calcular un homeomorfismo entre* $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$ *y el cilindro* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Solución: Sabemos que la proyección estereográfica $p : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo que lleva el punto $(0,0,-1)$ en $(0,0)$. Por tanto, $p_{|\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,1),(0,0,-1)\}}$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pero este conjunto es la corona $C_{0,\infty} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2\}$, el cual es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ por el ejercicio 2.35. Entonces basta con componer los dos homeomorfismos.

Ejercicio 2.38 *Demostrar que* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *es homeomorfo a*

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}.$$

Solución: El conjunto X es homeomorfo al conjunto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por ser el grafo de la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$: véase ejercicio 2.16. Por otra parte A es una corona circular, exactamente, la corona $C_{0,\infty}$. Toda corona es homeomorfa al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ por el ejercicio 2.35.

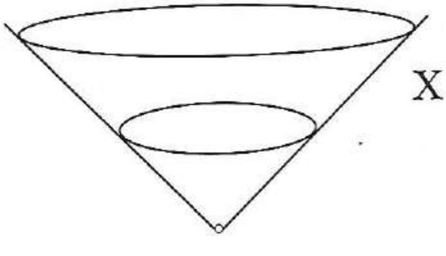

Figura 2.4: El conjunto X del ejercicio 2.38

Ejercicio 2.39 *Caracterizar las aplicaciones continuas de* $(\mathbb{R}, \tau_{CF})$ *en sí mismo. Como consecuencia, hallar los homeomorfismos entre* $(\mathbb{R}, \tau_{CF})$ *en sí mismo.*

Solución: Sea $f : (\mathbb{R}, \tau_{CF}) \to (\mathbb{R}, \tau_{CF})$ una aplicación continua. Entonces la imagen inversa de cualquier cerrado es cerrado, es decir, para cualquier conjunto finito F, $f^{-1}(F)$ es finito. Por tanto, las aplicaciones que son continuas son aquéllas cuya imagen inversa de cualquier conjunto finito es finito.

Las aplicaciones biyectivas son por tanto continuas, ya que la imagen inversa de un conjunto finito también es finito (con el mismo cardinal). Por tanto, el conjunto de los homeomorfismos de $(\mathbb{R}, \tau_{CF})$ en $(\mathbb{R}, \tau_{CF})$ son las aplicaciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Capítulo 3

Topología inicial. Topología producto

Ejercicio 3.1 *Se consideran dos espacios métricos (X_1, d_1) y (X_2, d_2) y τ_1, τ_2 las topologías respectivas. En $X_1 \times X_2$ se define la aplicación*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2).$$

Probar que d es una distancia y que la topología que engendra es justamente $\tau_1 \times \tau_2$. Probar también que la distancia $\bar{d}$ dada por $\bar{d} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ es equivalente a d.

Solución: El hecho de que $d \geq 0$ y que sea simétrica es evidente. Supongamos ahora que $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0$. Entonces $d_1(x_1, x_2) = d_2(y_1, y_2) = 0$, es decir, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Por tanto, $(x_1, y_1) = (x_2 \not= y_2)$. Veamos ahora la desigualdad triangular: sean $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ y $z = (x_3, y_3)$. Usando la desigualdad triangular de las distancias d_1 y d_2, tenemos:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2) \\ &\leq d_1(x_1, x_3) + d_1(x_3, x_2) + d_2(y_1, y_3) + d_2(y_3, y_2) \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

Demostramos ahora que la topología que genera es la topología producto. Sea $\beta = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ la base de entornos estándar de $(x, y) \in X_1 \times X_2$ en la topología producto y $\gamma = \{B_r(x, y); r > 0\}$ la base de entornos de (x, y) en $(X_1 \times X_2, d)$ dada por las bolas centradas en (x, y).

- Sea $U_1 \times U_2 \in \beta$ y $(x, y) \in U_1 \times U_2$. Ya que estos espacios son espacios métricos, existe $r > 0$ tal que $x \in B_r^1(x) \subset U_1$ e $y \in B_r^2(y) \subset U_2$. Entonces $B_r(x, y) \subset B_r^1(x) \times B_r^2(y) \subset U_1 \times U_2$ ya que si $(x', y') \in B_r(x, y)$,

$$d(x, x') \leq d(x, x') + d(y, y') < r.$$

- Sea ahora $B_r(x,y) \in \gamma$. Entonces $B^1_{r/2}(x) \times B^2_{r/2}(y) \subset B_r(x,y)$, pues si $(x',y') \in B^1_{r/2}(x)$, entonces

$$d((x',y'),(x,y)) = d(x,x') + d(y,y') < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Para probar que $\bar{d}$ es equivalente a d, basta con observar las siguientes desigualdades: $d \leq d_1 + d_2 \leq 2\bar{d}$ y $\bar{d} \leq d$.

Ejercicio 3.2 *Sean dos espacios topológicos* (X_1, τ_1) *y* (X_2, τ_2). *Estudiar si son ciertas las siguientes afirmaciones:*

1. *Si* τ_1 *y* τ_2 *son las topologías discretas, entonces* $\tau_1 \times \tau_2$ *es la topología discreta.*
2. *Si* τ_1 *y* τ_2 *son las topologías triviales, entonces* $\tau_1 \times \tau_2$ *es la topología trivial.*
3. *Si* τ_1 *y* τ_2 *son las topologías de los complementos finitos, entonces* $\tau_1 \times \tau_2$ *es la topología de los complementos finitos.*

Solución:

1. Sí es cierta. Sea τ_D la topología discreta en $X_1 \times X_2$ y veamos que está incluida en la topología producto $\tau_1 \times \tau_2$. Sea $A \subset X_1 \times X_2$ un subconjunto cualquiera y veamos que es un abierto en $\tau_1 \times \tau_2$. Sea $(a,b) \in A$. Entonces $\{a\} \times \{b\} \in \tau_1 \times \tau_2$ y $(a,b) \in \{a\} \times \{b\} \subset A$. Por último, la inclusión $\tau_1 \times \tau_2 \subset \tau_D$ es evidente, ya que τ_D es la topología más fina que puede haber en un conjunto.

2. Ya que $\tau_1 \times \tau_2 = \{\emptyset, X_1 \times X_2\}$, la topología producto es la topología trivial de $X_1 \times X_2$.

3. Veamos que si τ es la topología de los complementos finitos de $X_1 \times X_2$, entonces $\tau \subset \tau_1 \times \tau_2$, pero no se tiene porqué dar la otra inclusión.

   Sea $(X_1 \times X_2) \setminus F$ un elemento de τ, donde F es un conjunto finito de puntos de $X_1 \times X_2$ y veamos que es un abierto en la topología producto. Para ello, sea $(a,b) \in (X_1 \times X_2) \setminus F$. Supongamos que $F = \{(a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)\}$. Entonces podemos suponer sin perder generalidad, que $a \neq a_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces

   $$(a,b) \in ((X_1 - \{a_1\}) \times X_2) \cap \ldots \cap ((X_1 - \{a_n\}) \times X_2)$$

   y $((X_1 - \{a_1\}) \times X_2) \cap \ldots \cap ((X_1 - \{a_n\}) \times X_2) \in \tau_1 \times \tau_2$.

   En general no se da la otra inclusión: sea $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$. En este caso, $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ es un abierto en la topología producto, pero no es un abierto en la topología de los complementos finitos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pues su complementario, que es $\mathbb{R} \times \{0\}$, es un conjunto infinito de puntos.

Ejercicio 3.3 *Sea una aplicación $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ entre dos espacios topológicos. Se define el grafo de f como el conjunto $G(f)=\{(x,f(x))\in X\times Y; y=f(x)\}$. Probar que son equivalentes:*

1. *La aplicación $h(x)=(x,f(x))$ de X a $G(f)$ es un homeomorfismo.*
2. *La aplicación $\phi(x)=(x,f(x))$ es un embebimiento de X en $X\times Y$.*
3. *La aplicación f es continua.*

Solución: La implicación $1\Rightarrow 2$ es evidente, pues $\phi=i\circ h$, donde $i:G(f)\to X\times Y$ es la inclusión, la cual es un embebimiento y la composición de un homeomorfismo y un embebimiento es un embebimiento. Por otro lado, la implicación $2\Rightarrow 3$ también es evidente, pues si ϕ es una aplicación continua, $p_2\circ\phi=f$ también es continua.

Veamos por último $3\Rightarrow 1$. El hecho de que la aplicación h es biyectiva es evidente. Probamos ahora que ella y su inversa son continuas. La aplicación h es continua, pues $p_1\circ h=1_X$ y $p_2\circ h=f$, que es una aplicación continua por hipótesis. La aplicación inversa de h es $g:(x,f(x))\longmapsto x$ que es una aplicación continua pues $g={p_1}_{|G(f)}$.

Ejercicio 3.4 *Se consideran los espacios topológicos $(\mathbb{R},\tau_u)$ y (R,τ_{CF}). Estudiar el interior y la adherencia en el espacio producto $(\mathbb{R}^2,\tau_u\times\tau_{CF})$ de los conjuntos $\mathbb{R}\times\{0\}$ y $\{0\}\times\mathbb{R}$. Comparar con la topología usual τ_u de $\mathbb{R}^2$ y estudiar si la aplicación $f:(\mathbb{R}^2,\tau_u)\to(\mathbb{R}^2,\tau_u\times\tau_{CF})$ dada por $f(x,y)=(y,x)$ es una aplicación continua y abierta.*

Solución:

1. Para el primer conjunto tenemos

$$\text{int}(\mathbb{R}\times\{0\})=\text{int}(\mathbb{R})\times\text{int}(\{0\})=\mathbb{R}\times\emptyset=\emptyset.$$

$$\overline{(\mathbb{R}\times\{0\})}=\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\{0\}}=\mathbb{R}\times\{0\}.$$

2. Si consideramos ahora el segundo conjunto,

$$\text{int}(\{0\}\times\mathbb{R})=\text{int}(\{0\})\times\text{int}(\mathbb{R})=\emptyset\times\mathbb{R}=\emptyset.$$

$$\overline{\{0\}\times\mathbb{R}}=\overline{\{0\}}\times\overline{\mathbb{R}}=\{0\}\times\mathbb{R}.$$

3. Ya que $\tau_{CF}\subset\tau_u$, entonces $\tau_u\times\tau_{CF}\subset\tau_u\times\tau_u$.

4. Para ver que es una aplicación continua, basta con componer con las proyecciones. La primera $p_1\circ f:(\mathbb{R}^2,\tau_u)\to(\mathbb{R},\tau_u)$ está dada por $(x,y)\longmapsto y$, la cual es evidentemente una aplicación continua. Por otra parte, para estudiar si $p_2\circ f:(\mathbb{R}^2,\tau_u)\to(\mathbb{R},\tau_{CF})$ es una aplicación continua, observemos que la imagen inversa de cualquier abierto

$\mathbb{R} \setminus F$ es $(\mathbb{R} \setminus F) \times \mathbb{R}$, el cual es abierto en la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, f es una aplicación continua.

Para estudiar si es abierta, basta con ver la imagen de cualquier elemento básico de $\tau_u \times \tau_{CF}$. Pero

$$f((0,1) \times \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times (0,1) \notin \tau_u \times \tau_{CF},$$

luego f no es una aplicación abierta.

Ejercicio 3.5 *Sean dos espacios topológicos (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2). Se considera un subconjunto abierto $A \subset X_1 \times X_2$ en la topología producto. Para cada $x_1 \in X_1$ se define*

$$A_{x_1} = \{x_2 \in X_2; (x_1, x_2) \in A\}.$$

Probar que A_{x_1} es un abierto de X_2. Dar ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que A no es abierto pero A_x sí es abierto para cada $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Sea $x_2 \in A_{x_1}$. Entonces $(x_1, x_2) \in A$. Ya que A es abierto, existen entornos U y V de x_1 y x_2 respectivamente tales que $U \times V \subset A$. Veamos que $V \subset A_{x_1}$: para ello, sea $y \in V$. Entonces $(x_1, y) \in U \times V \subset A$, es decir, $y \in A_{x_1}$.

Sea $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ con la topología usual y sea $A = [0,1] \times \mathbb{R}$. Este conjunto no es abierto. Sin embargo, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

1. si $|x| \leq 1$, $A_x = \{y \in \mathbb{R}; (x,y) \in A\} = \mathbb{R}$, que es abierto en $X_2 = \mathbb{R}$.
2. si $|x| > 1$, $A_x = \{y \in \mathbb{R}; (x,y) \in A\} = \emptyset$, que también es abierto.

Ejercicio 3.6 *Se considera un espacio topológico (X, τ), donde τ es la topología inicial para una familia de aplicaciones $\{f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i); i \in I\}$. Sea $A \subset X$. Probar que $\tau_{|A}$ es la topología inicial σ en A para la familia $\{f_{i|A} : A \to (X_i, \tau_i)\}$.*

Solución: Por una parte, ya que cada aplicación $f_i : X \to X_i$ es continua, al restringir al espacio $(A, \tau_{|A})$, sigue siendo continua. Por definición de topología inicial se tiene pues que $\sigma \subset \tau_{|A}$.

Veamos ahora la otra inclusión. Sea ahora un abierto de la subbase $\tau_{|A}$. Dicho abierto es de la forma $f_i^{-1}(O_i) \cap A$, donde O_i es un abierto de X_i. Pero dicho abierto es justamente $f_{i|A}^{-1}(O_i)$, el cual es un abierto de la subbase de la topología inicial σ. Luego $\tau_{|A} \subset \sigma$.

Ejercicio 3.7 *Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \tau_{CF})$ definida por $f(x) = E(x)$, siendo $E(x)$ la parte entera de x. Caracterizar los subconjuntos abiertos y cerrados para la topología inicial τ y calcular el interior y adherencia del intervalo $[\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}]$.*

Solución: Los conjuntos cerrados en τ_{CF} son los conjuntos finitos. Sea $a \notin \mathbb{Z}$. Entonces $E^{-1}(\{a\}) = \emptyset$. Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces $E^{-1}(\{a\}) = [a, a+1)$ es un cerrado en la topología inicial. Por tanto los conjuntos que son uniones finitas de intervalos del tipo $[n, n+1)$, con $n \in \mathbb{Z}$, son conjuntos cerrados, y sus complementarios son abiertos.

La adherencia de $[\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}]$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene al conjunto, luego la adherencia es $[-1, 2)$. El interior es el conjunto vacío ya que no hay ningún abierto dentro del intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Ejercicio 3.8 *Sea X un conjunto e (Y, τ') un espacio topológico. Supongamos que $f : X \to Y$ es una aplicación biyectiva. Entonces existe una única topología en X, τ, tal que $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es un homeomorfismo.*

Solución: Definimos $\tau = \{f^{-1}(O'); O' \in \tau'\}$. Es fácil probar que es una topología (es justamente la topología τ_f del ejercicio 1.19). Por la simple definición de τ, f es una aplicación continua. Pero también es abierta, ya que por ser f biyectiva, $f(f^{-1}(O')) = O' \in \tau'$. Esto prueba que f es un homeomorfismo.

Veamos que es la única topología con dicha propiedad. Si σ es otra topología que hace a f homeomorfismo, entonces $f^{-1} : (Y, \tau') \to (X, \sigma)$ es un homeomorfismo y así $\sigma = \{f^{-1}(O'); O' \in \tau'\} = \tau$.

Ejercicio 3.9 *Se consideran dos aplicaciones abiertas $f_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, 2$. Probar que $f_1 \times f_2$ es una aplicación abierta. Estudiar si es cierto el recíproco.*

Solución: Para probar que $f_1 \times f_2$ es una aplicación abierta, es suficiente con demostrar que dada una base de $X_1 \times X_2$, la imagen de cada elemento de dicha base es un abierto. Como base del producto elegimos el producto de abiertos. Por tanto, sea $O_1 \times O_2 \in \tau_1 \times \tau_2$. Entonces

$$(f_1 \times f_2)(O_1 \times O_2) = f_1(O_1) \times f_2(O_2) \in \tau_1' \times \tau_2',$$

ya que f_1 y f_2 son aplicaciones abiertas.

El recíproco también es cierto, pues $f_i = p_i \circ (f_1 \times f_2)$, $i = 1, 2$, y por tanto, cada f_i es composición de aplicaciones abiertas, luego es abierta.

Ejercicio 3.10 *Probar que $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ es homeomorfo a $(X_2 \times X_1, \tau_2 \times \tau_1)$*

Solución: Definimos $\phi : X_1 \times X_2 \to X_2 \times X_1$ mediante $\phi(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Es evidente que esta aplicación es biyectiva y su inversa es justamente ella misma.

Por tanto, para probar que es un homeomorfismo es suficiente con ver que ϕ es una aplicación continua. Para ello componemos con las aplicaciones proyecciones. Pero en tal caso tenemos, $p_2 \circ \phi = p_1$ y $p_1 \circ \phi = p_2$. Luego ϕ es una aplicación continua.

Ejercicio 3.11 *Se considera $\{(X_i, \tau_i); i \in I\}$ una familia de espacios y $A_i \subset X_i$ para cada $i \in I$. Probar que*

$$\Pi_I(\tau_{i|A_i}) = (\Pi_I \tau_i)_{|\Pi_I A_i}$$

Solución: Una subbase de $\Pi_I \tau_{i|A_i}$ es

$$\left\{\Pi_i G_i; G_i \in \tau_{i|A_i}, \text{ existe } J \subset I \text{ finito tal que } \forall i \notin J,\, G_i = A_i\right\}.$$

Una subbase de $(\Pi_I \tau_i)_{|\Pi_I A_i}$ es

$$\{\Pi_i (O_i \cap A_i); O_i \in \tau_i, \text{ existe } J \subset I \text{ finito tal que } \forall i \notin J,\, O_i = X_i\}.$$

Pero $\Pi_i(O_i \cap A_i) = (\Pi_i O_i) \cap (\Pi_i A_i)$. Como las subbases coinciden, lo mismo sucede con las topologías.

Ejercicio 3.12 *Se consideran $\{(X_i, \tau_i); i \in I\}$ y $\{(Y_i, \tau_i'); i \in I\}$ dos familias de espacios topológicos y $\{f_i : X_i \to Y_i\}$ una familia de homeomorfismos. Probar que la aplicación producto definida por $\Pi_{i\in I} f_i : \Pi X_i \to \Pi Y_i$ dada por*

$$(\Pi_{i\in I} f_i)(x_i) = (f_i(x_i))$$

es un homeomorfismo.

Solución: Ya que cada aplicación f_i es biyectiva, la aplicación producto también lo es y su inversa es la aplicación producto de las aplicaciones inversas $f_i^{-1} : Y_i \to X_i$, esto es,

$$(\Pi_{i\in I} f_i)^{-1}((y_i)) = (\Pi_{i\in I} f_i^{-1})(y_i) = (f_i^{-1}(y_i)).$$

Queda probar que estas dos aplicaciones son continuas. Se compone con las correspondientes proyecciones. Por ejemplo, si $q_i : \Pi_{i\in I} Y_i \to Y_i$ es una proyección en el producto $\Pi_{i\in I} Y_i$, entonces

$$q_i \circ (\Pi_{i\in I} f_i) = f_i \circ p_i$$

donde $p_i : \Pi_{i\in I} \to X_i$ es la proyección sobre el espacio X_i. Con la aplicación $(\Pi_{i\in I} f_i)^{-1}$ el razonamiento es análogo.

Ejercicio 3.13 *Se considera en la recta real $\mathbb{R}$ la topología de Sorgenfrey τ_S. Probar que $\tau_S \times \tau_S$ no es la topología discreta en $\mathbb{R}^2$, pero el subconjunto $A = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$ hereda de la topología producto la topología discreta.*

Solución: Para probar que no es la topología discreta hay que encontrar un subconjunto que no sea un abierto. El conjunto $\{(0,0)\}$ no es abierto: si lo fuera, usando la caracterización de un conjunto abierto mediante base de entornos, existirían $r, s > 0$ tales que $[0,r) \times [0,s) \subset \{(0,0)\}$, lo cual es falso.

Para probar que A hereda la topología discreta, veamos que todo punto suyo es abierto. Sea $(x,-x) \in A$. Entonces

$$\{(x,-x)\} = ([x, x+1) \times [-x, -x+1)) \cap A \in (\tau_S \times \tau_S)_{|A}.$$

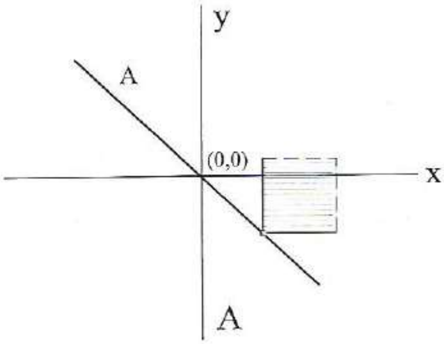

Figura 3.1: El conjunto A hereda la topología discreta: ejercicio 3.13.

Ejercicio 3.14 *En* $\mathbb{R}$ *se considera de nuevo la topología* τ_S. *Sean* $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \tau_S)$ *definidas mediante* $f_1(x) = x$ *y* $f_2(x) = -x$. *Determinar la topología inicial sobre* $\mathbb{R}$ *para la familia* $\{f_1, f_2\}$.

Solución: Veamos que la topología inicial es la topología discreta probando que todo punto es abierto. Sea $x \in \mathbb{R}$. El conjunto $f_1^{-1}([x, x+1)) = [x, x+1)$ es abierto en la topología inicial. También lo es $f_2^{-1}([-x, -x+1)) = (x-1, x]$. Por tanto $\{x\} = [x, x+1) \cap (x-1, x]$ es un conjunto abierto.

Ejercicio 3.15 *Se define la aplicación* $f_1 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *mediante* $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ *y se considera la aplicación* $f_2 : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to (\mathbb{S}^1, \tau_{CF})$ *dada por* $f_2(x,y) = \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. *Describir una base de la topología inicial y comparar esta topología con la usual. Hallar el interior y la adherencia del conjunto* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 2\}$.

Solución: La subbase de la topología inicial está dada por las imágenes inversas mediante f_1 y f_2 de abiertos del codominio. Para la aplicación f_1, las imágenes inversas de intervalos abiertos son coronas circulares abiertas en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y centradas en el origen.

Para la aplicación f_2, si $p \in \mathbb{S}^1$, $f_2^{-1}(\{p\}) = \{\lambda p; \lambda > 0\}$, es decir, es la semirrecta que parte del origen del plano y tiene por dirección p. Entonces las imágenes inversas de conjuntos finitos (que son los cerrados del codominio) son uniones finitas de semirrectas que parten del origen. Luego los abiertos correspondientes son sus complementarios. Es evidente que estos abiertos de la topología inicial son abiertos también en la topología usual, luego la topología inicial está contenida en la topología usual. La otra inclusión no es cierta, pues una bola abierta no contiene a abiertos de la subbase de la topología inicial.

Finalmente el interior de A es $\emptyset$ ya que no hay ningún abierto dentro de A. Por otro lado, la adherencia de A es $\mathbb{R}^2$ ya que todo abierto interseca a A.

Ejercicio 3.16 *Sea* $\beta = \{[a,\infty); a \in \mathbb{R}\}$ *y* τ *la topología que genera en* $\mathbb{R}$. *Calcular el interior del conjunto* $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,x); x \in \mathbb{R}\}$ *en* $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_u \times \tau)$.

Solución: Una base de entornos de un punto (x,y) es $\beta_{(x,y)} = \{(x-r,x+r)\times[y,\infty); r > 0\}$. Es evidente que ningún conjunto de $\beta_{(x,y)}$ está incluido en A. Por tanto $\mathrm{int}(A) = \emptyset$.

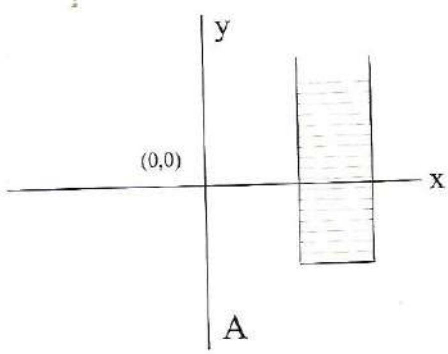

Figura 3.2: El conjunto A del ejercicio 3.16 y los elementos de $\beta_{(x,y)}$.

Ejercicio 3.17 *Sea* $X = \{a,b\}$ *y* $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. *Hallar la adherencia del conjunto* $A = \{(a,a),(b,b)\}$ *en* $(X \times X, \tau \times \tau)$.

Solución: Una base de la topología producto es $\tau \times \tau = \{\emptyset, X \times X, \{a\} \times X, X \times \{a\}\}$. Una base de entornos de (a,b) es $\{X \times X, \{a\} \times X\}$. Cada uno de estos entornos interseca a $(X \times X) \setminus A$ (el propio punto (a,b)) y también a A (el punto (a,a)).

Una base de entornos de (b,a) es $\{X \times X, X \times \{a\}\}$. Cada uno de estos entornos interseca a $(X \times X) \setminus A$ (el propio punto (b,a))) y también a A (el punto (a,a)). Por tanto, los dos puntos anteriores son adherentes. Entonces $\overline{A} = X \times X$.

Otra forma de hallar la adherencia de A es la siguiente:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{\{(a,a)\} \cup \{(b,b)\}} = \overline{\{(a,a)\}} \cup \overline{\{(b,b)\}} \\ &= \left(\overline{\{a\}} \times \overline{\{a\}}\right) \cup \overline{\{(b,b)\}} = (X \times X) \cup \overline{\{(b,b)\}} = X \times X.\end{aligned}$$

Ejercicio 3.18 *En $\mathbb{R}$, sea τ_S la topología de Sorgenfrey y τ_{in} la topología del punto incluido para $p = 0$. En el espacio $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tau_S\times\tau_{in})$, hallar el interior y la adherencia de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1\}$. Estudiar la continuidad de la función $f : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tau_S\times\tau_{in}) \to (\mathbb{R}, \tau_{in})$ dada por $f(x,y) = x$.*

Solución: 1. Como el conjunto A es un producto de conjuntos, tenemos

$$\mathrm{int}(A) = \mathrm{int}([0,1]\times\mathbb{R}) = \mathrm{int}([0,1]) \times \mathrm{int}(\mathbb{R}) = [0,1) \times \mathbb{R}.$$

$$\overline{[0,1]\times\mathbb{R}} = \overline{[0,1]} \times \overline{\mathbb{R}} = [0,1] \times \mathbb{R}.$$

2. La aplicación f no es continua, pues $\{0\} \in \tau_{in}$ pero $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}\times\mathbb{R}$ no es abierto, ya que

$$\mathrm{int}(\{0\}\times\mathbb{R}) = \mathrm{int}(\{0\}) \times \mathbb{R} = \emptyset \times \mathbb{R} = \emptyset.$$

Ejercicio 3.19 *Estudiar la continuidad de las aplicaciones $f, g : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tau_S\times\tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ dadas por $f(x,y) = x$ y $g(x,y) = x + y$.*

Solución: La aplicación f es continua: dada la base $\beta = \{(a,b); a < b\}$,

$$f^{-1}((a,b)) = (a,b) \times \mathbb{R} \subset \tau_S \times \tau_u,$$

ya que $\tau_u \subset \tau_S$.

Por otro lado, $g = f + p_2$, donde $p_2 : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tau_S\times\tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ es la segunda proyección. Por el álgebra de las funciones continuas que tienen por codominio $(\mathbb{R}, \tau_u)$, la aplicación g es continua.

Ejercicio 3.20 *Sea una familia de espacios topológicos $\{X_i; i \in I\}$ y de subconjuntos $A_i \subset X_i$, para cada i. Estudiar si se dan las siguientes igualdades:*

$$\Pi\ int(A_i) = int(\Pi A_i), \qquad \Pi\overline{A_i} = \overline{\Pi A_i}.$$

Solución: 1. En general no se da la igualdad $\mathrm{int}(\Pi A_i) = \Pi\ \mathrm{int}(A_i)$. Como ejemplo, tomamos $I = \mathbb{R}$ y $X_i = \mathbb{R}\ \forall i \in I$. Entonces el espacio producto es el espacio de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la topología producto. En este espacio, si tomamos $A_i = (0,1)$, $\forall i \in I$, entonces

$$\Pi_{i\in I}\text{int}(A_i) = \Pi_{i\in\mathbb{R}}(0,1).$$

Sin embargo $\text{int}(\Pi(0,1))$ es el conjunto vacío: si f es un punto interior, entonces existe un entorno de la base estándar de f incluido en el conjunto. Este entorno es de la forma $\Pi_{i\in\mathbb{R}}U_i$, donde U_i es un entorno de $f(i)$ y existe $J \subset I$ finito tal que si $i \notin J$, $U_i = \mathbb{R}$. Pero $U_i \subset (0,1)$, para $i \notin J$ es falso.

Justamente este ejemplo nos dice que se tiene la igualdad si y sólo si el conjunto de índices I es finito.

2. Probamos que para la adherencia es cierto el resultado. Por una parte, sea $(x_i) \in \overline{\Pi A_i}$ y sea x_{i_0}. Veamos que $x_{i_0} \in \overline{A_{i_0}}$. Sea U_{i_0} un entorno arbitrario de x_0. Con este entorno construimos el entorno de (x_i) dado por ΠU_i, donde $\forall i \neq i_0$, $U_i = X_i$. Por hipótesis tenemos

$$\Pi U_i \cap \Pi A_i = \Pi(U_i \cap A_i) \neq \emptyset.$$

En particular, $A_{i_0} \cap U_{i_0} \neq \emptyset$.

Se considera ahora $(x_i) \in \Pi\overline{A_i}$ y sea un entorno básico ΠU_i de (x_i), es decir, U_i es un entorno de x_i y existe $J \subset I$ finito tal que si $i \notin J$, $U_i = X_i$. Entonces

$$\Pi U_i \cap \Pi A_i = \Pi(U_i \cap A_i) \neq \emptyset$$

ya que $x_i \in \overline{A_i}$.

Ejercicio 3.21 *Sea $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y consideramos la topología producto, tomando en cada $\mathbb{R}$ la topología usual. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $f \in X$. Probar que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f si y sólo si $\{f_n\} \to f$ en la topología producto.*

Solución: 1. Supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f y veamos que también converge en la topología producto. Para ello sea $\Pi_{x\in\mathbb{R}}U_x$ un entorno de f en la topología producto, es decir, U_x es un entorno de x y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $x \neq x_i$, $i = 1, \ldots, m$, entonces $U_x = \mathbb{R}$. Ya que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to f(x)$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$,

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \epsilon, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Por tanto, si $n \geq \nu$, $f_n \in \Pi_{x\in\mathbb{R}}U_x$.

2. Supongamos ahora que tenemos convergencia en la topología producto y veamos que $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y sea $\epsilon > 0$. Se define $\Pi_{x\in\mathbb{R}}U_x$ tal que si $x \neq x_0$, $U_x = \mathbb{R}$ y $U_{x_0} = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Este conjunto es un entorno de f en la topología producto, luego existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $f_n \in \Pi_{x\in\mathbb{R}}U_x$. En particular, $f_n(x_0) \in U_{x_0} = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, como queríamos probar.

Ejercicio 3.22 *Sea el espacio $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de las aplicaciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ y la distancia $d(f,g) = \text{máx}\{|f(x)-g(x)|; x \in [0,1]\}$. Sea τ su topología. Comparar con la topología producto. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f \in X$, entonces probar que $\{f_n\} \to f$ si y sólo si la sucesión converge uniformemente a f.*

Solución:

1. Veamos que si σ es la topología producto, $\sigma \subset \tau$. La topología σ es la topología más pequeña que hace continuas a las aplicaciones proyecciones p_x de X en $\mathbb{R}$. Sea $x \in [0,1]$ y $p_x : f \longmapsto f(x)$. Entonces

$$|p_x(f) - p_x(g)| = |f(x) - g(x)| \leq d(f,g),$$

luego p_x es una aplicación continua.

2. Supongamos que $\{f_n\} \to f$ en la topología τ y veamos que esto significa convergencia uniforme. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \nu$, $d(f_n, f) < \epsilon$, es decir,

$$|f_n - f(x)| \leq \text{máx}\{|f_n(x) - f(x)|; x \in [0,1]\} < \epsilon$$

como queríamos probar.

3. Supongamos ahora que tenemos convergencia uniforme. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [0,1]$. Ya que $[0,1]$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}$,

$$d(f_n, f) = \text{máx}\{|f_n(x) - f(x)|; x \in [0,1]\} < \epsilon.$$

Ejercicio 3.23 *Sea $\{(X_n, d_n); n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de espacios métricos. Probar que ΠX_n es un espacio metrizable. (Sugerencia: suponer que $d_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y definir*

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.)$$

Solución: Podemos suponer que cada distancia d_n está acotada por 1 (basta con sustituirla por una equivalente con dicha propiedad, por ejemplo, usando el ejercicio 1.2). Por una parte, d está bien definida, pues

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n; y_n)}{2^n} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

y es evidente que d es una distancia. Veamos ahora que la topología que genera dicha distancia d es justamente la topología producto. Para ello, probamos que todo punto de ΠX_n tiene bases de entornos equivalentes para cada una de las topologías:

1. Sea $U = B^1_{\epsilon_1}(x_1) \times \ldots \times B^n_{\epsilon_n}(x_n) \times \left(\Pi_{m \geq n+1} X_m\right)$ un entorno básico en la topología producto. Entonces $B^d_\epsilon((x_n)) \subset U$ donde $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$.
2. Sea ahora una bola $B^d_\epsilon((x_n))$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon/2$. Entonces

$$B^1_{\epsilon/2N}(x_1) \times \ldots B^N_{\epsilon/2N}(x_n) \times \left(\Pi_{i \geq N+1} X_i\right) \subset B^d_\epsilon((x_n))$$

Ejercicio 3.24 *Consideramos un grupo topológico G y dos subconjuntos suyos A y B. Sean $x, y \in G$. Probar que si A y B son conjuntos abiertos, también lo son xA, Ax, xAy y AB.*

Solución:

1. Se considera la traslación a izquierda $l_a : G \to G$ dada por $l_a(x) = ax$. Ya que esta aplicación es un homeomorfismo lleva abiertos en abiertos. Ya que A es abierto, $l_x(A) = xA$ es abierto.
2. Es el mismo razonamiento que antes pero con las traslaciones a derechas r_a, $r_a(x) = xa$.
3. Basta con darse cuenta que $xAy = l_x \circ r_y(A)$.
4. En este caso AB es un conjunto abierto porque

$$AB = \bigcup_{x \in A} xB = \bigcup_{x \in A} l_x(B) \in \tau.$$

Ejercicio 3.25 *Probar que la circunferencia $\mathbb{S}^1$ es homeomorfa a $SO(2)$, el espacio de las matrices ortogonales de orden 2 con determinante 1, construyendo explícitamente un homeomorfismo entre ellos que también sea un isomorfismo de grupos.*

Solución: Definimos $\phi : \mathbb{S}^1 \to SO(2)$ mediante

$$\phi(x, y) = A[x, y] := \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Esta aplicación está bien definida, es decir, $A[x, y] \in SO(2)$, pues $x^2+y^2 = 1$. La aplicación inversa es la siguiente: si $A \in SO(2)$, entonces existen dos números reales x, y satisfaciendo $x^2 + y^2 = 1$ y

$$A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Entonces $\psi(A) = (x, y) \in \mathbb{S}^1$. Es evidente que tanto ϕ como ψ son aplicaciones continuas, sin más que componer con las correspondientes aplicaciones proyecciones: para ϕ, con las proyecciones de $\mathbb{R}^4$ ($SO(2) \subset \mathbb{R}^4$) y para ψ, con las proyecciones de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3.26 *Sea un grupo topológico G, H un conjunto y $f : G \to H$ una aplicación biyectiva. Probar que en H se puede definir una estructura de grupo topológico, de forma que f sea isomorfismo de grupos y un homeomorfismo.*

Solución: Se define en H la topología $\tau' = \{f(O); O \in \tau\}$. Ya que f es biyectiva, τ' coincide con la topología $\tau(f)$ del ejercicio 1.18. Entonces esta familia de conjuntos es una topología y es evidente que f es un homeomorfismo. Se define la siguiente estructura de grupo en H:

$$h_1 h_2 = f(f^{-1}(h_1))f^{-1}(h_2)).$$

Esta operación de grupo en H hace trivialmente isomorfismo a la aplicación f.

Sólo queda probar que H es un grupo topológico. Para ello, sea $\psi : G \times G \to G$ la aplicación continua $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ y $\theta : H \times H \to H$, $\theta(h_1 h_2) = h_1 h_2^{-1}$. Para probar que H es grupo topológico es suficiente con demostrar que θ es una aplicación continua. Pero $\theta = f \circ \psi \circ (f^{-1} \times f^{-1})$, que es continua al ser composición de aplicaciones continuas y homeomorfismos.

Ejercicio 3.27 *Se considera un grupo abeliano G. Se define para cada $A \subset G$*

$$r(A) = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \in A\}.$$

Probar que se puede definir sobre G una única topología τ en la cual $A \subset G$ es cerrado si y sólo si $r(A) = A$. Demostrar también que la unión arbitraria de cerrados es cerrado y caracterizar los abiertos. Por último, probar que G no es un grupo topológico.

Solución: Se define la topología mediante los conjuntos cerrados:

$$\mathcal{F} = \{A \subset G; r(A) = A\}.$$

Primero hay que observar que $A \subset r(A)$. Veamos que dicha familia satisface todas las propiedades de los conjuntos cerrados.

1. Es evidente que el conjunto vacío y G pertenecen a $\mathcal{F}$.

2. Por otra parte, sean $A, B \in \mathcal{F}$ y veamos que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Para ello, sea $x \in r(A \cup B)$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in A \cup B$, es decir, $x^n \in A$ o $x^n \in B$. Supongamos sin perder generalidad que pertenece a A. Entonces, $x \in r(A) = A \subset A \cup B$.

3. Sea $\{A_i; i \in I\} \subset \mathcal{F}$, y veamos que $\bigcap_{i \in I} A_i$ pertenece a $\mathcal{F}$. Sea pues $x \in r(\bigcap_i A_i)$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \bigcap_i A_i$, es decir, $x^n \in A_i$, $\forall i \in I$. Ya que $r(A_i) = A_i$, $x \in A_i$, $\forall i \in I$, es decir, $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Por último, probamos que la unión de conjuntos cerrados también es un conjunto cerrado: sea $\{A_i; i \in I\}$ una familia de conjuntos cerrados. Hay que probar que $r(\cup A_i) \subset \cup A_i$. Sea $x \in r(\cup A_i)$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \cup A_i$, es decir, existe $i \in I$ tal que $x_n \in A_i$. Luego $x \in r(A_i) = A_i \subset \cup A_i$.

Como consecuencia, los conjuntos abiertos son aquellos subconjuntos $A \subset G$, tal que $G \setminus A = r(G \setminus A)$, es decir, si $x \in A$, $x^n \notin G \setminus A$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Concluimos diciendo que A es abierto si y sólo si

$$\forall x \in A, x^n \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probamos que G no es un grupo topológico. Para ello es suficiente con que la aplicación $\varphi : G \times G \to G$, $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ no es continua. Sea e el elemento neutro. Entonces $A = \{e\}$ es un conjunto abierto en G. Es evidente que

$$\varphi^{-1}(A) = \{(x, x); x \in G\}.$$

Este conjunto no es abierto: en tal caso, si $x \in \varphi^{-1}(A)$, existirían abiertos A_1 y A_2 de G tales que

$$(x, x) \subset A_1 \times A_2 \subset \varphi^{-1}(A).$$

Entonces $x^n \in A_1 \cap A_2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, $x^2 \in A_1$, $x \in A_2$ y así, $\varphi(x^2, x) = x \in A$, es decir, $x = e$: contradicción.

Capítulo 4

Conexión. Conexión local. Arcoconexión

Ejercicio 4.1 *Se considera el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ y la topología dada por*

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

Probar (X, τ) no es conexo. Sea $A = \{b, d, e\}$. Estudiar si A es conexo. Hallar las componentes conexas del espacio topológico (X, τ).

Solución:

1. Una partición por abiertos no trivial de X es $X = \{a\} \cup \{b, c, d, e\}$. Este espacio no es conexo.

2. Calculamos la topología relativa de A, esto es, $\tau_{|A} = \{\emptyset, A, \{b, d\}, \{d\}\}$. Por tanto, la única partición por abiertos de A es la trivial, luego A es un conjunto conexo.

3. Calculamos la componente conexa C_b de b. Ya que A es conexo y $b \in A$, entonces $A \subset C_b$. Se considera el conjunto $B = \{b, c, d, e\}$ y veamos que es conexo. La topología relativa de B es
$$\tau_{|B} = \{\emptyset, B, \{c, d\}, \{c, d, e\}\},$$
luego la única partición por abiertos es la trivial. Ya que X no es un espacio conexo, la componente conexa de b es el conjunto B ya que es el conjunto conexo más grande que contiene a b. Como consecuencia, la componente conexa de a es $\{a\}$.

Ejercicio 4.2 *Probar que $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^2$ no es un espacio conexo y calcular las componentes conexas.*

Solución: Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mediante $f(x) = |x|$. Dicha aplicación es continua y los conjuntos $O_1 = f^{-1}((-\infty, 1))$ y $O_2 = f^{-1}((1, \infty))$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^2$. Entonces $\{O_1, O_2\}$ es una partición no trivial de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^2$ y por tanto, dicho espacio no es conexo.

Por otra parte, estos abiertos son conjuntos conexos. Al ser también abiertos y ser dos conjuntos, son justamente las componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^2$.

Ejercicio 4.3 *Se considera un homeomorfismo $f : [a, b] \to [c, d]$ entre dos intervalos cerrados de $\mathbb{R}$. Probar que $f(\{a, b\}) = \{c, d\}$.*

Solución: Supongamos que $f(a) \notin \{c, d\}$. Entonces $(a, b]$ es homeomorfo a $[c, d] \setminus \{f(a)\}$. Pero este conjunto no es conexo porque no es un intervalo y sin embargo, $(a, b]$ sí lo es: contradicción, luego $f(a) \in \{c, d\}$. Por la misma razón, $f(b) \in \{c, d\}$. Entonces $f(\{a, b\}) \subset \{c, d\}$. Ya que f es una aplicación biyectiva, dicha inclusión es una igualdad.

Ejercicio 4.4 *Se considera un espacio topológico (X, τ) y sea una familia de subconjuntos conexos $\{X_i\}_{i \in I}$ tales que $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Supongamos que $\exists i_0 \in I$ tal que $X_i \cap X_{i_0} \neq \emptyset$. Probar que el espacio (X, τ) es conexo.*

Solución: Se define para cada $i \in I$ los conjuntos $Y_i = X_i \cup X_{i_0}$. Entonces

$$\bigcup_{i \in I} Y_i = X_{i_0} \cup \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = X.$$

$$\bigcap_{i \in I} Y_i = \bigcap_{i \in I} (X_i \cup X_{i_0}) \supset X_{i_0} \neq \emptyset.$$

Además cada conjunto Y_i es conexo, pues es unión de dos conjuntos conexos que se intersecan (por hipótesis). Por tanto, el espacio X es conexo.

Ejercicio 4.5 *Estudiar la conexión, conexión local y arcoconexión de las cónicas de $\mathbb{R}^2$ y las cuádricas de $\mathbb{R}^3$.*

Solución:

- Las cónicas se clasifican del siguiente modo:

1. Elipse. Este espacio es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. Por tanto es conexa, localmente conexa y arcoconexa.
2. Parábola. Después de un homeomorfismo, podemos considerar la parábola $\{(x,$ [illegible] $\mathbb{R}\}$. Este espacio es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Por tanto la parábola es conexa, localmente conexa y arcoconexa.

3. Hipérbola. Podemos tomar la hipérbola H de ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Entonces H no es conexa pues la recta $x = 0$ la divide en dos abiertos disjuntos. Por tanto, tampoco es arcoconexa. Además tiene exactamente dos componentes conexas: $H^+ = \{(x, y) \in H; x > 0\}$ y $H^- = \{(x, y) \in H; x < 0\}$. Estos conjuntos son abiertos y cada uno de ellos es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Por tanto, H es localmente conexa.

- La clasificación de las cuádricas es la siguiente:

1. Elipsoide. Es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$, luego es conexo, arcoconexo y localmente conexo.
2. Paraboloide. El paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ y por tanto también es conexo, arcoconexo y localmente conexo.
3. Hiperboloide reglado. Es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, luego es conexo, arcoconexo y localmente conexo.
4. Hiperboloide de dos hojas. Tomamos el de ecuación $H : x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Entonces H no es un espacio conexo, ya que los abiertos de $\mathbb{R}^3$ definidos por $z > 0$ y $z < 0$ separa H. Por tanto, tampoco es arcoconexo. Tiene dos componentes conexas, a saber, $H^+ = \{(x, y, z) \in H; z > 0\}$ y $H^- = \{(x, y, z) \in H; z < 0\}$. Cada una de ellas es un conjunto abierto y homeomorfo al plano $\mathbb{R}^2$. Por tanto, H es localmente conexo.
5. Cono. Se considera el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$. Este espacio es arcoconexo: sea A el subconjunto del cono con $z \geq 0$ y B el formado por los puntos con $z \leq 0$. Entonces A y B son homeomorfos a $\mathbb{R}^2$, que es arcoconexo. Por tanto, el cono es unión de dos conjuntos arcoconexos que se intersecan y así, es arcoconexo. Por tanto, también es conexo. También es localmente conexo.
6. Paraboloide hiperbólico. La ecuación es $z = x^2 - y^2$ y por tanto es el grafo de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$. Esto prueba que es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, luego es conexo, arcoconexo y localmente conexo.

Ejercicio 4.6 *Se considera A un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$. Entonces $\mathbb{R}^n \setminus A$ es conexo.*

Solución: Probamos que para cada $p, q \in \mathbb{R}^n \setminus A$, existe un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n \setminus A$ que los contiene. Se considera $[p, q]$ el segmento que los une y sea l una recta que interseque a dicho segmento y que no pasa ni por p ni por q. Para cada $r \in l$, se define el conjunto $\Delta_r = [p, r] \cup [r, q]$. Este conjunto es conexo por ser unión de dos segmentos que se intersecan en el punto r. Afirmamos ahora que existe $r \in l$ tal que $\Delta_r \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Entonces el conjunto Δ_r es el conjunto conexo que estábamos buscando y esto finaliza la solución del problema.

En caso contrario, para cada $r \in l$, consideramos a_r un punto en $A \cap \Delta_r$, el cual fijamos para cada r (usamos para ello el axioma de elección). Entonces la aplicación de l en A dada por $r \longmapsto a_r$ es una aplicación inyectiva, ya que $\Delta_r \cap \Delta_s \neq \{p, q\}$ si y sólo si $s \neq r$. Se llega a una contradicción con el hecho de que $card(l) = card(\mathbb{R}) \neq card(\mathbb{N}) = card(A)$.

Ejercicio 4.7 *Se considera un conjunto X con dos topologías τ_1, τ_2 y τ_1 más fina que τ_2. Supongamos que (X, τ_1) es conexo. Probar que (X, τ_2) es conexo.*

Solución: Se considera $\{A, B\} \subset \tau_2$ una partición por abiertos de X. Ya que A y B pertenecen también a τ_1, se tiene una partición de X por abiertos de la topología τ_1. Como (X, τ_1) es un espacio conexo, dicha partición es la partición trivial, como se quería probar.

Ejercicio 4.8 *Probar que la recta de Sorgenfrey no es conexa y calcular las componentes conexas.*

Solución: Probamos que los únicos subconjuntos conexos de la recta de Sorgenfrey son los conjuntos unitarios. Se considera un subconjunto A de $\mathbb{R}$ con más de dos elementos a y b. Supongamos sin perder generalidad que $a < b$ y sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$. Entonces

$$A = (A \cap (-\infty, c)) \cup (A \cap [c, \infty])$$

es una partición no trivial por abiertos, luego A no es conexo.

El mismo razonamiento que antes prueba que un conjunto con más de dos elementos no es conexo. Por tanto, los únicos subconjuntos conexos son los conjuntos formados por un único punto. En particular, esto sucede para las componentes conexas.

Ejercicio 4.9 *Se considera un subespacio afín H de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Probar que $\mathbb{R}^n \setminus H$ no es conexo si y sólo si $dim(H) = n - 1$.*

Solución: 1. Supongamos que la dimensión de H es $n-1$. Después de una isometría de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, que es un homeomorfismo, podemos suponer sin perder generalidad que $H = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n = 0\}$. Entonces escribimos H como

$$H = \{x \in H; x_n > 0\} \cup \{x \in H; x_n < 0\}.$$

Cada uno de los dos subconjuntos son abiertos relativos de H. Por ejemplo, el primero es $H \cap A$, donde $A = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$. El conjunto A es abierto de $\mathbb{R}^n$ pues $A = p_n^{-1}((0, \infty))$ y $p_n(x) = x_n$. Esto demuestra que H no es conexo.

2. Supongamos que la dimensión de H es menor que $n-1$ y veamos que $\mathbb{R}^n \setminus H$ es conexo. Sea $\dim(H) = m < n-1$. De nuevo, sin perder generalidad, suponemos que H es

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0\},$$

es decir, está generado por los m primeros vectores de la base usual de $\mathbb{R}^n$. Vamos a probar que el espacio es arcoconexo. Para ello, sea $a = (0, \ldots, 0, 1)$ y demostramos que todo punto se puede unir por un arco con a. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Distinguimos dos casos:

- existe $i \in \{m+1, \ldots, n-1\}$ tal que $x_i \neq 0$. Se define $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ mediante
$$\alpha(t) = a + t(x-a) = (tx_1, \ldots, tx_{n-1}, 1-t+tx_n).$$
Es claro que α es una aplicación continua y que une el punto a con el punto x. La coordenada i-ésima de $\alpha(t)$ es tx_i que no se anula, luego $\alpha(t) \notin H$.
- Supongamos ahora que $\forall i \in \{m+1, \ldots, n-1\}$, $x_i = 0$ y $x_n \neq 0$. Sea $y = (0, \ldots, 0, 1, 0) \notin H$. Entonces
$$\beta(t) = \begin{cases} a + 2t(y-a) = (0, \ldots, 0, 2t, 1-2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ y + (2t-1)(x-y) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
es continua, no interseca a H y une a a con x (observemos que $\beta(1/2) = y$).

Ejercicio 4.10 *Sea* $A = \big([-1,1] \times [-1,1]\big) - \{(x,x) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1\}$. *Estudiar la conexión y arcoconexión de los conjuntos* A *y* $A \cup \{(0,0)\}$.

Solución: El conjunto A no es conexo: definimos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $f(x,y) = x-y$. Esta aplicación es continua, luego $f^{-1}(0,\infty)$ y $f^{-1}(-\infty,0)$ son abiertos de $\mathbb{R}^2$ y evidentemente podemos escribir A como $A = \big(A \cap f^{-1}(0,\infty)\big) \cap \big(A \cap f^{-1}(-\infty,0)\big)$. Por tanto, tampoco es arcoconexo.

El conjunto $A \cup \{(0,0)\}$ es estrellado desde el punto $(0,0)$, luego es arcoconexo y conexo.

Ejercicio 4.11 *Se considera un espacio topológico* (X,τ). *Probar que* X *es conexo si y sólo si para cualquier subconjunto propio* A *de* X, $Fr(A) \neq \emptyset$.

Solución: 1. Supongamos que el espacio es conexo y A es un subconjunto propio. Si $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$, entonces $\{\mathrm{int}(A), \mathrm{ext}(A)\}$ es una partición por abiertos de X. Ya que (X,τ) es conexo $\mathrm{int}(A) = \emptyset$ o $\mathrm{int}(A) = X$. En el primer caso, $\mathrm{ext}(A) = \mathrm{int}(X \setminus A) = X$, luego $A = \emptyset$. En el segundo, $A = X$. Por tanto se llega a una contradicción con el hecho de ser A un subconjunto propio.

2. Se considera $\{A, B\}$ una partición por abiertos de X. Supongamos que A no es $\emptyset$ ni X. Como $B = X \setminus A$ y es abierto, $B = \mathrm{ext}(A)$. Por otra parte, $\mathrm{int}(A) = A$, ya que A es abierto. Luego $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$, llegando a una contradicción.

Ejercicio 4.12 *Se considera $A \subset X$ un subespacio no vacío, conexo, abierto y cerrado. Probar que es una componente conexa de X.*

Solución: Sea $x \in A$ y veamos que la componente conexa de x, C_x, es el conjunto A. Ya que A es conexo, $A \subset C_x$. Ahora bien, como A es un conjunto abierto y cerrado en X y está incluido en C_x, también es un conjunto abierto y cerrado en la topología relativa de la componente conexa, es decir, $A \in \tau_{|C_x} \cap \mathcal{F}_{|C_x}$. Por tanto, al no ser vacío, es todo C_x.

Ejercicio 4.13 *Se considera $\beta = \{(x, \infty); x \in \mathbb{R}\}$ y $\tau(\beta)$ la topología que genera la base β. Estudiar la conexión y arcoconexión de $(\mathbb{R}, \tau(\beta))$.*

Solución: Veamos que este espacio es conexo probando que dos abiertos no triviales siempre se intersecan. Sean O_1 y O_2 dos abiertos no triviales. Entonces existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $(x_i, \infty) \subset O_i$, $i = 1, 2$. Por tanto $O_1 \cap O_2 \supset (x_1, \infty) \cap (x_2, \infty) \neq \emptyset$.

El espacio es arcoconexo. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y supongamos que $x < y$. Definimos $\alpha(t) = x + t(y - x)$. Esta aplicación es continua porque es creciente (véase el ejercicio 2.28) y une x con y.

Ejercicio 4.14 *Estudiar la conexión, conexión local y arcoconexión del espacio topológico (X, τ), donde $X = (0, 1)$ y*

$$\tau = \{(0, 1 - \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, X\}\}.$$

Solución:

1. El espacio es conexo, pues dos abiertos no triviales siempre se intersecan. Más general, todo subconjunto es conexo por la misma razón. Esto prueba que el espacio es localmente conexo.

2. Sean $x, y \in (0, 1)$. Se define $\alpha(t) = x + t(y - x)$. Esta aplicación une x con y. Además es una aplicación continua, pues

$$\alpha^{-1}((0, 1 - \frac{1}{n})) = \begin{cases} [0, 1] & \text{si } 1 - \frac{1}{n} > y \\ [0, \frac{1 - x/n}{y - x}) & \text{si } x < 1 - \frac{1}{n} \leq y \\ \emptyset & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq x \end{cases}$$

Ejercicio 4.15 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Probar que el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y < f(x)\}$ es un conjunto abierto, conexo y localmente conexo de $\mathbb{R}^2$.*

Solución:

1. La aplicación $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = y - f(x)$ es continua y $A = F^{-1}(-\infty, 0))$. Esto prueba que A es abierto.

2. Sean $(a,b),(c,d) \in A$, con $b < f(a)$ y $d < f(c)$. La aplicación $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ es continua, luego alcanza un mínimo m. Sea $M = m - 1$. Entonces el conjunto conexo que contiene a los dos puntos e incluido en A es:

$$[(a,b),(a,M)] \cup [(a,M),(c,M)] \cup [(c,M),(c,d)].$$

El primer conjunto está en A ya son puntos de la forma (a,t), con $t \leq b < f(a)$. Por la misma razón, el tercer conjunto también está en A. El segundo conjunto está incluido en A ya que sus puntos son de la forma (x,M) y $x \in [a,c]$, luego $f(x) \geq m > M$

3. Como el conjunto es abierto, todo punto tiene una base de entornos formados por bolas incluidas en el conjunto. Como las bolas son conexas, el espacio es localmente conexo.

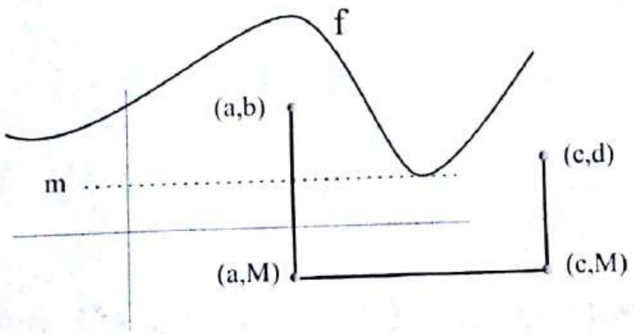

Figura 4.1: Ejercicio 4.15

Ejercicio 4.16 *Estudiar la arcoconexión del espacio métrico (X,d), donde $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ es el espacio de las aplicaciones continuas definidas en $[0,1]$ y d es la distancia*

$$d(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Solución: Sean $f, g \in X$ y definimos $\alpha : I \to X$ mediante $\alpha(t) = f + t(g - f)$. Esta aplicación es continua ya que es lipschitziana:

$$d(\alpha(t), \alpha(s)) \leq d(f,g)|t - s|.$$

Probamos ahora que el espacio es localmente conexo. Para ello es suficiente con probar que toda bola es convexa. Sean $f \in X$ y $B_r(f)$ una bola centrada en f. Sean $g, h \in B_r(f)$. Entonces para cada $t, x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |[g + t(h-g)](x) - f(x)| &\leq (1-t)|g(x) - f(x)| + t|f(x) - h(x)| \\ &\leq (1-t)d(f,g) + t\, d(f,h) < r. \end{aligned}$$

Por tanto el segmento que une g con h está incluido en la bola $B_r(f)$.

Ejercicio 4.17 *Se considera un espacio topológico (X, τ) e $Y \subset X$. Probar que Y no es conexo si y sólo si existen $A, B \in \tau$ tales que $A \cap B \cap Y = \emptyset$, $A \cap Y \neq \emptyset$, $B \cap Y \neq \emptyset$ e $Y \subset A \cup B$.*

Solución:

1. Supongamos que Y no es conexo. Entonces existen dos abiertos relativos no triviales O y G que forman una partición de Y, a saber, $Y = O \cup G$. Entonces existen $A, B \in \tau$ tales que $O = A \cap Y \neq \emptyset$ y $G = B \cap Y \neq \emptyset$. Como $A \cap B = \emptyset$,

$$(A \cap Y) \cap (B \cap Y) = (A \cap B) \cap Y = \emptyset.$$

Por tanto, $Y = O \cup G \subset A \cup B$.

2. Supongamos ahora que existen abiertos A y B tales que $A \cap B \cap Y = \emptyset$, $A \cap Y \neq \emptyset$, $B \cap Y \neq \emptyset$ e $Y \subset A \cup B$. Veamos que Y no es conexo. Consideramos los abiertos relativos de Y definidos por $Y \cap A$ e $Y \cap B$. Estos abiertos son disjuntos y no triviales, luego Y no es conexo.

Ejercicio 4.18 *Demostrar que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2\}$ es conexo (comparar con el ejercicio 4.15).*

Solución: Veamos que dado $(x,y) \in A$, existe un conjunto conexo Δ_{xy} tal que $(x,y), (0,1) \in \Delta_{xy}$ (observemos que $(0,1) \in A$). Para ello, se define Δ_{xy} como unión de dos segmentos del plano:

$$\Delta_{xy} = [(x,y), (0,y)] \cup [(0,y), (0,1)].$$

Para finalizar, basta probar que Δ_{xy} está incluido en A.

- Sea $t \in [0,1]$ y veamos que $(1-t)(x,y) + t(0,y) = ((1-t)x, y) \in A$. Pero $y > x^2 \geq (1-t)^2 x^2$.

- Sea $t \in [0,1]$. Entonces $(1-t)(0,y) + t(0,1) = (0, (1-t)y + t) \in A$ pues $(1-t)y + t > t \geq 0$. Hemos usado que para cada $(x,y) \in A$, $y > 0$.

Ejercicio 4.19 *Sean dos subconjuntos conexos A y B de un espacio topológico (X,τ) tales que $\overline{A}\cap B\neq\emptyset$. Probar que $A\cup B$ es un conjunto conexo.*

Solución: Sea $x\in\overline{A}\cap B$. Entonces $A\cup B=(A\cup\{x\})\cup B$. El conjunto $A\cup\{x\}$ es conexo pues x es adherente a A y A es conexo. Por último, $b\in B\cap(A\cup\{x\})$. Por tanto, $A\cup B$ se puede escribir como unión de dos conexos con intersección no vacía, probando que es conexo.

Ejercicio 4.20 *Dar un ejemplo de un subconjunto de un espacio topológico que sea conexo, pero no su interior.*

Solución: Se define en $\mathbb{R}^2$ el conjunto formado por la adherencia de dos bolas tangentes:

$$X=\overline{B_1(-1,0)}\cup\overline{B_1(1,0)}.$$

Este espacio es conexo pues es unión de dos conexos cuya intersección es no vacía (es justamente el punto $(0,0)$). Sin embargo,

$$\mathrm{int}(X)=B_1(-1,0)\cup B_1(1,0),$$

que no es conexo: la recta $x=0$ divide en dos abiertos a $\mathrm{int}(X)$. Concretamente

$$\mathrm{int}(X)=\Big(\mathrm{int}(X)\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x<0\}\Big)\cup\Big(\mathrm{int}(X)\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x>0\}\Big).$$

Ejercicio 4.21 *Estudiar la conexión local de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ dados por $A=\{\frac{1}{n};n\in\mathbb{N},\}\cup\{0\}$ y $B=[0,1]$.*

Solución:

1. El conjunto A no es localmente conexo porque ningún entorno de $x=0$ es conexo en A. Si U es un entorno conexo, entonces es un intervalo, pero no hay intervalos dentro de A que contenga a x a no ser que $U=\{0\}$ ya que si $U\in\mathcal{U}_0^A$, existe $r>0$ tal que $0\in(-r,r)\cap A\subset U$: contradicción.

2. El conjunto $[0,1]$ es localmente conexo. Para los puntos x de $(0,1)$ es evidente que la base de entornos usual (con radio suficientemente pequeño) está formado por conjuntos conexos, ya que son intervalos. Exactamente, sea $\delta=\min\{|x|,|1-x|\}>0$. Entonces $\beta_x=\{(x-r,x+r);0<r<\delta\}$ es una base de entornos *en B* y son conexos. Para $x=0$, una base de entornos conexos es $\beta_0=\{[0,r);r<1\}$ y para $x=1$, $\beta_1=\{(1-r,1];r<1\}$.

Ejercicio 4.22 *Se considera un abierto A de un espacio localmente conexo (X,τ). Probar que A es localmente conexo. Dar un ejemplo de dos subconjuntos cerrados de un espacio topológico localmente conexo, tal que uno sea localmente conexo y otro no.*

Solución: 1. Sea $a \in A$ y β_a una base de entornos conexos. Se define $\beta_a^* = \{B \in \beta_a; B \subset A\}$. Esta familia es no vacía, pues A es un conjunto abierto y por tanto, un entorno del punto a. Los elementos de β_a^* son conexos y entornos. Sólo hay que probar que es una base de entornos de a en la topología relativa de A: sea $U \in \mathcal{U}_a^A$. Como A es abierto, dicho entorno es un entorno de a en X y por tanto, existe $B \in \beta_a$ tal que $B \subset U$. Ya que $U \subset A$, se tiene $B \subset A$, es decir, $B \in \beta_a^*$.

2. Consideramos el espacio $\mathbb{R}$, que es localmente conexo. Se considera el conjunto cerrado $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}, \} \cup \{0\}$. Este espacio no es localmente conexo por el ejercicio 4.21. Por otra parte, el cerrado $[0,1]$ sí es localmente conexo, de nuevo por el ejercicio 4.21.

Ejercicio 4.23 *Estudiar la conexión local y arcoconexión de un conjunto X con la topología de los complementos finitos. Usar el ejercicio 6.26.*

Solución: 1. El espacio es localmente conexo. Para ello, demostramos que todo entorno de cualquier punto es conexo. Basta darse cuenta de que cualquier subconjunto de un espacio con la topología de los complementos finito tiene como topología relativa, la topología de los complementos finitos, la cual hace que dicho subconjunto sea conexo.

2. Probamos que si el espacio es numerable, entonces no es arcoconexo y si el espacio es no numerable, entonces sí es localmente conexo.

Supongamos el primer caso y sea $\alpha : I \to X$ un arco que une dos puntos x e y. Ya que α es una aplicación continua y todo punto de X es cerrado, $F_t = \alpha^{-1}(\{\alpha(t)\})$ es cerrado para todo $t \in I$. Ya que el conjunto $\alpha([0,1]) \subset X$ es numerable, hemos expresado el conjunto $[0,1]$ como unión numerable de conjuntos cerrados disjuntos dos a dos. El teorema de Sierpinski nos da una contradicción.

Supongamos ahora que X no es numerable y sean $x, y \in X$. Ya que el conjunto no es numerable, existe un subconjunto A conteniendo a x e y y con el mismo cardinal que $[0,1]$. Se considera una biyección $\alpha : I \to A \subset X$ entre $[0,1]$ y A tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Esta aplicación es continua, ya que la imagen inversa de cualquier cerrado (conjunto finito) es un conjunto finito, luego cerrado.

Ejercicio 4.24 *Sea X un conjunto y p un punto fijo. Se considera la topología $\tau = \{O \subset X; p \in O\} \cup \{\emptyset\}$. Estudiar la conexión, conexión local y arconexión.*

Solución: 1. Sean A y B dos abiertos disjuntos tales que $X = A \cup B$. Al ser disjuntos no pueden pertenecer a los abiertos del primer tipo, ya que todos ellos contienen a p. Por tanto, uno de los abiertos es $\emptyset$. Y así, el otro debe ser X. Por tanto, este espacio es conexo.

2. Sea $x \in X$. Una base de entornos para este punto es $\beta_x = \{\{p, x\}\}$. Observemos que la topología relativa al conjunto $\{x, p\}$ está dada por los conjuntos que contienen a p y por tanto, por la misma razón que en X, este conjunto es conexo. Por tanto, el espacio es localmente conexo.

Veamos que el espacio es arcoconexo probando que todo punto se puede unir mediante un arco con el punto p: sea $x \in X$ distinto de p y se define $\alpha : I \to X$ mediante

$$\alpha(t) = \begin{cases} p & \text{si } t < 1 \\ x & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Esta aplicación es continua, pues si $O \in \tau$, entonces $p \in O$, luego $\alpha^{-1}(O)$ es $[0, 1)$ o $[0, 1]$. Además, $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = x$.

Ejercicio 4.25 *Hacer el mismo estudio que en el ejercicio anterior pero con la topología dada por* $\tau = \{O \subset X; p \notin O\} \cup \{X\}$.

Solución: 1. El espacio es conexo. Supongamos que $X = A \cup B$, con $A, B \in \tau$ y que $p \in A$. Como el único abierto que contiene a p es X, entonces $A = X$. Como B es disjunto con A, se concluye que $B = \emptyset$.

2. El espacio es localmente conexo: el único entorno de p es X que es conexo. Si $x \neq p$, una base de entornos de x es $\beta_x = \{\{x\}\}$ es conexo, por tener la topología trivial.

3. El espacio es arcoconexo. Probamos que todo punto x se puede unir mediante un arco con p. Se define la aplicación $\alpha : I \to X$ mediante

$$\alpha(t) = \begin{cases} x & t < 1 \\ p & t = 1 \end{cases}$$

Esta aplicación es continua, pues la imagen inversa de un abierto es el vacío (si no contiene a x ni a p), $[0, 1)$ (si contiene a x y no a p) y $[0, 1]$ (si contiene a p.)

Ejercicio 4.26 *Sean A y B dos subconjuntos de un espacio topológico (X, τ). Demostrar que si A y B son cerrados tales que $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, entonces A y B son conexos. Mostrar mediante un ejemplo que no obtenemos el mismo resultado si uno de los conjuntos no es cerrado.*

Solución: 1. Sea $A = F_1 \cup F_2$, donde F_i son cerrados en A y disjuntos. Entonces

$$A \cap B = (F_1 \cap B) \cup (F_2 \cap B).$$

Ya que $A \cap B$ es conexo, uno de estos dos subconjuntos es el conjunto vacío. Supongamos por ejemplo que $F_1 \cap B = \emptyset$. Entonces $A \cup B = F_1 \cup (F_2 \cup B)$ y la intersección de F_1 con $F_2 \cup B$ es vacía. Observemos que $F_2 \cup B$ es un cerrado. Ya que $A \cup B$ es conexo, uno de los dos subconjuntos es vacío. Ya $F_2 \cup B$ no es vacío por no serlo B, F_1 es el conjunto vacío y hemos acabado.

2. Se considera $X = \mathbb{R}$, $A = [0,2) \cup (3,4]$, $B = [1,3]$. Entonces $A \cap B = [1,2)$ y $A \cup B = [0,4]$ son conexos, pero A no es conexo, al no ser un intervalo.

Ejercicio 4.27 *Sean A y B subconjuntos de un espacio topológico (X,τ) tales que A es conexo, $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$. Probar que $A \cap Fr(B) \neq \emptyset$.*

Solución: Supongamos que $A \cap \mathrm{Fr}(B) = \emptyset$. Entonces una partición por abiertos de A es:

$$A = (A \cap \mathrm{int}(B)) \cup (A \cap \mathrm{ext}(B)),$$

Ya que A es conexo, uno de los dos anteriores subconjuntos es el conjunto vacío. Sin perder generalidad, supongamos que $A \cap \mathrm{int}(B) = \emptyset$. Entonces, $A \subset \mathrm{ext}(B) \subset X \setminus B$ y por tanto, $A \cap B = \emptyset$, llegando a una contradicción.

Ejercicio 4.28 *Probar que las componentes conexas de un grupo topológico son homeomorfas entre sí y que la componente del elemento neutro es un grupo topológico.*

Solución: Probamos que la componente conexa de cualquier elemento es homeomorfa a la componente conexa del elemento neutro e. Sea $x \in G$ y $l_x : G \to G$, $y \longmapsto xy$ la traslación a izquierda mediante el elemento x. Esta aplicación es un homeomorfismo y $l_x(e) = x$, luego la componente conexa C_e del elemento neutro es homeomorfa a la componente conexa de x.

Para probar que C_e es un grupo topológico, sólo hay que probar que C_e es un subgrupo. Para ello es suficiente con demostrar que para cada $x, y \in C_e$, el producto xy^{-1} pertenece a C_e. Consideramos la aplicación continua $\psi : G \times G \to G$ dada por $\psi(a,b) = ab^{-1}$. Por tanto, probar que C_e es un subgrupo es equivalente a probar que $\psi(C_e \times C_e) \subset C_e$. El conjunto $C_e \times C_e$ es un conexo por ser producto de dos espacios conexos; por otra parte la aplicación ψ satisface $\psi(e,e) = e$. Por tanto $\psi(C_e \times C_e) \subset C_e$, como queríamos probar.

Ejercicio 4.29 *Estudiar la conexión, conexión local y arcoconexión de la topología de Sierpinski.*

Solución: Sea $X = \{a,b\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Definimos la aplicación $\alpha : [0,1] \to X$ mediante $\alpha(t) = a$ si $t < 1$ y $\alpha(1) = b$. Esta aplicación es continua pues la imagen de un abierto es trivial o $[0,1)$. Esto prueba que el espacio es arcoconexo, y así, conexo. Una base de entornos de a es $\mathcal{U}_a = \{\{a\}\}$ que es conexo y de b es $\mathcal{U}_b = \{X\}$, que también es conexo. Por tanto, el espacio es localmente conexo.

Ejercicio 4.30 *Consideramos el espacio* $(\mathbb{R},\tau)$ *donde* τ *es la topología generada por* $\beta = \{[a,\infty); a\in\mathbb{R}\}$. *Estudiar la conexión y la conexión local del espacio. Lo mismo para* $(\{0,1\},\tau_{|\{0,1\}})$.

Solución: La topología τ y el conjunto de cerrados es

$$\tau = \{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\beta\cup\{(a,\infty);a\in\mathbb{R}\},\quad \mathcal{F}=\{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,a];a\in\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,a);a\in\mathbb{R}\}.$$

Entonces $\tau\cap\mathcal{F}=\{\emptyset,\mathbb{R}\}$ y el espacio es conexo.

Para la conexión local se sabe que $\beta_x=\{[x,\infty)\}$ es base de entornos de x. Estudiamos su conexión hallando los abiertos y cerrados relativos:

$$\tau_{|[x,\infty)}=\{\emptyset,[x,\infty)\}\cup\{[a,\infty);a\geq x\}\cup\{(a,\infty);a\geq x\}.$$

$$\mathcal{F}_{|[x,\infty)}=\{\emptyset,[x,\infty)\}\cup\{[x,a];a\geq x\}\cup\{[x,a);a\geq x\}.$$

De nuevo, $\tau_{|[x,\infty)}\cap\mathcal{F}_{|[x,\infty)}=\{\emptyset,[x,\infty)\}$ y el espacio es conexo.

Para el conjunto $\{0,1\}$ hallamos los abiertos relativos: $\tau_{|\{0,1\}}=\{\emptyset,\{0,1\},\{1\}\}$, es decir, es la topología de Sierpinski, la cual es conexa y localmente conexa.

Ejercicio 4.31 *Sea* $X=[-1,1]$. *Estudiar las componentes conexas y conexión local del espacio* (X,τ) *donde* $\tau=\{O\subset X;O\supset(-1,1)\}\cup\{O\subset X;0\notin O\}$.

Solución: El conjunto $(-1,1)$ es conexo. Si $(-1,1)=A\cup B$ es una partición por abiertos relativos del intervalo, y si $0\in A$, entonces $0\in A=O\cap(-1,1)$, donde $O\in\tau$. Por tanto $O\supset(-1,1)$ y así $A=(-1,1)$. Por tanto, la partición original es la trivial.

Las igualdades $(-1,1]=(-1,1)\cup\{1\}$ y $[-1,1)=(-1,1)\cup\{-1\}$ prueban que ambos conjuntos no son conexos. Ya que $\{1\}$ y $\{-1\}$ lo son, entonces las componentes conexas son $\{-1\},\{1\}$ y $(-1,1)$.

El espacio es localmente conexo, pues una base de entornos de x, con $x\neq0$, es $\beta_x=\{\{x\}\}$ y para $x=0$, $\beta_0=\{(-1,1)\}$.

Ejercicio 4.32 *Sea* $\mathbb{Q}$ *y* $p\notin\mathbb{Q}$. *Se considera* $X^*=\mathbb{Q}\cup\{p\}$. *Se define la topología* τ^* *formada por los elementos de la topología usual* τ_u *junto con* $A\subset X^*$ *tales que* $X^*\setminus A$ *es finito. Estudiar la conexión de este espacio topológico.*

Solución: Sea $X^*=A\cup B$, donde A y B son abiertos disjuntos no triviales. Los dos abiertos no pueden ser de τ_u ya que p no pertenece a ellos. Si los dos abiertos son del segundo tipo, entonces

$$X^*=X^*\setminus(A\cap B)=(X^*\setminus A)\cup(X^*\setminus B)$$

es un conjunto finito, lo cual es falso. Supongamos pues que A es del primer tipo y B del segundo. Entonces $X^* \setminus B = A$ es un conjunto finito. Pero esto es falso, ya que los abiertos de $\mathbb{Q}$ tienen cardinal infinito: contradicción.

Ejercicio 4.33 *Estudiar la conexión y la conexión local del espacio X formado por los segmentos que une $(0,0)$ con los puntos de la forma $(1, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ y el segmento $[0,1] \times \{0\}$.*

Solución: El conjunto X es conexo, pues es unión de segmentos (que son conexos) y se intersecan, ya que que $(0,0)$ pertenece a todos.

Sin embargo, el espacio no es localmente conexo. Veámoslo para el punto $p = (1,0)$. Supongamos que $\beta = \{V_i; i \in I\}$ es una base de entornos conexos de $(1,0)$. Es evidente que cualquier bola de este punto en el conjunto X de radio menor que 1 no es conexa. Ya que β es base de entornos, existe $V \in \beta$ tal que $V \subset B_{\frac{1}{2}}(p)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(p) \subset V$. Se considera $r > 0$ tal que $\frac{1}{n+1} < r < \frac{1}{n}$ y L el segmento que une el punto $(1,r)$ con el origen de coordenadas. Este segmento no interseca ni a $B_{\frac{1}{2}}(p)$ ni a $B_{\frac{1}{n}}(p)$, por tanto no interseca a V. Sin embargo L nos permite poner V como unión disjunta de abiertos no vacíos y por tanto, V no sería conexo, llegando a una contradicción.

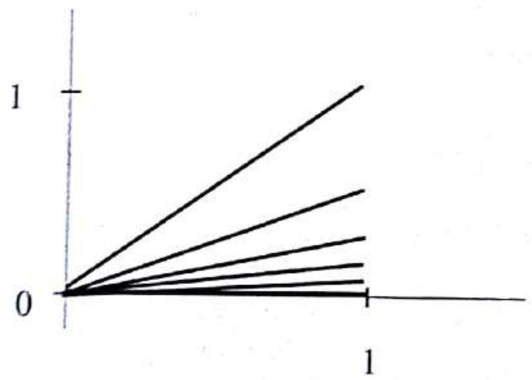

Figura 4.2: El conjunto X del ejercicio 4.33

Ejercicio 4.34 *Sea $A = \{(0,y); y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1,y); y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \frac{1}{n}); 0 \leq x \leq 1, n \in \mathbb{Z}\}$. Probar que este espacio es conexo, pero no localmente conexo.*

Solución: 1. Los dos primeros subconjuntos de A son conexos pues son homeomorfos a $\mathbb{R}$. Cada uno de los segmentos $[0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ es conexo por ser producto de conexos. Cada uno de estos segmentos, junto a la primera recta vertical es conexo al ser unión de conexos con intersección no vacía. Por tanto, la primera recta junto con el tercer elemento de la unión es conexo. Como interseca a la segunda recta vertical, entonces la unión, que es el conjunto A, también es conexa.

2. Sea $p = (\frac{1}{2}, 0)$. La base de entornos de p dada por

$$\gamma_p = \{B_\epsilon(p) \cap A; \epsilon > 0\}$$

está formada por entornos que no son conexos. Esto no implica que A no sea localmente conexa, pues podría haber otra base de entornos conexos diferente de γ_p. Supóngase que A es localmente conexo y sea β_p una base de entornos conexos de p. Sea $U = B_{\frac{1}{2}}(p) \cap A$. Entonces existe $V \in \beta_p$ tal que $V \subset U$. Como γ_p es también base de entornos, existe $\epsilon < \frac{1}{2}$ tal que

$$B_\epsilon(p) \cap A \subset V \subset U.$$

Sea $r \in \mathbb{R}$ distinto de $\frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que la recta $J = \{(x, r); x \in \mathbb{R}\}$ satisface $J \cap (B_\epsilon(p) \cap A) = \emptyset$ (esto es posible del hecho de que $B_\epsilon(p) \cap A$ no es conexo). Es evidente que también $J \cap U = \emptyset$. Por tanto, $J \cap V = \emptyset$. Esto nos permite escribir

$$V = (V \cap \{(x, t); t > r\}) \cup (V \cap \{(x, t); t < r\}),$$

y afirmar que V no es conexo, lo cual es contradictorio. Obsérvese que para los puntos de A distintos de los de la forma $(x, 0), 0 \leq x \leq 1$, sí existe una base de entornos conexos, concretamente, la base $\gamma_{(x,y)}$.

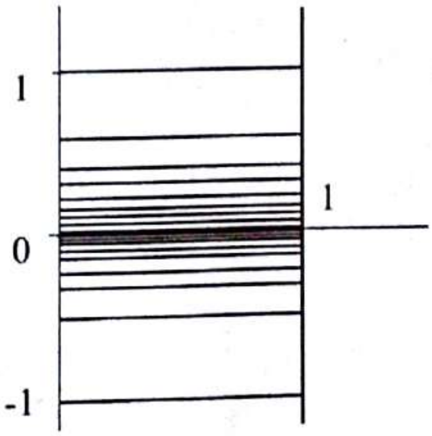

Figura 4.3: El conjunto A del ejercicio 4.34

Ejercicio 4.35 *Probar que $A = \{(0, 0)\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}); x > 0\}$ con la topología inducida de $\mathbb{R}^2$ es conexo pero no es localmente conexo.*

Solución: El conjunto $B = \{(x, \sin \frac{1}{x}); x > 0\}$ es el grafo de la función continua $\sin(1/x)$, luego es homeomorfo al dominio. Como éste es $(0, \infty)$, es conexo. Por otro lado, $(0, 0) \in \overline{B}$ (ejercicio 1.8), luego $A = \{(0, 0)\} \cup B$ es conexo.

Se va a probar que el punto $(0,0)$ no tiene una base β de entornos conexos. La familia $\beta = \{B_r(0,0) \cap A; 0 < r < 1\}$ es una base de entornos de $(0,0)$, pero ninguno de estos entornos es conexo. Supóngase que A es localmente conexo. Sea $U = B_1(0,0) \cap A$. Entonces existe $V \in \beta$ tal que $V \subset U$. De nuevo, como las bolas forman una base de entornos, existe $r < 1$ tal que $B_r(0,0) \cap A \subset V \subset U$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$ y sea la recta $J = \{(\frac{2}{(2k+1)\pi}, y); y \in \mathbb{R}\}$. Esta recta no corta a U, pues el punto de intersección tendría $y = 1$ o $y = -1$. Además separa a $B_r(0,0) \cap A$ en dos conjuntos abiertos no vacíos. Entonces

$$V = \left(V \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < \frac{2}{(2k+1)\pi}\right\}\right) \cup \left(V \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > \frac{2}{(2k+1)\pi}\right\}\right),$$

luego V no sería conexo, llegando a una contradicción.

Capítulo 5

Axiomas de separación y numerabilidad

Ejercicio 5.1 *Probar que un espacio topológico* (X, τ) *es* T_1 *si y solamente si para cada* $x \in X$,

$$\{x\} = \bigcap\{U; U \in \mathcal{U}_x\}.$$

Solución:

1. Supongamos que el espacio es T_1. La inclusión de $\{x\}$ en $\bigcap\{U; U \in \mathcal{U}_x\}$ es evidente, pues x está en todo entorno suyo. Sea ahora $y \in X$ un elemento en dicha intersección y supongamos, por reducción al absurdo, que $x \neq y$. Ya que el espacio es T_1, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $y \notin U$, luego y no pertenece a la anterior intersección, llegando a una contradicción.

2. Probamos ahora que el espacio es T_1. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces $y \notin \{x\}$. Por hipótesis, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $y \notin U$. De la misma forma, existe un entorno V de y tal que $x \notin V$. Esto prueba que el espacio es T_1.

Ejercicio 5.2 *Sea un espacio topológico* (X, τ). *Un subconjunto* A *se llama un retracto de* X *si existe una aplicación continua* $r : X \to A$ *tal que* $r(a) = a$ *para cada* $a \in A$. *A la aplicación* r *se llama retracción. Demostrar que si* X *es Hausdorff, el conjunto* A *es cerrado.*

Solución: Supongamos por reducción al absurdo que A no es un conjunto cerrado, es decir, existe $x \in \overline{A}$ y $x \notin A$. Como $r(x) \in A$, entonces $x \neq r(x)$. Ya que el espacio es Hausdorff, existen entornos U y V de x y $r(x)$ respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$.

Como r es una aplicación continua, existe un entorno W de x, tal que $r(W) \subset V$. Ya que x es adherente a A y $U \cap W \in \mathcal{U}_x$, existe $y \in (U \cap W) \cap A$. Entonces $y = r(y) \in r(W) \cap U \subset U \cap V$, llegando a una contradicción.

Ejercicio 5.3 *Sea un espacio topológico (X,τ) que es T_1 y A un subconjunto finito. Probar que A es cerrado.*

Solución: En un espacio T_1, todo conjunto unitario es cerrado. Si $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$, entonces

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\},$$

luego A es cerrado por ser unión finita de conjuntos cerrados.

Ejercicio 5.4 *Sea A un subconjunto de un espacio Hausdorff (X,τ) y sea $x\in X$. Probar que x es un punto de acumulación de A si y sólo si para cada $U\in\mathcal{U}_x$, el conjunto $U\cap A$ es infinito.*

Solución:

1. Supongamos que x es un punto de acumulación de A y supongamos que existe un entorno suyo U tal que $U\cap A$ es finito: $U\cap A=\{a_1,\ldots,a_n\}$.

   Supongamos primero que ninguno de dichos puntos es x. Ya que el espacio es Hausdorff, para cada $i=1,\ldots,n$, existen entornos U_i, V^i de x y a_i respectivamente, tales que $U_i\cap V^i=\emptyset$. Sea $W=U\cap U_1\cap\ldots\cap U_n$ entorno de x (intersección finita de entornos de x). Como $x\in A'$, existe $a\in(W\setminus\{x\})\cap A$. Por tanto existe i tal que $a=a_i$, luego $a\in U_i\cap V^i$, llegando a una contradicción.

   Si alguno de los puntos a_i es x lo quitamos. Observemos que $U\cap A=\{x\}$ no puede darse, pues x sería un punto aislado de A y no de acumulación.

2. La otra implicación es inmediata, pues si U es un entorno arbitrario de x, entonces $(U\setminus\{x\})\cap A$ es no vacío ya que $U\cap A$ es infinito. No se usa la propiedad Hausdorff.

Ejercicio 5.5 *Sean dos espacios topológicos (X,τ) e (Y,τ'). Supongamos que ambos satisfacen alguna de las siguientes propiedades: T_0, primer axioma de numerabilidad, segundo axioma de numerabilidad. Estudiar si $X\times Y$ con la topología producto satisface la misma propiedad que cumplen X e Y.*

Solución:

1. Veamos que el espacio producto también es T_0. Para ello, sean $(x,y),(x',y')$ dos puntos distintos de $X\times Y$. Supongamos que $x\neq x'$. Ya que (X,τ) es T_0, existe, por ejemplo, $U\in\mathcal{U}_x$ tal que $x'\notin U$. Entonces $U\times Y\in\mathcal{U}_{(x,y)}$ y el punto (x',y) no pertenece a él.

2. Supongamos que los dos espacios satisfacen el primer axioma de numerabilidad y veamos que el producto también lo satisface. Para ello, sea $(x,y)\in X\times Y$. Por hipótesis, sea β_x una base numerable de entornos de x en X y β'_y una base numerable de entornos de y en Y. Entonces $\beta_x\times\beta'_y$ es una base de entornos del punto (x,y) en $X\times Y$, y es numerable al ser producto de conjuntos numerables.

3. El producto $X \times Y$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, sin más que realizar el producto una base numerable de X por una base numerable de Y.

Ejercicio 5.6 *Sea un espacio topológico (X, τ) con la siguiente propiedad: para cada $x \in X$, existe un entorno cerrado U, tal que $(U, \tau_{|U})$ es Hausdorff. Probar que el espacio es Hausdorff.*

Solución: Sean $x \neq y$ y sea U el entorno cerrado de x de la hipótesis. Caben dos posibilidades:

1. Si $y \notin U$, entonces tomamos como entorno de y a $X \setminus U$ que es un abierto que contiene a y. Y como entorno de x a U. Entonces $U \cap (X \setminus U) = \emptyset$.
2. Si $y \in U$ y ya que $(U, \tau_{|U})$ es Hausdorff, existen $V \in \mathcal{U}_x^U$, $W \in \mathcal{U}_y^U$ tales que $V \cap W = \emptyset$. Ya que V es un entorno relativo de un entorno de x, es un entorno de x en X, es decir, $V \in \mathcal{U}_x$. Por otra parte, como $W \in \mathcal{U}_y^U$, existe $G \in \mathcal{U}_y$ tal que $W = G \cap U$. Entonces $G \cap V = \emptyset$ pues $G \cap V = G \cap (U \cap V) = W \cap U = \emptyset$.

Ejercicio 5.7 *Estudiar los axiomas de separación de la topología de los complementos finitos.*

Solución: En la topología de los complementos finitos, dos abiertos no triviales siempre se intersecan: si $O_1, O_2 \in \tau_{CF}$, entonces $O_i = X \setminus F_i$, donde F_i es un conjunto finito. Entonces

$$O_1 \cap O_2 = (X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2).$$

Si $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, entonces $X = F_1 \cup F_2$ y sería un conjunto finito: contradicción. Por tanto, el espacio no es Hausdorff, ni T_3 ni T_4. Por la misma razón, tampoco es normal. Los conjuntos cerrados son los conjuntos finitos, luego todo punto es cerrado. Esto nos dice que el espacio es T_1 y por tanto, T_0.

Finalmente, veamos que el espacio no es regular. Sea $x \notin F$, donde F es un conjunto cerrado, es decir, un conjunto finito. De nuevo, el hecho de que dos abiertos se intersecan nos imposibilita encontrar abiertos disjuntos que contengan a x y a F.

Ejercicio 5.8 *Definimos la siguiente topología τ en $\mathbb{R}$: para cada $x \neq 0$, los entornos de x coinciden con los entornos de la topología usual; si $x = 0$, los entornos del 0 son, además de los entornos de la topología usual, los conjuntos de la forma $U \setminus A$, donde U es un entorno de la topología usual del 0 y A un subconjunto de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Probad que este espacio es Hausdorff, pero no es regular.*

Solución: Este espacio es Hausdorff porque la topología τ contiene a la topología usual.

Para probar que no es regular, consideramos $F = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Este conjunto es cerrado. Para ello sólo hay que probar que el 0 no es un punto adherente: sea un entorno U cualquiera del 0 en la topología usual. Entonces $U \setminus F$ es un entorno de 0 en la nueva topología y por otra parte $(U \setminus F) \cap F = \emptyset$. Demostramos ahora que todo $\epsilon > 0$ y $O \in \tau$ tal que $F \subset O$, se tiene $(-\epsilon, \epsilon) \cap O \neq \emptyset$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces $\frac{1}{n} \in O$ y existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\frac{1}{n}) \subset O$. Sea $\eta = \min\{\delta, \frac{\epsilon}{2}\} > 0$, $r \in (\frac{1}{n} - \eta, \frac{1}{n} + \eta)$ y sea un número tal que $r \notin F$. Entonces

$$r \in B_\eta\left(\frac{1}{n}\right) \subset B_\delta\left(\frac{1}{n}\right) \subset O.$$

Además

$$|r| \leq |r - \frac{1}{n}| + |\frac{1}{n}| < \eta + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

Ejercicio 5.9 *Estudiar los axiomas de separación de la topología a derechas.*

Solución: Sea $\mathbb{R}$ con la topología a derechas, es decir, aquélla que tiene por base de abiertos a $\beta = \{[x, \infty), x \in \mathbb{R}\}$. La topología es $\tau = \beta \cup \{(x, \infty); x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Es evidente entonces que los puntos no son cerrados, luego el espacio no es T_1 y por tanto, tampoco T_2, T_3 ni T_4. El espacio es T_0, ya que si $x \neq y$, y si suponemos $x < y$, basta con tomar como entorno de y a $[y, \infty)$, el cual no contiene a x. Como dos abiertos siempre se intersecan, el espacio no es regular. Por otro lado, ya que dos cerrados no triviales siempre se intersecan, el espacio es normal.

Ejercicio 5.10 *Sea una aplicación continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaciendo la siguiente propiedad:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Probar que f es una aplicación lineal, es decir, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Sea $a = f(1)$ y $g(x) = ax$. Veamos que $f = g$ en $\mathbb{Q}$. Ya que el conjunto de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es Hausdorff, entonces se tendría que $f = g$ en $\mathbb{R}$.

Por una parte, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, luego $f(0) = 0 = g(0)$. Por otra parte, si $x \in \mathbb{R}$, $f(x + -x) = f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, luego $f(-x) = -f(x)$.

Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(n) = f(1 + \ldots + 1) = f(1) + \ldots + f(1) = nf(1) = na = g(n)$. Además, $f(-n) = -f(n) = -g(n) = g(-n)$, luego $f = g$ en $\mathbb{Z}$.

Si $m \in \mathbb{N}$, $f(1) = a = f(1/m + \ldots + 1/m) = mf(1/m)$, luego $f(1/m) = a/m = g(1/m)$. Por último, si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces

$$f(\frac{n}{m}) = f(\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}) = nf(\frac{1}{m}) = na\frac{1}{m} = g(\frac{n}{m}).$$

Por tanto $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ y esto finaliza la solución del ejercicio.

Ejercicio 5.11 *Sea un espacio regular (X,τ) y un subconjunto cerrado F del espacio. Probar que*

$$F = \bigcap \{O \in \tau; F \subset O\}.$$

Solución: La inclusión $\subset$ es evidente. Veamos la otra. Hay que demostrar que si $x \in O$, para cualquier abierto O que contiene a F, entonces $x \in F$. Supongamos por reducción al absurdo que $x \notin F$. Por ser el espacio regular, existe $O \in \tau$ tal que $O \supset F$ y existe $\in \mathcal{U}_x$ tal que $U \cap O = \emptyset$. Entonces O es un abierto que contiene a F y no contiene a x: ntradicción.

jercicio 5.12 *Encontrar un ejemplo de que la propiedad de separación normal no es reditaria.*

olución: Consideramos $X = \{a,b,c,d\}$ y la topología definida por

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

ste espacio es normal. Para ello basta darse cuenta que la familia de cerrados es

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{c,d\}, \{b,d\}, \{d\}\},$$

y por tanto, dos conjuntos cerrados no triviales siempre se intersecan.

Sin embargo el conjunto $A = \{a,b,c\}$ no es un espacio normal. Para este conjunto, la topología relativa y la familia de cerrados están dadas por

$$\tau_{|A} = \{\emptyset, A, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\} \qquad \mathcal{F}_{|A} = \{\emptyset, A, \{b,c\}, \{c\}, \{b\}\}.$$

Entonces los conjuntos cerrados $\{b\}$ y $\{c\}$ son disjuntos, pero los abiertos relativos que los contienen siempre tienen a a como elemento.

Ejercicio 5.13 *Probar que la recta de Sorgenfrey es normal.*

Solución: Sean F_1 y F_2 dos conjuntos cerrados disjuntos. Entonces para cada $x \in F_1$, existe $x' > x$ tal que $[x,x') \subset X \setminus F_2$. De la misma forma, para cada $y \in F_1$, existe $y' > y$ tal que $[y,y') \subset X \setminus F_1$. Sea

$$O_1 = \bigcup_{x \in F_1} [x,x') \qquad O_2 = \bigcup_{y \in F_2} [y,y').$$

Estos dos conjuntos son abiertos por ser unión de abiertos. Por otra parte, su intersección es vacía: sea $z \in [x, x') \cap [y, y')$, para algún $x \in F_1$ e $y \in F_2$. Supongamos sin perder generalidad que $x < y$. Entonces

$$x \leq z < x' \cdot \qquad y \leq z < y'.$$

Por tanto $x < y \leq z < x'$ y así, $y \in [x, x'] \subset F_1$, lo cual es falso.

Ejercicio 5.14 *Se consideran los subconjuntos del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ dados por $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ y $B = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$. Probar que ambos conjuntos son cerrados en $\mathbb{R}^2$ y que $d(A, B) = 0$. Probar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(p) = \frac{d(p, A)}{d(p, A) + d(p, B)}$$

es continua y separa A de B. Hallar explícitamente dos abiertos que separen los dos cerrados.

Solución:

- A es cerrado, pues $\overline{A} = \overline{\mathbb{R} \times \{0\}} = \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\{0\}} = \mathbb{R} \times \{0\}$. Por otra parte, B también es cerrado ya que $B = g^{-1}(\{1\})$, donde $g(x, y) = xy$, con $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Esto probaría que B es cerrado en $[0, \infty) \times \mathbb{R}$, pero este conjunto es cerrado en $\mathbb{R}^2$, luego B es cerrado en $\mathbb{R}^2$. Para probar que la distancia entre A y B es cero, se toma las sucesiones de puntos $\{(n, 0)\} \subset A$ y $\{(n, \frac{1}{n})\} \subset B$. Entonces

$$d((n, 0), (n, \frac{1}{n})) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

- Dado un conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$, la aplicación $x \longmapsto d(x, X)$ es continua (ejercicio 2.4). Por otra parte, el denominador nunca se anula, pues en tal caso, $d(p, A) = d(p, B) = 0$ y p sería adherente a A y a B. Como los dos subconjuntos son cerrados, $p \in A \cap B$, lo cual es falso.

- Se toman los siguientes conjuntos:

$$A \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < \frac{1}{2x}\}, \qquad B \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > \frac{1}{2x}\}.$$

Ejercicio 5.15 *Demostrar el lema de Urysohn a partir del teorema de Tietze.*

Solución: Supongamos que un espacio topológico (X, τ) es normal. Se consideran dos cerrados disjuntos F_1 y F_2. Se define la aplicación continua $f : F_1 \cup F_2 \to [0, 1]$ como aquélla que es 0 en F_1 y 1 en F_2. Por el teorema de Tietze, y ya que $F_1 \cup F_2$ es un conjunto cerrado en X, existe una aplicación continua $g : X \to [0, 1]$ que extiende a f. Entonces $g(F_1) = f(F_1) = 0$ y $g(F_2) = f(F_2) = 1$.

Ejercicio 5.16 *Probar que el axioma de normalidad se hereda a subconjuntos cerrados.*

Solución: Usamos el lema de Urysohn. Sea un espacio normal (X,τ) y un cerrado F. Consideramos F_1 y F_2 dos cerrados disjuntos de F. Por tanto también son cerrados de X. Luego existe una aplicación continua $f : X \to [0,1]$ que en F_1 vale 0 y en F_2 es 1. La aplicación continua buscada es la restricción de f a F, esto es, $f_{|F} : F \to [0,1]$.

Ejercicio 5.17 *Si un espacio métrico satisface alguna de las propiedades ANII, separable y Lindelöff, entonces probar que satisface también las otras dos.*

Solución: 1. Cualquier espacio topológico que es ANII también es separable y Lindelöff.

2. Supongamos ahora que el espacio es separable y probamos que satisface el segundo axioma de numerabilidad (y por tanto, también es Lindelöff). Sea $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable y denso en X. Probamos que la familia numerable dada por

$$\beta = \{B_r(x_n); n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}^+\}$$

es una base de abiertos. Sea O un abierto y $x \in O$. Sea $r \in \mathbb{Q}^+$ tal que $x \in B_r(x) \subset O$. Si el punto x pertenece a D, no hay nada que probar. Si $x \notin D$, ya que $B_{r/2}(x)$ es un abierto no vacío, entonces interseca a D. Sea $x_n \in B_{r/2}(x)$. Usando ahora la desigualdad triangular, $x \in B_{r/2}(x_n) \subset B_r(x)$.

3. Supongamos que el espacio es Lindelöff y veamos que es ANII (por el apartado primero, sería también separable). Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y consideramos el recubrimiento del espacio $\{B_{1/n}(x); x \in X\}$. Entonces existe un subrecubrimiento numerable: $\{B_{1/n}(x_{m(n)}); m(n) \in \mathbb{N}\}$. Probamos que $\beta = \{B_{1/n}(x_{m(n)}); n, m(n) \in \mathbb{N}\}$ es una base de abiertos del espacio. Sea $B_r(x)$ una bola cualquiera y veamos que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{1/n}(x_{m(n)}) \subset B_r(x)$. Sea n un número natural tal que $2/n < r$, y sea $x_{m(n)}$ tal que $x \in B_{1/n}(x_{m(n)})$. Veamos que $B_{1/n}(x_{m(n)}) \subset B_r(x)$. Sea $y \in B_{1/n}(x_{m(n)})$. Entonces la desigualdad triangular nos dice que

$$d(x,y) \leq d(x, x_{m(n)}) + d(x_{m(n)}, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < r.$$

Ejercicio 5.18 *Estudiar los axiomas de separación y numerabilidad de los siguientes espacios topológicos:*

1. *X es un conjunto, $p \in X$ un punto fijo y $\tau = \{O \subset X; p \in O\} \cup \{\emptyset\}$.*
2. *X un conjunto, $p \in X$ un punto fijo y $\tau = \{O \subset X; p \notin O\} \cup \{X\}$.*

Solución: 1. *a*) El espacio no es T_1: si $x \neq p$, todos los entornos de x contienen a un abierto y por tanto, a p. Sin embargo sí es T_0: si $x \neq y$ con $y \neq p$, entonces $\{p, x\}$ es un entorno de x que no contiene a y. En el caso de que $y = p$, entonces $\{p\}$ es un entorno de p que no contiene a x. El espacio por tanto no es T_2, T_3 ni T_4.

Vemos ahora que el espacio no es regular: si F es un cerrado, entonces $p \notin F$. Sin embargo todo abierto que contiene a F también contiene a p.

Para finalizar el estudio de las propiedades de separación, veamos que este espacio tampoco es normal: si F_1 y F_2 son dos cerrados disjuntos, cualquier abierto que contenga a F_1 interseca a cualquier abierto que contenga a F_2: el punto p está en la intersección.

b) Sea $B_x = \{x, p\}$. La base de abiertos más pequeña que existe en X es $\beta = \{B_x; x \in X\}$. Probamos que es la base más pequeña: si γ es otra base y $B \in \gamma$, sea $x \in B$. Ya que B es abierto, entonces $p \in B$. Por tanto, $\{x, p\} \subset B$. Concluimos pues afirmando que X es ANII si y sólo si X es numerable.

También es evidente que si $x \in X$, una base de entornos es $\beta_x = \{B_x\}$ y como consecuencia, el espacio es ANI.

El espacio es separable: el conjunto $D = \{p\}$ es denso (y finito): si O es un conjunto abierto no vacío, entonces contiene a p, luego $O \cap D \neq \emptyset$. El espacio es Lindelöff si y sólo si X es numerable: si el espacio es numerable es evidente que es Lindelöff. Supongamos ahora que el espacio es Lindelöff. Sea el recubrimiento por abiertos $\{B_x; x \in X\}$. Ya que el espacio es Lindelöff, existe un subrecubrimiento numerable, es decir, $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_{x_n}$. Entonces $X = \{p\} \cup \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ y es numerable.

2. *a*) El espacio es T_0: si $x \neq y$ e $y = p$, entonces $\{x\}$ es un abierto que no contiene a p. Si x e y son distintos de p, entonces $\{x\}$ es un abierto que no contiene a y. Sean $x \neq p$. Como el único entorno de p es X, entonces el espacio no es T_1.

El espacio no es regular: sea $x \notin \{p\}$ donde el conjunto $\{p\}$ es cerrado. Sin embargo el único abierto que contiene a $\{p\}$ es X.

El espacio es normal ya que dos cerrados no triviales contienen a p, luego se intersecan.

b) El espacio satisface el primer axioma de numerabilidad: si $x \neq p$, entonces $\{x\}$ es un abierto y es una base de entornos de x. Si $x = p$, la familia de entornos está formada sólo por X.

La familia $\beta = \{\{x\}; x \neq p\} \cup \{X\}$ es la base más pequeña que existe en X. Luego el espacio satisface el segundo de numerabilidad si y sólo si X es numerable.

c) El espacio es separable si y sólo si X es numerable: es evidente que si el espacio es numerable, entonces X es separable. Por otra parte, si X es separable, sea

D un subconjunto numerable denso. Ya que para cualquier $x \neq p$, $\{x\}$ es un conjunto abierto, D debe intersecar a este abierto, es decir, $x \in D$. Entonces $X \setminus \{p\} \subset D$ y así X es un conjunto numerable.

d) El espacio es Lindelöff: dado un recubrimiento por abiertos, uno de ellos contiene a p. Pero el único abierto que lo contiene es X, luego $\{X\}$ es el recubrimiento numerable (finito) que se buscaba.

Ejercicio 5.19 *Estudiar los axiomas de separación y numerabilidad del espacio topológico* $([-1,1],\tau)$ *donde* $\tau = \{O \subset [-1,1]; 0 \notin O\} \cup \{O \subset [-1,1]; (-1,1) \subset O\} \cup \{\emptyset\}$.

Solución: 1. El espacio no es T_1: el punto $x = 1/2$ no es cerrado (su complementario contiene a 0 y no contiene al conjunto $(-1,1)$). Sin embargo es T_0. Para la prueba, se consideran $x \neq y$ y distingamos varios casos: si $y = 1$, el conjunto $\{y\}$ es un abierto y no contiene a x. El caso $y = -1$ es análogo. Si $y \in (-1,1) \setminus \{0\}$, entonces $\{y\}$ es un abierto que no contiene a x. Por último, si $y = 0$, entonces $\{x\}$ es un entorno que no contiene a y.

Observemos que la familia de cerrados del espacio es

$$\mathcal{F} = \{F \subset [-1,1]; 0 \in F\} \cup \{\{-1\},\{1\},\{-1,1\}\}.$$

El espacio no es regular: consideramos el cerrado $F = \{0\}$ y sea $1/2 \notin \{0\}$. Entonces cualquier abierto que contenga a F contiene a $(-1,1)$ y por tanto, al punto $x = 1/2$.

El espacio es normal. Consideramos F_1 y F_2 dos cerrados y distingamos varios casos. Si F_1 es del primer tipo, entonces F_2 es del segundo. Por tanto, F_2 también es abierto y como abierto que contenga a F_1 basta elegir $X \setminus F_2$. Si F_1 y F_2 son ambos del segundo tipo, entonces son abiertos, luego ellos mismos sirven como abiertos que separan estos dos cerrados.

2. Si el espacio es ANII, entonces cualquier subconjunto suyo también lo es, por ejemplo $(0,1)$. Pero este subespacio tiene la topología del punto excluido (para $p = 0$) y como no es numerable, no es ANII (ejercicio 5.18).

Sin embargo sí satisface el primer axioma de numerabilidad: si $x \neq 0$, entonces $\{\{x\}\}$ es una base de entorno de x. Si $x = 0$, el sistema de entornos de 0 es finito, a saber, $\{X, (-1,1), [-1,1), (-1,1]\}$.

El espacio no es separable: supongamos que D es un conjunto denso. Para cada $x \in (0,1)$ sea el abierto $\{x\}$. Si D es denso debe intersecar a $\{x\}$, luego $x \in D$, es decir, $D \supset (0,1)$ y por tanto O no es numerable.

El espacio es Lindelöff. Si $\{O_i; i \in I\}$ es un recubrimiento por abiertos de $[-1,1]$, se considera O_{i_0} un abierto que contenga al 0. Entonces $O_{i_0} \supset (-1,1)$. Sean ahora O_{i_1} y O_{i_2} dos abiertos que contengan respectivamente a 1 y a -1. Por tanto estos tres abiertos del recubrimiento recubren todo el espacio.

Ejercicio 5.20 *Sea un espacio topológico (X, τ) y p un elemento que no pertenece a X. Sea $X' = X \cup \{p\}$ con la topología dada por $\tau' = \tau \cup \{X'\}$. Estudiar los axiomas de separación y numerabilidad del espacio topológico (X', τ').*

Solución: 1. El espacio no es T_1, pues si $x \neq p$, el único entorno de p es X', que contiene a x.

El espacio es T_0 si y solamente X lo es: si X' es T_0, X también lo es pues esta propiedad es hereditaria. Supongamos ahora que X es T_0 y sean $x \neq y$. El único problema se plantea si uno de los puntos es p. Entonces X es un entorno del otro punto y no contiene a p.

La familia de cerrados es

$$\mathcal{F}' = \{F \cup \{p\}; F \in \mathcal{F}\} \cup \{\{p\}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Ya que no hay dos cerrados no triviales y disjuntos, el espacio es normal.

Veamos ahora que el espacio no es regular. Sea $x \in X$ y el cerrado $\{p\}$. El único abierto que contiene al cerrado es el conjunto X', el cual contiene a x.

2. Si X satisface el primer axioma de numerabilidad, entonces X' también lo satisface: para los puntos de X, sirve la misma base de entornos que se tiene para X. Por otra parte, el punto p tiene como único entorno el espacio X'.

También se tiene que si el espacio X es ANII, X' también lo es, ya que si β es una base numerable de abiertos, $\beta \cup \{X'\}$ es base de X' y también es numerable.

El espacio es separable si X lo es: sea D un conjunto numerable denso de X. Entonces D también es denso en X' ya que el nuevo abierto X' interseca a D.

El espacio es Lindelöff, pues si se tiene un recubrimiento por abiertos de X', alguno de estos abiertos contiene a p. Pero el único abierto que contiene a dicho punto es X'. Luego este conjunto abierto es un subrecubrimiento (finito) del espacio.

Ejercicio 5.21 *Estudiar los axiomas de separación y numerabilidad del espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau)$, donde $\tau = \{O \subset \mathbb{N};\ si\ n \in O,\ entonces\ todos\ sus\ divisores\ pertenecen\ a\ O\}$.*

Solución: 1. El espacio es T_0, pues si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n < m$, entonces $U_n = \{\text{divisores de } n\}$ es un entorno de n y no contiene a m. Sin embargo el espacio no es T_1 (y por tanto, tampoco T_2, T_3 y T_4): por ejemplo, $\{1\}$ no es cerrado, pues su complementario es $\{2, 3, \ldots\}$ que no es abierto pues $1|2$ y no pertenece al conjunto.

El espacio no es regular: el conjunto $O = \{1, 2\}$ es abierto, luego $F = \{3, 4, \ldots\}$ es cerrado. Entonces $1 \notin F$. Sin embargo, todo abierto contiene a 1, en particular, los abiertos que contienen a F.

El espacio es normal, ya que dos cerrados no triviales siempre se intersecan: sean F_1 y F_2 dos cerrados no triviales, $n \in F_1$ y $m \in F_2$. Entonces $nm \in F_1 \cap F_2$ (en caso contrario, $mn \in (\mathbb{N} \setminus F_1) \cup (\mathbb{N} \setminus F_2)$. Si $mn \in \mathbb{N} \setminus F_1$, como $n|nm$, entonces $n \notin F_1$, lo cual es falso.)

2. Probamos que el espacio satisface el segundo axioma de numerabilidad (y por tanto, también el primero). Para ello se considera la familia de abiertos $\beta = \{O_n; n \in \mathbb{N}\}$. Probamos que es una base de abiertos. Para ello, sea O un abierto y $m \in O$. Entonces $m \in O_m \subset O$: si $n \in O_m$, entonces $n|m$. Ya que $m \in O$, $n \in O$.

   Ya que el espacio es numerable, también es separable y Lindelöff.

jercicio 5.22 *En $\mathbb{R}$ se considera la topología $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}\}$, donde $\mathbb{I}$ es el conjunto de números irracionales. Probar que este espacio es regular pero no es Hausdorff.*

lución: El conjunto de los cerrados coincide con el de abiertos. Sea $F \in \mathcal{F}$ y $x \notin F$. Los sos no triviales son que $F = \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{I}$ y $F = \mathbb{I}$, $x \in \mathbb{Q}$. Consideramos sólo el primero, ya ue el segundo es análogo. Entonces tomamos como entorno de x, $U = \mathbb{I}$ y como abierto que contiene al cerrado $O = F$. Esto prueba que el espacio es regular. También se podía haber razonado que como todos los abiertos son también cerrados, cada punto tiene una base de entornos cerrados (toda la topología).

El espacio no es Hausdorff ya que no es posible separar dos números racionales (o dos números irracionales): sean $x, y \in \mathbb{Q}$; entonces los únicos abiertos que contienen a dichos puntos son $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, los cuales tienen intersección no vacía.

Ejercicio 5.23 *Sea un espacio topológico (X, τ) y A un subconjunto suyo. Probar que A es Lindelöff si y sólamente si para cualquier familia de abiertos de X, $\{O_i; i \in I\}$ tal que $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, existe un subconjunto numerable $J \subset I$ tal que $A \subset \bigcup_{j \in J} O_j$.*

Solución: Supongamos que el subespacio A es Lindelöff y sea $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, donde $O_i \in \tau$. Intersecando con A se tiene

$$A = \bigcup_{i \in I} (A \cap O_i).$$

Ya que $A \cap O_i \in \tau_{|A}$ y A es Lindelöff, existe $J \subset I$ numerable tal que $A = \bigcup_{j \in J} (A \cap O_j)$, es decir, $A \subset \bigcup_{j \in J} O_j$.

Supongamos ahora que se da la otra hipótesis y probemos que A es Lindelöff. Sea para ello $\{G_i; i \in I\}$ un recubrimiento de A por abiertos relativos de A. Para cada $i \in I$, existe $O_i \in \tau$ tal que $G_i = A \cap O_i$, luego

$$A = \bigcup_{i \in I} (A \cap O_i) \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

Por hipótesis, existe un subconjunto numerable J de I tal que $A \subset \bigcup_{j\in J} O_j$. Intersecando ahora con A obtenemos

$$A = \bigcup_{j\in J}(A \cap O_j) = \bigcup_{j\in J} G_j,$$

como queríamos probar.

Ejercicio 5.24 *Sea un espacio Lindelöff (X,τ) y A un subconjunto suyo no numerable. Probar que existe $x \in X$ tal que para cada $U \in \mathcal{U}_x$, la intersección $U \cap A$ es no numerable.*

Solución: Por reducción al absurdo, supongamos que para cada $x \in X$, existe un entorno $U(x)$ de x tal que $U(x) \cap A$ es un conjunto numerable. Sea $O(x) \in \tau$ tal que $x \in O(x) \subset U(x)$. Entonces la familia de abiertos $\{O(x); x \in X\}$ es un recubrimiento por abiertos del espacio. Ya que X es un espacio Lindelöff, existe $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ tal que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} O(x_n)$. Intersecando con A obtenemos

$$A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O(x_n)\right) \cap A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(O(x_n) \cap A),$$

es decir, A es unión numerable de conjuntos numerables, luego A sería numerable, llegando a una contradicción.

Ejercicio 5.25 *Probar que la recta de Sorgenfrey es Lindelöff.*

Solución: Supongamos que $\mathbb{R} = \bigcup_{i\in I} O_i$, con $O_i \in \tau_S$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $i_x \in I$ y existe $\epsilon_x > 0$ tal que $x \in [x, x+\epsilon_x) \subset O_{i_x}$. Entonces $\{I_x = [x, x+\epsilon_x); x \in \mathbb{R}\}$ es un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{R}$. Definimos el conjunto

$$A = \{y \in \mathbb{R}; y \notin I_x - \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

- El conjunto A es numerable. Sean $y_1, y_2 \in A$ dos puntos distintos. Veamos primero que $I_{y_1} \cap I_{y_2} = \emptyset$. Supongamos $y_1 < y_2$. Entonces $I_{y_1} \cap I_{y_2} = [y_2, \min\{\epsilon_{y_1}, \epsilon_{y_2}\})$ y así $y_2 \in I_{y_1} - \{y_1\}$: contradicción. Como el conjunto $\mathbb{Q}$ es denso en $(\mathbb{R}, \tau_S)$, para cada $y \in A$, se elige $q_y \in I_{y_i} \cap \mathbb{Q}$. Entonces la aplicación $\phi : A \to \mathbb{Q}$ dada por $\phi(y) = q_y$ es inyectiva, probando que A es numerable.

- Sea $B = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R}, y \in I_x - \{x\}\}$. Entonces $\{I_x - \{x\}; x \in \mathbb{R}\}$ es un recubrimiento por abiertos de la topología usual de B. Como B es ANII para la topología usual, es un espacio Lindelöff, luego existe $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ tal que $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(I_{x_n} \setminus \{x_n\})$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= A \cup B \subset \left(\bigcup_{x\in A} I_x\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{x_n} \setminus \{x_n\}\right)\\ &\subset \left(\bigcup_{x\in A} O_{i_x}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_{i_{x_n}}\right).\end{aligned}$$

Esto prueba que $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es Lindelöff.

Ca[illegible]ulo 6

C[illegible]mpacidad. Compacidad local. C[illegible]mpactificación

Ejercicio 6.1 *Probar que la unión de dos subconjuntos compactos también es compacto, pero no sucede lo mismo con la intersección. Dar un ejemplo de dos subconjuntos no compactos de $\mathbb{R}$ cuya unión sea un conjunto compacto.*

Solución: 1. Sean dos subconjuntos compactos A y B de un espacio (X, τ) y $\{O_i : i \in I\}$ un recubrimiento de $A \cup B$ por abiertos de X. Entonces dicha familia también es un recubrimientos por abiertos de A y de B. Ya que estos dos conjuntos son compactos, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $A \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$ y $B \subset O_{j_1} \cup \ldots \cup O_{j_m}$. Es evidente entonces que

$$A \cup B \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n} \cup O_{j_1} \cup \ldots \cup O_{j_m},$$

lo que prueba que $A \cup B$ es compacto.

2. La intersección de conjuntos compactos puede no ser compacta. Para ello se considera el espacio $(\mathbb{R}^*, \tau^*)$ donde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{p\}$, con $p \notin \mathbb{R}$ y la topología $\tau^* = \tau \cup \{\mathbb{R}^*\}$ siendo τ la topología usual de $\mathbb{R}$. La topología inducida por τ^* en $\mathbb{R}$ es la topología usual: $\tau^*_{|\mathbb{R}} = \tau$. Entonces cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^*$ que contenga al punto p es compacto. Ver ejercicio 5.20. Por ejemplo $A = (0,1) \cup \{p\}$ y $B = (0,2) \cup \{p\}$ son compactos. Sin embargo, la intersección, que es $(0,1)$, no es compacto

3. En $\mathbb{R}$, los conjuntos $(0,1]$ y $[0,1)$ no son conjuntos cerrados, luego no son compactos. Sin embargo su unión, $[0,1]$ es compacta por ser un conjunto cerrado y acotado.

Ejercicio 6.2 *Se considera una aplicación $f : X \to Y$ entre dos espacios compactos y Hausdorff. Probar que f es una aplicación continua si y sólo si el grafo de f es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.*

Solución: Supongamos que f es una aplicación continua. Se toma la aplicación $e : X \to X \times Y$ dada por $e(x) = (x, f(x))$, $x \in X$. Ya que f es continua, la aplicación e también lo es. Como el espacio X es compacto, $e(X)$ es un conjunto compacto de $X \times Y$. Dado que X e Y son espacios Hausdorff, su producto $X \times Y$ también lo es. Por tanto, $e(X)$ es un conjunto cerrado de $X \times Y$. Para finalizar, basta darse cuenta de que $e(X)$ es el grafo de f.

Consideramos ahora el grafo de f y supongamos que es un conjunto cerrado en $X \times Y$. Para probar que f es una aplicación continua, tomamos un cerrado F' de Y y veamos que la imagen inversa mediante f es un cerrado. Ya que $X \times Y$ es un espacio compacto y $G(f)$ es un subconjunto cerrado, entonces es un conjunto compacto. Entonces la aplicación $p_{1|G(f)} : G(f) \to X$ es una aplicación cerrada (su dominio es compacto y su codominio es Hausdorff). Por otra lado,

$$f^{-1}(F') = p_{1|G(f)} \circ p_{2}{}^{-1}_{|G(f)}(F').$$

Como p_2 es una aplicación continua, $p_{2}{}^{-1}_{|G(f)}(F')$ es un conjunto cerrado de $G(f)$, luego $f^{-1}(F')$ es un cerrado de X.

Ejercicio 6.3 *Sean dos espacios topológicos X e Y, donde Y es un espacio compacto. Probar que la proyección $p : X \times Y \to X$ es cerrada.*

Solución: Se considera un conjunto cerrado F de $X \times Y$ y probamos que $X \setminus p(F)$ es un conjunto abierto. Sea $x \notin p(F)$. Entonces $\{(x, y); y \in Y\} \cap F = \emptyset$. Por tanto, para cada $y \in Y$, existe $O_y \in \tau$, $x \in O_y$ y $O^y \in \tau'$, $y \in O^y$ tal que $O_y \times O^y \subset (X \times Y) \setminus F$. Ya que $\{O^y; y \in Y\}$ es un recubrimiento por abiertos del espacio compacto Y, existe un subrecubrimiento finito: $Y = O^{y_1} \cup \ldots \cup O^{y_n}$.

Se toma $U = O_{y_1} \cap \ldots \cap O_{y_n}$, que es un entorno de x por ser intersección finita de abiertos. Entonces dicho entorno satisface $U \subset X \setminus p(F)$, probando que x es punto interior de $X \setminus p(F)$. Efectivamente, si $z \in U \cap p(F)$, entonces existe $y \in Y$ tal que $(z, y) \in F$. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in O^{y_j}$. Entonces

$$(z, y) \subset U \times O^{y_j} \subset O_{y_j} \times O^{y_j} \subset (X \times Y) \setminus F,$$

lo cual es falso pues $f(z) = z$.

Ejercicio 6.4 *Se considera un espacio métrico (X, d), $A, B \subset X$ y A compacto. Probar que existe $a \in A$ tal que $d(a, B) = d(A, B)$. Como consecuencia, si B es un conjunto cerrado y $A \cap B = \emptyset$ se tiene que $d(A, B) > 0$.*

Solución: Se define la aplicación $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, B)$. Esta aplicación es continua (ejercicio 2.4). Ya que A es compacto, esta aplicación alcanza un mínimo, es decir, existe $a \in A$ tal que

$$f(a) = \min_{x \in A} f(x) = d(A, B).$$

Por tanto $d(a, B) = f(a) = d(A, B)$.

Sea ahora a el punto anterior. Si B fuera un conjunto cerrado y $A \cap B = \emptyset$, entonces $d(a, B)$ no puede ser cero: en tal caso, por el ejercicio 1.23,

$$d(a, B) = 0 \Longrightarrow a \in \overline{B} = B.$$

Entonces se tendría que $a \in A \cap B$, llegando a una contradicción.

Ejercicio 6.5 *Se considera un conjunto X con dos topologías τ_1, τ_2 tales que (X, τ_1) es un espacio compacto y (X, τ_2) es un espacio Hausdorff. Probar que si $\tau_2 \subset \tau_1$ entonces $\tau_1 = \tau_2$.*

Solución: Se considera la aplicación identidad $1_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$. Esta aplicación es continua por el hecho de que $\tau_2 \subset \tau_1$. Entonces esta aplicación es biyectiva, continua, el dominio es compacto y el codominio es Hausdorff, luego es un homeomorfismo. Pero la aplicación identidad es homeomorfismo si y sólo si $\tau_1 = \tau_2$.

Ejercicio 6.6 *Sea un espacio métrico compacto (X, d) y una isometría $f : X \to X$. Probar que f es una aplicación sobreyectiva.*

Solución: Supongamos que f no es sobreyectiva y sea $x \in X \setminus f(X)$. Como $f(X)$ es un conjunto compacto en un espacio métrico, es un conjunto cerrado. Por tanto, $x \notin \overline{f(X)}$ y así, $d(x, f(X)) = a > 0$. Se define una sucesión del siguiente modo: $x_1 = x$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. La sucesión $\{x_n\}$ tiene una parcial convergente (por estar incluido en un conjunto compacto): sea $x_{\sigma(n)} \to z$. Como $x_{\sigma(n)+1} = f(x_{\sigma(n)})$, tomando límites y como f es continua, $z = f(z)$. Por otro lado, ya que f es una isometría,

$$0 < a \leq d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_2, x_3) = \ldots = d(x_n, x_{n+1}), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$d(x_{\sigma(n)}, f(x_{\sigma(n)})) = d(x_{\sigma(n)}, x_{\sigma(n)+1}) \geq a.$$

Ya que f es una aplicación continua y la aplicación distancia d también lo es, al tomar límites en esta igualdad, se tiene que $d(z, f(z)) \geq a$, lo cual es falso, pues $f(z) = z$.

Ejercicio 6.7 *Sea un espacio métrico compacto (X, d) y una aplicación continua $f : X \to X$ tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Probar que f tiene un punto fijo.*

Solución: Supongamos que f es una aplicación continua. Se toma la aplicación $e : X \to X \times Y$ dada por $e(x) = (x, f(x))$, $x \in X$. Ya que f es continua, la aplicación e también lo es. Como el espacio X es compacto, $e(X)$ es un conjunto compacto de $X \times Y$. Dado que X e Y son espacios Hausdorff, su producto $X \times Y$ también lo es. Por tanto, $e(X)$ es un conjunto cerrado de $X \times Y$. Para finalizar, basta darse cuenta de que $e(X)$ es el grafo de f.

Consideramos ahora el grafo de f y supongamos que es un conjunto cerrado en $X \times Y$. Para probar que f es una aplicación continua, tomamos un cerrado F' de Y y veamos que la imagen inversa mediante f es un cerrado. Ya que $X \times Y$ es un espacio compacto y $G(f)$ es un subconjunto cerrado, entonces es un conjunto compacto. Entonces la aplicación $p_{1|G(f)} : G(f) \to X$ es una aplicación cerrada (su dominio es compacto y su codominio es Hausdorff). Por otra lado,

$$f^{-1}(F') = p_{1|G(f)} \circ p_{2|G(f)}^{-1}(F').$$

Como p_2 es una aplicación continua, $p_{2|G(f)}^{-1}(F')$ es un conjunto cerrado de $G(f)$, luego $f^{-1}(F')$ es un cerrado de X.

Ejercicio 6.3 *Sean dos espacios topológicos X e Y, donde Y es un espacio compacto. Probar que la proyección $p : X \times Y \to X$ es cerrada.*

Solución: Se considera un conjunto cerrado F de $X \times Y$ y probamos que $X \setminus p(F)$ es un conjunto abierto. Sea $x \notin p(F)$. Entonces $\{(x, y); y \in Y\} \cap F = \emptyset$. Por tanto, para cada $y \in Y$, existe $O_y \in \tau$, $x \in O_y$ y $O^y \in \tau'$, $y \in O^y$ tal que $O_y \times O^y \subset (X \times Y) \setminus F$. Ya que $\{O^y; y \in Y\}$ es un recubrimiento por abiertos del espacio compacto Y, existe un subrecubrimiento finito: $Y = O^{y_1} \cup \ldots \cup O^{y_n}$.

Se toma $U = O_{y_1} \cap \ldots \cap O_{y_n}$, que es un entorno de x por ser intersección finita de abiertos. Entonces dicho entorno satisface $U \subset X \setminus p(F)$, probando que x es punto interior de $X \setminus p(F)$. Efectivamente, si $z \in U \cap p(F)$, entonces existe $y \in Y$ tal que $(z, y) \in F$. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in O^{y_j}$. Entonces

$$(z, y) \subset U \times O^{y_j} \subset O_{y_j} \times O^{y_j} \subset (X \times Y) \setminus F,$$

lo cual es falso pues $f(z) = z$.

Ejercicio 6.4 *Se considera un espacio métrico (X, d), $A, B \subset X$ y A compacto. Probar que existe $a \in A$ tal que $d(a, B) = d(A, B)$. Como consecuencia, si B es un conjunto cerrado y $A \cap B = \emptyset$ se tiene que $d(A, B) > 0$.*

Solución: Se define la aplicación $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, B)$. Esta aplicación es continua (ejercicio 2.4). Ya que A es compacto, esta aplicación alcanza un mínimo, es decir, existe $a \in A$ tal que

$$f(a) = \min_{x \in A} f(x) = d(A, B).$$

Por tanto $d(a, B) = f(a) = d(A, B)$.

Sea ahora a el punto anterior. Si B fuera un conjunto cerrado y $A \cap B = \emptyset$, entonces $d(a, B)$ no puede ser cero: en tal caso, por el ejercicio 1.23,

$$d(a, B) = 0 \Longrightarrow a \in \overline{B} = B.$$

Entonces se tendría que $a \in A \cap B$, llegando a una contradicción.

Ejercicio 6.5 *Se considera un conjunto X con dos topologías τ_1, τ_2 tales que (X, τ_1) es un espacio compacto y (X, τ_2) es un espacio Hausdorff. Probar que si $\tau_2 \subset \tau_1$ entonces $\tau_1 = \tau_2$.*

Solución: Se considera la aplicación identidad $1_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$. Esta aplicación es continua por el hecho de que $\tau_2 \subset \tau_1$. Entonces esta aplicación es biyectiva, continua, el dominio es compacto y el codominio es Hausdorff, luego es un homeomorfismo. Pero la aplicación identidad es homeomorfismo si y sólo si $\tau_1 = \tau_2$.

Ejercicio 6.6 *Sea un espacio métrico compacto (X, d) y una isometría $f : X \to X$. Probar que f es una aplicación sobreyectiva.*

Solución: Supongamos que f no es sobreyectiva y sea $x \in X \setminus f(X)$. Como $f(X)$ es un conjunto compacto en un espacio métrico, es un conjunto cerrado. Por tanto, $x \notin \overline{f(X)}$ y así, $d(x, f(X)) = a > 0$. Se define una sucesión del siguiente modo: $x_1 = x$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. La sucesión $\{x_n\}$ tiene una parcial convergente (por estar incluido en un conjunto compacto): sea $x_{\sigma(n)} \to z$. Como $x_{\sigma(n)+1} = f(x_{\sigma(n)})$, tomando límites y como f es continua, $z = f(z)$. Por otro lado, ya que f es una isometría,

$$0 < a \leq d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_2, x_3) = \ldots = d(x_n, x_{n+1}), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$d(x_{\sigma(n)}, f(x_{\sigma(n)})) = d(x_{\sigma(n)}, x_{\sigma(n)+1}) \geq a.$$

Ya que f es una aplicación continua y la aplicación distancia d también lo es, al tomar límites en esta igualdad, se tiene que $d(z, f(z)) \geq a$, lo cual es falso, pues $f(z) = z$.

Ejercicio 6.7 *Sea un espacio métrico compacto (X, d) y una aplicación continua $f : X \to X$ tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Probar que f tiene un punto fijo.*

Solución: Sea x un punto cualquiera de X, y definimos una sucesión de la forma siguiente: $x_0 = x$ y $x_n = f(x_{n-1})$. Como el espacio es compacto, la sucesión $\{x_n\}$ tiene una parcial convergente: $\{x_{\sigma(n)}\} \to y$. Entonces

$$d(x_{\sigma(n)}, f(x_{\sigma(n)})) = d(f(x_{\sigma(n-1)}), f(x_{\sigma(n)})) < d(x_{\sigma(n-1)}, x_{\sigma(n)}).$$

Tomando límites, y teniendo en cuenta que f es continua, deducimos que $d(y, f(y)) \leq d(y, y) = 0$. Por tanto, $f(y) = y$.

Ejercicio 6.8 *Se considera $\mathbb{R}$, la topología de los complementos numerables τ_{CN} y la topología trivial τ_T. Sea el espacio $(\mathbb{R} \times \{0,1\}, \tau_{CN} \times \tau_T)$. Probar que todo subconjunto infinito posee puntos de acumulación, pero el espacio producto no es compacto.*

Solución: Si el espacio producto es compacto, cada uno de los espacios factores es compacto. Sin embargo, $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ no es compacto. Para ello, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Entonces cada $\mathbb{R} \setminus A_n$ pertenece a τ_{CN}. La recta real se puede recubrir por $\{\mathbb{R} \setminus A_n; n \in \mathbb{N}\}$, pues

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus A_n) = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R},$$

pero no por un número finito de abiertos del tipo $\{\mathbb{R} \setminus A_{n_1}, \ldots, \mathbb{R} \setminus A_{n_m}\}$, pues entonces

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus A_{n_1}) \cup \ldots \cup (\mathbb{R} \setminus A_{n_m}) = \mathbb{R} \setminus (\bigcap_{j=1}^{m} A_{n_j}) = \mathbb{R} \setminus A_{\text{máx}\{n_1,\ldots,n_m\}},$$

lo cual es falso. Esto prueba que $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ no es compacto.

Veamos ahora que todo conjunto infinito $A \subset \mathbb{R} \times \{0,1\}$ tiene puntos de acumulación. Sea A un conjunto infinito y supongamos que no tiene puntos de acumulación. Tomamos $(x, y) \in A$. Ya que este punto no es de acumulación, existe un conjunto F numerable con $x \notin F$, tal que

$$\Big(((\mathbb{R} \setminus F) \times \{0,1\}) - \{(x,y)\} \Big) \cap A = \emptyset,$$

es decir, $A \subset (F \times \{0,1\}) \cup \{(x,y)\}$. Por tanto, existen conjuntos numerables $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}$ tales que

$$A = (F_1 \times \{0\}) \cup (F_2 \times \{1\}).$$

Probamos que $F_1 = F_2$: si existe $x \in F_2 \setminus F_1$, el punto $(x, 0)$ no pertenece a A. Como no es un punto de acumulación, existe un conjunto F_3 numerable, $x \notin F_3$, y

$$\Big((\mathbb{R} \setminus F_3) \times \{0,1\}) - \{(x,0)\} \Big) \cap A = \emptyset;$$

o lo que es lo mismo, $A \subset F_3 \times \{0,1\}$. Entonces como $(x,1) \in F_2 \times \{1\} \subset A$, $x \in F_3$, lo cual es una contradicción.

Concluimos pues que $A = F \times \{0,1\}$, donde F es un conjunto numerable. Sea $x \in F$. Ya que $(x,0)$ no es un punto de acumulación, existe un conjunto numerable $F' \subset \mathbb{R}$, $x \notin F'$ y

$$A \subset (F' \times \{0,1\}) \cup \{(x,0)\}.$$

Pero $(x,1) \in F' \times \{0,1\}$ y por tanto, $x \in F'$, llegando a una contradicción.

Ejercicio 6.9 *Sea un espacio topológico (X,τ) y $p \notin X$. Sea $X' = X \cup \{p\}$ y consideramos la topología $\tau' = \tau \cup \{X'\}$. Probar que $(X';\tau')$ es una compactificación no Hausdorff de (X,τ), considerando la aplicación inclusión $i : X \hookrightarrow X'$. Esto prueba que todo espacio topológico tiene una compactificación por un punto. Probar que si el espacio (X,τ) es compacto y Hausdorff, X' es una compactificación de X que no es homeomorfa a X.*

Solución: El espacio (X',τ') es compacto, ya que dado cualquier recubrimiento de X' uno de los abiertos debe contener a p. Pero el único que lo contiene es X'. Por tanto, en el recubrimiento está X', luego éste es el recubrimiento finito (esto ya se probó en el ejercicio 5.20). Como $\tau'_{|X} = \tau$, entonces i es un embebimiento. Por último, todo abierto que contiene a p (el único es X') interseca a X, luego $\overline{i(X)} = \overline{X} = X'$.

El espacio X' no es Hausdorff pues el punto p no se puede separar de ninguno de X, pues el único entorno de p es X'. Por tanto, si X es Hausdorff, no puede ser homeomorfo a X', ya que la propiedad Hausdorff es hereditaria.

Ejercicio 6.10 *Estudiar la compacidad del siguiente espacio topológico $X = (0,1)$ y $\tau = \{O_n := (0, 1-\frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, X\}$. Caracterizar los subconjuntos compactos y estudiar la compacidad local. Estudiar la compactificación de Alexandroff por un punto.*

Solución:

1. El espacio X no es compacto. Tomamos $(0,1) = \bigcup_n (0, 1-\frac{1}{n})$. Si hubiera un recubrimiento finito se tendría
$$(0,1) = (0, 1-\frac{1}{m_1}) \cup \ldots \cup (0, 1-\frac{1}{m_n}) = (0, 1-\frac{1}{m}),$$
donde $m = \text{máx}\{m_1, \ldots, m_n\}$: contradicción.

2. Del mismo modo, si A es un conjunto compacto, y tomando el mismo recubrimiento de antes, se concluye que $A \subset (0, 1-1/m)$ para un cierto número natural m. En particular, $\sup(A) < 1$. Veamos también el recíproco. Sea $\delta = \sup(A) < 1$ y $\{O_{n_i}; i \in I\}$ un recubrimiento por abiertos de A. Si el conjunto $\{n_i; i \in I\}$ no está acotado superiormente, entonces existe n_i tal que $\delta < 1 - \frac{1}{n_i}$. En particular, $A \subset O_{n_i}$. Si por el contrario el conjunto $\{n_i; i \in I\}$ está acotado superiormente, entonces es finito, y por tanto el recubrimiento es finito. Resumimos diciendo que un conjunto A es compacto si y sólo si $\sup(A) < 1$.

3. El espacio es localmente compacto, pues si $x \in X$, $\beta_x = \{(0, 1-1/n); x < 1-1/n\}$ es una base de entornos de x. Ya que cada elemento de β_x tiene como supremo $1 - 1/n$ y es menor que 1, cada entorno es compacto.

4. Del segundo apartado, y como el conjunto de cerrados es $\mathcal{F} = \{[1 - \frac{1}{n}, 1); n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, X\}$, concluimos que el único cerrado que es compacto es $\emptyset$. Si $(0,1)^* = (0,1) \cup \{\infty\}$ es la compactificación de Alexandroff, los abiertos que contienen a ∞ son los conjuntos cuyos complementarios son cerrados y compactos en $(0,1)$, es decir, $\emptyset$. Por tanto, el único abierto que contiene a ∞ es $(0,1)^*$ y así, $\tau^* = \tau \cup \{(0,1)^*\}$.

Ejercicio 6.11 *Lo mismo que el ejercicio anterior, pero con $X = \mathbb{N}$ y la topología*

$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{A_n; n \in \mathbb{N}\}, \qquad A_n = \{1, \ldots, n\}.$$

Solución: 1. El espacio no es compacto, ya que $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento por abiertos, y si hubiera un recubrimiento finito se tendría $\mathbb{N} = A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_m} = A_{\text{máx}\{n_1,\ldots,n_m\}}$, lo cual no es posible pues dicho conjunto es finito.

2. Como consecuencia del apartado anterior, y tomando el mismo recubrimiento, deducimos que si $A \subset \mathbb{N}$ es un subconjunto compacto, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset A_n$. Esto nos dice que A es finito. El recíproco es inmediato. Por tanto, los conjuntos compactos en este espacio topológico son los conjuntos finitos.

3. Ya que todo abierto (excepto $\mathbb{N}$) es compacto, entonces el espacio es localmente compacto.

4. Como los conjuntos cerrados son los conjuntos de la forma $\mathbb{N} \setminus A_n$ y los conjuntos triviales, el único que es compacto es $\emptyset$. Por tanto la compactificación de Alexandroff es $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\tau^* = \tau \cup \{\mathbb{N}^*\}$.

Ejercicio 6.12 *Lo mismo que el ejercicio anterior, pero con $X = \mathbb{N}$ y la topología*

$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{B_n; n \in \mathbb{N}\}, \qquad B_n = \{n, n+1, \ldots\}.$$

Solución: 1. El espacio es compacto ya que dado cualquier recubrimiento $\{B_{n_i}; i \in I\}$, tomamos un abierto cualquiera del recubrimiento, por ejemplo, B_{n_j}. Entonces $\mathbb{N} = \{1, \ldots, n_j - 1\} \cup B_{n_j}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n_j - 1\}$ sea $j_i \in I$ tal que $i \in B_{j_i}$. Entonces $\mathbb{N} = \left(\cup_{i=1}^{n_j-1} B_{j_i} \right) \cup B_{n_j}$.

2. De la misma forma que se ha hecho con $\mathbb{N}$, todo conjunto es compacto.

3. El espacio es localmente compacto por el apartado anterior.

4. Como todos los conjuntos cerrados son compactos, los conjuntos abiertos que contienen a ∞ son aquéllos cuyo conjunto complementario es cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$. Por tanto, la topología de Alexandroff es $\tau^* = \tau \cup \{A \cup \{\infty\}; A \subset \mathbb{N}\}$.

jercicio 6.13 *Se considera $\mathbb{R}$ con la topología $\tau = \{(a, \infty); a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$. Estudiar la mpacidad, compacidad local y compactificación de Alexandroff de este espacio topológico.*

lución: Este espacio no es compacto, pues $\mathbb{R} = \cup_{a\in\mathbb{R}}(a, \infty)$ y si hubiera un recubrinto finito, entonces

$$\mathbb{R} = (a_1, \infty) \cup \ldots \cup (a_n, \infty) = (\min\{a_1, \ldots, a_n\}, \infty),$$

cual es falso. Tomando el mismo recubrimiento por abiertos, se tiene que todo conjunto compacto debe estar acotado inferiormente. Por otro lado, si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado inferiormente que tiene ínfimo pero no mínimo, entonces no es compacto: basta con escribir $A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}(\inf(A) + \frac{1}{n}, \infty)$. Por otro lado, si tiene mínimo, entonces sí es compacto: si $\{(a_i, \infty); i \in I\}$ es un recubrimiento de A, sea $i_0 \in I$ tal que $\min(A) \in (a_{i_0}, \infty)$. Por tanto, $A \subset (a_{i_0}, \infty)$ y éste es el recubrimiento finito buscado. Concluimos diciendo que los conjuntos compactos del espacio son aquellos conjuntos acotados inferiormente que tienen mínimo.

El espacio es localmente compacto. Sea $\beta_x = \{[x - \frac{1}{n}, \infty); n \in \mathbb{N}\}$. Cada uno de los elementos de β_x son entornos de x ya que entre $[x - \frac{1}{n}, \infty)$ y x se encuentra el abierto $(x - \frac{1}{n}, \infty)$. Por otro lado, β_x forma una base de entornos, ya que dado cualquier abierto (a, ∞) conteniendo a x, entonces $a < x$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [x - \frac{1}{n}, \infty) \subset (a, \infty)$. Finalmente, cada uno de los elementos de β_x son compactos al tener mínimo.

Como los conjuntos cerrados (no triviales) son de la forma $(-\infty, a]$, ninguno de ellos es compacto. Por tanto, el único subconjunto cerrado y compacto es $\emptyset$. Esto prueba que la compactificación de Alexandroff es $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con la topología $\tau^* = \tau \cup \{\mathbb{R}^*\}$.

Ejercicio 6.14 *Sea un espacio Hausdorff (X, τ) . Si A es un subconjunto compacto de X, entonces el conjunto de puntos de acumulación de A, A', también es compacto.*

Solución: Como A es compacto en un espacio Hausdorff, entonces es un conjunto cerrado. Entonces $A = \overline{A} = A \cup A'$, es decir, $A' \subset A$. Para probar que el conjunto de puntos de acumulación es compacto, probamos que es cerrado.

Sea $x \in \overline{A'}$ y $x \notin A'$. Ya que $\overline{A'} \subset \overline{A} = A$, entonces $x \in A$. Ya que no es un punto de acumulación, es un punto aislado. Sea U un entorno de x tal que $U \cap A = \{x\}$. Por otra parte, $U \cap A' \neq \emptyset$ pues $x \in \overline{A'}$. Pero $(U \setminus \{x\}) \cap A' \subset U \cap A = \{x\}$, luego $x \in A'$, llegando a una contradicción.

Ejercicio 6.15 *Consideramos la semiesfera superior cerrada de la esfera* $H^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2; z \geq 0\}$*. Demostrar que es un conjunto compacto y localmente compacto y probar que la proyección* $p : H^2_+ \to \mathbb{R}^2$*, dada por* $p(x,y,z) = (x,y)$ *es un embebimiento.*

Solución: Para probar que H^2_+ es cerrado basta darse cuenta que $H^2_+ = p_3^{-1}([0,1])$, donde $p_3(x,y,z) = z$. Ya que el conjunto es acotado (está incluido en la bola $B_2(0)$), es compacto. Como también es Hausdorff por ser un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, es localmente compacto.

La aplicación p es inyectiva, continua, su dominio es compacto y el codominio es Hausdorff. Por tanto es un embebimiento. En particular, $H^2_+ \cong p_3(H^2_+) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ejercicio 6.16 *Estudiar la compacidad y la compacidad local de los siguientes subconjuntos de* $\mathbb{R}$*:*

1. $A = \{\frac{n+2}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$.
2. $B = \{n; n \in \mathbb{N}\}$.
3. $C = \{(-1)^n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.
4. $D = \{\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$.

¿Existen sucesiones compactas en $\mathbb{R}$ *y que no sean convergentes?*

Solución: Las sucesiones convergentes junto con su límite son conjuntos cerrados y acotados, luego los conjuntos C y D son compactos (y por tanto son localmente compactos). Por otro lado, en $\mathbb{R}$, un conjunto es localmente compacto si es la intersección de un conjunto abierto y de uno cerrado.

El conjunto A no es compacto al no ser cerrado (A es una sucesión convergente pero no contiene a su límite). Sin embargo, A sí es localmente compacto, pues es la intersección de un cerrado y de un abierto: $A = (A \cup \{1\}) \cap (1,3)$.

El conjunto B no es acotado y por tanto, no es compacto. Sin embargo es localmente compacto, por ser un conjunto cerrado.

Por último, sí existen sucesiones compactas y no convergentes: la sucesión $A = \{(-1)^n; n \in \mathbb{N}\}$ no es convergente, pero es compacto, al ser A un conjunto finito: $A = \{-1, 1\}$.

Ejercicio 6.17 *Dar un ejemplo de un espacio topológico* (X,τ) *y de un subconjunto suyo* A *satisfaciendo:*

A no es compacto pero $\overline{A}$ sí lo es.

A es compacto pero $\overline{A}$ no lo es.

A es compacto y $\overset{\circ}{A}$ no lo es.

A no es compacto y $\overset{\circ}{A}$ sí lo es.

ión: 1. Tomamos $X = \mathbb{R}$ y $A = (0,1)$. Entonces $\overline{A} = [0,1]$.

Sea $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, con $p \notin \mathbb{R}$ y la topología $\tau^* = \tau \cup \{X\}$, donde τ es la topología usual de $\mathbb{R}$. Entonces $A = \mathbb{R}$ no es compacto, pero su adherencia es X, que sí es compacto.

3. Ahora tomamos $X = \mathbb{R}$ con su topología usual y $A = [0,1]$. Entonces $\overset{\circ}{A} = (0,1)$.

4. Sea $X = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{N}$. Entonces $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, el cual es compacto.

Ejercicio 6.18 *Se considera una aplicación continua $f : (X,d) \to (Y,d')$ entre dos espacios métricos donde el dominio es un espacio compacto. Probar que la aplicación es uniformemente continua.*

Solución: Decir que la aplicación es uniformemente continua significa que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,x') < \delta$, entonces $d'(f(x), f(x')) < \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$. Como f es una aplicación continua en cada punto $x \in X$, eligiendo $\epsilon/2$, existe $\delta_x > 0$ tal que si $d(x',x) < \delta_x$, entonces
$$d'(f(x'), f(x)) < \epsilon/2.$$

Se toma el recubrimiento de X formado por las bolas $\{B_{\delta_x}(x); x \in X\}$. Como X es un espacio compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$X = B_{\delta_1}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\delta_n}(x_n).$$

Sea $\delta > 0$ tal que
$$3\delta < \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n, d(x_i, x_j); i,j = 1, \ldots n, i \neq j\}.$$

Sean ahora $x, x' \in X$ tal que $d(x,x') < \delta$. Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in B_{\delta_i}(x_i)$ y $x' \in B_{\delta_j}(x_j)$. Afirmamos que $x_i = x_j$: en caso contrario,
$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &\leq d(x_i, x) + d(x, x') + d(x', x_j) \\ &< \delta_i + \delta + \delta_j \leq 3\delta, \end{aligned}$$

lo cual es falso. Por tanto $x_i = x_j$. Como consecuencia

$$d'(f(x), f(x_i)) < \frac{\epsilon}{2}, \quad d'(f(x'), f(x_i)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Usando la desigualdad triangular, $d'(f(x), f(x')) < \epsilon$.

Ejercicio 6.19 *Estudiar la compacidad y la compacidad local del espacio topológico* $([-1,1], \tau)$ *donde la topología* τ *viene dada por*

$$\tau = \{O \subset [-1,1]; 0 \notin O\} \cup \{O \subset [-1,1]; (-1,1) \subset O\}.$$

Solución: Sea $\{O_i; i \in I\}$ un recubrimiento por abiertos de $[-1,1]$ y sea O_{i_0} el abierto que contiene a 0. Entonces $O_{i_0} \supset (-1,1)$. Si O_{i_1} y O_{i_2} son los abiertos que contienen a 1 y -1 respectivamente, entonces $[-1,1] = O_{i_0} \cup O_{i_1} \cup O_{i_2}$. Véase el ejercicio 5.19 donde se probaba que este espacio era Lindelöff.

Por el mismo argumento, todo conjunto que contiene a 0 es compacto. Sea ahora $A \subset [-1,1]$ tal que $0 \notin A$. Si A es infinito, entonces no es compacto, ya que $A = \cup_{x \in A}\{x\}$ es un recubrimiento por abiertos y no se puede extraer uno finito. Concluimos, pues, diciendo que los conjuntos compactos de $[-1,1]$ son los conjuntos que contienen a 0 y los conjuntos finitos.

Veamos que es un espacio localmente compacto. Si $x \neq 0$, entonces $\{x\}$ es un abierto y este entorno es una base de entornos del punto x. Además es compacto (es finito). En el caso de que $x = 0$, cualquier base de entornos está formado por conjuntos compactos, al contener a 0.

Ejercicio 6.20 *Sea un espacio topológico* (X, τ) *y* $\beta' = \{\emptyset\} \cup \{O \in \tau; X \backslash O$ *es compacto en* $(X$ *Probar que* β *es base de una topología* τ' *tal que* $\tau' \subset \tau$. *Además* (X, τ') *es compacto.*

Solución: Es evidente que $X \in \tau'$, ya que $X \setminus X = \emptyset$, que es compacto. Sean ahora O_1 y O_2 elementos de β' y sea $x \in O_1 \cap O_2$. Entonces $X \setminus O_i$ es compacto, luego también $(X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2)$. Por tanto, $X \setminus (O_1 \cap O_2)$ es compacto, y así $O_1 \cap O_2 \in \beta'$.

Por la propia definición de β', es evidente que $\tau' \subset \tau$. Veamos ahora que (X, τ') es compacto. Sea $\{O_i; i \in I\}$ un recubrimiento de X por elementos de β'. Fijamos un abierto O_{i_0}. Entonces $\{O_i; i \in I, i \neq i_0\}$ es un recubrimiento por abiertos de τ del conjunto $X - O_{i_0}$, el cual es compacto. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal qeu $X - O_{i_0} \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$. Como consecuencia, $X = \cup_{k=0}^{n} O_{i_k}$.

Ejercicio 6.21 *Estudiar la compacidad, compacidad local y la compactificación de Alexandroff de la topología a derechas* τ_d *de* $\mathbb{R}$.

Solución: 1. Como $\{[x,\infty); x \in \mathbb{R}\}$ es un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{R}$, si hubiera un subrecubrimiento finito, entonces para algún $x \in \mathbb{R}$, se tendría $\mathbb{R} = [x,\infty)$, lo cual es falso. Esto prueba que el espacio no es compacto. Del mismo modo, cualquier conjunto no acotado inferiormente no es compacto. Por otro lado, si A es un conjunto acotado inferiormente se tiene que A es compacto si y sólo si tiene mínimo. Efectivamente, si $x = \min(A)$, dado cualquier recubrimiento por abiertos $\{[x_i,\infty); i \in I\}$ de A, alguno de estos abiertos debe tener a x: supongamos que $x \in [x_{i_0},\infty)$. Entonces $x_{i_0} \leq x$, y por tanto, $A \subset [x_{i_0},\infty)$. Si hubiera ínfimo pero no mínimo, entonces podemos escribir $A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}[x+\frac{1}{n},\infty)$. Si hubiera un subrecubrimiento finito, entonces existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset [x+\frac{1}{m},\infty)$, luego $x+\frac{1}{m} \leq \inf(A)$, lo cual es falso.

2. Como una base de entornos de x es $\beta_x = \{[x,\infty)\}$, entonces por el apartado anterior, este entorno es compacto. Por tanto, el espacio es localmente compacto.

3. La familia de cerrados es $\mathcal{F} = \{(-\infty,x),(-\infty,x]; x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset,\mathbb{R}\}$. Por el primer apartado, el único cerrado que es compacto es $\emptyset$. Esto nos dice que la compactificación de Alexandroff del espacio es $(\mathbb{R}^*,\tau^*)$, donde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ y $\tau^* = \tau_d \cup \{\mathbb{R}^*\}$.

Ejercicio 6.22 *Sea un conjunto X y $p \in X$ un punto fijo. Estudiar la compacidad y compacidad local de los siguientes espacios topológicos: (X,τ), (X,σ), donde*

$$\tau = \{O \subset X, p \in O\} \cup \{\emptyset\}, \qquad \sigma = \{O \subset X, p \notin O\} \cup \{X\}.$$

Solución: 1. Probamos que el espacio (X,τ) es compacto si y sólo si X es finito. Es evidente que si el espacio es finito, entonces es compacto. Por otra parte, supongamos que X es un espacio compacto. Para cada $x \in X$, se considera el conjunto abierto $O_x = \{x,p\}$. Sea ahora el recubrimiento por abiertos de X dado por $\{O_x; x \in X\}$. Ya que estamos suponiendo que el espacio es compacto, existe un subrecubrimiento finito, $\{O_{x_1},\ldots,O_{x_n}\}$. Por tanto, $X \subset \{x_1,\ldots,x_n,p\}$, es decir, es finito. De la misma forma que se ha hecho para X, se tiene que los únicos conjuntos compactos son aquéllos que son finitos.

Veamos que también es un espacio localmente compacto. Sea $x \in X$. Una base de entornos de x es $\beta_x = \{\{x,p\}\}$. Ya que es un conjunto finito, es compacto.

2. Consideramos un recubrimiento por abiertos $\{O_i; i \in I\}$ de (X,σ). Sea $i_0 \in I$, tal que $p \in O_{i_0}$. Entonces $O_{i_0} = X$ y éste es el subrecubrimiento finito de X que se está buscando. Por tanto el espacio es compacto. Usando el mismo razonamiento que antes, se tiene que todo conjunto que contiene a p es compacto. Por otro lado, si $A \subset X$ no contiene a p y es infinito, entonces A no es compacto, ya que si escribimos $A \subset \cup_{a\in A}\{a\}$, no se puede extraer un recubrimiento finito.

Este espacio también es localmente compacto: si $x \neq p$, entonces $\beta_x = \{\{x\}\}$ es una base de entornos y por ser finito, es compacto. Si $x = p$, el único entorno de p es X, el cual hemos probado que es compacto.

Ejercicio 6.23 *Sea un espacio topológico Hausdorff (X, τ). Probar que la intersección arbitraria de subconjuntos compactos es compacto.*

Solución: Sea $\{A_i; i \in I\}$ una familia de conjuntos compactos de X. Como X es Hausdorff, cada uno de los A_i es cerrado. Por tanto, $\cap_{i \in I} A_i$ es un conjunto cerrado. Como dicha intersección se encuentra incluida en cualquier A_i, que es un conjunto compacto, entonces es compacto.

Ejercicio 6.24 *Sea un espacio (X, τ) compacto y Hausdorff y sea C una componente conexa de X. Sea $x \in C$. Probar que*

$$C = \bigcap \{O \subset X; x \in O,\ O \textit{ es abierto y conexo}\} := K.$$

Solución: Sea O un abierto conexo que contiene a x. Probamos que $C \subset O$. En caso contrario, existe $y \in C$, $y \neq x$ tal que $y \notin O$. Entonces $C \cap O$ es un abierto de C y contiene a x. Por otra parte, $C \cap (X \setminus O)$ es un cerrado de X que contiene a y. Luego tenemos una partición no trivial por abiertos de C, a saber,

$$C = (C \cap O) \cup (C \cap (X \setminus O)),$$

llegando a una contradicción.

Probamos ahora que el conjunto K es conexo, y ya que C es el mayor conexo que contiene a x, $K \subset C$. Lo hacemos por reducción al absurdo. Si K no es un espacio conexo, existen dos cerrados de K, F_1 y F_2, que determinan una partición no trivial de K. Supongamos que $x \in F_1$. Como el espacio (X, τ) es compacto y Hausdorff, es normal, luego existen abiertos disjuntos G_1 y G_2, que separan a F_1 y F_2. Ya que $K \subset G_1 \cup G_2$,

$$X \setminus K \supset (X \setminus G_1) \cap (X \setminus G_2)$$

y $(X \setminus G_1) \cap (X \setminus G_2)$ es un conjunto compacto por ser un conjunto cerrado.

De la definición de K,

$$X \setminus K \subset \bigcup X \setminus O,$$

tal que O contiene a x y es abierto y conexo. Por tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(X \setminus G_1) \cap (X \setminus G_2) \subset (X \setminus O_1) \cup \ldots \cup (X \setminus O_n) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} O_i.$$

Se define $O = \bigcap_{i=1}^{n} O_i$. Por tanto, $F_1 \cup F_2 = K \subset O \subset G_1 \cup G_2$.

Ejercicio 6.25 *Sea un espacio topológico (X, τ) compacto, conexo y Hausdorff. Consideramos un subconjunto no trivial F que sea cerrado. Sea C una componente conexa de F. Probar que*

$$C \cap Fr(F) \neq \emptyset.$$

Solución: Supongamos que $C \cap \mathrm{Fr}(F) = \emptyset$ y sea $x \in C$. Del ejercicio anterior,

$$\mathrm{Fr}(F) \subset F \setminus C = \bigcup \{F \setminus O;\ O \text{ es abierto y cerrado en } F \text{ con } x \in C\}.$$

Como $\mathrm{Fr}(F)$ es un conjunto cerrado incluido en un compacto, también es un conjunto compacto. Por tanto,

$$\mathrm{Fr}(F) \subset (F \setminus O_1) \cup \ldots \cup (F \setminus O_n) = F \setminus \bigcap_{i=1}^{n} O_i,$$

donde O_i es un conjunto cerrado y abierto en F conteniendo a x. Sea $O = O_1 \cap \ldots \cap O_n$. Como O es un cerrado en F, es un cerrado en X. Por otra parte, ya que F es cerrado en X, $F = \mathrm{int}(F) \cup \mathrm{Fr}(F)$, luego

$$C \subset F \setminus \mathrm{Fr}(F) = \mathrm{int}(F).$$

Por tanto, C es un conjunto abierto en (X, τ). Ya que no es vacío y X es conexo, $C = X$, es decir, $F = X$, lo cual es falso.

Ejercicio 6.26 *(Teorema de Sierpinski) Sea X un espacio compacto, conexo y Hausdorff. Probar que no es posible encontrar una partición en cerrados disjuntos dos a dos $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, a no ser que todos los cerrados, salvo uno, sean vacíos.*

Solución: Hacemos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ es una partición por cerrados y sin perder generalidad, supongamos que todos son no vacíos y que al menos hay dos. Sea $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Ya que el espacio es normal, existen dos abiertos disjuntos O_1 y O_2 conteniendo respectivamente a F_1 y F_2. Entonces

$$F_2 \subset O_2 \subset \overline{O_2} \subset X \setminus F_1.$$

Sea C_1 una componente conexa de $\overline{O_2}$ tal que $C_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Como $\overline{O_2} \cap F_1 = \emptyset$, entonces $C_1 \cap F_1 = \emptyset$.

Consideramos ahora la familia de cerrados $\{C_1 \cap F_n; n \geq 2\}$. Esta familia constituye una partición por cerrados de C_1. Probamos que existe $n \geq 3$ tal que $C_1 \cap F_n \neq \emptyset$: en caso contrario,

$$C_1 \subset F_2 \subset O_2 \subset \overline{O_2}.$$

Del ejercicio anterior, $C_1 \cap \mathrm{Fr}(\overline{O_2}) \neq \emptyset$. Pero como $C_1 \subset O_2$, esto es imposible.

Sin perder generalidad, suponemos que $C_1 \cap F_3 \neq \emptyset$. Repitiendo el mismo proceso que se ha realizado al principio, existe un cerrado C_2, $C_2 \subset C_1$, tal que

$$C_2 \cap (C_1 \cap F_2) = \emptyset, \quad C_2 \cap (C_1 \cap F_3) \neq \emptyset.$$

En particular, $C_2 \cap F_2 = \emptyset$. Si repetimos este proceso, construimos por inducción una sucesión decreciente de compactos, $\{C_n; n \in \mathbb{N}\}$, tal que $C_n \cap F_n = \emptyset$. Por tanto,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset.$$

Si x es un punto en esta intersección, estará en algún F_n. Pero entonces, $x \in F_n \cap C_n$, llegando a una contradicción.

Ejercicio 6.27 *Sea (X, τ_1) un espacio localmente compacto y τ_2 una topología en X tal que $\tau_2 \subset \tau_1$. Estudiar si (X, τ_2) es localmente compacto.*

Solución: El espacio (X, τ_2) no tiene porqué ser localmente compacto. Como ejemplo, sea $X = \mathbb{R}$, τ_1 la topología discreta, que es localmente compacta y $\tau_2 = \tau_S$ la topología de Sorgenfrey, que no es localmente compacta.

Ejercicio 6.28 *Consideramos un espacio topológico (X, τ) tal que cada punto tiene una base de entornos cerrados y ninguno de ellos es compacto. Probar que (X, τ) no es un espacio localmente compacto. Aplicar este resultado a la recta de Sorgenfrey.*

Solución: Sea β_x la base de entornos cerrados y no compactos del punto $x \in X$. Si el espacio es localmente compacto, el punto x tiene un entorno compacto y que notaremos por U. Ya que β_x es base de entornos, sea $V \in \beta_x$ tal que $V \subset U$. Como V es un conjunto cerrado incluido en un espacio compacto, entonces V es compacto, llegando a una contradicción.

En la recta de Sorgenfrey, dado $x \in \mathbb{R}$, la familia $\beta_x = \{[x, y); y > x\}$ es una base de entornos cerrados y no compactos, luego la recta de Sorgenfrey no es localmente compacta.

Ejercicio 6.29 *Sea $X = \mathbb{N}$ y la topología dada por*

$$\tau = \{O \subset \mathbb{N};\ \textit{si } n \in O, \textit{ entonces todos sus divisores pertenecen a } O\}.$$

Estudiar la compacidad y compacidad local.

Solución: El espacio no es compacto, pero sí localmente compacto. Consideramos el recubrimiento por abiertos $\{U_n; n \in \mathbb{N}\}$, donde $U_n = \{$ todos los divisores de n $\}$. Es evidente que no se puede extraer un subrecubrimiento finito, ya que implicaría que $\mathbb{N}$ fuera un conjunto finito. Usando el mismo recubrimiento, se tiene que los conjuntos compactos del espacio son los conjuntos finitos.

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \{U_n\}$ es una base de entornos de n y como U_n es finito, es compacto. Por tanto el espacio es localmente compacto.

Ejercicio 6.30 *Consideramos un grupo topológico G y A y B dos subconjuntos suyos que son respectivamente cerrado y compacto. Probar que $AB = \{ab; A \in A, b \in B\}$ es un conjunto cerrado.*

Solución: Probamos que $G \setminus AB$ es un conjunto abierto. Sea $p \notin AB$. Entonces para cada $b \in B$, $pb^{-1} \notin A$. Ya que A es un cerrado y por ser G un grupo topológico, existen entornos U_b y V_b de p y b respectivamente, tales que $U_b V_b^{-1} \subset G \setminus A$. Ya que $\{V_b; b \in B\}$ es un recubrimiento del espacio compacto B, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset V_{b_1} \cup \ldots \cup V_{b_n}$.

Para finalizar el problema, probamos que el entorno de p dado por $U = U_{b_1} \cap \ldots \cap U_{b_n}$ está contenido en $G \setminus AB$. Lo hacemos por reducción al absurdo. Si $z \in U$ tal que $z \in AB$, entonces existe $b \in B$ y $a \in A$ tal que $zb^{-1} = a$. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $b \in V_{b_j}$. Entonces

$$a = zb^{-1} \in UV_{b_j}^{-1} \subset U_{b_j} V_{b_j}^{-1} \subset G \setminus A$$

da una contradicción.

Ejercicio 6.31 *Sea $X = [0,1) \cup [2,3)$. Calcular la compactificación de Alexandroff por un punto de X.*

Solución: El espacio X es homeomorfo al compacto $Y = [0,1) \cup (1,2]$. La compactificación por un punto de este espacio es el intervalo $[0,2]$: basta con elegir la inclusión $i : Y \to [0,2]$ y darse cuenta de que $[0,2] \setminus Y = \{1\}$.

Ejercicio 6.32 *Sean dos espacios homeomorfos X e Y y sea X^* una compactificación de X. Probar que también es una compactificación de Y. Dar un ejemplo de dos espacios no homeomorfos, Hausdorff, no compactos, localmente compactos, cuyas compactificaciones de Alexandroff sean homeomorfas.*

Solución:

1. Sea (X^*, f) una compactificación de X y sea $\phi : Y \to X$ un homeomorfismo. Entonces $(X^*, f \circ \phi : Y \to X^*)$ es una compactificación de Y, pues la composición de un homeomorfismo y un embebimiento es un embebimiento y por otra parte,
$$\overline{f \circ \phi(Y)} = \overline{f(X)} = X^*.$$
2. Sean $X = [0,1)$ e $Y = [0,1) \cup [2,3)$. Estos espacios no son homeomorfos, son Hausdorff, no compactos y localmente compactos. Por el ejercicio anterior, la compactificación de Alexandroff de cada uno de ellos es $[0,1]$ y $[0,2]$, los cuales son homeomorfos.

Ejercicio 6.33 *Sea $(\mathbb{R}, \tau_{CF})$ la recta real con la topología de los complementos finitos. Probar que este espacio es una compactificación de $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \tau_{CF})$ con la inclusión. Estudiar si también lo es de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ¿$\mathbb{R}$ es homeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$? ¿y a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$?*

Solución: 1. Consideramos la aplicación inclusión $i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Esta aplicación es un embebimiento, $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos es compacto y por último $\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$, o lo que es lo mismo, 0 es adherente a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: si $U = \mathbb{R} \setminus F$ es un entorno de 0, donde F es un conjunto finito, se obtiene

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap (\mathbb{R} \setminus F) = \mathbb{R} \setminus (F \cup \{0\}) \neq \emptyset.$$

2. El caso $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ es análogo, con la diferencia de que $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}} = \mathbb{R}$: si $n \in \mathbb{N}$ y $U = \mathbb{R} \setminus F$ es un entorno suyo,

$$(\mathbb{R} \setminus F) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup F) \neq \emptyset.$$

3. Los espacios $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{R} \setminus \{\mathbb{N}\}$ son homeomorfos a $\mathbb{R}$. Para ello basta recordar que cualquier subconjunto de un espacio con la topología de los complementos finitos tiene por topología inducida, la topología de los complementos finitos. También, que cualquier aplicación biyectiva entre dos espacios topológicos ambos con las topologías de los complementos finitos es un homeomorfismo (ejercicio 2.39). Por último, los conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ son biyectivos entre sí.

Ejercicio 6.34 *Hallar la compactificación de Alexandroff por un punto de* $\mathbb{N}$.

Solución: La compactificación de $\mathbb{N}$ es $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. Para ello, se define la aplicación $f : \mathbb{N} \to X$ mediante $f(x) = 1/x$. La aplicación $f : \mathbb{N} \to \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ es una aplicación biyectiva entre dos espacios con la topología discreta, luego es un homeomorfismo. Por otro lado, 0 es adherente a $\{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ y X es compacto al ser una sucesión convergente unión con su límite. Finalmente, $\mathbb{N}$ es un espacio no compacto, Hausdorff y localmente compacto, luego X es la compactificación de Alexandroff por un punto de $\mathbb{N}$.

Ejercicio 6.35 *Sea un espacio topológico* (X, τ) *Hausdorff, localmente compacto y no compacto. Sea* $((X', \tau'), f)$ *una compactificación Hausdorff de* (X, τ). *Entonces existe una aplicación continua y sobreyectiva* $g : X' \to X^*$ *tal que* $g \circ f = i$, *donde* (X^*, τ^*) *es la compactificación de Alexandroff de* (X, τ).

Solución: Probamos primero que $f(X)$ es abierto en X'. Ya que $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo, sabemos que $f(X)$ es localmente compacto. Además todo conjunto localmente compacto es un abierto relativo en su adherencia. Por tanto, $f(X)$ es un abierto relativo en $\overline{f(X)}$. Pero este espacio es X', luego $f(X) \in \tau'$.

Se define la aplicación $g : X' \to X^*$ mediante $g(f(x)) = x$, si $x \in X$ y $g(z) = \infty$ si $z \in X' \setminus f(X)$. Es evidente que $g \circ f = i$ y que es sobreyectiva.

bamos ahora que g es una aplicación continua. Sea A un abierto en X^*. Si $A \subset X$, onces $g^{-1}(A) = f(A)$. Como f es homeomorfismo sobre $f(X)$, $f(A)$ es abierto en $f(X)$ or tanto, abierto en X'. Sea ahora A un abierto de X^* conteniendo a ∞. Entonces

$$g^{-1}(X^* \setminus A) = X' \setminus g^{-1}(A) = f(X - (A \setminus \{\infty\})).$$

El conjunto $X^* \setminus A = X - (A \setminus \{\infty\})$ es un compacto de X, luego su imagen mediante f es un compacto. Como X' es Hausdorff, es un cerrado.

Ejercicio 6.36 *Se considera el espacio topológico $X = \mathbb{R} \cup \{p, q\}$, donde $p, q \notin \mathbb{R}$ cuya base es*

$$\beta = \{(a,b); a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{(-\infty, a) \cup \{p\}; a \in \mathbb{R}\} \cup \{(z, \infty) \cup \{q\}; a \in \mathbb{R}\}.$$

Probar X es una compactificación por dos puntos de $\mathbb{R}$ y que es equivalente a la compactificación de $\mathbb{R}$ dada por la aplicación $f : \mathbb{R} \cong (-1,1) \subset [-1,1]$.

Solución: Hay que observar que la topología inducida en $\mathbb{R}$, a saber, $\tau(\beta)_{|\mathbb{R}}$, es la topología usual. Además, los abiertos que contienen a p (resp. a q) contienen a conjuntos del segundo tipo (resp. tercer tipo).

1. El espacio (X, τ) es un espacio compacto, pues si $X = \cup_{i \in I} O_i$ es un recubrimiento por abierto de β, sean $i, j \in I$ tales que $p \in O_i$ y $q \in O_j$. Entonces existe $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $X = O_i \cup [a, b] \cup O_j$. Por tanto,

   $$[a,b] \subset \bigcup_{k \in I, k \neq i,j} O_k.$$

   El intervalo $[a, b]$ con la topología inducida es un compacto, ya que dicha topología es la topología usual. Por tanto existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tales que $[a,b] \subset O_{i_1} \ldots \cup \ldots O_{i_n}$, finalizando la prueba de que X es compacto.

   Se considera la inclusión $i : \mathbb{R} \to X$. Es claro que i es un embebimiento, pues $\tau(\beta)_{|\mathbb{R}}$ es la topología usual de $\mathbb{R}$. También es evidente que $\mathbb{R}$ es denso en X, ya que cualquier elemento de β que contiene a p o a q interseca a $\mathbb{R}$.

2. Se considera el homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = x/(1 + |x|)$. Se define $\phi : X \to [-1, 1]$ tal que $\phi_{|(-1,1)} = f$, $\phi(p) = -1$ y $\phi(q) = 1$. Es evidente que $\phi \circ i = f$. Para probar que ϕ es un homeomorfismo, consideramos la siguiente base de abiertos del intervalo $[-1, 1]$:

   $$\gamma = \{[-1, a); a \in (-1, 1]\} \cup \{(a, b); -1 < a < b < 1\} \cup \{(a, 1]; a \in [-1, 1)\}.$$

Entonces ϕ es una aplicación continua porque

$$\phi^{-1}([-1,a)) = \{p\} \cup (-\infty, f^{-1}(a)).$$
$$\phi^{-1}((a,b)) = (f^{-1}(a), f^{-1}(b)).$$
$$\phi^{-1}((a,1]) = \{q\} \cup (f^{-1}(a), \infty).$$

También es abierta, ya que

$$\phi(\{p\} \cup (-\infty, a)) = [-1, f(a)).$$
$$\phi(\{q\} \cup (a,\infty)) = f(a), 1].$$
$$\phi((a,b)) = (f(a), f(b)).$$

Ejercicio 6.37 *Sean dos espacios topológicos* (X,τ) *e* (Y,τ'). *Se consideran* $((X_1,\tau_1),f)$ *e* $((Y_1,\tau_1'),g)$ *dos compactificaciones de* X *e* Y *respectivamente. Probar que* $((X_1\times Y_1,\tau_1\times \tau_1'), f\times g)$ *es una compactificación de* $X\times Y$. *Si ambas son las compactificaciones de Alexandroff por un punto ¿* $X_1\times Y_1$ *es la compactificación de Alexandroff por un punto?*

Solución: La aplicación producto $f\times g : X\times Y \to X_1\times Y_1$ dada por

$$(f\times g)(x,y) = (f(x), g(y))$$

es un embebimiento, por ser producto de embebimientos. Por otra parte, $X_1\times Y_1$ es compacto por ser productos de dos espacios compactos. Por último

$$\overline{(f\times g)(X\times Y)} = \overline{f(X)\times g(Y)} = \overline{f(X)}\times\overline{g(Y)} = X_1\times Y_1.$$

La respuesta a la pregunta es no: el círculo $\mathbb{S}^1$ es la compactificación por un punto de $\mathbb{R}$, pero $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ no es una compactificación por *un punto* de $\mathbb{R}^2$: la compactificación por un punto de $\mathbb{R}^2$ es la esfera $\mathbb{S}^2$, que no es homeomorfa a $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$.

Ejercicio 6.38 *Calcular la compactificación de Alexandroff por un punto de la hipérbola* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2-y^2=1\}$.

Solución: Probamos que la compactificación pedida es el conjunto formado por dos circunferencias de $\mathbb{R}^2$ tangentes en un punto, por ejemplo, $Y = C_{-1}\cup C_1$, donde C_{-1} es la circunferencia de radio 1 centrada en $(-1,0)$ y C_1 la del mismo radio pero centrada en $(1,0)$.

Para ello, consideramos H^+ y H^- las dos ramas de la hipérbola. Cada una de ellas es homeomorfa a $\mathbb{R}$ por ser el grafo de las funciones $h_+(y)=\sqrt{1+y^2}$ y $h_-(y)=-\sqrt{1+y^2}$. Por tanto, cada rama de la hipérbola es homeomorfa a un círculos menos un punto. Tomamos f_+ y f_- homeomorfismos de H^+ y H^- en $C_1\setminus\{(0,0)\}$ y en $C_{-1}\setminus\{(0,0)\}$ respectivamente.

Definimos ahora $f : H \to Y$ de la siguiente forma

$$f(p) = \begin{cases} f_+(p) & p \in H^+ \\ f_-(p) & p \in H^- \end{cases}$$

La aplicación $f_+ : H^+ \to C_1 \setminus \{(0,0)\}$ es un homeomorfismo, y de forma análoga sucede con f_-. Por tanto, la aplicación f es un embebimiento, ya que H^+ y H^- son conjuntos abiertos en $H^+ \cup H^-$. La imagen es densa en $C_{-1} \cup C_1$, pues todo entorno de $(0,0)$ interseca de $C_{-1} \cup C_1 \setminus \{(0,0)\}$. Por otra parte, el conjunto Y es un conjunto compacto ya que es cerrado y acotado. Ya que Y es Hausdorff e $Y \setminus f(H) = \{(0,0)\}$, entonces Y es la compactificación pedida.

Ejercicio 6.39 *Calcular la compactificación de Alexandroff por un punto de $X = A \cup B$, donde $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$ y $B = \{(x,0,1); x \in \mathbb{R}\}$.*

Solución: Veamos que la compactificación es el conjunto $Y = \mathbb{S}^2 \cup C$, donde $C = \{(0,0,3) + (\{0\} \times \mathbb{S}^1)$. Primero sabemos que Y es compacto al ser unión de dos compactos (cerrados y acotados). Por otro lado, observemos que la compactificación de Alexandroff de A es $\mathbb{S}^2$ y la de B es $\mathbb{S}^1$, que es homeomorfo a C. Sean $f : A \to \mathbb{S}^2$ y $g : B \to C$ los respectivos embebimientos de forma que $\mathbb{S}^2 - f(A) = \{(0,0,1)$ y $C - g(B) = \{(0,0,1)\}$. Entonces definimos $h : X \to Y$ mediante $h(p) = f(p)$ si $p \in A$ y $h(p) = g(p)$ si $p \in B$. Es evidente que esta aplicación es continua ya que las restricciones a A y B (que son cerrados disjuntos en X) son continuas. Además, $Y - h(X) = \{(0,0,1)\}$, el cual es un punto adherente a $h(X)$.

apítulo 7

'opología cociente. dentificaciones

Ejercicio 7.1 *Sea una relación de equivalencia R en un espacio topológico (X,τ) y se considera la correspondiente aplicación proyección $p : (X,\tau) \to (X/R, \tau/R)$. Probar entonces que*

- *p es una aplicación abierta si y solamente si $R[O] \in \tau, \forall O \in \tau$.*
- *p es una aplicación cerrada si y solamente si $R[F] \in \mathcal{F}, \forall F \in \mathcal{F}$.*

Denotamos aquí por $R[A]$ la saturación de A, es decir,

$$R[A] = \{x \in X; xRa \text{ para cierto } a \in A\} = p^{-1}(p(A)).$$

Solución: La demostración se realiza para el primer apartado (el segundo se hace de forma análoga). Supongamos que p es una aplicación abierta y sea $O \in \tau$. Por ser abierta, $p(O)$ es un abierto en la topología cociente τ/R. Por definición de topología cociente, $p^{-1}(p(O))$ es un abierto de X. Pero $p^{-1}(p(O)) = R[O]$, que es un conjunto abierto por hipótesis.

Supongamos ahora que la saturación de cualquier conjunto abierto también es abierto y veamos que la proyección es abierta. Sea $O \in \tau$. Entonces $p(O) \in \tau/R$ si $p^{-1}(p(O)) \in \tau$: pero esto último es cierto pues $p^{-1}(p(O)) = R[O]$.

Ejercicio 7.2 *Se considera una aplicación $f : (X,\tau) \to Y$. Estudiar si la topología final en Y es la topología discreta (resp. trivial) si τ es la topología discreta (resp. trivial).*

Solución: Si τ es la topología discreta, entonces la topología final τ' también es la discreta pues dado cualquier subconjunto B de Y, $f^{-1}(B)$ es subconjunto de A, luego $f^{-1}(B) \in \tau$ y por tanto, $B \in \tau'$.

Sin embargo si τ es la topología trivial, entonces τ' no tiene porqué ser la trivial. Por ejemplo, dada cualquier aplicación constante, si $y \notin f(X)$, entonces $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, que es abierto. Por tanto, $\{y\} \in \tau'$. Esto quiere decir que τ' no es la topología trivial.

Ejercicio 7.3 *Sea $E : (\mathbb{R}, \tau_d) \to \mathbb{Z}$ la aplicación parte entera, donde τ_d es la topología a derechas. Hallar la topología final $\tau(f)$ en $\mathbb{Z}$.*

Solución: Sea $B \in \tau(f)$. Si $B = \{n\}$, entonces $E^{-1}(B) = [n, n+1)$ que no pertenece a τ_d. De forma más general, si $B \subset \mathbb{Z}$, $E^{-1}(B) = \cup_{n \in B}[n, n+1)$. Este conjunto es abierto si y solamente si B es de la forma $B = \mathbb{Z} \cap [x, \infty)$. Por tanto, la topología final es la topología a derechas de $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 7.4 *Obtener el cono $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 = x^2 + y^2\}$ como espacio cociente del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.*

Solución: Se define en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ la relación de equivalencia R que identifica a todos los puntos de la circunferencia $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Veamos que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})/R$ es homeomorfo al cono. Para ello se define la aplicación $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to C$ mediante

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (zx, zy, z) & \text{si } z \neq 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Esta aplicación está bien definida.

1. Veamos primero que R_f es la relación R. Supongamos que $(x, y, z)R(x', y', z')$. Si $z = 0$, entonces $z' = 0$ y por tanto sus imágenes mediante f coinciden.

   Por otro lado, si las imágenes de dos puntos (x, y, z) y (x', y', z') coinciden, caben entonces varias posibilidades: si la imagen es el origen, entonces los dos puntos están en $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ y por tanto, relacionados mediante R. Si no es el origen, entonces $(zx, zy, z) = (z'x', z'y', z')$. Se deduce de aquí que $z = z' \neq 0$ y por tanto, $x = x'$, $y = y'$, es decir los dos puntos coinciden.

2. La aplicación f es continua: el único problema de continuidad que se puede plantear es en los puntos de $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Sea pues $(x, y, 0) \in \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ y sea $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ una sucesión convergente a $(x, y, 0)$. En particular, esto implica que $|z_n| \to 0$. Entonces, para aquellos puntos cuya imagen no es el origen, se tiene

   $$|f(x_n, y_n, z_n)| = |z_n| \to 0.$$

   Por tanto $f(x_n, y_n, z_n) \to (0, 0, 0) = f(x, y, 0)$.

3. Veamos que la aplicación f es sobreyectiva: sea $(a, b, c) \in C$. Si este punto es el origen de coordenadas, entonces $f(1,0,0) = (0,0,0)$. Si no lo es, entonces $c \neq 0$ y por tanto, $a^2 + b^2 \neq 0$. En este caso

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, c\right) = (a, b, c).$$

4. La aplicación f es cerrada: se considera un cerrado F del cilindro y veamos que $f(F)$ también es un cerrado del cono C. Consideramos una sucesión $\{(x_n, y_n, z_n\} \subset F$ tal que $f(x_n, y_n, z_n) \to (a, b, c)$. Entonces $z_n \to c$. Distinguimos dos casos: si $c \neq 0$, entonces, a partir de un cierto lugar de la sucesión, $z_n \neq 0$, luego $\{(x_n, y_n, z_n)\} \cap (\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = \emptyset$. Ya que $(x_n, y_n) \in \mathbb{S}^1$ y la circunferencia es un compacto, existe una parcial convergente: $\{(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)})\} \to (a', b')$. Entonces

$$f(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}, z_{\sigma(n)}) \to (ca', cb', c) = (a, b, c).$$

Como $c \neq 0$, $a' = a/c$, $b' = b/c$, es decir, $(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) \to (a/c, b/c)$. Entonces $(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}, z_{\sigma(n)}) \to (a/c, b/c, c) \in F$ y su imagen, que es (a, b, c), pertenece al conjunto $f(F)$. En el caso de que $c = 0$, $\{(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)})\} \to (0,0)$. Por tanto, $(0,0,0) \in F$ y $f(0,0,0) = (0,0,0) \in f(F)$

Ejercicio 7.5 *Obtener la esfera $\mathbb{S}^2$ como espacio cociente del cilindro acotado $\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$.*

Solución: Se define en $\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$ la relación de equivalencia R que identifica entre sí todos los puntos de $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ y que también identifica entre sí todos los puntos de $\mathbb{S}^1 \times \{-1\}$. El resto de los puntos solamente están relacionados con ellos mismos. Veamos que $\mathbb{S}^1 \times [-1,1]/R$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

Se define la aplicación $f : \mathbb{S}^1 \times [-1,1] \to \mathbb{S}^2$ mediante

$$f(x, y, z) = \left(x\sqrt{1-z^2}, y\sqrt{1-z^2}, z\right).$$

Esta aplicación está bien definida, es continua y es sobreyectiva: $f(1,0,1) = (0,0,1)$, $f(1,0,-1) = (0,0,-1)$ y si $(a, b, c) \in \mathbb{S}^1 \times (-1,1)$, entonces

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{b}{\sqrt{1-c^2}}, c\right) = (a, b, c).$$

Por otra parte, la relación de equivalencia R coincide con la relación asociada a f, R_f: está claro que todos los puntos de $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ tienen como imagen el punto $(0,0,1)$ y que los puntos de $\mathbb{S}^1 \times \{-1\}$ tienen a $(0,0,-1)$ como imagen. Veamos ahora el recíproco. Sean $(x, y, z), (x', y', z')$ puntos del cilindro cuyas imágenes son iguales. Entonces si $z = 1$, los dos puntos se encuentran en $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$; si $z = -1$ los dos pertenecen a $\mathbb{S}^1 \times \{-1\}$; si $z \in (-1, 1)$, entonces $x = x'$ e $y = y'$.

Por último, f es una identificación ya que es sobreyectiva, continua, el espacio dominio es un espacio compacto y el codominio es Hausdorff. Por tanto, es una aplicación cerrada.

Ejercicio 7.6 *En el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ se define la siguiente relación de equivalencia:*

$$(t, s)R(t', s') \Longleftrightarrow t - t' \in \mathbb{Z}, \quad s = s'.$$

Probar que el espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Solución: Se define $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ mediante

$$f(t, s) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), s).$$

Es evidente que $R_f = R$. También es cierto que f es una aplicación continua y sobreyectiva. Veamos que f es una identificación probando que f es una aplicación abierta: consideramos la aplicación $g : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por $g(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Esta aplicación es abierta. Como la aplicación f coincide con $g \times 1_{\mathbb{R}}$, es una aplicación abierta al ser producto de dos aplicaciones abiertas.

Ejercicio 7.7 *Se considera el conjunto $[0, 1] \times \mathbb{R}$ y la relación de equivalencia R que identifica los puntos con las mismas ordenadas de las rectas $x = 0$ y $x = 1$. Probar que el espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.*

Solución: Se define la aplicación $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ como $f(t, s) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), s)$. Es evidente que esta aplicación es continua, sobreyectiva y la relación de equivalencia asociada R_f coincide con R. Veamos que f es una aplicación cerrada.

Se considera un cerrado $F \subset [0, 1] \times \mathbb{R}$ y (x, y, z) un punto adherente a $f(F)$. Existe una sucesión $\{(t_n, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ tal que $f(t_n, s_n) \to (x, y, z)$. Por tanto, $\{s_n\} \to z$. Ya que $\{t_n\} \subset [0, 1]$ y $[0, 1]$ es un conjunto compacto, existe $t \in [0, 1]$ y una parcial de la sucesión, $\{t_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, que converge a t. Por tanto

$$\{(t_{\sigma(n)}, s_{\sigma(n)}) \subset F \longrightarrow (t, z).$$

Entonces $(t, z) \in F$ al ser F un conjunto cerrado. Por unicidad del límite, $(x, y, z) = f(t, z) \in f(F)$.

Ejercicio 7.8 *Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Probar que el único entorno de 0 *en el espacio topológico* $([-1,1],\tau(f))$ *es el propio intervalo* $[-1,1]$.

Solución: Sea U un entorno de 0 en la topología $\tau(f)$. Ya que $f(0)=0$, $f^{-1}(U)$ es un entorno de 0 en $\mathbb{R}$. Entonces existe $\epsilon>0$ tal que $(-\epsilon,\epsilon)\subset f^{-1}(U)$. Así $f((-\epsilon,\epsilon))=[-1,1]\subset f(f^{-1}(U))\subset U$. Concluimos pues que $U=[-1,1]$.

Ejercicio 7.9 *En la recta real* $\mathbb{R}$ *se considera la relación de equivalencia* R *definida por* xRy *si y sólo si* $x=y$ *o* $x,y\in\mathbb{Q}$. *Probar que el espacio cociente no es un espacio regular.*

Solución: De la definición de la relación de equivalencia se tiene que si $A\subset\mathbb{R}$, entonces su saturación es

- $R[A]=A$, si $A\cap\mathbb{Q}=\emptyset$.
- $R[A]=A\cup\mathbb{Q}$, si $A\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$.

El conjunto $\{[\sqrt{2}]\}$ es un conjunto cerrado pues su imagen inversa mediante la proyección p es $\{\sqrt{2}\}$, el cual es cerrado en $\mathbb{R}$. Por otra parte, $[0]\notin\{[\sqrt{2}]\}$ ya que 0 y $\sqrt{2}$ no están relacionados. Si el espacio cociente fuera un espacio regular, existiría un entorno saturado U de 0 y un abierto saturado O conteniendo a $\{\sqrt{2}\}$ tal que $U\cap O=\emptyset$. Ya que O y U intersecan a $\mathbb{Q}$, y como U y O son saturados, $O,U\supset\mathbb{Q}$. Luego se intersecan y se llega a una contradicción.

Ejercicio 7.10 *Sea un espacio cociente* X/R. *Probar que* X/R *es compacto si y sólo si para cualquier recubrimiento de* X *por abiertos saturados, existe un subrecubrimiento finito.*

Solución: Supongamos que el espacio cociente es compacto y sea $\{O_i;i\in I\}$ un recubrimiento por abiertos saturados del espacio X, es decir, $X=\bigcup_{i\in I}O_i$. Aplicando p y ya que es sobreyectiva, se tiene

$$\frac{X}{R}=p\left(\cup_{i\in I}O_i\right)=\cup_{i\in I}p(O_i).$$

Ya que $p(O_i)\in\tau/R$ y X/R es un espacio compacto, existe un subrecubrimiento finito:

$$X/R=p(O_{i_1})\cup\ldots\cup p(O_{i_n})=p(O_{i_1}\cup\ldots\cup O_{i_n}).$$

Tomando imágenes inversas mediante p y ya que $p^{-1}(p(O_i))=R[O_i]=O_i$, se tiene lo pedido.

Probamos ahora el recíproco. Se considera $\{O'_i; i \in I\}$ un recubrimiento por abiertos de X/R. Entonces $O_i = p^{-1}(O'_i)$ es un abierto saturado y evidentemente $X = \cup_{i\in I} O_i$. Por hipótesis, existe un subrecubrimiento finito: $X = O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}$. Aplicando p, y como $p(O_i) = O'_i$, se tiene

$$\frac{X}{R} = p(O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_n}) = O'_{i_1} \cup \ldots \cup O'_{i_n},$$

como queríamos probar.

Ejercicio 7.11 *Aplicar el ejercicio anterior para estudiar la compacidad del espacio cociente X/R, donde $X = \mathbb{R}$ y R es la relación de equivalencia que identifica a todos los números enteros. Estudiar también si el espacio cociente es Hausdorff.*

Solución:

1. Probamos que el espacio cociente no es compacto. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, su saturación es A si no interseca a $\mathbb{Z}$ y es $A \cup \mathbb{Z}$ si lo interseca. Sea para cada $n \in \mathbb{Z}$ el conjunto $I_n = (n - 1/2, n + 1/2)$, que es un abierto en $\mathbb{R}$ y sea $A = \cup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$, que es un abierto saturado pues $A \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ y $R[A] = A \cup \mathbb{Z} = A$.

   Por otra parte, para cada entero $n \in \mathbb{Z}$ se considera el conjunto $O_n = (n, n+1)$. Entonces O_n es un abierto saturado. Finalmente la familia de abiertos saturados de $\mathbb{R}$ dada por $\{A\} \cup \{O_n; n \in \mathbb{Z}\}$ no tiene ningún subrecubrimento finito de $\mathbb{R}$.

2. Probamos que el espacio X/R es Hausdorff. Sean x, y dos números reales que no estén relacionados. Denotamos por $E(x)$ la parte entera de x. Caben dos posibilidades. Si ambos no son enteros, entonces los intervalos abiertos $(E(x), E(x+1))$ y $(E(y), E(y+1))$ son entornos saturados de x e y respectivamente ya que no interseca a $\mathbb{Z}$. Además son disjuntos entre sí.

   Si $x \notin \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$, tomamos un número $r > 0$ tal que $E(x) < E(x) + r < x < E(x+1) - r$. Entonces $U = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(n - r, n + r)$ es un entorno saturado de y, $V = (E(x) + r, E(x+1) - r)$ es un entorno saturado (no interseca a $\mathbb{Z}$) de x y $U \cap V = \emptyset$.

Ejercicio 7.12 *En el ejercicio anterior, estudiar si la aplicación proyección es abierta y cerrada.*

Solución: Para estudiar si es abierta, hay que probar que la saturación de todo abierto es un abierto. Pero esto es falso. Por ejemplo, la saturación del intervalo $(-1, 1)$ es $(-1, 1) \cup \mathbb{Z}$, que no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

Sin embargo sí es una aplicación cerrada: si F es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$, entonces su saturación es F (si no interseca a $\mathbb{Z}$) o es $F \cup \mathbb{Z}$ (si lo interseca). En este último caso, el conjunto $F \cup \mathbb{Z}$ es un conjunto cerrado al ser unión de dos cerrados.

Ejercicio 7.13 *Sea un espacio topológico (X,τ) y un homeomorfismo $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ que $f\circ f = 1_X$. Supongamos que X es un espacio regular. Se define la siguiente relación equivalencia:*

$$xRy \text{ si y sólo si} \begin{cases} x = y & \text{ó} \\ f(x) = y \end{cases}$$

obar que X/R es un espacio regular.

lución: De la propia definición de la relación de equivalencia, si $A\subset X$, su saturación $R[A] = A\cup f(A)$. Sea $x\in X$ y U un entorno saturado suyo. Para probar que el espacio ociente es regular, hay que encontrar un entorno cerrado y saturado de x, V, tal que $V\subset U$.

Ya que U es un entorno saturado de x, existe $O\in\tau$ tal que $x\in O\subset U$. Por tanto, $f(x)\in f(O)\subset f(U) = U$ y $f(O)$ es un abierto. Sea ahora $x\in O\cup f(O)$, donde O es un entorno de x. Como X es regular, existe un entorno cerrado G de x, tal que $G\subset O$. Al ser f un homeomorfismo, $f(G)$ es un conjunto cerrado. Por tanto elegimos $V = G\cup f(G)$, que también es cerrado. En tal caso,

$$V = G\cup f(G)\subset O\cup f(O) = U.$$

Ejercicio 7.14 *En $\mathbb{R}^n$ se considera la relación de equivalencia $(x_1,\ldots,x_n)R(y_1,\ldots,y_n)$ si $x_n = y_n$. Hallar el espacio cociente.*

Solución: Se define la aplicación $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $f(x_1,\ldots,x_n) = x_n$. Ya que f coincide con una aplicación proyección de un espacio producto, f es continua, sobreyectiva y abierta. Por tanto, f es una identificación. Además, $R_f = R$, luego $\mathbb{R}^n/R\cong\mathbb{R}$.

Ejercicio 7.15 *Sea X un espacio topológico. En $X\times\mathbb{R}$ se considera el conjunto $Y = (X\times\{0\})\cup(X\times\{1\})$ y la relación de equivalencia en Y dada por $(x,t)R(x',t')$ si $x = x'$. Probar que el espacio cociente Y/R es homeomorfo a X.*

Solución: Se define $f:Y\to X$ mediante $f(x,t) = x$. Es evidente que $R_f = R$ y que f es sobreyectiva. Por otro lado la aplicación es continua ya que $f = p_{1|Y}$, donde $p_1: X\times\mathbb{R}\to X$ es la proyección natural. La aplicación f tiene una inversa por la derecha, a saber, $g: X\to Y$, $g(x) = (x,0)$, que también es continua. Por tanto, f es una identificación y la aplicación $\bar{f}: Y/R\to X$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 7.16 *Sea $X = [-1,1]$ y R la relación de equivalencia determinada por la partición:*

$$\{\{-1\},\{1\},\{x,-x\}_{x\in(-1,1)}\}.$$

Probar que el espacio cociente X/R es T_1 pero no es Hausdorff.

Solución: 1. Si $x \in (-1,1)$, entonces su clase de equivalencia es $[x] = \{x, -x\}$, el cual es un conjunto cerrado en $[-1,1]$. Por otra parte, si $x = 1$ o $x = -1$, $[x] = \{x\}$, que también es un conjunto cerrado de $[-1,1]$.

2. Para probar que el espacio cociente no es Hausdorff, veamos que las clases de equivalencia $[-1]$ y $[1]$ no se pueden separar, es decir, no existen entornos saturados de -1 y 1 disjuntos: sean U y V dichos entornos. Entonces existe $\epsilon, \delta > 0$ tales que $[-1,-1+\epsilon) \subset U$ y $(1-\delta, 1] \subset V$. Ya que U y V son saturados,

$$[-1,-1+\epsilon) \cup (1-\epsilon, 1) \subset U.$$

$$(1-\delta, 1] \cup (-1,-1+\delta) \subset V.$$

Entonces

$$\Big([-1,-1+\epsilon) \cup (1-\epsilon,1)\Big) \cap \Big((1-\delta,1] \cup (-1,-1+\delta)\Big) \neq \emptyset$$

llegando a una contradicción.

Ejercicio 7.17 *Sea $A \subset X$ un conjunto cerrado de un espacio Hausdorff y R la relación de equivalencia que identifica todos los puntos de A. Probar que si X es regular entonces X/R es Hausdorff.*

Solución: La saturación de un conjunto B es B si $B \cap A = \emptyset$ y es $A \cup B$ si $A \cap B \neq \emptyset$.

Supongamos que X es un espacio regular. Sean $[x] \neq [y]$ y $x, y \notin A$. Ya que el espacio es regular y A es cerrado, existen entornos U y V de x e y que no intersecan a A. Por tanto, son saturados. Entonces $p(U)$ y $p(V)$ son entornos de $[x]$ e $[y]$ y son disjuntos.

Supongamos ahora que $a \in A$ y $[x] \neq [a]$. Entonces $x \notin A$. Por tanto existe un entorno U de x y un abierto O que contiene a A tal que $U \cap O = \emptyset$. Como $O \supset A$, su saturación es O. Por tanto, $p(O)$ es un abierto que contiene a $[a]$ y $p(U)$ un entorno de $[x]$ y no se intersecan.

Ejercicio 7.18 *Probar que la bola de radio 1, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 < 1\}$, no se puede obtener como espacio cociente de $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$.*

Solución: Cualquier espacio cociente de un espacio compacto es compacto. Ya que $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ es compacto al ser producto de espacios compactos, y la bola no lo es, ésta no se puede obtener como cociente del cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

Ejercicio 7.19 *Sea $X = [-1,2]$, $A = [-1,0] \cup [1,2]$ y R la relación que identifica a todos los puntos de A. Probar que el espacio cociente X/R es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.*

Solución: Se define $f : X \to [0,1]$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x \in [0,1] \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Esta aplicación es continua. Se considera la relación de equivalencia S en $[0,1]$ que identifica los extremos del intervalo. Entonces se tiene que xRy si y sólo si $f(x)Sf(y)$. Ya que f es una identificación (continua, sobreyectiva y cerrada), se tiene

$$\frac{X}{R} \cong \frac{[0,1]}{S} \cong \mathbb{S}^1.$$

También se podía haber probado que f es una identificación observando que la inclusión $i : [0,1] \to X$ es una aplicación continua e inversa por la derecha de f.

Ejercicio 7.20 *Sea $X = [0,2]$, $A = \{0,1,2\}$ y R la relación que identifica todos los puntos de A. Probar que X/R es homeomorfo a $C_1 \cup C_{-1}$, donde C_1 es la circunferencia de radio 1 centrada en $(1,0)$ y C_{-1} es la circunferencia de radio 1 centrada en $(-1,0)$.*

Solución: Se define $f : X \to C_1 \cup C_{-1}$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} (1,0) + (-\cos(2\pi x), -\sin(2\pi x)) & x \in [0,1] \\ (-1,0) + (\cos(2\pi(x-1)), \sin(2\pi(x-1)) & x \in [1,2] \end{cases}$$

Entonces $f([0,1]) = C_1$ y $f([1,2]) = C_{-1}$. Esta aplicación es continua, sobreyectiva y cerrada ya que el dominio es un conjunto compacto. Veamos que la relación R coinciden con R_f.

- Los puntos 0, 1 y 2 tienen la misma imagen: $f(0) = f(1) = f(-1) = (0,0)$.
- Si $f(x) = f(y)$, entonces o $x, y \in (0,1)$ y $x = y$, o $x, y \in (1,2)$ y de nuevo son iguales, o $f(x) = f(y) = (0,0)$ y entonces $x, y \in \{0,1,2\}$.

Ejercicio 7.21 *En la esfera $\mathbb{S}^2$ se considera la relación de equivalencia*

$$(x,y,z)R(x',y,z') \text{ si } z = z'.$$

Probar que $\mathbb{S}^2/R$ es homeomorfo al intervalo $[-1,1]$.

Solución: Se define $f : \mathbb{S}^2 \to [-1,1]$ mediante $f(x,y,z) = z$. Es evidente que $R_f = R$ y que f es continua y sobreyectiva. Como el dominio $\mathbb{S}^2$ es un espacio compacto y el codominio $[-1,1]$ es Hausdorff, la aplicación es cerrada. Por tanto f es una identificación y la aplicación inducida $\bar{f} : \mathbb{S}^2/R \to [-1,1]$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 7.22 *En $\mathbb{R}^n$ se define la relación de equivalencia xRy si $|x| = |y|$. Probar que $\mathbb{R}^n/R$ es homeomorfo a $[0,\infty)$.*

Solución: Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ mediante $f(x) = |x|$. Entonces $R_f = R$, la aplicación f es sobreyectiva y f es continua. Por otro lado, f tiene una inversa por la derecha, a saber, $i : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, $i(x) = x$. Por tanto f es una identificación, probado el resultado pedido.

Ejercicio 7.23 *Se define en $\mathbb{R}$ la siguiente relación de equivalencia:*

$$xRy \text{ si } \left\{ \begin{array}{c} x = y \text{ ó} \\ x, y \in [2n, 2n+1] \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Probar que $\mathbb{R}/R$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Solución: Se define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} n & \text{si } x \in [2n, 2n+1] \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \\ x - n - 1 & \text{si } x \in [2n+1, 2n+2] \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

donde $E(x)$ es la parte entera de x.

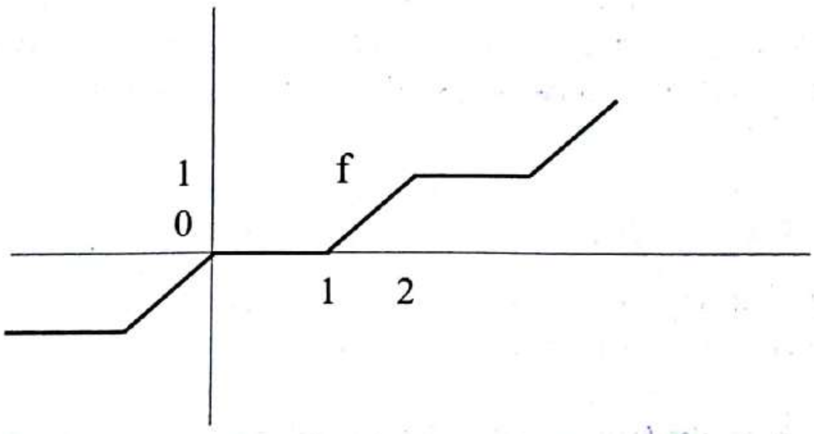

Figura 7.1: La función f del ejercicio 7.23

Esta aplicación es continua y sobreyectiva. Además, $R_f = R$. Probamos que f es una identificación demostrando que es cerrada (puede observarse que f no es abierta, pues $f((2,3)) = \{2\}$). Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$ y $x \in \overline{f(F)}$. Entonces existe $x_n \in F$ tal que $f(x_n) \to x$. Si x no es un número entero, entonces, a partir de un cierto lugar, x_n pertenece a un intervalo de la forma $[2k+1, 2k+2]$, donde $k = E(x)$. Entonces $x_n - k - 1 \to x$, es cir, $x_n \to x+k+1$. Por tanto, $x+k+1 \in F$. Como $x+k+1 \in [2k+1, 2k+2]$, entonces $(x+k+1) = (x+k+1) - k - 1 = x \in f(F)$.

pongamos ahora que $x \in \mathbb{Z}$. Entonces, a partir de un cierto lugar, x_n pertenecen a $x, 2x+1]$ o a $[2x-1, 2x]$. Si $x_n \in [2x, 2x+1]$, $f(x_n) = x$ y si $x_n \in [2x-1, 2x]$, $x_n) = x_n - x - 1$. Para los x_n del primer tipo, $x \in f(F)$. Para los del segundo tipo, $-x-1 \to x$, es decir, $x_n \to 2x+1$, y razonando como antes, $x \in f(F)$.

Ejercicio 7.24 *Probar que la aplicación proyección $p : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{RP}^1$ no es cerrada.*

Solución: Tomamos el cerrado de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ dado por $F = \{(x,y); xy = 1\}$. Entonces $p(F)$ no es cerrado en $\mathbb{RP}^1$ ya que

$$p^{-1}((F)) = \Big((0,\infty) \times (0,\infty)\Big) \cup \Big((-\infty,0) \times (-\infty,0)\Big),$$

que no es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ejercicio 7.25 *Se define en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación de equivalencia: $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ si*

$${x_1}^2 + {y_1}^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2.$$

Probar que el espacio cociente es homeomorfo a $[0,\infty)$.

Solución: Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ mediante $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Esta aplicación es continua y evidentemente $R_f = R$. Por otra parte, f tiene una aplicación inversa continua por la derecha, a saber: $s : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por $s(r) = (r, 0)$. Por tanto f es una identificación y

$$\frac{\mathbb{R}^2}{R} = \frac{\mathbb{R}^2}{R_f} \cong [0,\infty].$$

Ejercicio 7.26 *Se define en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación de equivalencia: $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ si*

$${x_1}^2 + y_1 = {x_2}^2 + y_2.$$

Identificar el espacio cociente con algún espacio conocido. Lo mismo, pero tomando $x_1^3 + y_1 = x_2^3 + y_2$.

Solución: Definimos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $f(x,y) = x^2 + y$. Es evidente que la relación de equivalencia asociada a dicha aplicación es justamente la relación del ejercicio. Asimismo, esta aplicación es continua y tiene una inversa continua por la derecha: $s(x) = (0, x)$. Por tanto el espacio cociente $\mathbb{R}^2/R$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Con la otra relación de equivalencia, la única diferencia está en elegir $f(x,y) = x^3 + y$ y el espacio cociente es de nuevo la recta real $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7.27 *Probar que la aplicación* $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^6$ *dada por*

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$$

induce un embebimiento del plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ *en un espacio euclídeo de dimensión* 5.

Solución: Sea R la relación de equivalencia en la esfera que identifica puntos antípodas. Entonces el espacio cociente $\mathbb{S}^2/R$ es el plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$. Veamos que $R = R_f$. Por un lado, es evidente que dos puntos antípodas de la esfera tienen la misma imagen. Supongamos ahora que $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{S}^2$ tienen la misma imagen mediante la aplicación f. Entonces

$$\begin{cases} x^2 = a^2, \ y^2 = b^2, \ z^2 = c^2 \\ xy = ab, \ xz = ac, \ yz = bc \end{cases}$$

Caben varias posibilidades:

1. $x = 0$. Entonces $a = 0$. Queda ahora

$$\begin{cases} y^2 = b^2, \ z^2 = c^2 \\ yz = bc. \end{cases}$$

   Si $y = 0$, entonces $b = 0$. Ya que los dos puntos están en la esfera, $z^2 = c^2 = 1$, luego

$$(x, y, z) = (0, 0, z), \quad (a, b, c) = (0, 0, c)$$

   con $z^2 = c^2$. Por tanto, los dos puntos son iguales o son antípodas.

   Si $z = 0$, se obtiene lo mismo (es simplemente cambiar el papel de y y b por z y c en el razonamiento anterior.)

   Si y y z no son nulos, entonces y es b o $-b$ y $z = c$ o $-c$. Pero de la segunda ecuación, las posibilidades son $y = b, z = c$ o $y = -b, z = -c$, luego los puntos están relacionados mediante la relación R.

2. Por simetría, podemos suponer que x, y y z no son nulos. Entonces a, b y c tampoco lo son. Entonces, de la segunda ecuación, sólo caben dos posibilidades: $(x, y, z) = (a, b, c)$ o $(x, y, z) = -(a, b, c)$, es decir, o son iguales o son antípodas.

Ya que la aplicación $f : \mathbb{S}^2 \to f(\mathbb{S}^2)$ es continua, sobreyectiva y cerrada ($\mathbb{S}^2$ es compacto), se tiene que f es una identificación y por tanto,

$$\frac{\mathbb{S}^2}{R} \cong f(\mathbb{S}^2).$$

Queda por probar que $f(\mathbb{S}^2)$ está incluido en un espacio euclídeo de dimensión 5. Pero esto es evidente, ya que

$$f(\mathbb{S}^2) \subset H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6; x_1 + x_2 + x_3 = 1\},$$

y H es un hiperplano de $\mathbb{R}^6$, y por tanto, homeomorfo a $\mathbb{R}^5$.

Ejercicio 7.28 *Se define en el intervalo* $X = [0, \infty)$ *una relación de equivalencia* R *dada por la siguiente partición:*

$$\left\{\{x, \frac{1}{x}\}; x \in (0, \infty)\right\} \cup \{0\}.$$

Consideramos el espacio cociente X/R. *Probar que dicho espacio es compacto y Hausdorff. Probar también que la aplicación proyección* $p : X \to X/R$ *no es una aplicación cerrada. Estudiar a qué espacio es homeomorfo* X/R.

Solución: 1. Ya que toda clase de equivalencia tiene un representante en el intervalo $[0, 1]$, entonces $X/R = p([0, 1])$. Por otro lado, como $[0, 1]$ es compacto y p es una aplicación continua, el espacio cociente es compacto.

2. Para probar que el espacio es Hausdorff, veamos primero que p es una aplicación abierta. Para ello consideramos una base de abiertos de X: $\beta = \{(a, b); 0 \leq a < b\} \cup \{[0, c), c > 0\}$. Es suficiente con probar que la saturación de cualquier elemento de β es abierto:

   $$R[(a, b)] = (a, b) \cup (\frac{1}{b}, \frac{1}{a}), \quad R[[0, c)] = [0, c) \cup (\frac{1}{c}, \infty).$$

   (si $a = 0$, $1/a = \infty$). Sea $[x] \neq [y]$, con $x, y \neq 0$. Sea $f(x) = 1/x$, $x > 0$, y esta aplicación es un homeomorfismo entre $(0, \infty)$ y $(0, \infty)$. Sean U y V entornos de x e y respectivamente tal que $U \cap (V \cup f(V)) = V \cap (U \cup f(U)) = \emptyset$. Entonces $U \cup f(U)$ y $V \cup f(V)$ son entornos saturados de x e y respectivamente con intersección vacía. Tomamos ahora $x = 0$ y $[x] \neq [y]$. De nuevo, sea U un entorno de y en $(0, \infty)$ y $r > 0$ un número suficientemente pequeño tal que $[0, r) \cup (1/r, \infty)$ no interseca a U ni a $f(U)$. Entonces $[0, r) \cup (1/r, \infty)$ y $U \cup f(U)$ son entornos de x e y que son saturados y disjuntos.

3. La aplicación proyección no es cerrada, pues la saturación del cerrado $[1, \infty)$ es $(0, \infty)$, que no es cerrado en X.

4. Se define $f : X \to [0, 1]$ mediante

   $$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x} & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

   Esta aplicación es continua, $R_f = R$ y tiene inversa por la derecha: $s(x) = x$. Por tanto f es una identificación y $X/R = X/R_f \cong [0, 1]$.

Ejercicio 7.29 *Sea* $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *y en* $\mathbb{R}^2$ *se considera la topología usual. Se define la relación de equivalencia* R_a *dada por*

$$x R_a y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } y = x + na.$$

Sea C_a el espacio cociente. Probar que si a, b son dos vectores no nulos, entonces C_a y C_b son homeomorfos. Probar que la proyección de $\mathbb{R}^2$ sobre el cociente C_a es abierta ¿A qué espacio conocido es homeomorfo C_a?

Solución: 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un isomorfismo de espacios vectoriales tal que $f(a) = f(b)$. Esta aplicación es un homeomorfismo. Supongamos que $x, y \in \mathbb{R}^2$ tal que $xR_a y$. Entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x + na$. Ya que f es un isomorfismo de espacios vectoriales, esto es equivalente a que

$$f(y) = f(x + na) = f(x) + nf(a) = f(x) + nb,$$

luego $f(x)R_b f(y)$. Entonces f induce un homeomorfismo entre los espacios cocientes C_a y C_b.

2. Sea O un abierto de $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$R[O] = p^{-1}(p(O)) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(O + na) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T_n(O),$$

donde T_n es la traslación de vector de traslación na, es decir, $T_n(x) = x + na$. Ya que T_n s un homeomorfismo, es una aplicación abierta. Por tanto, $R[O]$ es un abierto, por ser unión de abiertos.

3. Usando el primer apartado con $b = (1, 0)$ y ya que $C_b \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, los espacios cociente C_a son homeomorfos al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Ejercicio 7.30 *Sea $X = \{0\} \times [0, 1]$ e $Y = \{1\} \times [0, 1]$ e identificamos $(0, 0)$ con $(1, 0)$ y $(0, 1)$ con $(1, 1)$. Probar que el espacio cociente $(X \cup Y)/R$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.*

Solución: Definimos la aplicación $f : X \cup Y \to \mathbb{S}^1$ mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} (\cos(\pi y), \sin(\pi y)) & \text{si } (x, y) \in X \\ (\cos(\pi y), -\sin(\pi y)) & \text{si } (x, y) \in Y \end{cases}$$

Esta aplicación es sobreyectiva ya que $f(X) = \mathbb{S}^1 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$ y $f(Y) = \mathbb{S}^1 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0\}$. Ya que tanto X como Y son conjuntos cerrados en $X \cup Y$ y en cada uno de los cerrados, la aplicación es continua, entonces f es continua. Como el dominio es un espacio compacto, también es cerrada. Por tanto f es una identificación.

Para finalizar con el ejercicio, queda probar que la relación de equivalencia R coincide con R_f:

1. Si $(x, y)R_f(x', y')$, entonces sus imágenes coinciden. Si la imagen tiene ordenada positiva, entonces $(x, y), (x', y') \in X$ y por tanto, son iguales. Si la imagen tiene ordenada negativa, entonces $(x, y), (x', y') \in Y$, y de nuevo los puntos son iguales.

Si la imagen es $(1,0)$, entonces los puntos son iguales o uno es $(0,0)$ y otro $(1,0)$. Si la imagen es el punto $(-1,0)$, entonces uno de los puntos es $(0,1)$ y el otro $(1,1)$.

2. Por otra parte, si $(x,y)R(x',y')$, entonces si son iguales, las imágenes coinciden. Si $(x,y) = (0,0)$ y $(x',y') = (1,0)$, entonces la imagen es $(1,0)$. Por último, si $(x,y) = (0,1)$ y $(x',y') = (1,1)$, entonces la imagen es $(-1,0)$.

Ejercicio 7.31 *Sea* $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. *Se define una relación de equivalencia del siguiente modo:* $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$ *si son iguales o*

$$|\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}| = 1, \quad (x_2,y_2) = \lambda(x_1,y_1),\ \lambda > 0.$$

Probar que el espacio cociente es homeomorfo al toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Solución: En el conjunto $Y = \mathbb{S}^1 \times [1,2]$ definimos la relación de equivalencia producto S dada en $\mathbb{S}^1$ por la igualdad y en $[1,2]$ la que identifica los extremos. Sea $\phi : X \to Y$ el homeomorfismo

$$\phi(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2} \right).$$

Es evidente que esta aplicación respeta las relaciones de equivalencia R y S. Por tanto X/R es homeomorfo a Y/S, es decir,

$$\mathbb{S}^1 \times \frac{[1,2]}{\{1,2\}} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

Ejercicio 7.32 *En el disco* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ *se define la relación de equivalencia* $p\ R\ q$ *si son iguales o* $p, q \in \mathbb{S}^1$. *Probar que* $D/R \cong \mathbb{S}^2$.

Solución: Se define $f : D \to \mathbb{S}^2$ por

$$f(p) = \begin{cases} N = (0,0,1) & \text{si } |p| = 1 \\ \pi^{-1} \circ h(p) & \text{si } |p| < 1 \end{cases}$$

donde $h : D - \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $h(p) = \frac{p}{1-|p|}$ y $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ es la proyección estereográfica. Es evidente que $R_f = R$. Por otra parte, la aplicación f es cerrada, pues D es compacto y $\mathbb{S}^2$ es Hausdorff. Luego para probar que f es identificación es suficiente con probar que f es sobreyectiva y continua. La sobreyectidad es evidente. Para estudiar la continuidad, la hacemos punto a punto. Sea $p \in D - \mathbb{S}^1$. Entonces $f(p) = \pi^{-1} \circ h(p) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$. En el conjunto abierto $B_1(0)$, la aplicación f es continua pues coincide con $\pi^{-1} \circ h$, luego f es continua en p. Si el punto p pertenece a $\mathbb{S}^1$, consideramos $\{p_n\} \to p$. Si $p_n \in \mathbb{S}^1$, entonces $f(p_n) = N$; si $p_n \in B_1(0)$, entonces $\{|p_n|\} \to 1$, luego $\{h(p_n)\}$ converge a infinito y $\{f(p_n)\} \to N$.

Ejercicio 7.33 *En $\mathbb{R}^2$ se define la relación de equivalencia $p\ R\ q$ si son iguales o $|p|, |q| \geq 1$. Probar que $\mathbb{R}^2/R \cong \mathbb{S}^2$.*

Solución: Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to D$ mediante $f(p) = p$ si $p \in D$ y $f(p) = p/|p|$ si $|p| \geq 1$. Entonces es evidente que f es sobreyectiva, continua y tiene inversa por la derecha ($g(p) = p$). Por tanto f es una identificación. Consideramos en D la relación de equivalencia S dada por el ejercicio anterior. Es evidente que pRq si y sólo si $f(p)Sf(q)$. Por tanto, $\mathbb{R}^2/R$ es homeomorfo a D/S, es decir, a $\mathbb{S}^2$.

Ejercicio 7.34 *Sea H un subgrupo de un grupo topológico G y sean R y S las relaciones de equivalencias siguientes*

$$xRy \text{ si y sólo si } x^{-1}y \in H.$$

$$xSy \text{ si y sólo si } xy^{-1} \in H.$$

Probar que $(G/H, \tau/R)$ es homeomorfo a $(G/H, \tau/S)$.

Solución: Sea el homeomorfismo $f : G \to G$ dado por $f(x) = x^{-1}$. Es evidente que xRy si y sólo si $f(x)Sf(y)$, luego f induce el homeomorfismo entre los espacios cocientes que buscamos.

Ejercicio 7.35 *En un espacio topológico (X, τ) se define una relación de equivalencia R del siguiente modo: xRy si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Probar que el espacio cociente X/R es T_0.*

Solución: Es evidente que $[x] = \overline{\{x\}}$. Sean $[x] \neq [y]$. Entonces $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Supongamos que existe $z \in \overline{\{x\}} \setminus \overline{\{y\}}$. Entonces hay un abierto O que contiene a z tal que $O \cap \{x\} \neq \emptyset$, es decir, $x \in O$, e $y \notin O$. Como $O \subset R[O]$, $R[O]$ es un entorno de x, y por ser saturado, $V = p(R[O])$ es un entorno de $[x]$. Supongamos que $[y] \in V$. Entonces existe $w \in O$ tal que yRw, es decir, $w \in \overline{\{y\}}$. Por tanto, $O \cap \{y\} \neq \emptyset$, es decir, $y \in O$: contradicción. Por tanto, $[y] \notin V$, como se quería probar.

Ejercicio 7.36 *Sea $G = \{1_{\mathbb{R}^2}, S\}$, donde $S(x, y) = (x, -y)$. Se define la acción natural $G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*

$$(g, (x, y)) \longmapsto g(x, y)$$

con $g \in G$. Identificar el espacio de órbitas.

Solución: Veamos que el espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/G$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y); y \geq 0\}$. Para ello, se define la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2_+$ mediante $f(x, y) = (x, |y|)$. Esta aplicación es continua.

La relación asociada es la dada por el espacio de órbitas: sean (x,y), (x',y') dos puntos tales que $(x,y)R_G(x',y')$. Entonces $g(x,y)=(x',y')$. Si g es la identidad, entonces los dos puntos son iguales. Si $g=S$, entonces $y=-y'$ y $f(x,y)=f(x',y')$, es decir, $(x,y)R_f(x',y')$. Si ahora $f(x,y)=f(x',y')$, entonces $|y|=|y'|$ y $x=x'$. Entonces o los dos puntos son iguales, o $y=-y'$ y por tanto, $S(x,y)=(x',y')$.

Por otra parte, f tiene una aplicación inversa por la derecha: $s(x,y)=(x,y)$. Por tanto, f es una identificación.

Ejercicio 7.37 *Sea $G=\{T_a; a\in\mathbb{R}\}$, donde T_a es la aplicación $T_a(x,y)=(x+a,y)$. Demostrar que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/G$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Solución: Se define la aplicación $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mediante $f(x,y)=y$. Ya que es una proyección, esta aplicación es continua, sobreyectiva y abierta, luego es una identificación.

Veamos ahora que $R_f=R_G$: si $(x_1,y_1)R_G(x_2,y_2)$, existe $a\in\mathbb{R}$ tal que $x_1+a=x_2$ e $y_1=y_2$. Ya que la primera condición es evidente, la relación R_G es equivalente a que las segundas coordenadas sean iguales, es decir, es justamente la relación R_f.

Ejercicio 7.38 *Se considera el grupo*

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix};\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Se define la acción natural $G\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de la forma $(A,x)\longmapsto Ax$. Identificar el espacio de órbitas.

Solución: Estudiamos la relación de equivalencia definida por G: si $(x,y)R(x',y')$, entonces existe una matriz $A\in G$ tal que $A(x,y)=(x',y')$, es decir, existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $x+\lambda y=x'$ e $y=y'$. Esto es equivalente a que $y=y'$. Del ejercicio anterior, el espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7.39 *Sea un grupo topológico G y H un subgrupo suyo. Entonces G/H tiene la topología discreta si y sólo si H es un abierto de G.*

Solución: Supongamos que la topología cociente en G/H es la discreta. Entonces $[e]\in G/H$ es un abierto, donde e es el elemento neutro de G. Por tanto, $p^{-1}([e])$ es un abierto. Pero dicho conjunto es H.

Supongamos ahora que H es abierto y veamos que todo punto del cociente G/H es abierto: sea $[x]\in G/H$. Entonces será abierto si $p^{-1}([x])=xH$ es abierto en G. Pero $xH=l_x(H)$, donde l_x es la traslación a izquierda que es un homeomorfismo y H es abierto.

Ejercicio 7.40 *Sea* $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *y* $\phi_a : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\phi_a(n,p) = p + na.$$

Probar que es una acción topológica y que el espacio de órbitas es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Solución: Estudiamos la relación de equivalencia. Sea $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$ tales que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi_a(n,p) = p + na = q$. Entonces la relación de equivalencia es la dada por R_a del ejercicio 7.29. Luego el espacio cociente es homeomorfo al cilindro.

Ejercicio 7.41 *Se considera ahora el grupo generado por* $\{T_1, T_2\}$, *donde* T_1 *es la traslación de vector de traslación* $(1,0)$ *y* T_2 *con vector* $(0,1)$. *Haciendo actuar este grupo sobre el plano* $\mathbb{R}^2$, *probar que el espacio de órbitas es el toro* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Solución: Sean $(x', y'), (x, y)$ relacionados por la relación de la acción. Entonces existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que

$$(x', y') = T_1^n \circ T_2^m(x, y) = (x + n, y + m).$$

Esto quiere decir que $x' - x \in \mathbb{Z}$ e $y' - y \in \mathbb{Z}$. Es conocido entonces que el espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, es decir, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejercicio 7.42 *Sea* $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la reflexión respecto del plano* $\{z = 0\}$. *Se hace actuar el grupo* $G = \{1_{\mathbb{R}^3}, R\}$ *sobre la esfera* $\mathbb{S}^2$. *Probar que el espacio de órbitas es homeomorfo al disco* $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución: Sea $\mathbb{S}^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2; z \geq 0\}$. Se define la aplicación $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2_+$ por $f(x,y,z) = (x, y, |z|)$. Esta aplicación es continua y sobreyectiva. Además R_f es la relación del espacio de órbitas. Ya que el dominio es un espacio compacto y el codominio es Hausdorff, esta aplicación es una identificación.

Capítulo 8

Grupo fundamental

Ejercicio 8.1 *Dar un ejemplo de una aplicación continua inyectiva $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ (resp. sobreyectiva) tal que $f_* : \pi(X) \to \pi(Y)$ no es inyectiva (resp. sobreyectiva).*

Solución: Se considera la aplicación inclusión $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Esta aplicación es inyectiva, pero $i_* : \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \to \pi(\mathbb{R}^2) = \{1\}$ no puede ser inyectiva.

Por otro lado, la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida mediante $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$ es sobreyectiva, pero $f_* : \pi(\mathbb{R}) = \{1\} \to \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ no puede ser sobreyectiva.

Ejercicio 8.2 *Se considera $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y en $\mathbb{C}$ el producto de números complejos. Se define la aplicación $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ por $f(z) = z^n$, donde $n \in \mathbb{Z}$. Describir la aplicación $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ entre los grupos fundamentales.*

Solución: Sea $\phi : \pi(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{Z}$ el isomorfismo entre dichos grupos. Se considera una lazo $\alpha \in \Omega_1$, y $\tilde{\alpha}$ el único levantamiento de α tal que $\tilde{\alpha}(0) = 0$. Sea $m \in \mathbb{Z}$ y $\alpha(t) = (\cos(2\pi mt), \sin(2\pi mt))$, $t \in [0,1]$ un lazo con punto base $(1,0)$. Entonces $\tilde{\alpha}(t) = mt$ es un arco continuo en $\mathbb{R}$ tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ y $\tilde{\alpha}(0) = 0$. Por tanto, $\tilde{\alpha}$ es el levantamiento del lazo α. Luego $\phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) = m$. Por la definición de f_*,

$$f_*(m) = \phi([f \circ \alpha]) = \phi([(\cos(2\pi mnt), \sin(2\pi mnt))]) = mn,$$

es decir, $f_*(m) = mn$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 8.3 *Se considera el disco unidad $D = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1\}$. Se define el siguiente subconjunto:*

$$A = \{x \in D; D \setminus \{x\} \text{ es simplemente conexo }\}.$$

Probar que $A = \mathbb{S}^1$.

Solución: Es evidente que $\mathbb{S}^1 \subset A$, pues si $x \in \mathbb{S}^1$, el conjunto $D \setminus \{x\}$ es un conjunto convexo y por tanto es simplemente conexo.

Supongamos ahora que $a \in A$, pero $a \notin \mathbb{S}^1$. Se define una retracción r del conjunto $D \setminus \{a\}$ en $\mathbb{S}^1$ de la siguiente forma: $r(x)$ es el punto de intersección de la semirrecta que parte del punto a y pasa por x con la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Observemos que, por hipótesis, $\mathbb{S}^1 \subset D \setminus \{a\}$.

Por otra parte, la aplicación r es continua. Esto se obtiene de hallar explícitamente la aplicación r. Exactamente, $r(x) = a + \lambda(x - a) \in \mathbb{S}^1$, donde $\lambda = \lambda(x) > 0$. Entonces $|a + \lambda(x - a)|^2 = 1$ implica

$$\lambda(x) = \frac{\langle a, x - a\rangle + \sqrt{\langle a, x - a\rangle^2 - |x - a|^2(|a|^2 - 1)}}{|x - a|^2}.$$

Ya que la expresión de $\lambda(x)$ es continua en x, lo mismo sucede para la aplicación r. Además para cada $x \in \mathbb{S}^1$, $r(x) = x$. Por tanto $r_* : \pi(D \setminus \{a\}) \to \pi(\mathbb{S}^1)$ es una aplicación sobreyectiva, lo cual es falso, pues el grupo fundamental de $D \setminus \{a\}$ es trivial y el de $\mathbb{S}^1$ es $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 8.4 *Sea $f : D \to D$ un homeomorfismo del disco unidad de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo. Probar que $f(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.*

Solución: Ya que la aplicación f es un homeomorfismo, la aplicación inducida $f_* : \pi(D) \to \pi(D)$ es un isomorfismo entre los grupos fundamentales. Supongamos por reducción al absurdo, que existe $a \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(a) \notin \mathbb{S}^1$. Entonces $f_* : \pi(D \setminus \{a\}) \to \pi(D \setminus \{f(a)\})$ también es un isomorfismo de grupos. Sin embargo, $\pi(D \setminus \{a\})$ es el grupo trivial por ser $D \setminus \{a\}$ un conjunto convexo; por otro lado, $\pi(D \setminus f(a)) = \mathbb{Z}$ por el ejercicio anterior. Se llega así a una contradicción. Se concluye por tanto que $f(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{S}^1$.

Razonando con la aplicación inversa de f, f^{-1}, se llega a que $f^{-1}(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{S}^1$ y de esta forma se obtiene la igualdad $f(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$ deseada.

Ejercicio 8.5 *Se considera un homeomorfismo $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos y A un retracto fuerte de deformación del espacio X. Probar que $f(A)$ es un retracto fuerte de deformación de Y.*

Solución: Sea una retracción $r : X \to A$ de X en A y $F : X \times I \to X$ la deformación. Para probar que $f(A)$ es un retracto de Y se define la aplicación $s = f \circ r \circ f^{-1} : Y \to f(A)$. Esta aplicación es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Por otro lado, si $a \in A$, $s(f(a)) = f(r(a)) = f(a)$. Por tanto, $s_{|f(A)}$ es la aplicación identidad de $f(A)$.

Se define ahora la aplicación $G : Y \times I \to Y$ mediante:

$$G(y, t) = f \circ F(f^{-1}(y), t).$$

Entonces G es una aplicación continua y satisface las siguientes propiedades:

- $G(y,0) = f \circ F(f^{-1}(y),0) = ff^{-1}(y) = y$.
- $G(y,1) = f \circ F(f^{-1}(y),1) = frf^{-1}(y) = s(y)$.
- Si $a \in A$, $G(f(a),t) = f \circ F(a,t) = f(a)$.

Por tanto, G es una deformación de Y en $f(A)$.

Ejercicio 8.6 *Se considera un espacio topológico (X,τ) y dos subconjuntos suyos A y B tales que $A \subset B$. Probar que si A es un retracto (resp. retracto de deformación fuerte) de B y B es un retracto (resp. retracto de deformación fuerte) de X, entonces A es un retracto (resp. retracto de deformación fuerte) de X.*

Solución:

1. Denotamos por r y s las correspondientes retracciones $s : B \to A$ y $r : X \to B$. Para probar que A es un retracto de X se define la aplicación $s \circ r$ de X en A. Esta aplicación es continua y si se restringe al conjunto A, es la identidad ya que si $a \in A$, por ser A subconjunto de B, $r(a) = a$.

2. Supongamos ahora que tenemos retractos fuertes de deformación. Sean $G : B \times I \to B$ y $F : X \times I \to X$ y las correspondientes deformaciones. Se define $H : X \times I \to X$ de la siguiente forma:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & t \leq \frac{1}{2} \\ G(r(x),2t-1), & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

En la definición de H no hay ningún problema en el punto $t = \frac{1}{2}$, ya que $F(x,1) = r(x)$ y $G(r(x),0) = r(x)$. Por tanto esta aplicación continua. Además se tiene las siguientes propiedades

- $H(x,0) = F(x,0) = x$.
- $H(x,1) = G(r(x),1) = s \circ r(x)$.
- Si $a \in A$, $H(a,t) = \begin{cases} F(a,2t) = a, & t \leq \frac{1}{2} \\ G(r(a),2t-1) = r(a) = a, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Ejercicio 8.7 *Se considera un espacio topológico X, y A y B dos subconjuntos abiertos (o dos cerrados) tales que $X = A \cup B$. Supongamos que B se deforma fuertemente a $A \cap B$. Probar que X se deforma fuertemente a A.*

Solución: La solución se hace asumiendo que ambos subconjuntos son abiertos (de forma análoga se hace si son cerrados). Se considera una retracción fuerte $r : B \to A \cap B$ y $F : B \times I \to A \cap B$ la correspondiente deformación. Se define la aplicación $s : X \to A$ de la siguiente forma:

$$s(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ r(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Esta aplicación está bien definida pues si $x \in A \cap B$, entonces $r(x) = x$. Por otra lado, la aplicación s está definida en dos abiertos y en cada uno de ellos la aplicación es continua. Por tanto s es una aplicación continua. Por último, es evidente que $s_{|A} = 1_A$.

Definimos ahora la aplicación $G : X \times I \to X$ mediante

$$G(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ F(x,t) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Veamos que G es la deformación buscada de X en A. De nuevo esta aplicación está bien definida, pues si $x \in A \cap B$, $F(x,1) = r(x) = x$. Un razonamiento análogo que se hizo para s prueba que esta aplicación es continua. Veamos por último que satisface las propiedades de toda deformación:

- $G(x,0) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ F(x,0) = x & \text{si } x \in B \end{cases} = x$
- $G(x,1) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ F(x,1) = r(x) & \text{si } x \in B \end{cases} = s(x)$
- $G(a,t) = a$ si $a \in A$.

Ejercicio 8.8 *Se consideran A y B retractos (resp. retractos fuertes de deformación) de sendos espacios X e Y respectivamente. Probar que $A \times B$ es un retracto (resp. retracto fuerte de deformación) de $X \times Y$.*

Solución: Si $r : X \to A$ y $s : Y \to B$ son retracciones, es evidente que $r \times s : X \times Y \to A \times B$ es una retracción.

Supongamos además que $F : X \times I \to X$ y $G : Y \times I \to Y$ son deformaciones fuertes de X en A y de Y en B respectivamente. Entonces la aplicación $H : (X \times Y) \times I \to X \times Y$ definida por $H(x,y,t) = (F(x,t), G(y,t))$ es una deformación fuerte de $X \times Y$ en $A \times B$. La continuidad es evidente, pues si $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ denotan las respectivas proyecciones en cada uno de los factores, entonces $p_1 \circ H = F$ y $p_2 \circ H = G$, que son continuas.

Por otra parte, $H(x, y, 0) = (F(x, 0), G(y, 0)) = (x, y)$, para $(x, y) \in X \times Y$. También se tiene que

$$H(x, y, 1) = (F(x, 1), G(y, 1)) = (r(x), s(y)) = (r \times s)(x, y).$$

Por último, si $(a, b) \in A \times B$, entonces $H(a, b, t) = F(a, t), G(b, t)) = (a, b)$.

Ejercicio 8.9 *Sea $x_0 \in \mathbb{S}^1$. Probar que $\mathbb{S}^1 \times \{x_0\}$ es un retracto de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ pero no es un retracto fuerte de deformación.*

Solución: Se define la siguiente aplicación $r : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \{x_0\}$:

$$r(x, y) = (x, x_0).$$

Es evidente que esta aplicación es continua y que la restricción de r a $\mathbb{S}^1 \times \{x_0\}$ es la identidad. Por tanto, r es una retracción.

Sin embargo, el conjunto $\mathbb{S}^1 \times \{x_0\}$ no puede ser un retracto fuerte del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, pues en tal caso, los grupos fundamentales serían iguales, lo cual es falso: el grupo fundamental del toro es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y el del $\mathbb{S}^1 \times \{x_0\}$ es $\mathbb{Z} \times \{1\} \cong \mathbb{Z}$.

Ejercicio 8.10 *Calcular el grupo fundamental de los siguientes espacios topológicos (con la topología usual inducida del correspondiente espacio euclídeo):*

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$.
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\}$.
4. $\mathbb{S}^2 \cup \{(0, 1, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}\}$.
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.
6. $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.
7. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(0, y, 0); y \in \mathbb{R}\}$.
8. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}$.
9. *Dos esferas tangentes en* $\mathbb{R}^3$.
10. $\mathbb{S}^2 \cup \{(x, 1, z); x, z \in \mathbb{R}\}$.
11. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\} \cup (\{0\} \times \mathbb{S}^1)$.
12. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 \leq 1\}$.

13. $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

Solución: 1. El espacio considerado es el espacio topológico producto $D \times \mathbb{R}$, donde D es el disco unidad del plano. Luego su grupo fundamental es el producto de los grupos fundamentales de cada uno de sus factores, y por tanto, es trivial.

2. El conjunto considerado es el espacio producto $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ y por tanto su grupo fundamental es $\mathbb{Z}$.

3. El conjunto es homeomorfo a D, luego es simplemente conexo.

4. Si $A = \{x = 0, y = 1\}$, entonces el punto $(0, 1, 0)$ es un retracto fuerte de deformación de A. Ya que dicho punto pertenece a $\mathbb{S}^2$, entonces $\mathbb{S}^2$ es un retracto fuerte de deformación del espacio, luego éste es simplemente conexo.

5. El conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ tiene como retracto fuerte de deformación al disco $D = \{(x, y, 0); x^2 + y^2 \leq 1\}$, el cual está contenido en el primer conjunto del espacio. Luego éste tiene como retracto fuerte de deformación al conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq 1\}$. El primer espacio de este ejercicio, el espacio es simplemente conexo.

6. El cilindro tiene como retracto fuerte de deformación la circuferencia $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$, la cual está contenida en el plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$. Luego el espacio tiene como retracto fuerte de deformación el plano $\{z = 0\}$. Por tanto, el grupo fundamental es trivial.

7. La recta $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, z = 0\}$ tiene como retracto fuerte de deformación el origen de coordenadas, que pertenece al conjunto $x^2 + y^2 \leq 1$. Luego $x^2 + y^2 \leq 1$ es un retracto fuerte de deformación del espacio y éste es simplemente conexo.

8. El conjunto es una corona circular, concretamente $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2\}$. Ya que esta corona es homeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times (1, \infty)$, el grupo fundamental es $\mathbb{Z}$.

9. Sea $X = A \cup B$ dos esferas tangentes en un punto q y sean $a \in A$ y $b \in B$ los puntos antípodas del punto q en cada una de las esferas. Consideramos los abiertos $U_1 = X \setminus \{a\}$ y $U_2 = X \setminus \{b\}$. Probamos que estos dos conjuntos son simplemente conexos. Basta considerar por ejemplo U_1. El conjunto $A \setminus \{a\}$ es homeomorfo al plano $\mathbb{R}^2$ y el punto q es un retracto fuerte de deformación de $A \setminus \{a\}$. Ya que $q \in B$, el conjunto B es un retracto fuerte de deformación de $X \setminus \{a\}$.

   Además, la intersección $U_1 \cap U_2 = X \setminus \{a, b\}$ es un conjunto arcoconexo, ya que es igual a $(A_{\{}a\}) \cup (B \setminus \{b\}$. Aplicando el teorema de Seifert-Van Kampen, el espacio X es simplemente conexo.

10. El plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 1\}$ tiene como retracto fuerte de deformación al punto $(0, 1, 0)$, el cual pertenece a $\mathbb{S}^2$. Por tanto, el grupo fundamental del espacio es el de $\mathbb{S}^2$, es decir, trivial.

11. El conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1, z \leq 0\}$ es homeomorfo al disco, luego es simplemente conexo. Un retracto fuerte de A es $B = \{(0,y,z); y^2+z^2 = 1, z \leq 0\}$. Ya que $B \subset \{0\} \times \mathbb{S}^1$, este conjunto es un retracto fuerte, luego el grupo fundamental del espacio es el de $\{0\} \times \mathbb{S}^1$, es decir, $\mathbb{Z}$.

12. El conjunto es estrellado desde el origen: si (x,y,z) pertenece al conjunto, también sucede con $t(x,y,z)$ ya que $(tx)^2+(ty)^2 = t^2(x^2+y^2) \leq 1$ o $(tx)^2+(tz)^2 = t^2(x^2+z^2) \leq 1$.

13. El conjunto es estrellado desde el origen de coordenadas, luego su grupo fundamental es trivial.

Ejercicio 8.11 *Se considera un lazo $\alpha(t) : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ con punto base en 1, es decir, $\alpha(0) = 1$. Supongamos que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ donde x, y son funciones diferenciables. Probar que el grado de α, $d(\alpha)$, es*

$$d(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt,$$

donde x', y' son, respectivamente, las derivadas respecto de t de las funciones $x(t), y(t)$.

Solución: Se considera el levantamiento $\tilde{\alpha}$ del lazo α. Ya que la aplicación $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, definida por $p(t) = (\cos(t), \sin(t))$ es un difeomorfismo local, $\tilde{\alpha}$ es una aplicación diferenciable. Entonces

$$(x(t), y(t)) = (\cos(2\pi\tilde{\alpha}(t)), \sin(2\pi\tilde{\alpha}(t))).$$

Derivando respecto de la variable t, se tiene que

$$x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = 2\pi\tilde{\alpha}'(t).$$

Del concepto de grado, tenemos

$$d(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = \int_0^1 \tilde{\alpha}'(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{d}{dt}2\pi\tilde{\alpha}'(t)dt.$$

Ejercicio 8.12 *Se considera un arco $\alpha : I \to X$ en un espacio topológico X. Se llama una reparametrización de α a un arco de la forma $\beta = \alpha \circ \phi$, donde $\phi : I \to I$ es una aplicación continua con $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 1$. Probar que α es homotópica a $\alpha \circ \phi$.*

Solución: Se define la homotopía $F : I \times I \to X$ entre α y $\alpha \circ \phi$ mediante:

$$F(t,s) = \alpha((1-s)t + s\phi(t)).$$

Ya que $\phi(t) \in I$, el número $(1-s)t + s\phi(t)$ pertenece al intervalo I, luego F está bien definida. Por otra parte, dicha aplicación es continua y satisface las propiedades de homotopía entre α y $\alpha \circ \phi$:

- $F(t,0) = \alpha(t)$.
- $F(t,1) = \alpha(\phi(t))$.
- $F(0,s) = \alpha\phi(0) = \alpha(0)$.
- $F(1,s) = \alpha\phi(1) = \alpha(1)$.

Ejercicio 8.13 *Consideramos un arco $\alpha : I \to X$ y $\bar{t} \in I$. Se definen los dos siguiente arcos α_1, α_2 de X:*

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \alpha(t\bar{t}) \\ \alpha_2(t) &= \alpha(\bar{t} + t(1-\bar{t})) \end{aligned}$$

Probar que α es un arco homotópico al arco $\alpha_1 * \alpha_2$.

Solución: Para la solución, hacemos uso del ejercicio 8.12. Definimos la aplicación $\phi : [0,1] \to [0,1]$ mediante

$$\phi(t) = \begin{cases} 2\bar{t}t & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-\bar{t})t + 1 - 2(1-\bar{t}) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Esta aplicación es continua y satisface

$$\alpha\phi(t) = (\alpha_1 * \alpha_2)(t).$$

Ejercicio 8.14 *Probar que el lazo $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ no es homotópico al lazo constante en el espacio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

Solución: La circunferencia $\mathbb{S}^1$ es un retracto fuerte de deformación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: basta con definir la aplicación $r(x,y) = (x,y)/\sqrt{x^2+y^2}$. Por tanto α es homotópica (en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) al $r \circ \alpha$.

Pero $r \circ \alpha = \alpha$, luego no es homotópica al lazo constante: justamente la clase de α es un generador del grupo fundamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que es $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 8.15 *Estudiar el grupo fundamental de un espacio discreto y trivial.*

Solución:

1. Recordemos que en un espacio discreto X, los únicos subconjuntos conexos son los conjuntos formados por un único punto. Por tanto, los lazos en X son los lazos constantes. Luego si $x \in X$, el espacio Ω_{xx} está formado por un único elemento y por tanto, también $\pi(X,x)$, es decir, este grupo es trivial.

2. Ya que toda aplicación que llega a un espacio trivial es continua, toda aplicación de I en X es un arco. Por tanto, si $x \in X$ y α, β son dos lazos con punto base x, se define $F : I \times I \to X$, mediante

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } s < 1 \\ \beta(t) & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

Entonces F es una aplicación continua y satisface las propiedades de homotopía. Como dos arcos cualesquiera son homotópicos, el grupo fundamental es trivial.