Relación de ejercicios del tema 3

Topología II. Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática
Curso 2021/2022
Profesor: Rafael López Camino
Actualización: 15/12/2021, hora: 22:48:38

---

1. Llamamos una triangulación de una superficie compacta a una presentación poligonal del tipo $< A \,|\, T_1, \ldots, T_n >$, donde T_k está formada exactamente por tres letras. Hallar triangulaciones de $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{K}$ y $\mathbb{P}^2$. Lo mismo de $3\mathbb{P}^2$.

2. Estudiar la orientabilidad de $S_1 \sharp S_2$ en términos de S_1 y S_2.

3. Sea S una superficie compacta. Probar que $\chi(S) \geq -2$ si y sólo si tiene una presentación poligonal $P/\sim$ donde P es un octógono.

4. ¿Cuáles son las superficies compactas con característica de Euler -4?

5. Clasificar las superficies:

   (a) $a_1 a_2 \ldots, a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_n^{-1}$.
   (b) $a_1 a_2 \ldots, a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1} a_n$.
   (c) $a_1^{-1} a_2 \ldots, a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_n^{-1}$.
   (d) $a_1^{-1} a_2 \ldots, a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1} a_n$.

6. Hallar todas las superficies compactas S_1 y S_2 tales que $S_1 \sharp S_2$ sea $4\mathbb{P}^2$.

7. Hallar todas las superficies compactas S_1 y S_2 tales que $S_1 \sharp S_2$ sea $4\mathbb{T}$.

8. Hallar todas las superficies compactas S_1 y S_2 tales que $S_1 \sharp S_2$ sea $8\mathbb{P}^2$.

9. Clasificar las superficies $S_1 \equiv abacb^{-1}c^{-1}$, $S_2 \equiv abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ y su suma conexa.

10. Clasificar las superficies $S_1 \equiv d^{-1}abadcb^{-1}c^{-1}$, $S_2 \equiv abca^{-1}b^{-1}c$ y su suma conexa.

11. Mediante operaciones poligonales, clasificar $S \equiv abacb^{-1}c^{-1}$.

12. Hallar las superficies compactas S tales que $\chi(S) \leq 7$ y que $\mathrm{Ab}(\pi_1(S)) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^7$.

13. Un poliedro regular en $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto $P \subset \mathbb{R}^3$ dado por la unión de una cantidad finita de polígonos cerrados regulares (llamados caras de P) tal que:

    (a) todas las caras tienen el mismo número de lados,

    (b) a cada vértice llegan el mismo número de aristas,

    (c) $P \cong \mathbb{S}^2$.

    Probar la fórmula de Euler dada por $L - A + V = 2$, donde L es el número de lados, A el de aristas y V el de vértices. Deducir que hay solamente 5 poliedros regulares: tetraedros, octaedros, icosaedros, cubos y dodecaedros.

14. Sea $S \equiv ab^{-1}c - da^{-1}ebc^{-1}-$, donde $-$ es una letra a rellenar. Calcularla para que S sea homeomorfa a: $2\mathbb{T}$; $4\mathbb{P}^2$; $\mathrm{Ab}(\pi_1(S)) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^4$.

15. Estudiar si las siguientes superficies compactas son homeomorfas entre sí: $S_1 \equiv abcdad^{-1}cb^{-1}$; $\chi(S_2) \geq 0$ y $\pi_1(S_2)$ no es abeliano; $\pi_1(S_3) =< a, b, c : acbcba^{-1} >$.

16. Clasificar

    (a) $S =< a, b, c, d, e, f \,|\, abc, bde, c^{-1}df, e^{-1}fa >$.

    (b) $S =< a, b, c, d, e \,|\, abcd, aded, bcde >$.

    (c) $S =< a, b, c, d, e, f \,|\, abcd, b^{-1}c^{-1}d^{-1}ec^{-1}, afdfe >$.

    (d) $S =< a, b, c, d, e, f \,|\, abef, cd^{-1}ab^{-1}, c^{-1}e^{-1}fd >$.

17. Estudiar para qué valores de n y m, tenemos $n\mathbb{K} \cong n\mathbb{T}\sharp m\mathbb{P}^2$.

18. Probar que si a $\mathbb{S}^2$ le quitados $2n$ discos disjuntos y pegar n asas disjuntas $C_i \cong \mathbb{S}^1 \times [a, b]$ por cada par de componentes del borde, la superficie es $n\mathbb{T}$.

19. Probar que si a $\mathbb{S}^2$ le quitados n discos disjuntos y pegar n cintas de Möbius $\mathbb{M}_i$ por cada circunferencia del borde, la superficie es $n\mathbb{P}^2$.

20. Hallar una superficie compacta S con $\chi(S) = 0$ y una presentación poligonal del tipo $aWbW'a$.

21. Probar que toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a una de las siguientes: $n\mathbb{T}\sharp\mathbb{S}^2$, $n\mathbb{T}\sharp\mathbb{K}$ o $n\mathbb{T}\sharp\mathbb{P}^2$.