

# TOPOLOGÍA II

Francisco J. López  
Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Granada  
fjlopez@ugr.es

## TEMA 0: Preliminares

En este tema introductorio repasaremos algunos conceptos básicos de la teoría de grupos algebraicos, así como algunos resultados elementales de topología básica.

### 1. Teoría de grupos algebraicos

La definición fundamental es la siguiente.

**Definición 1.1** *Un grupo algebraico es un par  $(G, \cdot)$ , donde  $G$  es un conjunto no vacío y  $\cdot$  es una aplicación*

$$\cdot: G \times G \rightarrow G$$

*satisfaciendo las siguientes propiedades (escribiremos  $g_1 \cdot g_2$  en vez de  $\cdot(g_1, g_2)$  para cualesquiera  $g_1, g_2 \in G$ ):*

- $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$  para cualesquiera  $g_1, g_2, g_3 \in G$ .
- Existe  $e \in G$  tal que  $g \cdot e = e \cdot g = g$  para cualquiera  $g \in G$ . Este elemento es único y es conocido como elemento neutro del grupo.
- Para todo  $g \in G$  existe  $g^{-1} \in G$  tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ . El elemento  $g^{-1}$  satisfaciendo esta propiedad es único (dependiendo de  $g$ ) y es conocido como el elemento inverso o simétrico de  $g$  en el grupo.

*Si adicionalmente*

$$g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \text{ para cualesquiera } g_1, g_2 \in G,$$

*el grupo  $(G, \cdot)$  se dirá abeliano o conmutativo.*

Son muchos los ejemplos de grupos conocidos. Recordaremos algunos de los más significativos.

- $(\mathbb{C}^n, +)$ ,  $(\mathbb{R}^n, +)$ ,  $(\mathbb{Q}^n, +)$ ,  $(\mathbb{Z}^n, +)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- $(\mathbb{Z}_k, +)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (enteros módulo  $k$ ).
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ .

- $(\text{Gl}_n(\mathbb{C}), \cdot), (\text{Gl}_n(\mathbb{R}), \cdot), n \in \mathbb{N}$ .
- $(\mathcal{F}(X), \circ)$ , donde  $X \neq \emptyset$  es un conjunto,  $\mathcal{F}(X) := \{f: X \rightarrow X: f \text{ biyectiva}\}$  y "  $\circ$  " es la composición de aplicaciones.

A continuación presentaremos una herramienta muy versátil para la construcción de nuevos grupos.

## 1.1. Producto libre de grupos

Sea  $\{G_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$  una familia disjunta de grupos, descritos con notación multiplicativa. Una *palabra* construida sobre esa familia es una expresión  $x_1x_2 \dots x_n$  donde  $x_i \in G_\alpha$  para algún  $\alpha \in \Lambda$ . Dicha palabra se llama *reducida* si ningún  $x_i$  es el Elemento Neutro del grupo que lo contiene, y  $x_i$ 's adyacentes están en grupos  $G_\alpha$ 's diferentes. La palabra vacía se denotará por 1.

**Definición 1.2** *El conjunto de las palabras reducidas construidas sobre  $\{G_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$  será denotado por*

$$\bullet_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha.$$

En general dos palabras (no necesariamente reducidas) pueden multiplicarse por yuxtaposición, esto es

$$(x_1x_2 \dots x_n) \cdot (y_1y_2 \dots y_m) = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m,$$

Igualmente dos palabras reducidas pueden también multiplicarse por yuxtaposición y después convertirse en reducidas, esto es, si  $x_n$  e  $y_1$  están en el mismo grupo entonces  $x_n y_1$  se sustituye por  $x_n \cdot y_1$  si ese producto no es el neutro. En caso de serlo se omite  $x_n y_1$ . Se procede así sucesivamente cuando sean posibles más reducciones. Esta multiplicación en  $\bullet_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ , denotada también por  $\cdot$ , le dota de estructura de grupo. En efecto, el elemento neutro de ese grupo será la palabra vacía 1. El inverso de la palabra reducida  $x_1 \dots x_n$  es la palabra reducida  $x_n^{-1} \dots x_1^{-1}$ . La propiedad asociativa no es difícil de probar.

**Definición 1.3** *Al grupo  $(\bullet_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha, \cdot)$  se le llamará el producto libre de los grupos  $\{G_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ .*

Es claro que si el cardinal de  $\Lambda$  es al menos dos y los grupos no son triviales, el producto libre no es conmutativo, ya que si  $x_2 \in G_\alpha$  e  $y_2 \in G_\beta$  no son el neutro y  $\alpha \neq \beta$ , entonces las palabras reducidas  $xy$  e  $yx$  son diferentes.

**Definición 1.4** *El grupo libre con un generador  $\{x\}$  es el conjunto*

$$F(x) = \{\dots, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^2 \dots\}$$

*dotado del producto usual:  $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ .*

*El grupo libre generado por un conjunto  $S$  es*

$$F(S) = \bullet_{x \in S} F(x).$$

## 1.2. Teoría de subgrupos

En lo que sigue  $(G, \cdot)$  será un grupo arbitrario.

**Definición 1.5** Un subconjunto  $H \subset G$  se dirá un subgrupo de  $G$  si es estable para la operación de  $G$ , esto es, si  $h_1 \cdot h_2 \in H$  y  $h_1^{-1} \in H$  para cualesquiera  $h_1, h_2 \in H$ . En ese caso se escribirá  $H \leq G$ .

Es obvio que todo subgrupo de  $G$  es a su vez un grupo con la operación inducida, en particular con el mismo elemento neutro de  $G$ . Además la intersección de subgrupos es un subgrupo. Llamaremos

$$\text{Sub}(G) = \{H \subset G : H \leq G\}$$

a la familia formada por todos los subgrupos de  $G$ . Por ejemplo, el *centro* de  $G$ , que se define como

$$\mathcal{Z}(G) := \{h \in G : h \cdot g = g \cdot h \quad \forall g \in G\},$$

es un subgrupo de  $G$ .

Dado un subconjunto  $A \subset G$ , el conjunto

$$H(A) := \left\{ \prod_{j=1}^k a_j^{n_j} : a_1, \dots, a_k \in A, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

es el *menor subgrupo* de  $G$  conteniendo a  $A$ , también llamado el *subgrupo de  $G$  generado por  $A$* . Es fácil comprobar que  $H(A)$  coincide con la intersección de todos los subgrupos de  $G$  que contienen a  $A$ . Un conjunto  $A \subset G$  se dirá un *sistema de generadores de  $G$*  si  $H(A) = G$ .

**Definición 1.6** Dado  $H \leq G$  y  $g \in G$ , denotaremos por  $g^{-1} \cdot H \cdot g := \{g^{-1} \cdot h \cdot g : h \in H\}$  al subgrupo conjugado de  $H$  según  $g$ . Dos subgrupos  $H_1, H_2 \leq G$  se dirán conjugados, y se escribirá  $H_1 \sim_c H_2$ , si existe  $g \in G$  tal que  $g^{-1} \cdot H_1 \cdot g = H_2$ . La relación de conjugación en  $\text{Sub}(G)$  es de equivalencia, y el correspondiente cociente se denotará por

$$\mathcal{S}_c(G) := \text{Sub}(G) / \sim_c$$

**Definición 1.7** Un subgrupo  $H \leq G$  se dirá normal si  $g^{-1} \cdot h \cdot g \in H$  para todo  $h \in H$  y  $g \in G$ , esto es, si su clase de conjugación  $[H] = \{H\}$ . En ese caso se escribe  $H \trianglelefteq G$ .

Si  $H \leq G$ , la relación de equivalencia

$$g_1 R_{\text{dcha}} g_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists h \in H : g_2 = h \cdot g_1$$

determina las clases laterales derecha  $H \cdot g := \{h \cdot g : h \in H\}$  de  $H$  en  $G$ . El cociente asociado será denotado  $(G/H)_{\text{dcha}}$ .

Análogamente la relación de equivalencia

$$g_1 R_{\text{izqda}} g_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists h \in H : g_2 = g_1 \cdot h$$

determina las clases laterales izquierda  $g \cdot H := \{g \cdot h : h \in H\}$  de  $H$  en  $G$ . El cociente asociado será denotado  $(G/H)_{\text{izqda}}$ .

**Definición 1.8** Si  $H \trianglelefteq G$ , entonces  $R := R_{\text{dcha}} = R_{\text{izqda}}$ , y la clase de equivalencia de  $g \in G$  asociada a la relación  $R$  se denota indistintamente  $g \cdot H = H \cdot g$ . La operación del grupo  $G$  puede ser inducida en el cociente  $G/H$  de forma natural:

$$(g_1 \cdot H) \cdot (g_2 \cdot H) = (g_1 \cdot g_2) \cdot H,$$

dotando al cociente  $(G/H, \cdot)$  de estructura de grupo (conocido como el grupo cociente de  $G$  sobre el subgrupo normal  $H$ ).

**Definición 1.9** Si  $A$  un subconjunto de  $G$ :

- $N(A) := \{\prod_{j=1}^k g_j^{-1} \cdot a_j^{n_j} \cdot g_j : (a_j, g_j, n_j) \in A \times G \times \mathbb{Z}, j = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N}\}$  es el menor subgrupo normal de  $G$  conteniendo a  $A$ , también llamado el subgrupo normal de  $G$  generado por  $A$ . Es fácil comprobar que  $N(A)$  coincide con la intersección de todos los subgrupos normales de  $G$  que contienen a  $A$ .
- Si  $A \leq G$ ,  $N_0(A) := \{g \in G : g^{-1} \cdot A \cdot g = A\}$  es el mayor subgrupo de  $G$  que contiene a  $A$  como subgrupo normal, también llamado el normalizador de  $A$  en  $G$ . Es claro que  $A \trianglelefteq N_0(A) \leq G$  y  $N_0(A) = G$  si y solo si  $A \trianglelefteq G$ .

**Proposición 1.10** Sea  $G$  un grupo,  $A \subset G$  y denotemos por  $\sigma : G \rightarrow G/N(A)$  al epimorfismo proyección. Sea  $B \subset G$  otro subconjunto. Entonces

$$G/N(A \cup B) \cong (G/N(A))/N(\sigma(B)).$$

DEMOSTRACIÓN: Si  $\sigma_0 : G \rightarrow G/N(A \cup B)$  es la proyección, existe un único epimorfismo  $\Phi : G/N(A) \rightarrow G/N(A \cup B)$  satisfaciendo  $\Phi \circ \sigma = \sigma_0$  (éste viene dado por  $\Phi(gN(A)) := gN(A \cup B)$  para cada  $gN(A) \in G/N(A)$ ). No es difícil comprobar que  $\text{Ker}(\Phi) = \{hN(A) : h \in B\} = \sigma(B)$ , de donde el resultado se sigue por el primer teorema de isomorfía. ■

Dado un grupo  $G$  y dos elementos  $g_1, g_2 \in G$ , llamaremos *conmutador* de  $g_1$  y  $g_2$  al elemento de  $G$  dado por la expresión

$$[g_1, g_2] := g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}.$$

Denotaremos por  $G_c$  al subgrupo normal de  $G$  generado por todos los conmutadores:

$$G_c = N(\{[g_1, g_2] : g_1, g_2 \in G\}).$$

**Definición 1.11** Dado un grupo  $G$ , el grupo cociente cociente

$$\mathcal{A}(G) := G/G_c$$

es conocido como grupo abelianizado de  $G$ .

Es inmediato comprobar que  $\mathcal{A}(G)$  es un grupo abeliano.

**Ejercicio 1.12**  $\mathcal{A}(F(\{a_1, \dots, a_k\})) \cong \mathbb{Z}^k$ .

DEMOSTRACIÓN: El homomorfismo de grupos  $\Phi : F(\{a_1, \dots, a_k\}) \rightarrow \mathbb{Z}^k$  unívocamente determinado por

$$\Phi([a_j]) := (\delta_{i,j})_{i=1, \dots, k}, \quad j = 1, \dots, k,$$

es un epimorfismo con núcleo  $F(\{a_1, \dots, a_k\})_c$  (aquí  $\delta_{i,j}$  representa a la delta de Kronecker). El resultado se sigue del primer teorema de isomorfía. ■

### 1.3. Producto amalgamado de grupos

Acabaremos esta sección con la siguiente definición, que como veremos más adelante jugará un papel crucial en el enunciado del Teorema de Seifert-Van Kampen (Tema 1).

**Definición 1.13** Consideremos tres grupos  $A$ ,  $G_1$  y  $G_2$  y homomorfismos  $\Phi_1: A \rightarrow G_1$  y  $\Phi_2: A \rightarrow G_2$ . Se define el producto libre amalgamado  $G_1 \bullet_A G_2$  como el grupo cociente  $(G_1 \bullet G_2)/N(R)$ , siendo  $R = \{\Phi_1(a)\Phi_2(a)^{-1} : a \in A\}$ .

La nomenclatura usada puede confundir ya que omitimos referencia a los homomorfismos  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2$ . Nótese que las clases en el grupo cociente  $G_1 \bullet_A G_2$  de los elementos  $\Phi_1(a)$  y  $\Phi_2(a)$  son iguales para todo  $a \in A$ . De una forma más precisa, si denotamos por  $i_j: G_j \rightarrow G_1 \bullet G_2$ ,  $j = 1, 2$ , a las inclusiones naturales y  $\pi: G_1 \bullet G_2 \rightarrow G_1 \bullet_A G_2$  a la proyección al cociente,

$$\pi \circ i_1 \circ \Phi_1 = \pi \circ i_2 \circ \Phi_2.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & G_1 & & \\ & \nearrow \Phi_1 & & \searrow i_1 & \\ A & & & & G_1 \star G_2 \xrightarrow{\pi} G_1 \star_A G_2 \\ & \searrow \Phi_2 & & \nearrow i_2 & \\ & & G_2 & & \end{array}$$

El producto amalgamado satisface la siguiente propiedad universal.

**Proposición 1.14** Tres homomorfismos

$$\Psi_1: G_1 \rightarrow H, \Psi_2: G_2 \rightarrow H \text{ y } \Psi_0: A \rightarrow H$$

tales que

$$\Psi_0 = \Psi_1 \circ \Phi_1 = \Psi_2 \circ \Phi_2$$

inducen un homomorfismo  $\Psi: G_1 \bullet_A G_2 \rightarrow H$  tal que

$$\Psi_j = \Psi \circ (\pi \circ i_j) \quad \text{y} \quad \Psi \circ (\pi \circ i_j \circ \Phi_j) = \Psi_0, \quad j = 1, 2.$$

En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & G_1 & & & \\ & & \nearrow \Phi_1 & & \searrow \pi \circ i_1 & & \\ & & & & & & \\ H & \xleftarrow{\Psi_0} & A & \xrightarrow{\Psi_1} & H & \xleftarrow{\Psi} & G_1 \bullet_A G_2 \\ & & \searrow \Phi_2 & & \nearrow \pi \circ i_2 & & \\ & & & G_2 & & & \\ & & & & & & \\ & & \nearrow \pi \circ i_2 \circ \Phi_2 = \pi \circ i_1 \circ \Phi_1 & & & & \\ & & & & & & \\ G_1 \bullet_A G_2 & \xrightarrow{\Psi} & H & & & & \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el único homomorfismo  $\Lambda: G_1 \bullet G_2 \rightarrow H$  extensión de los homomorfismos  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$ . Como  $\Psi_0 = \Psi_1 \circ \Phi_1 = \Psi_2 \circ \Phi_2$ , el homomorfismo  $\Lambda$  contiene a  $\{\Phi_1(a)\Phi_2(a)^{-1} : a \in A\}$  en su núcleo, se proyecta al cociente  $G_1 \bullet_A G_2$  e induce canónicamente un único homomorfismo  $\Psi: G_1 \bullet_A G_2 \rightarrow H$  tal que  $\Psi \circ \pi = \Lambda$ . Obviamente  $\Psi$  resuelve la proposición. ■

## 2. Topología básica

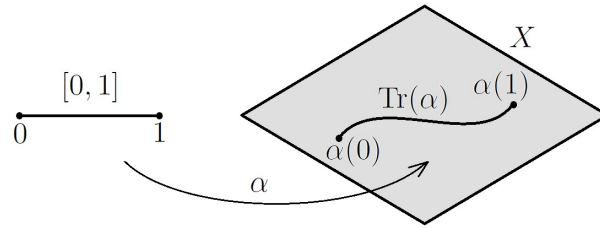
A lo largo de este curso  $(X, \tau)$  denotará un espacio topológico. Usualmente, y en ausencia de ambigüedad, omitiremos la referencia a la topología  $\tau$  y escribiremos simplemente  $X$ .

### 2.1. Arcos en un espacio topológico

Por definición, un *arco* en un espacio topológico  $X$  es una aplicación continua

$$\alpha: [0, 1] \rightarrow X,$$

donde el intervalo unidad  $[0, 1]$  se entiende dotado de la topología euclidiana usual. A los puntos  $\alpha(0)$  y  $\alpha(1)$  se les llama *puntos inicial y final* del arco  $\alpha$  respectivamente (y se dirá que  $\alpha$  une o conecta los puntos  $\alpha(0)$  y  $\alpha(1)$ ); también se dice que  $\{\alpha(0), \alpha(1)\}$  son los *extremos* del arco  $\alpha$ . El subespacio topológico de  $X$  dado por  $\alpha([0, 1])$  será referido como *traza del arco*  $\alpha$ , y escrito  $\text{Tr}(\alpha)$ . En ocasiones, y si ello no implica ambigüedad, identificaremos un arco con su traza.



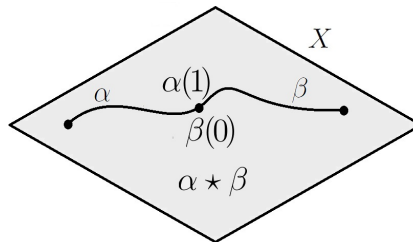
El arco más simple que podemos construir sobre un espacio topológico es el constante, que para cada  $p \in X$  viene definido por

$$\epsilon_p: [0, 1] \rightarrow X, \quad \epsilon_p(t) = p \quad \text{para todo } t \in [0, 1].$$

También es posible generar nuevos arcos a partir de unos dados de forma sencilla.

**Definición 2.1** Dados arcos  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$  con  $\alpha(1) = \beta(0)$  se definen

- $\bar{\alpha}: [0, 1] \rightarrow X, \bar{\alpha}(t) := \alpha(1 - t).$
- $\alpha \star \beta: [0, 1] \rightarrow X, \alpha \star \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$



Obsérvese que  $\text{Tr}(\bar{\alpha}) = \text{Tr}(\alpha)$ , y los puntos inicial y final de  $\bar{\alpha}$  son  $\alpha(1)$  y  $\alpha(0)$ . Análogamente,  $\text{Tr}(\alpha \star \beta) = \text{Tr}(\alpha) \cup \text{Tr}(\beta)$  y los puntos inicial y final de  $\alpha \star \beta$  son  $\alpha(0)$  y  $\beta(1)$ .

**Definición 2.2** Un espacio topológico  $X$  se dice arcoconexo si para cualesquiera  $p, q \in X$  existe un arco  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  conectando  $p$  y  $q$ .

Un espacio topológico  $X$  se dice localmente arcoconexo si todo punto admite una base de entornos arcoconexos (con la topología inducida).

Los ejemplos más simples de espacios arcoconexos son los subconjuntos convexos (o estrellados desde un punto) de un espacio euclidiano. Trivialmente la imagen por una aplicación continua de un espacio arcoconexo es un espacio arcoconexo.

Es fácil ver que si  $X = A \cup B$ , con  $A$  y  $B$  subespacios arcoconexos no disjuntos, entonces  $X$  es arcoconexo. En efecto, fijado  $x \in A \cap B$ , para cualquiera  $p \in X$  existe un arco  $\alpha_p: [0, 1] \rightarrow X$  con  $\alpha_p(0) = x$  y  $\alpha_p(1) = p$ . Por tanto para cualesquiera  $p, q \in X$  el arco  $\bar{\alpha}_p \star \alpha_q$  conecta  $p$  con  $q$ , de donde  $X$  es arcoconexo.

Dado un punto  $p \in X$ , la *arcocomponente* de  $p$  en  $X$ , que denotaremos por  $\mathcal{C}_p$ , se define como el mayor subespacio arcoconexo de  $X$  conteniendo a  $p$ . En otras palabras,  $\mathcal{C}_p$  es la unión de todos los subespacios arcoconexos de  $X$  que contienen a  $p$ . Como  $\{p\}$  es un subespacio arcoconexo que contiene a  $p$ ,  $p \in \mathcal{C}_p$ . Como la traza de un arco es arcoconexa, la identidad

$$\mathcal{C}_p = \{q \in X : \text{existe un arco en } X \text{ con uniendo } p \text{ y } q\}$$

es evidente. Obviamente  $\mathcal{C}_p$ , dotado con la topología inducida, es arcoconexo para todo  $p \in X$ . Además  $X$  es la unión disjunta de sus arcocomponentes.

**Proposición 2.3** Los siguientes enunciados son ciertos y se dejarán como ejercicio.

- (I) Todo espacio arcoconexo es conexo.
- (II) Las arcocomponentes de un espacio localmente arcoconexo son abiertas (y por tanto también cerradas).
- (III) Todo espacio conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.
- (IV) Todo abierto conexo (dominio) de un espacio euclidiano es arcoconexo.

DEMOSTRACIÓN: Para probar (i) supongamos que  $X$  es un espacio arcoconexo y fijemos  $x \in X$ . Como arriba, para cada  $p \in X$  existe un arco  $\alpha_p: [0, 1] \rightarrow X$  con  $\alpha_p(0) = x$  y  $\alpha_p(1) = p$ . Como la traza de un arco es conexa (imagen continua de un conexo),  $X = \cup_{p \in X} \text{Tr}(\alpha_p)$  es unión de conexos con intersección no vacía, y por tanto es conexo.

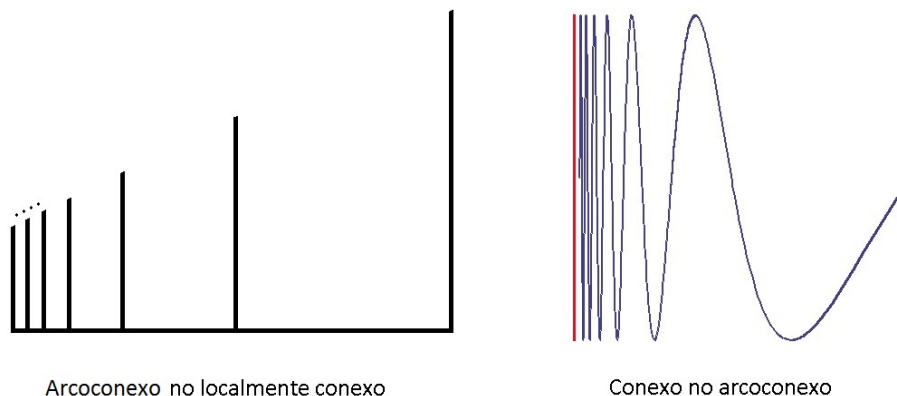
Para probar (ii) asumamos que  $X$  es localmente arcoconexo. Sea  $\mathcal{C}$  una arcocomponente de  $X$  y tomemos un punto arbitrario  $p \in \mathcal{C}$ . Por arcoconexión local existe una base de entornos arcoconexos de  $p$ . Elijamos un entorno arcoconexo  $V$  de  $p$ , y observemos que  $V \subset \mathcal{C}_p = \mathcal{C}$ . Esto prueba que  $p$  es un punto interior de  $\mathcal{C}$ , y por tanto que  $\mathcal{C}$  es abierto. Como  $X$  es la unión *disjunta* de sus arcocomponentes, el complementario de una arcocomponente de  $X$  es la unión del resto de arcocomponentes de  $X$ , luego un subconjunto abierto. Esto prueba que cada arcocomponente es cerrada en  $X$ .

Para probar (iii) supongamos que  $X$  es conexo y localmente arcoconexo. Sea  $\mathcal{C}$  una arcocomponente de  $X$ , de la que sabemos es no vacía y abierta por el ítem (ii). Veamos que  $\mathcal{C}$  es también cerrada. En efecto, sea  $p \in \bar{\mathcal{C}}$  y como antes consideremos un entorno arcoconexo  $V$  de  $p$ . Claramente  $V \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$  por ser  $p$  un punto de la clausura de  $\mathcal{C}$ . El conjunto  $\mathcal{C} \cup V$  es pues unión de dos arcoconexos con intersección no vacía, luego arcoconexo. Por la maximalidad de  $\mathcal{C}$  deducimos que  $V \subset \mathcal{C}$  y que  $p$  es un punto interior a  $\mathcal{C}$ , eso es,  $p \in \mathcal{C}$  ya que este conjunto es abierto. Concluimos que  $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$  y por tanto

que  $\mathcal{C}$  es abierto y cerrado. De la conexión de  $X$  inferimos que  $\mathcal{C} = X$ . Así pues  $X$  tiene sólo una arcoconexión, y por lo tanto es arcoconexo.

El ítem (iv) es corolario del (iii). Téngase en cuenta que un abierto de un espacio localmente arcoconexo es localmente arcoconexo, y por tanto los abiertos euclidianos son localmente arcoconexos. ■

**Observación 2.4** *Al igual que pasaba con la conexión topológica, existen espacios arcoconexos que no son localmente arcoconexos. También se conocen espacios conexos que no son arcoconexos.*



## 2.2. Identificaciones y cocientes topológicos

Repasaremos brevemente el concepto de identificación topológica y topología cociente, presentando algunos ejemplos. Recordemos que dada una aplicación sobreyectiva  $f: X \rightarrow Y$ , un conjunto  $A \subset X$  se dice  $f$ -saturado si  $f^{-1}(f(A)) = A$ .

**Definición 2.5** *Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $Y$  un conjunto y  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación sobreyectiva.*

- *La topología final en  $Y$  para la aplicación  $f$  se define como*

$$\tau(f) := \{O' \subset Y : f^{-1}(O') \in \tau\} = \{f(O) : O \in \tau \text{ y } f\text{-saturado}\}.$$

*El espacio  $(Y, \tau(f))$  es conocido como espacio identificación de  $(X, \tau)$  vía  $f$ .*

- *Si  $\tau'$  es una topología en  $Y$ , una aplicación  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  se dirá una identificación topológica si  $\tau' = \tau(f)$ .*

La comprobación de que efectivamente  $\tau(f)$  es una topología en  $Y$  es elemental.

**Observación 2.6** *Supongamos que  $(X, \tau)$  es un espacio topológico y  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación sobreyectiva. Es inmediato comprobar que:*

- (a)  $\tau(f)$  es la mayor topología en  $Y$  que hace a  $f$  continua, esto es, si  $\tau'$  es una topología en  $Y$  y  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  es continua entonces  $\tau' \subset \tau(f)$ . En particular, reparemos en que  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau(f))$  es continua.
- (b) Un conjunto  $F' \subset Y$  es cerrado en  $(Y, \tau(f))$  si y sólo si  $f^{-1}(F')$  es cerrado en  $\tau$ .



- (c)  $F' \subset Y$  es cerrado en  $(Y, \tau(f))$  si y sólo si existe  $F \subset X$  cerrado y  $f$ -saturado con  $f(F) = F'$ .
- (d)  $(Y, \tau(f))$  es Hausdorff si y sólo si para cualesquiera  $y_1, y_2 \in Y$ ,  $y_1 \neq y_2$ , existen abiertos  $f$ -saturados disjuntos  $O_1, O_2 \in \tau$  tales que  $f^{-1}(y_j) \subset O_j$ ,  $j = 1, 2$ .
- (e)  $(Y, \tau(f))$  es II-Axioma de Numerabilidad si y sólo si existe una familia  $\mathcal{B}$  de abiertos  $f$ -saturados en  $X$  satisfaciendo las siguientes propiedades:
- $\mathcal{B}$  es numerable.
  - Todo abierto  $f$ -saturado de  $X$  es unión de abiertos de  $\mathcal{B}$ .
- (f) Si  $(X, \tau)$  es conexo (arcoconexo, compacto) entonces  $(Y, \tau(f))$  es conexo (arcoconexo, compacto).

La siguiente proposición establece un criterio muy útil para el estudio de la continuidad de aplicaciones con dominio  $(Y, \tau(f))$ .

**Proposición 2.7** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación sobreyectiva. Sea  $(Z, \tau')$  un espacio topológico y  $h: Y \rightarrow Z$  una aplicación. Entonces

$$h: (Y, \tau(f)) \rightarrow (Z, \tau') \text{ es continua} \iff h \circ f: (X, \tau) \rightarrow (Z, \tau') \text{ es continua.}$$

DEMOSTRACIÓN: La implicación  $\implies$  es trivial ya que la composición de continuas es continua.

Para probar  $\impliedby$  tomemos un abierto arbitrario  $O' \subset Z$ . La continuidad de  $h \circ f$  implica que  $f^{-1}(h^{-1}(O')) \in \tau$ , de donde  $h^{-1}(O') \in \tau(f)$ . Esto prueba que  $h$  es continua. ■

Existe una íntima relación entre la topología final y la topología cociente. Expliquemos los detalles.

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Consideremos una relación de equivalencia  $R$  en  $X$  y construyamos el espacio cociente  $X/R$ . Denotemos por  $\pi: X \rightarrow X/R$  a la correspondiente proyección.

**Definición 2.8** La topología final  $\tau(\pi)$  en  $X/R$  para  $\pi: X \rightarrow X/R$  es conocida como la topología cociente inducida por la relación  $R$  en  $X/R$ . El espacio topológico  $(X, \tau(\pi))$  es referido como el espacio topológico cociente de  $(X, \tau)$  por la relación  $R$ .

En realidad el concepto de topología cociente no es sino una formulación equivalente del de identificación topológica. Para comprobarlo introduzcamos alguna notación.

Dada una aplicación sobreyectiva  $f: X \rightarrow Y$ , induciremos en  $X$  la siguiente relación de equivalencia:

$$p \sim_f q \iff f(p) = f(q).$$

Si denotamos por  $[p]$  a la clase de equivalencia de  $p \in X$  por  $\sim_f$ , y por  $\pi_f: X \rightarrow X/\sim_f$ ,  $\pi_f(p) = [p]$ , a la correspondiente proyección al cociente, existe una única biyección  $\hat{f}: X/\sim_f \rightarrow Y$  tal que  $\hat{f} \circ \pi_f = f$ . Para ser más precisos,

$$\hat{f}: X/\sim_f \rightarrow Y, \quad \hat{f}([p]) := f(p).$$

**Proposición 2.9** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación sobreyectiva. Entonces

$$\hat{f}: (X/\sim_f, \tau(\pi_f)) \rightarrow (Y, \tau(f))$$

es un homeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
\pi \downarrow & \nearrow \hat{f} & \\
X/\sim_f & & 
\end{array}$$

Esta proposición expresa el hecho de que, salvo un homeomorfismo canónico, todo espacio identificación es un cociente topológico.

DEMOSTRACIÓN: La biyectividad de  $\hat{f}$  es trivial.

Como  $\hat{f} \circ \pi_f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau(f))$  coincide con la aplicación continua  $f$ , la Proposición 2.7 garantiza que  $\hat{f}: (X/\sim_f, \tau(\pi_f)) \rightarrow (Y, \tau(f))$  es continua. Recíprocamente, como  $\hat{f}^{-1} \circ f: (X, \tau) \rightarrow (X/\sim_f, \tau(\pi_f))$  coincide con la aplicación continua  $\pi_f$ , la Proposición 2.7 garantiza que  $\hat{f}^{-1}: (Y, \tau(f)) \rightarrow (X/\sim_f, \tau(\pi_f))$  es continua. ■

Otro resultado interesante es el siguiente:

**Corolario 2.10** Sea  $(X_j, \tau_j)$  un espacio topológico,  $R_j$  una relación de equivalencia en  $X_j$  y  $\pi_j: X_j \rightarrow X_j/R_j$  la proyección al cociente,  $j = 1, 2$ . Si  $f: (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$  es una continua satisfaciendo  $pR_1q \implies f(p)R_2f(q)$ , entonces la única aplicación

$$\hat{f}: (X_1/R_1, \tau(\pi_1)) \rightarrow (X_2/R_2, \tau(\pi_2))$$

tal que  $\hat{f} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$  es continua.

Es interesante tener criterios manejables que simplifiquen el reconocimiento de las identificaciones topológicas, y por tanto, la comprensión de la naturaleza de algunos cocientes topológicos. A ese fin responde la siguiente proposición.

**Proposición 2.11** Una aplicación  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  es una identificación topológica si satisface alguna de las siguientes condiciones:

- (a)  $f$  es continua, sobreyectiva y abierta.
- (b)  $f$  es continua sobreyectiva y cerrada.
- (c)  $f$  es continua y sobreyectiva,  $(X, \tau)$  es compacto e  $(Y, \tau')$  es Hausdorff.
- (d) Existe  $h: (Y, \tau') \rightarrow (X, \tau)$  continua tal que  $f \circ h = \text{Id}_Y$  ( $f$  tiene una inversa continua a la derecha).

DEMOSTRACIÓN: Probemos (a). Supongamos que  $f$  es continua, sobreyectiva y abierta y veamos que es una identificación topológica, esto es, que  $\tau' = \tau(f)$ . Como  $f$  es continua y sobreyectiva  $\tau' \subset \tau(f)$ , ya que la topología final es la más grande topología en  $Y$  haciendo continua a  $f$ . Tomemos ahora  $O' \in \tau(f)$ . Por definición de la topología final para  $f$  tenemos  $f^{-1}(O') \subset \tau$ , y como  $f$  es abierta y sobre que  $O' = f(f^{-1}(O')) \in \tau'$ . Esto prueba que  $\tau(f) \subset \tau'$  y por tanto que  $\tau' = \tau(f)$ .

Item (b) es totalmente análogo al (a) por un argumento dual. Item (c) se sigue de (b) y del hecho de que toda aplicación continua de un compacto en un Hausdorff es cerrada.

Para probar (d) tomemos  $O' \in \tau(f)$ , esto es, satisfaciendo  $O' \subset Y$  y  $f^{-1}(O') \in \tau$ . Usando las hipótesis y la continuidad de  $h$  inferimos que  $O' = h^{-1}(f^{-1}(O')) \in \tau'$ . Esto prueba que  $\tau(f) \subset \tau'$ , y como la otra inclusión siempre es cierta que  $\tau(f) = \tau'$ . ■

Estudiemos, como aplicación práctica del Corolario 2.10 y la Proposición 2.11, los tres modelos topológicos estandar del espacio proyectivo.

**Definición 2.12** *Por definición, el espacio proyectivo  $\mathbb{RP}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es el espacio cociente de la esfera euclidiana  $(\mathbb{S}^n, \tau_u)$  por la relación  $p \sim q \iff p = \pm q$ :*

$$\mathbb{RP}^n := (\mathbb{S}^n / \sim, \tau_u / \sim).$$

*De la Observación 2.6 se infiere que  $\mathbb{RP}^n$  es un espacio arcoconexo, compacto, Hausdorff y II-Axioma de Numerabilidad.*

**Proposición 2.13** *Los siguientes espacios cocientes son homeomorfos al espacio proyectivo  $\mathbb{RP}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :*

- (I) *El espacio cociente  $((\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1, \tau_u / \sim_1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , por la relación  $p \sim_1 q \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : p = \lambda q$ .*
- (II) *El espacio cociente  $(\overline{B}^n(0, 1) / \sim_2, \tau_u / \sim_2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , por la relación  $p \sim_2 q \iff \|p - q\| \in \{0, 2\}$ . Aquí  $\overline{B}^n(0, 1) = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q\| \leq 1\}$ .*

DEMOSTRACIÓN: La aplicación continua  $f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $f(p) := p/\|p\|$ , es compatible con las relaciones de equivalencia en  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  y  $\mathbb{S}^n$  explicitadas en Proposición 2.13-(i) y Definición 2.2, respectivamente. Por tanto podemos utilizar el Corolario 2.10 e inducir una aplicación continua  $\hat{f}: ((\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1) \rightarrow \mathbb{RP}^n$  entre los espacios topológicos cocientes. De igual forma la aplicación inclusión  $i: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , obviamente continua, induce otra aplicación continua  $\hat{i}: \mathbb{RP}^n \rightarrow ((\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1)$  entre ambos cocientes, que claramente es la inversa de  $\hat{f}$ . Por tanto  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim_1$  y  $\mathbb{RP}^n$  son homeomorfos, lo que prueba (i).

Comprobemos ahora (ii). Llamemos  $\mathbb{S}_+^n := \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} \geq 0\}$  y  $\sim_0$  la relación de equivalencia en  $\mathbb{S}_+^n$  dada por  $p \sim_0 q \iff p = \pm q$ .

La aplicación  $h: \overline{B}^n(0, 1) \rightarrow \mathbb{S}_+^n$ ,  $h(x) := (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$ , es un homeomorfismo compatible con las relaciones de equivalencia  $\sim_2$  en  $\overline{B}^n(0, 1)$  y  $\sim_0$  en  $\mathbb{S}_+^n$ , por lo que el Corolario 2.10 induce un homeomorfismo  $\hat{h}: \overline{B}^n(0, 1) / \sim_2 \rightarrow \mathbb{S}_+^n / \sim_0$ . Para acabar, obsérvese que la aplicación  $j: \mathbb{S}_+^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ ,  $j(q) := [q]$ , es una identificación topológica ya que es continua, sobreyectiva y va de un compacto en un Hausdorff; úsese Proposición 2.11-(c). Como  $\sim_j = \sim_0$ , el cociente  $\mathbb{S}_+^n / \sim_0$  es homeomorfo a  $\mathbb{RP}^n$ , probando (ii). ■

**Ejercicio 2.14** *Las siguientes aplicaciones entre espacios euclidianos son identificaciones topológicas:*

- (I)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $t \mapsto e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ ; utilícese Proposición 2.11-(a).

*Como consecuencia,*

$$\mathbb{R} / \sim \cong \mathbb{S}^1, \text{ con } t \sim s \iff t - s \in \mathbb{Z}.$$

- (II)  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $t \mapsto e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ ; utilícese Proposición 2.11-(b).

*Como consecuencia,*

$$[0, 1] / \sim \cong \mathbb{S}^1, \text{ con } t \sim s \iff |t - s| \in \{0, 1\}.$$

(III)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ,  $(t_1, t_2) \mapsto (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2})$ ; utilícese Proposición 2.11-(a).

Como consecuencia,

$$\mathbb{R}^2 / \sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \text{ con } (t_1, t_2) \sim (s_1, s_2) \iff t_j - s_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2.$$

(IV)  $[0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ,  $(t_1, t_2) \mapsto (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2})$ ; utilícese Proposición 2.11-(b).

Como consecuencia,

$$[0, 1]^2 / \sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \text{ con } (t_1, t_2) \sim (s_1, s_2) \iff |t_j - s_j| \in \{0, 1\}, j = 1, 2.$$

(v)  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $p \mapsto p/\|p\|$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; utilícese Proposición 2.11-(d).

Como consecuencia,

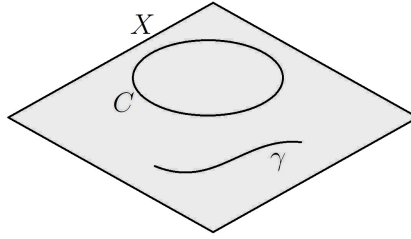
$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \cong \mathbb{S}^n, n \in \mathbb{N}, \text{ con } p \sim q \iff p/\|p\| = q/\|q\|.$$

### 3. Espacios cociente de discos topológicos

En esta sección vamos a presentar algunas construcciones sobre discos topológicos que serán de gran utilidad a lo largo del curso. Comencemos fijando alguna notación.

En lo que sigue  $X$  será un espacio topológico.

**Definición 3.1** Por definición, un subespacio topológico  $C \subset X$  es una curva de Jordan en  $X$  si es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ . Análogamente, un subespacio topológico  $\gamma \subset X$  es un arco de Jordan en  $X$  si es homeomorfo a  $[0, 1]$ . Un arco de Jordan abierto en  $X$  es un subespacio topológico  $\gamma \subset X$  homeomorfo a  $]0, 1[$ .



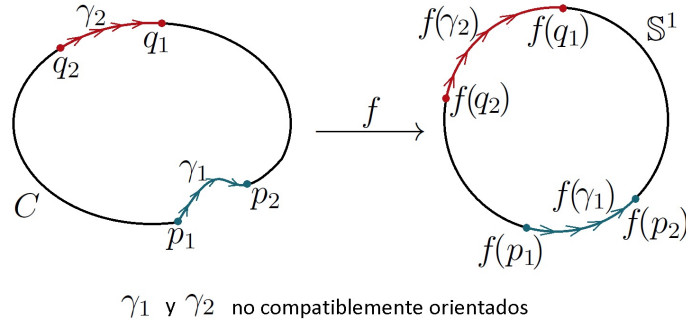
Si  $\gamma \subset X$  es un arco de Jordan y  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \gamma$  es un homeomorfismo, a los puntos  $\alpha(0)$  y  $\alpha(1)$ , que no dependen del homeomorfismo  $\alpha$  utilizado, se les llama extremos del arco. Denotaremos por  $V(\gamma) := \{\alpha(0), \alpha(1)\}$  al conjunto formado por los extremos del arco, e  $\text{Int}(\gamma)$  al arco de Jordan abierto  $\gamma \setminus V(\gamma)$ . Por definición, una *orientación* de  $\gamma$  es una ordenación de sus extremos. Obviamente  $\gamma$  admite dos orientaciones, a saber  $(\alpha(0), \alpha(1))$  y  $(\alpha(1), \alpha(0))$ .

**Definición 3.2** Dado un arco de Jordan  $\gamma$  en la circunferencia unidad  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  de extremos  $\{p_1, p_2\}$ , la orientación  $(p_1, p_2)$  se dirá positiva si al recorrer  $\gamma$  de  $p_1$  a  $p_2$  se sigue el sentido contrario a las agujas del reloj, esto es, creciente en el argumento. En otro caso se dirá negativa.

**Definición 3.3** Sea  $C$  una curva de Jordan en  $X$ . Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos arcos de Jordan orientados en  $C$ , y denotemos por  $(p_1, p_2)$  y  $(q_1, q_2)$  las orientaciones de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , respectivamente (con esta notación  $V(\gamma_1) = \{p_1, p_2\}$  y  $V(\gamma_2) = \{q_1, q_2\}$ ).

Los arcos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  se dirán *compatiblemente orientados* si existe un homeomorfismo  $f: C \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que las orientaciones  $(f(p_1), f(p_2))$  de  $f(\gamma_1)$  y  $(f(q_1), f(q_2))$  de  $f(\gamma_2)$  tienen el mismo carácter (esto es, ambas son positivas o negativas).

La compatibilidad o no compatibilidad de orientaciones no depende del homeomorfismo  $f: C \rightarrow \mathbb{S}^1$  utilizado. En efecto, si  $h: C \rightarrow \mathbb{S}^1$  es otro homeomorfismo entonces  $f \circ h^{-1}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es monótono en el argumento.



Vamos a definir el concepto de disco topológico. Algunos matices requerirán del Teorema de Invarianza del Dominio, que enunciamos sin demostración a continuación.

**Teorema 3.4 (Invarianza del Dominio)** Si  $O \subset \mathbb{R}^2$  es un subespacio topológico homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $O$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 3.5** Un disco topológico compacto es un espacio topológico homeomorfo al disco unidad cerrado  $\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$  en  $\mathbb{R}^2$ . De igual forma, un disco topológico abierto es un espacio topológico homeomorfo al disco unidad abierto  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ .

Si  $X$  es un disco topológico compacto y  $f: \overline{D} \rightarrow X$  es un homeomorfismo, el Teorema de Invarianza del Dominio garantiza que los subconjuntos  $f(\mathbb{S}^1)$  y  $f(D)$  de  $X$  no dependen de  $f$ ; en efecto, si  $h: \overline{D} \rightarrow X$  es otro homeomorfismo entonces  $(h^{-1} \circ f)(D)$  y  $(f^{-1} \circ h)(D)$  han de ser abiertos de  $\mathbb{R}^2$  contenidos en  $\overline{D}$ , y por tanto contenidos en  $D$  (no pueden intersectar a  $\mathbb{S}^1$ ). De aquí que  $(h^{-1} \circ f)(D) = (f^{-1} \circ h)(D) = D$ , esto es,  $f(D) = h(D)$  y  $f(\mathbb{S}^1) = h(\mathbb{S}^1)$ .

En lo que sigue denotaremos por  $\text{Bd}(X) := f(\mathbb{S}^1)$  y lo referiremos como la curva de Jordan borde de  $X$ . También diremos que  $C$  bordea el disco  $X$  o que  $X$  está bordeado por  $C$ . Análogamente escribiremos  $\text{Int}(X) := X \setminus \text{Bd}(X)$  y lo referiremos como el interior de  $X$ .

El siguiente resultado técnico será de bastante utilidad.

**Corolario 3.6** Si  $X_1$  y  $X_2$  son discos topológicos compactos y  $f: \text{Bd}(X_1) \rightarrow \text{Bd}(X_2)$  es un homeomorfismo, entonces existe  $F: X_1 \rightarrow X_2$  homeomorfismo tal que  $F|_{\text{Bd}(X_1)} = f$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $F_j: X_j \rightarrow \overline{D}$  un homeomorfismo cualquiera,  $j = 1, 2$ . Claramente

$$h := (F_2|_{\text{Bd}(X_2)}) \circ f \circ (F_1^{-1}|_{\mathbb{S}^1}): \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

es un homeomorfismo. Construyamos

$$H: \overline{D} \rightarrow \overline{D}, \quad H(p) = \begin{cases} \|p\| h\left(\frac{p}{\|p\|}\right) & \text{si } p \neq 0 \\ 0 & \text{si } p = 0 \end{cases},$$

y observemos que  $H$  es un homeomorfismo en  $\overline{D}$  con  $H|_{\mathbb{S}^1} = h$ . Para acabar basta con definir  $F := F_2^{-1} \circ H \circ F_1$ . ■

### 3.1. Discos topológicos planos

La mayoría de los discos topológicos compactos con los que vamos a trabajar serán subespacios topológicos de  $\mathbb{R}^2$ . Introduciremos la siguiente:

**Definición 3.7** *Los subconjuntos  $X \subset \mathbb{R}^2$  que con la topología euclidiana inducida sean discos topológicos compactos (respectivamente, abiertos) serán llamados discos planos compactos (respectivamente, abiertos).*

**Observación 3.8** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^2$  un disco plano compacto. Entonces  $X \setminus \text{Bd}(X)$  es una componente conexa acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X)$  con frontera  $\text{Bd}(X)$ .*

DEMOSTRACIÓN: La acotación es obvia ya que  $X$  es compacto. Obviamente  $\text{Int}(X)$  es claramente conexo y cerrado en  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X)$ . Por el Teorema de Invarianza del Dominio también es abierto, por lo que es una componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X)$ . Como  $X$  es un cerrado de  $\mathbb{R}^2$  conteniendo al abierto  $\text{Int}(X)$ ,  $\text{Fr}(\text{Int}(X)) \subset X \setminus \text{Int}(X) = \text{Bd}(X)$ . La otra inclusión es trivial ya que todo punto de  $\text{Bd}(X)$  es límite de una sucesión en  $\text{Int}(X)$ . ■

Surge aquí una pregunta aparentemente inocente pero de gran calado topológico:

*¿Qué subespacios topológicos del plano son discos planos compactos?*

El Teorema de Jordan-Schöenflies clásico, cuya prueba está fuera de las posibilidades de este curso, da la respuesta completa a esta cuestión.

**Teorema 3.9 (Jordan-Schöenflies)** *Si  $C_1$  y  $C_2$  son dos curvas de Jordan en  $\mathbb{R}^2$  y  $f: C_1 \rightarrow C_2$  un homeomorfismo, existe  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  homeomorfismo tal que  $F|_{C_1} = f$ .*

Este resultado implica que *cualquier curva de Jordan  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  es frontera de (ó bordea) un disco topológico compacto en  $\mathbb{R}^2$* , y que cualquier disco topológico compacto  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  surge de esta forma. En efecto, basta con aplicarlo a cualquier homeomorfismo  $f: C \rightarrow \mathbb{S}^1$  y observar que  $X := F^{-1}(\overline{D})$  es un disco plano compacto con  $\text{Bd}(X) = C$ . Téngase también en cuenta que el borde  $\text{Bd}(X)$  de cualquier disco plano compacto  $X \subset \mathbb{R}^2$  es una curva de Jordan.

A modo de ilustración o ejercicio sobre estas cuestiones, en la siguiente proposición trataremos el caso sencillo de una curva de Jordan convexa. Obviaremos el Teorema de Jordan-Schöenflies y probaremos que ésta bordea un disco topológico plano (ver también el Teorema 3.15).

**Proposición 3.10** *Toda curva de Jordan convexa  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  bordea un disco topológico compacto en  $\mathbb{R}^2$ .*

Recordemos que una curva de Jordan  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  se dice *convexa* si para cualquiera línea recta  $L$  en  $\mathbb{R}^2$  el conjunto  $L \cap C$  es

- conexo (puede que vacío) y  $C$  está en un semiplano cerrado con borde  $L$ , ó
- contiene exactamente dos puntos distintos y  $C$  tiene puntos en los dos semiplanos abiertos determinados por  $L$ .

DEMOSTRACIÓN: Hemos de demostrar que existe un disco topológico compacto  $X \subset \mathbb{R}^2$  de forma que  $C = \text{Bd}(X)$ . Como  $C$  contiene a lo más una cantidad numerable de segmentos no triviales y no puede estar contenida en una recta (en ese caso sería un intervalo compacto, ya que es conexa y compacta, y no podría ser homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ ), existe una recta  $L$  en  $\mathbb{R}^2$  cortando  $C$  en dos puntos distintos  $p$  y  $q$ . En particular, cualquiera recta  $R$  conteniendo un segmento no trivial en  $C$  (de haberlo) corta a  $L$  a lo más en un punto. Como hay una cantidad numerable de tales  $R$ 's, existe un punto  $x_0 \in ]p, q[$  tal que  $L_\theta := \{x_0 + s\theta : s \in \mathbb{R}\}$  no contiene segmentos no triviales en  $C$  para todo  $\theta \in \mathbb{S}^1$ . Veamos que  $L_\theta$  corta a  $C$  en exactamente dos puntos distintos para todo  $\theta \in \mathbb{S}^1$ . En efecto, si  $\theta = \pm \frac{p-q}{\|p-q\|}$  eso es evidente ya que  $p, q \in L_{\frac{p-q}{\|p-q\|}} = L_{\frac{q-p}{\|p-q\|}}$ , y si  $\theta \neq \pm \frac{p-q}{\|p-q\|}$  entonces los puntos  $p$  y  $q$  de  $C$  están contenidos en distintos semiplanos de  $\mathbb{R}^2 \setminus L_\theta$ , por lo que de la conexión de  $C$  implica que  $L_\theta \cap C \neq \emptyset$ . La convexidad de  $C$  y el hecho de que  $L_\theta \cap C$  no contiene segmentos no triviales obliga a que  $L_\theta \cap C$  contenga exactamente dos puntos, uno a la izquierda de  $x_0$  y otro a la derecha de  $x_0$  en  $L_\theta$ , para todo  $\theta \in \mathbb{S}^1$ . Por tanto la semirecta  $L_\theta^+ := \{x_0 + s\theta : s \geq 0\}$  interseca a  $C$  en un *único punto*  $q_\theta$ , para cada  $\theta \in \mathbb{S}^1$ . Escribamos  $[x_0, q_\theta] = \{x_0 + sq_\theta : s \in [0, \|q_\theta - x_0\|]\}$  y definamos  $X := \cup_{\theta \in \mathbb{S}^1} [x_0, q_\theta]$ . Como  $\mathbb{S}^1 \rightarrow C$ ,  $\theta \mapsto q_\theta$ , es un homeomorfismo, la aplicación

$$H: X \rightarrow \overline{D}, \quad H(x_0 + sq_\theta) = s\theta,$$

es continua y biyectiva, y al ir de un compacto en un Hausdorff, es un homeomorfismo. Esto prueba que  $X$  es un disco topológico compacto con borde  $\text{Bd}(X) = H^{-1}(\mathbb{S}^1) = C$ , lo que concluye la demostración. ■

### 3.2. Pegado de discos topológicos por el borde

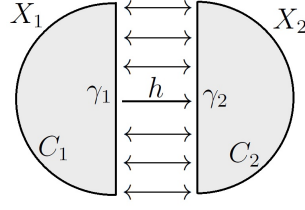
Sean  $X_1$  y  $X_2$  dos discos topológicos compactos *disjuntos*. Consideremos arcos de Jordan  $\gamma_j \subset C_j := \text{Bd}(X_j)$ ,  $j = 1, 2$ , y un homeomorfismo  $h: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ . Consideremos en  $X := X_1 \cup X_2$  la topología suma, a saber, la que tiene por abiertos las uniones de abiertos de  $X_1$  y  $X_2$ .

Vamos explicar una operación topológica elemental, que referiremos como el *pegado* de los discos  $X_1$  y  $X_2$  por los arcos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  vía el homomorfismo  $h$ . La clave es generar un nuevo espacio topológico  $\hat{X}$  a partir de  $X_1$ ,  $X_2$  y  $h: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ . Para ello definiremos la siguiente relación de equivalencia en  $X$ :

$$p \sim q \iff p = q \quad \text{ó} \quad \{p, q\} = \{r, h(r)\} \text{ para algún } r \in \gamma_1,$$

que materializará la identificación deseada. Escribiremos  $\hat{X} := X/\sim$  al espacio cociente resultante y  $\pi: X \rightarrow \hat{X}$  la correspondiente proyección. Es fácil comprobar que  $\pi|_{X_j}: X_j \rightarrow \hat{X}$  es un embebimiento topológico,  $j = 1, 2$ .

Por otra parte, es claro que  $C_j \setminus \text{Int}(\gamma_j)$  es un arco de Jordan en  $X_j$ , luego en  $X$ ,  $j = 1, 2$ . En la unión de arcos de Jordan  $C := (C_1 \setminus \text{Int}(\gamma_1)) \cup (C_2 \setminus \text{Int}(\gamma_2))$  podemos definir la relación de equivalencia restringida  $p \sim_0 q \stackrel{\text{def}}{\iff} p \sim q$ . Escribamos  $\hat{C} := C/\sim_0$  y  $\pi_0: C \rightarrow \hat{C}$  a la correspondiente proyección topológica al cociente. Por la naturaleza de  $\sim_0$ , es inmediato comprobar que el espacio  $\hat{C}$  es una circunferencia topológica, esto es, es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ . Hágase como ejercicio.



Si  $i: C \rightarrow X$  denota la inclusión, el Corolario 2.10 nos proporciona una aplicación continua  $\hat{i}: \hat{C} \rightarrow \hat{X}$  satisfaciendo  $\hat{i} \circ \pi_0 = \pi \circ i$ . Por la naturaleza de las relaciones  $\hat{i}: \hat{C} \rightarrow \hat{X}$  es un embebimiento topológico.

El siguiente resultado describe la naturaleza topológica del resultado de pegar nuestros discos. En particular, prueba que el espacio  $\hat{X}$  obtenido no depende de los discos topológicos compactos considerados, de los arcos de Jordan elegidos en su borde, ni del homeomorfismo entre ellos considerado.

**Proposición 3.11** *El espacio  $\hat{X}$  es un disco topológico compacto con  $\text{Bd}(\hat{X}) = \hat{i}(\hat{C})$ .*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$\overline{D}_1 := \overline{D} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \text{ y } \overline{D}_2 := \overline{D} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}.$$

La proposición 3.10 (o el Teorema 3.9) garantiza que  $\overline{D}_1$  y  $\overline{D}_2$  son discos topológicos compactos, por lo que existen homeomorfismos  $F_1: X_1 \rightarrow \overline{D}_1$  y  $F_2: X_2 \rightarrow \overline{D}_2$ .

Llamemos  $s$  al segmento  $[-1, 1] \times \{0\}$ . Componiendo con un conveniente homeomorfismo  $G: \overline{D}_1 \rightarrow \overline{D}_1$ , no supone pérdida de generalidad asumir que  $F_1(\gamma_1) = s$  (un tal  $G: \overline{D}_1 \rightarrow \overline{D}_1$  se genera tras extender vía el Corolario 3.6 cualquier homeomorfismo  $g: \text{Bd}(\overline{D}_1) \rightarrow \text{Bd}(\overline{D}_1)$  que aplique  $F_1(\gamma_1)$  en  $s$ ). Análogamente no supone restricción asumir  $F_2(\gamma_2) = s$ .

Recuperemos el homeomorfismo  $h: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$  sobre el que se construyó la relación de equivalencia  $\sim$  en  $X$  que dió lugar al cociente  $\hat{X}$ . Llamemos  $\{p_1, p_2\} \subset X_1$  a los extremos de  $\gamma_1$ , y observemos que  $\{h(p_1), h(p_2)\} \subset X_2$  son los extremos de  $\gamma_2$ .

Veamos que el Corolario 3.6 nos permite modificar  $F_2$  para que  $F_1(p) = F_2(h(p))$  para todo  $p \in \gamma_1$ . En efecto:

- Salvo permutar índices y cambiar  $F_2$  por  $S \circ F_2$ , donde  $S: \overline{D}_2 \rightarrow \overline{D}_2$  es la simetría  $(x, y) \mapsto (-x, y)$ , podemos asumir sin pérdida de fuerza que  $F_1(p_1) = F_2(h(p_1)) = (-1, 0) \in s$  y  $F_1(p_2) = F_2(h(p_2)) = (1, 0) \in s$ .
- Cambiando  $F_2$  por  $J \circ F_2$ , donde  $J: \overline{D}_2 \rightarrow \overline{D}_2$  es un homeomorfismo satisfaciendo

$$J|_s = (F_1|_{\gamma_1}) \circ h^{-1} \circ (F_2^{-1}|_s), \quad J|_{\text{Bd}(\overline{D}_2) \setminus s} = \text{Id}_{\text{Bd}(\overline{D}_2) \setminus s},$$

(constrúyase con ayuda del Corolario 3.6), logramos que  $F_1(p) = F_2(h(p))$  para todo  $p \in \gamma_1$ .

La aplicación

$$F: X \rightarrow \overline{D}, \quad F|_{X_1} := F_1, \quad F|_{X_2} = F_2,$$

está bien definida y es continua y sobreyectiva de un compacto en un Hausdorff, de donde es una identificación. Como la relación que induce  $\sim_F$  coincide con  $\sim$ , la Proposición 2.9 garantiza que la única aplicación  $\hat{F}: \hat{X} \rightarrow \overline{D}$  tal que  $\hat{F} \circ \pi = F$  es un homeomorfismo. Esto prueba que  $\hat{X}$  es un disco topológico cerrado.

Como  $\text{Bd}(\hat{X}) = \hat{F}^{-1}(\mathbb{S}^1) = \pi(F^{-1}(\mathbb{S}^1)) = \pi(C) = \hat{i}(\hat{C})$ , la proposición se sigue. ■



**Observación 3.12** La Proposición 3.11 se generaliza al caso  $X_j \cong \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 < 1\}$  y  $\gamma_j := \phi_j^{-1}(]-1, 1[)$ ,  $j = 1, 2$ . En este caso, si  $h: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$  es un homeomorfismo y  $\sim$  es la relación asociada en  $X = X_1 \cup X_2$  dada por

$$p \sim q \iff p = q \quad \text{ó} \quad \{p, q\} = \{r, h(r)\} \text{ para algún } r \in \gamma_1,$$

el cociente topológico  $\hat{X} := X/\sim$  es un disco topológico abierto.

**Ejercicio 3.13** Es un ejercicio ilustrativo probar que dados dos discos topológicos compactos y disjuntos  $X_1$  y  $X_2$  y un homeomorfismo  $h: \text{Bd}(X_1) \rightarrow \text{Bd}(X_2)$ , el cociente topológico  $X_1 \cup X_2/\sim$ , donde  $\sim$  denota la relación de equivalencia en  $X_1 \cup X_2$  definida por

$$p \sim q \iff p = q \quad \text{ó} \quad \{p, q\} = \{r, h(r)\} \text{ para algún } r \in \text{Bd}(X_1),$$

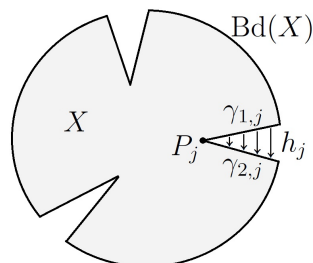
es homeomorfo a la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

Dejamos también como ejercicio el siguiente enunciado.

**Ejercicio 3.14** Sea  $X$  es un disco topológico compacto y sean  $\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j} \subset \text{Bd}(X)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , arcos de Jordan tales que  $\gamma_{1,j} \cap \gamma_{2,j} = P_j \in \text{Bd}(X)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , y  $(\gamma_{1,j} \cup \gamma_{2,j}) \cap (\gamma_{1,i} \cup \gamma_{2,i}) = \emptyset$ ,  $i \neq j$ . Sea  $h_j: \gamma_{1,j} \rightarrow \gamma_{2,j}$  un homeomorfismo tal que  $h_j(P_j) = P_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Definamos la relación en  $X$

$$p \sim q \iff p = q \quad \text{ó} \quad \{p, q\} = \{r, h_j(r)\} \text{ para algún } r \in \gamma_{1,j} \text{ y } j \in \{1, \dots, k\}.$$

Entonces  $\hat{X} := X/\sim$  es un disco topológico compacto.

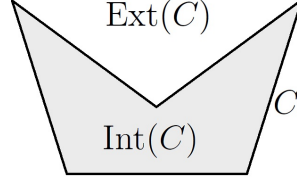


### 3.3. El Teorema de Jordan-Schöenflies para poligonales

Como complemento a lo visto en las anteriores secciones probaremos la siguiente versión suave del Teorema de Jordan-Schöenflies para el caso particular de curvas poligonales.

**Teorema 3.15** Toda curva de Jordan poligonal  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  parte el plano en dos componentes conexas con frontera común  $C$ . Una de ellas es acotada y llamada interior de  $C$ , y la otra es no acotada y llamada exterior de  $C$ . Serán denotadas respectivamente por  $\text{Int}(C)$  y  $\text{Ext}(C)$ .

Además  $\overline{\text{Int}(C)} \equiv \text{Int}(C) \cup C$ , con la topología euclidiana inducida, es un disco topológico compacto con borde  $C$  e interior  $\text{Int}(C)$ .



DEMOSTRACIÓN: Sabemos que  $C$  es la unión de una cantidad finita de segmentos de longitud euclidiana positiva:  $C = \cup_{j=1}^k s_j$ . Tomemos una recta  $L$  con dirección distinta a la de las rectas conteniendo a los segmentos  $s_j$  para todo  $j = 1, \dots, k$ . Elijamos un vector director  $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  de  $L$ .

Lo primero que vamos a ver es que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene dos componentes conexas con frontera común  $C$ . En efecto, para cada  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus C$  llamemos  $L_p := \{p + su : s \in \mathbb{R}\}$  y  $L_p^+ := \{p + su : s \geq 0\}$ . Consideremos la función

$$m: \mathbb{R}^2 \setminus C \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad m(p) := \sharp(L_p^+ \cap C),$$

donde  $\sharp(\cdot)$  significa cardinal. En el cálculo de  $\sharp(L_p^+ \cap C)$ , convenimos que los puntos  $q \in L_p^+ \cap C$  que sean vértices de  $C$  han de contarse dos veces cuando los dos segmentos de  $C$  transversos incidentes en  $q$  estén contenidos en un mismo semiplano cerrado con frontera  $L_p$ . Finalmente consideramos la aplicación

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus C \rightarrow \{1, -1\}, \quad f(p) := (-1)^{m_p}.$$

No es difícil ver que  $f$  es localmente constante, luego continua. Además  $f$  es sobreyectiva ya que si elegimos  $p \in \mathbb{R}^2$  tal que  $L_p^+$  corte transversalmente el interior de un segmento  $s_j$ , la función  $m|_{L_p^+ \setminus C}$  cambia de paridad al atravesar  $s_j$ . Por tanto  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  es la unión disjunta de los abiertos euclidianos  $\text{Int}(C) := f^{-1}(-1) \neq \emptyset$  (interior de  $C$ ) y  $\text{Ext}(C) := f^{-1}(1) \neq \emptyset$  (exterior de  $C$ ). Nótese que nuestro argumento también garantiza que  $C = \text{Fr}(\text{Int}(C)) = \text{Fr}(\text{Ext}(C))$ .

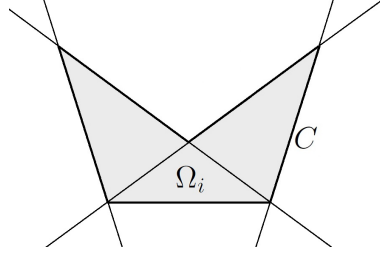
Veamos que  $\text{Int}(C)$  es conexo (análogamente se probaría la conexión de  $\text{Ext}(C)$ ). Tomemos  $p_1, p_2 \in \text{Int}(C)$  puntos arbitrarios y comprobemos que están en la misma componente conexa de  $\text{Int}(C)$ . Para  $t$  suficientemente pequeño, la geometría combinatorio elemental nos garantiza que  $C_t := \{p \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(p, C) = t\}$  es unión de dos curvas de Jordan poligonales próximas y paralelas a  $C$ , una de ellas  $C_t^- \subset \text{Int}(C)$  y la otra  $C_t^+ \subset \text{Ext}(C)$ . Es fácil concluir de aquí que, si  $\epsilon > 0$  es suficientemente pequeño, el entorno tubular  $N(C, \epsilon) := \cup_{|t| < \epsilon} C_t$  de  $C$  es un dominio arcoconexo conteniendo a  $C$  y con frontera  $C_\epsilon^- \cup C_\epsilon^+$ . La arcoconexión de  $N^-(C, \epsilon) := \cup_{-\epsilon < t < 0} C_t^- \subset \text{Int}(C)$  es también clara ya que es homeomorfo de forma natural a  $] -\epsilon, 0[ \times C$ . Como  $L_{p_j}^+$  corta a  $C$  ya que  $p_j \in \text{Int}(C)$ ,  $L_{p_j}^+$  ha de intersectar también a  $N(C, \epsilon)$ , luego a  $N^-(C, \epsilon)$ . Por tanto  $p_j$  está en la misma arcocomponente de  $\text{Int}(C)$  que  $N^-(C, \epsilon)$ ,  $j = 1, 2$ . Esto garantiza que  $p_1$  y  $p_2$  están en la misma componente conexa de  $\text{Int}(C)$  como queríamos demostrar.

Finalmente veamos que  $\text{Int}(C)$  es acotado y  $\text{Ext}(C)$  no es acotado. En efecto, si  $B$  es una bola euclidiana conteniendo a  $C$  en su interior, el conexo  $\mathbb{R}^2 \setminus B$  ha de estar en alguna de las dos componentes de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  (a saber,  $\text{Int}(C)$  o  $\text{Ext}(C)$ ). Pero  $\mathbb{R}^2 \setminus B$  contiene líneas rectas paralelas al vector  $u$ , por tanto totalmente contenidas en  $\text{Ext}(C)$ . Esto fuerza a que  $\mathbb{R}^2 \setminus B \subset \text{Ext}(C)$ , y en consecuencia a que  $\text{Int}(C) \subset B$ .

Para acabar el teorema probemos que  $\overline{\text{Int}(C)}$  es un disco topológico, esto es, que  $\overline{\text{Int}(C)} \cong \overline{D}$ . Recordemos que habíamos escrito  $C = \cup_{j=1}^k s_j$  como unión de segmentos no triviales, y llamemos  $L_j$  a la única recta de  $\mathbb{R}^2$  conteniendo al segmento  $s_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Observemos que

$$\mathbb{R}^2 \setminus (\cup_{j=1}^k L_j) = \cup_{i=1}^a \Omega_i,$$

donde cada  $\Omega_i$  es un dominio convexo con frontera una curva de Jordan poligonal,  $i = 1, \dots, a$ . Este hecho, que se puede probar fácilmente por inducción en  $k$ , se basa en



la propiedad elemental de que una línea recta que atraviesa un convexo lo parte en dos trozos convexas. Como cada  $\Omega_i$  está en una componente conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\Omega_1, \dots, \Omega_b$ ,  $1 \leq b < a$ , son las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus (\cup_{j=1}^k L_j)$  contenidas en  $\text{Int}(C)$  y escribir  $\overline{\text{Int}(C)} = \cup_{i=1}^b \overline{\Omega}_i$  como unión de regiones convexas compactas bordeadas por curvas de Jordan poligonales. Por la Proposición 3.10, cada región  $\overline{\Omega}_j$  es un disco topológico compacto con frontera una curva de Jordan poligonal contenida en  $\cup_{j=1}^k L_j$ ,  $i = 1, \dots, b$ .

Nuestro objetivo va a ser comprobar de forma inductiva que, salvo reordenación,  $X_j := \cup_{i=1}^j \overline{\Omega}_i$  con la topología euclidiana inducida es un disco topológico compacto con frontera euclidiana la poligonal borde  $\text{Bd}(X_j) \subset \cup_{j=1}^k L_j$  para todo  $j = 1, \dots, b$ . Este resultado implicará que  $\overline{\text{Int}(C)} = X_b$  es un disco topológico compacto satisfaciendo las condiciones explicitadas en el enunciado del teorema, acabando la demostración.

En efecto, podemos suponer sin pérdida de fuerza que  $X_1 = \overline{\Omega}_1$  contiene al menos uno de los segmentos que definen  $C$ . Notemos que el disco  $X_1$  satisface las condiciones anteriores gracias a la Proposición 3.10, por lo que la base de la inducción está garantizada. Admitamos que nuestra afirmación es cierta para  $X_j$ ,  $j < b$ . Para cerrar la inducción, es importante observar que  $C \not\subset \text{Bd}(X_j)$ . En efecto, en otro caso  $C = \text{Bd}(X_j)$  ya que la circunferencia topológica  $\text{Bd}(X_j) \cong \mathbb{S}^1$  no contiene subespacio propios homeomorfos a  $\mathbb{S}^1$ . Como  $j < b$ , el conexo  $\Omega_b$  no corta a  $\text{Bd}(X_j) = C$ , y por la primera parte de la demostración debe estar contenido en una de las dos componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X_j) = \mathbb{R}^2 \setminus C$ . Como  $\Omega_b \cap X_j = \emptyset$  y  $\text{Int}(C) = \text{Int}(\text{Bd}(X_j))$ , deducimos que  $\Omega_b \subset \text{Ext}(C)$ , una contradicción. Por tanto, existe una región en la lista  $\{\overline{\Omega}_{j+1}, \dots, \overline{\Omega}_b\}$ , que salvo reordenación podemos suponer es  $\overline{\Omega}_{j+1}$ , que corta a  $C$  y es contigua a  $X_j$  en el sentido de que  $\overline{\Omega}_{j+1} \cap X_j$  es un arco de Jordan. La Proposición 3.11 garantiza que  $X_{j+1} := X_j \cup \overline{\Omega}_{j+1}$  es un disco topológico compacto con borde una curva de Jordan poligonal contenida en  $\cup_{j=1}^k L_j$ . Esto cierra la inducción y concluye la demostración. ■

**Observación 3.16** *El mismo argumento del teorema anterior funciona sin grandes modificaciones cuando la curva de Jordan poligonal  $C$  se sustituye por una curva poligonal  $P$  propiamente embebida en  $\mathbb{R}^2$  con una cantidad finita de segmentos (dos de ellos lógicamente semirectas infinitas). En este caso la conclusión es que  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  tiene dos componentes conexas no acotadas con frontera común  $P$ .*

### 3.4. Discos topológicos con borde identificado

Sea  $X$  un disco topológico compacto. Escribamos por simplicidad  $C = \text{Bd}(X)$  su circunferencia topológica borde. Sea  $R_0$  una relación de equivalencia en  $C$ , y definamos la siguiente relación de equivalencia en  $X$ :

$$pRq \iff p = q \quad \vee \quad (\{p, q\} \subset C \quad \wedge \quad pR_0q).$$

Llamemos  $S$  al espacio topológico cociente  $X/R$ , y denotemos por  $\sigma: X \rightarrow S$  a la correspondiente proyección al cociente.

Observemos que:

- La inclusión natural  $i: X \setminus C \rightarrow X$  induce un embebimiento  $i_0: X \setminus C \rightarrow S$  dado por  $i_0(p) := (\sigma \circ i)(p) = \sigma(p) \in S$ .
- la inclusión  $j: C \rightarrow X$  induce un embebimiento topológico  $j_0: C/R_0 \rightarrow S$  determinado por la identidad  $\sigma \circ j = j_0 \circ \sigma_0$ , donde  $\sigma_0: C \rightarrow C/R_0$  es la proyección al cociente.

Por tanto, salvo componer con  $i_0$  podemos identificar el disco topológico abierto  $X \setminus C$  con  $\sigma(X \setminus C) \subset S$ , siendo la topología inducida por  $S$  sobre  $X \setminus C$  la euclidiana usual. Análogamente, salvo componer con  $j_0$  podemos identificar topológicamente  $C/R_0$  con el subespacio topológico  $\sigma(C) \subset S$ . Nótese que tanto  $S$  como  $\sigma(C)$  son arcoconexos al ser cocientes de espacios arcoconexos.

Vamos a estudiar algunos cocientes de discos topológicos compactos especiales con gran importancia para la teoría, como veremos en el Tema 3. Necesitamos introducir alguna notación.

Fijemos un conjunto infinito numerable  $\mathcal{U}$  de símbolos, que jugará un papel tácito o auxiliar en lo que sigue. Construyamos el conjunto  $\mathcal{U} \times \{-1, 1\}$  y denotemos por

$$\pi: \mathcal{U} \times \{1, -1\} \rightarrow \mathcal{U}$$

a la primera proyección. Por sencillez, identificaremos cada par  $(b, \epsilon) \in \mathcal{U} \times \{-1, 1\}$  con la sílaba o carácter  $b^\epsilon$ .

**Definición 3.17** *Un esquema (sobre  $\mathcal{U}$ ) es una aplicación*

$$\omega: \{1, \dots, k\} \rightarrow \mathcal{U} \times \{1, -1\}, \quad k \geq 2.$$

*El número  $k \in \mathbb{N}$  se referirá como la longitud de  $\omega$ , y escribiremos  $\text{Long}(\omega) = k$ .*

*Si  $\omega(j) = b_j^{\epsilon(j)}$ ,  $j = 1, \dots, k$ ,  $\omega$  se identificará con la expresión  $b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$ . Al conjunto  $\text{sop}(\omega) := \{b_1, \dots, b_k\}$  se le llamará soporte de  $\omega$ .*

*Un esquema  $\omega$  se dirá binario si  $\#((\pi \circ \omega)^{-1}(b)) \leq 2$  para todo  $b \in \mathcal{U}$ . Un esquema binario se dirá:*

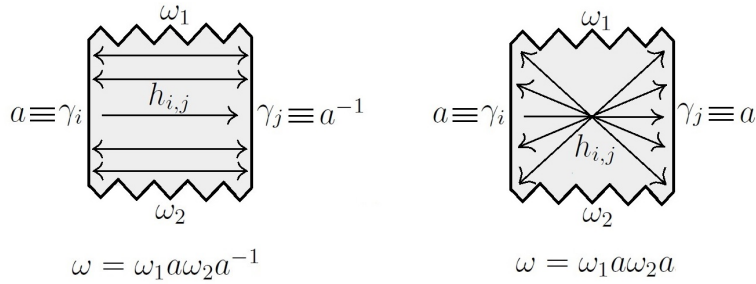
- binario puro si  $\#((\pi \circ \omega)^{-1}(b)) \in \{0, 2\}$  para todo  $b \in \mathcal{U}$ .
- binario mixto  $\#((\pi \circ \omega)^{-1}(b)) = 1$  para algún  $b \in \mathcal{U}$ .
- orientable si  $\omega$  es inyectiva, y no-orientable en caso contrario.

Por simplicidad, las sílabas  $b^1$  se escribirán simplemente  $b$ , para cada  $b \in \mathcal{U}$ . Por ejemplo, si  $b_1, b_2$  y  $b_3 \in \mathcal{U}$  entonces  $b_1 b_1 b_1^{-1} b_2 b_2 b_3^{-1}$  es un esquema de longitud 6 sobre  $\mathcal{U}$ . El esquema  $b_1 b_1^{-1} b_2 b_2 b_3^{-1}$  es binario mixto no orientable, mientras que  $b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1}$  es binario puro orientable.

**Definición 3.18** *Dado un esquema  $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$ , una representación  $\mathbf{r}$  de  $\omega$  en un disco topológico compacto  $X$  es un par  $(\mathbf{a}, \mathbf{h})$  donde*

- (I)  $\mathbf{a} := \{\gamma_j: j = 1, \dots, k\}$  *es una colección recubridora de arcos de Jordan orientados y consecutivos en  $C := \text{Bd}(X)$ , donde cada  $\gamma_j$  está ligado unívocamente a la sílaba o carácter  $b_j^{\epsilon_j}$  de  $\omega$  para cada  $j$ . Para ser más precisos:*

- $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  son dos a dos compatiblemente orientados en  $C$ ,
  - $\text{Int}(\gamma_i) \cap \text{Int}(\gamma_j) = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,
  - $\gamma_j \cap \gamma_{j+1} \neq \emptyset$ ,  $j = 1 \dots, k-1$ , y  $\gamma_k \cap \gamma_1 \neq \emptyset$ , y
  - $\cup_{j=1}^k \gamma_j = C$ .
- (II)  $\mathfrak{h}$  es una familia  $\{h_{i,j}: \gamma_i \rightarrow \gamma_j: (i,j) \in I_\omega\}$  de homeomorfismos, donde  $I_\omega := \{(i,j): 1 \leq i, j \leq k, b_i = b_j\}$ , satisfaciendo:
- $h_{i,j}$  respeta las orientaciones de  $\gamma_i$  y  $\gamma_j$  si  $\epsilon_i = \epsilon_j$ , y las revierte si  $\epsilon_i \epsilon_j = -1$ .
  - $h_{j,m} \circ h_{i,j} = h_{i,m}$  (en particular,  $h_{i,i} = \text{Id}_{\gamma_i}$  y  $h_{i,j} = h_{j,i}^{-1}$ ).



Toda representación  $\mathfrak{r}$  de  $\omega$  en  $X$  induce de forma natural una relación de equivalencia en  $X$ . Basta considerar la relación de equivalencia  $\sim_{0,\mathfrak{r}}$  en  $C$ :

$$p \sim_{0,\mathfrak{r}} q \iff \{p, q\} = \{r, h_{i,j}(r)\}, \quad r \in \gamma_i, (i,j) \in I_\omega.$$

y extenderla de forma trivial a  $X$ :

$$p \sim_{\mathfrak{r}} q \iff p = q \quad \vee \quad (\{p, q\} \subset C \quad \wedge \quad p \sim_{0,\mathfrak{r}} q).$$

Denotaremos por  $S_{\mathfrak{r}}$  y  $\Gamma_{\mathfrak{r}}$ , respectivamente, a los cocientes topológicos  $X/\sim_{\mathfrak{r}}$  y  $C/\sim_{0,\mathfrak{r}}$  determinados por la representación  $\mathfrak{r}$  de  $\omega$  en  $X$ . Análogamente escribiremos  $\sigma_{\mathfrak{r}}: X \rightarrow S_{\mathfrak{r}}$  y  $\sigma_{0,\mathfrak{r}}: C \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{r}}$  a las correspondientes proyecciones.

La información topológica sobre el espacio  $S_{\mathfrak{r}}$  está esencialmente concentrada en el subespacio  $\Gamma_{\mathfrak{r}}$ . En este punto es aconsejable introducir la siguiente:

**Definición 3.19** *Un espacio topológico  $\Gamma$  se dice un grafo conexo si existe una exhaustión  $\emptyset = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_n = \Gamma$  por subespacios topológicos conexos de  $\Gamma$ , de forma que para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  existe un arco  $\alpha_j: [0, 1] \rightarrow \Gamma$  tal que*

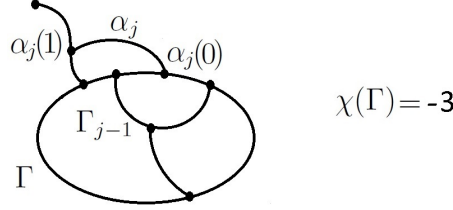
- $\alpha_j|_{[0,1]}$  es inyectiva (arco de Jordan) o  $\alpha_j|_{[0,1]}$  es inyectiva y  $\alpha_j(0) = \alpha_j(1)$  (curva de Jordan).
- $\Gamma_j = \Gamma_{j-1} \cup \alpha_j([0, 1])$ .
- $\alpha_j|_{]0,1[} \cap \Gamma_{j-1} = \emptyset$  y  $\Gamma_{j-1} \cap \{\alpha_j(0), \alpha_j(1)\} \neq \emptyset$ .

Si existe una circunferencia topológica (curva de Jordan)  $\gamma_j \subset \cup_{i=1}^j \Gamma_i$  con  $\alpha_j([0, 1]) \subset \gamma_j$ , diremos que  $\alpha_j$  añade un ciclo a  $\Gamma$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Si  $\Gamma_j$  añade un ciclo para todo  $j = 1, \dots, n$  entonces  $\Gamma$  se dirá un  $n$ -ciclo.

A los extremos de los  $\alpha_j$  se les llamará vértices de  $\Gamma$ , y se denotará por  $V(\Gamma) = \cup_{j=1}^n \{\alpha_j(0), \alpha_j(1)\}$  al conjunto de todos ellos. A las componentes conexas de  $\Gamma \setminus V(\Gamma)$  las llamaremos lados de  $\Gamma$ , y denotamos  $E(\Gamma)$  al conjunto de todos ellos. El número entero

$$\chi(\Gamma) := -\#E(\Gamma) + \#V(\Gamma),$$

que coincide con  $1 - k$  donde  $k$  es el número total de ciclos añadidos en la exahusci3n  $\emptyset = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_n = \Gamma$ , se llamará característica de Euler de  $\Gamma$ .



**Observaci3n 3.20** Claramente  $\Gamma_{\mathbf{r}}$  es un grafo conexo con vértices  $V(\Gamma_{\mathbf{r}}) = \cup_{i=1}^k \sigma_{\mathbf{r}}(V(\gamma_i))$  y lados  $E(\Gamma_{\mathbf{r}}) = \{\sigma_{\mathbf{r}}(\text{Int}(\gamma_i)) : i = 1, \dots, k\}$ . Para determinar de forma correcta los cardinales de  $V(\Gamma_{\mathbf{r}})$  y  $E(\Gamma_{\mathbf{r}})$ , y por tanto  $\chi(\Gamma_{\mathbf{r}})$ , hay que tener en cuenta las identificaciones inducidas por  $\sigma_{\mathbf{r}}$ .

**Definici3n 3.21** Si  $\omega$  es un esquema y  $\mathbf{r}$  una representaci3n suya en un disco topol3gico compacto  $X$ , el espacio topol3gico  $S_{\mathbf{r}}$  se dirá una realizaci3n de  $\omega$ . Tambi3n diremos que  $\sigma_{\mathbf{r}} : X \rightarrow S_{\mathbf{r}}$  es la identificaci3n asociada a la realizaci3n  $S_{\mathbf{r}}$ .

El subespacio  $\Gamma_{\mathbf{r}}$  de  $S_{\mathbf{r}}$  será referido como el grafo conexo borde de  $S_{\mathbf{r}}$ .

Un mismo esquema puede admitir distintas realizaciones, pero parece natural pensar que éstas son identificables topol3gicamente. La clave para comprenderlo est3 de nuevo en el Corolario 3.6, y nos la da la siguiente proposici3n.

**Proposici3n 3.22** Sean  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  dos representaciones del mismo esquema  $w$  en discos topol3gicos compactos  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente. Entonces existe un homeomorfismo  $F : X_1 \rightarrow X_2$  compatible con  $\sim_{\mathbf{r}_1}$  y  $\sim_{\mathbf{r}_2}$ , induciendo un homeomorfismo  $\hat{F} : S_{\mathbf{r}_1} \rightarrow S_{\mathbf{r}_2}$  tal que  $\sigma_{\mathbf{r}_2} \circ F = \hat{F} \circ \sigma_{\mathbf{r}_1}$  (en particular,  $\hat{F}(\Gamma_{\mathbf{r}_1}) = \Gamma_{\mathbf{r}_2}$ ). El homeomorfismo  $\hat{F}$  entre  $S_{\mathbf{r}_1}$  y  $S_{\mathbf{r}_2}$  así obtenido se dirá adaptado al esquema  $\omega$ .

DEMOSTRACI3N: Pongamos  $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$ . Llamemos  $\gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,k}$  a los arcos de Jordan orientados en  $C_l := \text{Bd}(X_l)$  asociados a  $\mathbf{r}_l$  y denotemos por  $h_{i,j}^{(l)} : \gamma_{l,i} \rightarrow \gamma_{l,j}$  a los homeomorfismos asociados a  $\mathbf{r}_l$ ,  $(i, j) \in I_{\omega}$ ,  $l = 1, 2$ .

Como los arcos los arcos  $\gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,k}$  est3n dispuestos de forma que engarzan final de  $\gamma_{l,j}$  con principio de  $\gamma_{l,j+1}$ , e igualmente con  $\gamma_{l,k}$  y  $\gamma_{l,1}$ ,  $l = 1, 2$ , existe un homeomorfismo

$$f : C_1 \rightarrow C_2 \text{ tal que } f(\gamma_{1,j}) = \gamma_{2,j} \text{ para } j = 1, \dots, k.$$

Es m3s,

- la compatibilidad de las orientaciones de los arcos  $\gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,k}$ ,  $l = 1, 2$ ,

y el hecho de que

- los homeomorfismos  $h_{i,j}^{(1)}: \gamma_{1,i} \rightarrow \gamma_{1,j}$  y  $h_{i,j}^{(2)}: \gamma_{2,i} \rightarrow \gamma_{2,j}$  preservan o revierten *ambos* la orientabilidad para todo  $(i, j) \in I_\omega$ ,

nos permite elegir  $f$  para que además

$$h_{i,j}^{(1)} = (f|_{\gamma_{2,j}})^{-1} \circ h_{i,j}^{(2)} \circ (f|_{\gamma_{1,i}}) \quad \forall (i, j) \in I_\omega.$$

En efecto, para cada  $\{(i, j), (j, i)\} \in I_\omega^2$ ,  $i \neq j$ , basta fijar primero un índice (tomaremos por ejemplo  $i$ ), tomar cualquier homeomorfismo  $f|_{\gamma_{1,i}}: \gamma_{1,i} \rightarrow \gamma_{2,i}$  preservando la orientación fijada en los arcos de Jordan, y finalmente definir

$$f|_{\gamma_{2,j}} = h_{i,j}^{(2)} \circ (f|_{\gamma_{1,i}}) \circ (h_{i,j}^{(1)})^{-1}: \gamma_{1,j} \rightarrow \gamma_{2,j}.$$

Por el Corolario 3.6 existe un homeomorfismo  $F: \overline{\text{Int}(C_1)} \rightarrow \overline{\text{Int}(C_2)}$  tal que  $F|_{C_1} = f$ . Claramente

$$p \sim_{\tau_1} q \iff F(p) \sim_{\tau_2} F(q),$$

por lo que  $F$  induce un homeomorfismo  $\hat{F}: S_{\tau_1} \rightarrow S_{\tau_2}$  tal que  $\hat{F} \circ \sigma_{\tau_1} = \sigma_{\tau_2} \circ F$ . Esto concluye la prueba. ■

Como consecuencia podemos establecer la siguiente definición.

**Definición 3.23** Si  $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$  es un esquema, su realización en cualquiera disco  $X$  auxiliar (única salvo homeomorfismos) será denotada por  $S_\omega$ . Análogamente escribiremos por  $\sigma_\omega: X \rightarrow S_\omega$  la identificación asociada. A veces es común identificar la expresión formal  $\omega$  con su realización  $S_\omega$ . De forma similar el grafo conexo borde  $\Gamma_\omega$  está unívocamente determinado salvo homeomorfismos adaptados a  $\omega$ .

En ocasiones es aconsejable utilizar realizaciones sencillas de  $\omega$  desde un punto de vista geométrico. Por ejemplo, la realización de  $\omega$  asociada a su representación canónica  $\tau_0 = (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{h}_0)$  en  $\overline{D}$  (unívocamente determinada salvo isometrías lineales del plano) en la que:

- Todos los arcos de  $\mathfrak{a}_0$  en  $\mathbb{S}^1$  tienen igual longitud euclidiana.
- Los homeomorfismos  $\mathfrak{h}_0$  son transformaciones lineales del argumento en  $\mathbb{S}^1$ , o equivalentemente, restricción de isometrías lineales euclidianas.

Las propiedades topológicas básicas de las realizaciones de esquemas están recogidas en la siguiente propocición.

**Proposición 3.24** Dado un esquema  $\omega$ , el espacio  $S_\omega$  es arcoconexo, compacto, Hausdorff y II-Axioma de Numerabilidad.

DEMOSTRACIÓN: Por conveniencia utilicemos la realización  $S_\omega \equiv S_{\tau_0}$  de  $\omega$  comentada en la Observación 2.6.

La arcoconexión y la compacidad de  $S_\omega$  se siguen de la arcoconexión y compacidad de  $\overline{D}$  junto con Observación 2.6-(f).

Dado  $p \in S_\omega$ , llamemos  $U_p(\epsilon) := \{x \in \overline{D}: \text{dist}(x, \sigma_\omega^{-1}(p)) < \epsilon\}$ . Por la simetría de la representación canónica es claro que  $U_p(\epsilon)$  es un abierto  $\sigma_\omega$ -saturado en  $\overline{D}$ . Es más, como  $\overline{D}$  está dotado de la topología euclidiana, la familia  $\{\sigma_\omega(U_p(\epsilon)): p \in S_\omega, \epsilon > 0\}$  es una base de la topología cociente en  $S_\omega$ .

Si  $p_1$  y  $p_2$  son puntos distintos en  $S_\omega$ , los conjuntos  $\sigma_\omega^{-1}(p_1)$  y  $\sigma_\omega^{-1}(p_2)$  son disjuntos y por tanto existe  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que  $U_{p_1}(\epsilon) \cap U_{p_2}(\epsilon) = \emptyset$ . De Observación 2.6-(d) se sigue que  $S_\omega$  es Hausdorff.

Por último, para probar que  $S_\omega$  es II-Axioma de Numerabilidad obsérvese que la familia de abiertos  $\sigma_\omega$ -saturados de  $\overline{D}$

$$\mathcal{B} := \{U_p(\epsilon) : p \in \sigma_\omega(D \cap \mathbb{Q}^2), \epsilon \in \mathbb{Q}\} \cup \{U_{\sigma_\omega(e^{i\theta})}(\epsilon) : \theta \in [0, 2\pi] \cap \mathbb{Q}, \epsilon \in \mathbb{Q}\}$$

satisface Observación 2.6-(e). ■



# TEMA 1: Grupo Fundamental

Francisco J. López  
Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Granada  
fjlopez@ugr.es

En este tema introduciremos el primer invariante topológico de naturaleza algebraica conocido históricamente, que motivó el nacimiento de la Topología Algebraica moderna. Nos referimos al grupo fundamental de un espacio topológico o grupo de Poincaré.

## 4. Homotopía de arcos: Grupo Fundamental

Sea  $X$  un espacio topológico.

En este tema trataremos de forma recurrente con arcos en  $X$ , esto es, con aplicaciones continuas  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ . La idea crucial para entender todo lo que sigue es la de *deformación topológica* de arcos, también conocida en la literatura como homotopía de arcos.

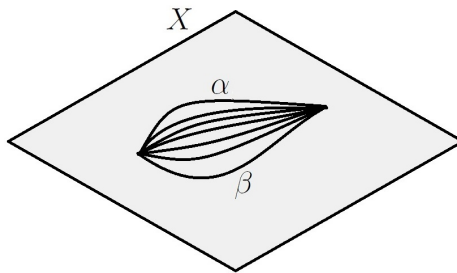
**Definición 4.1** Sean  $X$  espacio topológico y  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$  arcos en  $X$ . Una homotopía de  $\alpha$  en  $\beta$  es una aplicación continua  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  satisfaciendo

$$H(t, 0) = \alpha(t), \quad H(t, 1) = \beta(t) \quad \text{para todo } t \in [0, 1].$$

Aquí se entiende  $[0, 1] \times [0, 1]$  dotado con la topología euclidiana inducida por  $\mathbb{R}^2$ .

En caso de que  $\alpha(0) = \beta(0)$  y  $\alpha(1) = \beta(1)$ , una homotopía  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  de  $\alpha$  en  $\beta$  se dirá con extremos fijos si además

$$H(0, s) = \alpha(0) = \beta(0) \quad \text{y} \quad H(1, s) = \alpha(1) = \beta(1) \quad \text{para todo } s \in [0, 1].$$



Homotopía con extremos fijos de  $\alpha$  en  $\beta$

**Observación 4.2** Salvo mención explícita de lo contrario, en lo que sigue todas las homotopías de arcos consideradas serán con **extremos fijos**.

**Observación 4.3** Sea  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  un arco. Si  $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es un homeomorfismo tal que  $h(0) = 0$  y  $h(1) = 1$ , el arco  $\alpha \circ h$  se dirá una reparametrización de  $\alpha$  preservando la orientación.

Todo arco  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  es homotópico con extremos fijos a cualquiera reparametrización suya  $\alpha \circ h: [0, 1] \rightarrow X$  preservando la orientación. Basta con definir la homotopía:

$$H: [0, 1]^2 \rightarrow X, \quad H(t, s) = \alpha((1-s)t + sh(t)).$$

La homotopía de arcos tiene unas propiedades agradables que vamos a describir a continuación.

**Definición 4.4** *Dados  $p$  y  $q$  puntos en un espacio topológico  $X$ , denotemos*

$$\Omega_{p,q}(X) = \{\alpha: [0, 1] \rightarrow X \mid \alpha \text{ es un arco con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha(1) = q\}.$$

*Dos arcos  $\alpha, \beta \in \Omega_{p,q}(X)$  se dirán homotópicos, y se escribirá  $\alpha \simeq \beta$ , si existe una homotopía  $H$  de  $\alpha$  en  $\beta$ .*

**Proposición 4.5** *La relación binaria  $\simeq$  es de equivalencia en  $\Omega_{p,q}(X)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Hemos de comprobar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

*Reflexividad:* Dado  $\alpha \in \Omega_{p,q}(X)$ , la homotopía

$$H: [0, 1]^2 \rightarrow X, \quad H(t, s) := \alpha(t)$$

prueba que  $\alpha \simeq \alpha$ .

*Simetría:* Sean  $\alpha, \beta \in \Omega_{p,q}(X)$ . Supongamos que  $\alpha \simeq \beta$  y sea  $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$  una homotopía de  $\alpha$  en  $\beta$ . La aplicación

$$\tilde{H}: [0, 1]^2 \rightarrow X, \quad \tilde{H}(t, s) := H(t, 1 - s)$$

prueba que  $\beta \simeq \alpha$ .

*Transitividad:* Sean  $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega_{p,q}(X)$  y supongamos que  $\alpha \simeq \beta$  y  $\beta \simeq \gamma$ . Consideremos  $H_1: [0, 1]^2 \rightarrow X$  y  $H_2: [0, 1]^2 \rightarrow X$  homotopías de  $\alpha$  en  $\beta$  y de  $\beta$  en  $\gamma$ , respectivamente. La aplicación  $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$  dada por

$$H(t, s) := \begin{cases} H_1(t, 2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ H_2(t, 2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

prueba que  $\alpha \simeq \gamma$ . ■

El caso  $p = q$  es especialmente interesante y motiva la siguiente

**Definición 4.6 (Espacio de lazos)** *Dados  $X$  espacio topológico y  $p \in X$ , escribiremos  $\Omega_p(X) := \Omega_{p,p}(X)$  y llamaremos lazos con base el punto  $p$  a los arcos de  $\Omega_p(X)$ .*

*Denotaremos  $\Pi_1(X, p)$  al espacio cociente  $\Omega_p(X)/\simeq$ . Si  $\alpha \in \Omega_p(X)$  su clase en  $\Pi_1(X, p)$  se denota por  $[\alpha]$ , y a los elementos de  $\Pi_1(X, p)$  les llamaremos clases de homotopía de lazos en  $X$  con base el punto  $p$ .*

Como conjunto de elementos,  $\Pi_1(X, p)$  será el grupo fundamental de  $X$  en  $p$ . Sin embargo, para dotar a  $\Pi_1(X, p)$  de la estructura algebraica de grupo hace falta un esfuerzo mayor que pasará por introducir una ley de composición interna apropiada. La clave para poder hacerlo está en el producto de arcos introducido en la Definición 2.1, tal y como se explica en las siguientes proposiciones.

**Proposición 4.7** *Sean  $X$  un espacio topológico y puntos  $p, q, r \in X$ . Sean  $\alpha, \alpha' \in \Omega_{p,q}(X)$  y  $\beta, \beta' \in \Omega_{q,r}(X)$  arcos tales que  $\alpha \simeq \alpha'$  y  $\beta \simeq \beta'$ .*

*Entonces  $\alpha \star \beta \simeq \alpha' \star \beta'$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $H_1: [0, 1]^2 \rightarrow X$  y  $H_2: [0, 1]^2 \rightarrow X$  homotopías de  $\alpha$  en  $\alpha'$  y de  $\beta$  en  $\beta'$ , respectivamente. La aplicación  $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$  dada por

$$H(t, s) := \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ H_2(2t - 1, s) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

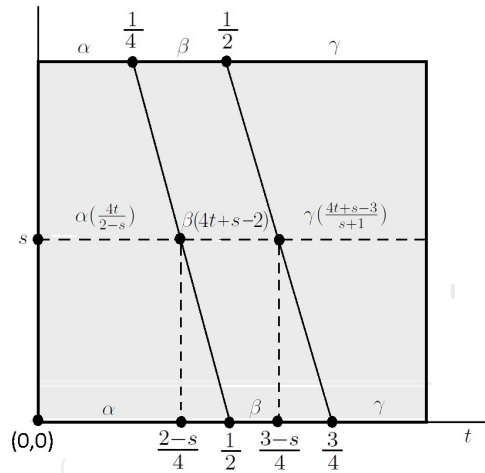
es una homotopía de  $\alpha \star \beta$  en  $\alpha' \star \beta'$ . ■

**Proposición 4.8** Sean  $X$  espacio topológico,  $p, q, r$  y  $s \in X$ , y  $\alpha \in \Omega_{p,q}(X)$ ,  $\beta \in \Omega_{q,r}(X)$ , y  $\gamma \in \Omega_{r,s}(X)$ . Las siguientes propiedades son ciertas:

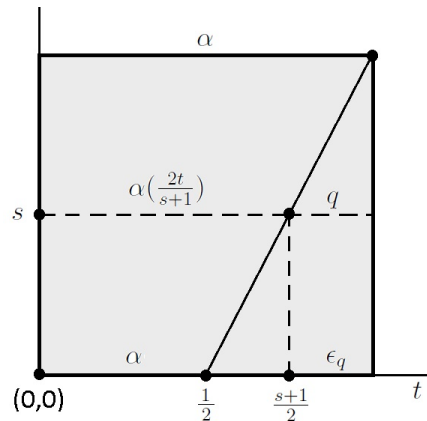
- (I)  $\alpha \star (\beta \star \gamma) \simeq (\alpha \star \beta) \star \gamma$ .
- (II)  $\epsilon_p \star \alpha \simeq \alpha \star \epsilon_q \simeq \alpha$ .
- (III)  $\alpha \star \bar{\alpha} \simeq \epsilon_p$ .

DEMOSTRACIÓN: La homotopía  $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$ ,  $H(t, s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{2-s}) & \text{si } t \in [0, \frac{2-s}{4}] \\ \beta(4t + s - 2) & \text{si } t \in [\frac{2-s}{4}, \frac{3-s}{4}] \\ \gamma(\frac{4t+s-3}{s+1}) & \text{si } t \in [\frac{3-s}{4}, 1] \end{cases}$

prueba que  $\alpha \star (\beta \star \gamma) \simeq (\alpha \star \beta) \star \gamma$ , luego (I).

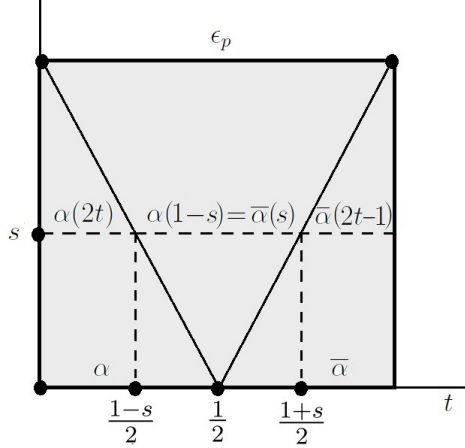


La homotopía  $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$ ,  $H(t, s) = \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{s+1}) & \text{si } t \in [0, \frac{s+1}{2}] \\ q & \text{si } t \in [\frac{s+1}{2}, 1] \end{cases}$



prueba que  $\alpha \star \epsilon_q \simeq \alpha$ . Análogamente se demuestra que  $\epsilon_p \star \alpha \simeq \alpha$ , de aquí (II).

Por último, la homotopía  $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$ ,  $H(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1-s}{2}] \\ \alpha(1-s) = \bar{\alpha}(s) & \text{si } t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}] \\ \bar{\alpha}(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1+s}{2}, 1] \end{cases}$  prueba que  $\alpha \star \bar{\alpha} \simeq_{\epsilon_p}$ , luego (III). Nótese que  $\{\alpha(2t): t \in [1, \frac{1-s}{2}]\}$  parametriza el sur-



barco  $\alpha|_{[0, 1-s]}$  de  $\alpha$ , mientras que  $\{\bar{\alpha}(2t-1): t \in [\frac{1+s}{2}, 1]\}$  parametriza el subarco  $\bar{\alpha}|_{[s, 1]}$  de  $\bar{\alpha}$ . Ambos subarcos tienen la misma traza aunque se recorren en sentido contrario, y degeneran en el punto  $p$  cuando  $s \rightarrow 1$ . ■

Como consecuencia tenemos el siguiente teorema, que es el resultado central de este tema.

**Teorema 4.9** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $p \in X$  un punto arbitrario. La ley de composición interna*

$$\star: \Pi_1(X, p) \times \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(X, p), \quad [\alpha] \star [\beta] := [\alpha \star \beta]$$

*está bien definida y dota al conjunto  $\Pi_1(X, p)$  de estructura de grupo algebraico.*

**DEMOSTRACIÓN:** La Proposición 4.7 muestra que la operación  $\star$  está bien definida en clases de equivalencia (no depende del representante elegido), mientras que la Proposición 4.8 garantiza que  $(\Pi_1(X, p), \star)$  es un grupo. ■

**Definición 4.10** *El grupo  $(\Pi_1(X, p), \star)$  es conocido como Grupo Fundamental o de Poincaré del espacio  $X$  en el punto  $p$ .*

Aunque la definición del grupo fundamental no ha requerido arcoconexión, esa propiedad topológica resulta bastante natural para que la construcción sea canónica desde un punto de vista global. Ése es el mensaje de fondo de la siguiente proposición.

**Proposición 4.11** *Sean  $p$  y  $q$  puntos en la misma arcocomponente de un espacio topológico  $X$ , y tomemos un arco  $f: [0, 1] \rightarrow X$  conectando  $p$  con  $q$ , esto es, con  $f(0) = p$  y  $f(1) = q$ . Consideremos*

$$\mathcal{U}_f: \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(X, q), \quad \mathcal{U}_f([\alpha]) = [\bar{f} \star \alpha \star f].$$

*Entonces  $\mathcal{U}_f$  está bien definido y es un isomorfismo entre los grupos fundamentales  $(\Pi_1(X, p), \star)$  y  $(\Pi_1(X, q), \star)$ .*

*Además, si  $g: [0, 1] \rightarrow X$  es otro arco conectando  $p$  y  $q$  se tiene que*

$$\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_g \iff g \star \bar{f} \in \mathcal{Z}(\Pi_1(X, p)),$$

*donde  $\mathcal{Z}(\Pi_1(X, p))$  representa el centro del grupo  $\Pi_1(X, p)$ . En particular  $\mathcal{U}_f$  no depende de  $f$  cuando  $\Pi_1(X, p)$  es abeliano.*

DEMOSTRACIÓN: La Proposición 4.7 garantiza que  $\mathcal{U}_f$  está bien definida y la Proposición 4.8 que  $\mathcal{U}_f$  es un isomorfismo de grupos con inverso  $\mathcal{U}_{\bar{f}}$ .

Por otra parte, de las anteriores proposiciones también es claro que

$$\mathcal{U}_f([\alpha]) = \mathcal{U}_g([\alpha]) \iff [\bar{f} \star \alpha \star f] = [\bar{g} \star \alpha \star g] \iff [g \star \bar{f}] \star [\alpha] = [\alpha] \star [g \star \bar{f}]$$

para todo  $[\alpha] \in \Pi_1(X, p)$ , por lo que  $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_g \iff g \star \bar{f} \in \mathcal{Z}(\Pi_1(X, p))$ . ■

**Corolario 4.12** *El grupo fundamental  $\Pi_1(X, p)$  está unívocamente determinado salvo isomorfismos por la arcocomponente  $\mathcal{C}_p$  del punto  $p$ .*

*En particular, si  $X$  es arcoconexo entonces la clase de isomorfía de  $\Pi_1(X, p)$  no depende del punto  $p \in X$ . En este caso podemos relajar la notación y escribir simplemente  $\Pi_1(X)$  sin enfatizar el punto base.*

La importancia del grupo fundamental radica en que es un invariante topológico. Este hecho se deducirá fácilmente de la siguiente proposición.

**Proposición 4.13** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y  $\varphi: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Consideremos  $\alpha, \beta \in \Omega_{p,q}(X)$  y los correspondientes  $\varphi \circ \alpha, \varphi \circ \beta \in \Omega_{\varphi(p),\varphi(q)}(Y)$ . Se tiene que*

$$\alpha \simeq \beta \implies \varphi \circ \alpha \simeq \varphi \circ \beta.$$

*En particular:*

- *La aplicación*

$$\varphi_*: \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(Y, f(p)), \quad \varphi_*([\alpha]) := [\varphi \circ \alpha]$$

*está bien definida y es un homomorfismo de grupos.*

- *Si  $\psi: Y \rightarrow Z$  es otra aplicación continua y consideramos los homomorfismos de grupos  $\psi_*: \Pi_1(Y, \varphi(p)) \rightarrow \Pi_1(Z, \psi(\varphi(p)))$  y  $(\psi \circ \varphi)_*: \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(Z, \psi(\varphi(p)))$ , entonces se tiene que  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ .*

DEMOSTRACIÓN: Para la primera parte de la proposición tomemos  $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$  una homotopía de  $\alpha$  en  $\beta$ , y observemos que  $\varphi \circ H: [0, 1]^2 \rightarrow Y$  es una homotopía de  $\varphi \circ \alpha$  en  $\varphi \circ \beta$ .

Por tanto  $\varphi_*: \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(Y, f(p))$  está bien definida. Para comprobar que  $\varphi_*$  es un morfismo de grupos tómense  $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X, p)$  y observese que

$$\varphi_*([\alpha] \star [\beta]) = \varphi_*([\alpha \star \beta]) = [\varphi \circ (\alpha \star \beta)] = [(\varphi \circ \alpha) \star (\varphi \circ \beta)] = \varphi_*([\alpha]) \star \varphi_*([\beta]).$$

El comportamiento funtorial respecto a la composición es obvio de las definiciones. ■

**Corolario 4.14 (Invarianza topológica del Grupo Fundamental)** *Si  $\varphi: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo de espacios topológicos entonces  $\varphi_*: \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(Y, f(p))$  es un isomorfismo de grupos.*

Este corolario tiene gran utilidad. Pensemos que, como consecuencia del mismo, dos espacios topológicos con grupos fundamentales no isomorfos no pueden ser homeomorfos. Este hecho tendrá implicaciones profundas como veremos más adelante.

## 5. Cálculo del grupo fundamental: ejemplos básicos

En este tema abordaremos algoritmos complejos para el cálculo del grupo fundamental. Estudiemos ahora algunos ejemplos sencillos que son de bastante utilidad.

**Ejercicio 5.1** *El grupo fundamental de un subconjunto estrellado de  $\mathbb{R}^n$  es trivial. En particular, todo subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  (luego el propio  $\mathbb{R}^n$ ) tiene grupo fundamental trivial.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos  $A \subset \mathbb{R}^n$  estrellado con centro  $x_0 \in A$ , esto es, tal que  $[x_0, x] \subset A$  para todo  $x \in A$ . Por supuesto  $A$  se entiende dotado de la topología euclidiana inducida.

Dado un lazo  $\alpha \in \Omega_{x_0}(A)$ , la aplicación bien definida

$$H: [0, 1]^2 \rightarrow A, \quad H(t, s) := (1 - s)\alpha(t) + sx_0$$

prueba que  $\alpha \simeq_{\epsilon_{x_0}}$ , y por tanto que  $\Pi_1(A, x_0) = \{[\epsilon_{x_0}]\} \equiv \{0\}$ . ■

La siguiente proposición prueba que el grupo fundamental es productivo.

**Proposición 5.2** *Sean  $X_1$  e  $X_2$  espacios topológicos,  $X_1 \times X_2$  el espacio topológico producto y  $\pi_j: X_1 \times X_2 \rightarrow X_j$ ,  $j = 1, 2$ , las proyecciones.*

*Entonces, para cualesquiera  $p \in X_1$  y  $q \in X_2$  la aplicación*

$$(\pi_{1*}, \pi_{2*}): \Pi_1(X_1 \times X_2, (p, q)) \rightarrow \Pi_1(X_1, p) \times \Pi_1(X_2, q),$$

*es un isomorfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN: Por la definición de la topología producto, las proyecciones son aplicaciones continuas. Consideremos el homomorfismo de grupos (ver Proposición 4.13)

$$\Lambda := (\pi_{1*}, \pi_{2*}): \Pi_1(X_1 \times X_2, (p, q)) \rightarrow \Pi_1(X_1, p) \times \Pi_1(X_2, q).$$

Será suficiente con probar que es un isomorfismo, y para ello bastará con garantizar que tiene una inversa. Para ello consideramos la aplicación

$$\Theta: \Pi_1(X_1, p) \times \Pi_1(X_2, q) \rightarrow \Pi_1(X_1 \times X_2, (p, q)), \quad \Theta([\alpha_1], [\alpha_2]) := [(\alpha_1, \alpha_2)].$$

No es difícil demostrar que  $\Theta$  está bien definida. En efecto, si  $\alpha_j \simeq \alpha'_j$  vía una homotopía  $H_j: [0, 1]^2 \rightarrow X_j$ ,  $j = 1, 2$ , entonces  $(\alpha_1, \alpha_2) \simeq (\alpha'_1, \alpha'_2)$  vía la homotopía  $(H_1, H_2): [0, 1]^2 \rightarrow X_1 \times X_2$ . Esto demuestra que  $\Theta$  no depende del representante elegido para la definición.

El hecho de que  $\Lambda$  y  $\Theta$  son uno inverso del otro es un ejercicio trivial. ■

Otra familia de espacios topológicos para la que es posible deducir información sobre su grupo fundamental es la de los *grupos topológicos*.

**Definición 5.3** *Un grupo topológico es un par  $(G, \cdot)$  donde:*

- *$G$  es un espacio topológico*
- *$\cdot: G \times G \rightarrow G$  es una ley de composición interna en  $G$  que le dota de estructura de grupo algebraico.*

- La aplicación  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$ , es continua, o equivalentemente,

$$\cdot: G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto a \cdot b, \quad y \quad ()^{-1}: G \rightarrow G, a \mapsto a^{-1},$$

son continuas.

**Teorema 5.4** Si  $(G, \cdot)$  es un grupo topológico y  $e \in G$  es su Elemento Neutro, entonces  $\Pi_1(G, e)$  es abeliano.

DEMOSTRACIÓN: Introduzcamos en  $\Pi_1(G, e)$  una nueva ley de composición interna, distinta a  $\star$ , asociada a la estructura de grupo topológico. Para ello definimos:

$$\cdot: \Pi_1(G, e) \times \Pi_1(G, e) \rightarrow \Pi_1(G, e), \quad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta],$$

donde  $\alpha \cdot \beta: [0, 1] \rightarrow G$  viene dado por  $(\alpha \cdot \beta)(t) := \alpha(t) \cdot \beta(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Como siempre, hay que garantizar que  $\cdot$  está bien definida en clases. Para ello consideremos  $\alpha_j \simeq \alpha'_j$  en  $\Omega_e(G)$  via una homotopía  $H_j: [0, 1]^2 \rightarrow G$ ,  $j = 1, 2$ , y observemos que  $H_1 \cdot H_2: [0, 1]^2 \rightarrow G$  (definida de forma natural) es una homotopía de  $\alpha_1 \cdot \alpha_2$  en  $\alpha'_1 \cdot \alpha'_2$ .

A continuación hagamos el siguiente cálculo:

$$\alpha \star \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t) \cdot e & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ e \cdot \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = (\alpha \star \epsilon_e) \cdot (\epsilon_e \star \beta).$$

Análogamente,

$$\alpha \star \beta(t) = \begin{cases} e \cdot \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1) \cdot e & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = (\epsilon_e \star \beta) \cdot (\alpha \star \epsilon_e).$$

Pero  $(\alpha \star \epsilon_e) \cdot (\epsilon_e \star \beta) \simeq \alpha \cdot \beta$  y  $(\epsilon_e \star \beta) \cdot (\alpha \star \epsilon_e) \simeq \beta \cdot \alpha$ , de donde  $\alpha \star \beta \simeq \alpha \cdot \beta \simeq \beta \cdot \alpha$ , y simétricamente  $\beta \star \alpha \simeq \alpha \cdot \beta \simeq \beta \cdot \alpha$ . Esto prueba que  $[\alpha] \star [\beta] = [\beta] \star [\alpha]$  y el teorema. ■

## 6. El Grupo Fundamental de $\mathbb{S}^1$

Nuestro objetivo inmediato será calcular explícitamente el grupo fundamental de la circunferencia  $\mathbb{S}^1$ . En lo que sigue identificaremos  $\mathbb{S}^1 \equiv \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ . Como  $\mathbb{S}^1$  es un grupo topológico con el producto de números complejos, a priori sabemos por el Teorema 5.4 que  $\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  ha de ser abeliano.

Un ingrediente fundamental para nuestro estudio serán las propiedades topológicas de la aplicación exponencial

$$\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad \rho(t) := e^{2\pi i t} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \quad (1)$$

que recordamos a continuación:

- $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es continua, abierta y sobreyectiva.
- $\rho$  es un homomorfismo entre los grupos  $(\mathbb{R}, +)$  y  $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ :  $\rho(t + s) = \rho(t) \cdot \rho(s)$ .
- $\rho$  es periódica con periodo fundamental 1:  $\rho(t + 1) = \rho(t)$ .
- Si  $t_0 \in \rho^{-1}(z)$ ,  $z \in \mathbb{S}^1$ , entonces  $\rho^{-1}(z) = t_0 + \mathbb{Z}$ . En particular  $\rho^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ .
- Para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\rho|_{[t_0, t_0+1[}: [t_0, t_0 + 1[ \rightarrow \mathbb{S}^1$  es biyectiva.

(f) Para todo  $z \in \mathbb{S}^1$  existe un abierto  $U \subset \mathbb{S}^1$  tal que:

- $z \in U$ .
- Si  $V$  es una arcocomponente de  $\rho^{-1}(U)$  entonces  $\rho|_V: V \rightarrow U$  es un homeomorfismo.

Todas las propiedades anteriores son bien conocidas. Quizá merezca un mínimo comentario la prueba del ítem (f). En efecto, sea  $z \in \mathbb{S}^1$  y definamos  $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{-z\}$  y nótese que  $z \in U$ . Dado  $t_0 \in \rho^{-1}(-z)$  es claro que  $\rho^{-1}(U) = \cup_{m \in \mathbb{Z}} ]t_0 + m, t_0 + m + 1[$ , donde los conjuntos  $]t_0 + m, t_0 + m + 1[$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , son las arcocomponentes de  $\rho^{-1}(U)$ . Si  $V = ]t_0 + m, t_0 + m + 1[$  es una arcocomponente cualquiera de  $\rho^{-1}(U)$ , el ítem (e) garantiza que  $\rho|_V: V \rightarrow U$  es un homeomorfismo.

Necesitaremos el siguiente resultado de levantamiento.

**Lema 6.1** *Dada  $H: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  continua con  $H(0,0) = 1$ , existe una única aplicación  $\tilde{H}: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $\rho \circ \tilde{H} = H$  y  $\tilde{H}(0,0) = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: La unicidad de  $\tilde{H}$  es evidente. En efecto, admitamos que existen dos aplicaciones  $\tilde{H}$  y  $\tilde{H}'$  satisfaciendo la tesis del Lema. Como  $\rho \circ (\tilde{H} - \tilde{H}')$  constante e igual a  $1 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ , la aplicación continua  $\tilde{H} - \tilde{H}': [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ha de tener su imagen contenida en  $\mathbb{Z}$ . Al ser  $[0,1]^2$  conexo lo mismo ocurre con  $(\tilde{H} - \tilde{H}')([0,1]^2)$ , de donde concluimos que  $\tilde{H} - \tilde{H}'$  ha de ser constante e igual a  $(\tilde{H} - \tilde{H}')(0,0) = 0$ , esto es, que  $\tilde{H} = \tilde{H}'$ .

Probemos ahora la existencia de  $\tilde{H}$ .

Consideremos el recubrimiento por abiertos de  $\mathbb{S}^1$  dado por

$$\mathcal{U} = \{U_1 := \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}, U_2 := \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}\}.$$

Como  $C = [0,1]^2$  es un espacio métrico compacto (con la distancia euclidiana inducida), existe el llamado *número de Lebesgue*  $\epsilon > 0$  para el recubrimiento abierto  $H^{-1}(\mathcal{U}) := \{H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)\}$  de  $C$ . Esto significa que cualquier subconjunto  $A \subset C$  con diámetro euclidiano  $< \epsilon$  satisface  $A \subset H^{-1}(U_j)$  para algún  $j \in \{1, 2\}$ . De aquí que podamos elegir una partición  $0 = t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$  de  $[0,1]$  tal que

$$H([t_i, t_{i+1}] \times [t_h, t_{h+1}]) \subset U_j \text{ para algún } j \in \{1, 2\}, i, h = 1, \dots, k \quad (2)$$

(basta con garantizar que  $|t_{j+1} - t_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ ).

Numeremos  $C_1, \dots, C_N$ ,  $N = k^2$ , la familia de cuadrados  $\{[t_i, t_{i+1}] \times [t_h, t_{h+1}]: i, h = 1, \dots, k\}$  de acuerdo al siguiente criterio:

- $C_1 = [t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$ .
- $K_j := \cup_{i \leq j} C_i$  es conexo,  $j = 1, \dots, N$ .
- $L_j := K_j \cap C_{j+1}$  es conexo y consiste en uno o dos lados borde comunes a las regiones poliédricas  $K_j$  y  $C_{j+1}$ .

La construcción de  $\tilde{H}$  se hará por un procedimiento inductivo. Llamemos

$$H_j = H|_{K_j}: K_j \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad j = 1, \dots, N.$$



Observemos que  $H_1(C_1) \subset U_1$  y sea  $V_1$  la arcocomponente de  $\rho^{-1}(U_1) \subset \mathbb{R}$  conteniendo a 0 (ver la propiedad (f) de la proyección  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ). Recordemos que  $\rho|_{V_1}: V_1 \rightarrow U_1$  es un homeomorfismo que aplica  $0 \in V_1$  en  $1 \in \mathbb{S}^1$ . La aplicación

$$\tilde{H}_1 := (\rho|_{V_1})^{-1} \circ H_1: K_1 \equiv C_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

es obviamente continua y satisface  $\rho \circ \tilde{H}_1 = H_1$  y  $\tilde{H}_1(0,0) = 0$ .

Supongamos construida  $\tilde{H}_j: K_j \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $\rho \circ \tilde{H}_j = H_j$  y  $\tilde{H}_j(0,0) = 0$ ,  $1 \leq j < N$ .

Procedamos a cerrar el proceso inductivo construyendo una aplicación continua  $\tilde{H}_{j+1}: K_{j+1} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaciendo  $\rho \circ \tilde{H}_{j+1} = H_{j+1}$  y  $\tilde{H}_{j+1}(0,0) = 0$ . En efecto, primero observemos que  $H_{j+1}(C_{j+1}) = H(C_{j+1}) \subset U_h$  para algún  $h \in \{1, 2\}$ ; ver la ecuación (2). Como

- $H_j(L_j) \subset H_{j+1}(C_{j+1}) \subset U_h$ ,
- $H_j(L_j)$  es arcoconexo y
- $\rho(\tilde{H}_j(L_j)) = H_j(L_j)$ ,

por la propiedad (f) de  $\rho$  existe una arcocomponente  $V_{j+1}$  de  $\rho^{-1}(U_h) \subset \mathbb{R}$  conteniendo a  $\tilde{H}_j(L_j)$  tal que  $\rho|_{V_{j+1}}: V_{j+1} \rightarrow U_1$  un homeomorfismo. La aplicación

$$\tilde{H}_{j+1} := \begin{cases} \tilde{H}_j & \text{sobre } K_j \\ (\rho|_{V_{j+1}})^{-1} \circ (H_{j+1}|_{C_{j+1}}) & \text{sobre } C_{j+1} \end{cases}$$

está bien definida, es continua, y satisface  $\rho \circ \tilde{H}_{j+1} = H_{j+1}$  y  $\tilde{H}_{j+1}(0,0) = 0$ , cerrando la inducción.

Para acabar la prueba del Lema basta con elegir  $\tilde{H} = \tilde{H}_N$ . ■

Como consecuencia tenemos la siguiente propiedad de levantamiento de arco.

**Corolario 6.2 (Propiedad del levantamiento de arco)** *Sea  $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  un arco con  $\alpha(0) = 1$ . Entonces existe un único arco  $\tilde{\alpha}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\rho \circ \tilde{\alpha} = \alpha$  y  $\tilde{\alpha}(0) = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: La unicidad es obvia razonando como en la prueba del Lema 6.1.

Procedamos a probar la existencia de  $\tilde{\alpha}$ . Para ello basta con definir

$$H: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad H(t,s) := \alpha(t),$$

que claramente satisface las hipótesis del Lema 6.1, y considerar la aplicación  $\tilde{H}$  dada en él. Obviamente el arco  $\tilde{\alpha}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\alpha}(t) := \tilde{H}(t,0)$ , resuelve el corolario. ■

**Corolario 6.3 (Propiedad del levantamiento de homotopías)** *Sean  $\alpha$  y  $\beta$  arcos en  $\mathbb{S}^1$  con  $\alpha(0) = \beta(0) = 1$  y  $\alpha(1) = \beta(1)$ . Supongamos que existe una homotopía  $H$  de  $\alpha$  en  $\beta$ . Entonces:*

- Los arcos  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  dados por el Corolario 6.2 tienen los mismos extremos.
- La aplicación  $\tilde{H}$  dada por el Lema 6.1 es una homotopía (con extremos fijos) de  $\tilde{\alpha}$  en  $\tilde{\beta}$ .

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la aplicación  $\tilde{H}$  dada en el Lema 6.1 y los levantamientos  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  dados en el Corolario 6.2.

Por la unicidad del Corolario 6.2,  $\tilde{\alpha} = \tilde{H}(\cdot, 0)$ .

Como  $\tilde{H}(0, \cdot): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es un arco con punto inicial 0 que se proyecta en el arco constante  $\epsilon_1$  en  $\mathbb{S}^1$ , por la unicidad del levantamiento de arcos concluimos que  $\tilde{H}(0, \cdot)$  es el arco constante  $\epsilon_0$  en  $\mathbb{R}$ . De aquí que, de nuevo por el Corolario 6.2,  $\tilde{\beta} = \tilde{H}(\cdot, 1)$ .

Finalmente, como  $\tilde{H}(1, \cdot): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es un arco que se proyecta en el arco constante  $\epsilon_{\alpha(1)}$  en  $\mathbb{S}^1$ , por la unicidad del levantamiento de arcos concluimos que  $\tilde{H}(1, \cdot)$  es el arco constante  $\epsilon_{\tilde{H}(1,0)}$  en  $\mathbb{R}$ .

Uniendo toda esa información concluimos que  $\tilde{H}$  es una homotopía de  $\tilde{\alpha}$  en  $\tilde{\beta}$ . ■

Este último corolario será trascendental, en lenguaje sencillo expresa que arcos homotópicos en  $\mathbb{S}^1$  se levantan a arcos homotópicos en  $\mathbb{R}$  por la aplicación  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

La construcción del levantamiento  $\tilde{\alpha}$  a partir de  $\alpha$  en el Corolario 6.2 es en cierto sentido implícita. En el caso de que  $\alpha$  sea diferenciable es posible establecer una fórmula directa para este cálculo.

**Ejercicio 6.4** Si  $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2): [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  es un arco de clase  $\mathcal{C}^1$  con  $\alpha(0) = (1, 0)$ , entonces su levantamiento vía  $\rho$  a  $\mathbb{R}$  viene dado por:

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t (\alpha_1(s)\alpha_2'(s) - \alpha_1'(s)\alpha_2(s)) ds$$

De forma explícita, y para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , el lazo  $\alpha_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ,  $\alpha_n(t) := e^{2n\pi it}$ , se levanta con condición inicial  $\tilde{\alpha}_n(0) = 0$  al arco  $\tilde{\alpha}_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\alpha}_n(t) := nt$ .

El concepto de grado de un lazo en  $\mathbb{S}^1$  será el ingrediente algebraico necesario para interpretar el grupo fundamental de la circunferencia.

**Definición 6.5** Dado un lazo  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  con base el punto  $1 \in \mathbb{S}^1$ , definimos el grado de  $\alpha$  como

$$\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z},$$

donde  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  representa el levantamiento de  $\alpha$  con condición inicial  $\tilde{\alpha}(0) = 0$ .

Nótese que la condición  $\rho \circ \tilde{\alpha} = \alpha$  implica  $\rho \circ \tilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = 1$ , por lo que efectivamente  $\deg(\alpha) \in \mathbb{Z}$  como se enfatiza en la definición. El grado es interesante para la topología porque tiene un buen comportamiento respecto a la homotopía, como muestra la siguiente

**Proposición 6.6** Dados  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  dos lazos con base el punto  $1 \in \mathbb{S}^1$ , se tiene que

$$\alpha \simeq \beta \iff \deg(\alpha) = \deg(\beta).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $\alpha \simeq \beta$ . Por el Corolario 6.3, los correspondientes levantamientos  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  con condición inicial 0 son también homotópicos:  $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$ . Esto implica que  $\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = \deg(\beta)$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$ . Consideremos los correspondientes levantamientos  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  con condición inicial 0. Al ser  $\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = \deg(\beta)$ , la aplicación continua

$$\tilde{H}: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{H}(t, s) := (1 - s)\tilde{\alpha}(t) + s\tilde{\beta}(t)$$

es una homotopía con extremos fijos que garantiza  $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$ . Al ser  $\rho$  continua,  $\alpha = \rho \circ \tilde{\alpha} \simeq \rho \circ \tilde{\beta} = \beta$  vía la homotopía  $\rho \circ \tilde{H}$ , lo que concluye la proposición. ■

Como consecuencia de este análisis podemos enunciar el teorema central de esta sección que materializa el cálculo del grupo fundamental de la circunferencia.

**Teorema 6.7** *La aplicación*

$$\deg: (\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1), \star) \rightarrow (\mathbb{Z}, +), \quad \deg([\alpha]) := \deg(\alpha),$$

*está bien definida y es un isomorfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN: La Proposición 6.6 garantiza que  $\deg: (\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1), \star) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$  está bien definida en clases de homotopía.

La inyectividad es consecuencia también de la Proposición 6.6. En cuanto a la sobreyectividad simplemente téngase en cuenta que  $\deg([\alpha_n]) = n$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ; ver Ejercicio 6.4.

Para concluir solo resta probar que  $\deg$  es un homomorfismo de grupos. En efecto, tomemos  $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ . Tenemos que

$$\deg([\alpha] \star [\beta]) = \deg([\alpha \star \beta]) = \deg(\alpha \star \beta) = \widetilde{\alpha \star \beta}(1).$$

Pero por unicidad del levantamiento es inmediato comprobar que

$$\widetilde{\alpha \star \beta}(t) = \begin{cases} \widetilde{\alpha}(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases},$$

por lo que  $\deg([\alpha] \star [\beta]) = \widetilde{\alpha \star \beta}(1) = \widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(1) = \deg([\alpha]) + \deg([\beta])$ .

Esto acaba la demostración. ■

## 6.1. $\Pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ : consecuencias

En esta sección recopilaremos algunas consecuencias topológicas del cálculo del grupo fundamental de  $\mathbb{S}^1$ .

Comenzaremos con esta proposición.

**Proposición 6.8** *Si  $\overline{D}$  denota el disco unidad cerrado  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ , no existe ninguna aplicación continua  $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $f|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Razonemos por reducción al absurdo y admitamos existe una tal  $f$ . Llamemos  $i: \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{D}$  a la aplicación inclusión, obviamente continua, y observemos que  $f \circ i: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es la aplicación  $\text{Id}_{\mathbb{S}^1}$ .

Si denotamos  $i_*: \mathbb{Z} \equiv \Pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \Pi_1(\overline{D}, 1)$  y  $f_*: \Pi_1(\overline{D}, 1) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \equiv \mathbb{Z}$  a los correspondientes homomorfismos entre grupos fundamentales, la Proposición 4.13 nos garantiza que

$$f_* \circ i_* = (\text{Id}_{\mathbb{S}^1})_* = \text{Id}_{\mathbb{Z}}.$$

Del Ejercicio 5.1 deducimos que  $\Pi_1(\overline{D}, 1) = \{[\epsilon]_1\} \equiv \{0\}$ . De aquí que  $f_*$ , y por tanto  $f_* \circ i_*$ , sea el homomorfismo nulo, una contradicción. ■

Como consecuencia podemos demostrar el siguiente teorema del punto fijo en dimensión dos, cuya generalización a dimensión arbitraria es cierta aunque requiere de otro tipo de herramientas para su demostración.

**Teorema 6.9 (Punto fijo de Brower)** *Sea  $f: \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  una aplicación continua. Entonces existe  $p_0 \in \overline{D}$  tal que  $f(p_0) = p_0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Razonemos por reducción al absurdo y admitamos que existe  $f: \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  sin puntos fijos. La contradicción se generará probando que entonces existe una aplicación continua  $r: \overline{D} \rightarrow \mathbb{S}^1$  satisfaciendo  $r|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$ , lo que es contrario a la Proposición 6.8.

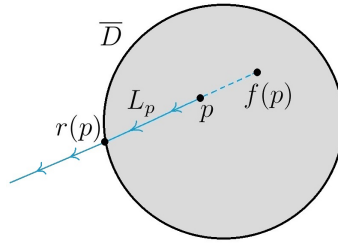
Tomemos  $p \in \overline{D}$ . Como  $p \neq f(p)$ , la convexidad estricta de  $\overline{D}$  garantiza que la semirecta

$$L_p := \{p + \lambda(p - f(p)) : \lambda \geq 0\}$$

corta  $\mathbb{S}^1$  en un único punto

$$r(p) := L_p \cap \mathbb{S}^1,$$

y que además  $r(p) = p$  cuando  $p \in \mathbb{S}^1$ .



Este hecho es evidente por consideraciones geométricas, pero no obstante admite una demostración formal analítica. En efecto, es inmediato que

$$\|p + \lambda(p - f(p))\|^2 = 1 \iff \lambda^2 \|f(p) - p\|^2 + 2\lambda \langle p, p - f(p) \rangle + (\|p\|^2 - 1) = 0.$$

Un análisis sencillo de esta ecuación nos dice:

- El discriminante  $4(\langle p, p - f(p) \rangle^2 + \|f(p) - p\|^2(1 - \|p\|^2)) \geq 0$  ya que  $\|p\| \leq 1$ , por lo que la ecuación en  $\lambda$  tiene dos raíces reales.
- Como  $p \neq f(p)$  y son de norma  $\leq 1$ ,  $\langle p, p - f(p) \rangle > 0$  y existe una raíz  $\lambda_-(p) < 0$ :

$$\lambda_-(p) = \frac{1}{\|p - f(p)\|^2} \left( -\langle p, p - f(p) \rangle - \sqrt{\langle p, p - f(p) \rangle^2 + \|p - f(p)\|^2(1 - \|p\|^2)} \right)$$

- Como el t. i. es  $\|p\|^2 - 1 \leq 0$  y el coeficiente líder  $\|f(p) - p\|^2 > 0$ , la otra raíz  $\lambda_+(p)$  ha de ser  $\geq 0$ :

$$\lambda_+(p) = \frac{1}{\|p - f(p)\|^2} \left( -\langle p, p - f(p) \rangle + \sqrt{\langle p, p - f(p) \rangle^2 + \|p - f(p)\|^2(1 - \|p\|^2)} \right)$$

Por tanto,  $r(p)$  está unívocamente determinado y viene dado por la expresión

$$r(p) = p + \lambda_+(p)(p - f(p)).$$

Esto demuestra que  $r: \overline{D} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es continua, y como  $\lambda_+(p) = 0$  cuando  $p \in \mathbb{S}^1$ , que  $r|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$ , lo que concluye la prueba. ■

Una de las consecuencias más sorprendentes del hecho de que  $\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$  es el Teorema Fundamental del Álgebra, originalmente demostrado por Gauss.

**Teorema 6.10 (Teorema Fundamental del Álgebra)** Sea  $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función polinómica de la forma

$$P(z) = a_0 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n, \quad (3)$$

donde  $n \geq 1$ .

Entonces existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $P(z_0) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que  $P(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

En ese caso podemos definir

$$H: [0, 1] \times [0, 1[ \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad H(t, s) := \frac{P(\frac{s}{1-s}e^{2\pi it})}{|P(\frac{s}{1-s}e^{2\pi it})|} \frac{|P(\frac{s}{1-s})|}{P(\frac{s}{1-s})}.$$

Esta aplicación es claramente continua en su dominio. Nuestro objetivo es probar que admite una extensión continua a  $[0, 1]^2$ , esto es, que puede ser definida con continuidad en los puntos  $(t, 1)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Esto es consecuencia de la siguiente observación.

Consideremos una sucesión  $\{(t_k, s_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, 1] \times [0, 1[$  convergiendo a  $(t, 1)$ , donde  $t \in [0, 1]$ . Se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(t_k, s_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P(\frac{s_k}{1-s_k}e^{2\pi it_k})}{|P(\frac{s_k}{1-s_k}e^{2\pi it_k})|} \frac{|P(\frac{s_k}{1-s_k})|}{P(\frac{s_k}{1-s_k})} = e^{2\pi i t} = \alpha_n(t),$$

donde simplemente se ha tenido en cuenta que  $\{\frac{s_k}{1-s_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$ ,  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow t$ , la expresión de  $P(z)$  en (3), y el álgebra básica de límites.

Por tanto, extendiendo  $H$  a  $[0, 1] \times \{1\}$  por la expresión

$$H(t, 1) = e^{2\pi i t}, \quad t \in [0, 1],$$

construimos una aplicación continua  $H: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

Una comprobación estándar nos dice que  $H(t, 0) = H(0, s) = H(1, s) = 1$ , por lo que  $H$  es una homotopía en  $\mathbb{S}^1$  de  $\epsilon_1$  en  $\alpha_n$ . Esto contradice que  $n = \deg(\alpha_n) \neq 0 = \deg(\epsilon_1)$  (ver Teorema 6.7), concluyendo la prueba. ■

## 7. Equivalencias homotópicas

Como bien sabemos dos espacios homeomorfos tienen el mismo grupo fundamental, salvo isomorfismos. Sin embargo existen condiciones topológicas más débiles que el homeomorfismo que nos permiten extraer la misma conclusión. En esta sección las estudiaremos con detalle.

**Definición 7.1** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subset X$  un subespacio topológico. Una retracción de  $X$  en  $A$  es una aplicación continua  $r: X \rightarrow A$  satisfaciendo  $r|_A = \text{Id}_A$ , o equivalentemente,  $r \circ i = \text{Id}_A$  donde  $i: A \rightarrow X$  es la aplicación inclusión. En este caso se dice que  $A$  es un retracto de  $X$ .

**Proposición 7.2** Si  $r: X \rightarrow A$  es una retracción,  $i: A \rightarrow X$  es la aplicación inclusión y  $a \in A$ , entonces

- $r_*: \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1(A, a)$  es un epimorfismo y

- $i_*: \Pi_1(A, a) \rightarrow \Pi_1(X, a)$  es un monomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Como  $r \circ i = \text{Id}_A$  deducimos que  $(r \circ i)_* = r_* \circ i_* = (\text{Id}_A)_* = \text{Id}_{\Pi_1(A, a)}$ . La proposición se sigue trivialmente. ■

El ejemplo más simple de retracción es la aplicación constante  $r: X \rightarrow \{p\}$  para cada  $p \in X$ . En otras palabras, todo punto es un retracto del espacio que lo contiene.

**Ejercicio 7.3** Las siguientes aplicaciones entre espacios euclidianos son retracciones:

- $n: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $n(q) = \frac{q}{\|q\|}$ .
- $n|_{\overline{B}(0,1) \setminus \{0\}}: \overline{B}(0,1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$ , donde  $\overline{B}(0,1) = \{p \in \mathbb{R}^n: \|p\| \leq 1\}$ .
- $p: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \{0\} \equiv \mathbb{S}^1$ ,  $p(x, y, z) := (x, y, 0)$ .
- $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) := (\frac{1}{\|(x,y)\|}(x, y), z)$ .

## 7.1. Retractos de deformación

Una situación particularmente interesante es cuando un espacio puede ser deformado en un retracto suyo de forma continua. El concepto que da sentido a esta idea se trata en la siguiente definición.

**Definición 7.4** Dado un espacio topológico  $X$  y un subespacio suyo  $A \subset X$ , se dice que  $A$  es un retracto de deformación de  $X$  si existen una retracción  $r: X \rightarrow A$  y una aplicación continua  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  satisfaciendo:

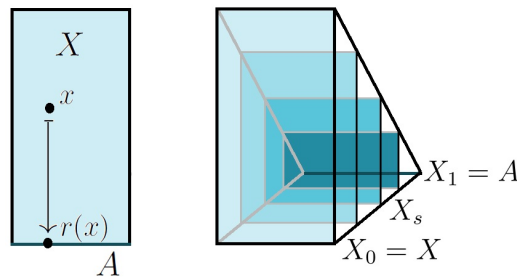
- $H(x, 0) = x$  para todo  $x \in X$ .
- $H(x, 1) = r(x)$  para todo  $x \in X$ .

Si adicionalmente

$$H(a, s) = a \text{ para todo } (a, s) \in A \times [0, 1],$$

entonces se dice que  $A$  es un retracto fuerte de deformación de  $X$ .

A las aplicaciones  $H$  y  $r$  se les llamará una deformación y retracción asociadas al retracto (fuerte) de deformación  $A$  de  $X$ , respectivamente.



Si el parámetro  $s$  en la anterior definición se interpreta como medida del tiempo transcurrido, las aplicaciones  $\{H_s := H(\cdot, s): s \in [0, 1]\}$  materializan una deformación entre la aplicación identidad en  $X$  (instante  $s = 0$ ) y la retracción  $r: X \rightarrow A$  (instante  $s = 1$ ). En otras palabras, si denotamos por  $X_s := H_s(X)$ ,  $s \in [0, 1]$ , los subespacios  $\{X_s: s \in [0, 1]\}$  reflejan una deformación continua del espacio total  $X$  ( $s = 0$ ) en el subespacio (retracto)  $A \subset X$  ( $s = 1$ ).

**Ejercicio 7.5** Las siguientes aplicaciones realizan retracts fuertes de deformación:

- El centro  $p_0$  de un conjunto estrellado  $A$  (en un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ ) es un retracto fuerte de deformación de  $A$ :

$$H: A \times [0, 1] \rightarrow A, H(q, s) := (1 - s)q + sp_0.$$

- $\mathbb{S}^n$  es un retracto fuerte de deformación de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ :

$$H: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, h(q, s) := (1 - s)q + sn(q),$$

$$\text{donde } n: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n, n(q) = \frac{q}{\|q\|}.$$

- $\mathbb{S}^n$  es un retracto fuerte de deformación de  $\overline{B}(0, 1) \setminus \{0\}$ :

$$H: \overline{B}(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \overline{B}(0, 1) \setminus \{0\}, h(q, s) := (1 - s)q + s(n|_{\overline{B}(0, 1) \setminus \{0\}})(q).$$

- $\mathbb{S}^1$  es un retracto fuerte de deformación de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ :

$$H: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, H(q, s) = (1 - s)q + sp(q),$$

$$\text{donde } p: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \{0\} \equiv \mathbb{S}^1, p(x, y, z) := (x, y, 0).$$

- $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  es un retracto fuerte de deformación de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ :

$$H: \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}, H(q, s) = (1 - s)q + sf(q),$$

$$\text{donde } f: \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, f(x, y, z) := \left( \frac{1}{\|(x, y)\|}(x, y), z \right).$$

**Observación 7.6** Si  $A$  es un retracto de deformación de  $X$ ,  $\{C_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$  son las arcocomponentes de  $A$  y  $\hat{C}_\alpha$  es la arcocomponente de  $X$  conteniendo a  $C_\alpha$  para cada  $\alpha \in \Lambda$ , entonces:

- $r(\hat{C}_\alpha) = C_\alpha$  para todo  $\alpha \in \Lambda$ , y por tanto  $\hat{C}_\alpha \neq \hat{C}_\beta$ ,  $\alpha \neq \beta$ .
- $\{\hat{C}_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$  con las arcocomponentes de  $X$ .
- Si  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  y  $r: X \rightarrow A$  son una deformación y retracción asociadas a  $A$  como retracto de deformación de  $X$ , entonces  $H|_{\hat{C}_\alpha \times [0, 1]}: \hat{C}_\alpha \times [0, 1] \rightarrow \hat{C}_\alpha$  y  $r|_{\hat{C}_\alpha}: \hat{C}_\alpha \rightarrow C_\alpha$  son una deformación y retracción asociadas a  $C_\alpha$  como retracto de deformación de  $\hat{C}_\alpha$ .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos  $r: X \rightarrow A$  y  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  una retracción y deformación asociadas a  $A$  como retracto de deformación de  $X$ .

Si  $p \in X$ , la curva  $H(p, s)$  conecta  $p$  y  $r(p) \in A$ , de donde se deduce que la arcocomponente de  $p$  en  $X$  está en la familia  $\{\hat{C}_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ . Esto prueba que  $\{\hat{C}_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$  son las arcocomponentes de  $X$ .

Por otra parte, sean  $p$  y  $q \in A \cap \hat{C}_\alpha$  para algún  $\alpha \in \Lambda$ , y sea  $c: [0, 1] \rightarrow X$  un arco en  $X$  conectándolos, con traza necesariamente en  $\hat{C}_\alpha$ . Entonces  $r(c(t))$  es un arco en  $A$  conectando  $p = r(p)$  y  $q = r(q)$ , por lo que  $p$  y  $q$  están en la misma arcocomponente de  $A$  (a saber,  $C_\alpha$ ). Esto prueba que  $r(\hat{C}_\alpha) = C_\alpha$  para todo  $\alpha$ , y por tanto que  $\hat{C}_\alpha \neq \hat{C}_\beta$ ,  $\alpha \neq \beta$ .

Como  $\hat{C}_\alpha \times [0, 1]$  es arcoconexo y  $H$  es continua,  $H(\hat{C}_\alpha \times [0, 1])$  está contenido en una arcocomponente de  $X$ . De otro lado  $H(\hat{C}_\alpha \times \{1\}) = r(\hat{C}_\alpha) = C_\alpha$ , de donde inferimos que  $H(\hat{C}_\alpha \times [0, 1])$  está contenido en la arcocomponente de  $X$  que contiene a  $C_\alpha$ , a saber  $\hat{C}_\alpha$ . De aquí que  $H|_{\hat{C}_\alpha \times [0, 1]}: \hat{C}_\alpha \times [0, 1] \rightarrow \hat{C}_\alpha$  sea una deformación que realiza  $C_\alpha$  como retracto de deformación de  $\hat{C}_\alpha$ , con retracción asociada  $r|_{\hat{C}_\alpha}: \hat{C}_\alpha \rightarrow C_\alpha$ .

■

A veces es útil el siguiente resultado.

**Proposición 7.7** *Sea  $F: X \rightarrow Y$  un homeomorfismo. Si  $A$  es un retracto (fuerte) de deformación de  $Y$  entonces  $F^{-1}(A)$  es un retracto (fuerte) de deformación de  $X$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$  y  $r: Y \rightarrow A$  son una deformación y retracción asociadas a  $A$  como retracto (fuerte) de deformación de  $Y$ , basta observar que la aplicación continua

$$\hat{H}: X \times [0, 1] \rightarrow X, \quad \hat{H}(x, s) := (F^{-1} \circ H)((F(x), s)),$$

realiza a  $F^{-1}(A)$  como retracto (fuerte) de deformación de  $X$ . ■

**Ejercicio 7.8** *Denotemos por  $B(p, \epsilon)$  a la bola euclidiana  $\{q \in \mathbb{R}^n: \|q - p\| < \epsilon\}$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  y  $\epsilon > 0$ , y sean  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$ .*

*Entonces  $\overline{B}(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}$  es un retracto fuerte de deformación de  $B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que  $\overline{B}(p, \epsilon) = \{q \in \mathbb{R}^n: \|q - p\| \leq \epsilon\}$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  y  $\epsilon > 0$ . La aplicación

$$r: B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\} \rightarrow \overline{B}(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}, \quad r(q) = \begin{cases} q & \text{si } q \in \overline{B}(p, \epsilon_1) \\ \epsilon_1 \frac{q-p}{\|q-p\|} + p & \text{si } q \in B(p, \epsilon_2) \setminus \overline{B}(p, \epsilon_1) \end{cases},$$

es una retracción de  $B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}$  en  $\overline{B}(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}$ , mientras que la deformación

$$H: (B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}) \times [0, 1] \rightarrow B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}, \quad H(q, s) = (1-s)q + sr(q),$$

prueba que  $\overline{B}(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}$  es un retracto fuerte de deformación de  $B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}$  con retracción asociada  $r$ . ■

**Teorema 7.9** *Sea  $X$  un espacio topológico, y sea  $A \subset X$  un retracto fuerte de deformación con  $r: X \rightarrow A$  una retracción asociada. Entonces dado  $a \in A$  se tiene que:*

$$r_*: \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1(A, a) \text{ e } i_*: \Pi_1(A, a) \rightarrow \Pi_1(X, a) \text{ son isomorfismos,}$$

*uno inverso del otro.*

DEMOSTRACIÓN: Para evitar ambigüedades, si un lazo  $\alpha$  basado en  $a$  tiene traza contenida en  $A$ , denotaremos por  $[\alpha]_A \in \Pi_1(A, a)$  su clase de homotopía en  $A$ , y análogamente por  $[\alpha]_X \in \Pi_1(X, a)$  su clase de homotopía en  $X$ .

Siguiendo la demostración de la Proposición 7.2, es suficiente con garantizar que  $r_*: \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1(A, a)$  es un monomorfismo de grupos. Para ello tomemos  $[\alpha]_X \in \Pi_1(X, a)$  y supongamos que  $r_*([\alpha]_X) = [\epsilon_a]_A$ . Hemos de probar que  $[\alpha]_X = [\epsilon_a]_X$ .

Consideremos una deformación  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  asociada a  $A$  como retracto fuerte de  $X$ , con  $r: X \rightarrow A$  como retracción asociada. Es fácil comprobar que la aplicación continua

$$\hat{H}: [0, 1]^2 \rightarrow X, \quad \hat{H}(t, s) = H(\alpha(t), s)$$

es una homotopía *con extremos fijos* (aquí se usa que  $H(a, s) = a$  para todo  $a \in A$ ) entre los lazos  $H(\cdot, 0) = \alpha$  y  $H(\cdot, 1) = r \circ \alpha$  en el espacio  $X$ , y por tanto  $[\alpha]_X = [r \circ \alpha]_X$ . Pero por ser  $r_*([\alpha]_X) = [\epsilon_a]_A$ , el lazo  $r \circ \alpha$  (que está contenido en  $A$ ) se deforma homotópicamente en el espacio  $A$  (¡luego en el espacio  $X$ !) en el lazo  $\epsilon_a$ . Esto implica que  $[r \circ \alpha]_X = [\epsilon_a]_X$ , de donde  $[\alpha]_X = [\epsilon_a]_X$  como queríamos demostrar. ■



**Definición 7.10** *Un espacio topológico  $X$  se dice contráctil si admite como retracto de deformación a un punto  $\{p_0\} \subset X$ . En caso de que  $\{p_0\}$  sea retracto fuerte de deformación de  $X$  diremos que el espacio es fuertemente contráctil.*

Todo espacio contráctil es arcoconexo por la Observación 7.6. Como comentamos en el Ejercicio 7.5, todo estrellado (luego todo convexo) en  $\mathbb{R}^n$  es fuertemente contráctil. En particular el propio  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 7.11** *Un espacio topológico  $X$  se dice simplemente conexo si es arcoconexo y  $\Pi_1(X, p) = \{[\epsilon_p]\}$  para algún  $p \in X$  (luego para todo  $p \in X$ ).*

Como consecuencia del Teorema 7.9 tenemos el siguiente:

**Corolario 7.12** *Todo espacio topológico fuertemente contráctil es simplemente conexo.*

Veremos más adelante (ver Corolario 7.21) que este enunciado es cierto para espacios contráctiles.

**Ejercicio 7.13** *Como consecuencia del Ejercicio 7.5 y del Teorema 7.9:*

- *Todo subconjunto estrellado de  $\mathbb{R}^n$  es simplemente conexo. Esto se aplica a subconjuntos  $A \subset \mathbb{R}^n$  convexos (estrellados desde cualquiera de sus puntos), y por tanto al propio  $\mathbb{R}^n$ .*
- *Si  $p \in \mathbb{S}^n$  entonces  $\Pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, p)$  es isomorfo a  $\Pi_1(\mathbb{S}^n, p)$ .*
- *Si  $p \in \mathbb{S}^1$  entonces  $\Pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (p, 0))$  es isomorfo a  $\Pi_1(\mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}$ .*
- *Si  $p \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  entonces  $\Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}, p)$  es isomorfo a  $\Pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p) \cong \mathbb{Z}$ .*

**Ejercicio 7.14** *El grupo fundamental de la Cinta de Möbius es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que la cinta de Möbius compacta  $M$  se define como el cociente topológico del cuadrado euclidiano  $[-1, 1]^2$  bajo la relación de equivalencia

$$(x, y)R(x', y') \iff (x, y) = (x', y') \vee (\{x, x'\} = \{-1, 1\} \wedge y = -y').$$

Normalmente se escribe  $M = [0, 1]^2/R$ . La cinta de Möbius no compacta  $M_0$  se genera a partir de la misma relación de equivalencia pero sobre la banda vertical  $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ :  $M_0 := ([-1, 1] \times \mathbb{R})/R$ . Por brevedad sólo trataremos el caso de la compacta, aunque el de  $M_0$  es totalmente análogo y se llega a la misma conclusión.

Si llamamos  $\pi: [-1, 1]^2 \rightarrow M$  a la proyección al cociente, el subespacio topológico  $S := \pi([-1, 1] \times \{0\}) \subset M$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ . La clave es observar que  $S$  es un retracto fuerte de deformación de  $M$  y usar el Teorema 6.7. En efecto, la retracción viene dada por la única aplicación  $r: M \rightarrow S$  tal que  $r \circ \pi = \pi \circ r_0$ , donde  $r_0: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1] \times \{0\}$ ,  $r_0(x, y) = (x, 0)$ , mientras que la deformación  $H: M \times [0, 1] \rightarrow M$  viene dada por la expresión  $H(\pi(x, y), s) := \pi((1-s)(x, y) + s(x, 0))$ . Ambas aplicaciones están bien definidas y son continuas por la teoría básica de identificaciones. ■

El siguiente Teorema tendrá muchas aplicaciones prácticas.

**Teorema 7.15** *Sea  $X$  un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo. Supongamos que la topología de  $X$  admite una base  $\mathcal{B}$  satisfaciendo*

(I)  $\mathcal{B}$  es numerable (luego  $X$  es II-Axioma de Numerabilidad).

(II)  $B$  es simplemente conexo para todo  $B \in \mathcal{B}$ .

Entonces  $\Pi_1(X, x)$  es numerable para todo  $x \in X$ .

La condición de simple-conexión en el ítem (ii) se puede relajar por la de semilocal simple conexión (ver Definición 14.5), sin que ello afecte a la tesis del teorema.

DEMOSTRACIÓN: Dado un par  $B, B' \in \mathcal{B}$  (puede ser  $B = B'$ ), nuestras hipótesis implican que cada arco componente de  $B \cap B'$  es un abierto de  $X$ , y por tanto contiene un abierto de  $\mathcal{B}$ . Como la familia  $\mathcal{C}_{B, B'}$  de arco componentes de  $B \cap B'$  está formada por conjuntos disjuntos dos a dos y  $\mathcal{B}$  es numerable, deducimos que  $\mathcal{C}_{B, B'}$  ha de ser numerable. Por tanto,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}} := \bigcup_{(B, B') \in \mathcal{B}^2} \mathcal{C}_{B, B'}$$

es igualmente numerable. Para cada  $C \subset \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$  elijamos  $x_C \in C$  y formemos el conjunto claramente numerable

$$\Xi := \{x_C : C \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}\}.$$

Para cada  $B \in \mathcal{B}$  y puntos  $x, y \in B \cap \Xi$ , fijemos un arco  $\gamma_{x, y}^B : [0, 1] \rightarrow B$  con  $\gamma_{x, y}^B(0) = x$  y  $\gamma_{x, y}^B(1) = y$ . Nuevamente la familia de arcos

$$\Gamma := \{\gamma_{x, y}^B : B \in \mathcal{B}, x, y \in B \cap \Xi\}$$

es numerable.

Fijemos  $x_0 \in \Xi$ . Nuestro objetivo va a ser demostrar que  $\Pi_1(X, x_0)$  es numerable. Introduzcamos una familia numerable de lazos en  $X$  con base  $x_0$ , que llamaremos *especiales*. Un lazo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  se dirá *especial* si  $\gamma = \gamma_1 \star \dots \star \gamma_k$  con:

- $\gamma_j = \gamma_{y_{j-1}, y_j}^{B_j} \in \Gamma$ , donde  $y_{j-1}, y_j \in B_j \cap \Xi$  para  $2 \leq j \leq k-1$ .
- $\gamma_1 = \gamma_{x_0, y_1}^{B_1}$  y  $\gamma_k = \gamma_{y_k, x_0}^{B_k}$ , donde  $x_0, y_1 \in B_1 \cap \Xi$  e  $y_k, x_0 \in B_k \cap \Xi$ .

La clave de la demostración se centra en garantizar que para todo  $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$  existe  $\gamma \in [\alpha]$  tal que  $\gamma$  es especial. Esto probaría que  $\Pi_1(X, x_0)$  está descrito por las clases de homotopía de los lazos especiales, y por tanto es numerable.

Tomemos un lazo  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  con base  $x_0$  arbitrario, y consideremos el recubrimiento abierto  $\{\alpha^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$  del compacto  $[0, 1]$ . La existencia de número de Lebesgue para este recubrimiento y un razonamiento típico nos permite encontrar  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  tales que  $\alpha([t_{j-1}, t_j]) \subset B_j \in \mathcal{B}$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Definamos  $\alpha_j : [0, 1] \rightarrow B_j \subset X$ ,  $\alpha_j(s) = \alpha((1-s)t_{j-1} + st_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , y observemos que  $\alpha = \alpha_1 \star \dots \star \alpha_k$ . Sea  $C_j$  la arco componente de  $B_j \cap B_{j+1}$  conteniendo a  $\alpha_j(1) = \alpha_{j+1}(0) = \alpha(t_j)$ , y llamemos  $y_j = x_{C_j} \in \Xi$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ . Sea  $\sigma_j : [0, 1] \rightarrow C_j \subset B_j \cap B_{j+1}$  un arco con  $\sigma_j(0) = y_j$  y  $\sigma_j(1) = \alpha(t_j)$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ .

Obsérvese que  $\alpha_j \simeq \bar{\sigma}_{j-1} \star \gamma_{y_{j-1}, y_j}^{B_j} \star \sigma_j$  ya que ambos lazos están contenidos en el simplemente conexo  $B_j$  y conectan los puntos  $\alpha(t_{j-1})$  y  $\alpha(t_j)$ ,  $2 \leq j \leq k-1$ . Por un razonamiento similar  $\alpha_1 \simeq \gamma_{x_0, y_1}^{B_1} \star \sigma_1$  y  $\alpha_k \simeq \bar{\sigma}_{k-1} \star \gamma_{y_{k-1}, x_0}^{B_k}$ .

Por tanto

$$\alpha \simeq (\gamma_{x_0, y_1}^{B_1} \star \sigma_1) \star \dots \star (\bar{\sigma}_{j-1} \star \gamma_{y_{j-1}, y_j}^{B_j} \star \sigma_j) \star \dots \star (\bar{\sigma}_{k-1} \star \gamma_{y_{k-1}, x_0}^{B_k}),$$

esto es,

$$\alpha \simeq \gamma_{x_0, y_1}^{B_1} \star \dots \star \gamma_{y_{k-1}, x_0}^{B_k}.$$

Esto prueba que  $\alpha$  es homotópico a un lazo especial y concluye la demostración. ■

## 7.2. Homotopía de aplicaciones: tipo de homotopía

La siguiente definición trata sobre la idea de deformación en el contexto más general posible.

**Definición 7.16** *Dados dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , dos aplicaciones continuas  $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow Y$  se dicen homotópicas, y lo escribiremos  $\varphi_1 \simeq \varphi_2$ , si existe una aplicación continua  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  satisfaciendo:*

$$H(x, 0) = \varphi_1(x) \quad \forall x \in X \quad \wedge \quad H(x, 1) = \varphi_2(x) \quad \forall x \in X.$$

*Si  $A \subset X$ , las aplicaciones continuas  $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow Y$  se dirán homotópicas relativas a  $A$ , y escribiremos  $\varphi_1 \simeq_A \varphi_2$ , si existe  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  como arriba satisfaciendo además:*

$$H(a, s) = \varphi_1(a) = \varphi_2(a) \text{ para todo } a \in A.$$

Por ejemplo, si  $A \subset X$  es un retracto de deformación vía  $H$  con una retracción asociada  $r$ , es inmediato que  $\text{Id}_X \simeq r$ . Si  $A$  es un retracto fuerte de deformación de  $X$  se tiene  $\text{Id}_X \simeq_A r$ .

Cuando  $X = [0, 1]$  las aplicaciones  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2$ , son arcos y la relación  $\simeq$  se corresponde con la homotopía libre (sin extremos fijos) de arcos. La relación  $\simeq_{\{0,1\}}$  no es sino la homotopía de extremos fijos  $\simeq$  que sirvió para construir el grupo fundamental.

El siguiente resultado establece que cualesquiera aplicaciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre grupos fundamentales, salvo isomorfismos naturales.

**Teorema 7.17** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sean  $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas. Supongamos que  $\varphi_1 \simeq \varphi_2$  vía  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , fijemos  $x_0 \in X$  y llamemos  $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$  al arco uniendo  $\varphi_1(x_0)$  y  $\varphi_2(x_0)$  definido por  $\gamma(s) := H(x_0, s)$ .*

*Dados los homomorfismos de grupos*

$$(\varphi_1)_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi_1(x_0)), \quad (\varphi_2)_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi_2(x_0))$$

*y el isomorfismo  $\mathcal{U}_\gamma: \Pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi_2(x_0))$  (ver Proposición 4.11), se tiene que*

$$\mathcal{U}_\gamma \circ (\varphi_1)_* = (\varphi_2)_*.$$

*En particular los homomorfismos  $(\varphi_1)_*$  y  $(\varphi_2)_*$  son iguales salvo isomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $C = [0, 1]^2$  y  $\text{Bd}(C) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ , donde

$$L_1 = \{1\} \times [0, 1], \quad L_2 = [0, 1] \times \{1\}, \quad L_3 = \{0\} \times [0, 1], \quad L_4 = [0, 1] \times \{0\}.$$

Consideremos arcos de Jordan (esto es, embebimientos)  $\alpha_j: [0, 1] \rightarrow C$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , parametrizados para que:

- $\alpha_j([0, 1]) = L_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , y
- $\alpha := \alpha_1 \star \alpha_2 \star \alpha_3 \star \alpha_4$  está bien definido.

Obsérvese que  $\alpha$  es un lazo en  $C$  con base  $(1, 0)$  y traza  $\text{Bd}(C)$ . Además  $\alpha$  es uno a uno excepto por los puntos inicial y final que coinciden con  $(1, 0)$ .

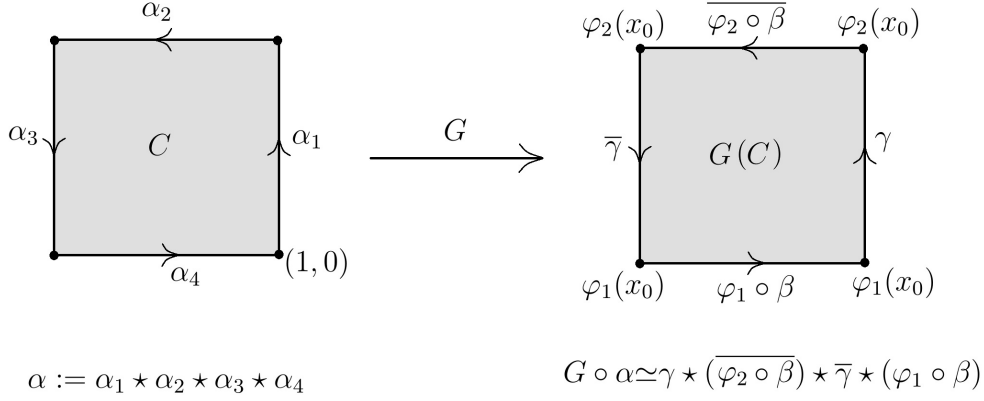
Tomemos  $[\beta] \in \Pi_1(X, x_0)$  y definamos la aplicación continua  $G: C \rightarrow Y$ ,  $G(t, s) = H(\beta(t), s)$ . Como  $\alpha$  es un lazo con base  $(1, 0)$  en  $C$ , el arco  $G \circ \alpha$  es un lazo con base

$G((1,0)) = \varphi_1(x_0)$  en  $Y$ . Teniendo en cuenta que  $H(\cdot, j) = \varphi_{j+1}$ ,  $j \in \{0,1\}$ , y la Observación 4.3, deducimos que

$$G \circ \alpha_1 \simeq \gamma, \quad G \circ \alpha_2 \simeq \overline{\varphi_2 \circ \beta}, \quad G \circ \alpha_3 \simeq \bar{\gamma}, \quad G \circ \alpha_4 \simeq \varphi_1 \circ \beta,$$

donde todas las homotopías son con extremos fijos. Por tanto

$$G \circ \alpha \simeq \gamma \star (\overline{\varphi_2 \circ \beta}) \star \bar{\gamma} \star (\varphi_1 \circ \beta).$$



Al ser  $C$  simplemente conexo (de hecho es convexo),  $[\alpha] = [\epsilon_{(1,0)}]$  en  $\Pi_1(C, (1,0))$ . De aquí deducimos que

$$[G \circ \alpha] = G_*([\alpha]) = G_*([\epsilon_{(0,1)}]) = [\epsilon_{\varphi_1(x_0)}] \in \Pi_1(Y, \varphi_1(x_0)),$$

esto es,

$$\gamma \star (\overline{\varphi_2 \circ \beta}) \star \bar{\gamma} \star (\varphi_1 \circ \beta) \simeq \epsilon_{\varphi_1(x_0)},$$

o equivalentemente,  $\mathcal{U}_\gamma([\varphi_1 \circ \beta]) = [\varphi_2 \circ \beta]$ . En otras palabras,  $\mathcal{U}_\gamma \circ (\varphi_1)_*$  y  $(\varphi_2)_*$  coinciden sobre cualquiera  $[\beta] \in \Pi_1(X, x_0)$ , lo que concluye la prueba. ■

**Corolario 7.18** Sean  $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas y  $x_0 \in X$ . Supongamos que  $\varphi_1 \simeq_{\{x_0\}} \varphi_2$  y llamemos  $y_0 = \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$ .

Entonces  $(\varphi_1)_* = (\varphi_2)_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $H: X \times [0,1] \rightarrow Y$  una deformación que materialice el hecho  $\varphi_1 \simeq_{\{x_0\}} \varphi_2$ . El Teorema 7.17 nos dice que  $\mathcal{U}_\gamma \circ (\varphi_1)_* = (\varphi_2)_*$ . Bajo nuestras hipótesis  $\gamma = \epsilon_{y_0}$ , por lo que  $\mathcal{U}_\gamma = \text{Id}_{\Pi_1(Y, y_0)}$  y el corolario se sigue. ■

**Definición 7.19 (Equivalencia homotópica)** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos. Una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  se dirá una equivalencia homotópica si existe  $g: Y \rightarrow X$  continua tal que

$$g \circ f \simeq \text{Id}_X \quad \text{y} \quad f \circ g \simeq \text{Id}_Y.$$

En ese caso se dirán que  $f$  y  $g$  son inversas homotópicas.

Dos espacios  $X$  e  $Y$  se dicen del mismo tipo de homotopía si existe una equivalencia homotópica entre ellos.

Obviamente todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica, pero lo recíproco no es cierto. Un espacio contráctil nos proporcionará fácilmente un contraejemplo. Sin embargo, la equivalencia homotópica es suficiente para garantizar isomorfismo entre grupos fundamentales.

**Teorema 7.20** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos, y sea  $f: X \rightarrow Y$  una equivalencia homotópica con inversa homotópica  $g: Y \rightarrow X$ . Fijemos  $x_0 \in X$ .

Entonces  $f_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$  es un isomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que  $g \circ f \simeq \text{Id}_X$  vía una deformación  $H_1: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  con  $H_1(\cdot, 0) = g \circ f$  y  $H_1(\cdot, 1) = \text{Id}_X$ . Llamemos  $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$  al arco  $\gamma_1(\cdot) = H_1(x_0, \cdot)$ , consideremos el isomorfismo  $\mathcal{U}_{\gamma_1}: \Pi_1(X, g(f(x_0))) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ , y recordemos que por el Teorema 7.17 se tiene que

$$\mathcal{U}_{\gamma_1} \circ (g \circ f)_* = (\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\Pi_1(X, x_0)},$$

donde  $(g \circ f)_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, g(f(x_0)))$ . Inferimos que  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  es un isomorfismo, donde

$$f_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0)) \quad \text{y} \quad g_*: \Pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \Pi_1(X, g(f(x_0))),$$

y por tanto que  $g_*$  es un epimorfismo (y  $f_*$  es un monomorfismo).

De forma paralela,  $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$  vía  $H_2: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$  con  $H_2(\cdot, 0) = f \circ g$  y  $H_2(\cdot, 1) = \text{Id}_Y$ . Como antes, si llamamos  $\gamma_2(\cdot) = H_2(f(x_0), \cdot)$  y consideramos el isomorfismo  $\mathcal{U}_{\gamma_2}: \Pi_1(Y, f(g(f(x_0)))) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$ , tenemos que

$$\mathcal{U}_{\gamma_2} \circ (f \circ g)_* = (\text{Id}_Y)_* = \text{Id}_{\Pi_1(Y, f(x_0))},$$

donde ahora  $(f \circ g)_*: \Pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \Pi_1(X, f(g(f(x_0))))$ .

Como arriba  $(f \circ g)_* = \hat{f}_* \circ g_*$  es un isomorfismo, donde ahora

$$g_*: \Pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \Pi_1(X, g(f(x_0))) \quad \text{y} \quad \hat{f}_*: \Pi_1(X, g(f(x_0))) \rightarrow \Pi_1(Y, f(g(f(x_0)))).$$

Por tanto  $g_*$  es un monomorfismo (y  $\hat{f}_*$  un epimorfismo).

Como consecuencia  $g_*: \Pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \Pi_1(X, g(f(x_0)))$  es un isomorfismo. Juntando este hecho con la información anterior,  $f_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$  es también un isomorfismo. Esto concluye la prueba. ■

A modo de ejemplo, si  $A \subset X$  es un retracto de deformación con una retracción asociada  $r: X \rightarrow A$ , e  $i: A \rightarrow X$  denota la aplicación inclusión, entonces  $r$  e  $i$  son equivalencias homotópicas una inversa de la otra. Como consecuencia trivial es válido el siguiente resultado, ya probado anteriormente en el Teorema 7.9 para retractos *fuertes* de deformación.

**Corolario 7.21** Sean  $A \subset X$  un retracto de deformación de  $X$ ,  $r: X \rightarrow A$  una retracción asociada e  $i: A \rightarrow X$  la aplicación inclusión.

Entonces para cada  $a \in A$  las aplicaciones

$$r_*: \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1(A, a) \quad \text{e} \quad i_*: \Pi_1(A, a) \rightarrow \Pi_1(X, a)$$

son isomorfismos de grupos.

En particular, todo espacio topológico contráctil es simplemente conexo.

## 8. El Grupo Fundamental de las Esferas

En esta sección calcularemos el grupo fundamental de las esferas  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 2$ .

Para abordarlo probaremos un caso particular del Teorema de Seifert-Van Kampen, que se estudiará más adelante, cuya demostración es además bastante inspiradora.

**Proposición 8.1** *Sea  $X$  un espacio topológico, y sean  $U, V \subset X$  suconjuntos satisfaciendo:*

- $U$  y  $V$  son abiertos simplemente conexos (con la topología inducida).
- $U \cap V$  es arcoconexo y no vacío.
- $U \cup V = X$ .

*Entonces  $X$  es simplemente conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Como  $U$  y  $V$  son arcoconexos,  $U \cap V \neq \emptyset$  y  $X = U \cup V$ , es inmediato concluir que  $X$  es arcoconexo. Resta demostrar que  $X$  tiene grupo fundamental trivial en algún punto (luego en todo punto por ser arcoconexo).

Fijemos  $x_0 \in U \cap V$ , tomemos  $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$  y probemos que  $[\alpha] = [\epsilon_{x_0}]$ .

Sea  $\epsilon > 0$  un número de Lebesgue para el recubrimiento abierto  $\{\alpha^{-1}(U), \alpha^{-1}(V)\}$  de  $[0, 1]$ , y fijemos una partición

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$$

de  $[0, 1]$  con  $|t_{j+1} - t_j| < \epsilon$  para todo  $j = 0, \dots, k-1$ .

Definamos  $\alpha_j: [0, 1] \rightarrow X$ ,  $\alpha_j(t) = \alpha((1-t)t_j + t t_{j+1})$ ,  $j = 0, \dots, k-1$ , y observemos que  $\alpha_j([0, 1]) \subset U$  ó  $\alpha_j([0, 1]) \subset V$ .

Aprovechando la arcoconexión de  $U, V$  y  $U \cap V$ , es posible encontrar arcos  $\rho_j: [0, 1] \rightarrow X$  para  $j = 1, \dots, k-1$  de acuerdo al siguiente criterio:

- $\rho_j(0) = x_0$  y  $\rho_j(1) = \alpha(t_j)$ .
- Si  $\alpha_{j-1}([0, 1]) \cup \alpha_j([0, 1]) = \alpha([t_{j-1}, t_j]) \cup \alpha([t_j, t_{j+1}]) \subset U$  (respectivamente,  $V$ ) entonces  $\rho_j([0, 1]) \subset U$  (respectivamente,  $V$ ).
- Si  $\alpha_{j-1}([0, 1])$  y  $\alpha_j([0, 1])$  (o equivalentemente,  $\alpha([t_{j-1}, t_j])$  y  $\alpha([t_j, t_{j+1}])$ ) están contenidos uno en  $U$  y otro en  $V$ , entonces  $\rho_j([0, 1]) \subset U \cap V$ .

Teniendo en cuenta nuestras definiciones se observa que

- $(\alpha_0 \star \bar{\rho}_1)([0, 1]) \subset U$  ó  $V$ ,
- $(\rho_j \star \alpha_j \star \bar{\rho}_{j+1})([0, 1]) \subset U$  ó  $V$ ,  $j = 1, \dots, k-2$ , y
- $(\rho_{k-1} \star \alpha_{k-1})([0, 1]) \subset U$  ó  $V$ .

Com  $U$  y  $V$  son simplemente conexos, los lazos en  $U$  ó en  $V$  con base  $x_0$

$$\alpha_0 \star \bar{\rho}_1, \quad \rho_j \star \alpha_j \star \bar{\rho}_{j+1}, \quad j = 1, \dots, k-2, \quad \text{y} \quad \rho_{k-1} \star \alpha_{k-1}$$

se pueden deformar homotópicamente en  $U$  ó en  $V$ , luego en  $X$ , al lazo constante  $\epsilon_{x_0}$ . Por tanto,

$$\alpha_0 \star \dots \star \alpha_{k-1} \simeq (\alpha_0 \star \bar{\rho}_1) \star (\rho_1 \star \alpha_1 \star \bar{\rho}_2) \star \dots \star (\rho_{k-2} \star \alpha_{k-2} \star \bar{\rho}_{k-1}) \star (\rho_{k-1} \star \alpha_{k-1}) \simeq \epsilon_{x_0}$$

y  $[\alpha] = [\alpha_0 \star \dots \star \alpha_{k-1}] = [\epsilon_0]$ , como queríamos demostrar. ■

**Corolario 8.2** *La esfera  $\mathbb{S}^n$  es simplemente conexa para todo  $n \geq 2$ .*

DEMOSTRACIÓN: Fijado  $p \in \mathbb{S}^n$ , los abiertos  $U := \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}$  y  $V := \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$  son homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  vía las correspondientes proyecciones estereográficas, y por tanto simplemente conexos. Como  $U \cap V \neq \emptyset$  y es arcoconexo, el resultado se sigue de la Proposición 8.1. ■

## 8.1. Algunas consecuencias

A continuación vamos a desglosar algunas de las consecuencias topológicas más relevantes del cálculo del grupo fundamental de las esferas.

### 8.1.1. El Teorema de Invarianza de la Dimensión

Recordemos que, usando la conexión topológica como herramienta, es fácil demostrar que un abierto de  $\mathbb{R}$  no puede ser homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ . Vamos a extender ese resultado a su versión dos dimensional.

**Teorema 8.3 (Invarianza de la Dimensión)** *Si  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$  y  $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \neq 2$ , son dos abiertos conexos, entonces  $\Omega_2$  no es homeomorfo a  $\Omega_n$ .*

DEMOSTRACIÓN: Como ya hemos comentado antes, el resultado es conocido para abiertos de  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ . En particular  $\Omega_2$  no es homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}$ . A título informativo comentaremos que el resultado es cierto para dimensiones arbitrarias, esto es, dos abiertos conexos de espacios euclidianos de distinta dimensión no son homeomorfos. Sin embargo su prueba se escapa de las posibilidades de este curso.

Tomemos  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$  y  $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ , y demostremos que no son homeomorfos.

Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existen abiertos como en el enunciado tales que  $\Omega_2 \cong \Omega_n$ ,  $n > 2$ .

Sea  $F: \Omega_n \rightarrow \Omega_2$  un homeomorfismo, y fijemos un punto  $p \in \Omega_2$  y tomemos una bola euclidiana 2-dimensional  $B_2(p, \epsilon_2) \subset \Omega_2$ . Como  $F$  es continua,  $F^{-1}(B_2(p, \epsilon_2))$  es un abierto en  $\Omega_n$  conteniendo al punto  $q := F^{-1}(p)$ , por lo que existe una bola euclidiana  $n$ -dimensional  $B_n(q, \epsilon)$  tal que  $B_n(q, \epsilon) \subset F^{-1}(B_2(p, \epsilon_2))$ . Al ser  $F$  un homeomorfismo,  $F(B_n(q, \epsilon))$  es un abierto de  $B_2(p, \epsilon_2)$  con  $F(B_n(q, \epsilon)) \subset B_2(p, \epsilon_2)$ . Por tanto existe una bola cerrada euclidiana 2-dimensional  $\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \subset F(B_n(q, \epsilon))$ ,  $\epsilon_2 > 0$ .

Consideremos la siguiente secuencia de inclusiones

$$\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\} \stackrel{i_1}{\subset} F(B_n(q, \epsilon)) \setminus \{p\} \stackrel{i_2}{\subset} B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\},$$

y llamemos

$$i = i_2 \circ i_1: \overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\} \rightarrow B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}.$$

Fijado  $p_0 \in \overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}$ , a nivel de grupos fundamentales tenemos que

$$i_* = (i_2)_* \circ (i_1)_*: \Pi_1(\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}, p_0) \rightarrow \Pi_1(B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}, p_0),$$

donde

$$(i_1)_*: \Pi_1(\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}, p_0) \rightarrow \Pi_1(F(B_n(q, \epsilon)) \setminus \{p\}, p_0) \quad e$$

$$(i_2)_*: \Pi_1(F(B_n(q, \epsilon)) \setminus \{p\}, p_0) \rightarrow \Pi_1(B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}, p_0).$$

Es claro que  $\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}$  es homeomorfo a  $\overline{B}_2(0, 1) \setminus \{0\}$ . Por tanto la Proposición 7.7, el Ejercicio 7.5 y el Teorema 7.9 garantizan que  $\Pi_1(\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\})$  es isomorfo al grupo

fundamental de  $\mathbb{S}^1$ , esto es, a  $\mathbb{Z}$ . Análogamente  $\Pi_1(B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\})$  es homeomorfo a  $\mathbb{Z}$ , ya que  $B_2(p, \epsilon_2) - \{p\} \cong B_2(0, \epsilon_2) - \{p\} \cong \mathbb{S}^1 \times ]0, \epsilon_2[$ .

Un razonamiento similar nos diría que  $\Pi_1(B_n(q, \epsilon) \setminus \{q\}, q_0)$ ,  $q_0 := F^{-1}(x_0)$ , es isomorfo al grupo fundamental de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , luego es el grupo trivial  $\{[\epsilon_{q_0}]\}$  ya que  $n-1 \geq 2$ . La misma consecuencia se extrae para  $\Pi_1(F(B_n(q, \epsilon)) \setminus \{p\}, p_0)$  ya que  $F_*: \Pi_1(B_n(q, \epsilon) \setminus \{q\}, q_0) \rightarrow \Pi_1(F(B_n(q, \epsilon)) \setminus \{p\}, p_0)$  es un isomorfismo.

Pero el Ejercicio 7.8 nos dice que

$$i_*: \Pi_1(\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}, p_0) \equiv \mathbb{Z} \rightarrow \Pi_1(B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}, p_0) \equiv \mathbb{Z}$$

es un isomorfismo, lo que es absurdo ya que al ser  $i_* = (i_2)_* \circ (i_1)_*$  esa aplicación factoriza por el homomorfismo trivial. Esto completa la prueba. ■

### 8.1.2. El Teorema de Borsuk-Ulam: Consecuencias

Continuaremos con el Teorema de Borsuk-Ulam, que es válido en cualquiera dimensión aunque sólo abordaremos su prueba para dimensión dos.

Necesitamos el siguiente lema técnico.

**Lema 8.4** Sea  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  continua e impar (esto es, satisfaciendo  $f(-p) = -f(p)$ ,  $p \in \mathbb{S}^1$ ) con  $f(1) = 1$ , y sea  $\beta$  el lazo en  $\mathbb{S}^1$  basado en 1 dado por  $\beta := f \circ \alpha_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ , donde  $\alpha_1 = \rho|_{[0,1]}$  (recordemos que  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es la aplicación  $t \mapsto e^{2\pi i t}$ ).

Entonces  $\deg(\beta)$  es impar.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  el arco en  $\mathbb{S}^1$  dado por  $\gamma(t) = \beta(t/2)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Como  $f$  es impar inferimos que  $\gamma(1) = -\gamma(0) = -1$ . Sea  $\tilde{\gamma}$  el único levantamiento de  $\gamma$  a  $\mathbb{R}$  con condición inicial  $\tilde{\gamma}(0) = 0$ , y observemos que por ser  $\rho \circ \tilde{\gamma} = \gamma$  necesariamente  $\tilde{\gamma}(1) = k + 1/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Definamos

$$c(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \tilde{\gamma}(1) + \tilde{\gamma}(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Claramente  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $c(0) = 0$ . Además

$$\begin{aligned} (\rho \circ c)(t) &= \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ e^{2\pi i \tilde{\gamma}(1)} \gamma(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ -\gamma(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \beta(t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ -\beta(t - 1/2) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = \beta(t), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que  $\beta(t - 1/2) = -\beta(t)$  para  $t \in [1/2, 1]$  como consecuencia de que  $f$  es impar.

Como consecuencia  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es el levantamiento a  $\mathbb{S}^1$  de  $\beta$  con condición inicial  $c(0) = 0$ , esto es,  $c = \tilde{\beta}$ , y por tanto  $\deg(\beta) = c(1) = 2\tilde{\gamma}(1) = 2k + 1$  es impar. ■

**Lema 8.5** No existe ninguna aplicación  $F: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  continua e impar.

DEMOSTRACIÓN: Asumamos que existe  $F: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  continua satisfaciendo  $F(-p) = -F(p)$ ,  $p \in \mathbb{S}^2$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $F(1, 0, 0) = 1$ , sin más que sustituir  $F$  por la aplicación  $\frac{1}{F(1,0,0)}F$  (se usa notación compleja), también continua e impar.



Consideremos  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $f(p) := F(p, 0)$ . Claramente  $f$  satisface las hipótesis del Lema 8.4, por lo que  $\deg(\beta)$  es impar para  $\beta = f \circ \alpha_1$ .

Por otro lado, como  $\Pi_1(\mathbb{S}^2, 1) = \{[\epsilon_1]\}$  inferimos que  $F_*(\Pi_1(\mathbb{S}^2, 1)) = \{[\epsilon_1]\} \subset \Pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ . En particular  $[\beta] = [f \circ \alpha_1] = [F \circ (\alpha_1, 0)] = F_*([\alpha_1, 0]) = [\epsilon_1]$ , lo que contradice que  $\deg(\beta)$  es impar. ■

**Teorema 8.6 (Borsuk-Ulam)** *Si  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es continua, entonces existe  $x_0 \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(x_0) = f(-x_0)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que  $f(x) \neq f(-x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . Consideremos la aplicación

$$F: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad F(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|},$$

bien definida y obviamente continua. Como  $F(x) = -F(-x)$ , esta aplicación es impar contradiciendo el Lema 8.5. ■

Veamos algunas consecuencias sencillas del Teorema de Borsuk-Ulam.

**Corolario 8.7** *Si identificamos  $\mathbb{S}^2$  con la superficie de la Tierra y  $f, g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son dos magnitudes físicas que se distribuyen de forma continua sobre dicha superficie (por ejemplo, la presión y la temperatura), existen puntos antípodas  $p_0, -p_0 \in \mathbb{S}^2$  tales que  $(f, g)(p_0) = (f, g)(-p_0)$ .*

**Corolario 8.8** *Si  $\mathbb{S}^2$  es la unión de tres subconjuntos cerrados  $A_1, A_2$  y  $A_3$ , entonces alguno de ellos contiene dos puntos antípodas.*

DEMOSTRACIÓN: Definamos  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (d_1(x), d_2(x))$ , donde  $d_i: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es la función distancia euclidiana  $d_i(x) = \text{dist}(x, A_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Como  $f$  es continua debe existir  $x_0 \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(x_0) = f(-x_0)$ , esto es,  $\delta_1 := d_1(x_0) = d_1(-x_0)$  y  $\delta_2 := d_2(x_0) = d_2(-x_0)$ . Si  $\delta_i = 0$  para algún  $i \in \{1, 2\}$  entonces  $x_0, -x_0 \in A_i$  ya que  $A_i$  es cerrado y habríamos acabado. En caso de que  $\delta_1 \delta_2 > 0$  deducimos que  $\{x_0 - x_0\} \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$ , y por tanto que  $x_0, -x_0 \in A_3$ . ■

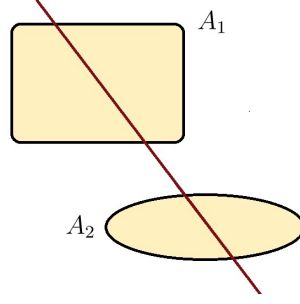
La misma idea se puede utilizar para probar que si  $\mathbb{S}^2$  es unión de dos cerrados entonces alguno de ellos contiene dos puntos antípodas.

Es evidente que un compacto del plano se puede dividir en dos mitades de igual área por un argumento de barrida por rectas de separación paralelas y continuidad. Pero no lo es tanto cuando se trata de dos compactos.

**Corolario 8.9 (Teorema de las dos tortitas)** *Dados dos compactos  $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$ , existe una recta combinatorio de  $\mathbb{R}^2$  que los subdivide a ambos en trozos de igual área.*

DEMOSTRACIÓN: Sin pérdida de generalidad supondremos que  $\text{Area}(A_i) > 0$  para algún  $i \in \{1, 2\}$ , en otro caso el resultado es trivial.

Identifiquemos  $\mathbb{R}^2$  con su copia topológica en  $\mathbb{R}^3$  correspondiente al plano  $P := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_3 = 1\}$ . Para cada  $x \in \mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3: \|p\| = 1\}$ , denotemos por  $P_x := \{y \in \mathbb{R}^3: \langle y, x \rangle = 0\}$  y escribamos  $\mathbb{R}^3 \setminus P_x = P_x^+ \cup P_x^-$ , donde  $P_x^+ := \{y \in \mathbb{R}^3: \langle y, x \rangle > 0\}$  y  $P_x^- := \{y \in \mathbb{R}^3: \langle y, x \rangle < 0\}$ . Es claro que  $P_x^+ = P_{-x}^-$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . Observemos también que  $L_x := P_x \cap P$  es una recta combinatorio en  $P \subset \mathbb{R}^3$  salvo cuando  $x = (0, 0, \pm 1)$ , en cuyo caso  $L_x = \emptyset$ . Definamos la función  $a_i: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,



$a_i(x) = \text{Area}(A_i \cap P_x^+)$ ,  $i = 1, 2$ . Por el Teorema de la convergencia dominada es fácil demostrar que  $a_i$  es continua,  $i = 1, 2$ . Por el Teorema de Borsuk-Ulam aplicado a  $f = (a_1, a_2): \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  existe  $x_0 \in \mathbb{S}^2$  tal que  $a_i(x_0) = a_i(-x_0)$ ,  $i = 1, 2$ . En otras palabras,

$$\text{Area}(A_1 \cap P_{x_0}) = \text{Area}(A_1 \cap P_{-x_0}) \quad \text{y} \quad \text{Area}(A_2 \cap P_{x_0}) = \text{Area}(A_2 \cap P_{-x_0}),$$

lo que concluye el teorema. (Nótese que  $x_0 \neq (0, 0, \pm 1)$  pues en ese caso  $\{a_i(x_0), a_i(-x_0)\} = \{0, \text{Area}(A_i)\}$ ,  $i = 1, 2$ , lo cual es imposible). ■

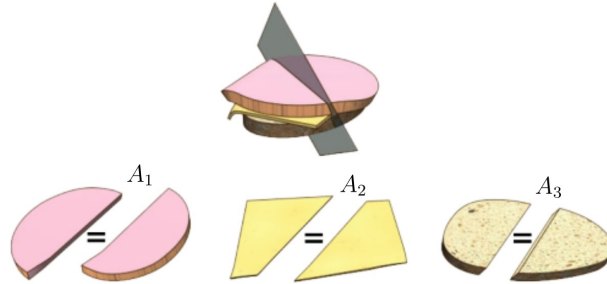
En análogo tridimensional es cierto y es conocido como el teorema del sándwich o bocadillo de jamón.

**Corolario 8.10 (Teorema del bocadillo de jamón)** *Dados tres compactos  $A_1, A_2$  y  $A_3 \subset \mathbb{R}^3$ , es posible encontrar un plano combinatorio de  $\mathbb{R}^3$  que los subdivide a los tres en trozos de igual volumen.*

DEMOSTRACIÓN: Dado  $x \in \mathbb{S}^2$  y  $t \in \mathbb{R}$  definimos  $P_x(t) = \{y \in \mathbb{R}^3: \langle y, x \rangle = t\}$ . Observemos que  $\mathbb{R}^3 \setminus P_x(t) = P_x^+(t) \cup P_x^-(t)$  donde  $P_x^+(t) = \{y \in \mathbb{R}^3: \langle y, x \rangle > t\}$  y  $P_x^-(t) = \{y \in \mathbb{R}^3: \langle y, x \rangle < t\}$ . Es claro que

$$P_{-x}(-t) = P_x(t) \text{ y } P_{-x}^+(-t) = P_x^-(t) \text{ para todo } x \in \mathbb{S}^2 \text{ y } t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Sea  $\phi_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $\phi_x(t) := \text{Vol}(A_3 \cap P_x^+(t))$ , donde Vol representa volumen



en  $\mathbb{R}^3$ . Como  $\Phi_x$  es continua, monótona creciente,  $\Phi_x(-\infty) = \text{Vol}(A_3)$  y  $\Phi_x(+\infty) = 0$ , el Teorema de valores intermedios garantiza que  $I_x := \{t \in \mathbb{R}: \phi_x(t) = \text{Vol}(A_3)/2\}$  es un intervalo compacto no vacío. Llamemos  $t_x$  al punto medio de  $I_x$ ,  $x \in \mathbb{S}^2$ . Como  $I_x = -I_{-x}$ , es inmediato que  $t_{-x} = -t_x$  para cada  $x \in \mathbb{S}^2$ . Definamos

$$f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (\text{Vol}(A_1 \cap P_x^+(t_x)), \text{Vol}(A_2 \cap P_x^+(t_x))).$$

Por el Teorema de Borsuk-Ulam existe  $x_0 \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(x_0) = f(-x_0)$ , esto es,

$$\text{Vol}(A_i \cap P_{x_0}^+(t_{x_0})) = \text{Vol}(A_i \cap P_{-x_0}^+(t_{-x_0})), \quad i = 1, 2.$$

Como  $P_{-x_0}^+(t_{-x_0}) = P_{-x_0}^+(-t_{x_0}) = P_{x_0}^-(t_{x_0})$  inferimos que

$$\text{Vol}(A_i \cap P_{x_0}^+(t_{x_0})) = \text{Vol}(A_i \cap P_{x_0}^-(t_{x_0})), \quad i = 1, 2,$$

lo que concluye la prueba. ■

## 9. El Teorema de Seifert-Van Kampen

En esta sección probaremos la herramienta más potente conocida para el cálculo explícito del grupo fundamental de un espacio topológico.: el Teorema de Seifert-Van Kampen. Este teorema tiene un trasfondo algebraico muy importante y requerirá del lenguaje desarrollado en la sección de grupos del Tema 0. Es muy conveniente tener presente la Definición 1.13.

**Teorema 9.1 (Seifert-Van Kampen)** *Sea  $X$  un espacio topológico y sean  $U, V \subset X$  subconjuntos tales que:*

- $U \cap V \neq \emptyset$  y  $U \cup V = X$ .
- $U, V$  y  $U \cap V$  son abiertos arcoconexos.

Llamemos  $i: U \cap V \rightarrow U$  y  $j: U \cap V \rightarrow V$  a las aplicaciones inclusión, fijemos  $x_0 \in U \cap V$  y consideremos  $i_*: \Pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0)$  y  $j_*: \Pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \Pi_1(V, x_0)$  los correspondientes homomorfismos inducidos.

Entonces

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0),$$

donde el producto amalgamado es el relativo a los homomorfismos  $i_*$  y  $j_*$ .

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $\hat{i}: U \rightarrow X$ ,  $\hat{j}: V \rightarrow X$  y  $k: U \cap V \rightarrow X$  a las aplicaciones inclusión, y consideremos  $\hat{i}_*: \Pi_1(U, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ ,  $\hat{j}_*: \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$  y  $k_*: \Pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$  los correspondientes homomorfismos inducidos. Llamemos

$$\pi: \Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$$

a la proyección al cociente amalgamado según  $i_*$  y  $j_*$ , y denotemos por

$$\pi_1: \Pi_1(U, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0),$$

$$\pi_2: \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) \quad \text{y}$$

$$\pi_0: \Pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$$

a los homomorfismos  $\pi_1 := \pi|_{\Pi_1(U, x_0)}$ ,  $\pi_2 := \pi|_{\Pi_1(V, x_0)}$  y  $\pi_0 := \pi \circ i_* = \pi \circ j_*$ .

Por la propiedad universal de la Proposición 1.14, existe un homomorfismo de grupos

$$\Theta: \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$$

a través del cual factorizan las aplicaciones  $\hat{i}_*$ ,  $\hat{j}_*$  y  $k_*$ . Ésto quiere decir que  $\Theta \circ \pi_1 = \hat{i}_*$ ,  $\Theta \circ \pi_2 = \hat{j}_*$  y  $\Theta \circ \pi_0 = k_*$ . Analicemos con detalle y de forma explícita la definición de  $\Theta$ . Para ello estableceremos el convenio notacional

$$\{W_1, W_2\} = \{U, V\}.$$

$$\begin{array}{ccccc}
\Pi_1(U, x_0) & \xleftarrow{i_*} & \Pi_1(U \cap V, x_0) & & \\
\downarrow \hat{i}_* & \searrow \pi_1 & \downarrow \pi_0 & & \\
\Pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{k_*} & \Pi_1(X, x_0) & \xleftarrow{\Theta} & \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) \\
\uparrow \hat{j}_* & \nearrow \pi_2 & \uparrow \pi_0 & & \\
\Pi_1(V, x_0) & \xleftarrow{j_*} & \Pi_1(U \cap V, x_0) & & 
\end{array}$$

Una palabra genérica en  $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0) \equiv \Pi_1(W_1, x_0) \bullet \Pi_1(W_2, x_0)$  viene dada por la expresión  $w = [\alpha_1]_{W_{i_1}} \dots [\alpha_m]_{W_{i_m}}$ ,  $i_j \in \{1, 2\}$  para todo  $j$ , donde el subíndice indica el espacio de la clase de homotopía. Con esta notación,

$$\Theta(\pi(w)) = [\alpha_1]_X \star \dots \star [\alpha_m]_X.$$

Como arriba, el subíndice  $X$  indica ahora clase de homotopía en  $\Pi_1(X, x_0)$ .

En particular,

$$\pi(\{i_*([\alpha]_{U \cap V}) \cdot j_*([\alpha]_{U \cap V})^{-1} : [\alpha]_{U \cap V} \in \Pi_1(U \cap V, x_0)\}) \subset \text{Ker}(\Theta).$$

La prueba del teorema consistirá en demostrar que  $\Theta$  es un isomorfismo. Para ver que es sobre, tomemos un lazo  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  con base el punto  $x_0 \in U \cap V$ . Por el Lema de Lebesgue, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha([i/n, (i+1)/n])$  está contenido en  $U$  ó en  $V$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ . Llamemos  $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto \alpha((1-t)i/n + t(i+1)/n)$ .

Si  $\alpha_i([0, 1]) \subset U$  y  $\alpha_{i+1}([0, 1]) \subset V$  (ó viceversa), el punto  $\alpha_i(1) = \alpha_{i+1}(0)$  está contenido en  $U \cap V$  y elijeremos un arco  $\rho_i$  en  $U \cap V$  con punto inicial  $x_0$  y final  $\alpha_i(1)$ . Cuando  $(\alpha_i([0, 1]) \cup \alpha_{i+1}([0, 1])) \subset U$  (ó  $V$ ) se procede igual, sólo que ahora el arco  $\rho_i$  descansa en  $U$  (ó  $V$ ). Finalmente

$$\alpha \simeq (\alpha_0 \star \bar{\rho}_0) \star \dots \star (\rho_{i-1} \star \alpha_i \star \bar{\rho}_{i+1}) \star \dots \star (\rho_{n-2} \star \alpha_{n-1}),$$

por lo que  $[\alpha]_X$  es el producto  $[\alpha_0 \star \bar{\rho}_0]_X \star \dots \star [\rho_{i-1} \star \alpha_i \star \bar{\rho}_{i+1}]_X \star \dots \star [\rho_{n-2} \star \alpha_{n-1}]_X$  en  $\Pi_1(X, x_0)$ . Por construcción y con el convenio anterior,

$$\alpha_0 \star \bar{\rho}_0 \subset W_{l_0}, \dots, \rho_{i-1} \star \alpha_i \star \bar{\rho}_{i+1} \subset W_{l_i}, \dots, \rho_{n-2} \star \alpha_{n-1} \subset W_{l_{n-2}},$$

para ciertos  $l_i \in \{1, 2\}$ ,  $i = 0, \dots, n-2$ . Por tanto la palabra

$$w := [\alpha_0 \star \bar{\rho}_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\rho_{i-1} \star \alpha_i \star \bar{\rho}_{i+1}]_{W_{l_i}} \star \dots \star [\rho_{n-2} \star \alpha_{n-1}]_{W_{l_{n-2}}}$$

de  $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$  satisface  $\Theta(\pi(w)) = [\alpha]_X$  y de aquí la sobreyectividad de  $\Theta$ .

Resta por tanto probar que  $\Theta$  es inyectivo.

Supongamos que tenemos una palabra  $w = a_1 \dots a_m$  en  $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$  tal que, salvo componer con  $\pi: \Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$ , se aplica por  $\Theta$  en  $[\epsilon_{x_0}]$ . Llamemos  $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow W_{l_i} \in \{U, V\}$  al lazo tal que  $a_i = [\alpha_i]_{W_{l_i}}$  para todo  $i$ . De nuestras hipótesis existe una homotopía  $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$  con extremos fijos tal que  $H(\cdot, 0) = \alpha_1 \star \dots \star \alpha_m$  y  $H(\cdot, 1) = \epsilon_{x_0}$ . De nuevo el Lema de Lebesgue nos garantiza la existencia de  $n \in \mathbb{N}$  tal que todo cuadrado de lado  $1/n$  es aplicado por  $H$  en  $U$  ó  $V$ . Sin pérdida de generalidad asumiremos que

- $\alpha_1 \star \dots \star \alpha_m$  está parametrizada de forma que la traza de  $\alpha_i$  se recorre sobre el intervalo  $[(i-1)/m, i/m]$ .
- $n$  es múltiplo de  $m$ , y por tanto, cada subintervalo  $[(i-1)/m, i/m]$  contiene una cantidad entera de intervalos de longitud  $1/n$ .

Lo que hemos de demostrar es que la palabra  $w$ , pensada como un elemento de  $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$ , puede ser alterada por relaciones de amalgamado en  $\{i_*(a) \cdot j_*(a)^{-1} : a \in \Pi_1(U \cap V, x_0)\}$  (pasando elementos de  $\Pi_1(U \cap V, x_0)$  en una sílaba a la siguiente) de forma que al final nos quede la palabra trivial. El procedimiento consistirá, a grosso modo y salvo algún trabajo previo que hay que explicar, en probar que podemos pasar de la palabra en  $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$  asociada a la curva  $H(t, i/n)$  a la asociada a  $H(t, (i+1)/n)$ . Como la palabra asociada a  $H(t, 1)$  es la trivial habremos concluido la prueba.

Comencemos con los detalles. Como primera etapa, observemos que salvo modificar nuestra homotopía sin alterar la palabra  $\omega$  de una forma no permitida, podemos asumir que para todo  $(s, i) \in [0, 1] \times \{0, 1, \dots, n\}$  la curva horizontal  $H(\cdot, s)$  es constante para valores de  $t$  en un entorno de  $i/n$ . Todo ello sin alterar la propiedad de que los cuadrados con lado de longitud  $1/n$  tienen imagen por  $H$  dentro de  $U$  o  $V$ . En efecto, para ello basta con reparametrizar convenientemente, y con dependencia continua en  $s$ , las curvas  $H(\cdot, s)$ . Omitimos los detalles. Un razonamiento análogo nos permite también suponer, adicionalmente y sin pérdida de generalidad, que para todo  $(t, i) \in [0, 1] \times \{0, 1, \dots, n\}$  la curva vertical  $H(t, \cdot)$  es constante para valores de  $s$  en un entorno de  $i/n$ .

Como consecuencia,  $H$  coincide con una aplicación constante  $c_{i,j} \in U \cup V$  en un pequeño disco euclidiano  $D_{i,j}$  centrado en  $(i/n, j/n)$  para todo  $(i, j) \in \{0, 1, \dots, n\}^2$ . En este punto usaremos curvas en  $U$ ,  $V$  ó  $U \cap V$ , con preferencia en el último conjunto y dependiendo de si  $c_{i,j} \in U$ ,  $V$  ó  $U \cap V$  (tal y como explicamos arriba cuando probamos la sobreyectividad de  $\Theta$ ), para alterar  $H$  en los  $D_{i,j}$  por una función radial (esto es, constante sobre las circunferencias centradas en  $(i/n, j/n)$ ) de forma que  $H(i/n, j/n) = x_0$ . Para ser más precisos, si  $D_{i,j}$  tiene radio  $\epsilon_{i,j}$  y  $\rho_{i,j} : [0, \epsilon_{i,j}] \rightarrow U, V$  ó  $U \cap V$ , es una curva con punto inicial  $x_0$  y final  $c_{i,j}$ , definiremos

$$H((i/n, j/n) + r\theta) = \rho_{i,j}(r), \quad r \in [0, \epsilon_{i,j}], \quad \theta \in \mathbb{S}^1.$$

En este punto ya queda claro que cada curva  $H(t, i/n)$  es producto de lazos con base  $x_0$  y contenidos en  $U$  o  $V$  (aquellos que se corresponden con las imágenes de los subintervalos  $[j/n, (j+1)/n]$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ), por lo que de forma canónica se le puede asociar una palabra en el producto libre  $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$ . Expliquemos ahora como pasar de la palabra asociada a  $H(t, i/n)$  en  $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$  a la que representa  $H(t, (i+1)/n)$ .

Fijemos  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  y llamemos  $\beta_j$  al lazo con base  $x_0$  en  $U$  ó  $V$  dado por

$$t \mapsto H((1-t)j/n + t(j+1)/n, i/n), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

De esta forma  $H(\cdot, i/n) \simeq \beta_0 \star \dots \star \beta_{n-1}$ . Atendiendo a nuestros convenios, si  $W_{l_j}$  denota al abierto conteniendo a  $\beta_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , entonces  $[\beta_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\beta_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}}$  sería la palabra asociada a  $H(\cdot, i/n)$  en  $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$ .

Para  $i+1$  y de forma análoga llamemos  $\beta'_j$  al lazo con base  $x_0$  en  $U$  ó  $V$  dado por

$$t \mapsto H((1-t)j/n + t(j+1)/n, (i+1)/n), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Igual que antes,  $[\gamma_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\gamma_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}}$  sería la palabra asociada a  $H(\cdot, (i+1)/n)$  en  $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$ . Finalmente llamemos  $\rho_j$  al lazo en  $W_{l_{j-1}} \cap W_{l_j}$  basado en  $x_0$  dado por

$$s \mapsto H(j/n, (1-s)i/n + s(i+1)/n), \quad j = 0, \dots, n,$$

donde hemos hecho el convenio  $W_{l_{-1}} = W_{l_n} = X$  (nótese que  $\rho_0 = \rho_n = \epsilon_{x_0}$  ya que  $H$  es homotopía con extremos fijos).

Como cada cuadrado  $[j/n, (j+1)/n] \times [i/n, (i+1)/n]$  es simplemente conexo, deducimos que (en homotopía y como palabras en  $\Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$ ) que

$$\begin{aligned} & [\beta_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\beta_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}} = \\ & = ([\rho_0]_{W_{l_0}} \star [\gamma_0]_{W_{l_0}} \star [\rho_1]_{W_{l_0}}^{-1}) \star \dots \star ([\rho_j]_{W_{l_j}} \star [\gamma_j]_{W_{l_j}} \star [\rho_{j+1}]_{W_{l_j}}^{-1}) \star \dots \star ([\rho_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}} \star [\gamma_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}} \star [\rho_n]_{W_{l_{n-1}}}^{-1}). \end{aligned}$$

Tras el amalgamado de  $\rho_j$  en  $\Pi_1(W_{l_{j-1}} \cap W_{l_j}, x_0)$  cuando  $W_{l_{j-1}} \neq W_{l_j}$ , inferimos que

$$\begin{aligned} [\beta_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\beta_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}} &= ([\rho_0]_{W_{l_0}} \star [\gamma_0]_{W_{l_0}}) \star \dots \star [\gamma_j]_{W_{l_j}} \star \dots \star ([\gamma_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}} \star [\rho_n]_{W_{l_{n-1}}}^{-1}) = \\ &= [\gamma_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\gamma_j]_{W_{l_j}} \star \dots \star [\gamma_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}} \end{aligned}$$

en  $\Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$ .

Por tanto las palabras asociadas a  $H(t, i/n)$  y  $H(t, (i+1)/n)$  en  $\Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$  se proyectan en el mismo elemento de  $\Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$ . Por un procedimiento inductivo, concluimos que la proyección a  $\Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$  de la palabra asociada en  $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$  a  $H(\cdot, 0)$ , esto es, de  $w = a_1 \dots a_m$ , coincide con la correspondiente proyección de la palabra asociada en  $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$  a  $H(t, 1) = \epsilon_{x_0}$ , esto es, con la proyección de la palabra trivial. Esto concluye la prueba. ■

**Corolario 9.2** *Bajo las mismas hipótesis del Teorema de Seifert-Van Kampen, si  $U \cap V$  es simplemente conexo entonces  $\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$ .*

**Corolario 9.3** *Bajo las mismas hipótesis del Teorema de Seifert-Van Kampen, si  $V$  es simplemente conexo entonces  $\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) / N(i_*(\Pi_1(U \cap V, x_0)))$ .*

**Ejercicio 9.4** *Si  $X$  es un  $n$ -ciclo (ver Definición 3.19) entonces  $\Pi_1(X, x_0)$  es isomorfo al grupo libre  $F(a_1, \dots, a_n)$ .*

Como caso particular,

**Ejercicio 9.5** *Sea  $X$  un espacio topológico tal que  $X = \cup_{j=1}^n a_j$ , donde*

- *Cada  $a_j$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$  con la topología inducida por  $X$ .*
- *Existe  $x_0 \in X$  tal que  $a_j \cap a_i = \{x_0\}$  para todo  $i \neq j$ .*

*Entonces  $\Pi_1(X, x_0)$  es isomorfo al grupo libre  $F(a_1, \dots, a_n)$ .*

## 9.1. Aplicaciones y ejemplos

Veamos algunas aplicaciones sencillas del Teorema de Seifert-Van Kampen.

### 9.1.1. Espacios libro

Consideramos el semiplano  $\Pi_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$  y sus girados respecto del eje  $x_3$

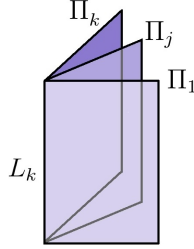
$$\Pi_j := \{(e^{2\pi(j-1)/k}z, x_3) : (z, x_3) \in \Pi_1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3\}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Por definición  $L_k := \cup_{j=1}^k \Pi_j$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , es el *espacio libro de  $k$  hojas*. Nótese que desde el punto de vista topológico (o salvo homeomorfismos), el hecho de que la distribución de semiplanos sea equiangular es irrelevante. También es evidente que el espacio  $L_2$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposición 9.6** *Los espacios  $L_k$  y  $L_s$  no son homeomorfos,  $k, s \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq s$ .*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $k \neq 2$  y  $L_k \cong L_s$ ,  $s \neq k$ . Tomemos  $F: L_k \rightarrow L_s$  un homeomorfismo. Sea  $X := L_k \setminus \{0\}$  e  $Y := F(X) = L_s \setminus \{F(0)\}$ , donde  $0 \equiv (0, 0, 0)$ .

La aplicación  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ ,  $H(p, s) := (1-s)p + sp/\|p\|$ , deforma  $X$  en la unión de curvas  $\mathbb{S}^2 \cap L_k$ , con retracción asociada  $r: X \rightarrow \mathbb{S}^2 \cap L_k$ ,  $r(p) := p/\|p\|$ . Por el



Ejercicio 9.4, el grupo fundamental de  $X$  es libre con  $k-1$  generadores (si  $k=1$  es el grupo trivial). Pero por razonamientos similares el grupo fundamental de  $Y$  es

- libre con un generador si  $F(0) \notin \{x_1 = x_2 = 0\}$ , ó
- libre con  $s-1$  generadores si  $F(0) \in \{x_1 = x_2 = 0\}$ .

Como  $k-1 \neq 1$ ,  $s-1$ , esto genera la contradicción buscada. ■

**Corolario 9.7** *Si  $O \subset \mathbb{R}^3$  es un abierto conteniendo al origen, entonces  $O \cap L_k$  no puede ser homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^2$  para todo  $k \neq 2$ .*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existen abiertos  $0 \equiv (0, 0, 0) \in O \subset \mathbb{R}^3$  y  $U \subset \mathbb{R}^2$ , y un homeomorfismo  $F: O \cap L_k \rightarrow U$ .

Discutamos primero el caso  $k > 2$ .

Sea  $B_2 \subset O$  una bola euclidiana abierta centrada en el origen,  $D \subset F(B_2 \cap L_k) \subset U$  un disco abierto centrado en  $F(0)$ , y  $B_1$  una bola euclidiana abierta centrada en el origen con  $B_1 \cap L_k \subset F^{-1}(D)$ .

Las inclusiones  $i_1: (B_1 \cap L_k) \setminus \{0\} \rightarrow F^{-1}(D) \setminus \{0\}$  e  $i_2: F^{-1}(D) \setminus \{0\} \rightarrow (B_2 \cap L_k) \setminus \{0\}$  inducen homomorfismos de grupos  $(i_1)_*: \Pi_1((B_1 \cap L_k) \setminus \{0\}) \rightarrow \Pi_1(F^{-1}(D) \setminus \{0\})$  e  $(i_2)_*: \Pi_1(F^{-1}(D) \setminus \{0\}) \rightarrow \Pi_1((B_2 \cap L_k) \setminus \{0\})$ .

De la demostración de la Proposición 9.6 se sigue que  $\Pi_1((B_1 \cap L_k) \setminus \{0\})$  y  $\Pi_1((B_2 \cap L_k) \setminus \{0\})$  son grupos libres con  $k-1 \neq 1$  generadores. Por otro lado,  $\Pi_1(F^{-1}(D) \setminus \{0\}) \cong \Pi_1(D \setminus \{F(0)\}) \cong \mathbb{Z}$  es un grupo libre con un generador.

Como  $i_* = (i_2)_* \circ (i_1)_*$ , donde  $i: (B_1 \cap L_k) \setminus \{0\} \rightarrow (B_2 \cap L_k) \setminus \{0\}$  es la inclusión, deduciríamos que  $i_*(\Pi_1((B_1 \cap L_k) \setminus \{0\}))$  tendría que ser un grupo cíclico. Pero  $i$  es una

equivalencia homotópica (compruébese como ejercicio), por lo que  $i_*(\Pi_1((B_1 \cap L_k) \setminus \{0\})) = \Pi_1((B_2 \cap L_k) \setminus \{0\})$  es un grupo libre con  $k - 1 \neq 1$  generadores, generando una contradicción.

El caso  $k = 1$  es análogo. Ahora se toman  $B_2 \subset U$  una bola euclidiana abierta centrada en  $F(0)$ ,  $D \subset F^{-1}(B_2) \subset O \cap L_1$  un semidisco abierto centrado en  $0$ , y  $B_1 \subset F(D)$  una bola euclidiana abierta centrada en  $F(0)$ . Se razona formalmente como arriba, revirtiendo el sentido de las inclusiones, y generando una contradicción similar. Omitimos los detalles. ■

### 9.1.2. El grupo fundamental de un esquema

Para lo que sigue, es conveniente tener presentes las construcciones y notación introducidas en la Sección 3.

Consideremos una relación de equivalencia  $R_0$  en  $\mathbb{S}^1 = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\| = 1\}$  y extendámosla a la relación  $R$

$$pRq \iff p = q \quad \vee \quad (\{p, q\} \subset \mathbb{S}^1 \wedge pR_0q)$$

en el disco unidad cerrado  $\overline{D} = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\| \leq 1\}$ . Denotemos por  $\sigma : \overline{D} \rightarrow S := \overline{D}/R$  a la correspondiente proyección. Como siempre  $D := \overline{D} \setminus \mathbb{S}^1$  es el disco unidad abierto.

Tenemos la siguiente:

**Proposición 9.8** *Si  $z_0 := \sigma((1, 0)) \in \sigma(\mathbb{S}^1)$  y  $[\hat{\alpha}_1] \in \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), z_0)$  es la clase determinada por  $\hat{\alpha}_1 : [0, 1] \rightarrow \sigma(\mathbb{S}^1)$ ,  $\hat{\alpha}_1(t) := \sigma(e^{2\pi it})$ , entonces*

$$\Pi_1(S) \cong \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), z_0)/N([\hat{\alpha}_1]).$$

DEMOSTRACIÓN: Tomemos  $t_0 \in ]0, 1[$ . Basta con demostrar que

$$\Pi_1(S, \sigma(t_0)) \cong \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), z_0)/N([\hat{\alpha}_1]).$$

Llamemos  $U = S \setminus \{\sigma(0)\}$  y  $V = \sigma(D) \subset S$ . Es claro que  $U$ ,  $V$  y  $U \cap V = \sigma(D) \setminus \{\sigma(0)\}$  son abiertos arcoconexos y no vacíos de  $S$ , siendo  $S = U \cup V$ . Por tanto están en las condiciones del Teorema de Seifert-Van Kampen.

Estudiemos  $\Pi_1(U, \sigma(t_0))$ , para lo cual será crucial observar que  $\sigma(\mathbb{S}^1)$  es retracto fuerte de deformación de  $U$ . Con tal fin consideremos la retracción

$$r : \overline{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad r(p) = \frac{p}{\|p\|}$$

y la deformación

$$H : (\overline{D} \setminus \{0\}) \times [0, 1] \rightarrow \overline{D} \setminus \{0\}, \quad H(p, s) = (1 - s)p + sr(p)$$

que realizan  $\mathbb{S}^1$  como retracto fuerte de deformación de  $\overline{D} \setminus \{0\}$ .

Tanto la retracción  $r$  como la deformación  $H$  pueden ser inducidas al cociente, dando lugar respectivamente a una retracción  $\hat{r} : U \rightarrow \sigma(\mathbb{S}^1)$  y a una deformación  $\hat{H} : U \times [0, 1] \rightarrow U$  satisfaciendo

$$(\sigma|_{\mathbb{S}^1}) \circ r = \hat{r} \circ (\sigma|_{\overline{D} \setminus \{0\}}) \quad \text{y} \quad (\sigma|_{\overline{D} \setminus \{0\}}) \circ H = \hat{H} \circ ((\sigma|_{\overline{D} \setminus \{0\}}) \times \text{Id}_{[0, 1]}),$$

y que prueban que  $\sigma(\mathbb{S}^1)$  es retracto fuerte de deformación de  $U$ . Como consecuencia del Teorema 7.9, y teniendo en cuenta que  $\hat{r}(\sigma(t_0)) = \sigma(r(t_0)) = \sigma((1, 0)) = z_0$ ,

$$\hat{r}_* : \Pi_1(U, \sigma(t_0)) \rightarrow \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), z_0), \text{ es un isomorfismo de grupos.}$$



Es claro que  $V = \sigma(D) \cong D$  es simplemente conexo, por lo que el Corolario 9.3 garantiza que

$$\Pi_1(S, \sigma(t_0)) \cong \Pi_1(U, \sigma(t_0))/N(i_*(\Pi_1(U \cap V, \sigma(t_0)))),$$

donde  $i_*: \Pi_1(U \cap V, \sigma(t_0)) \rightarrow \Pi_1(U, \sigma(t_0))$  es el morfismo inducido por  $i: U \cap V \rightarrow U$ .

Usando que  $\hat{r}_*: \Pi_1(U, \sigma(t_0)) \rightarrow \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), z_0)$  es un isomorfismo,

$$\Pi_1(U, \sigma(t_0))/N(i_*(\Pi_1(U \cap V, \sigma(t_0)))) \cong \hat{r}_*\left(\Pi_1(U, \sigma(t_0))/N((\hat{r}_* \circ i_*)(\Pi_1(U \cap V, \sigma(t_0))))\right),$$

esto es,

$$\Pi_1(U, \sigma(t_0))/N(i_*(\Pi_1(U \cap V, \sigma(t_0)))) \cong \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), \sigma(1, 0))/N((\hat{r} \circ i)_*(\Pi_1(U \cap V, \sigma(t_0)))).$$

Por otra parte  $\Pi_1(U \cap V, \sigma(t_0))$  es el grupo libre  $F([\gamma])$ , donde  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U \cap V$ ,  $\gamma(t) = \sigma(t_0 e^{2\pi i t})$ . Además,  $(\hat{r} \circ i)_*([\gamma]) = [\hat{\alpha}_1] \in \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), z_0)$ . Deducimos pues que

$$\hat{r}_*\left(\Pi_1(U, \sigma(t_0))/N((\hat{r} \circ i)_*(\Pi_1(U \cap V, \sigma(t_0))))\right) = \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), z_0)/N([\hat{\alpha}_1]),$$

lo que concluye la prueba. ■

El siguiente corolario, consecuencia inmediata de la Proposición 9.8, nos calcula el grupo fundamental del espacio asociado a un esquema. Es conveniente consultar las Definiciones 3.21 y 3.23 para la notación implícita.

**Corolario 9.9** *Sea  $\omega$  un esquema, sea  $S_\omega$  su realización canónica,  $\sigma_\omega: \bar{D} \rightarrow S_\omega$  la identificación asociada a  $S_\omega$  y  $\Gamma_\omega = \sigma(\mathbb{S}^1)$  su grafo conexo borde.*

*Si  $z_0 := \sigma_\omega((1, 0)) \in \Gamma_\omega$  y  $\hat{\alpha}_1: [0, 1] \rightarrow \Gamma_\omega$ ,  $\hat{\alpha}_1(t) := \sigma_\omega(e^{2\pi i t})$ , entonces*

$$\Pi_1(S_\omega) \cong \Pi_1(\Gamma_\omega, z_0)/N([\hat{\alpha}_1]).$$

Como  $\Gamma_\omega$  es un grafo conexo,  $\Pi_1(\Gamma_\omega, z_0)$  es un grupo libre con una cantidad finita de generadores (ver Observación 3.20).

**Definición 9.10 (Esquemas binarios puros normales)** *Presentamos una lista básica de esquemas binarios puros, que llamaremos normales, y sus correspondientes realizaciones (téngase en cuenta el Corolario 9.9).*

- *El espacio  $S_0$  asociado al esquema binario puro  $\mathfrak{w}_0 := aa^{-1}$  es homeomorfo a la esfera  $\mathbb{S}^2$  y tiene grupo fundamental trivial  $\{0\}$ .*
- *El espacio  $S_n$  asociado al esquema binario puro  $\mathfrak{w}_n := \prod_{j=1}^n a_j c_j a_j^{-1} c_j^{-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tiene grupo fundamental isomorfo a*

$$F(a_1, c_1, \dots, a_n, c_n)/N(\{\prod_{j=1}^n a_j c_j a_j^{-1} c_j^{-1}\}).$$

- *El espacio  $S_n^*$  asociado al esquema binario puro  $\mathfrak{w}_n^* := \prod_{j=1}^n a_j a_j$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tiene grupo fundamental isomorfo a*

$$F(a_1, \dots, a_n)/N(\{\prod_{j=1}^n a_j^2\}).$$

**Corolario 9.11 (Realizaciones de esquemas binarios puros normales)** *La familia de realizaciones de los esquemas binarios puros normales*

$$\{S_n: n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{S_n^*: n \in \mathbb{N}\}$$

*no contiene dos espacios homeomorfos entre sí.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que

$$\mathcal{A}(\Pi_1(S_n)) \cong \mathbb{Z}^{2n}, \quad \mathcal{A}(\Pi_1(S_{n+1}^*)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(para  $n = 0$  entiendase  $\mathbb{Z}^0 \equiv \{0\}$ ).

Por tanto la correspondiente lista de abelianizados no contiene dos de ellos homeomorfos entre sí, de donde se sigue el resultado. ■

**Definición 9.12 (Esquemas binarios mixtos normales)** *Fijado  $k \in \mathbb{N}$ , la siguiente lista de esquemas binarios mixtos, que llamaremos normales, y sus correspondientes realizaciones (téngase en cuenta el Corolario 9.9) jugarán un papel relevante más adelante:*

- *Para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , denotaremos por  $S_{n,k}$  a la realización del esquema binario*

$$\mathfrak{w}_{n,k} := \left( \prod_{j=1}^n a_j c_j a_j^{-1} c_j^{-1} \right) \left( \prod_{j=1}^k d_j b_j d_j^{-1} \right)$$

*que tiene grupo fundamental isomorfo a*

$$F(a_1, c_1, \dots, a_n, c_n, e_1, \dots, e_k) / N \left( \left\{ \left( \prod_{j=1}^n a_j c_j a_j^{-1} c_j^{-1} \right) \left( \prod_{j=1}^k e_j \right) \right\} \right),$$

*donde  $e_j \equiv d_j b_j d_j^{-1}$  para todo  $j$ .*

- *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $S_{n,k}^*$  a la realización del esquema binario*

$$\mathfrak{w}_{n,k}^* := \left( \prod_{j=1}^n a_j a_j \right) \left( \prod_{j=1}^k c_j b_j c_j^{-1} \right)$$

*que tiene grupo fundamental isomorfo a*

$$F(a_1, \dots, a_n, e_1, \dots, e_k) / N \left( \left\{ \left( \prod_{j=1}^n a_j^2 \right) \left( \prod_{j=1}^k e_j \right) \right\} \right),$$

*donde  $e_j \equiv c_j b_j c_j^{-1}$  para todo  $j$ .*

**Ejercicio 9.13** *Fijemos  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $k \in \mathbb{N}$ , y sea  $\sigma: X \rightarrow S_{n,k}$  la identificación asociada a una realización de  $\mathfrak{w}_{n,k}$  en un disco topológico  $X$ . Llamemos  $l_{b_j} \subset \text{Bd}(X)$  al arco de Jordan correspondiente con el carácter  $b_j \in \text{sop}(\mathfrak{w}_{n,k})$  en la representación asociada, y con el mismo nombre  $b_j$  a la curva de Jordan  $\sigma(l_{b_j})$  en  $\Gamma_{n,k} := \sigma(\text{Bd}(X))$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Sean  $X_1, \dots, X_k$   $k$  discos topológicos compactos disjuntos dos a dos y disjuntos con  $S_{n,k}$  y  $X$ , y sea  $\mathfrak{h} := \{h_j: \text{Bd}(X_j) \rightarrow b_j, j = 1, \dots, k\}$  una familia de*

homeomorfismos. Dotemos a  $S_{n,k} \cup (\cup_{j=1}^k X_k)$  de la topología suma, e introduzcamos la siguiente relación de equivalencia en  $S_{n,k} \cup (\cup_{j=1}^k X_k)$

$$p \sim_{\mathfrak{h}} q \iff p = q \quad \text{ó} \quad \{p, q\} = \{r, h_j(r)\} \text{ para algún } r \in \text{Bd}(X_j) \text{ y } j \in \{1, \dots, k\}.$$

Entonces el espacio cociente  $(S_{n,k} \cup (\cup_{j=1}^k X_k)) / \sim_{\mathfrak{h}}$  es homeomorfo a  $S_n$ .

El enunciado análogo para  $S_{n,k}^*$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ , también es cierto, probándose que

$$(S_{n,k}^* \cup (\cup_{j=1}^k X_k)) / \sim_{\mathfrak{h}} \text{ es homeomorfo a } S_n^*.$$

En particular,  $S_{n,k}$  no es homeomorfo a  $S_{n',k'}^*$  para cualesquiera  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y  $n', k' \in \mathbb{N}$ .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos como modelo de  $X_j$  la realización  $S_{\omega_j}$  del esquema  $\omega_j := m_j b'_j m_j^{-1}$ . Escribamos como  $\sigma_j: Y_j \rightarrow S_{\omega_j} \equiv X_j$  la identificación asociada, denotemos por  $l_{b'_j} \subset \text{Bd}(Y_j)$  al arco de Jordan correspondiente con el carácter  $b'_j$  en  $\omega_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

Denotemos por

$$Y_0 := X \cup (\cup_{j=1}^k Y_j)$$

con la topología suma, y sea  $\mathfrak{h}' := \{h'_j: l_{b'_j} \rightarrow l_{b_j}, j = 1, \dots, k\}$  una familia de homeomorfismos. Introduzcamos en  $Y_0$  la relación

$$p \sim_{\mathfrak{h}'} q \iff p = q \quad \text{ó} \quad \{p, q\} = \{r, h'_j(r)\} \text{ para algún } r \in l_{b'_j} \text{ y } j \in \{1, \dots, k\}.$$

No es difícil comprobar que  $Y := Y_0 / \sim_{\mathfrak{h}'}$  es un disco topológico compacto; téngase en cuenta la Proposición 3.11. Llamemos

$$\sigma_0: Y_0 \rightarrow Y$$

a la correspondiente proyección. Consideremos ahora los arcos  $l_{m_j}, l_{m_j^{-1}}$  en  $\text{Bd}(Y_j)$  correspondientes a los caracteres  $m_j$  y  $m_j^{-1}$  de  $\omega_j$  y el homeomorfismo  $g_j: l_{m_j} \rightarrow l_{m_j^{-1}}$  que da lugar a la identificación  $\sigma_j: Y_j \rightarrow S_{\omega_j}$ . Análogamente, sean  $l_{d_j}, l_{d_j^{-1}}$  los arcos en  $\text{Bd}(X)$  correspondientes a los caracteres  $d_j$  y  $d_j^{-1}$  de  $\mathfrak{w}_{n,k}$  y el homeomorfismo  $f_j: l_{d_j} \rightarrow l_{d_j^{-1}}$  que da lugar al espacio identificación  $S_{n,k}$ . Estos arcos y homeomorfismos se proyectan vía  $\sigma_0$  a arcos en  $\text{Bd}(Y)$  y homeomorfismos entre ellos. Si se pegan los citados arcos de  $\text{Bd}(Y)$  siguiendo las leyes que definen esos homeomorfismos, generamos una identificación

$$\sigma_1: Y \rightarrow Y_1$$

que materializa  $Y_1$  como realización del esquema  $\omega_0 := a(\prod_{j=1}^k m_j d_j d_j^{-1} m_j^{-1})$ . Por el Ejercicio 3.14,  $Y_1$  es de nuevo un disco topológico compacto.

Por otra parte, escribamos

$$S := S_{n,k} \cup (\cup_{j=1}^k X_k),$$

y definamos

$$\hat{\sigma}: Y_0 \rightarrow S, \quad \hat{\sigma}|_X = \sigma, \quad \hat{\sigma}|_{Y_j} = \sigma_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Sea  $\pi: S \rightarrow S / \sim_{\mathfrak{h}}$  la proyección al cociente. La única aplicación

$$f: Y_1 \rightarrow S / \sim_{\mathfrak{h}} \quad \text{tal que } f \circ (\sigma_1 \circ \sigma_0) = \pi \circ \hat{\sigma}$$

es una identificación que materializa  $S/\sim_{\mathfrak{h}}$  como realización del esquema  $\mathfrak{w}_n$  en el disco  $Y$ , justo lo que queríamos demostrar.

Finalmente, si existiese  $F: S_{n,k} \rightarrow S_{n',k'}$  homeomorfismo deduciríamos que  $k = k'$ , porque un tal  $F$  habría de aplicar las  $k$  curvas de Jordan  $b_j$ 's de  $S_{n,k}$  en las  $k'$  correspondientes de  $S_{n',k'}$ ; téngase en cuenta que un entorno básicos alrededor de un punto en esas curvas es un semidisco, no un disco como ocurre en el resto de puntos del espacio, y utilícese el Corolario 9.7. Pero  $S_{n,k}$  y  $S_{n',k}$  no pueden ser homeomorfos ya que los espacios que resultan al pegarles  $k$  discos, a saber  $S_n$  y  $S_n^*$  respectivamente, no son homeomorfos por el Corolario 9.11. ■

**Corolario 9.14 (Realizaciones de esquemas binarios mixtos normales)** *Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , la familia de realizaciones de los esquemas binarios mixtos normales*

$$\{S_{n,k}: n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{S_{n,k}^*: n \in \mathbb{N}\}$$

*no contiene dos espacios homeomorfos entre sí.*

DEMOSTRACIÓN: Basta discriminar espacios usando la lista de abelianizados

$$\mathcal{A}(S_{n,k}) \cong \mathbb{Z}^{2n+k-1}, \mathcal{A}(S_{n+1,k}^*) \cong \mathbb{Z}^{n+k}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(para  $n = k - 1 = 0$  entiendase  $\mathbb{Z}^0 \equiv \{0\}$ ) y el Ejercicio 9.13. ■

### 9.1.3. El grupo fundamental de los espacios proyectivos

Recordemos que un modelo topológico básico para el espacio proyectivo  $\mathbb{RP}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es el cociente de la esfera  $\mathbb{S}^n$  por la relación de equivalencia inducida por la aplicación antípoda:

$$pRq \iff p = \pm q.$$

Para  $n = 1$  es inmediato que  $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ , y por tanto

$$\Pi_1(\mathbb{RP}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Para  $n = 2$ ,  $\mathbb{RP}^2$  es homeomorfo al espacio definido por la palabra simple  $aa$ , por lo que teniendo en cuenta la Definición 9.10

$$\Pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong F(a)/N(\{a^2\}) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Probaremos el siguiente

**Teorema 9.15**  $\Pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $n \geq 2$ .

DEMOSTRACIÓN: Bastará con demostrar que

$$\Pi_1(\mathbb{RP}^{n+1}) \cong \Pi_1(\mathbb{RP}^n), \quad n \geq 2.$$

El teorema se seguirá por un proceso inductivo elemental, usando el hecho de que  $\Pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}_2$ .

Escribamos  $\pi: \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n+1} \equiv \mathbb{S}^{n+1}/R$  la proyección natural, donde  $R$  es la relación de equivalencia inducida por la antípoda. Denotemos por  $e_{n+2} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+2}$ . Es fácil comprobar que

$$U := \pi(\{p \in \mathbb{S}^{n+1}: \langle p, e_{n+2} \rangle > 0\}) \quad \text{y} \quad V := \pi(\{p \in \mathbb{S}^{n+1}: |\langle p, e_{n+2} \rangle| < 1\})$$

son abiertos arcoconexos de  $\mathbb{RP}^{n+1}$  tales que  $\mathbb{RP}^{n+1} = U \cup V$ . Igualmente

$$U \cap V = \pi(\{p \in \mathbb{S}^{n+1} : 0 < \langle p, e_{n+2} \rangle < 1\})$$

es un abierto arcoconexo. Nuestra intención es aplicar el Teorema de Seifert-Van Kampen a la pareja  $U, V$  en  $\mathbb{RP}^{n+1}$ .

Probemos que  $U$  es simplemente conexo. En efecto, basta tener en cuenta que  $\mathbb{S}_+^{n+1} := \{p \in \mathbb{S}^{n+1} : \langle p, e_{n+2} \rangle > 0\}$  es homeomorfo a la bola unidad cerrada  $\overline{B}_n(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  vía la proyección ortogonal sobre  $\{x_{n+2} = 0\} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$ , y que  $\pi|_{\mathbb{S}_+^{n+1}} : \mathbb{S}_+^{n+1} \rightarrow U$  es un homeomorfismo.

Calculemos ahora el grupo fundamental de  $V$ .

Para ello, observemos que es posible identificar topológicamente  $\mathbb{S}^n \equiv \mathbb{S}^n \times \{0\} = (\mathbb{S}^{n+1} \cap \{x_{n+2} = 0\})$ , y escribamos  $W = \{p \in \mathbb{S}^{n+1} : 0 < |\langle p, e_{n+2} \rangle| < 1\}$ . La aplicación

$$r : W \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad r(p) := \frac{p - \langle p, e_{n+2} \rangle e_{n+2}}{\|p - \langle p, e_{n+2} \rangle e_{n+2}\|}$$

es la retracción asociada a la deformación

$$H : W \times [0, 1] \rightarrow W, \quad H(p, s) := \frac{(1-s)p + sr(p)}{\|(1-s)p + sr(p)\|}$$

que materializa  $\mathbb{S}^n$  como retracto fuerte de deformación de  $W$ .

Si  $A : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  es la aplicación antípoda, es inmediato comprobar que

$$r \circ A = A \circ r \quad \text{y} \quad H \circ (A \times \text{Id}_{[0,1]}) = A \circ H.$$

Por tanto existe una única retracción y deformación

$$\hat{r} : V \rightarrow \pi(\mathbb{S}^n), \quad \hat{H} : V \times [0, 1] \rightarrow V$$

satisfaciendo que

$$\hat{r} \circ (\pi|_W) = (\pi|_{\mathbb{S}^n}) \circ r \quad \text{y} \quad \hat{H} \circ ((\pi|_W) \times \text{Id}_{[0,1]}) = (\pi|_W) \circ H,$$

lo que prueba que  $\pi(\mathbb{S}^n)$  es un retracto fuerte de deformación de  $V$ . En otras palabras,  $\mathbb{RP}^n$  es un retracto fuerte de deformación de  $V$  ya que  $\pi(\mathbb{S}^n)$  es naturalmente homeomorfo a  $\mathbb{RP}^n \equiv \mathbb{S}^n/R_0$ , donde  $R_0$  es la relación inducida por la antípoda en  $\mathbb{S}^n$ .

Por último, comprobemos que  $U \cap V$  es simplemente conexo. En efecto, si llamamos  $Y := \{p \in \mathbb{S}^{n+1} : 0 < \langle p, e_{n+2} \rangle < 1\}$ , la aplicación  $\pi|_Y : Y \rightarrow U \cap V$  es un homeomorfismo. Igualmente

$$\Phi : Y \rightarrow \mathbb{S}^n \times ]0, 1[, \quad \phi(p) = (r(p), \langle p, e_{n+2} \rangle),$$

es un homeomorfismo. Inferimos que  $U \cap V$  es homeomorfo al espacio simplemente conexo  $\mathbb{S}^n \times [0, 1]$  (téngase en cuenta que  $n \geq 2$ ), y por tanto igualmente simplemente conexo.

El Corolario 9.2 garantiza que

$$\Pi_1(\mathbb{RP}^{n+1}) \cong \Pi_1(U) \bullet \Pi_1(V) \cong \{0\} \bullet \Pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \Pi_1(\mathbb{RP}^n),$$

lo que concluye la prueba. ■

## Ejercicios del Tema 1

1. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua entre espacios topológicos. Tomamos dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  en  $X$ . Denotamos por  $(f_*)_1$  y por  $(f_*)_2$  a los homomorfismos inducidos por  $f$  en los puntos  $x_1$  y  $x_2$ . Dado  $\gamma \in \Omega_{x_1, x_2}(X)$ , demostrar que  $(f_*)_2 \circ \mathcal{U}_\gamma = \mathcal{U}_{f \circ \gamma} \circ (f_*)_1$ .
2. Probar que son grupos topológicos:
  - a)  $\mathbb{R}^n$  con la suma y la topología usuales.
  - b)  $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} - \{0\}$  y  $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} - \{0\}$  con los productos y las topologías usuales.
  - c)  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  con el producto de números complejos y la topología usual.
  - d) El grupo lineal general  $GL(n)$ , el grupo ortogonal  $O(n)$  y el grupo especial ortogonal  $SO(n)$  con el producto de matrices y la topología inducida por  $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ .
3. (Conjuntos estrellados). Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $x_0 \in X$ . Se dice que  $X$  es *estrellado respecto de  $x_0$*  si  $[x_0, x] \subseteq X$ , para cada  $x \in X$ . Se pide lo siguiente:
  - a) Sean  $\alpha, \beta \in \Omega_{x_0}(X)$ . Demostrar que  $\alpha \simeq \beta$ , construyendo una homotopía de forma explícita. Concluir que  $X$  es simplemente conexo.
  - b) Sean  $f, g : Y \rightarrow X$  dos aplicaciones continuas, donde  $Y$  es cualquier espacio topológico. Demostrar que  $f \simeq g$ .
4. Toda aplicación continua  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  admite una extensión  $F : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ , donde  $\overline{D}$  es el disco unidad cerrado.
5. Sea  $X$  un espacio topológico y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$  aplicaciones continuas con  $g(x) \neq -f(x)$ , para cada  $x \in X$ . Demostrar que  $f \simeq g$ . Deducir que:
  - a) si  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  es continua y no tiene puntos fijos, entonces  $f \simeq -I_{\mathbb{S}^n}$ ,
  - b) si  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  es continua y  $f(x) \neq -x$ , para cada  $x \in \mathbb{S}^n$ , entonces  $f \simeq I_{\mathbb{S}^n}$ .
6. Demostrar que  $I_{\mathbb{S}^{2n-1}} \simeq -I_{\mathbb{S}^{2n-1}}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . A partir de este hecho y del ejercicio anterior deducir que si  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es continua y nulhomótota, entonces existen  $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^1$  tales que  $f(x_1) = x_1$  y  $f(x_2) = -x_2$ .
7. Para cada espacio  $X$  probar que la sección ecuatorial  $A = X \times \{0\}$  es un retracto de deformación de  $X \times [-1, 1]$ . Deducir el tipo de homotopía de la banda  $\mathbb{R}^n \times [-1, 1]$ , el cilindro  $\mathbb{S}^n \times [-1, 1]$  y el cubo  $[-1, 1]^{n+1}$ . Discutir qué ocurre si sustituimos  $[-1, 1]$  por  $\mathbb{R}$ .
8. Encontrar un retracto de deformación de  $X = \mathbb{S}^n - \{N, S\}$  y otro de  $X = \mathbb{R}^{n+1} - \overline{B}(0, 1)$ , donde  $\overline{B}(0, 1)$  es la bola unidad cerrada.
9. Sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$  con  $x_1 \neq x_2$ . Definimos  $A = C_1 \cup C_2$ , donde  $C_i$  es la circunferencia de centro  $x_i$  y radio  $\|x_1 - x_2\|/2$ . Demostrar gráficamente que  $A$  es un retracto de deformación de  $\mathbb{R}^2 - \{x_1, x_2\}$ . Calcular explícitamente la retracción cuando  $x_1 = (-1, 0)$  y  $x_2 = (1, 0)$ .

10. Sea  $\alpha \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1)$  un lazo de clase  $C^1$ . Demostrar que:

$$\deg(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \langle \alpha'(u), J(\alpha(u)) \rangle du,$$

donde  $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es el giro de ángulo  $\pi/2$  dado por  $J(x, y) = (-y, x)$ .

11. ¿Es cierto el teorema de Borsuk-Ulam si cambiamos  $\mathbb{S}^2$  por el toro  $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ?  
 12. Probar que el teorema de Borsuk-Ulam es equivalente a los siguientes enunciados:

- a) Si  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es continua e impar, entonces existe  $x_0 \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(x_0) = 0$ .  
 b) Si  $g_1, g_2 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas e impares, existe  $x_0 \in \mathbb{S}^2$  tal que  $g_1(x_0) = g_2(x_0) = 0$ .

13. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función continua. Definimos el conjunto:

$$S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = f(z)^2\}.$$

- a) Estudiar el conjunto  $S_f \cap \{z = z_0\}$  con  $z_0 \in \mathbb{R}$ . Esbozar un dibujo de  $S_f$ .  
 b) Demostrar que cualesquiera dos conjuntos  $S_f$  son homeomorfos entre sí.  
 c) Calcular el grupo fundamental de  $S_f$ .  
 14. Encontrar un retracts de deformación de  $\mathbb{R}^3 - L$ , donde  $L$  es el eje  $z$ . Obtener  $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - R)$ , siendo  $R$  cualquier recta combinatorio (intenta utilizar que hay una retracción de  $\mathbb{R}_*^2$  en  $\mathbb{S}^1$ ).  
 15. Sea  $S$  un subespacio combinatorio de dimensión  $k \leq n-2$  en  $\mathbb{R}^n$ . Calcular  $\Pi_1(\mathbb{R}^n - S)$  encontrando para ello un retracts de deformación.  
 16. Demostrar que un abierto de  $\mathbb{R}^2$  no puede ser homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$  si  $n \neq 2$ .  
 17. Demostrar que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - \arctg(x^2 - y^3) &= 5, \\ \cos(x) + \sin(xy^3) + e^x + e^{y^2} + \frac{1}{y} &= -3. \end{aligned}$$

tiene al menos una solución en  $\mathbb{R}^2$ .

18. Sea  $A$  un retracts de un disco cerrado en  $\mathbb{R}^2$ . Demostrar que toda aplicación continua  $f : A \rightarrow A$  tiene al menos un punto fijo. Deducir que toda aplicación continua  $f : X \rightarrow X$  con  $X = \overline{B}((-1, 0), 1) \cup \overline{B}((1, 0), 1)$  tiene al menos un punto fijo.  
 19. Sea  $f : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  un homeomorfismo. Demostrar que  $f$  conserva el interior y la frontera de  $\overline{D}$ .  
 20. Calcular  $\Pi_1(X)$  en estos casos:

- a)  $X = \mathbb{S}^2 \cup [N, S]$ , donde  $N$  y  $S$  son el polo Norte y el polo Sur de  $\mathbb{S}^2$ .

- b)  $X = \mathbb{S}^2 \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,
- c)  $X = \mathbb{S}^2 \cup C_1 \cup C_2$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  son circunferencias tangentes a  $\mathbb{S}^2$  en los puntos  $N$  y  $S$ , respectivamente.
- d)  $X$  es la unión de una esfera y de un toro tangentes en un único punto.
- e)  $X$  es la unión de dos toros tangentes en un único punto.
21. Calcular  $\Pi_1(X)$ , donde  $X$  es el espacio que se obtiene al identificar los  $n$  lados de un polígono regular plano siguiendo los esquemas  $E$  siguientes:
- a)  $n = 3$ ,  $E = aaa$ . ¿Es  $X$  contráctil?
- b)  $n = 6$ ,  $E = aa^{-1}ba^{-1}a^{-1}b^{-1}$ ,
- c)  $n = 6$ ,  $E = ab^{-1}bccc$ ,
- d)  $n = 7$ ,  $E = abaaab^{-1}a^{-1}$ . Es  $\Pi_1(X)$  el producto libre de dos grupos cíclicos?
- e)  $n = 7$ ,  $E = abcb^{-1}a^{-1}cc$ .
22. Sea  $X$  el espacio resultante al identificar los 8 lados de un polígono regular plano siguiendo el esquema  $acadbcb^{-1}d$ . Calcular el abelianizado del grupo fundamental de  $X$ .
23. Sea  $X$  el espacio obtenido a partir de una corona circular plana cuando se identifican puntos antípodas en las dos circunferencias del borde. Calcular  $\Pi_1(X)$ .
24. Sea  $X$  el cociente de una corona circular donde el círculo exterior se divide en seis lados identificados por el esquema  $abca^{-1}a^{-1}c^{-1}$  y el círculo exterior se divide en tres lados identificados según el esquema  $ddd$ . Calcular su grupo fundamental.
25. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:
- a) Sea  $f : A \rightarrow Y$  una aplicación continua con  $A \subseteq X$  y  $X$  simplemente conexo. Supongamos que existe  $F : X \rightarrow Y$  continua con  $F|_A = f$ . Probar que el homomorfismo inducido  $f_* : \Pi_1(A, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$  es trivial, con independencia de  $x_0 \in A$ .
- b) Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas con  $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ . Supongamos que  $f \sim g$  por una homotopía  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $H(x_0, s) = y_0$ , para cada  $s \in [0, 1]$ . Demostrar que los homomorfismos inducidos  $f_*$  y  $g_*$  en  $x_0$  son iguales.
- c) Discutir si la bola unidad cerrada es un retracto de deformación de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
- d) Sea  $X$  simplemente conexo y  $A \subseteq X$  un retracto de  $X$ . ¿Es  $A$  simplemente conexo?
- e) Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un convexo compacto con interior no vacío. Dado un punto  $x_0$  del interior de  $X$ , demostrar que la frontera  $\text{Fr}(X)$  es un retracto de deformación de  $X - \{x_0\}$ .
- f) Discutir si  $\mathbb{S}^1$  admite algún retracto de deformación  $A \neq \mathbb{S}^1$ .
- g) Sea  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  la aplicación dada por  $f(z) = z^n$ . Calcular el homomorfismo inducido  $f_*$  en  $x_0 = 1$ .
- h) Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . ¿Es  $(i_A)_*$  un monomorfismo? ¿Y si  $A$  es un retracto de  $X$ ?



- i)* Supongamos que  $f : X \rightarrow Y$  es continua y sobreyectiva con  $f(x_0) = y_0$ . ¿Es cierto que  $f_* : \pi(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$  es un epimorfismo?
- j)* ¿Es todo retracto de un espacio  $X$  un retracto de deformación de  $X$ ?
- k)* Discutir si existe algún homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  que intercambie las dos componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1$ .

## TEMA 2: Espacios Recubridores

Francisco J. López  
Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Granada  
fjlopez@ugr.es

En este tema vamos a tratar el concepto de espacio recubridor, una de las herramientas más útiles en Topología y Geometría. Esta teoría está íntimamente ligada con la del grupo fundamental como iremos descubriendo más adelante. A nivel intuitivo, la idea básica para construir un espacio recubridor consiste en *desenrollar* una cantidad finita o infinita de veces lazos homotópicamente no triviales de un espacio base, para de esta forma generar otro de menor complejidad topológica (a nivel de grupo fundamental).

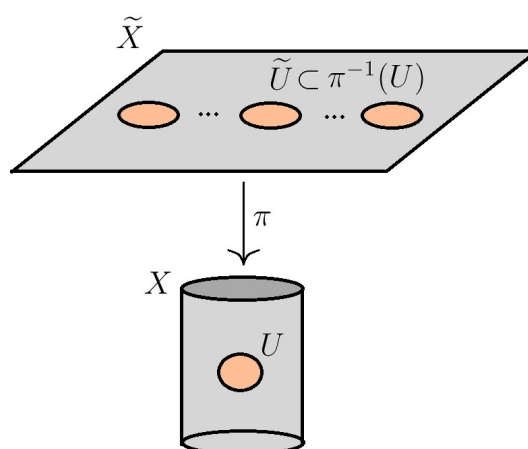
**A lo largo de este tema, todos los espacios topológicos considerados serán *conexos y localmente arcoconexos* (luego *arcoconexos*).**

### 10. Definición y ejemplos. Nociones básicas

**Definición 10.1** Sea  $X$  un espacio topológico. Un (espacio) recubridor de  $X$  es un par  $(\tilde{X}, \pi)$ , donde:

- $\tilde{X}$  es un espacio topológico.
- $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  es una aplicación continua y sobreyectiva.
- Todo punto  $p \in X$  admite un entorno abierto y arcoconexo  $U$  en  $X$  tal que  $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$  es un homeomorfismo para toda arcocomponente  $\tilde{U}$  de  $\pi^{-1}(U)$ .

Al abierto  $U$  se le llamará entorno fundamental o distinguido para el recubridor  $(\tilde{X}, \pi)$  (alrededor de  $p \in U$ , luego alrededor de cualquiera otro punto de  $U$ ).



Algunos comentarios y notaciones al hilo de la Definición 10.1:

- A la aplicación  $\pi$  la llamaremos *aplicación recubridora*, al espacio  $X$  *base del recubridor*  $(\tilde{X}, \pi)$ , y al espacio  $\tilde{X}$  *espacio recubridor* (de  $X$  vía  $\pi$ ).

- Dado  $p \in X$ , al conjunto  $\pi^{-1}(p) \subset \tilde{X}$  le llamaremos *fibra* del punto  $p$  para el recubridor  $(\tilde{X}, \pi)$ . Un recubridor se dirá *finito* (y la aplicación recubridora finita) cuando la fibra  $\pi^{-1}(p)$  sea finita para todo  $p \in X$ . Más adelante comprobaremos que el cardinal de  $\pi^{-1}(p)$  no depende del punto  $p \in X$ ; ver el Corolario 11.5 y la Definición 11.6.
- La familia  $\mathcal{U} := \{U \subset X : U \text{ es entorno distinguido para } (\tilde{X}, \pi)\}$  es una base de la topología de  $X$ . En efecto, si  $X \in X$  y  $O \subset X$  es un abierto cualquiera conteniendo a  $x$ , consideremos un entorno distinguido  $U$  para  $\pi$  alrededor de  $x$  y la arcocomponente  $V$  de  $x$  en  $U \cap O$ . Claramente  $V \subset \mathcal{U}$  y  $x \in V \subset U \cap O \subset O$ .
- Cada arcocomponente  $\tilde{U}$  de  $\pi^{-1}(U)$  es un subconjunto abierto de  $\tilde{X}$ : téngase en cuenta  $\pi^{-1}(U)$  es un abierto de  $\tilde{X}$  y que este espacio es localmente arcoconexo. Por tanto toda aplicación recubridora es un homeomorfismo local.
- $\pi$  es un homeomorfismo local, luego una aplicación abierta.
- El conjunto de arcocomponentes de  $\pi^{-1}(U)$  está en correspondencia uno a uno con la fibra de  $p$ . En otras palabras, si  $\tilde{U}_{\tilde{p}}$  representa la única arcocomponente de  $\pi^{-1}(U)$  conteniendo a  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ , el conjunto

$$\{\tilde{U}_{\tilde{p}} : \tilde{p} \in \pi^{-1}(p)\}$$

describe unívocamente todas las arcocomponentes de  $\pi^{-1}(U)$ , copias homeomórficas de  $U$ , y por tanto

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)} \tilde{U}_{\tilde{p}}.$$

No todo homeomorfismo local sobreyectivo es una aplicación recubridora. Sirva como contraejemplo  $\rho|_{]0,2[} : ]0,2[ \rightarrow \mathbb{S}^1$ , donde  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es la exponencial  $\rho(t) = e^{2\pi it}$ . En este caso el punto  $(1,0) \in \mathbb{S}^1$  no admite ningún entorno distinguido. En relación a este punto es recomendable consultar la Proposición 10.3.

Destaquemos algunos ejemplos sencillos de recubridores.

**Ejercicio 10.2** *Las siguientes aplicaciones son recubridoras:*

- La aplicación exponencial  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida en (1).
- La aplicación  $\pi_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $\pi_n(z) := z^n$  (notación compleja).
- $\pi_1 \times \pi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ , donde  $\pi_j : X_j \rightarrow Y_j$  es recubridora,  $j = 1, 2$ .
- $\rho \times \rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .
- $\rho \times \text{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ .
- $\pi_n \times \pi_m : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ .
- $\pi_n \times \text{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- La proyección canónica  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- Un homeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$ .

Es natural preguntarse bajo qué condiciones topológicas una aplicación es recubridora. La proposición siguiente es un ejemplo de ello.

**Proposición 10.3** Si  $f: Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo local sobreyectivo y propio entre espacios Hausdorff localmente compactos, entonces  $f$  es una aplicación recubridora finita.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $x \in X$  y consideremos el conjunto  $f^{-1}(x)$ . Como  $f$  es un homeomorfismo local el conjunto  $f^{-1}(x)$  es discreto. En efecto, para cada  $y \in f^{-1}(x)$  existe un entorno  $V$  de  $y$  en  $Y$  tal que  $f(V)$  es un entorno de  $x$  en  $X$  y  $f|_V: V \rightarrow f(V)$  es un homeomorfismo. De aquí que  $V$  contiene sólo una preimagen por  $f$  de  $x$  y  $f^{-1}(x)$  sea discreto. Pero además  $f^{-1}(x)$  es compacto al ser la imagen inversa por una aplicación propia de un compacto. Inferimos pues que  $f^{-1}(x)$  es finito, y escribamos:

$$f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}.$$

Como  $Y$  es Hausdorff podemos encontrar entornos abiertos  $V_j$  de  $y_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , disjuntos dos a dos. Salvo refinarlos podemos garantizar que, además,  $f|_{V_j}: V_j \rightarrow f(V_j)$  es un homeomorfismo, donde  $f(V_j)$  es un entorno abierto de  $x$ ,  $j = 1, \dots, n$ . De aquí que  $\bigcap_{j=1}^n f(V_j)$  es un entorno abierto de  $x$ . Como  $X$  es localmente compacto y Hausdorff, es posible encontrar un abierto  $W$  en  $X$  tal que  $x \in W$ ,  $\overline{W}$  (cierre en  $X$ ) es compacto y  $\overline{W} \subset \bigcap_{j=1}^n f(V_j)$ .

Veamos que

$$U := W \setminus f(f^{-1}(\overline{W}) \setminus (\bigcup_{j=1}^n V_j))$$

es el entorno distinguido buscado alrededor de  $x$ .

- $U$  es abierto: Como  $f$  es propia  $f^{-1}(\overline{W})$  es compacto, de donde  $f^{-1}(\overline{W}) \setminus (\bigcup_{j=1}^n V_j)$  es igualmente compacto al ser un cerrado dentro de  $f^{-1}(\overline{W})$ . Por tanto  $f(f^{-1}(\overline{W}) \setminus (\bigcup_{j=1}^n V_j))$  es compacto, luego cerrado en  $X$  ya que este espacio es Hausdorff. De aquí que  $U$  sea abierto.
- $x \in U$ : Como  $f^{-1}(x) \subset \bigcup_{j=1}^n V_j$  inferimos que  $f^{-1}(\overline{W}) \setminus (\bigcup_{j=1}^n V_j)$  es disjunto de  $f^{-1}(x)$ . Por tanto  $x \notin f(f^{-1}(\overline{W}) \setminus (\bigcup_{j=1}^n V_j))$ , y como  $x \in W$  finalmente  $x \in U$ .
- $f^{-1}(U)$  consiste de  $n$  abiertos disjuntos dos a dos homeomorfos vía  $f$  a  $U$ : Como

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}(W) \setminus f^{-1}\left(f(f^{-1}(\overline{W}) \setminus (\bigcup_{j=1}^n V_j))\right) \subset \\ &\subset f^{-1}(W) \setminus (f^{-1}(\overline{W}) \setminus (\bigcup_{j=1}^n V_j)) = \bigcup_{j=1}^n V_j, \end{aligned}$$

deducimos que  $f^{-1}(U)$  es la unión disjunta de los abiertos  $f^{-1}(U) \cap V_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , todos ellos homeomorfos a  $U$  vía  $f$  ya que  $f|_{V_i}: V_i \rightarrow f(V_i)$  es un homeomorfismo y  $U \subset \bigcap_{j=1}^n f(V_j) \subset f(V_i)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

■

**Corolario 10.4** Supongamos que  $X$  e  $Y$  son espacios Hausdorff,  $Y$  compacto. Todo homeomorfismo local  $f: Y \rightarrow X$  es una aplicación recubridora.

DEMOSTRACIÓN: Como  $f$  es un homeomorfismo local es una aplicación abierta. También es cerrada por ir de un compacto en un Hausdorff. Por tanto  $f$  es sobreyectiva. En particular  $X$  es compacto al ser la imagen continua de un compacto. Como todo compacto Hausdorff es localmente compacto, el resultado se sigue de la Proposición 10.3. ■

Otra cuestión de interés es saber si la composición de aplicaciones recubridoras es una aplicación recubridora. Existen contraejemplos que demuestran la falsedad de esa afirmación en general. Pero hay una situación muy particular en la que es cierta.

**Proposición 10.5** Sean  $\pi_1: Y \rightarrow Z$  y  $\pi_2: Z \rightarrow X$  aplicaciones recubridoras. Si  $\pi_2$  es finita entonces  $\pi_2 \circ \pi_1: Y \rightarrow X$  es recubridora.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $x \in X$  un punto arbitrario, y consideremos un entorno distinguido  $U$  en  $X$  para  $\pi_2$  alrededor de  $x$ . Llamemos  $\pi_2^{-1}(x) = \{z_1, \dots, z_n\}$  (téngase en cuenta que  $\pi_2$  es finito) y escribamos

$$\pi_2^{-1}(U) = \cup_{j=1}^n V_j,$$

donde  $\pi_2|_{V_j}: V_j \rightarrow U$  es un homeomorfismo,  $j = 1, \dots, n$ .

Consideremos un entorno distinguido  $W_j$  en  $Z$  alrededor de  $z_j$  para el recubridor  $\pi_1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Obsérvese que la arccomponente  $U_0$  de  $\cap_{j=1}^n \pi_2(W_j \cap V_j)$  conteniendo a  $x$  es un entorno distinguido para  $\pi_2$ . Para ello téngase en cuenta que

$$U_0 \subset \cap_{j=1}^n \pi_2(W_j \cap V_j) \subset U$$

y recuérdese que  $U$  era un entorno distinguido para  $\pi_2$ . Por tanto, si  $U_j := V_j \cap \pi_2^{-1}(U_0)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , entonces

$$\pi_2^{-1}(U_0) = \cup_{j=1}^n U_j \quad \text{con } \pi_2|_{U_j}: U_j \rightarrow U_0 \text{ un homeomorfismo, } j = 1, \dots, n.$$

Por otra parte, al ser  $U_j = V_j \cap \pi_2^{-1}(U_0) = (\pi_2|_{V_j})^{-1}(U_0) \subset W_j \cap V_j \subset W_j$  para cada  $j$ , es claro que

$$\pi_1^{-1}(U_j) = \cup_{p \in \pi_1^{-1}(z_j)} U_{j,p}, \quad \text{con } \pi_1|_{U_{j,p}}: U_{j,p} \rightarrow U_j \text{ homeomorfismo, } p \in \pi_1^{-1}(z_j),$$

$j = 1, \dots, n$ .

Como conclusión,

$$\begin{aligned} (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(U_0) &= \pi_1^{-1}(\pi_2^{-1}(U_0)) = \pi_1^{-1}(\cup_{j=1}^n U_j) = \\ &= \cup_{j=1}^n \pi_1^{-1}(U_j) = \cup_{j=1}^n (\cup_{p \in \pi_1^{-1}(z_j)} U_{j,p}), \end{aligned}$$

con  $(\pi_2 \circ \pi_1)|_{U_{j,p}} = (\pi_2|_{U_j}) \circ (\pi_1|_{U_{j,p}}): U_{j,p} \rightarrow U_0$  un homeomorfismo para todo  $p \in \pi_1^{-1}(z_j)$  y  $j = 1, \dots, n$ . Esto prueba que  $U_0$  es un entorno distinguido para  $\pi_2 \circ \pi_1$  alrededor de  $x$  y concluye la proposición. ■

Uno de los instrumentos más útiles para la construcción de recubrimientos son las acciones de grupos de homeomorfismos sobre un espacio, que determinan de forma natural cocientes topológicos llamados espacios de órbitas. Precisemos el lenguaje.

Dado un espacio topológico  $X$ , denotaremos por

$$\text{Hom}(X) := \{f: X \rightarrow X \text{ homeomorfismo}\}$$

al grupo (con la composición) de los homeomorfismos de  $X$

**Definición 10.6** Sea  $X$  un espacio topológico, y sea  $G \subset \text{Hom}(X)$  un subgrupo. Consideremos la acción canónica de  $G$  sobre  $X$ :

$$\mu: G \times X \rightarrow X, \quad \mu(g, x) := g(x).$$

Es habitual escribir  $g \cdot x$  en vez de  $\mu(g, x)$  para todo  $g \in G$  y  $x \in X$ . La relación binaria en  $X$

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } g \cdot x = y$$

es de equivalencia. El espacio topológico cociente  $X/\sim$  se denotará por  $X/G$  y será referido como el espacio de órbitas asociado a la acción  $\mu$  inducida por  $G$ .

**Definición 10.7** Sea  $X$  un espacio topológico, y sea  $G \subset \text{Hom}(X)$  un subgrupo.

El subgrupo  $G$  se dirá que actúa de forma propia y discontinua sobre  $X$  (y la acción  $\mu: G \times X \rightarrow X$  inducida se dirá propia y discontinua) si para todo  $x \in X$  existe un entorno abierto  $U$  de  $x$  en  $X$  tal que  $(g \cdot U) \cap U = \emptyset$  para todo  $g \in G \setminus \{\text{Id}_X\}$  (aquí  $g \cdot U$  denota el conjunto  $g(U)$ ). Al entorno  $U$  se le llamará entorno distinguido (alrededor de  $x$ ) para la acción.

La conexión con la teoría de recubridores la da el siguiente teorema.

**Teorema 10.8** Sea  $X$  un espacio topológico, y sea  $G \subset \text{Hom}(X)$  un subgrupo actuando de forma propia y discontinua sobre  $X$ .

Entonces la proyección al espacio de órbitas  $\pi: X \rightarrow X/G$  es recubridora.

DEMOSTRACIÓN: Para cada  $x \in X$  denotemos por  $G \cdot x = \{g \cdot x: g \in G\}$  a la órbita de  $x$ . La continuidad y sobreyectividad de  $\pi: X \rightarrow X/G$ ,  $\pi(x) := G \cdot x$ , es bien conocida. También es obvio que  $\pi$  es abierta, obsérvese que si  $O \subset X$  es un subconjunto abierto entonces  $\pi^{-1}(\pi(O)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot O$  es abierto por ser unión de abiertos. Por la definición de la topología cociente se sigue que  $\pi(O)$  es abierto.

Sea  $G \cdot x \in X/G$  una órbita arbitraria. Consideremos el único entorno abierto  $U$  de  $x \in X$  tal que  $(g \cdot U) \cap U = \emptyset$  para todo  $g \in G \setminus \{\text{Id}_X\}$ . Comprobemos que  $\pi(U)$  es un entorno distinguido de  $G \cdot x$  para  $\pi$ .

Como  $\pi(U)$  es un abierto conteniendo a  $G \cdot x$  y  $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ , siendo esta unión disjunta (téngase en cuenta que  $U$  es un entorno distinguido para la acción de  $G$  sobre  $X$ ), es suficiente con garantizar que la aplicación:

$$\pi|_{g \cdot U}: g \cdot U \rightarrow \pi(U)$$

es un homeomorfismo para todo  $g \in G$ .

En efecto, esta aplicación es continua y abierta ya que es la restricción de la aplicación continua y abierta  $\pi$  al abierto  $g \cdot U$  de  $X$ . Bastará con demostrar que es biyectiva. En efecto, si  $x, y \in U$  son tales que  $\pi(g \cdot x) = G \cdot (g \cdot x) = G \cdot (g \cdot y) = \pi(g \cdot y)$  entonces existe  $h \in G$  tal que  $h \cdot (g \cdot x) = g \cdot y$ , esto es, tal que  $(g^{-1} \circ h \circ g) \cdot x = y$ . Esto implicaría que  $U \ni y \in (g^{-1} \circ h \circ g) \cdot U$ . Al ser  $U$  un entorno distinguido para la acción  $\mu$ , deduciríamos que  $g^{-1} \circ h \circ g = \text{Id}_X$ , esto es,  $h \circ g = g$ . De la identidad  $(h \circ g)(x) = g(y)$  se concluye que  $x = y$  y la biyectividad de  $\pi|_{g \cdot U}: g \cdot U \rightarrow \pi(U)$ . ■

Obsérvese que los entornos distinguidos para la aplicación recubridora  $\pi: X \rightarrow X/G$  coinciden con los distinguidos para la acción propia y discontinua inducida por  $G$ .

**Ejercicio 10.9** Ejemplos de acciones propias y discontinuas:

- Si denotamos por  $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau_t(r) = r+1$ , el grupo de traslaciones  $G := \{\tau^n: n \in \mathbb{Z}\}$  actúa de forma propia y discontinua sobre  $\mathbb{R}$ .

En este caso el espacio de órbitas  $\mathbb{R}/G \cong \mathbb{S}^1$ .

- Si denotamos por  $\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\theta(x, y) = (x+1, y)$ , el grupo de traslaciones  $G := \{\theta^n: n \in \mathbb{Z}\}$  actúa de forma propia y discontinua sobre  $\mathbb{R}^2$ .

En este caso el espacio de órbitas  $\mathbb{R}^2/G \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ .

- Si denotamos por  $\theta_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\theta_0(x, y) = (x+1/2, -y)$ , el grupo de traslaciones  $G := \{\theta_0^n: n \in \mathbb{Z}\}$  actúa de forma propia y discontinua sobre  $\mathbb{R}^2$ .

En este caso el espacio de órbitas  $\mathbb{R}^2/G$  es conocido como la cinta de Möbius infinita.

- Si denotamos por  $\tau_{m,n}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\tau_{m,n}(x, y) = (x + m, y + n)$ , el grupo de traslaciones  $G := \{\tau_{m,n}: m, n \in \mathbb{Z}\}$  actúa de forma propia y discontinua sobre  $\mathbb{R}^2$ .

En este caso el espacio de órbitas  $\mathbb{R}^2/G \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  (el toro).

- Si denotamos por  $\theta_{m,n}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\theta_{m,n}(x, y) = (x + n, (-1)^n y + m)$  el grupo de traslaciones  $G := \{\theta_{m,n}: m, n \in \mathbb{Z}\}$  actúa de forma propia y discontinua sobre  $\mathbb{R}^2$ .

En este caso el espacio de órbitas  $\mathbb{R}^2/G$  es conocido como la botella de Klein.

**Proposición 10.10** Si  $X$  es un espacio topológico Hausdorff y  $G$  es un grupo finito de homomorfismos de  $X$  sin puntos fijos (esto es, tal que  $\phi(x) \neq x$  para todo  $x \in X$  y  $\phi \in G \setminus \{\text{Id}_X\}$ ), entonces  $G$  actúa de forma propia y discontinua sobre  $X$ .

DEMOSTRACIÓN: Escribamos  $G = \{\phi_1 = \text{Id}_X, \phi_2, \dots, \phi_k\}$ , elijamos  $x_1 \in X$  y denotemos  $x_j = \phi_j(x_1)$  para cada  $j = 1, \dots, k$ . De nuestras hipótesis  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$ . Como  $X$  es Hausdorff podemos tomar  $U_j$  entorno abierto de  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , de forma que  $U_j \cap U_i = \emptyset$ ,  $i \neq j$ . Finalmente definamos  $U = \cap_{j=1}^k \phi_j^{-1}(U_j)$ . Por construcción  $U$  es un abierto que contiene a  $x_1$  y satisface  $U \cap \phi_j(U) \subset U \cap U_j = \emptyset$  para todo  $j > 1$ , esto es,  $U$  es un entorno distinguido para la acción de  $G$  sobre  $X$ . ■

## 11. Levantamiento de aplicaciones al recubridor

La teoría de recubridores se apoya de forma esencial sobre la noción de grupo fundamental. El ingrediente técnico para comprender ese hecho son las propiedades de levantamiento de aplicaciones, en especial las de arcos y homotopías, que vamos a estudiar a continuación. Comenzaremos con la siguiente proposición, que expresa una idea recurrente en la teoría de recubridores: fijada una condición inicial, los levantamientos de aplicaciones a un recubridor de existir son únicos.

**Proposición 11.1** Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ , sea  $Y$  un espacio topológico conexo y sean  $f_1, f_2: Y \rightarrow \tilde{X}$  dos aplicaciones continuas satisfaciendo  $\pi \circ f_1 = \pi \circ f_2$ .

Si  $A := \{y \in Y: f_1(y) = f_2(y)\} \neq \emptyset$  entonces  $f_1 = f_2$ .

DEMOSTRACIÓN: Por la conexión de  $Y$  bastará con ver que  $A$  es abierto y cerrado en  $Y$ .

Comprobemos que  $A$  es abierto. Sea  $y_0 \in A$  y consideremos un entorno distinguido  $U$  en  $X$  alrededor de  $x_0 := \pi(f_1(y_0)) = \pi(f_2(y_0))$ . Llamemos  $\tilde{U}$  a la arccomponente de  $\pi^{-1}(U)$  conteniendo a  $\tilde{x}_0 := f_1(y_0) = f_2(y_0) \in \pi^{-1}(x_0)$ . Como  $f_j$  es continua,  $V_j := f_j^{-1}(\tilde{U})$  es un abierto en  $Y$  conteniendo a  $y_0$ ,  $j = 1, 2$ . Llamemos  $V := V_1 \cap V_2$ , también abierto en  $Y$  conteniendo a  $y_0$ . Claramente  $f_j(V) \subset \tilde{U}$ ,  $j = 1, 2$ , y

$$(\pi|_{\tilde{U}}) \circ (f_1|_V) = (\pi \circ f_1)|_V = (\pi \circ f_2)|_V = (\pi|_{\tilde{U}}) \circ (f_2|_V).$$

Como  $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$  es un homeomorfismo,  $f_1|_V = f_2|_V$  y  $V \subset A$ . Esto prueba que  $y_0$  es interior a  $A$ , y por tanto que  $A$  es abierto en  $Y$ .

Para acabar veamos que  $A$  es cerrado, esto es, que  $Y \setminus A$  es abierto. Sea  $y_0 \in Y \setminus A$  y consideremos un entorno distinguido  $U$  en  $X$  alrededor de  $x_0 := \pi(f_1(y_0)) = \pi(f_2(y_0))$ . Como  $\tilde{x}_1 := f_1(y_0) \neq \tilde{x}_2 := f_2(y_0) \in \pi^{-1}(x_0)$ , las arccomponentes  $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$  de  $\pi^{-1}(U)$  tales que  $\tilde{x}_j \in \tilde{U}_j$ ,  $j = 1, 2$ , son distintas (luego disjuntas). Como  $f_j$  es continua,  $V_j := f_j^{-1}(\tilde{U}_j)$  es un abierto en  $Y$  conteniendo a  $y_0$ ,  $j = 1, 2$ . Llamemos  $V := V_1 \cap V_2$ , también abierto en  $Y$  conteniendo a  $y_0$ . Claramente  $f_j(V) \subset \tilde{U}_j$ ,  $j = 1, 2$ , y como  $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$ ,  $f_1(y) \neq f_2(y)$  para todo  $y \in V$ . Por tanto  $V \subset Y \setminus A$  y  $y_0$  es interior a  $Y \setminus A$ . De aquí que  $Y \setminus A$  sea abierto, o equivalentemente,  $A$  es cerrado. ■

El siguiente lema de existencia de levantamientos será fundamental para lo que sigue, como veremos más adelante. Es una generalización del ya probado en el Tema 1 para el recubridor  $(\mathbb{R}, \rho)$  de  $\mathbb{S}^1$ , ver Lema 6.1.

**Lema 11.2** Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ , y sean  $x_0 \in X$  y  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ . Dada  $H: [0,1]^2 \rightarrow X$  continua con  $H(0,0) = x_0$ , existe una única aplicación  $\tilde{H}: [0,1]^2 \rightarrow \tilde{X}$  continua tal que  $\pi \circ \tilde{H} = H$  y  $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$ .

DEMOSTRACIÓN: La unicidad de  $\tilde{H}$  es evidente de la Proposición 11.1. Probemos la existencia de  $\tilde{H}$ .

Para cada  $x \in X$  consideremos un entorno (abierto) distinguido  $U_x \subset X$  para el recubridor  $(\tilde{X}, \pi)$ . Construyamos el recubrimiento por abiertos de  $X$  dado por

$$\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}.$$

Como  $C = [0,1]^2$  es un espacio métrico compacto (con la distancia euclidiana inducida), existe el *número de Lebesgue*  $\epsilon > 0$  para el recubrimiento abierto  $H^{-1}(\mathcal{U}) := \{H^{-1}(U_x) : x \in X\}$  de  $C$ . Esto significa que cualquier subconjunto  $A \subset C$  con diámetro euclidiano  $< \epsilon$  satisface  $A \subset H^{-1}(U_x)$  para algún  $x \in X$ . De aquí que podamos elegir una partición  $0 = t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$  de  $[0,1]$  tal que

$$H([t_i, t_{i+1}] \times [t_h, t_{h+1}]) \subset U_{i,h} \text{ para algún } U_{i,h} \in \mathcal{U}, i, h = 1, \dots, k \quad (5)$$

Bastará con garantizar que  $|t_{j+1} - t_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ .

Ordenemos  $C_1, \dots, C_N$  la familia de  $N = k^2$  cuadrados  $\{[t_i, t_{i+1}] \times [t_h, t_{h+1}] : i, h = 1, \dots, k\}$  de acuerdo al siguiente criterio:

- $C_1 = [t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$ .
- $K_j := \cup_{i \leq j} C_i$  es conexo,  $j = 1, \dots, N$ .
- $L_j := K_j \cap C_{j+1}$  es arcoconexo y consiste en uno o dos lados borde comunes a las regiones poliédricas  $K_j$  y  $C_{j+1}$ .

La construcción de  $\tilde{H}$  se hará por un procedimiento inductivo. Llamemos

$$H_j = H|_{K_j} : K_j \rightarrow X, \quad j = 1, \dots, N.$$

Sabemos que  $H_1(C_1) \subset U_1$  para algún  $U_1 \in \mathcal{U}$ , y sea  $V_1$  la arcocomponente de  $\pi^{-1}(U_1) \subset \tilde{X}$  conteniendo a  $\tilde{x}_0$ . Recordemos que  $\pi|_{V_1} : V_1 \rightarrow U_1$  es un homeomorfismo que aplica  $\tilde{x}_0 \in V_1$  en  $x_0 \in X$ . La aplicación

$$\tilde{H}_1 := (\pi|_{V_1})^{-1} \circ H_1 : K_1 \equiv C_1 \rightarrow \tilde{X}$$

es obviamente continua y satisface  $\pi \circ \tilde{H}_1 = H_1$  y  $\tilde{H}_1(0,0) = \tilde{x}_0$ .

Supongamos construida  $\tilde{H}_j : K_j \rightarrow \tilde{X}$  continua tal que  $\pi \circ \tilde{H}_j = H_j$  y  $\tilde{H}_j(0,0) = \tilde{x}_0$ ,  $1 \leq j < N$ .

Procedamos a cerrar el proceso inductivo construyendo una aplicación continua  $\tilde{H}_{j+1} : K_{j+1} \rightarrow \tilde{X}$  satisfaciendo  $\pi \circ \tilde{H}_{j+1} = H_{j+1}$  y  $\tilde{H}_{j+1}(0,0) = \tilde{x}_0$ . En efecto, primero observemos que  $H_{j+1}(C_{j+1}) = H(C_{j+1}) \subset U_{j+1}$  para algún  $U_{j+1} \in \mathcal{U}$ ; ver la ecuación (5). Como  $H_j(L_j)$  es arcoconexo y

$$\pi(\tilde{H}_j(L_j)) = H_j(L_j) \subset H_{j+1}(C_{j+1}) \subset U_{j+1},$$



existe una arcocomponente  $V_{j+1}$  de  $\pi^{-1}(U_{j+1}) \subset \tilde{X}$  conteniendo a  $\tilde{H}_j(L_j)$  tal que  $\pi|_{V_{j+1}}: V_{j+1} \rightarrow U_{j+1}$  un homeomorfismo. La aplicación

$$\tilde{H}_{j+1} := \begin{cases} \tilde{H}_j & \text{sobre } K_j \\ (\pi|_{V_{j+1}})^{-1} \circ (H_{j+1}|_{C_{j+1}}) & \text{sobre } C_{j+1} \end{cases}$$

está bien definida, es continua, y satisface  $\pi \circ \tilde{H}_{j+1} = H_{j+1}$  y  $\tilde{H}_{j+1}(0,0) = \tilde{x}_0$ , cerrando la inducción.

Para acabar la prueba del Lema basta con elegir  $\tilde{H} = \tilde{H}_N$ . ■

Como consecuencia tenemos la siguiente propiedad de levantamiento de arco.

**Corolario 11.3 (Propiedad del levantamiento de arco)** *Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ , tomemos  $x_0 \in X$  y  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ , y consideremos un arco  $\alpha: [0,1] \rightarrow X$  con  $\alpha(0) = x_0$ . Entonces existe un único arco  $\tilde{\alpha}: [0,1] \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$  y  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ . A  $\tilde{\alpha}$  le llamaremos el levantamiento de  $\alpha$  vía  $\pi$  con condición inicial  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ .*

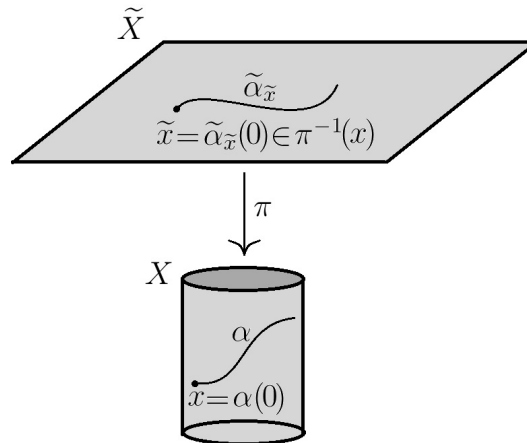
DEMOSTRACIÓN: La unicidad es obvia de la Proposición 11.1.

Procedamos a probar la existencia de  $\tilde{\alpha}$ . Para ello basta con definir

$$H: [0,1]^2 \rightarrow X, \quad H(t,s) := \alpha(t),$$

que claramente satisface las hipótesis del Lema 11.2, y considerar la aplicación  $\tilde{H}$  dada en él. Obviamente el arco  $\tilde{\alpha}: [0,1] \rightarrow \tilde{X}$ ,  $\tilde{\alpha}(t) := \tilde{H}(t,0)$ , resuelve el corolario. ■

**Definición 11.4** *Dado un recubridor  $(\tilde{X}, \pi)$  de  $X$ , un arco  $\alpha: [0,1] \rightarrow X$  con punto inicial  $x := \alpha(0)$  y un punto  $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ , denotaremos por  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}: [0,1] \rightarrow \tilde{X}$  al único levantamiento de  $\alpha$  vía  $\pi$  con condición inicial  $\tilde{x}$ . Cuando sea preciso enfatizar la aplicación recubridora con la que se ejecuta el levantamiento escribiremos  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}^{\pi}$ .*

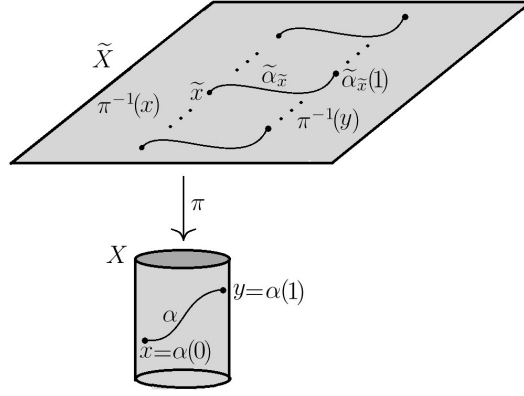


Ahora estamos en condiciones de demostrar que el cardinal de la fibra de un punto no depende del punto elegido en la base del recubridor.

**Corolario 11.5** *Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ ,  $x, y \in X$  y  $\alpha: [0,1] \rightarrow X$  cualquier arco con  $\alpha(0) = x$  y  $\alpha(1) = y$ . Consideremos la aplicación*

$$\eta_{\alpha}: \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(y), \quad \eta_{\alpha}(\tilde{x}) := \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1).$$

*Entonces  $\eta_{\alpha}$  es biyectiva, y en particular  $\pi^{-1}(x)$  y  $\pi^{-1}(y)$  tienen el mismo cardinal.*



DEMOSTRACIÓN: Dados arcos  $\beta: [0, 1] \rightarrow X$  y  $\tilde{\beta}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  con  $\pi \circ \tilde{\beta} = \beta$ , la unicidad del levantamiento en el Lema 11.3 implica que

$$\tilde{\tilde{\beta}} = \tilde{\tilde{\beta}}_{\tilde{\beta}(1)}.$$

Por tanto, la aplicación

$$\eta_{\tilde{\alpha}}: \pi^{-1}(y) \rightarrow \pi^{-1}(x)$$

es la inversa de  $\eta_{\alpha}$ . ■

El hecho de que el cardinal de  $\pi^{-1}(x)$  no dependa del punto  $x \in X$  motiva la siguiente definición.

**Definición 11.6 (Número de hojas de un recubridor)** *Dado un recubridor  $(\tilde{X}, \pi)$  de un espacio topológico  $X$ , llamaremos número de hojas del recubridor al cardinal de  $\pi^{-1}(x)$ , donde  $x$  es un punto arbitrario de  $X$ .*

Al igual que la propiedad del levantamiento de arcos motivó el concepto de número de hojas de un recubridor, la del levantamiento de homotopías nos ayudará a comprender la interacción entre el grupo fundamental de un recubridor y el de su espacio base.

**Corolario 11.7 (Propiedad del levantamiento de homotopías)** *Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ , y sean  $x_0 \in X$  y  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  arcos en  $X$  con  $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$  y  $\alpha(1) = \beta(1)$ . Supongamos que existe una homotopía  $H$  de  $\alpha$  en  $\beta$  (con extremos fijos). Entonces:*

- *Los arcos  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$  y  $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$  dados en el Corolario 11.3 tienen los mismos extremos.*
- *La aplicación  $\tilde{H}$  dada en el Lema 11.2 es una homotopía de  $\tilde{\alpha}$  en  $\tilde{\beta}$  (con extremos fijos).*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la aplicación  $\tilde{H}$  dada en el Lema 11.2 y los levantamientos  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$  y  $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$  dados en el Corolario 11.3. Por la unicidad del Corolario 11.3,  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0} = \tilde{H}(\cdot, 0)$ . Como  $\tilde{H}(0, \cdot): [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  es un arco con punto inicial 0 que se proyecta en el arco constante  $\epsilon_{x_0}$  en  $X$ , por la unicidad del levantamiento de arcos concluimos que  $\tilde{H}(0, \cdot)$  es el arco constante  $\epsilon_{\tilde{x}_0}$  en  $\tilde{X}$ . Por tanto, la unicidad del Corolario 11.3 garantiza que  $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0} = \tilde{H}(\cdot, 1)$ . Finalmente, como  $\tilde{H}(1, \cdot): [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  es un arco que se proyecta en  $\epsilon_{\alpha(1)}$ , la unicidad del levantamiento de arcos implica que  $\tilde{H}(1, \cdot) = \epsilon_{\tilde{\alpha}(1)}$  en  $\tilde{X}$ . Uniendo toda esa información concluimos que  $\tilde{H}$  es una homotopía de  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$  en  $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$  con extremos fijos. ■

El último corolario expresa que arcos homotópicos en  $X$  se levantan a arcos homotópicos en  $\tilde{X}$  por la aplicación recubridora  $\pi$ . Este enunciado es la clave del Teorema de Monodromía, un resultado central para la teoría, que refleja el hecho de que el grupo fundamental del espacio recubridor se inyecta a través del homomorfismo inducido por la aplicación recubridora en el grupo fundamental del espacio base, siendo el subgrupo imagen único salvo conjugación.

**Corolario 11.8 (Teorema de Monodromía)** *Si  $(\tilde{X}, \pi)$  es un recubridor de  $X$ ,  $x \in X$  y  $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ , entonces  $\pi_*: \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \Pi_1(X, x)$  es un monomorfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$  y  $\tilde{\alpha}$  un lazo en  $\tilde{X}$  con base  $\tilde{x}$ . Si  $\pi_*([\tilde{\alpha}]) = [\pi \circ \tilde{\alpha}] = [\epsilon_x]$ , esto es, si  $\pi \circ \tilde{\alpha} \simeq \epsilon_x$ , entonces por el Corolario 11.7 inferimos que  $\tilde{\alpha} \simeq \epsilon_{\tilde{x}}$ . Esto implica que  $[\tilde{\alpha}] = [\epsilon_{\tilde{x}}]$ , y por tanto que  $\pi_*$  no tiene núcleo. ■

**Corolario 11.9** *Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$  y sea  $x \in X$ . Sean  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$  y  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  es un arco con  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_1$  y  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_2$ . Entonces*

$$\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)) = [\alpha]^{-1} \star \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) \star [\alpha],$$

donde  $\alpha$  es el lazo  $\pi \circ \tilde{\alpha}$  (con base  $x$ ). Como consecuencia

$$\{\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) : \tilde{x} \in \pi^{-1}(x)\}$$

es una clase de conjugación de subgrupos en  $\Pi_1(X, x)$ ; ver Definición 1.6.

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 4.11 la aplicación

$$\mathcal{U}_{\tilde{\alpha}}: \Pi_1(\tilde{X}, x_1) \rightarrow \Pi_1(\tilde{X}, x_2), \quad \mathcal{U}_{\tilde{\alpha}}([\tilde{\beta}]) := [\tilde{\alpha}]^{-1} \star [\tilde{\beta}] \star [\tilde{\alpha}]$$

es un isomorfismo de grupos. Por tanto

$$\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)) = \pi_*([\tilde{\alpha}]^{-1} \star \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \star [\tilde{\alpha}]) = [\alpha]^{-1} \star \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) \star [\alpha].$$

De aquí que  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$  y  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$  sean subgrupos conjugados de  $\Pi_1(X, x)$  para todo  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$ . Por último, si  $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$  es una clase de homotopía arbitraria, hemos probado que el subgrupo conjugado  $[\alpha]^{-1} \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) [\alpha]$  coincide con  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_1}(1)))$ . Por tanto  $\{\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) : \tilde{x} \in \pi^{-1}(x)\}$  es una clase de conjugación de subgrupos en  $\Pi_1(X, x)$  como queríamos demostrar. ■

Como consecuencia de este corolario tiene sentido la siguiente

**Definición 11.10** *Denotemos por  $\text{Rec}(X)$  el conjunto de todos los recubridores de  $X$ , esto es,*

$$\text{Rec}(X) := \{(\tilde{X}, \pi) : (\tilde{X}, \pi) \text{ es recubridor de } X\}.$$

*Fijemos  $x \in X$  y consideremos el conjunto  $\mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x))$  de las clases de conjugación de subgrupos de  $\Pi_1(X, x)$ ; ver Definición 1.6. Definiremos:*

$$\Delta_x: \text{Rec}(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x)), \quad \Delta_x(\tilde{X}, \pi) := \{\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) : \tilde{x} \in \pi^{-1}(x)\}.$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema más general de existencia y unicidad de levantamientos de aplicaciones a un espacio recubridor, que contendrá como casos particulares a todos los hasta ahora vistos.

**Teorema 11.11 (Levantamiento de aplicaciones)** Sea  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  una aplicación recubridora, sea  $f: Y \rightarrow X$  una aplicación continua, y sean  $y_0 \in Y$ ,  $x_0 := f(y_0) \in X$  y  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) Existe  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  continua tal que  $\pi \circ \tilde{f} = f$  y  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$  (la unicidad de una tal  $\tilde{f}$  está garantizada por la Proposición 11.1 toda vez que todos nuestros espacios se suponen siempre conexos y localmente arcoconexos).
- (b)  $f_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ .

DEMOSTRACIÓN: La implicación (a)  $\implies$  (b) es consecuencia inmediata de la identidad  $\pi \circ \tilde{f} = f$  y las propiedades de functorialidad de los morfismos entre grupos fundamentales inducidos por aplicaciones continuas; ver Proposición 4.13.

Probemos que (b)  $\implies$  (a).

Definamos  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  de la siguiente forma:

Por la arcoconexión de  $Y$  (ya que es conexo y localmente arcoconexo), para cada  $y \in Y$  existe un arco  $\gamma_y: [0, 1] \rightarrow Y$  con  $\gamma_y(0) = y_0$  y  $\gamma_y(1) = y$ . Consideremos el arco  $f \circ \gamma_y: [0, 1] \rightarrow X$ , obviamente con  $(f \circ \gamma_y)(0) = x_0$  y  $(f \circ \gamma_y)(1) = f(y)$ , y su levantamiento  $\widetilde{(f \circ \gamma_y)}_{\tilde{x}_0}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  a  $\tilde{X}$ . Por definición,

$$\tilde{f}(y) := \widetilde{(f \circ \gamma_y)}_{\tilde{x}_0}(1).$$

Naturalmente esta definición plantea algunos problemas. El más inmediato es comprobar que  $\tilde{f}(y)$  no depende del arco  $\gamma_y$  utilizado. Para ello consideremos cualquiera otro arco  $\beta_y: [0, 1] \rightarrow Y$  con  $\beta_y(0) = y_0$  y  $\beta_y(1) = y$  y comprobemos que

$$\widetilde{(f \circ \gamma_y)}_{\tilde{x}_0}(1) = \widetilde{(f \circ \beta_y)}_{\tilde{x}_0}(1).$$

En efecto,  $\gamma_y \star \overline{\beta_y}$  es un lazo en  $Y$  con base el punto  $y_0$ , y su clase de homotopía  $[\gamma_y \star \overline{\beta_y}] \in \Pi_1(Y, y_0)$ . Por tanto  $f \circ (\gamma_y \star \overline{\beta_y}) = (f \circ \gamma_y) \star \overline{(f \circ \beta_y)}$  es un lazo en  $X$  con base  $x_0$  y

$$[f \circ (\gamma_y \star \overline{\beta_y})] = f_*([\gamma_y \star \overline{\beta_y}]) = [(f \circ \gamma_y) \star \overline{(f \circ \beta_y)}] \in f_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subseteq \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)),$$

donde para la última inclusión hemos tenido en cuenta nuestras hipótesis.

Del Corolario 11.7 deducimos que

$$\widetilde{((f \circ \gamma_y) \star \overline{(f \circ \beta_y)})}_{\tilde{x}_0}$$

ha de ser un lazo con base  $\tilde{x}_0$ . Por la unicidad del levantamiento de arcos (ver Corolario 11.3), esto fuerza a que  $\widetilde{(f \circ \gamma_y)}_{\tilde{x}_0}$  y  $\widetilde{(f \circ \beta_y)}_{\tilde{x}_0}$  tengan los mismos extremos, y en particular  $\widetilde{(f \circ \gamma_y)}_{\tilde{x}_0}(1) = \widetilde{(f \circ \beta_y)}_{\tilde{x}_0}(1)$  como queríamos ver.

Así pues  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  está bien definida. Es claro que  $\tilde{f}(y_0) = \widetilde{(f \circ \epsilon_{y_0})}_{\tilde{x}_0}(1) = \epsilon_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$ , por lo que para acabar resta probar que  $\tilde{f}$  es continua.

En efecto, tomemos  $y \in Y$  y comprobemos la continuidad de  $\tilde{f}$  en  $y$ . Consideremos un entorno arbitrario  $\tilde{W}$  alrededor de  $\tilde{f}(y)$  en  $\tilde{X}$ , y comprobemos que  $\tilde{f}^{-1}(\tilde{W})$  es un entorno de  $y$  en  $Y$ . Como  $\pi$  es una aplicación recubridora, siempre podremos encontrar un abierto arcoconexo  $\tilde{U} \subset \tilde{W}$  tal que

- $\tilde{f}(y) \in \tilde{U}$  y

- $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U := \pi(\tilde{U})$  es un homeomorfismo.

Al ser  $f: Y \rightarrow X$  continua en  $y$  y  $U$  es un entorno de  $f(y)$ ,  $f^{-1}(U)$  es un entorno de  $y$ . En consecuencia existe un abierto arcoconexo  $V \subset Y$  conteniendo a  $y$  tal que  $V \subset f^{-1}(U)$ .

Para concluir bastará con probar que

$$V \subset \tilde{f}^{-1}(W), \text{ o equivalentemente, } \tilde{f}(V) \subset \tilde{W}.$$

Para ello consideramos  $z \in V$ , un arco  $\gamma: [0, 1] \rightarrow V$  con  $\gamma(0) = y$ ,  $\gamma(1) = z$ , y un arco  $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow Y$  con  $\gamma_0(0) = y_0$ ,  $\gamma_0(1) = y$ . Por definición

$$\tilde{f}(z) = \overbrace{((f \circ \gamma_0) \star (f \circ \gamma))}_{\tilde{x}_0}(1) = (\overbrace{(f \circ \gamma_0)}_{\tilde{x}_0} \star \overbrace{(f \circ \gamma)}_{\tilde{f}(y)})(1) = \overbrace{(f \circ \gamma)}_{\tilde{f}(y)}(1).$$

Como la traza de  $f \circ \gamma$  está contenida en  $f(V) \subset U$ , la unicidad del levantamiento con condición inicial  $\tilde{f}(y)$  nos dice que

$$\overbrace{(f \circ \gamma)}_{\tilde{f}(y)} = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1} \circ (f \circ \gamma),$$

ya que  $(\pi|_{\tilde{U}})^{-1} \circ (f \circ \gamma)$  es un levantamiento de  $f \circ \gamma$  con condición inicial  $(\pi|_{\tilde{U}})^{-1}(f(\gamma(1))) = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}(f(y)) = \tilde{f}(y)$ . Esto nos permite concluir que

$$\tilde{f}(z) = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}(f(\gamma(1))) = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}(f(z)) \in \tilde{U}.$$

Como esto es válido para todo  $z \in V$ ,  $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U} \subset \tilde{W}$  como queríamos demostrar. ■

**Corolario 11.12** Sea  $(Y, \pi)$  un recubridor de  $X$ , sea  $A \subset X$  un subespacio topológico arcoconexo y denotemos por  $i: A \rightarrow X$  a la aplicación inclusión. Supongamos que  $i_*(\Pi_1(A, x)) \subset \pi_*(\Pi_1(Y, y))$  para algunos  $x \in A$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$ .

Entonces  $\pi|_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow A$  es un homeomorfismo, donde  $\tilde{A}$  es la arcocomponente de  $\pi^{-1}(A)$  que contiene a  $y$ .

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $i: A \rightarrow X$  a la aplicación inclusión. Por el Teorema 11.11 existe una única aplicación continua  $\tilde{i}: \tilde{A} \rightarrow Y$  tal que  $\pi \circ \tilde{i} = i$  e  $\tilde{i}(x) = y$ . Si denotamos  $\tilde{A} = \tilde{i}(\tilde{A})$  e igualmente  $\tilde{i}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  a la restricción al codominio de  $\tilde{i}$ , inferimos que  $\tilde{i}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  y  $\pi|_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow A$  son biyectivas: téngase en cuenta que  $(\pi|_{\tilde{A}}) \circ \tilde{i} = \text{Id}_A$ . La Proposición 2.11-(d) implica que  $\pi|_{\tilde{A}}$  es una identificación, luego un homeomorfismo. Esto también implica que  $\tilde{i}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  es un homeomorfismo (o de forma global, que  $\tilde{i}: \tilde{A} \rightarrow Y$  es un embebimiento topológico).

Para acabar bastará con ver que  $\tilde{A}$  (obviamente un arcoconexo conteniendo a  $y$ ) es la arcocomponente de  $\pi^{-1}(A)$  que contiene a  $y$ . En efecto, sea  $z \in \pi^{-1}(A)$  un punto tal que existe  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \pi^{-1}(A)$  con  $\tilde{\alpha}(0) = y$  y  $\tilde{\alpha}(1) = z$ . El arco  $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$  en  $X$  une los puntos  $\alpha(0) = x$  y  $\alpha(1) = \pi(z) \in \pi(\pi^{-1}(A)) = A$ , y  $\tilde{i} \circ \alpha$  es el levantamiento de  $\alpha$  vía  $\pi$  con condición inicial  $y$ , esto es,  $\tilde{i} \circ \alpha = \tilde{\alpha}_y$ . Por unicidad del levantamiento inferimos que  $\tilde{i} \circ \alpha = \tilde{\alpha}$ , y que en particular  $z = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{i}(\alpha(1)) \in \tilde{i}(\tilde{A}) = \tilde{A}$ . ■

El Teorema 11.11 tiene una interesante aplicación a la teoría de Grupos Topológicos.

**Proposición 11.13** Sea  $(G, \cdot)$  un grupo topológico con elemento neutro  $e \in G$ , sea  $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$  una aplicación recubridora y elijamos  $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$ . Entonces  $\tilde{G}$  admite una estructura de grupo topológico con elemento neutro  $\tilde{e}$  que convierte a  $\pi$  en un homomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN: Por ser  $(G, \cdot)$  un grupo topológico, las aplicaciones

$$\mu: G \times G \rightarrow G, \quad \mu(g, h) = g \cdot h, \quad \text{y} \quad \lambda: G \rightarrow G, \quad \lambda(g) = g^{-1},$$

son continuas. Consideremos

$$\hat{\mu}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G, \quad \hat{\mu}(\tilde{g}, \tilde{h}) = \pi(\tilde{g}) \cdot \pi(\tilde{h}), \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}: \tilde{G} \rightarrow G, \quad \hat{\lambda}(\tilde{g}) = \pi(\tilde{g})^{-1}.$$

Es claro que  $\hat{\mu} = \mu \circ (\pi \times \pi)$  y  $\hat{\lambda} = \lambda \circ \pi$ . Por tanto  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\lambda}$  son continuas.

Teniendo en cuenta los isomorfismos naturales

$$\Pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e})) \cong \Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}) \times \Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}), \quad \Pi_1(G \times G, (e, e)) \cong \Pi_1(G, e) \times \Pi_1(G, e),$$

es claro que

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_* \left( \Pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e})) \right) &= \mu_* \left( (\pi \times \pi)_* (\Pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e}))) \right) = \\ &= \mu_* \left( (\pi_* \times \pi_*) (\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}) \times \Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})) \right) = \\ &= \mu_* \left( \pi_* (\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})), \pi_* (\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})) \right) = \{[\alpha \cdot \beta]: [\alpha], [\beta] \in \pi_* (\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))\}. \end{aligned}$$

Al ser  $(G, \cdot)$  un grupo topológico,  $\alpha \cdot \beta \simeq \alpha \star \beta$  para cualesquiera lazos  $\alpha$  y  $\beta$  basados en  $e \in G$ , y por tanto  $[\alpha \cdot \beta] = [\alpha \star \beta]$  (ver la prueba del Teorema 5.4). Finalmente deducimos que

$$\hat{\mu}_* \left( \Pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e})) \right) = \{[\alpha \star \beta]: [\alpha], [\beta] \in \pi_* (\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))\} = \pi_* (\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})),$$

donde para la última igualdad se ha tenido en cuenta que  $\pi_* (\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))$  es un subgrupo de  $\Pi_1(G, e)$ .

Análogamente se probaría que

$$\hat{\lambda}_* \left( \Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}) \right) = \pi_* (\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})).$$

Como  $\hat{\mu}(\tilde{e}, \tilde{e}) = e$  y  $\hat{\lambda}(\tilde{e}) = e$ , el Teorema 11.11 proporciona aplicaciones continuas

- $\tilde{\mu}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$  tal que  $\pi \circ \tilde{\mu} = \hat{\mu}$  y  $\tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$ , y
- $\tilde{\lambda}: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$  tal que  $\pi \circ \tilde{\lambda} = \hat{\lambda}$  y  $\tilde{\lambda}(\tilde{e}) = \tilde{e}$ .

Denotemos por  $p_1: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$  y  $p_2: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$  a la primera y segunda proyecciones, respectivamente.

De la unicidad en el Teorema 11.11 es fácil comprobar que:

- Si  $c_{\tilde{e}}: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$  representa la aplicación constante  $\tilde{e}$ ,  $\tilde{\mu} \circ (\text{Id}_{\tilde{G}} \times c_{\tilde{e}}) = p_1$  y  $\tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}} \times \text{Id}_{\tilde{G}}) = p_2$ , esto es,  $\tilde{\mu}(\tilde{g}, \tilde{e}) = \tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{g}) = \tilde{g}$  para todo  $\tilde{g} \in \tilde{G}$ . En efecto, estas aplicaciones aplican  $\tilde{e} \mapsto \tilde{e}$  y satisfacen  $\pi \circ (\tilde{\mu} \circ (\text{Id}_{\tilde{G}} \times c_{\tilde{e}})) = \pi \circ p_1$ ,  $\pi \circ (\tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}} \times \text{Id}_{\tilde{G}})) = \pi \circ p_2$ .
- Si  $\hat{c}_{\tilde{e}}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$  representa la aplicación constante  $\tilde{e}$ ,  $\tilde{\mu} \circ (\text{Id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\lambda}) = \tilde{\mu} \circ (\tilde{\lambda} \times \text{Id}_{\tilde{G}}) = \hat{c}_{\tilde{e}}$ , esto es,  $\tilde{\mu}(\tilde{g}, \tilde{\lambda}(\tilde{g})) = \tilde{\mu}(\tilde{\lambda}(\tilde{g}), \tilde{g}) = \tilde{e}$  para todo  $\tilde{g} \in \tilde{G}$ . En efecto, estas aplicaciones aplican  $\tilde{e} \mapsto \tilde{e}$  y satisfacen  $\pi \circ (\tilde{\mu} \circ (\text{Id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\lambda})) = \pi \circ (\tilde{\mu} \circ (\tilde{\lambda} \times \text{Id}_{\tilde{G}})) = \hat{c}_e = \pi \circ \hat{c}_{\tilde{e}}$ , donde  $c_e: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G$  denota la aplicación constante  $e$ .

- $\tilde{\mu}(\tilde{g}_1, \tilde{\mu}(\tilde{g}_2, \tilde{g}_3)) = \tilde{\mu}(\tilde{\mu}(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2), \tilde{g}_3)$  para cualesquiera  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \in \tilde{G}$ . En efecto, la aplicación  $f_1: \tilde{G}^3 \rightarrow \tilde{G}$ ,  $f_1(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3) := \tilde{\mu}(\tilde{\mu}(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2), \tilde{g}_3)$ , es continua y satisface  $(\pi \circ f_1)(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3) = (\pi(\tilde{g}_1) \cdot \pi(\tilde{g}_2)) \cdot \pi(\tilde{g}_3)$ , y análogamente la aplicación  $f_2: \tilde{G}^3 \rightarrow \tilde{G}$ ,  $f_2(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3) := \tilde{\mu}(\tilde{g}_1, \tilde{\mu}(\tilde{g}_2, \tilde{g}_3))$ , es continua y satisface  $(\pi \circ f_2)(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3) = \pi(\tilde{g}_1) \cdot (\pi(\tilde{g}_2) \cdot \pi(\tilde{g}_3))$ . Como  $f_1(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e}) = f_2(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$  se concluye que  $f_1 = f_2$ .

Por lo anterior se deduce que  $\tilde{\mu}$  es una ley de composición interna en  $\tilde{G}$  que lo dota de estructura de grupo algebraico, siendo  $\tilde{e}$  su elemento neutro y  $\tilde{\lambda}$  la aplicación que lleva cada elemento a su inverso en el grupo. Además la identidad  $\pi \circ \tilde{\mu} = \hat{\mu}$  convierte a  $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$  en un homomorfismo de grupos. Esto concluye la prueba. ■

## 12. La acción del grupo fundamental sobre la fibra

Vamos a comprobar que la fibra de un punto en un recubridor puede interpretarse como un cociente de grupos, y en ese sentido, naturalmente identificable con un espacio homogéneo. Expiquemos los detalles.

**Teorema 12.1** *Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un espacio recubridor de  $X$ , y fijemos  $x \in X$ . La aplicación*

$$\cdot: \pi^{-1}(x) \times \Pi_1(X, x) \rightarrow \pi^{-1}(x), \quad y \cdot [\alpha] := \tilde{\alpha}_y(1)$$

*es una acción transitiva por la derecha del grupo  $\Pi_1(X, x)$  sobre la fibra  $\pi^{-1}(x)$  de  $x$ .*

*Además, para cada  $y \in \pi^{-1}(x)$  el subgrupo de isotropía asociado a la acción en el punto  $y$ , que se define por  $H_y := \{[\alpha] \in \Pi_1(X, x): y \cdot [\alpha] = y\}$ , coincide con  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Lo primero que hemos de observar es que la acción está bien definida, esto es, que si  $\beta \in [\alpha]$  entonces  $\tilde{\beta}_y(1) = \tilde{\alpha}_y(1)$ . Esto es consecuencia inmediata, por ejemplo, del Corolario 11.7.

Por definición,  $\cdot$  es una acción si satisface:

- (a)  $y \cdot [\epsilon_x] = y$  para todo  $y \in \pi^{-1}(x)$ .
- (b)  $y \cdot ([\alpha] \star [\beta]) = (y \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]$  para cualesquiera  $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X, x)$ .

La transitividad de la acción hace referencia a la siguiente propiedad:

- (c) Para cualesquiera  $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$  existe  $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$  tal que  $[\alpha] \cdot y_1 = y_2$ .

En efecto, la propiedad (a) es consecuencia trivial del hecho  $(\tilde{\epsilon}_x)_y = \epsilon_y$  (unicidad del levantamiento de arcos). Para probar (b), observemos que  $\tilde{\alpha}_y \star \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_y(1)}$  es un arco en  $\tilde{X}$  con punto inicial  $y$  que se proyecta vía  $\pi$  en  $\alpha \star \beta$ . Por unicidad del levantamiento,  $\tilde{\alpha}_y \star \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_y(1)} = \widetilde{\alpha \star \beta}_y$ , y por tanto

$$y \cdot ([\alpha] \star [\beta]) = (\widetilde{\alpha \star \beta})_y(1) = (\tilde{\alpha}_y \star \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_y(1)})(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_y(1)}(1) = \tilde{\alpha}_y(1) \cdot [\beta] = (y \cdot [\alpha]) \cdot [\beta].$$

Finalmente, para probar (c) tomemos  $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ . Consideremos un arco cualquiera  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  con  $\tilde{\alpha}(0) = y_1$  y  $\tilde{\alpha}(1) = y_2$ . Si  $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$ , es claro que  $\alpha$  es un lazo en  $X$  con base el punto  $x$  y que  $y_1 \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}(1) = y_2$ . Esto concluye la primera parte de la prueba.

Para la segunda parte, tomemos  $y \in \pi^{-1}(x)$  y  $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$ . Se tiene que  $[\alpha] \in H_y$  si y sólo si  $\tilde{\alpha}_y(1) = y$ , esto es si y sólo si  $\tilde{\alpha}_y$  es un lazo en  $\tilde{X}$  con base el punto  $y$  (y por tanto  $[\tilde{\alpha}_y] \in \Pi_1(\tilde{X}, y)$ ). En consecuencia,  $[\alpha] \in H_y$  si y sólo si  $[\alpha] = \pi_*([\tilde{\alpha}_y]) \in \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$ . Esto prueba que  $H_y = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$  y concluye el teorema. ■

Como consecuencia trivial del Teorema 12.1 tenemos el siguiente

**Corolario 12.2** *Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un espacio recubridor de  $X$ , y fijemos  $x \in X$ . Entonces para cada  $y \in \pi^{-1}(x)$  la aplicación*

$$\left( \Pi_1(X, x) / \pi_* (\Pi_1(\tilde{X}, y)) \right)_{\text{dcha}} \rightarrow \pi^{-1}(x), \quad \pi_* (\Pi_1(\tilde{X}, y)) \star [\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}_y(1),$$

*es biyectiva.*

Es interesante conocer la interacción del concepto de recubridor con distintos invariantes topológicos como compacidad, axiomas de separación, axiomas de numerabilidad... Para nuestros intereses será suficiente con los siguientes resultados elementales.

**Corolario 12.3** *Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ . Los siguientes enunciados son ciertos:*

- (a) *Si  $\tilde{X}$  es compacto entonces  $(\tilde{X}, \pi)$  tiene un número finito de hojas.*
- (b) *Si  $\tilde{X}$  es simplemente conexo entonces  $\Pi_1(\tilde{X}, y)$  es biyectivo con la fibra  $\pi^{-1}(x)$  para cualesquiera  $x \in X$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$ . En consecuencia, si además  $\tilde{X}$  es compacto entonces  $X$  tiene grupo fundamental finito.*
- (c) *Si  $X$  es compacto y  $(\tilde{X}, \pi)$  tiene un número finito de hojas entonces  $\tilde{X}$  es compacto.*

**DEMOSTRACIÓN:** Para probar (a) consideremos un recubrimiento abierto  $\mathcal{U}$  de  $X$  formado por entornos distinguidos para  $\pi$ , y denotemos por  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$  al recubrimiento por abiertos de  $\tilde{X}$  definido por todas las arcocomponentes de  $\pi^{-1}(U)$  para todos los  $U \in \mathcal{U}$ . La compacidad de  $\tilde{X}$  garantiza la existencia de una cantidad finita de abiertos  $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$  tales que  $\tilde{X} = \cup_{j=1}^n \tilde{U}_j$ . Como  $X = \pi(\tilde{X}) = \pi(\cup_{j=1}^n \tilde{U}_j) = \cup_{j=1}^n \pi(\tilde{U}_j)$  y  $\pi|_{\tilde{U}_j}: \tilde{U}_j \rightarrow \pi(\tilde{U}_j)$  es biyectiva para todo  $j$ , cada punto  $x \in X$  tiene a lo más  $n$  preimágenes por  $\pi$ . Esto prueba (a).

Para demostrar (b), observemos que la simpleconexión de  $\tilde{X}$  y el Corolario 12.2 garantizan que  $\Pi_1(X, x) \rightarrow \pi^{-1}(x)$ ,  $[\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}_y(1)$ , es biyectiva. La segunda parte del ítem (b) se sigue trivialmente de (a).

Por último probemos (c). Llamemos  $k$  al número de hojas de  $(\tilde{X}, \pi)$ , y denotemos por  $\mathcal{U}$  a la familia de los entornos distinguidos en  $X$  para  $\pi$  (obviamente una base de la topología de  $X$ ). Sea  $\mathcal{V}$  un recubrimiento por abiertos arbitrario de  $\tilde{X}$ . Por ser  $\pi$  recubridora con  $k$  hojas, para cada  $x \in X$  existen  $V_1^x, \dots, V_k^x \in \mathcal{V}$  tales que  $\pi^{-1}(x) \subset \cup_{j=1}^k V_j^x$  y  $x \in \cap_{i=1}^k \pi(V_i^x)$ . Elijamos  $U_x \in \mathcal{U}$  tal que  $U_x \subset \cap_{i=1}^k \pi(V_i^x)$  y  $\pi^{-1}(U_x) \subset \cup_{j=1}^k V_j^x$ . Como  $X$  es compacto y  $\{U_x: x \in X\}$  es un recubrimiento abierto de  $X$  (recordemos que  $\pi$  es abierta), existen  $x_1, \dots, x_m \in X$  tales que  $X = \bigcup_{j=1}^m U_{x_j}$ . Por tanto  $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m (\cup_{j=1}^k V_j^{x_i})$ , lo que prueba que  $\mathcal{V}$  admite un subrecubrimiento finito y la compacidad de  $\tilde{X}$ . ■

**Proposición 12.4** *Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ . Entonces:*

- (I)  $X$  Hausdorff  $\implies \tilde{X}$  Hausdorff.
- (II)  $\tilde{X}$  II-Axioma de Numerabilidad  $\implies X$  II-Axioma de Numerabilidad.
- (III) Si  $(\tilde{X}, \pi)$  tiene una cantidad numerable de hojas,

$$X \text{ II-Axioma de Numerabilidad} \implies \tilde{X} \text{ II-Axioma de Numerabilidad.}$$



DEMOSTRACIÓN: Probemos (i). Tomemos  $y_1, y_2 \in \tilde{X}$ ,  $y_1 \neq y_2$ , y llamemos  $x_j = \pi(y_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Si  $x := x_1 = x_2$ , tomemos un entorno distinguido  $U$  para  $\pi$  que contenga a  $x$ , y observemos que las arccomponentes  $\tilde{U}_{y_1}$  y  $\tilde{U}_{y_2}$  de  $\pi^{-1}(U)$  que continen a  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente, son abiertos disjuntos que separan  $y_1$  e  $y_2$ . En caso de que  $x_1 \neq x_2$ , como  $X$  es Hausdorff podemos tomar entornos distinguidos *disjuntos*  $U_1$  y  $U_2$  para  $\pi$  de  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente. En este caso las arccomponentes  $\tilde{U}_{y_1}$  de  $\pi^{-1}(U_1)$  y  $\tilde{U}_{y_2}$  de  $\pi^{-1}(U_2)$  que continen a  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente, son abiertos disjuntos que separan  $y_1$  e  $y_2$ .

Probemos (ii). Supongamos que  $\tilde{X}$  es II-Axioma de Numerabilidad y fijemos una base numerable  $\tilde{\mathcal{B}}$  de la topología de  $\tilde{X}$ . Como  $\pi$  es abierta,  $\pi(\tilde{B})$  es abierto de  $X$  para todo  $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$ . Definamos

$$\mathcal{B} := \{\pi(\tilde{B}) : \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}\}.$$

Claramente  $\mathcal{B}$  es una familia numerable de abiertos de  $X$ . Para acabar basta probar que  $\mathcal{B}$  es una base de la topología de  $X$ . En efecto, sea  $x \in X$  y  $O$  un abierto arbitrario en  $X$  conteniendo a  $x$ . Recordemos que la familia

$$\mathcal{U} = \{U : U \text{ es entorno distinguido para } \pi\}$$

es una base de la topología en  $X$ , por lo que podemos tomar  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in U \subset O$ . Elijamos  $y \in \pi^{-1}(x)$  y consideremos la arccomponente  $\tilde{U}$  en  $\pi^{-1}(U)$  que contiene a  $y$ . Como  $\tilde{\mathcal{B}}$  es base de la topología en  $\tilde{X}$ , existe  $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$  tal que  $y \in \tilde{B} \subset \tilde{U}$ , y por tanto  $x \in \pi(\tilde{B}) \subset U \subset O$ . Esto prueba que  $\mathcal{B}$  es base de la topología en  $X$ .

Finalmente probemos (iii). Supongamos ahora que  $X$  es II-Axioma de Numerabilidad y tomemos una base numerable  $\mathcal{B}$  de la topología de  $X$ . Como  $\mathcal{U}$  es una base de la topología en  $X$ , por lo que trivialmente

$$\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B} : B \text{ es entorno distinguido para } \pi\}$$

es una base numerable de la topología de  $X$ . Para cada  $B \in \mathcal{B}_0$  elijamos un punto auxiliar  $x_B \in B$  y escribamos  $\pi^{-1}(B)$  como unión disjunta y *numerable* de sus arccomponentes de la siguiente forma  $\pi^{-1}(B) = \bigcup_{y \in \pi^{-1}(x_B)} \tilde{B}_y$ ; téngase en cuenta que por hipótesis el conjunto  $\pi^{-1}(x_B)$  es numerable. Definamos la familia de abiertos en  $\tilde{X}$

$$\tilde{\mathcal{B}}_0 := \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} \{\tilde{B}_y : y \in \pi^{-1}(x_B)\},$$

y observemos que  $\tilde{\mathcal{B}}_0$  es numerable.

Para acabar demostremos que  $\tilde{\mathcal{B}}_0$  es una base de la topología de  $\tilde{X}$ . En efecto, tomemos  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  y un abierto arbitrario  $\tilde{O}$  en  $\tilde{X}$  conteniendo a  $\tilde{x}$ . Llamemos  $x = \pi(\tilde{x})$  y consideremos un entorno distinguido  $U$  para  $\pi$  tal que  $x \in U$ . Denotemos por  $W$  la arccomponente de  $\pi^{-1}(U) \cap \tilde{O}$  conteniendo a  $\tilde{x}$ , obviamente un subconjunto abierto de  $\tilde{X}$ . Como  $\pi$  es un homeomorfismo local,  $\pi(W)$  es un abierto arcoconexo en  $X$  conteniendo a  $x$ , y como además  $U \in \mathcal{U}$  es claro que  $\pi(W) \in \mathcal{U}$ . Por tanto  $\pi|_W : W \rightarrow \pi(W)$  es un homeomorfismo. Elijamos  $B \in \mathcal{B}_0$  con  $x \in B \subset \pi(W)$ . Si  $\tilde{B} \in \{\tilde{B}_y : y \in \pi^{-1}(x_B)\} \subset \tilde{\mathcal{B}}_0$  es la arccomponente de  $\pi^{-1}(B)$  que contiene a  $\tilde{x}$ , inferimos que  $\tilde{B} = (\pi|_W)^{-1}(B) \subset W \subset \tilde{O}$ . Esto prueba que  $\tilde{\mathcal{B}}_0$  es base de la topología de  $\tilde{X}$  y concluye la prueba. ■

Como consecuencia:

**Corolario 12.5** *Sea  $X$  un espacio topológico II-Axioma de Numerabilidad y con grupo fundamental numerable.*

*Entonces todo recubridor de  $X$  es II-Axioma de Numerabilidad.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ . Fijados  $x \in X$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$ , la aplicación

$$\Pi_1(X, x) \rightarrow \left( \Pi_1(X, x) / \pi_* (\Pi_1(\tilde{X}, y)) \right)_{\text{dcha}}, \quad [\alpha] \mapsto \pi_* (\Pi_1(\tilde{X}, y)) \star [\alpha],$$

es sobreyectiva. La numerabilidad de  $\Pi_1(X, x)$  implica por tanto la numerabilidad de  $\left( \Pi_1(X, x) / \pi_* (\Pi_1(\tilde{X}, y)) \right)_{\text{dcha}}$  es numerable. Pero por el Corolario 12.2

$$\left( \Pi_1(X, x) / \pi_* (\Pi_1(\tilde{X}, y)) \right)_{\text{dcha}} \rightarrow \pi^{-1}(x), \quad \pi_* (\Pi_1(\tilde{X}, y)) \star [\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}_y(1),$$

es biyectiva, de donde  $(\tilde{X}, \pi)$  tiene una cantidad numerable de hojas. El resultado se sigue de Proposición 12.4-(iii). ■

### 13. Transformaciones de recubridores

Como ocurre en cualquiera categoría matemática, es interesante establecer cuales son las transformaciones naturales para el concepto de recubridor. Esto nos llevará de forma natural al concepto de homomorfismo de recubridores, y por tanto, al de isomorfismo. Con este lenguaje podremos abordar de forma correcta el problema de clasificación de recubridores.

A modo de guión, los dos puntos centrales de esta sección serán:

- El estudio de los automorfismos de un recubridor, y como consecuencia, el de los recubridores regulares.
- Abordar el problema de clasificación de recubridores de un espacio topológico.

Comenzaremos con la siguiente definición fundamental.

**Definición 13.1** *Sean  $(\tilde{X}_j, \pi_j)$ ,  $j = 1, 2$ , dos espacios recubridores de  $X$ .*

- *Un homomorfismo de recubridores  $\Phi$  de  $(\tilde{X}_1, \pi_1)$  en  $(\tilde{X}_2, \pi_2)$  es una aplicación continua  $\Phi: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  satisfaciendo  $\pi_2 \circ \Phi = \pi_1$ .*
- *Un homomorfismo de recubridores  $\Phi$  de  $(\tilde{X}_1, \pi_1)$  en  $(\tilde{X}_2, \pi_2)$  se dirá un isomorfismo de recubridores si  $\Phi$  es un homeomorfismo.*
- *Si  $(\tilde{X}, \pi)$  es un recubridor de  $X$ , a los isomorfismos de  $(\tilde{X}, \pi)$  en  $(\tilde{X}, \pi)$  les llamaremos automorfismos de  $(\tilde{X}, \pi)$ .*

Dados recubridores  $(\tilde{X}_j, \pi_j)$ ,  $j = 1, 2$ , de  $X$ , la expresión  $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$  indicará que  $\Phi$  es un homomorfismo de recubridores entre ambos.

**Observación 13.2** *Dado un espacio topológico  $X$ :*

- *La composición de dos homomorfismos entre recubridores de  $X$  es un homomorfismo de recubridores de  $X$ .*

- El inverso de un isomorfismo entre dos recubridores de  $X$  es un isomorfismo de recubridores de  $X$ .
- Si  $(\tilde{X}, \pi)$  es un recubridor de  $X$  entonces  $\text{Id}_{\tilde{X}}$  es un automorfismo de  $(\tilde{X}, \pi)$ .

**Definición 13.3** Si  $(\tilde{X}, \pi)$  es un recubridor de  $X$ , denotaremos por  $\mathcal{A}(\tilde{X}, \pi)$  al grupo (respecto de la composición) de los automorfismos de  $(\tilde{X}, \pi)$ .

Es natural preguntarse por las propiedades básicas de los homomorfismos de recubridores y abordar el problema de existencia. Los siguientes corolarios, consecuencia inmediata del Teorema 11.11, dan una cumplida respuesta a estas cuestiones.

**Corolario 13.4** Sean  $(\tilde{X}_1, \pi_1)$  y  $(\tilde{X}_2, \pi_2)$  dos recubridores de  $X$ .

Si  $\Phi, \Psi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$  son homomorfismos de recubridores distintos, entonces  $\Phi(y) \neq \Psi(y)$  para todo  $y \in \tilde{X}_1$ .

Como consecuencia, si  $(\tilde{X}, \pi)$  es un recubridor de  $X$  y  $\Phi \in \mathcal{A}(\tilde{X}, \pi)$  es distinto de  $\text{Id}_{\tilde{X}}$ , entonces  $\Phi(y) \neq y$  para todo  $y \in \tilde{X}$ .

**Corolario 13.5** Sean  $(\tilde{X}_1, \pi_1), (\tilde{X}_2, \pi_2)$  dos recubridores de  $X$ , y sean  $x \in X$  e  $y_j \in \pi_j^{-1}(x)$ ,  $j = 1, 2$ .

- (I) Existe un homomorfismo  $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$  con  $\Phi(y_1) = y_2$  si y sólo si  $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) \subseteq (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$ .
- (II) Existe un isomorfismo  $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$  con  $\Phi(y_1) = y_2$  si y sólo si  $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) = (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$ .

Una propiedad interesante a tener en cuenta es que cualquier homomorfismo de recubridores es una aplicación recubridora.

**Proposición 13.6** Si  $(\tilde{X}_j, \pi_j)$ ,  $j = 1, 2$ , son espacios recubridores de  $X$  y  $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$  un homomorfismo, entonces  $(\tilde{X}_1, \Phi)$  es un recubridor de  $\tilde{X}_2$ .

DEMOSTRACIÓN: Veamos que  $\Phi$  es sobre. Para ello fijemos  $y \in \tilde{X}_1$  y tomemos  $z \in \tilde{X}_2$  arbitrario. Consideremos un arco  $\tilde{\alpha}_2: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}_2$  con  $\tilde{\alpha}_2(0) = \Phi(y)$  y  $\tilde{\alpha}_2(1) = z$ , y llamemos  $\alpha := \pi_2 \circ \tilde{\alpha}_2$ . Obsérvese que por ser  $\Phi$  homomorfismo de recubridores  $\alpha(0) = \pi_1(y) = \pi_2(\Phi(y)) \in X$ . Denotemos por  $\tilde{\alpha}_1: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}_1$  al levantamiento de  $\alpha$  vía  $\pi_1$  con condición inicial  $\tilde{\alpha}_1(0) = y$ . Por ser  $\Phi$  un homomorfismo de recubridores,  $\Phi \circ \tilde{\alpha}_1$  es un levantamiento de  $\alpha$  vía  $\pi_2$  con condición inicial  $\Phi(y)$ . Por la unicidad del levantamiento (ver Corolario 11.3),  $\Phi \circ \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$ . En particular  $\Phi(\tilde{\alpha}_1(1)) = \tilde{\alpha}_2(1) = z$ , probando la sobreyectividad de  $\Phi$ .

Sólo resta garantizar la existencia de entornos distinguidos para  $\Phi$ . Primero llamaremos la atención sobre varios hechos

- $\Phi$  es un homeomorfismo local: téngase en cuenta que  $\pi_2 \circ \Phi = \pi_1$  y de que  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son homeomorfismos locales.
- Para todo  $z \in \tilde{X}_2$ ,  $\Phi^{-1}(z) \subset \pi_1^{-1}(\pi_2(z))$ : evidente por ser  $\pi_2 \circ \Phi = \pi_1$ .

Consideremos un punto arbitrario  $z \in \tilde{X}_2$ , y llamemos  $x := \pi_2(z)$ . Por ser  $(\tilde{X}_1, \pi_1)$  un espacio recubridor de  $X$  podemos encontrar un entorno (abierto) distinguido  $U$  de  $x$  en  $X$  para la aplicación recubridora  $\pi_1$ . Como siempre escribamos

$$\pi_1^{-1}(U) = \cup_{y \in \pi_1^{-1}(x)} V_y,$$

donde  $\{V_y : y \in \pi_1^{-1}(x)\}$  son las arcocomponentes de  $\pi_1^{-1}(U)$  y  $\pi_1|_{V_y} : V_y \rightarrow U$  es un homeomorfismo para todo  $y \in \pi_1^{-1}(x)$ .

Como  $(\pi_2|_{\Phi(V_y)}) \circ (\Phi|_{V_y}) = \pi_1|_{V_y} : V_y \rightarrow U$  inferimos que  $\Phi|_{V_y} : V_y \rightarrow \Phi(V_y)$  es inyectiva, y al tratarse de homeomorfismos locales, que

- $\Phi(V_y)$  es un abierto de  $\tilde{X}_2$ ,  $\Phi|_{V_y} : V_y \rightarrow \Phi(V_y)$  es un homeomorfismo y
- $\pi_2|_{\Phi(V_y)} : \Phi(V_y) \rightarrow U$  es un homeomorfismo

para todo  $y \in \pi_1^{-1}(x)$ .

Al ser  $\pi_1 = \pi_2 \circ \Phi$  es obvio que  $\Phi^{-1}(z) \subset \pi_1^{-1}(x)$ . Obsérvese también que

$$W := \Phi(V_{y_1}) = \Phi(V_{y_2}) \text{ para cualesquiera } y_1, y_2 \in \Phi^{-1}(z).$$

En efecto,  $\Phi(V_{y_1})$  y  $\Phi(V_{y_2})$  son abiertos arcoconexos en  $\tilde{X}_2$  que comparten el punto  $z \in \Phi(V_{y_1}) \cap \Phi(V_{y_2})$  y se proyectan homeomórficamente vía  $\pi_2$  en  $U$ . Por tanto, todos los levantamientos de arcos en  $U$  con condición inicial  $x = \pi_2(z)$  han de estar contenidos en  $\Phi(V_{y_1}) \cap \Phi(V_{y_2})$ , y es aquí que  $\Phi(V_{y_1}) = \Phi(V_{y_2})$  ya que esos levantamientos cubren ambos conjuntos. Un argumento similar nos garantiza  $\Phi(V_y) \cap W = \emptyset$  para todo  $y \in \pi_1^{-1}(x) \setminus \Phi^{-1}(z)$ .

De todo lo anterior se deduce que

$$\Phi^{-1}(W) = \cup_{y \in \Phi^{-1}(z)} V_y,$$

siendo  $\Phi|_{V_y} : V_y \rightarrow W$  un homeomorfismo para todo  $y \in \Phi^{-1}(z)$ . Por tanto  $W$  es un entorno distinguido alrededor de  $z$  para  $\Phi$ , lo que concluye la prueba. ■

Como consecuencia se tiene el siguiente

**Corolario 13.7** Sean  $(\tilde{X}_1, \pi_1)$ ,  $(\tilde{X}_2, \pi_2)$  recubridores de un espacio  $X$ , y sean  $x \in X$  e  $y_j \in \pi_j^{-1}(x)$ ,  $j = 1, 2$ .

Si  $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) \subseteq (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$  entonces  $\tilde{X}_1$  recubre a  $\tilde{X}_2$ .

DEMOSTRACIÓN: Por Corolario 13.5 existe un homomorfismo  $\Phi : (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$  con  $\Phi(y_1) = y_2$ , y la Proposición 13.6 garantiza que  $(\tilde{X}_1, \Phi)$  es un recubridor de  $\tilde{X}_2$ . Esto concluye el corolario. ■

### 13.1. El grupo de automorfismos. Recubridores regulares

En esta sección vamos a estudiar la acción natural del grupo de automorfismos de un recubridor sobre el espacio recubridor. Haremos especial énfasis en la familia de los recubridores regulares, esto es, aquellos para los que tal acción es transitiva.

Los detalles están contenidos en la siguiente

**Proposición 13.8** Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ . Entonces la acción

$$\mu : \text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}, \quad (\Phi, y) \mapsto \Phi \cdot y := \Phi(y),$$

es propia y discontinua.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $y_0 \in \tilde{X}$  un punto arbitrario y llamemos  $x = \pi(y_0)$ . Sea  $U \subset X$  un entorno distinguido de  $x$  para  $\pi$ , y como siempre escribamos  $\pi^{-1}(U)$  como unión de sus arccomponentes:

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{y \in \pi^{-1}(x)} \tilde{U}_y,$$

donde  $\tilde{U}_{y_1} \cap \tilde{U}_{y_2} = \emptyset$ ,  $y_1 \neq y_2$ , y  $\pi|_{\tilde{U}_y} : \tilde{U}_y \rightarrow U$  es un homeomorfismo,  $y \in \pi^{-1}(x)$ .

Comprobemos que la condición de propia y discontinua para  $\mu$  se satisface alrededor de  $y_0$  con entorno distinguido  $\tilde{U}_{y_0}$ .

Para cada  $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ ,  $\Phi(\tilde{U}_{y_0})$  es un abierto arcoconexo en  $\tilde{X}$  homeomorfo vía  $\pi$  con  $U$ , luego una arccomponente de  $\pi^{-1}(U)$ :

$$\Phi(\tilde{U}_{y_0}) \in \{\tilde{U}_y : y \in \pi^{-1}(x)\} \quad \text{para todo } \Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi).$$

Para acabar bastaría con ver que si  $\Phi_1, \Phi_2 \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$  son distintos, entonces  $\Phi_1(\tilde{U}_{y_0}) \cap \Phi_2(\tilde{U}_{y_0}) = \emptyset$ . En efecto, de otra forma las arccomponentes  $\Phi_1(\tilde{U}_{y_0})$  y  $\Phi_2(\tilde{U}_{y_0})$  de  $\pi^{-1}(U)$  compartirían un punto, luego  $\Phi_1(\tilde{U}_{y_0}) = \Phi_2(\tilde{U}_{y_0}) = \tilde{U}_y$  para algún  $y \in \pi^{-1}(x)$ , y por tanto

$$\Phi_1|_{\tilde{U}_{y_0}} = \Phi_2|_{\tilde{U}_{y_0}} = (\pi|_{\tilde{U}_y}^{-1}) \circ (\pi|_{\tilde{U}_{y_0}})$$

ya que se trata de automorfismos. De aquí que  $\Phi_1 = \Phi_2$ , lo que acaba la proposición. ■

Una consecuencia interesante de esta proposición nos la proporciona el Teorema 10.8. En el siguiente corolario vamos a introducir una herramienta fundamental para la construcción de recubridores a partir de subgrupos del grupo de los automorfismos. En efecto, sea  $G \leq \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$  un subgrupo arbitrario, que obviamente actuará de forma propia y discontinua sobre  $\tilde{X}$  por restricción de la acción  $\mu$  en la Proposición 13.8.

**Corolario 13.9 (Construcción de recubridores)** *Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ ,  $G \leq \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$  un subgrupo y  $(\tilde{X}, \pi_0)$  el recubridor asociado al espacio de órbitas  $\tilde{X}/G$ :*

$$\pi_0 : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G, \quad y \mapsto G \cdot y.$$

*Entonces la única aplicación  $\hat{\pi} : \tilde{X}/G \rightarrow X$  tal que  $\hat{\pi} \circ \pi_0 = \pi$ , esto es, definida por*

$$\hat{\pi}(G \cdot y) := \pi(y) \quad \text{para todo } G \cdot y \in \tilde{X}/G,$$

*es recubridora.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente  $\hat{\pi}$  es sobreyectiva al ser  $\pi$  sobreyectiva. También es continua ya que la composición  $\hat{\pi} \circ \pi_0$  es continua y  $\tilde{X}/G$  está dotado de la topología cociente para  $\pi_0$ . Restaría comprobar la existencia de entornos distinguidos para  $\hat{\pi}$ .

Consideremos  $x \in X$  y tomemos un entorno distinguido  $U$  alrededor de  $x$  para el recubridor  $(\tilde{X}, \pi)$ . Veamos que  $U$  también es un entorno distinguido alrededor de  $x$  para el recubridor  $(\tilde{X}/G, \hat{\pi})$  y habremos acabado.

Escribamos  $\pi^{-1}(U)$  como unión de sus arccomponentes:

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{y \in \pi^{-1}(x)} \tilde{U}_y,$$

donde  $\tilde{U}_{y_1} \cap \tilde{U}_{y_2} = \emptyset$ ,  $y_1 \neq y_2$ , y  $\pi|_{\tilde{U}_y} : \tilde{U}_y \rightarrow U$  es un homeomorfismo,  $y \in \pi^{-1}(x)$ .

Por ser  $\tilde{U}_y$  un entorno distinguido para la acción  $G \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ ,  $y \in \pi^{-1}(x)$  (ver la prueba de la Proposición 13.8), y  $\pi^{-1}(U) = \pi_0^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(U))$ :

- $V_{\pi_0(y)} := \pi_0(\tilde{U}_y)$  es abierto en  $\tilde{X}/G$  y  $\pi_0|_{\tilde{U}_y}: \tilde{U}_y \rightarrow V_{\pi_0(y)}$  es un homeomorfismo para todo  $y \in \pi^{-1}(x)$ .
- $V_{\pi_0(y_1)} \cap V_{\pi_0(y_2)} = \emptyset \iff \pi_0(y_1) \neq \pi_0(y_2), y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ .
- $\hat{\pi}^{-1}(U) = \bigcup_{y \in \pi^{-1}(x)} V_{\pi_0(y)} \subset \tilde{X}/G$ .

En particular,  $\{V_{\pi_0(y)}: y \in \pi^{-1}(x)\}$  puede parametrizarse 1-1 como  $\{V_z: z \in \hat{\pi}^{-1}(x)\}$ . Como  $\hat{\pi}^{-1}(U) = \bigcup_{z \in \hat{\pi}^{-1}(x)} V_z$  se ha expresado como unión de abiertos arcoconexos disjuntos dos a dos, sólo resta garantizar que  $\hat{\pi}|_{V_z}: V_z \rightarrow U$  es un homeomorfismo. Eligiendo cualquiera  $y \in \pi_0^{-1}(z)$ , observamos que  $\hat{\pi}|_{V_z} = (\pi|_{\tilde{U}_y}) \circ (\pi_0|_{\tilde{U}_y}^{-1})$  es composición de dos homeomorfismos, lo que acaba la prueba. ■

### 13.1.1. Recubridores regulares

Existe una relación íntima entre el grupo de automorfismos de un recubridor  $(\tilde{X}, \pi)$  de un espacio  $X$  y el normalizador del subgrupo  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$  en  $\Pi_1(X, x)$ , donde  $x \in X$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$  son arbitrarios; ver la Definición 1.9. Este hecho motivará el concepto de recubridor regular, y será la clave para el correcto tratamiento del problema de existencia de recubridores de  $X$  como veremos más adelante.

Obviamente, si  $\Phi$  es un automorfismo de un recubridor  $(\tilde{X}, \pi)$  de un espacio  $X$  entonces  $\Phi$  respeta las fibras de los puntos, esto es,  $\Phi(\pi^{-1}(x)) = \pi^{-1}(x)$  para todo  $x \in X$ . La siguiente proposición da una condición necesaria y suficiente para la existencia de un automorfismo conectando dos puntos de la fibra de un punto.

**Proposición 13.10** *Sea  $X$  un espacio topológico, sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$  y fijemos  $x \in X$  e  $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ . Tomemos  $\tilde{\alpha}$  cualquier arco en  $\tilde{X}$  con  $\tilde{\alpha}(0) = y_1$  y  $\tilde{\alpha}(1) = y_2$ , y llamemos  $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$ . Entonces*

$$\exists \Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \text{ con } \Phi(y_1) = y_2 \iff [\alpha] \in N_0\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1))\right).$$

DEMOSTRACIÓN: Por el Corolario 11.9,

$$\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_2)) = [\alpha]^{-1} \star \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)) \star [\alpha].$$

Por otro lado, el Corolario 13.5 nos dice que existe  $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$  con  $\Phi(y_1) = y_2$  si y sólo si  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)) = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_2))$ . Por tanto

$$\exists \Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \text{ con } \Phi(y_1) = y_2 \iff \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)) = [\alpha]^{-1} \star \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)) \star [\alpha],$$

esto es, si y sólo si  $[\alpha]$  pertenece al normalizador  $N_0\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1))\right)$  de  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1))$  en  $\Pi_1(X, x)$ . ■

**Definición 13.11** *Fijados  $y \in \pi^{-1}(x)$  y  $[\alpha] \in N_0\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))\right)$ , la Proposición 13.10 garantiza que existe un automorfismo  $\Phi_y([\alpha])$  de  $(\tilde{X}, \pi)$  con  $\Phi_y([\alpha])(y) = \tilde{\alpha}_y(1)$ , que además es único por el Corolario 13.4. Denotaremos  $\Upsilon$  a la aplicación*

$$\Upsilon: N_0\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))\right) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, \pi), \quad \Upsilon([\alpha]) := \Phi_y([\alpha]).$$

El siguiente teorema explica con detalle la naturaleza de  $\Upsilon$ , y como consecuencia nos permite interpretar el grupo  $\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$  en función de los grupos fundamentales del recubridor y la base.

**Teorema 13.12** Sean  $X$  un espacio topológico,  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ ,  $x \in X$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$ . Entonces la aplicación

$$\Upsilon: N_0\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))\right) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, \pi), \quad [\alpha] \mapsto \Phi_y([\alpha]),$$

es un epimorfismo de grupos con  $\text{Ker}(\Upsilon) = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$ .

En particular, por el primer teorema de isomorfía para grupos

$$N_0\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))\right) / \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \cong \text{Aut}(\tilde{X}, \pi).$$

DEMOSTRACIÓN: Probemos primero que  $\Upsilon$  es un homomorfismo de grupos. Hemos de ver que para cualesquiera  $[\alpha], [\beta] \in N_0\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))\right)$ ,

$$\Phi_y([\alpha] \star [\beta]) = \Phi_y([\alpha]) \circ \Phi_y([\beta]).$$

Para ello consideremos el arco  $\tilde{\alpha}_y \star (\Phi_y([\alpha]) \circ \tilde{\beta}_y)$  en  $\tilde{X}$ , bien definido ya que  $\tilde{\alpha}_y(1) = \Phi_y([\alpha])(y) = \Phi_y([\alpha])(\tilde{\beta}_y(0))$ . Como

$$\pi \circ (\tilde{\alpha}_y \star (\Phi_y([\alpha]) \circ \tilde{\beta}_y)) = (\pi \circ \tilde{\alpha}_y) \star (\pi \circ (\Phi_y([\alpha]) \circ \tilde{\beta}_y)) = (\pi \circ \tilde{\alpha}_y) \star (\pi \circ \tilde{\beta}_y) = \alpha \star \beta$$

y  $(\tilde{\alpha}_y \star (\Phi_y([\alpha]) \circ \tilde{\beta}_y))(0) = \tilde{\alpha}_y(0) = y$ , inferimos que  $(\widetilde{\alpha \star \beta})_y = \tilde{\alpha}_y \star (\Phi_y([\alpha]) \circ \tilde{\beta}_y)$ . De aquí que

$$\Phi_y([\alpha] \star [\beta])(y) = (\widetilde{\alpha \star \beta})_y(1) = \Phi_y([\alpha])(\tilde{\beta}_y(1)) = \Phi_y([\alpha])(\Phi_y([\beta])(y)) = (\Phi_y([\alpha]) \circ \Phi_y([\beta]))(y),$$

y por tanto  $\Phi_y([\alpha] \star [\beta]) = \Phi_y([\alpha]) \circ \Phi_y([\beta])$  por el Corolario 13.4.

Para acabar, veamos que  $\Upsilon$  es sobre. En efecto, sea  $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, y)$  un automorfismo arbitrario. Consideremos  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  un arco con  $\tilde{\alpha}(0) = y$  y  $\tilde{\alpha}(1) = \Phi(y)$ . Por los Corolarios 13.5 y 11.9,

$$\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \Phi(y))) = [\alpha]^{-1} \star \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \star [\alpha],$$

donde  $\alpha$  es el lazo  $\pi \circ \tilde{\alpha}$  (con base  $x \in X$ ). Esto prueba que  $[\alpha] \in N_0\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))\right)$ , y como claramente  $\Upsilon([\alpha]) = \Phi$ , que  $\Upsilon$  es sobreyectiva. ■

**Observación 13.13** Con la misma notación del Teorema 13.12, si  $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$  y  $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$  es tal que  $\tilde{\alpha}_{y_1}(1) = y_2$ , entonces

$$N_0\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_2))\right) = [\alpha]^{-1} \star N_0\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1))\right) \star [\alpha].$$

Ambos subgrupos conjugados de  $\Pi_1(X, x)$  son isomorfos a  $\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ . Téngase en cuenta que  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_2)) = [\alpha]^{-1} \star \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)) \star [\alpha]$ .

Un caso particular especialmente interesante es cuando, con la notación anterior, el normalizador  $N_0\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))\right)$  coincide con  $\Pi_1(X, x)$ . En otras palabras, cuando  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$  es un subgrupo normal de  $\Pi_1(X, x)$ . Esto nos llevará de forma natural al concepto de recubridor regular.

**Definición 13.14** Un recubridor  $(\tilde{X}, \pi)$  de un espacio  $X$  se dirá regular si existe  $x \in X$  tal que la acción

$$\mu_x: \text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \times \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(x), \quad (\Phi, y) \mapsto \Phi \cdot y := \Phi(y).$$

es transitiva.

**Observación 13.15**  $\mu_x$  es transitiva para algún  $x \in X$  si y sólo si  $\mu_x$  es transitiva para todo  $x \in X$ . Por tanto  $(\tilde{X}, \pi)$  es regular si y solo si  $\mu_x$  es transitiva para todo  $x \in X$ .

DEMOSTRACIÓN: Si  $x_1, x_2 \in X$  y  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  es un arco con  $\alpha(0) = x_1$  y  $\alpha(1) = x_2$ , el Corolario 11.5 proporcionaba la biyección  $\eta_\alpha: \pi^{-1}(x_1) \rightarrow \pi^{-1}(x_2)$ ,  $\eta_\alpha(y) := \tilde{\alpha}_y(1)$ . Como las fibras son invariantes por automorfismos y  $\eta_\alpha \circ \Phi = \Phi \circ \eta_\alpha$  para todo automorfismo  $\Phi$  de  $(\tilde{X}, \pi)$ , la transitividad de  $\mu_{x_1}$  es equivalente a la transitividad de  $\mu_{x_2}$ . ■

**Proposición 13.16** Sea  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ . Son equivalentes:

- (a)  $(\tilde{X}, \pi)$  es regular.
- (b) Para todo  $x \in X$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$ ,  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$  es un subgrupo normal de  $\Pi_1(X, x)$ .
- (c) Existen  $x \in X$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$  tales que  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$  es un subgrupo normal de  $\Pi_1(X, x)$ .

DEMOSTRACIÓN: (a)  $\implies$  (b). Supongamos que  $(\tilde{X}, \pi)$  es regular y tomemos  $x \in X$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$ . Sea  $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$  y llamemos  $z := \tilde{\alpha}_y(1)$ . Por la transitividad de la acción  $\mu_x$  sabemos que existe  $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$  tal que  $\Phi(y) = z$ , y por tanto  $[\alpha] \in N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)))$ ; ver Proposición 13.10. Esto prueba que  $N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))) = \Pi_1(X, x)$ , esto es, (b).

(b)  $\implies$  (c) es trivial.

(c)  $\implies$  (a). Tomemos  $x \in X$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$  tales que  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$  es un subgrupo normal de  $\Pi_1(X, x)$ . Observemos que entonces  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, z))$  es un subgrupo normal de  $\Pi_1(X, x)$  para todo  $z \in \pi^{-1}(x)$  (ver el Corolario 11.9 o la Observación 13.13).

Tomemos dos puntos  $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$  y un arco  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  con  $\tilde{\alpha}(0) = y_1$  y  $\tilde{\alpha}(1) = y_2$ . Si denotamos  $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$  y tenemos en cuenta que  $[\alpha] \in \Pi_1(X, x) = N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)))$ , la Proposición 13.10 de nuevo nos dice que existe  $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$  tal que  $\Phi(y_1) = y_2$ . Esto prueba que  $\mu_x$  es transitiva y por tanto (a). ■

**Observación 13.17** Si  $(\tilde{X}, \pi)$  es un recubridor regular de  $X$  y  $x \in X$  es un punto arbitrario, el subgrupo  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$  de  $\Pi_1(X, x)$  no depende del punto  $y \in \pi^{-1}(X)$ .

En efecto, nótese que de la Proposición 13.16 el subgrupo  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$  de  $\Pi_1(X, x)$  es normal para cualquier  $y \in \pi^{-1}(X)$ , y que cuando cambiamos de punto en la fibra de  $x$  este subgrupo cambia por conjugación (luego permanece invariante).

**Corolario 13.18** Si  $(\tilde{X}, \pi)$  es un recubridor regular de  $X$ ,  $x \in X$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$ , entonces:

- (i)  $\hat{\Upsilon}: \Pi_1(X, x)/\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ ,  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \star [\alpha] \mapsto \Phi_y([\alpha])$ , es un isomorfismo de grupos.



(II) Si  $\pi_0: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$  es la proyección al espacio de órbitas  $\tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ , existe un homeomorfismo  $\hat{\pi}: \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \rightarrow X$  tal que  $\hat{\pi} \circ \pi_0 = \pi$ .

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 13.16 y la regularidad de  $(\tilde{X}, \pi)$ , el normalizador  $N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)))$  coincide con  $\Pi_1(X, x)$ . Item (i) se sigue del Teorema 13.12.

Para el item (ii), basta con probar que la aplicación

$$\hat{\pi}: \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \rightarrow X, \quad \text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \cdot y \mapsto \pi(y),$$

es un homeomorfismo. La identidad  $\hat{\pi} \circ \pi_0 = \pi$  sería evidente. En efecto,  $\hat{\pi}$  es recubridora por el Corolario 13.9, y la transitividad de la acción  $\mu_x$  para todo  $x \in X$  implica que  $\text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \cdot y = \pi^{-1}(\pi(y))$ . Por tanto  $\hat{\pi}$  es biyectiva, y en consecuencia un homeomorfismo. ■

Es interesante comparar el Corolario 13.9 y el Corolario 13.18.

A modo de resumen, los recubridores regulares se caracterizan por ser los asociados a los espacios de órbitas, siendo el grupo de automorfismos de los mismos identificable al grupo de homeomorfismos que define la acción. Ese es el contenido del siguiente:

**Corolario 13.19** Si  $G$  es un grupo de homeomorfismos que actúa de forma propia y discontinua sobre un espacio  $X$  y  $\pi: X \rightarrow X/G$  es la proyección al espacio de órbitas, entonces  $(X, \pi)$  es un recubridor regular y  $\text{Aut}(X, \pi) = G$ .

Recíprocamente, si  $(\tilde{X}, \pi)$  es un recubrido regular de  $X$  entonces  $X$  es homeomorfo al espacio de órbitas  $\tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ , y salvo ese homeomorfismo la proyección recubridora  $\pi$  no es sino la proyección al espacio de órbitas  $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ .

## 13.2. No todo recubridor es regular

Ciertamente los recubridores regulares permiten un tratamiento y comprensión más agradable. Sin embargo no todo recubridor es regular. En este apartado vamos a explicar como la variable compleja nos proporciona una familia muy amplia de recubridores genéricamente no regulares, lo que nos ayudará a comprender que la regularidad no deja de ser una excepcionalidad.

En lo que sigue  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  denotará la esfera de Riemann (compactificación de Alexandrov del plano complejo  $\mathbb{C}$ ), topológicamente equivalente a la esfera  $\mathbb{S}^2$  vía la proyección estereográfica. Sea  $P: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  una función polinómica de grado  $k \geq 1$ , llamemos  $A$  al conjunto de puntos  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  donde  $P$  presenta una ramificación (esto es, donde  $P$  no es localmente invertible). Obviamente  $A = \emptyset$  si  $k = 1$ , y si  $k \geq 2$  entonces  $A$  coincide con  $\{z \in \mathbb{C}: P'(z) = 0\} \cup \{\infty\}$ .

Denotemos por  $X := \hat{\mathbb{C}} \setminus P(A) \subset \mathbb{C}$ , y análogamente  $Y := \hat{\mathbb{C}} \setminus P^{-1}(P(A)) \subset \mathbb{C}$  al complemento en  $\hat{\mathbb{C}}$  de la  $P$ -saturación de  $A$ . Definamos

$$\pi: Y \rightarrow X, \quad \pi(z) := P(z).$$

El hecho de que  $\pi$  sea un homeomorfismo local (de hecho biholomorfismo local) y el Teorema Fundamental del Álgebra implican trivialmente que  $(Y, \pi)$  es un recubridor de  $k$  hojas de  $X$ .

**Proposición 13.20** Si  $\Phi \in \text{Aut}(Y, \pi)$  entonces  $\Phi$  es (la restricción a  $Y$  de) una transformación de Möbius.

DEMOSTRACIÓN: Tomemos  $\Phi \in \text{Aut}(Y, \pi)$ . Como  $\phi \circ \Phi = \phi$  y  $\phi$  es un biholomorfismo local (esto es, una aplicación holomorfa  $Y \rightarrow X$  con derivada no nula en todo punto), inferimos que  $\phi: Y \rightarrow Y$  es un biholomorfismo global. En particular el Teorema de Weierstrass-Casorati nos dice que  $\Phi$  no presenta singularidades esenciales en los puntos de  $P^{-1}(P(A))$ , y por tanto por el Teorema de las singularidades evitables de Riemann extiende holomórficamente a los puntos de  $P^{-1}(P(A))$ . Nótese que este análisis se extiende al comportamiento local de  $\Phi$  alrededor de  $\infty$ , donde igualmente  $\Phi$  no presenta una singularidad esencial. Por tanto  $\Phi$  es la restricción a  $Y$  de una función racional  $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  (cociente de polinomios), y como genéricamente es 1-1 ya que es un automorfismo de  $Y$ , inferimos que  $\Phi$  ha de ser (la restricción de) una transformación de Möbius (de hecho de la forma  $z \mapsto \lambda z + \mu$ ,  $\lambda \neq 0$ , ya que fija  $\infty$ ). Esto prueba el resultado. ■

**Corolario 13.21** *Existen polinomios  $P$  para los que el recubridor  $(Y, \pi)$  no es regular.*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que una transformación de Möbius está determinada unívocamente por la imagen de tres puntos, y en particular, tiene a lo más 3 puntos fijos. Elijamos  $P$  para que:

- $A$  conste de al menos 3 puntos.
- Las ramificaciones de  $P$  en los puntos de  $A$  sean distintas dos a dos.

Es fácil encontrar polinomios satisfaciendo estas condiciones, por ejemplo  $P(z) = 3z^4 - 4z^3$  o cualquier otra primitiva del polinomio  $z^2(z - 1)$ .

Veamos que bajo estas dos condiciones  $\text{Aut}(Y, \pi) = \{\text{Id}_Y\}$ , y por tanto, que  $(Y, \pi)$  no es regular (su grupo de automorfismos no actúa de forma transitiva en la fibra de los puntos!!) En efecto, consideremos un automorfismo  $\Phi$  de  $(Y, \phi)$  arbitrario. La condición  $\pi \circ \Phi = \pi$  implica que  $P \circ \Phi = P$ , y por tanto que  $\Phi$  aplica puntos de ramificación de  $P$  en puntos de ramificación de  $P$  con la misma multiplicidad. Bajo nuestras hipótesis  $\Phi$  ha de fijar todos los puntos de  $A$ . Como  $\Phi$  es una transformación de Möbius (ver la Proposición 13.20) y el cardinal  $\#A \geq 3$ , deducimos que  $\Phi = \text{Id}_Y$ . ■

## 14. Existencia y clasificación de recubridores

Como consecuencia de los resultados anteriores podemos abordar el problema de existencia y clasificación de los recubridores de un espacio topológico. Para su correcto tratamiento se requiere fijar alguna notación.

En el conjunto  $\text{Rec}(X)$  de todos los recubridores de  $X$  consideremos la relación de equivalencia *ser isomorfo*, que escribiremos por  $\cong$ , y escribamos el correspondiente conjunto cociente por

$$\mathcal{R}(X) := \text{Rec}(X) / \cong.$$

Aquí es conveniente tener in mente la notación de la Definición 11.10. En particular, recordar que dado un punto  $x \in X$  se introdujo la aplicación

$$\Delta_x: \text{Rec}(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x)), \quad \Delta_x(\tilde{X}, \pi) := [\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))],$$

donde  $[\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))] := \{\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) : y \in \pi^{-1}(x)\}$  es la clase de conjugación del subgrupo  $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$  en  $\Pi_1(X, x)$ ,  $y \in \pi^{-1}(x)$ . Como observamos en el Corolario 11.9, esta clase *no dependía del punto elegido*  $y \in \pi^{-1}(x)$ .

El siguiente teorema prueba que  $\Delta_x$  puede ser inducida al cociente, y por tanto que la familia  $\mathcal{R}(X)$  está estrechamente determinada por  $\mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x))$ .

**Teorema 14.1** Sean  $(\tilde{X}_1, \pi_1)$  y  $(\tilde{X}_2, \pi_2)$  dos recubridores de  $X$ . Son equivalentes:

- (I)  $(\tilde{X}_1, \pi_1) \cong (\tilde{X}_2, \pi_2)$ .
- (II)  $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$  para todo  $x \in X$ .
- (III)  $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$  para algún  $x \in X$ .

En particular, para todo  $x \in X$  la aplicación

$$\hat{\Delta}_x: \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x)), \quad \hat{\Delta}_x([\tilde{X}, \pi]) := \Delta_x(\tilde{X}, \pi),$$

inducida por  $\Delta_x$  en el cociente  $\mathcal{R}(X)$  es inyectiva.

DEMOSTRACIÓN: (i)  $\implies$  (ii). Supongamos que  $(\tilde{X}_1, \pi_1)$  y  $(\tilde{X}_2, \pi_2)$  son isomorfos y sea  $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$  un isomorfismo de recubridores. sea  $x \in X$  arbitrario, tomemos  $y_1 \in \pi_1^{-1}(x)$  y consideremos  $y_2 := \Phi(y_1) \in \pi_2^{-1}(x)$ . Por el Corolario 13.5-(ii) inferimos que  $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) = (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$ , de donde  $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$ .

(ii)  $\implies$  (iii). Trivial.

(iii)  $\implies$  (i). Supongamos que  $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$  para algún  $x \in X$ . Esto quiere decir que, dados cualesquiera  $z_1 \in \pi_1^{-1}(x)$  e  $y_2 \in \pi_2^{-1}(x)$ , los subgrupos  $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, z_1))$  y  $(\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$  son conjugados en  $\Pi_1(X, x)$ . Por tanto existe  $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$  tal que

$$(\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2)) = [\alpha]^{-1} \star (\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, z_1)) \star [\alpha].$$

Si llamamos  $y_1 := \tilde{\alpha}_{z_1}^{\pi_1}(1)$ , el Corolario 11.9 garantiza que

$$(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) = [\alpha]^{-1} \star (\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, z_1)) \star [\alpha],$$

y por tanto

$$(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) = (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2)).$$

De nuevo el Corolario 13.5-(ii) nos permite concluir que existe un isomorfismo  $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$  con  $\Phi(y_1) = y_2$ , como queríamos demostrar.  $\blacksquare$

El problema general de existencia de recubridores para un espacio  $X$  pasa por establecer bajo que condiciones la aplicación  $\hat{\Delta}_x: \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x))$  es biyectiva, donde  $x \in X$  es un punto arbitrario. Nuestro principal objetivo será demostrar que tal biyectividad dependerá en exclusiva de la existencia de un recubridor simplemente conexo, esto es, de que la imagen  $\Delta_x(\mathcal{R}(X))$  contenga la clase del neutro  $\{[\epsilon_x]\}$ . La definición central de esta sección es la siguiente:

**Definición 14.2** Un recubridor  $(Y, \pi)$  de  $X$  se dirá universal si  $\Pi_1(Y) \cong \{0\}$ , o equivalentemente, si  $\hat{\Delta}_x([(Y, \pi)]) = \{[\epsilon_x]\}$  para algún (luego para todo)  $x \in X$ .

Como consecuencia del Teorema 14.1, el recubridor universal de  $X$ , de existir, está unívocamente determinado salvo isomorfismos. El siguiente corolario recopila algunas de las propiedades básicas del recubridor universal, entre ellas el porqué de este calificativo (ver ítem (a)).

**Corolario 14.3** Si  $X$  admite recubridor universal  $(Y, \pi_0)$ , entonces:

- (a)  $Y$  recubre a  $\tilde{X}$  para cualquier recubridor  $(\tilde{X}, \pi)$  de  $X$ .

(b)  $(Y, \pi_0)$  es un recubridor regular.

(c) Si  $x \in X$  e  $y \in \pi_0^{-1}(x)$ , la aplicación  $\hat{\Upsilon}: \Pi_1(X, x) \rightarrow \text{Aut}(Y, \pi_0)$ ,  $[\alpha] \mapsto \Phi_y([\alpha])$ , dada en el Corolario 13.18 es un isomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN: Probemos (a). Si  $(Y, \pi_0)$  es recubridor universal de  $X$ ,  $(\tilde{X}, \pi)$  un recubridor de  $X$ ,  $x \in X$ ,  $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$  e  $y \in \pi_0^{-1}(x)$ , la condición

$$(\pi_0)_*(\Pi_1(Y, y)) = (\pi_0)_*([\epsilon_y]) = \{[\epsilon_x]\} \subset \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})),$$

requerida en Corolario 13.7 es inmediata, por lo que el resultado se sigue trivialmente.

Item (b) se sigue trivialmente de la Proposición 13.16, ya que  $(\pi_0)_*(\Pi_1(Y, y)) = \{[\epsilon_x]\}$  es un subgrupo normal de  $\Pi_1(X, x)$  para cualesquiera  $x \in X$  e  $y \in \pi_0^{-1}(x)$ .

El item (c) se sigue igualmente del Corolario 13.18. ■

Podemos ahora demostrar uno de los resultados centrales de este tema.

**Teorema 14.4** Si un espacio topológico  $X$  admite recubridor universal sí y sólo si la aplicación  $\hat{\Delta}_x: \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x))$  es biyectiva para algún (luego para cualquier)  $x \in X$ .

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 14.1, la aplicación  $\Delta_x$  es inyectiva para todo  $x \in X$ .

Si existe  $x \in X$  tal que  $\Delta_x$  es biyectiva entonces la clase del neutro  $\{[\epsilon_x]\} \in \Delta_x(\mathcal{R}(X))$ , y por tanto existe un recubridor universal  $(Y, \pi)$  de  $X$ . En particular,  $\{[\epsilon_z]\} \in \Delta_z(\mathcal{R}(X))$  para todo  $z \in X$ .

Bastará con demostrar que si existe  $x \in X$  tal que  $\{[\epsilon_x]\} \in \Delta_x(\mathcal{R}(X))$  entonces  $\Delta_x$  es sobreyectiva (y por tanto biyectiva). En efecto, llamemos  $(Y, \pi)$  al recubridor universal de  $X$  y fijemos  $y \in \pi^{-1}(x)$ . Por el Corolario 14.3

$$\hat{\Upsilon}: \Pi_1(X, x) \rightarrow \text{Aut}(Y, \pi), \quad [\alpha] \mapsto \Phi_y([\alpha]),$$

es un isomorfismo de grupos.

Tomemos un subgrupo arbitrario  $H \leq \Pi_1(X, x)$  y su clase de conjugación  $[H] \in \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x))$ . Consideremos el grupo de automorfismos  $G := \hat{\Upsilon}(H) \leq \text{Aut}(Y, \pi)$ , la proyección al espacio de órbitas  $\pi_0: Y \rightarrow \hat{X} := Y/G$  y el recubrimiento  $\hat{\pi}: \hat{X} \rightarrow X$  satisfaciendo  $\hat{\pi} \circ \pi_0 = \pi$ ; ver Corolario 13.9.

Nuestro objetivo es probar que  $\hat{\Delta}_x(\hat{X}, \hat{\pi}) = [H]$ , para lo que será suficiente con demostrar que

$$\hat{\pi}_*(\Pi_1(\hat{X}, \pi_0(y))) = H.$$

Usando que  $\hat{\Upsilon}$  es un isomorfismo y que  $G = \hat{\Upsilon}(H)$ ,

$$[\alpha] \in H \iff \Phi_y([\alpha]) \in G \iff \tilde{\alpha}_y^\pi(1) = \Phi(y) \text{ para algún } \Phi \in G \iff$$

$$\iff \pi_0 \circ \tilde{\alpha}_y^\pi = \tilde{\alpha}_{\pi_0(y)}^{\hat{\pi}} \text{ es lazo con base } \pi_0(y) \text{ en } \hat{X} \iff [\tilde{\alpha}_{\pi_0(y)}^{\hat{\pi}}] \in \Pi_1(\hat{X}, \pi_0(y)) \iff$$

$$\iff [\alpha] = [\hat{\pi} \circ \tilde{\alpha}_{\pi_0(y)}^{\hat{\pi}}] = \hat{\pi}_*([\tilde{\alpha}_{\pi_0(y)}^{\hat{\pi}}]) \in \hat{\pi}_*(\Pi_1(\hat{X}, \pi_0(y))).$$

Esto concluye la demostración. ■

## 14.1. Existencia de recubridor universal

Una cuestión trascendental es conocer qué condiciones topológicas garantizan la existencia del recubridor universal. Este será el contenido del teorema que abordaremos a continuación. Necesitamos introducir alguna notación.

**Definición 14.5** *Un abierto arcoconexo  $U$  de un espacio topológico  $X$  se dice que satisface la propiedad de semilocal simple conexión si el homomorfismo*

$$i_*: \Pi_1(U, x) \rightarrow \Pi_1(X, x)$$

*inducido por la inclusión  $i: U \rightarrow X$  es trivial (esto es, constante  $[\epsilon_x] \in \Pi_1(X, x)$ ).*

*Un espacio topológico  $X$  se dirá semilocalmente simplemente conexo si todo punto admite un entorno abierto arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo.*

Claramente un subconjunto abierto y arcoconexo dentro de un abierto semilocalmente simplemente conexo es semilocalmente simplemente conexo. Por tanto,

**Observación 14.6** *Si  $X$  es semilocalmente simplemente conexo entonces la familia de abiertos semilocalmente simplemente conexos en  $X$  son una base de la topología de  $X$ .*

Obsérvese también que si todo punto de un espacio admite un entorno abierto simplemente conexo, entonces el espacio es semilocalmente simplemente conexo. Esto ocurre, por ejemplo, para las variedades topológicas que introduciremos en el Tema 3.

**Ejercicio 14.7** *Hay espacios arcoconexos y localmente arcoconexos que no son semilocalmente simplemente conexos. El ejemplo más sencillo es el siguiente subespacio topológico del plano euclidiano:*

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n, \quad \text{donde} \quad C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2\},$$

*para el que falla la semilocal-simple-conexión en el punto  $(0, 0)$ .*

**Teorema 14.8** *Un espacio topológico  $X$  admite recubridor universal si y sólo si es semilocalmente simplemente conexo.*

**DEMOSTRACIÓN:** Supongamos que  $X$  admite recubridor universal  $(Y, \pi)$ . Dado  $x \in X$ , consideremos un entorno distinguido  $U$  de  $x$  en  $X$  y la inclusión  $i: U \rightarrow X$  para  $\pi$ . Tomemos una arcocomponente  $\tilde{U}$  de  $\pi^{-1}(U)$ , y recordemos que  $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$  es un homeomorfismo. Llamemos  $j: \tilde{U} \rightarrow Y$  a la aplicación inclusión y

$$f := j \circ (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}: U \rightarrow Y.$$

Claramente  $f$  es continua y  $\pi \circ f = i$ , por lo que  $i_* = \pi_* \circ f_*: \Pi_1(U, x) \rightarrow \Pi_1(X, x)$ . Como  $\Pi_1(Y) \cong \{0\}$ ,  $f_*$  es el homomorfismo trivial y lo mismo ocurre con  $i_*$ . Esto prueba que  $X$  es semilocalmente simplemente conexo.

Supongamos ahora que  $X$  es semilocalmente simplemente conexo y construyamos su recubridor universal.

Fijemos  $x_0 \in X$ , y para cada  $x \in X$  consideremos la familia  $\Omega_{x_0, x}(X)$  de los arcos  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  con  $\gamma(0) = x_0$  y  $\gamma(1) = x$  (ver Tema 1). Denotaremos también por  $\simeq$  la relación de equivalencia en  $\Omega_{x_0, x}(X)$  *ser homotópico en  $X$*  (siempre con extremos fijos). Construyamos el espacio cociente  $\Omega_{x_0, x}/\simeq$  para cada  $x \in X$ , y definamos

$$Y := \bigcup_{x \in X} \Omega_{x_0, x}/\simeq.$$

Definamos también la aplicación proyección

$$\pi: Y \rightarrow X, \quad \pi([\gamma]) := \gamma(1),$$

obviamente sobreyectiva ya que  $X$  es arcoconexo.

Nuestro objetivo es construir una topología en  $Y$  que haga de  $\pi$  una aplicación recubridora. Lo haremos presentando una base  $\mathcal{B}$  de la misma.

Como  $X$  es semilocalmente simplemente conexo, sabemos que la familia  $\mathcal{U}$  de los abiertos semilocalmente simplemente conexos en  $X$  es una base de la topología de  $X$ . Para cada  $U \in \mathcal{U}$  y  $[\gamma] \in Y$  con  $\gamma(1) \in U$ , pongamos

$$([\gamma], U) = \{[\gamma \star \sigma] : \sigma: [0, 1] \rightarrow U \text{ arco con } \sigma(0) = \gamma(1)\}$$

y definamos

$$\mathcal{B} := \{([\gamma], U) : [\gamma] \in Y, U \in \mathcal{U}, \gamma(1) \in U\}.$$

Veamos que  $\mathcal{B}$  es base de una (única) topología en  $Y$ . En efecto, la condición

$$Y = \cup_{([\gamma], U) \in \mathcal{B}} ([\gamma], U)$$

es trivial toda vez que

$$[\gamma] = [\gamma \star \epsilon_{\gamma(1)}] \in ([\gamma], U)$$

para cualquier abierto semilocalmente simplemente conexo  $U$  conteniendo a  $\gamma(1)$ . Por otra parte, si  $[\gamma] \in ([\gamma_1], U_1) \cap ([\gamma_2], U_2)$  entonces  $\gamma(1) \in U_1 \cap U_2$ . Denotando por  $U$  la arcocomponente (obviamente abierta) de  $U_1 \cap U_2$  que contiene a  $\gamma(1)$ ,  $U$  es semilocalmente simplemente conexo en  $X$ . Por tanto bastará con probar la inclusión

$$([\gamma], U) \subset ([\gamma_1], U_1) \cap ([\gamma_2], U_2).$$

Para ello póngase  $[\gamma] = [\gamma_j \star \sigma_j] \in ([\gamma_j], U_j)$ , y nótese que para cualquier  $[\gamma \star \sigma] \in ([\gamma], U)$  se tiene  $[\gamma \star \sigma] = [\gamma_j \star (\sigma_j \star \sigma)] \in ([\gamma_j], U_j)$ ,  $j = 1, 2$ .

Por tanto existe una única topología en  $Y$  admitiendo a  $\mathcal{B}$  como base (en lo que sigue,  $Y$  se entenderá dotado de la misma).

A continuación veamos que  $\pi: Y \rightarrow X$  es recubridora.

Ya sabemos que  $\pi$  es sobreyectiva, probemos ahora su continuidad. Como  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{B}$  son bases de las topologías en  $X$  e  $Y$ , respectivamente, para ello bastará con garantizar la siguiente identidad:

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{([\gamma], U) \in \mathcal{B}_U} ([\gamma], U), \quad (6)$$

donde  $\mathcal{B}_U := \{([\gamma], U) : \gamma(1) \in U\} \subset \mathcal{B}$ . La inclusión  $\bigcup_{([\gamma], U) \in \mathcal{B}_U} ([\gamma], U) \subseteq \pi^{-1}(U)$  es trivial por definición de  $\pi$ ; en efecto, si  $[\gamma \star \sigma] \in ([\gamma], U)$  entonces  $\pi([\gamma \star \sigma]) = \sigma(1) \in U$ . Supongamos ahora que  $[\gamma_0] \in \pi^{-1}(U)$ , esto es, que  $\gamma_0(1) \in U$ . Entonces  $([\gamma_0], U) \in \mathcal{B}_U$ , y como  $[\gamma_0] \in ([\gamma_0], U) \subset \bigcup_{([\gamma], U) \in \mathcal{B}_U} ([\gamma], U)$  la otra inclusión se sigue. Esto prueba que  $\pi$  es continua.

Nuestro siguiente objetivo será probar que  $\pi$  satisface la condición de recubrimiento. Para ello será importante comprobar la identidad

$$\pi([\gamma], U) = U \text{ para cualquier } ([\gamma], U) \in \mathcal{B}$$

(que en particular implica que  $\pi$  es abierta). Para hacerlo, tomemos  $z \in U$  y un arco  $\sigma$  en  $U$  conectando  $\gamma(1)$  y  $z$ . Claramente  $[\gamma \star \sigma] \in ([\gamma], U)$  y en consecuencia  $\pi([\gamma \star \sigma]) =$

$\sigma(1) = z \in \pi([\gamma], U)$ . Esto prueba que  $U \subset \pi([\gamma], U)$ , y como la otra inclusión es trivial la igualdad buscada.

Teniendo en cuenta (6),  $\pi$  es recubridora si y sólo si

$$\pi|_{([\gamma], U)}: ([\gamma], U) \rightarrow U \text{ es un homeomorfismo para todo } ([\gamma], U) \in \mathcal{B}_U.$$

Al ser esta aplicación continua, abierta y sobre, bastará con garantizar layectividad. Supongamos que  $[\gamma \star \sigma_j] \in ([\gamma], U)$ ,  $j = 1, 2$ , y  $\sigma_1(1) = \pi([\gamma \star \sigma_1]) = \pi([\gamma \star \sigma_2]) = \sigma_2(1)$ . Como  $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = \gamma(1)$  y  $\sigma_1([0, 1]), \sigma_2([0, 1]) \subset U$ , la semilocal simpleconexión de  $U$  garantiza que  $\sigma := \sigma_1 \star \bar{\sigma}_2 \simeq \epsilon_{\gamma(1)}$  en  $X$ , y por tanto que

$$\gamma \star \sigma_2 \simeq \gamma \star \sigma \star \sigma_2 \simeq \gamma \star \sigma_1.$$

Esto implica que  $[\gamma \star \sigma_1] = [\gamma \star \sigma_2]$  como queríamos ver, y que  $\pi$  es recubridora.

Para finalizar el teorema resta demostrar que  $Y$  es simplemente conexo. Nuestra estrategia será probar que

$$\pi_*(\Pi_1(Y, [\epsilon_{x_0}])) = \{[\epsilon_{x_0}]\},$$

y concluir usando el Teorema de Monodromía (Corolario 11.8).

Con este objetivo consideremos un arco  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  con  $\gamma(0) = x_0$ , y definamos  $\gamma_t: [0, 1] \rightarrow X$ ,  $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$ , para cada  $t \in [0, 1]$ . Comprobemos que el arco

$$c: [0, 1] \rightarrow Y, \quad c(t) := [\gamma_t],$$

es el levantamiento  $\tilde{\gamma}_{[\epsilon_{x_0}]}$  vía  $\pi$ .

Como  $c(0) = [\gamma_0] = [\epsilon_{x_0}]$  y  $\pi \circ c = \gamma$ , basta con probar la continuidad de  $c$ . Para ello tomemos  $t_0 \in [0, 1]$  y comprobemos que  $c$  es continua en  $t_0$ . Teniendo en cuenta la definición de la topología en  $Y$ , es fácil comprobar que

$$\beta_{c(t_0)} := \{(c(t_0), U) : U \text{ semilocalmente simplemente conexo, } \gamma_{t_0}(1) = \gamma(t_0) \in U\}$$

es una base de entornos de  $c(t_0)$  en  $Y$ . Por tanto la continuidad de  $c$  en  $t_0$  pasa por garantizar que  $c^{-1}((c(t_0), U))$  es un entorno de  $t_0$  en  $[0, 1]$  para todo  $(c(t_0), U) \in \beta_{c(t_0)}$ . En efecto, como  $\gamma$  es continua en  $t_0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\gamma([t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0, 1]) \subset U$ . Para cada  $t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \cap [0, 1]$ , denotemos por  $\sigma_t: [0, 1] \rightarrow X$ ,  $\sigma_t(s) := \gamma((1-s)t_0 + st)$ , y observemos que  $\gamma_t \simeq \gamma_{t_0} \star \sigma_t$ . Por tanto,

$$c(t) = [\gamma_t] = [\gamma_{t_0} \star \sigma_t] \in ([\gamma_{t_0}], U) = (c(t_0), U) \text{ para todo } t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \cap [0, 1]$$

y  $c$  es continua en  $t_0$ . Así pues  $c: [0, 1] \rightarrow Y$  es continua y  $c = \tilde{\gamma}_{[\epsilon_{x_0}]}$ .

Para acabar, tomemos un lazo arbitrario  $c$  en  $Y$  con base el punto  $[\epsilon_{x_0}]$  y denotemos por  $\gamma := \pi \circ c$ . Como  $c$  es el levantamiento de  $\gamma$  con condición inicial  $[\epsilon_{x_0}]$ , por lo que acabamos de demostrar

$$c(1) = [\gamma_1] = [\gamma].$$

Pero  $c(1) = [\epsilon_{x_0}]$  ya que  $c$  es un lazo en  $Y$  con base  $[\epsilon_{x_0}]$ . Esto prueba que  $\pi_*([c]) = [\pi \circ c] = [\gamma] = [\epsilon_{x_0}]$  para cualquiera  $[c] \in \Pi_1(Y, [\epsilon_{x_0}])$ , y por el Teorema de Monodromía, que  $Y$  es simplemente conexo como queríamos demostrar. ■

## Ejercicios del Tema 2

1. Consideremos la aplicación recubridora  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $\rho(t) = e^{2\pi ti}$ . Demostrar que  $\rho|_{(0,2)} : (0,2) \rightarrow \mathbb{S}^1$  es continua, abierta y sobreyectiva pero no es recubridora. ¿Existe alguna otra aplicación recubridora  $\psi : (0,2) \rightarrow \mathbb{S}^1$ ?
2. Sean  $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$  y  $\psi : X \rightarrow Y$  aplicaciones recubridoras. Demostrar que si todas las fibras de  $\psi$  son finitas, entonces  $\psi \circ \rho : \tilde{X} \rightarrow Y$  es una aplicación recubridora.
3. Construir explícitamente una aplicación recubridora  $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ , donde:
 
$$\tilde{X} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2\} \quad \text{y} \quad X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$
 ¿Existe una aplicación recubridora  $\psi : X \rightarrow \tilde{X}$ ?
4. Sea  $X$  un espacio topológico conexo y  $G \leq \text{Homeo}(X)$ . Demostrar que si la proyección al cociente  $p : X \rightarrow X/G$  es recubridora, entonces  $G$  es propiamente discontinuo.
5. Un *ovaloide* es una superficie compacta y conexa  $S \subset \mathbb{R}^3$  con curvatura de Gauss positiva en cada punto. Demostrar que si  $S$  es un ovaloide y  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación de Gauss de  $S$ , entonces  $N$  es un difeomorfismo. En particular  $S \cong \mathbb{S}^2$  (esto nos indica que cierto comportamiento de la curvatura de Gauss implica una restricción topológica).
6. Construir una aplicación recubridora de dos hojas  $\rho : T \rightarrow K$ , donde  $T$  es el toro y  $K$  es la botella de Klein. Deducir que  $\mathbb{R}^2$  es el recubridor universal de  $K$ .
7. Construir una aplicación recubridora de dos hojas  $\rho : C \rightarrow M$ , donde  $C$  es el cilindro y  $M$  es la cinta de Moebius infinita. Deducir que  $\mathbb{R}^2$  es el recubridor universal de  $M$ .
8. Sea  $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$  una aplicación recubridora,  $x_0 \in X$  y  $\tilde{x}_0 \in \rho^{-1}(x_0)$ . Supongamos que  $\tilde{X}$  es arco-conexo. Demostrar que:
  - a) Si  $\Pi_1(X, x_0)$  es finito, entonces el número de hojas es finito.
  - b) Si  $\tilde{X}$  es compacto y simplemente conexo entonces  $\Pi_1(X, x_0)$  es finito.
9. Sea  $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$  una aplicación recubridora donde  $\tilde{X}$  es arcoconexo. Dados puntos  $x_0 \in X$  y  $\tilde{x}_0 \in \rho^{-1}(x_0)$ , probar que  $\rho_* : \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$  es un isomorfismo si y sólo si  $\rho$  es un homeomorfismo.
10. (Acciones de grupos sobre conjuntos). Sea  $Y$  un conjunto no vacío y  $G$  un grupo. Se dice que  $G$  *actúa sobre  $Y$  por la derecha* si existe una aplicación  $\cdot : Y \times G \rightarrow Y$  tal que:
  - a)  $y \cdot e = y$ , para cada  $y \in Y$ ,
  - b)  $y \cdot (g \cdot h) = (y \cdot g) \cdot h$ , para cada  $y \in Y$  y cada  $g, h \in G$ .

Definimos en  $Y$  la siguiente relación:  $y_1 \sim y_2$  si y sólo si existe  $g \in G$  tal que  $y_2 = y_1 \cdot g$ . Demostrar que  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $Y$  y describir las clases de equivalencia. Denotamos por  $Y/G$  al conjunto cociente.



Diremos que la acción es *transitiva* si para cada  $y_1, y_2 \in Y$  existe  $g \in G$  tal que  $y_2 = y_1 \cdot g$ . Esto equivale a que  $Y/G$  contiene una única clase de equivalencia.

Dado  $y \in Y$ , se define  $G_y = \{g \in G / y \cdot g = y\}$ . Demostrar que  $G_y \leq G$  (el llamado *subgrupo de isotropía en y*).

Fijado  $y_0 \in Y$ , definimos la aplicación  $\Psi : G \rightarrow Y$  dada por  $\Psi(g) = y_0 \cdot g$ . Demostrar que, si la acción es transitiva, entonces  $\Psi$  induce una biyección  $\bar{\Psi} : G/G_{y_0} \rightarrow Y$ .

11. Sea  $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$  una aplicación recubridora y  $f : Y \rightarrow X$  continua, siendo  $Y$  conexo y localmente arco-conexo. ¿Existen siempre levantamientos de  $f$  si  $X$  es simplemente conexo? ¿Y si  $\tilde{X}$  es simplemente conexo?
12. Sea  $\rho_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  la aplicación recubridora dada por  $\rho_n(z) = z^n$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \neq 0$ . Demostrar que hay levantamientos de  $\rho_m$  mediante  $\rho_n$  si y sólo si  $m = nk$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . En tal caso, se cumple que  $\tilde{\rho}_m = \rho_k$ , donde  $\tilde{\rho}_m$  es el único levantamiento de  $\rho_m$  con  $\tilde{\rho}_m(1) = 1$ .
13. Sea  $X$  un espacio conexo y localmente arcoconexo con  $\Pi_1(X)$  finito. Sean  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas tales que  $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ , para cada  $x \in X$ . Demostrar que existe una función continua  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\cos(h(x)) = f(x)$  y  $\sin(h(x)) = g(x)$ , para cada  $x \in X$ . ¿Hasta qué punto es  $h$  única?
14. (El grupo fundamental de  $K$ ). Para cada  $n, m \in \mathbb{Z}$  se define  $f_{n,m} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como:

$$f_{n,m}(x, y) = (x, (-1)^n y) + (n, m).$$

Denotemos  $G = \{f_{n,m} / n, m \in \mathbb{Z}\}$ . Se pide lo siguiente:

- a) Demostrar que cada aplicación  $f_{n,m}$  es una traslación o una simetría deslizante.
  - b) Probar que  $G \leq \text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$  y que  $G$  es propiamente discontinuo.
  - c) Deducir la existencia de una aplicación recubridora  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow K$ , donde  $K$  es la botella de Klein. Concluir que  $\Pi_1(K) \cong G$ .
15. (Un espacio con grupo fundamental  $\mathbb{Z}_n$ ). Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ . Para cada  $k = 0, \dots, n-1$  definimos el número  $\theta_k = (2\pi k)/n$  y la aplicación  $f_k : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  dada por:

$$f_k(z, w) = (e^{\theta_k i} z, e^{\theta_k i} w).$$

Denotemos  $G_n = \{f_k / k = 0, \dots, n-1\}$ . Se pide lo siguiente:

- a) Demostrar que  $G_n$  es un grupo isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$ .
  - b) Probar que  $G_n \leq \text{Homeo}(\mathbb{S}^3)$  y que  $G$  es propiamente discontinuo.
  - c) Construir una aplicación recubridora  $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3/G_n$  y concluir que  $\Pi_1(\mathbb{S}^3/G_n) \cong \mathbb{Z}_n$ .
16. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:
- a) ¿Es toda equivalencia homotópica una aplicación recubridora? ¿Y recíprocamente?
  - b) ¿Es recubridora la aplicación  $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $\rho(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ ?

- c) Sea  $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$  una aplicación recubridora y  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ . ¿Es necesariamente alguno de los levantamientos de  $\alpha$  un lazo en  $\tilde{X}$ ?
- d) ¿Existe una aplicación continua  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $e^{2\pi f(z)i} = z$ , para cada  $z \in \mathbb{S}^1$ ?
- e) ¿Existen aplicaciones recubridoras  $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$  o  $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ?
- f) ¿Existen aplicaciones recubridoras  $\rho : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  o  $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ ?
- g) ¿Existe  $G \leq \text{Homeo}(T)$  propiamente discontinuo tal que  $T/G \cong \mathbb{RP}^2$ ?
- h) Demostrar que si  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación continua e inyectiva, entonces es un homeomorfismo.
- i) Sea  $X$  un espacio arco-conexo con  $\Pi_1(X)$  finito. Demostrar que toda aplicación recubridora  $\rho : X \rightarrow X$  es un homeomorfismo.
- j) Demostrar que toda aplicación continua  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^1$  con  $n \geq 2$  es nul-homótopa.
17. Determina el recubridor universal de  $\overline{D} \setminus \{0\}$  y de  $\{p \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq \|p\| \leq 2\}$ .
18. Determina todos los recubridores de  $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ .
19. Determina todos los recubridores de la cinta de Möbius infinita.
20. Determina el grupo de automorfismos para los siguientes recubridores:
- a)  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \rho(t) = e^{2\pi it}$ .
- b)  $\rho \times \text{Id}_R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times R$ .
- c)  $\pi_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, \pi_n(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ .
- d)  $\pi_n \times \pi_m : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, n, m \in \mathbb{N}$ .
- e)  $\rho \times \pi_n : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, n \in \mathbb{N}$ .
- f)  $\rho \times \rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

## TEMA 3: Superficies topológicas

Francisco J. López  
Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Granada  
fjlopez@ugr.es

El último tema del curso se dedicará a estudiar en profundidad una familia importante de espacios topológicos: las superficies topológicas. Nuestro objetivo principal será presentar el teorema de clasificación para superficies topológicas compactas. Este resultado descansa sobre algunos de los pilares fundamentales de la topología en dimensión 2, como el Teorema de Invarianza del Dominio ó el Teorema de Radó de existencia de triangulaciones sobre superficie topológicas. Además, requerirá de conceptos trascendentales para la topología algebraica como el de orientabilidad ó el de característica de Euler.

### 15. Variedades topológicas: Ejemplos

El concepto central de este tema es el de variedad topológica. Aunque nosotros nos centraremos en dimensión dos, formularemos la definición con toda generalidad.

**Definición 15.1** *Un espacio topológico  $X$  se dirá una variedad topológica de dimensión  $n \in \mathbb{N}$  si:*

- $X$  es conexo, Hausdorff y II-Axioma de numerabilidad.
- Para todo  $x \in X$  existe un abierto  $U \subset X$  conteniendo a  $x$  homeomorfo a un abierto  $O \subset \mathbb{R}^n$  o a un abierto de  $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}$ .

Si  $X$  es una variedad topológica  $n$ -dimensional, a los pares  $(U, \Phi)$  formados por un abierto  $U$  de  $X$  y un homeomorfismo  $\Phi: U \rightarrow O$  sobre un abierto euclidiano  $O \subset \mathbb{R}^n$  ó  $\mathbb{R}_+^n$ , se le llamará cartas o parametrizaciones en  $X$ .

Hay que hacer algunos comentarios y matizaciones a la anterior definición. Supongamos que  $X$  es una variedad topológica  $n$ -dimensional.

- Algunos autores no exigen *conexión* en la definición de variedad topológica. No obstante, salvo reducirnos a componentes conexas la formulación es equivalente.
- Existen espacios topológicos que satisfacen todas las propiedades explicitadas en la Definición 15.1, excepto el II-Axioma de Numerabilidad. No serán considerados variedades topológicas.
- Una carta  $(U, \Phi)$  alrededor de un punto  $x \in X$  se dirá *centrada* si  $\Phi(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ .
- La restricción de una carta a un abierto de su dominio es también una carta. Por tanto, los dominios de las cartas son una base de la topología de  $X$ .
- Todo punto  $x \in X$  admite una carta  $(U, \Phi)$  de forma que  $\Phi(U)$  es una bola  $B$  euclidiana de  $\mathbb{R}^n$  o una semibola abierta  $B \cap \mathbb{R}_+^n$  de  $\mathbb{R}_+^n$ . Salvo componer con traslaciones y homotecias, podemos asumir que  $\Phi(U)$  es la bola unidad  $B^n(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  o la semibola  $B^n(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^n$ .

- $X$  es localmente arcoconexa, localmente compacta y localmente simplemente conexa (luego semilocalmente simplemente conexa), ya que así es la topología euclidiana.
- Toda variedad topológica admite recubridor universal; Teorema 14.8.
- El grupo fundamental de una variedad topológica es numerable; Teorema 7.15.

Existen dos resultados avanzados de Topología Algebraica que nos ayudan a comprender las profundas implicaciones topológicas de la Definición 15.1. Nos referimos al Teorema de Invarianza de la Dimensión y al Teorema de Invarianza del Dominio. Los enunciaremos a título informativo, ya que su prueba general está fuera del alcance de este curso.

**Teorema 15.2 (Invarianza de la dimension)** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  y  $V \subset \mathbb{R}^m$  dos abiertos euclidianos no vacíos. Si  $U$  es homeomorfo a  $V$  entonces  $n = m$ . El mismo enunciado es válido para abiertos  $U \subset \mathbb{R}_+^n$  y  $V \subset \mathbb{R}_+^m$ .

El mensaje de este teorema es que los codominios euclidianos de las cartas en una variedad topológica han de ser todos ellos abiertos del mismo espacio euclidiano. Por tanto, en la Definición 15.1 no hay necesidad de exigir que todas las cartas vayan al mismo  $\mathbb{R}^n$ , ya que este hecho está garantizado. Redordemos que el Teorema 8.3 del Tema 2 demuestra este resultado en el caso particular  $n = 1$  o  $2$ .

**Teorema 15.3 (Invarianza del dominio)** Sean  $X$  una variedad topológica  $n$ -dimensional y  $U \subset X$  un subespacio topológico de  $X$ . Si  $U$  es homeomorfo a un abierto euclidiano  $O \subset \mathbb{R}^n$  entonces  $U$  es un abierto de  $X$ .

Como consecuencia, si  $(U, \Phi)$  es una carta en  $X$  y  $p \in U$  un punto tal que

$$\Phi: U \rightarrow \Phi(U) = O \subset \mathbb{R}_+^n \quad \text{y} \quad \Phi(p) \in \text{Bd}(\mathbb{R}_+^n) := \{x_n = 0\},$$

entonces para toda carta  $(V, \Psi)$  en  $X$  con  $p \in V$  se tiene que

$$\Psi(V) \subset \mathbb{R}_+^n \quad \text{y} \quad \Psi(p) \in \text{Bd}(\mathbb{R}_+^n).$$

Este teorema expresa que todo subconjunto de una variedad topológica  $n$ -dimensional homeomorfo a un abierto euclidiano de  $\mathbb{R}^n$  ha de ser abierto en la variedad. En particular, la nada trivial propiedad de que los subespacios euclidianos de  $\mathbb{R}^n$  homeomorfos a abiertos de  $\mathbb{R}^n$  han de ser abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . La principal y crucial consecuencia del Teorema de Invarianza del Dominio es que tiene sentido definir el borde de una variedad. Para entenderlo enunciemos el siguiente corolario.

**Corolario 15.4** Sea  $X$  una variedad topológica  $n$ -dimensional y  $p \in X$ . Admitamos que existe una carta  $(U, \Phi)$  en  $X$  de forma que

$$\Phi: U \rightarrow \Phi(U) = O \subset \mathbb{R}_+^n \quad \text{y} \quad \Phi(p) \in \text{Bd}(\mathbb{R}_+^n).$$

Entonces para cualquiera carta  $(V, \psi)$  de  $x$  en  $X$  se tiene  $\psi(V) = O \subset \mathbb{R}_+^n$  y  $\psi(p) \in \text{Bd}(\mathbb{R}_+^n)$ . En ese caso  $p$  se dirá un punto borde de  $X$ .

**Observación 15.5** Para dimensión  $n = 2$ , el Corolario 15.4 es también consecuencia del Corolario 9.7.

**Definición 15.6** Si  $X$  es una variedad topológica  $n$ -dimensional, denotaremos por  $\text{Bd}(X) \subset X$  al subconjunto cerrado formado por los puntos borde de  $X$ . También diremos que  $\text{Int}(X) := X \setminus \text{Bd}(X)$  es el conjunto de los puntos interiores de  $X$ .

La siguiente proposición es muy útil.

**Proposición 15.7** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un homeomorfismo local sobreyectivo. Entonces

$X$  es variedad topológica  $n$ -dimensional  $\iff Y$  es variedad topológica  $n$ -dimensional.

En particular, la tesis es válida si  $f: X \rightarrow Y$  es un recubridor.

DEMOSTRACIÓN: Sean  $y \in Y$  y  $x \in f^{-1}(y)$ . Siempre podemos encontrar entornos abiertos  $U$  de  $x$  y  $V$  de  $y$  de forma que  $f|_U: U \rightarrow V$  es un homeomorfismo. Teniendo en cuenta que los dominios de las cartas en una variedad son una base de la topología, no implica pérdida de generalidad suponer que  $U$  ó  $V$  es homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$  ó  $\mathbb{R}_+^n$ , dependiendo de que sea  $X$  una variedad topológica ó lo sea  $Y$ . Por tanto ambos abiertos son homeomorfos a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , lo que concluye la prueba. ■

**Ejercicio 15.8** Las siguientes espacios son variedades topológicas:

- Un abierto de una variedad topológica  $n$ -dimensional es una variedad topológica  $n$ -dimensional: basta restringir cartas a la intersección con el abierto.
- $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es una variedad topológica  $n$ -dimensional recubierta por una sola carta: la aplicación  $\text{Id}_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- $\mathbb{R}_+^n$  es una variedad topológica  $n$ -dimensional con borde  $\{x_n = 0\}$  recubierta por una sola carta: la aplicación  $\text{Id}_{\mathbb{R}_+^n}$ .
- El disco unidad cerrado  $\overline{D} := \{p \in \mathbb{R}^2: \|p\| \leq 1\}$  es una variedad topológica 2-dimensional con borde  $\mathbb{S}^1$ .
- $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  es una variedad topológica 2-dimensional con borde  $\mathbb{S}^1 \times \{0, 1\}$ .
- $\mathbb{S}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es una variedad topológica  $n$ -dimensional recubierta por dos cartas: las proyecciones estereográficas desde el polo Norte y el polo Sur.
- $\mathbb{RP}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es una variedad topológica  $n$ -dimensional. Téngase en cuenta que  $\mathbb{S}^n$  recubre a  $\mathbb{RP}^n$ .
- El producto  $X \times Y$  de variedades topológicas  $X$  e  $Y$  de dimensiones  $n$  y  $m$ , respectivamente, es una variedad topológica de dimensión  $n+m$  con borde  $(\text{Bd}(X) \times Y) \cup (X \times \text{Bd}(Y))$ : el producto de cartas de los factores es una carta en la variedad producto.
- Todas las superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$  son variedades topológicas 2-dimensionales.

El estudio de las variedades topológicas es uno de los ejes centrales de la Topología y la Geometría. Los resultados más ambiciosos en este contexto son los de clasificación, en general de bastante sofisticación. Sólo en dimensiones uno y dos las respuestas obtenidas están a nuestro alcance. En este curso nos centraremos en el caso 2-dimensional bajo la hipótesis de compacidad.

La clasificación de las variedades topológicas 1-dimensionales no requiere de gran aparato matemático. Por falta de tiempo omitiremos los detalles de la misma y simplemente enunciaremos el siguiente:

**Teorema 15.9** Salvo homeomorfismos, las únicas variedades topológicas 1-dimensionales son  $\mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$  y  $[0, 1]$ .

## 16. Superficies topológicas

Los objetos que van a centrar nuestro estudio se presentan en la siguiente definición.

**Definición 16.1** *Una superficie topológica es una variedad topológica 2-dimensional.*

Ejemplos de superficies topológicas son  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$ , el Toro, el cilindro, la botella de Klein, la cinta de Móbius, todas las superficies regulares en  $\mathbb{R}^3, \dots$

**Observación 16.2** *Dada una superficie topológica  $S$ :*

- $\text{Bd}(S)$  es cerrado en  $S$ , y en consecuencia el  $\text{Int}(S)$  es abierto en  $S$ .
- Cada componente conexa de  $\text{Bd}(S)$  es una variedad topológica 1-dimensional sin borde, luego homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$  o  $\mathbb{R}$ .
- Si  $S$  es compacta entonces  $\text{Bd}(S)$  es compacto y consiste en una colección finita de curvas de Jordan en  $S$  disjuntas dos a dos.
- Los homeomorfismos respetan el borde de las superficies. En particular, si dos superficies son homeomorfas sus bordes son homeomorfos por restricción del homeomorfismo global.

La compacidad es una propiedad topológica que hace mucho más manejable la familia de las superficies. Nuestra intención es presentar una familia lo más vasta posible de ejemplos de superficies topológicas *compactas*. La siguiente proposición es una herramienta bastante útil para este objetivo. Vamos a trabajar con esquemas binarios sobre un conjunto de índices  $\mathcal{U}$  infinito numerable. Es conveniente tener presentes las construcciones de la Sección 3.4.

**Proposición 16.3** *La realización canónica  $S_\omega$  de un esquema binario  $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$  es una superficie topológica compacta con  $\text{Bd}(S_\omega) = \sigma_\omega(\Upsilon)$ , donde  $\sigma_\omega: \overline{D} \rightarrow S_\omega$  es la identificación asociada a la representación canónica de  $\omega$  (ver Definición 3.23) y  $\Upsilon \subset \mathbb{S}^1$  es el cierre topológico de  $\{p \in \mathbb{S}^1: \sharp \sigma_\omega^{-1}(\sigma_\omega(p)) = 1\}$ . En particular,*

$$\text{Bd}(S_\omega) \neq \emptyset \iff \omega \text{ es un esquema binario mixto.}$$

**DEMOSTRACIÓN:** De la Proposición 3.24 se sigue que  $S_\omega$  es Hausdorff y II-Axioma de Numerabilidad. Resta comprobar que  $S_\omega$  es localmente euclidiano.

Sea  $p \in S_\omega$ , y llamemos  $U_p(\epsilon)$  al bierto  $\sigma_\omega$ -saturado de  $\overline{D}$  dado por

$$\{x \in \overline{D}: \text{dist}(x, \sigma_\omega^{-1}(p)) < \epsilon\}.$$

Llamemos  $C_p(\epsilon) := \{x \in \overline{D}: \text{dist}(x, \sigma_\omega^{-1}(p)) = \epsilon\}$  y  $\Upsilon_p(\epsilon) := \Upsilon \cap U_p(\epsilon)$ .

La simetría de la representación canónica y el hecho de que  $\omega$  sea binario implican, para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, que:

- (a) Si  $p \in \sigma_\omega(D)$  entonces  $U_p(\epsilon)$  es un disco abierto y  $\sigma_\omega|_{U_p(\epsilon)}: U_p(\epsilon) \rightarrow \sigma_\omega(U_p(\epsilon))$  es un homeomorfismo.
- (b) Si  $p \in \sigma_\omega(\mathbb{S}^1 \setminus \Upsilon)$  entonces  $\overline{U_p(\epsilon)} = \cup_{j=1}^k X_j$ ,  $k > 1$ , donde  $X_1, \dots, X_k$  son discos topológicos compactos disjuntos dos a dos en  $\overline{D}$  con:

$$\bullet \cup_{j=1}^k \text{Bd}(X_j) = C_p(\epsilon) \cup (U_p(\epsilon) \cap \mathbb{S}^1) \quad \text{y} \quad \left( \cup_{j=1}^k X_j \right) \cap \Upsilon = \emptyset.$$

- $\sigma_\omega|_{X_j}: X_j \rightarrow \sigma_\omega(X_j)$  es un homeomorfismo,  $j = 1, \dots, k$ .
- Salvo reordenación,

$$\gamma_j := \sigma_\omega(X_{j+1}) \cap \left( \bigcup_{i=1}^j \sigma_\omega(X_i) \right) = \text{Bd}(\sigma_\omega(X_{j+1})) \cap \text{Bd}\left(\bigcup_{i=1}^j \sigma_\omega(X_i)\right)$$

es un arco de Jordan que contiene a  $p$  para todo  $j = 1, \dots, k-1$ , siendo además  $p$  interior a  $\gamma_{k-1}$ .

Por tanto, la identificación  $\sigma_\omega|_{\overline{U_p(\epsilon)}}: \overline{U_p(\epsilon)} \rightarrow \sigma_\omega(\overline{U_p(\epsilon)})$  realiza el pegado cíclico de los  $k$  discos  $X_1, \dots, X_k$  por los  $2k-2$  arcos de Jordan borde  $\bigcup_{j=1}^{k-1} \sigma_\omega^{-1}(\gamma_j)$ . De la Proposición 3.11 se infiere que:  $\sigma_\omega(U_p(\epsilon))$  es un disco topológico abierto.

(c) Si  $p \in \sigma_\omega(\Upsilon)$  entonces  $\overline{U_p(\epsilon)} = \bigcup_{j=1}^k X_j$ , donde  $X_1, \dots, X_k$  son discos topológicos compactos disjuntos dos a dos en  $\overline{D}$  con:

- $\bigcup_{j=1}^k \text{Bd}(X_j) = C_p(\epsilon) \cup (U_p(\epsilon) \cap \mathbb{S}^1)$  y  $(\bigcup_{j=1}^k X_j) \cap \Upsilon = \overline{\Upsilon_p(\epsilon)}$ .
- $\sigma_\omega|_{X_j}: X_j \rightarrow \sigma_\omega(X_j)$  es un homeomorfismo,  $j = 1, \dots, k$ .
- Salvo reordenación:
  - $X_j \cap \Upsilon = \{p\}$ ,  $j \neq 1, k$ .
  - $\gamma := X_1 \cap \Upsilon = \text{Bd}(X_1) \cap \Upsilon$  y  $\gamma' := X_k \cap \Upsilon = \text{Bd}(X_k) \cap \Upsilon$  son arcos de Jordan que se cortan en  $p$  como extremo común, siendo  $\overline{\Upsilon_p(\epsilon)} = \gamma \cup \gamma'$ .
  - $\gamma_j := \sigma_\omega(X_{j+1}) \cap (\bigcup_{i=1}^j \sigma_\omega(X_i)) = \text{Bd}(\sigma_\omega(X_{j+1})) \cap \text{Bd}(\bigcup_{i=1}^j \sigma_\omega(X_i))$  es un arco de Jordan que tiene a  $p$  como extremo y único punto en común con  $\gamma \cup \gamma'$ , para todo  $j = 1, \dots, k-1$ .

En este caso la identificación  $\sigma_\omega|_{\overline{U_p(\epsilon)}}: \overline{U_p(\epsilon)} \rightarrow \sigma_\omega(\overline{U_p(\epsilon)})$  realiza el pegado de los  $k$  discos  $X_1, \dots, X_k$  por los arcos de Jordan borde  $\bigcup_{j=1}^{k-1} \sigma_\omega^{-1}(\gamma_j)$  y existe un homeomorfismo  $\sigma_\omega(U_p(\epsilon)) \rightarrow D \cap \mathbb{R}_+^2$  que aplica  $\sigma_\omega(\Upsilon_p(\epsilon))$  en  $] -1, 1[ \times \{0\}$ .

Esto prueba que  $S_\omega$  es localmente euclidiano, y por tanto, una superficie topológica. Sólo cuando  $\Upsilon \neq \emptyset$ , esto es, sólo cuando  $\omega$  sea mixto, puede darse la opción (c) y la superficie  $S_\omega$  tiene por borde  $\sigma_\omega(\Upsilon)$ . Esto concluye la proposición. ■

Como consecuencia del Corolarios 9.11 y 9.14 (ver las Definiciones 9.10 y 9.12), la Proposición 16.3, y el hecho de que el número de componentes conexas del borde de una superficie es un invariante topológico, tenemos el siguiente:

**Corolario 16.4** *Las superficies compactas en la siguiente lista son dos a dos no homeomorfas:*

$$\{S_n: n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{S_n^*: n \in \mathbb{N}\} \cup \{S_{n,k}: (n, k) \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \mathbb{N}\} \cup \{S_{n,k}^*: (n, k) \in \mathbb{N}^2\}$$

## 16.1. Triangulaciones de superficies

Una vez conocida una familia amplia de ejemplos, es natural preguntarse por resultados de clasificación de superficies topológicas compactas. La respuesta a este problema no es sencilla y requiere de cierta preparación y lenguaje.

**Definición 16.5** *Un triángulo topológico es un par formado por un disco topológico compacto  $T$  y tres puntos distintos  $\{v_1, v_2, v_3\}$  destacados en la curva de Jordan  $\text{Bd}(T)$ .*

*Si  $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$  es un triángulo topológico:*

- Los puntos  $v_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  se llamarán vértices de  $T$ .
- Si  $\{i, j, h\} = \{1, 2, 3\}$  y  $h \in \{1, 2, 3\}$ , el arco de Jordan  $l_h$  en  $\text{Bd}(T)$  uniendo los vértices  $v_i$ ,  $v_j$  y no incidente con  $v_h$  será referido como el lado de  $T$  determinado por  $v_i$  y  $v_j$ . Obviamente  $T$  tiene tres lados  $\{l_1, l_2, l_3\}$ .

Si no hay ambigüedad en la determinación de los vértices,  $T$  indicará indistintamente tanto al triángulo  $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$  como al disco topológico compacto subyacente.

Si  $T$  es un triángulo y  $l \subset T$  ( $v \in T$ ), la expresión  $l \leq T$  ( $v \leq T$ ) indicará que  $l$  es un lado de  $T$  ( $v$  es un vértice de  $T$ ). Análogamente, si  $l$  es un lado de  $T$  y  $v \in l$ , la expresión  $v \leq l$  indicará que  $v$  es un vértice de  $T$  en  $l$ .

Denotaremos por

- $F(T) := \{X\}$  al conjunto formado por la única cara de  $T$ ,
- $E(T) = \{l_1, l_2, l_3\}$  al conjunto formado por los lados de  $T$ , y
- $V(T) = \{v_1, v_2, v_3\}$  al conjunto formado por los vértices de  $T$ .

**Definición 16.6 (Orientacion en un triángulo topológico)** Dado un triángulo topológico  $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$ , una orientación de  $T$  es una ordenación cíclica de sus vértices. Hay dos orientaciones posibles, a saber:

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1, \quad \text{que se representará por } (v_1, v_2, v_3) \equiv (v_2, v_3, v_1) \equiv (v_3, v_1, v_2)$$

y

$$v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2, \quad \text{que se representará por } (v_2, v_1, v_3) \equiv (v_1, v_3, v_2) \equiv (v_3, v_2, v_1).$$

Un triángulo orientado es el par formado por un triángulo  $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$  junto con una orientación  $(v_i, v_j, v_h)$  del mismo, y se denotará  $(T, (v_i, v_j, v_h))$ .

También podemos orientar los lados de  $T$  fijando una ordenación de sus vértices o extremos, este concepto ya se introdujo en la Definición 3.3.

Una orientación  $(v_i, v_j, v_h)$  de  $T$  induce de forma natural orientaciones en los lados de  $T$  de acuerdo con el siguiente criterio:

$$(v_j, v_h) \text{ en } l_i, \quad (v_h, v_i) \text{ en } l_j, \quad (v_i, v_j) \text{ en } l_h.$$

Estas orientaciones explicitadas de los lados de  $T$  se dirán compatibles con la orientación global  $(v_i, v_j, v_h)$  de  $T$  y viceversa.

Dos triángulos orientados intersecándose en un lado común  $l$  se dirán compatiblemente orientados si inducen orientaciones opuestas sobre  $l$ .

Existe una alternativa topológica, que en algún momento nos dará ventaja, a la definición combinatoria de orientación para un triángulo.

En efecto, consideremos un disco topológico compacto arbitrario  $X$  y fijemos un punto  $p_0 \in \text{Bd}(X)$ , que para lo que sigue jugará un papel meramente auxiliar. Para cada  $p \in \text{Int}(X)$ , el grupo fundamental  $\Pi_1(X \setminus \{p\}) \equiv \Pi_1(X \setminus \{p\}, p_0)$  es cíclico infinito y por tanto tiene dos generadores, que con notación aditiva denotaremos  $a_p$  y  $-a_p$ :

$$\Pi_1(X \setminus \{p\}) = \mathbb{Z}(a_p) = \mathbb{Z}(-a_p).$$

Podemos elegir como representante de la clase de homotopía  $a_p$  un lazo  $\alpha_p: [0, 1] \rightarrow X$  basado en  $p_0$  tal que:



- $\alpha_p([0, 1]) = \text{Bd}(X)$ .
- $\alpha_p|_{[0, 1]}$  es inyectiva.

Si el subíndice indica el espacio donde se toma la clase de homotopía, con este lenguaje  $a_p = [\alpha_p]_{X \setminus \{p\}}$  y  $[\bar{\alpha}_p]_{X \setminus \{p\}} = -a_p$ . Si tomamos otro punto  $q \in \text{Int}(X)$ , es claro que  $\alpha_q = \alpha_p$  ya que  $[\alpha_p]_{X \setminus \{q\}}$  genera igualmente  $\Pi_1(X \setminus \{q\}) \equiv \Pi_1(X \setminus \{q\}, p_0)$ . En otras palabras, existe un lazo (con base  $p_0$ )

$$\alpha_X: [0, 1] \rightarrow \text{Bd}(X) \subset X$$

tal que  $[\alpha_X]_{X \setminus \{q\}}$  genera  $\Pi_1(X \setminus \{q\})$  para todo  $q \in \text{Int}(X)$ , y lo mismo ocurre con  $\bar{\alpha}_X$ .

**Definición 16.7** *Por definición,*

$$[\alpha_X] := \{[\alpha_X]_{X \setminus \{q\}} : q \in \text{Int}(X)\} \quad \text{y} \quad -[\alpha_X] := \{-[\alpha_X]_{X \setminus \{q\}} : q \in \text{Int}(X)\}$$

*se dirán los generadores universales de la familia de grupos fundamentales*

$$\Pi_1(X^*) := \{\Pi_1(X \setminus \{q\}) : q \in \text{Int}(X)\}.$$

Supongamos ahora que  $X$  es un triángulo topológico  $T$  y elijamos un generador universal  $[\alpha]$  de  $\Pi_1(T^*)$ . Si  $V(T) = \{\alpha(t_j) : j = 1, 2, 3\}$  con  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < 1$ , convenimos que  $[\alpha]$  determina la orientación  $(\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3))$ . Recíprocamente, una orientación de  $T$  determina unívocamente un sentido de recorrido de  $\text{Bd}(T)$  de acuerdo a ese criterio, y por tanto un generador universal de la familia  $\Pi_1(T^*)$ .

**Definición 16.8** *Dado un triángulo topológico  $T$ , una orientación en  $T$  es un generador universal  $[\alpha]$  de  $\Pi_1(T^*)$ .*

Redundando con estas ideas, es evidente que una orientación de un subarco de Jordan  $\gamma$  dentro de un arco de Jordan  $\gamma'$  induce de forma canónica una orientación en  $\gamma'$  compatible. Basta observar que  $\gamma'$  es homeomorfo a  $[0, 1]$  y entender esta idea sobre el intervalo  $[0, 1]$ , donde la orientación (ordenación de extremos) se interpreta como un sentido de recorrido del intervalo vía una parametrización. Por tanto, para orientar un lado  $l$  de un triángulo topológico  $T$  basta con orientar cualquier subarco de Jordan  $\gamma$  de  $l$ . La única orientación en  $T$  compatible con esta orientación inducida en  $l$  se dirá la inducida por el subarco orientado  $\gamma$  en  $T$ , y recíprocamente una orientación en  $T$  induce otra en cualquier subarco de Jordan de sus lados por ese criterio.

**Definición 16.9** *Un triángulo geométrico en  $\mathbb{R}^2$  es la envolvente convexa de tres puntos afínmente independientes. Si  $v_1, v_2, v_3$  son los vértices de un triángulo geométrico  $T$  en  $\mathbb{R}^2$ , la orientación  $(v_1, v_2, v_3)$  se dirá positiva o contraria al sentido de recorrido de las agujas del reloj si*

$$\det(v_2 - v_1, v_3 - v_1) > 0.$$

*En otro caso se dirá negativa o a favor de las agujas del reloj.*

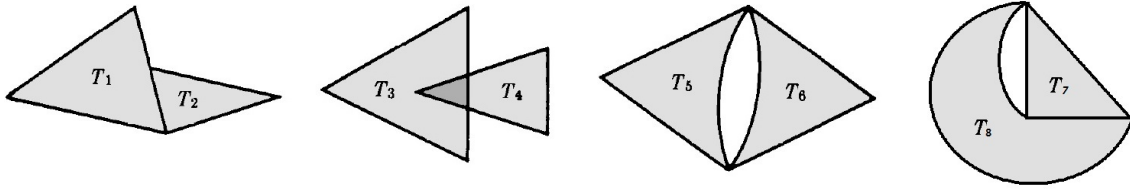
Si  $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^2$  son dos triángulos geométricos orientados positivamente e incidentes en un lado  $l$ , el álgebra lineal nos dice que  $T_1$  y  $T_2$  inducen orientaciones opuestas en  $l$ , y por tanto, que  $T_1$  y  $T_2$  están compatiblemente orientados.

**Definición 16.10** *Dada una superficie topológica compacta  $S$ , una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$  es una familia finita de triángulos topológicos satisfaciendo:*

- (I)  $T$  es un subespacio topológico de  $S$  para todo  $T \in \mathcal{T}$ .
- (II) Si  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  son triángulos distintos, entonces  $T_1 \cap T_2$  es el vacío, un vértice común o un lado común.
- (III)  $\cup_{T \in \mathcal{T}} T = S$ .

Dos triángulos distintos de una triangulación de  $S$  que compartan sólo un vértice se dirán incidentes en ese vértice. De igual forma, si comparten un lado se dirán contiguos o incidentes en ese lado.

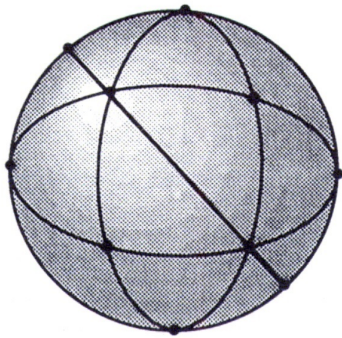
Un par  $(S, \mathcal{T})$  formado por una superficie compacta  $S$  y una triangulación suya  $\mathcal{T}$  se le referirá como una superficie (compacta) triangulada.



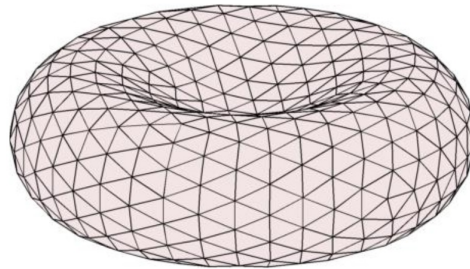
Algunas situaciones no permitidas en una triangulación

Si  $(S, \mathcal{T})$  es una superficie compacta triangulada, llamaremos:

- $F(\mathcal{T}) := \cup_{T \in \mathcal{T}} F(T)$  al conjunto de todas las caras de  $\mathcal{T}$ ,
- $E(\mathcal{T}) := \cup_{T \in \mathcal{T}} E(T)$  al conjunto de todos los lados de  $\mathcal{T}$ , y
- $V(\mathcal{T}) := \cup_{T \in \mathcal{T}} V(T)$  al conjunto de todos los vértices de  $\mathcal{T}$ .



Triangulación de la Esfera



Triangulación del Toro

Las triangulaciones se comportan bien respecto a los homeomorfismos, en el sentido de que si  $H: S_1 \rightarrow S_2$  es un homeomorfismo entre superficies topológicas compactas y  $\mathcal{T}$  es una triangulación de  $S_1$ , entonces

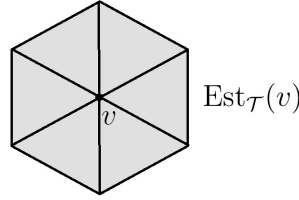
$$H(\mathcal{T}) := \{H(T) : T \in \mathcal{T}\}$$

es una triangulación de  $S_2$ . Ha de entenderse que los vértices de  $H(T)$  son las imágenes por  $H$  de los vértices de  $T$  para todo  $T \in \mathcal{T}$ , esto es, que  $H$  aplica unívocamente los lados y vértices de  $\mathcal{T}$  en los lados y vértices de  $H(\mathcal{T})$ .

El enunciado de la siguiente proposición es muy natural, aunque su prueba no es en absoluto trivial.

**Proposición 16.11** Si  $(S, \mathcal{T})$  es una superficie compacta triangulada entonces:

- (a)  $T \setminus \text{Bd}(T)$  es un abierto de  $S$  para todo  $T \in \mathcal{T}$ .
- (b) Para todo  $l \in E(\mathcal{T})$ , existen a lo más dos triángulos de  $\mathcal{T}$  incidentes con  $l$ . Si sólo hay uno entonces  $l \subset \text{Bd}(S)$ , y si hay dos entonces  $\text{Int}(l) \subset \text{Int}(S)$ .
- (c) Si  $v \in V(\mathcal{T})$ , la estrella de  $v$ , definida como el conjunto  $\text{Est}(v) := \cup_{v \leq T \in \mathcal{T}} T$ , es un disco topológico compacto (cuando sea necesario enfatizar la triangulación escribiremos  $\text{Est}_{\mathcal{T}}(v)$ ). Además, si  $l_v(T)$  denota al único lado de  $T$  no incidente con  $v$  para cada  $T \in \mathcal{T}$  contenido en  $\text{Est}(v)$ , entonces:
  - $\text{Est}^*(v) := \cup_{j=1}^k (T_j \setminus l_v(T_j))$  es un abierto en  $S$  conteniendo a  $v$ .
  - $v \in \text{Int}(S)$  si y sólo si todo lado  $l \in E(\mathcal{T})$  con  $v \leq l$  es incidente con dos triángulos distintos de  $\text{Est}(v)$ .



DEMOSTRACIÓN: Como  $T \setminus \text{Bd}(T)$  es homeomorfo al disco abierto  $D$ , ítem (a) es consecuencia inmediata del Teorema de Invarianza del Dominio; ver Teorema 15.3.

Para probar (b), tomemos  $l \in E(\mathcal{T})$  y consideremos la familia  $\{T_1, \dots, T_k\}$  de todos los triángulos de  $\mathcal{T}$  incidentes con  $l$ . Hemos de comprobar que  $k \leq 2$ .

Primero observemos que

$$A := \text{Int}(l) \cup \left( \cup_{j=1}^k (T_j \setminus \text{Bd}(T_j)) \right)$$

es un abierto en  $S$ . En efecto, como por (a) el conjunto  $\cup_{j=1}^k (T_j \setminus \text{Bd}(T_j))$  es abierto en  $S$ , basta comprobar que cada punto de  $\text{Int}(l)$  es interior a  $A$  en  $S$ . De no ser así, como  $S$  es II-Axioma de Numerabilidad podríamos encontrar una sucesión de puntos  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S \setminus A$  convergiendo a un punto de  $p_0 \in \text{Int}(l)$ . Teniendo en cuenta que  $S \setminus A = \bigcup_{T \notin \{T_1, \dots, T_k\}} T$  es compacto, luego cerrado en  $S$  por ser ésta Hausdorff, inferiríamos que  $x_0 \in S \setminus A$ . Esto implicaría que  $p_0 \in T$  para algún  $T \notin \{T_1, \dots, T_k\}$ , y como  $T_1, \dots, T_k$  son todos los triángulos de  $\mathcal{T}$  conteniendo a  $l$ , que  $p_0 \notin \text{Int}(l)$ , una contradicción.

Por otra parte, si consideramos el triángulo  $\Delta_1$  con vértices  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, -1)$ ,  $(0, 1, 0)$  en  $\mathbb{R}^3$  y sus girados respecto del eje  $x_3$

$$\Delta_j := \{(e^{2\pi(j-1)/k} z, x_3) : (z, x_3) \in \Delta \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3\}, \quad j = 1, \dots, k,$$

es fácil ver que  $\bar{A} = \cup_{j=1}^k T_j \cong \Delta := \cup_{j=1}^k \Delta_j$ ; basta construir homeomorfismos  $T_j \rightarrow \Delta_j$  vía el Corolario 3.6,  $j = 1, \dots, k$ , que coincidan sobre  $l$ , y fusionarlos topológicamente de forma natural para construir un homeomorfismo global entre  $\bar{A}$  y  $\Delta$ .

Concluimos que  $A \cong \Delta_0 := \text{Int}(l_0) \cup \left( \cup_{j=1}^k (|\Delta_j| \setminus \text{Bd}(|\Delta_j|)) \right)$ , donde  $l_0 := \{(0, 0)\} \times [-1, 1]$ . Como  $A$  es un abierto de una superficie topológica,  $\Delta_0$  dotado de la topología euclidiana ha de ser una superficie topológica. El Corolario 9.7 implica que  $k \leq 2$ ,  $l \subset \text{Bd}(S)$  si  $k = 1$  e  $\text{Int}(l) \subset \text{Int}(S)$  si  $k = 2$ . Esto prueba (b).

Para acabar demostremos (c). Consideremos  $v \in V(\mathcal{T})$  y elijamos un triángulo  $T_1 \in E(\mathcal{T})$  incidente con  $v$ . Inductivamente elijamos  $T_j \in \mathcal{T}$  de  $\text{Est}(v)$  y  $l_{j-1} \in E(T_j)$  tal que  $v \leq l_{j-1}$  y  $l_{j-1} \in (\cup_{i=1}^{j-1} E(T_i)) \setminus \{l_1, \dots, l_{j-1}\}$ . Tras un proceso necesariamente finito generamos una secuencia maximal de triángulos  $T_1, \dots, T_{k_1}$  y lados  $l_1, \dots, l_{k_1-1}$  satisfaciendo

(I)  $T_j$  está en  $\text{Est}(v)$  para todo  $j$ .

(II)  $v \leq l_j \in E(\mathcal{T})$  y  $l_j \subset T_{j+1} \cap (\cup_{i=1}^j T_i)$ ,  $j = 1, \dots, k_1 - 1$ .

Por la Proposición 3.11,  $C_1 := \cup_{j=1}^{k_1} T_j$  es un disco topológico compacto. Si cada  $l \in \cup_{j=1}^{k_1} E(T_j)$  tal que  $v \leq l$  es incidente con exactamente dos triángulos de la lista  $\{T_1, \dots, T_{k_1}\}$ , entonces  $v \in C_1^* := C_1 \setminus \text{Bd}(C_1)$ . En caso contrario existirán dos triángulos en  $\{T_1, \dots, T_{k_1}\}$ , que salvo reindexación podemos suponer son  $T_1$  y  $T_{k_1}$ , de forma que los lados  $v \leq l_0 \leq T_1$  y  $v \leq l_{k_1} \leq T_{k_1}$  distintos de  $l_1$  y  $l_{k_1-1}$ , respectivamente, no son incidentes a ningún otro triángulo de la lista, y por tanto están contenidos en  $\text{Bd}(S)$  por el item (b). En este caso definiremos

$$C_1^* := (C_1 \setminus \text{Bd}(C_1)) \cup (\text{Int}(l_0) \cup \text{Int}(l_{k_1})) \cup \{v\}.$$

Si hubiese un triángulo  $T_1^2 \in \mathcal{T} \setminus \{T_1, \dots, T_{k_1}\}$  incidente con  $v$ , repetiríamos formalmente el argumento anterior. Teniendo en cuenta (b), podríamos generar una nueva secuencia maximal de triángulos  $T_1^2, \dots, T_{k_2}^2 \in \mathcal{T} \setminus \{T_1, \dots, T_{k_1}\}$  satisfaciendo (i) y (ii), de forma que  $C_2 := \cup_{j=1}^{k_2} T_j^2$  es un disco topológico compacto, y definir  $C_2^*$  como antes. Este proceso se repite cuantas veces sea necesario hasta agotar todos los triángulos incidentes con  $v$  y completar  $\text{Est}(v)$ . La descripción final sería  $\text{Est}(v) = \cup_{j=1}^r C_j^*$ , donde cada  $C_j$  es un disco topológico compacto unión de triángulos de  $\mathcal{T}$  incidentes con  $v$  con  $C_j \cap C_i = \{v\}$ ,  $i \neq j$ . Razonando como en la prueba del item (b),  $E_0 := \cup_{j=1}^r C_j^*$  es un abierto de  $S$  conteniendo a  $v$  como punto interior. Omitimos los detalles. Si  $r > 1$  llegaríamos a contradicción ya que  $E_0$  es una superficie topológica que se desconecta localmente al eliminar un punto, a saber  $v$ , algo imposible al ser localmente euclidiana.

Por tanto  $r = 1$ ,  $\text{Est}(v) = C_1$  es un disco topológico y  $C_1^*$  es un abierto en  $S$  conteniendo a  $v$ . Además, si cada  $l \in \cup_{j=1}^{k_1} E(T_j)$  con  $v \leq l$  es incidente con exactamente dos triángulos de la lista  $\{T_1, \dots, T_{k_1}\}$ , entonces  $v \in \text{Int}(S)$  ya que  $v \in C_1^* = C_1 \setminus \text{Bd}(C_1)$  es un disco abierto. En caso contrario, y con la notación de arriba,  $(\text{Int}(l_0) \cup \text{Int}(l_{k_1})) \cup \{v\} \subset \text{Bd}(S)$  por el item (b). Esto prueba (c) y la proposición. ■

**Definición 16.12** Dadas dos triangulaciones  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  de una superficie compacta  $S$ , se dirá que  $\mathcal{T}'$  es una subdivisión de  $\mathcal{T}$ , y se escribirá  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ , si para todo  $T' \in \mathcal{T}'$  existe  $T \in \mathcal{T}$  tal que  $T' \subset T$ .

La siguiente proposición muestra que no es difícil construir subdivisiones de una triangulación.

**Proposición 16.13** Sea  $(S, \mathcal{T})$  una superficie compacta triangulada, sea  $\mathcal{V}$  un recubrimiento por abiertos de  $S$  y sea  $A \subset S$  un conjunto finito de puntos.

Entonces existe  $\mathcal{T}_0 \prec \mathcal{T}$  tal que

- $A \subset V(\mathcal{T}_0)$  y
- para todo  $v \in V(\mathcal{T}_0)$  existe  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $\text{Est}_{\mathcal{T}_0}(v) \subset V$ ,

donde  $\text{Est}_{\mathcal{T}_0}(\cdot)$  expresa estrella según  $\mathcal{T}_0$ .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos  $T \in \mathcal{T}$ , y reparemos en que como  $T \cong \overline{D}$ , podemos encontrar un homeomorfismo  $F_T: T \rightarrow \Delta := \{(x, y) \in [0, 1]^2: x + y \leq 1\}$  que aplique los vértices de  $T$  en los vértices del triángulo geométrico  $\Delta$ ; téngase en cuenta el Corolario 3.6 y la Proposición 3.10.

Nuestro primer objetivo es construir una triangulación  $\mathcal{T}_1$  de  $S$  tal que

- $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}$ ,
- para todo  $v \in V(\mathcal{T}_1)$  existe  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $\text{Est}_{\mathcal{T}_1}(v) \subset V$  y
- $\sharp(A \setminus V(\mathcal{T}_1)) \leq \sharp A - 1$ .

La construcción se hará en dos etapas.

En la primera consiste en subdividir cada  $T \in \mathcal{T}$ . Para ello realizamos una triangulación  $\Delta_T$  de  $\Delta$  por triángulos geométricos planos de forma que cada vértice  $v \in V(\Delta_T)$  tenga su estrella  $\text{Est}_{\Delta_T}(v)$  según  $\Delta_T$  contenida en  $F_T(V \cap T)$  para algún  $V \in \mathcal{V}$ . Esto se puede hacer por razonamientos geométricos elementales como las subdivisiones baricéntricas sucesivas, hasta lograr que los triángulos de  $\Delta_T$  tengan diámetro menor que  $\epsilon/2$  con  $\epsilon$  el número de Lebesgue del recubrimiento abierto  $\{F_T(V \cap T): V \in \mathcal{V}\}$  de  $\Delta$ . La subdivisión buscada de  $T$  no es sino  $F_T^{-1}(\Delta_T)$ .

A continuación llamemos  $\mathcal{T}'$  a la colección de triángulos topológicos  $\cup_{T \in \mathcal{T}} F_T^{-1}(\Theta_T)$  en  $S$ , que no es necesariamente una triangulación de  $S$ .

En la segunda etapa, para cada triángulo  $T \in \mathcal{T}'$  elijamos un punto  $v_T \in \text{Int}(T) \cap A$  ó cualquier  $v_T \in \text{Int}(T)$  si  $\text{Int}(T) \cap A = \emptyset$ . Como antes, consideremos un homeomorfismo  $F_T: T \rightarrow \Delta$  respetando vértices, y tracemos segmentos dentro de  $\Delta$  que unan  $F_T(v_T)$  con los puntos en  $V(\Delta) \cup F_T((A \cup V(\mathcal{T}')) \cap \text{Bd}(T))$ . Esta configuración determina una triangulación  $\Delta_T$  de  $\Delta$  con vértices  $V(\Delta) \cup F_T((A \cup V(\mathcal{T}')) \cap \text{Bd}(T)) \cup \{F_T(v_T)\}$ . Definamos  $\mathcal{T}_1 := \bigcup_{T \in \mathcal{T}'} F_T^{-1}(\Delta_T)$ , que es una triangulación de  $S$  de acuerdo a la Definición 16.10. Claramente  $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}$ , todo triángulo de  $\mathcal{T}_1$  está contenido en un abierto de  $\mathcal{V}$  y  $\sharp(A \setminus V(\mathcal{T}_1)) \leq \sharp A - 1$ .

Si  $A \setminus V(\mathcal{T}_1) \neq \emptyset$  reiteramos el procedimiento para construir una subdivisión  $\mathcal{T}_2 \prec \mathcal{T}_1$  tal que todo triángulo de  $\mathcal{T}_2$  está contenido en un abierto de  $\mathcal{V}$  y  $\sharp(A \setminus V(\mathcal{T}_2)) \leq \sharp A - 2$ . Tras un número finito de pasos llegaríamos a una subdivisión  $\mathcal{T}_0 \prec \mathcal{T}$  satisfaciendo las propiedades deseadas. ■

**Definición 16.14 (Característica de Euler de una triangulación)** Sea  $\mathcal{T}$  una triangulación de una superficie topológica  $S$ . Al número entero

$$\chi_{\mathcal{T}}(S) := \sharp F(\mathcal{T}) - \sharp E(\mathcal{T}) + \sharp V(\mathcal{T})$$

se le llamará la característica de Euler de la triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$ .

Reparemos en que cada punto  $v \in V(\mathcal{T})$  puede ser vértice de varios triángulos de  $\mathcal{T}$ , y análogamente cada arco de Jordan  $l \in E(\mathcal{T})$  puede ser lado de más de un triángulo de  $\mathcal{T}$ . El cálculo correcto de  $\chi_{\mathcal{T}}(S)$  no ha de tener en cuenta esas multiplicidades, y tanto cada vértice  $v \in V(\mathcal{T})$  como cada lado  $l \in E(\mathcal{T})$  han de contarse una sola vez.

**Definición 16.15 (Orientabilidad de una triangulación)** Una triangulación  $\mathcal{T}$  de una superficie  $S$  se dice orientable si es posible elegir una orientación en cada uno de sus triángulos de forma que cada par de ellos contiguos (con un lado común) estén compatiblemente orientados, esto es, induzcan en su lado común orientaciones opuestas. Si  $\mathcal{T}$  es orientable, una orientación global en  $\mathcal{T}$  será una elección de orientaciones

en todos y cada uno de sus triángulos de  $\mathcal{T}$  de forma que cada dos contiguos satisfagan la anterior condición de compatibilidad. En ese caso también diremos que es posible elegir una orientación global compatible de los triángulos de  $\mathcal{T}$ . Obviamente si  $\mathcal{T}$  es orientable entonces admite dos orientaciones globales.

En caso de que no sea posible elegir una orientación global compatible de los triángulos de  $\mathcal{T}$  se dirá que  $\mathcal{T}$  es no orientable.

Como veremos más adelante cualquier superficie compacta admite una triangulación. Sería deseable que dos triangulaciones distintas de una misma superficie compacta compartiesen característica de Euler y carácter de orientabilidad. No obstante, la prueba de este hecho requerirá de bastante reflexión. Sólo después de superar este obstáculo podremos definir con propiedad la característica de Euler y el concepto de orientabilidad de una superficie topológica compacta como la de cualquiera de sus triangulaciones. Para discos topológicos sí que podemos probar el siguiente resultado:

**Lema 16.16** *Todo disco topológico compacto es triangulable. Si  $X$  es un disco topológico compacto y  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$  cualquiera triangulación de  $X$ , entonces existe una colección de triángulos geométricos  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$  en  $\mathbb{R}^2$  y un homeomorfismo  $F: X \rightarrow \Delta := \cup_{j=1}^k \Delta_j$  tal que  $F(T_j) = \Delta_j$  para todo  $j = 1, \dots, k$ .*

*En particular,  $\mathcal{T}$  es orientable y  $\chi_{\mathcal{T}}(X) = 1$ .*

DEMOSTRACIÓN: Un disco topológico compacto es homeomorfo a  $\overline{D}$ , luego a cualquiera triángulo por la Proposición 3.10 o el Teorema 3.15. Por tanto es triangulable.

Consideremos un disco topológico compacto  $X$  y una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $X$ . Probaremos el resultado por inducción en el número  $k$  de triángulos en  $\mathcal{T}$ .

Si  $k = 1$  el resultado es trivial ya que, elegido un triángulo geométrico  $\Delta_1$  en  $\mathbb{R}^2$ , siempre existe un homeomorfismo  $F: X = T_1 \rightarrow \Delta_1$  con  $F(V(T_1)) = V(\Delta_1)$ , ver Proposición 3.10 y el Corolario 3.6. Supongamos que el resultado es cierto para cualquiera triangulación de un disco topológico compacto con una cantidad de triángulos menor o igual que  $k - 1$ ,  $k > 1$ .

Consideremos un disco topológico compacto  $X$  y una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $X$  con  $k > 1$  triángulos. Veamos que podemos ordenar la triangulación  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$  de forma que

(I)  $X_j := \cup_{i=1}^j T_i$  es un disco topológico compacto y

(II)  $l_{j-1} := T_j \cap X_{j-1}$  es un arco de Jordan

para todo  $j = 1, \dots, k - 1$  (item (ii) es vacío para  $j = 1$ ). En efecto, tomemos  $T_1$  un triángulo cualquiera con un lado en  $\text{Bd}(X)$ . Supongamos que hemos elegido  $T_1, \dots, T_j$  satisfaciendo (i) y (ii),  $j < k$ . Observemos que  $\text{Bd}(X) \not\subseteq X_j$ . En efecto, como  $X_j \subset X$  el Teorema de Invarianza del Dominio (ver Teorema 15.3) implica que  $\text{Bd}(X) \cap X_j \subset \text{Bd}(X_j)$ . Por tanto, si  $\text{Bd}(X) \subseteq X_j$  entonces  $\text{Bd}(X)$  sería un subconjunto abierto y cerrado en  $\text{Bd}(X_j) \cong \mathbb{S}^1$ , luego  $\text{Bd}(X_j) = \text{Bd}(X)$ . Teniendo en cuenta de nuevo el Teorema 15.3 deduciríamos que  $\text{Int}(X_j)$  es igualmente abierto y cerrado en  $\text{Int}(X)$ , y por tanto que  $X_j = X$ , una contradicción.

Así pues  $\text{Bd}(X) \not\subseteq X_j$  y existe un triángulo  $T_{j+1} \in \mathcal{T}$  distinto de los  $T_i$ ,  $i \leq j$ , con algún lado en  $\text{Bd}(X)$  y que comparte con  $X_j$  un arco de Jordan  $l_j$ , ya sea un lado o la unión de dos lados. La Proposición 3.11 garantiza que  $X_{j+1} = X_j \cup T_{j+1}$  es un disco topológico, lo que concluye el proceso.

Usando esta ordenación  $\{T_1, \dots, T_k\}$  de los triángulos de  $\mathcal{T}$ , construyamos de forma inductiva una secuencia

$$\{F_j: X_j \rightarrow \cup_{i=1}^j \Delta_i: j = 1, \dots, k\}$$

de aplicaciones satisfaciendo

- $\Delta_1, \dots, \Delta_j$  son triángulos geométricos en  $\mathbb{R}^2$ ,
- $F_j: X_j \rightarrow \cup_{i=1}^j \Delta_i$  es un homeomorfismo,
- $F_j(T_i) = \Delta_i$  y  $F_j(V(T_i)) = V(\Delta_i)$ ,  $i = 1, \dots, j$ ,
- $F_j|_{X_{j-1}} = F_{j-1}$ ,

para todo  $j = 1, \dots, k$  (la última condición es vacía para  $j = 1$ ).

En efecto, elijamos un triángulo geométrico  $\Delta_1$  en  $\mathbb{R}^2$ , y construyamos vía la Proposición 3.10 y el Corolario 3.6 un homeomorfismo  $F_1: T_1 \rightarrow \Delta_1$   $F_1(V(T_1)) = V(\Delta_1)$ .

Supongamos contruidos  $\{F_h: X_h \rightarrow \cup_{i=1}^h \Delta_i: h = 1, \dots, j\}$ ,  $j < k$ , satisfaciendo las anteriores condiciones. Hemos de encontrar un nuevo triángulo geométrico  $\Delta_{j+1}$  y un homeomorfismo  $F_{j+1}: X_{j+1} \rightarrow \cup_{i=1}^{j+1} \Delta_i$  extensión de  $F_j$  tal que  $F_{j+1}(T_i) = \Delta_i$  y  $F_{j+1}(V(T_i)) = V(\Delta_i)$ ,  $i = 1, \dots, j+1$ .

Si  $l_j = T_{j+1} \cap X_j$  es un lado de  $T_{j+1}$ , tomemos cualquier triángulo geométrico  $\Delta_{j+1}$  en  $\mathbb{R}^2$  con  $\Delta_{j+1} \cap (\cup_{i=1}^j \Delta_i) = F_j(l_j)$  y cualquier homeomorfismo

$$H: T_{j+1} \rightarrow \Delta_{j+1} \text{ con } H|_{l_j} = F_j|_{l_j} \text{ y } H(V(T_{j+1})) = V(\Delta_{j+1})$$

construido vía la Proposición 3.10 y el Corolario 3.6. Para cerrar la inducción, pongamos  $F_{j+1}: X_{j+1} \rightarrow \cup_{i=1}^{j+1} \Delta_i$  como la única extensión de  $F_j$  satisfaciendo  $F_{j+1}|_{T_{j+1}} = H$ .

El caso en que  $l_j$  sea la unión de dos lados  $l_j^1$  y  $l_j^2$  de  $T_{j+1}$  es más sutil. Llamemos  $R_i$  al único triángulo en  $\{T_1, \dots, T_j\}$  tal que  $l_j^i \leq R_i$ ,  $i = 1, 2$ . Vamos a necesitar que el ángulo que forman  $F_j(l_j^1)$  y  $F_j(l_j^2)$  en el vértice  $F_j(l_j^1 \cap l_j^2)$  externo a  $F_j(X_j)$  (esto es, el que abarca la región angular disjunta localmente con  $F_j(X_j)$ ) sea menor que  $\pi$ . En principio esa propiedad no ha de ser cierta, pero se puede garantizar modificando de forma apropiada los homeomorfismos  $F_j|_{R_i}$ ,  $i = 1, 2$ , para ensanchar los triángulos  $F_j(R_1)$  y  $F_j(R_2)$ . Una vez superado ese obstáculo, es claro que el único triángulo geométrico  $\Delta_{j+1}$  conteniendo a  $F_j(l_j^1)$  y  $F_j(l_j^2)$  como lados es disjunto de  $\cup_{i=1}^j \Delta_i$ . Como antes, para cerrar la inducción basta con construir un homeomorfismo  $H: T_{j+1} \rightarrow \Delta_{j+1}$  con  $H|_{l_j^i} = F_j|_{l_j^i}$ ,  $i = 1, 2$ , y definir  $F_{j+1}$  como la extensión de  $F_j$  a  $X_{j+1}$  satisfaciendo  $F_{j+1}|_{T_{j+1}} = H$ .

El homeomorfismo  $F := F_k: X \rightarrow \Delta := \cup_{i=1}^k \Delta_i$  resuelve la primera parte de la proposición.

La orientabilidad de  $\mathcal{T}$  es trivial, basta con inducir vía  $F$  las orientaciones positivas de los triángulos geométricos  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  para generar una orientación global compatible. En relación con la característica de Euler, se puede probar que  $\chi_{\mathcal{T}}(X) = 1$  también por inducción en  $k$ . Si  $k = 1$  es trivial. Supongamos que  $\chi_{\mathcal{T}}(X) = 1$  cuando la triangulación del disco tenga  $k-1$  triángulos,  $k > 1$ . Tomemos un disco  $X$  y una triangulación  $\mathcal{T}$  en el mismo con  $k$  triángulos. Construyamos la ordenación  $\{T_1, \dots, T_k\}$  de  $\mathcal{T}$  y el homeomorfismo  $F: X \rightarrow \Delta := \cup_{i=1}^k \Delta_i$  de la primera parte de la proposición, y recordemos que  $X_{k-1} := \cup_{j=1}^{k-1} T_j$  es un disco topológico compacto y  $\mathcal{T}_{k-1} := \{T_1, \dots, T_{k-1}\}$  una triangulación suya con  $k-1$  triángulos. Por la hipótesis de inducción,  $\chi_{\mathcal{T}}(X_{k-1}) = 1$ . Pero para el cálculo de  $\chi_{\mathcal{T}}(X)$  es claro que:

- Si  $T_k \cap X_{k-1}$  es un lado de  $T_k$ ,

$$\sharp(F(\mathcal{T})) = \sharp(F(\mathcal{T}_{k-1})) + 1, \sharp(E(\mathcal{T})) = \sharp(E(\mathcal{T}_{k-1})) + 2 \text{ y } \sharp(V(\mathcal{T})) = \sharp(V(\mathcal{T}_{k-1})) + 1$$

- Si  $T_k \cap X_{k-1}$  es la unión de dos lados de  $T_k$ :

$$\sharp(F(\mathcal{T})) = \sharp(F(\mathcal{T}_{k-1})) + 1, \sharp(E(\mathcal{T})) = \sharp(E(\mathcal{T}_{k-1})) + 1 \text{ y } \sharp(V(\mathcal{T})) = \sharp(V(\mathcal{T}_{k-1})).$$

Por tanto  $\chi_{\mathcal{T}}(X) = \chi_{\mathcal{T}}(X_{k-1}) = 1$ , lo que cierra la inducción y acaba la demostración. ■

**Corolario 16.17 (Característica de Euler del disco abierto)** *Sea  $X$  un disco topológico compacto y  $\mathcal{T}$  una triangulación suya. Denotemos por*

$$E_0(\mathcal{T}) := \{l \in E(\mathcal{T}) : l \not\subseteq \text{Bd}(X)\} \quad \text{y} \quad V_0(\mathcal{T}) := \{v \in V(\mathcal{T}) : v \notin \text{Bd}(X)\}.$$

Entonces  $\chi_{\mathcal{T}}(\text{Int}(X)) := \sharp F(\mathcal{T}) - \sharp E_0(\mathcal{T}) + \sharp V_0(\mathcal{T}) = \chi_{\mathcal{T}}(X) = 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Como  $\text{Bd}(X)$  es un ciclo, contiene la misma cantidad de lados que de vertices de  $\mathcal{T}$ . El resultado se sigue trivialmente de Lema 16.16. ■

**Definición 16.18** *Dos superficies compactas trianguladas  $(S_j, \mathcal{T}_j)$ ,  $j = 1, 2$ , se dirán combinatoriamente equivalentes si existen dos subdivisiones  $\mathcal{T}'_j \prec \mathcal{T}_j$ ,  $j = 1, 2$ , y un homeomorfismo  $F: S_1 \rightarrow S_2$  tales que  $F(\mathcal{T}'_1) = \mathcal{T}'_2$ . En particular,*

- $F(E(\mathcal{T}_1)) = E(\mathcal{T}_2)$  (esto es,  $F(l_1) \in E(\mathcal{T}_2)$  para todo  $l_1 \in E(\mathcal{T}_1)$ ) y
- $F(V(\mathcal{T}_1)) = V(\mathcal{T}_2)$ .

En ese caso se dirá que  $F: (S_1, \mathcal{T}_1) \rightarrow (S_2, \mathcal{T}_2)$  es un homeomorfismo combinatorio entre  $(S_1, \mathcal{T}_1)$  y  $(S_2, \mathcal{T}_2)$ .

Una consecuencia interesante de los anteriores resultados es la siguiente:

**Proposición 16.19** *Si  $(S_j, \mathcal{T}_j)$ ,  $j = 1, 2$ , son dos superficies compactas trianguladas combinatoriamente equivalentes entonces:*

- $\mathcal{T}_1$  es orientable  $\iff \mathcal{T}_2$  es orientable.
- $\chi_{\mathcal{T}_1}(S_1) = \chi_{\mathcal{T}_2}(S_2)$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $F: (S_1, \mathcal{T}_1) \rightarrow (S_2, \mathcal{T}_2)$  combinatorio, y sean  $\mathcal{T}'_j \prec \mathcal{T}_j$ ,  $j = 1, 2$ , subdivisiones de forma que  $F(\mathcal{T}'_1) = \mathcal{T}'_2$ . Trivialmente  $\mathcal{T}'_1$  es orientable si y sólo si  $\mathcal{T}'_2$  es orientable y  $\chi_{\mathcal{T}'_1}(S) = \chi_{\mathcal{T}'_2}(S)$ .

Por tanto, es suficiente con probar que dada una superficie compacta triangulada  $(S, \mathcal{T})$  y  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ ,

(a)  $\mathcal{T}'$  es orientable  $\iff \mathcal{T}$  es orientable.

(b)  $\chi_{\mathcal{T}'}(S) = \chi_{\mathcal{T}}(S)$ .



Supongamos que  $\mathcal{T}$  es orientable y fijemos una orientación global compatible en todos los triángulos de  $\mathcal{T}$ . Cada triángulo  $T \in \mathcal{T}$  es un disco topológico, luego cualquier triangulación suya es orientable por el Lema 16.16. Los triángulos de  $\mathcal{T}'$  en  $T \in \mathcal{T}$  determinan una triangulación  $\mathcal{T}'_T$  de  $T$ , que puede por tanto orientarse globalmente de forma compatible. Elijamos la orientación global en  $\mathcal{T}'_T$  para que aquellos triángulos de  $\mathcal{T}'_T$  que tengan un lado en  $\text{Bd}(T)$  induzcan sobre ese lado la misma orientación que induce la orientación (ya fijada) de  $T$ . De esta forma se genera una orientación global compatible en  $\mathcal{T}'$ .

Recíprocamente, si  $\mathcal{T}'$  es orientable se fija una orientación global compatible de sus triángulos, y cada triángulo de  $\mathcal{T}$  se orienta de forma compatible con los triángulos orientados de  $\mathcal{T}'_T$  tal y como hemos explicado arriba. De esta forma se genera una orientación global compatible en  $\mathcal{T}$ .

En relación al cálculo de las características de Euler razonamos de la siguiente manera. Cada triángulo  $T \in \mathcal{T}$  aporta un  $+1$  en la suma  $\sharp F(\mathcal{T})$ , el mismo valor numérico que  $\chi_{\mathcal{T}'_T}(\text{Int}(T))$  por el Corolario 16.17. Análogamente, cada lado  $l \in E(\mathcal{T})$  aporta un  $-1$  en el cálculo  $-\sharp E(\mathcal{T})$ , lo mismo que la diferencia entre el número de lados y vértices de  $\mathcal{T}'$  en  $\text{Int}(l)$ , que denotaremos por  $\chi_{\mathcal{T}'}(l)$ . Se deduce pues que

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{T}'}(S) &= \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_{\mathcal{T}'_T}(\text{Int}(T)) \right) + \left( \sum_{l \in E(\mathcal{T})} \chi_{\mathcal{T}'}(l) \right) + \sharp V(\mathcal{T}) = \\ &= \sharp F(\mathcal{T}) - \sharp E(\mathcal{T}) + \sharp V(\mathcal{T}) = \chi_{\mathcal{T}}(S).\end{aligned}$$

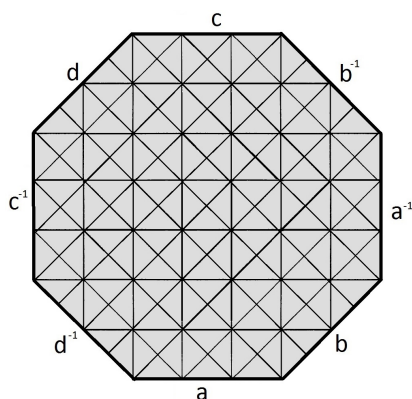
■

Estudiemos la orientabilidad y la característica de Euler para ciertas triangulaciones, que llamaremos adaptadas, de representaciones binarias.

**Definición 16.20** Sea  $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$  un esquema binario, sea  $(\mathbf{a} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k), \mathbf{h})$  una representación suya en cualquiera disco topológico compacto  $X$ , y sea  $\sigma_\omega: X \rightarrow S_\omega$  la identificación asociada. Una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S_\omega$  se dirá adaptada a  $\omega$  si todo  $\gamma_j \in \mathbf{a}$  es unión de una cantidad finita de lados de  $E(\mathcal{T})$ , ó equivalentemente, si

$$\Gamma_\omega \subset \cup_{l \in E(\mathcal{T})} l,$$

donde como siempre  $\Gamma_\omega$  es el grafo conexo asociado a  $\omega$ .



Triangulación adaptada al esquema  
 $aba^{-1}b^1cdc^1d^{-1}$

**Proposición 16.21** Dado un esquema binario  $\omega$ , la superficie  $S_\omega$  admite triangulaciones adaptadas a  $\omega$ . Además, si  $\mathcal{T}$  es una triangulación adaptada a  $\omega$  se tiene que:

- (a)  $\chi_{\mathcal{T}}(S_{\omega}) = 1 + \chi(\Gamma_{\omega})$ , donde  $\Gamma_{\omega}$  es el grafo conexo borde de  $\omega$  (ver Definición 3.21).
- (b)  $\omega$  es orientable si y sólo si  $\mathcal{T}$  es orientable.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $(\mathbf{a} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k), \mathbf{h})$  la representación canónica de  $\omega$  en el disco unidad  $\overline{D}$  (ver Definición 3.23), y  $\sigma_{\omega}: \overline{D} \rightarrow S_{\omega}$  la identificación asociada. Por el Lema 16.16 podemos elegir una triangulación  $\mathcal{T}'$  de  $\overline{D}$ . Tras subdividir convenientemente  $\mathcal{T}'$  de ser necesario y sin pérdida de generalidad, podemos asumir que:

- $\sigma_{\omega}|_T: T \rightarrow \sigma_{\omega}(T)$  es un homeomorfismo para todo  $T \in \mathcal{T}'$ .
- $\sigma_{\omega}(\mathcal{T}') := \{\sigma_{\omega}(T): T \in \mathcal{T}'\}$  es una triangulación de  $S_{\omega}$ .
- Todo arco  $\gamma_j \in \mathbf{a}$  es unión de lados de  $E(\mathcal{T}')$ .

La triangulación  $\mathcal{T} := \sigma_{\omega}(\mathcal{T}')$  de  $S_{\omega}$  es adaptada a  $\omega$ , lo que prueba la primera parte de la proposición.

Sea ahora  $\mathcal{T}$  una triangulación adaptada a  $\omega$ .

Para probar (a), observemos que el Corolario 16.17 y la Definición 3.19 dan sentido al siguiente cálculo:

$$\chi_{\mathcal{T}}(S_{\omega}) = \chi_{\mathcal{T}}(\text{Int}(S_{\omega})) + \chi(\Gamma_{\omega}) = 1 + \chi(\Gamma_{\omega}).$$

Probemos (b). Sea  $\mathcal{T}'$  la única triangulación de  $\overline{D}$  tal que  $\sigma_{\omega}(\mathcal{T}') = \mathcal{T}$ , esto es, tal que  $\sigma_{\omega}(T') \in \mathcal{T}$  y  $\sigma_{\omega}|_{T'}: T' \rightarrow \sigma_{\omega}(T')$  es un homeomorfismo para todo  $T' \in \mathcal{T}'$ . Por el Lema 16.16 es posible elegir una orientación global compatible en  $\mathcal{T}'$ . Traslademos estas orientaciones a los triángulos de  $\mathcal{T}$  vía  $\sigma_{\omega}$ , generando así una orientación en todos y cada uno de los triángulos de  $\mathcal{T}$ . Obviamente  $\mathcal{T}$  será orientable si y solo si estas orientaciones determinan una orientación global compatible en  $\mathcal{T}$ , lo que es equivalente a decir que cada dos triángulos  $\sigma_{\omega}(T_1)$  y  $\sigma_{\omega}(T_2)$  contiguos a un lado  $l \in E(\mathcal{T})$ ,  $l \subset \Gamma_{\omega}$ , están compatiblemente orientados. Llamemos  $l_j := (\sigma_{\omega}|_{T_j})^{-1}(l) \in E(T_j)$ ,  $l_j \subset \mathbb{S}^1$ ,  $j = 1, 2$ . Es claro que las orientaciones compatibles de los triángulos de  $\mathcal{T}'$  inducen en los lados que descansan en  $\mathbb{S}^1$  orientaciones compatibles. Por tanto,  $\sigma_{\omega}(T_1)$  y  $\sigma_{\omega}(T_2)$  inducirán orientaciones opuestas en su lado común  $l$  (y estarán compatiblemente orientados como triángulos orientados) si y solo si el homeomorfismo  $(\sigma_{\omega}|_{l_2})^{-1} \circ (\sigma_{\omega}|_{l_1})$  revierte las orientaciones de los arcos de Jordan  $l_1$  y  $l_2$  en  $\mathbb{S}^1$ . Como  $l_j \subset \sigma_{\omega}^{-1}(\gamma_{i_j})$  para algún  $\gamma_{i_j} \in \mathbf{a}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\sigma_{\omega}(T_1)$  y  $\sigma_{\omega}(T_2)$  estarán compatiblemente orientados si y sólo si el homeomorfismo  $(\sigma_{\omega}|_{\gamma_{i_2}})^{-1} \circ (\sigma_{\omega}|_{\gamma_{i_1}}) \in \mathbf{h}$  revierte las orientaciones de los arcos de Jordan  $\gamma_{i_1}$  y  $\gamma_{i_2}$  en  $\mathbb{S}^1$ . En definitiva, concluimos que  $\mathcal{T}$  es orientable si y sólo si el esquema  $\omega$  es orientable, probando (b). ■

## 16.2. El Teorema de Radó: Representación poligonal

El ingrediente fundamental para la clasificación de las superficies topológicas compactas es el siguiente teorema clásico, que enunciaremos sin demostración.

**Teorema 16.22 (Teorema de Radó)** *Toda superficie topológica compacta admite una triangulación.*

Este teorema tiene interesantes consecuencias. La más relevante se enuncia en el siguiente:

**Teorema 16.23 (Representación poligonal)** Sea  $S$  una superficie topológica compacta, y sea  $\mathcal{T}$  una triangulación cualquiera suya dada por el Teorema 16.22.

Entonces existe un esquema binario  $\omega_{\mathcal{T}}$ , una triangulación  $\mathcal{T}'$  de su realización  $S_{\omega_{\mathcal{T}}}$  adaptada a  $\omega_{\mathcal{T}}$  y un homeomorfismo  $F: S \rightarrow S_{\omega_{\mathcal{T}}}$  tal que  $F(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$  (en particular,  $(S, \mathcal{T})$  y  $(S_{\omega_{\mathcal{T}}}, \mathcal{T}')$  son combinatoriamente equivalentes).

DEMOSTRACIÓN: Nuestro programa de trabajo consistirá en probar que existe un disco topológico compacto  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  con borde poligonal, una triangulación geométrica  $\mathcal{T}_0$  de  $\Delta$  y una identificación topológica  $H: \Delta \rightarrow S$  tal que

$$H(T_0) \in \mathcal{T} \text{ y } H|_{T_0}: T_0 \rightarrow H(T_0) \text{ es un homeomorfismo para todo } T_0 \in \mathcal{T}_0.$$

Una vez superada esta primera etapa tendremos que  $S \cong \Delta / \sim_H$ , donde  $\sim_H$  es la relación inducida por  $H$  en  $\Delta$ . En la segunda parte del argumento, llamaremos

- $\mathbf{a} := \{s_1, \dots, s_u\}$  a la secuencia cíclica *orientada* de lados de  $\mathcal{T}_0$  en  $\text{Bd}(\Delta)$ ,
- $\mathbf{h} := \{h_{i,j}: s_i \rightarrow s_j: i, j = 1, \dots, u\}$  a la familia de homeomorfismos definida por  $h_{i,j} := (H|_{s_j})^{-1} \circ (H|_{s_i})$  para todo  $i, j$ , y
- $\omega_{\mathcal{T}} = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_u^{\epsilon(u)}$  al esquema binario inducido por la biyección  $b_j^{\epsilon(j)} \longleftrightarrow s_j$ ,  $j = 1, \dots, u$ , con el criterio

$$\epsilon(i)\epsilon(j) = 1 \iff b_i = b_j \text{ y } h_{i,j} \text{ preserva la orientación.}$$

La relación  $\sim_H$  coincidirá con la inducida por la representación  $(\mathbf{a}, \mathbf{h})$  de  $\omega_{\mathcal{T}}$  en  $\Delta$  y  $S$  será homeomorfa a la realización  $S_{\omega_{\mathcal{T}}} \equiv \Delta / \sim_H$  de  $\omega_{\mathcal{T}}$  en  $\Delta$  asociada a  $(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ . Además, si  $\sigma_{\omega_{\mathcal{T}}}: \Delta \rightarrow S_{\omega_{\mathcal{T}}}$  es la proyección y  $\hat{H}: S_{\omega_{\mathcal{T}}} \rightarrow S$  el único homeomorfismo satisfaciendo  $\hat{H} \circ \sigma_{\omega_{\mathcal{T}}} = H$ , la triangulación  $\mathcal{T}' := \hat{H}^{-1}(\mathcal{T})$  de  $S_{\omega_{\mathcal{T}}}$  será adaptada a  $\omega_{\mathcal{T}}$ . Definiendo  $F := \hat{H}: (S, \mathcal{T}) \rightarrow (S_{\omega_{\mathcal{T}}}, \mathcal{T}')$  acabaremos el teorema.

Para comenzar con el plan de trabajo, ordenemos  $\{T_1, \dots, T_k\}$  los triángulos de  $\mathcal{T}$  de forma que  $T_{j+1} \cap (\cup_{i=1}^j T_i)$  contenga al menos un lado  $T_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ . Elijamos un lado  $l_j \subset T_{j+1} \cap (\cup_{i=1}^j T_i) \in E(T_{j+1})$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ .

Elijamos una colección de triángulos geométricos  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$  en  $\mathbb{R}^2$  con la propiedad:

$$l'_j := \Delta_{j+1} \cap (\cup_{i=1}^j \Delta_i) \in E(\Delta_{j+1}), j = 1, \dots, k-1.$$

Usando inductivamente la Proposición 3.10, es posible construir una sucesión de homeomorfismos  $\{F_j: T_j \rightarrow \Delta_j: j = 1, \dots, k\}$  tales que:

$$\text{Si } l := T_i \cap T_h \in \{l_1, \dots, l_{k-1}\} \implies F_i|_l = F_h|_l, \quad i, h \in \{1, \dots, k\}.$$

Teniendo en cuenta la Proposición 3.11, es fácil comprobar que la región  $\Delta := \cup_{i=1}^k \Delta_i$  es un disco topológico compacto en  $\mathbb{R}^2$  bordeado por una curva de Jordan poligonal y

$$\mathcal{T}_0 := \{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$$

una triangulación geométrica suya. Definamos

$$H: \Delta \rightarrow S, \quad H|_{\Delta_j} := F_j^{-1} \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, k\},$$

Es claro que  $H$  es una identificación (continua y sobre de un compacto en un Hausdorff, ver Proposición 2.11) que lleva homeomórficamente triángulos de  $\mathcal{T}_0$  en triángulos de  $\mathcal{T}$ , lo que prueba la primera parte de nuestro plan.

Por la Proposición 2.9,

$$\hat{H}: \Delta / \sim_H \rightarrow S, \quad \hat{H}([p]) := H(p),$$

es un homeomorfismo, donde  $\sim_H$  es la relación de equivalencia

$$p \sim_H q \iff H(p) = H(q).$$

Para completar la segunda parte del programa de trabajo, conectemos este cociente con la realización de un esquema binario.

Definamos

$$E_0 := E(\mathcal{T}) \setminus \{l_1, \dots, l_{k-1}\}.$$

Por la definición de  $H$ , si  $p \neq q$  y  $H(p) = H(q)$  entonces han de existir un lado  $e \in E_0$  y un punto  $x \in e$  tales que, si  $T_{i(e)} T_{h(e)}$  son los dos triángulos de  $\mathcal{T}$  con  $e := T_{i(e)} \cap T_{h(e)}$ , entonces  $p = F_{i(e)}(x) \in F_{i(e)}(e) \subset \text{Bd}(\Delta)$  y  $q = F_{h(e)}(x) \in F_{h(e)}(e) \subset \text{Bd}(\Delta)$ . Además en este caso

$$H^{-1}(H(F_{i(e)}(e))) = H^{-1}(H(F_{h(e)}(e))) = F_{i(e)}(e) \cup F_{h(e)}(e),$$

por lo que  $\sim_H$  identifica los puntos de los lados  $F_{i(e)}(e)$  y  $F_{h(e)}(e) \in E(\mathcal{T}_0)$  vía el homeomorfismo  $F_{h(e)} \circ F_{i(e)}^{-1}$ . Nótese que puede haber lados en  $\text{Bd}(\Delta)$  con interior  $H$ -saturado, justo aquellos que se apliquen por  $H$  en un lado del borde de  $S$  (ver Proposición 16.11-(b)). En definitiva,  $\sim_H$  realiza el pagado de parejas de segmentos de  $\text{Bd}(\Delta)$  vía homeomorfismos, siendo trivial en el resto del disco topológico  $\Delta$ .

Generemos el esquema binario asociado a este cociente. Para ello escribamos  $\text{Bd}(\Delta) = \cup_{j=1}^u s_j$  como unión cíclica de lados orientados en  $E(\mathcal{T}_0)$  y llamemos  $\mathbf{a} = \{s_1, \dots, s_u\}$ . Siendo más precisos, esto quiere decir que:

- $s_j$  es lado de algún triángulo en  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$  para todo  $j = 1, \dots, u$ .
- $s_j \cap s_{j+1}$  es un vértice común a  $s_j$  y  $s_{j+1}$  para todo  $j = 1, \dots, u$ , donde hemos hecho el convenio  $s_{u+1} = s_1$ .
- Los lados  $s_j$  están orientados de forma compatible con la orientación positiva de los triángulos gométicos de  $\mathcal{T}_0$  incidentes con ellos.

Recuperemos el conjunto auxiliar  $\mathcal{U}$  sobre el que se construían nuestros esquemas y construyamos cualquiera representación inyectiva  $E_0 \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $l \mapsto a[l]$ , del conjunto  $E_0$  en  $\mathcal{U}$ . En la expresión formal  $s_1 \dots s_u$  sustituyamos de forma ordenada en sentido creciente del índice cada  $s_j$  por el símbolo  $a[e_j]$ , donde  $e_j := H(s_j) \in E_0$ . En el momento en que alcancemos un segmento  $s_m$  tal que  $H(s_m) = H(s_j) = e_j$  con  $j < m$  (sólo puede haber uno a lo más), sustituyamos  $s_m$  por  $a[e_m] := a[e_j]$  si  $h_{i,j} := F_{h(e_j)} \circ F_{i(e_j)}^{-1}$  respeta la orientación de los arcos de Jordan  $F_{i(e_j)}(e_j)$  y  $F_{h(e_j)}(e_j)$ , o por  $a[e_j]^{-1}$  si la revierte. De esta forma generamos la familia de homeomorfismos  $\mathbf{h} := \{h_{i,j}: i, j = 1, \dots, u\}$ , donde  $h_{i,i} = \text{Id}_{s_i}$  para todo  $i$ . De acuerdo a nuestras convenciones, asociamos a la sucesión  $s_1 \dots s_u$  el esquema binario  $\omega_{\mathcal{T}} = \prod_{j=1}^u b_j^{\epsilon(j)}$  (donde  $\text{sop}(\omega_{\mathcal{T}}) = \{b_1, \dots, b_u\} = \{a[e_1], \dots, a[e_u]\}$ ). Claramente la relación de equivalencia inducida en  $\Delta$  por la representación  $(\mathbf{a}, \mathbf{h})$  coincide con  $\sim_H$ , por lo que la realización  $S_{\omega_{\mathcal{T}}} \equiv \Delta / \sim_H$  en  $\Delta$  de  $\omega_{\mathcal{T}}$  es homeomorfa a  $S$ . Por construcción,  $\sigma_{\omega}(\mathcal{T}_0) \equiv \hat{H}^{-1}(\mathcal{T})$  es una triangulación de  $S_{\omega}$  adaptada a  $\omega$ , donde  $\sigma_{\omega_{\mathcal{T}}}: \Delta \rightarrow S_{\omega_{\mathcal{T}}}$  es la proyección al conciente y  $\hat{H}: S_{\omega_{\mathcal{T}}} \rightarrow S$  el único homeomorfismo satisfaciendo  $\hat{H} \circ \sigma_{\omega_{\mathcal{T}}} = H$ . Esto concluye la segunda parte del programa, y por tanto el teorema para  $F := \hat{H}$ . ■

**Observación 16.24** No sólo el enunciado del Teorema 16.23 es informativo, sino también su prueba. Si  $(S, \mathcal{T})$  es una superficie compacta triangulada y  $X \subset S$  un disco topológico compacto unión de triángulos de  $\mathcal{T}$ , el Lema 16.16 (y su demostración) se puede incorporar a la prueba del Teorema 16.23 para lograr que  $F(\text{Int}(X)) \cap \Gamma_{\omega_{\mathcal{T}}} = \emptyset$ .

## 17. Clasificación de las superficies compactas

En esta sección vamos a clasificar salvo equivalencias las realizaciones de esquemas binarios, y como consecuencia de la representación poligonal de superficies del Teorema 16.23, todas las superficies topológicas compactas.

**Definición 17.1** Llamaremos  $\mathcal{K}$  al conjunto de los pares  $(\omega, \mathcal{T})$ , donde  $\omega$  es un esquema binario y  $\mathcal{T}$  una triangulación de  $S_{\omega}$  adaptada a  $\omega$ .

Dos parejas  $(\omega_1, \mathcal{T}_1), (\omega_2, \mathcal{T}_2) \in \mathcal{K}$ , se dirán equivalentes si existe un homeomorfismo combinatorio  $H: (S_{\omega_1}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (S_{\omega_2}, \mathcal{T}_2)$ . En ese caso escribiremos  $(\omega_1, \mathcal{T}_1) \sim (\omega_2, \mathcal{T}_2)$  ó  $(\omega_1, \mathcal{T}_1) \stackrel{H}{\sim} (\omega_2, \mathcal{T}_2)$  si queremos enfatizar el homeomorfismo combinatorio.

Precisamos de algún lenguaje.

Si  $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$  es un esquema escribiremos

$$\omega^{-1} = b_k^{-\epsilon(k)} \dots b_1^{-\epsilon(1)}.$$

Si  $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$  es binario,  $(\mathbf{a} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k), \mathbf{h})$  una representación suya en un disco topológico compacto  $X$ , y  $\sigma_{\omega}: X \rightarrow S_{\omega}$  la identificación asociada, por definición diremos que

$$V_{\omega} := \{\sigma_{\omega}(p) : p \in \cup_{i=1}^k V(\gamma_i)\} \subset \Gamma_{\omega}$$

es el conjunto de los *vértices* de  $\omega$  (aquí  $V(\gamma_j)$  refiere a los extremos del arco de Jordan orientado  $\gamma_j$  en  $\text{Bd}(X)$  para cada  $j$ ). La expresión

$$b_j^{\epsilon(j)} \overset{Q_j}{\wedge} b_{j+1}^{\epsilon(j+1)}$$

indicará que  $Q_j = \sigma_{\omega}(p_j) \in V_{\omega}$ , con  $p_j := \gamma_j \cap \gamma_{j+1} \in \cup_{i=1}^k V(\gamma_i)$ ,  $j = 1, \dots, k$  (hacemos el convenio  $b_{k+1}^{\epsilon(k+1)} = b_1^{\epsilon(1)}$  y  $\gamma_{k+1} = \gamma_1$ ). También escribiremos

$$\omega = b_1^{\epsilon(1)} \overset{Q_1}{\wedge} \dots \overset{Q_{k-1}}{\wedge} b_k^{\epsilon(k)} \overset{Q_k}{\wedge} \equiv \overset{Q_k}{\wedge} b_1^{\epsilon(1)} \overset{Q_1}{\wedge} \dots \overset{Q_{k-1}}{\wedge} b_k^{\epsilon(k)}$$

para enfatizar la lista de vértices de  $\omega$ . Nótese que el cardinal  $\#V_{\omega}$  es menor o igual que  $k = \text{Long}(\omega)$ . En caso de que  $\mathcal{T}$  sea una triangulación de  $S_{\omega}$  adaptada a  $\omega$ , es claro que  $V_{\omega} \subset V(\mathcal{T}) \cap \Gamma_{\omega}$ .

Para cada  $Q \in V_{\omega}$  el conjunto  $\sigma_{\omega}^{-1}(Q)$  contiene aquellos extremos de arcos en  $\mathbf{a}$  que se proyectan por  $\sigma_{\omega}$  en  $Q$ . Al número natural  $m_{\omega}(Q) := \#\sigma_{\omega}^{-1}(Q)$  lo referiremos como la *multiplicidad* de  $Q$  en  $\omega$  (o en  $S_{\omega}$ ). Es claro que

$$\sum_{Q \in V_{\omega}} m_{\omega}(Q) = \text{Long}(\omega).$$

Por último necesitaremos la siguiente:

**Definición 17.2** Sea  $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$  un esquema, y sea  $\{b_i^{\epsilon(i)}, b_j^{\epsilon(j)}\}$  un par de sílabas en  $\omega$  con  $i \neq j$  y  $b_i = b_j$ . El par  $\{b_i^{\epsilon(i)}, b_j^{\epsilon(j)}\}$  se dirá de primera especie si  $\epsilon(i)\epsilon(j) = -1$ , y de segunda especie si  $\epsilon(i)\epsilon(j) = 1$ .

Como consecuencia, un esquema binario es orientable si y sólo si todos sus pares son de primera especie, y no orientable si tiene al menos un par de segunda especie.

El siguiente lema establece unas reglas básicas de transformación por equivalencias para esquemas binarios.

**Lema 17.3 (Reglas de transformación)** Sean  $\nu_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , esquemas tales que  $\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4$  es un esquema binario, y sean  $a, b \notin \cup_{j=1}^4 \text{sop}(\nu_j)$ .

(a) Para los esquemas binarios  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de la siguiente lista:

- (I)  $\omega_1 = \nu_1\nu_2$  y  $\omega_2 := \nu_2\nu_1$ ,
- (II)  $\omega_1 = \nu_1$  y  $\omega_2 := \nu_1^{-1}$ ,
- (III)  $\omega_1 := \nu_1\nu_2a\nu_3\nu_4a^{-1}$  y  $\omega_2 := \nu_2\nu_1b\nu_4\nu_3b^{-1}$ , y
- (IV)  $\omega_1 := \nu_1\nu_2a\nu_3\nu_4a$  y  $\omega_2 := \nu_3^{-1}\nu_1b\nu_4\nu_2^{-1}b$ ,

el siguiente enunciado es cierto:

Si  $\mathcal{T}_1$  es adaptada a  $\omega_1$  y  $Z \subset S_{\omega_1} \setminus \Gamma_{\omega_1}$  es un compacto (eventualmente vacío), existe  $\mathcal{T}_2$  adaptada a  $\omega_2$  y un homeomorfismo combinatorio  $F: (S_{\omega_1}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (S_{\omega_2}, \mathcal{T}_2)$  tal que  $F(V_{\omega_1}) = V_{\omega_2}$  y  $F(Z) \subset S_{\omega_2} \setminus \Gamma_{\omega_2}$ .

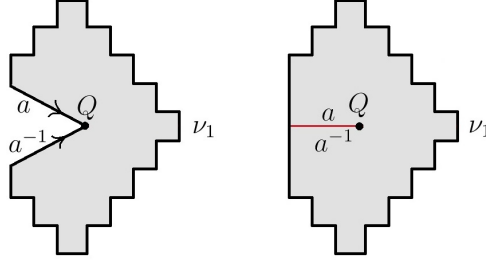
(b) Si  $(\omega_1 := a \overset{Q}{\wedge} a^{-1}\nu_1, \mathcal{T}_1) \in \mathcal{K}$  (y por tanto  $m_{\omega_1}(Q) = 1$ ),  $Z \subset S_{\omega_1} \setminus \Gamma_{\omega_1}$  es un compacto (eventualmente vacío) y  $\omega_2 := \nu_1 \neq 1$ , entonces existe  $\mathcal{T}_2$  adaptada a  $\omega_2$  y un homeomorfismo combinatorio  $F: (S_{\omega_1}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (S_{\omega_2}, \mathcal{T}_2)$  tal que  $F(V_{\omega_1} \setminus \{Q\}) = V_{\omega_2}$  y  $F(Z) \subset S_{\omega_2} \setminus \Gamma_{\omega_2}$ .

Además, en todos los casos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  tienen el mismo carácter de orientabilidad y sólo en (b) el homeomorfismo altera el número de vértices del esquema en el el grafo borde reduciendolo en una unidad.

**Observación 17.4** La versión del Lemma 17.3 con  $Z = \emptyset$  será suficiente para la clasificación de las superficies compactas sin borde.

DEMOSTRACIÓN: (del Lemma 17.3) Items (a)-(i) y (a)-(ii) son triviales ya que  $S_{\omega_1}$  y  $S_{\omega_2}$  son el mismo espacio.

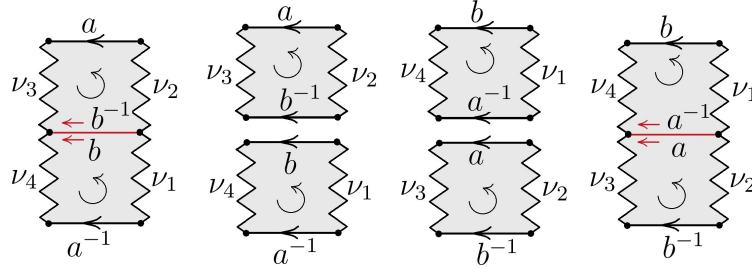
Para probar (b), tomemos un disco compacto  $X$  y la identificación  $\sigma_\omega: X \rightarrow S_{\omega_1}$  asociada a  $\omega_1$ . Nótese que como  $\omega_1$  es binario necesariamente  $m_{\omega_1}(Q) = 1$ . Pongamos  $\omega_1 = a \overset{Q}{\wedge} a^{-1}\nu_1$ , y  $(\mathbf{a}, \mathbf{h})$  a la representación de  $\omega_1$  en  $X$ . Sean  $\gamma_a$  y  $\gamma_{a^{-1}} \in \mathbf{a}$  los arcos de Jordan en  $\text{Bd}(X)$  asociados a los caracteres  $a$  y  $a^{-1}$  de  $\omega_1$ , y  $h: \gamma_a \rightarrow \gamma_{a^{-1}}$  el correspondiente homeomorfismo en  $\mathbf{h}$ . Llamemos  $Y$  al disco topológico compacto  $X/\sim_h$  (ver el Ejercicio 3.14) y  $\sigma_0: X \rightarrow Y$  a la proyección al cociente. La única identificación  $\sigma: Y \rightarrow S_{\omega_1}$  tal que  $\sigma \circ \sigma_0 = \sigma_{\omega_1}$  expresa  $Y/\sim_\sigma$  como realización  $S_{\omega_2}$  de  $\omega_2$  en  $Y$ . Si llamamos  $\hat{\sigma}: Y/\sim_\sigma \equiv S_{\omega_2} \rightarrow S_{\omega_1}$  al homeomorfismo inducido por la identificación  $\sigma$ ,  $\mathcal{T}_2 := \hat{\sigma}^{-1}(\mathcal{T}_1)$  es una triangulación de  $S_{\omega_2}$  adaptada a  $\omega_2$  y  $V_{\omega_2} = \hat{\sigma}^{-1}(V_{\omega_1} \setminus \{Q\})$ . Elijiendo  $F = \hat{\sigma}$  se sigue (b).



Probemos (a)-(iii). Escribamos  $\omega_1 = \nu_1 \overset{Q_1}{\wedge} \nu_2 a \nu_3 \overset{Q_2}{\wedge} \nu_4 a^{-1}$  y consideremos una representación  $(\mathbf{a}, \mathbf{h})$  de  $\omega_1$  en un disco topológico compacto  $X$ . Denotemos por  $\mathbf{a}_j \subset \mathbf{a}$  la secuencia ordenada de lados orientados en  $\text{Bd}(X)$  correspondientes a  $\nu_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , y  $\gamma_a, \gamma_{a^{-1}}$  los lados orientados en  $\mathbf{a}$  asociados a  $a$  y  $a^{-1}$ , respectivamente. Con esta notación,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \cup \mathbf{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathbf{a}_3 \cup \mathbf{a}_4 \cup \{\gamma_{a^{-1}}\}$$

reproduce la secuencia ordenada cíclica de lados de  $\mathbf{a}$ .



Salvo tomar una subdivisión suficientemente fina de  $\mathcal{T}_1$ , podemos suponer que la arco-componente de  $S_{\omega_1} \setminus (\Gamma_{\omega_1} \cup Z)$  que contiene a  $\Gamma_{\omega_1}$  en su frontera topológica contiene un arco de Jordan  $b \subset S_{\omega_1}$  con extremos  $Q_1$  y  $Q_2$ , contenido en  $\cup_{l \in E(\mathcal{T}_1)} l$ , con interior disjunto de  $\Gamma_{\omega_1} \cup Z$ , y que es proyección vía  $\sigma_{\omega_1}$  de un *arco de Jordan* en  $X$  que parte el disco  $X$  en dos componentes conexas  $X_+$  y  $X_-$ . Por conveniencia llamemos  $b_+ \subset \text{Bd}(X_+)$  al arco en  $\text{Bd}(X_+)$  proyectándose por  $\sigma_{\omega_1}$  en  $b$ , y análogamente para  $b_- \subset \text{Bd}(X_-)$  (como subconjuntos de  $X$ ,  $b_+ = b_-$ ).

Fijemos en  $b_+$  la orientación compatible con los arcos orientados de  $\mathbf{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathbf{a}_3$  de  $\text{Bd}(X_+)$ , y hagamos lo propio en  $b_-$  respecto de los arcos orientados de  $\mathbf{a}_4 \cup \{\gamma_{a^{-1}}\} \cup \mathbf{a}_1$  en  $\text{Bd}(X_-)$ . Consideremos las secuencias cíclicas ordenadas de arcos orientados

$$\mathbf{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathbf{a}_3 \cup b_+ \text{ en } \text{Bd}(X_+) \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_4 \cup \{\gamma_{a^{-1}}\} \cup \mathbf{a}_1 \cup b_- \text{ de en } \text{Bd}(X_-).$$

Podemos pegar  $\overline{X}_+$  y  $\overline{X}_-$  por los arcos de Jordan borde  $\gamma_a$  y  $\gamma_{a^{-1}}$  con ayuda del homeomorfismo  $h: \gamma_a \rightarrow \gamma_{a^{-1}} \in \mathbf{h}$  tal que  $(\sigma_{\omega_1}|_{\gamma_{a^{-1}}}) \circ h = \sigma_{\omega_1}|_{\gamma_a}$ . De esta forma generamos un disco topológico compacto  $\hat{X} = (\overline{X}_+ \cup \overline{X}_-)/\sim_h \equiv \overline{X}/\sim_h$ , ver Proposición 3.11. Si  $g: X \rightarrow \hat{X}$  denota la proyección al cociente, la única aplicación

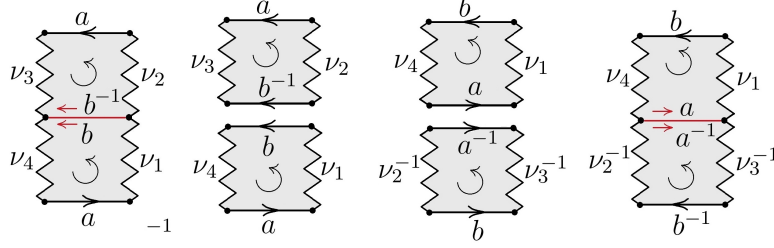
$$\sigma: \hat{X} \rightarrow S_{\omega_1} \quad \text{con} \quad \sigma \circ g = \sigma_{\omega_1}$$

es una identificación, por lo que  $\hat{X}/\sim_\sigma \cong S_{\omega_1}$ . Si llamamos  $\hat{\sigma}: \hat{X}/\sim_\sigma \rightarrow S_{\omega_1}$  al homeomorfismo inducido por  $\sigma$ , la definición de  $\sim_\sigma$  implica que  $\hat{X}/\sim_\sigma \equiv S_{\omega_2}$  es un realización de  $\omega_2 := \nu_2 \nu_1 b \nu_4 \nu_3 b^{-1}$ , que  $\mathcal{T}_2 := \hat{\sigma}^{-1}(\mathcal{T}_1)$  es una triangulación de  $S_{\omega_2}$  adaptada a  $\omega_2$ , y que  $V_{\omega_2} = \hat{\sigma}^{-1}(V_{\omega_1})$ . De nuestra construcción también  $\hat{\sigma}(Z) \subset S_{\omega_2} \setminus \Gamma_{\omega_2}$ . Elijiendo  $F = \hat{\sigma}$  se sigue (a)-(iii).

Finalmente probemos (a)-(iv). Como antes pongamos  $\omega_1 = \nu_1 \overset{Q_1}{\wedge} \nu_2 a \nu_3 \overset{Q_2}{\wedge} \nu_4 a$ , consideremos una representación  $(\mathbf{a}, \mathfrak{h})$  de  $\omega_1$  en un disco topológico compacto  $X$ , y escribamos

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \cup \mathbf{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathbf{a}_3 \cup \mathbf{a}_4 \cup \{\gamma'_a\}$$

con los mismos convenios anteriores; aquí  $\gamma_a$  y  $\gamma'_a$  representan los dos arcos en  $\text{Bd}(X)$  correspondientes al caracter  $a$  duplicado en  $\omega_1$ .



Razonando como en el caso anterior, podemos suponer que existe un arco de Jordan  $b \subset S_{\omega_1}$  con extremos  $Q_1$  y  $Q_2$ , contenido en  $\cup_{l \in E(\mathcal{T}_1)} l$ , con interior disjunto de  $\Gamma_{\omega_1} \cup Z$ , y que sea la proyección vía  $\sigma_{\omega_1}$  de un *arco de Jordan* en  $X$  que parte el disco  $X$  en dos componentes conexas  $X_+$  y  $X_-$ . Llamemos  $b_+ \subset \text{Bd}(X_+)$  al arco en  $\text{Bd}(X_+)$  proyectándose por  $\sigma_{\omega_1}$  en  $b$ , y análogamente para  $b_- \subset \text{Bd}(X_-)$ , y orientemos estos arcos compatiblemente con los arcos orientados en  $\mathbf{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathbf{a}_3$  de  $\text{Bd}(X_+)$  y  $\mathbf{a}_4 \cup \{\gamma'_a\} \cup \mathbf{a}_1$  de  $\text{Bd}(X_-)$ , respectivamente. Consideremos las secuencias cíclicas ordenadas de arcos orientados

$$\mathbf{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathbf{a}_3 \cup b_+ \text{ en } \text{Bd}(X_+) \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_4 \cup \{\gamma'_a\} \cup \mathbf{a}_1 \cup b_- \text{ de en } \text{Bd}(X_-).$$

Llamemos  $X_+^* = \{p^*: p \in X_+\}$  a una copia topológica de  $X_+$  y  $s: X_+^* \rightarrow X_+$  al homeomorfismo  $p^* \mapsto p$ . Consideremos el homeomorfismo  $F: X_+ \rightarrow \overline{D}$  que aplica los lados orientados de  $\mathbf{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathbf{a}_3$  en arcos positivamente orientados en  $\mathbb{S}^1$ , y llamemos  $F^*: X_+^* \rightarrow \overline{D}$  a la composición  $e \circ F \circ s$ , donde  $e: \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  es la simetría especular  $e(x, y) = (x, -y)$ . Traslademos vía  $(F^*)^{-1} \circ F$  la secuencia de arcos orientados  $\mathbf{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathbf{a}_3 \cup b_+$  en  $\text{Bd}(X_+)$  para generar una secuencia (con ordenación *revertida*) de arcos orientados:

$$b_+^* \cup \mathbf{a}_3^* \cup \{\gamma_a^*\} \cup \mathbf{a}_2^* \text{ en } \text{Bd}(X_+^*).$$

Podemos pegar  $\overline{X}_+^*$  y  $\overline{X}_-$  por los arcos de Jordan borde  $\gamma_a^*$  y  $\gamma'_a$  con ayuda del homeomorfismo  $h^* = h \circ (F^{-1} \circ F^*)$ :  $\gamma_a^* \rightarrow \gamma'_a$ , donde  $h: \gamma_a \rightarrow \gamma'_a$  es el homeomorfismo en  $\mathfrak{h}$ . De esta forma generamos un disco topológico compacto  $\hat{X} = (\overline{X}_+^* \cup \overline{X}_-)/\sim_{h^*}$ , ver Proposición 3.11. Si  $g: \overline{X}_+^* \cup \overline{X}_- \rightarrow \hat{X}$  denota la proyección al cociente, la única aplicación

$$\sigma: \hat{X} \rightarrow S_{\omega_1} \quad \text{con} \quad (\sigma \circ g)|_{\overline{X}_-} = \sigma_{\omega_1}|_{\overline{X}_-}, \quad (\sigma \circ g)|_{\overline{X}_+^*} = \sigma_{\omega_1} \circ ((F^{-1} \circ F^*)|_{\overline{X}_+^*})$$

es una identificación, por lo que  $\hat{X}/\sim_{\sigma} \cong S_{\omega_1}$ . Si llamamos  $\hat{\sigma}: \hat{X}/\sim_{\sigma} \rightarrow S_{\omega_1}$  al homeomorfismo inducido por  $\sigma$ , la definición de  $\sim_{\sigma}$  implica que  $\hat{X}/\sim_{\sigma} \equiv S_{\omega_2}$  es una realización de  $\omega_2 = \nu_3^{-1} \nu_1 b \nu_4 \nu_2^{-1} b$ , que  $\mathcal{T}_2 := \hat{\sigma}^{-1}(\mathcal{T}_1)$  es una triangulación de  $S_{\omega_2}$  adaptada a  $\omega_2$  y que  $V_{\omega_2} = \hat{\sigma}^{-1}(V_{\omega_1})$ . Como antes  $\hat{\sigma}(Z) \subset S_{\omega_2} \setminus \Gamma_{\omega_2}$ . Eligiendo  $F = \hat{\sigma}$  se sigue (a)-(iv), concluyendo la demostración.  $\blacksquare$



## 17.1. Clasificación de las superficies compactas sin borde

Para los siguientes resultados es conveniente tener presente el Corolario 16.4 y la notación implícita en él.

**Lema 17.5** *Dado  $(\omega, \mathcal{T}) \in \mathcal{K}$  con  $\omega$  binario puro, existe un esquema  $(\omega_0, \mathcal{T}_0) \in \mathcal{K}$  tal que:*

- $\#V_{\omega_0} = 1$  ó  $\omega_0 = \mathfrak{w}_0$ , donde  $\mathfrak{w}_0$  es el esquema canónico  $aa^{-1}$ .
- $(\omega, \mathcal{T}) \stackrel{F}{\sim} (\omega_0, \mathcal{T}_0)$ .

Además, si  $Z \subset S_\omega \setminus \Gamma_\omega$  es un compacto, el homeomorfismo combinatorio  $F$  se puede lograr para que  $F(Z) \subset S_{\mathfrak{w}_0} \setminus \Gamma_{\mathfrak{w}_0}$ .

DEMOSTRACIÓN: Si  $\omega = aa^{-1} = \mathfrak{w}_0$  basta con elegir  $F = \text{Id}_{S_\omega}$ . El caso  $\omega = aa = \mathfrak{w}_1$  también es trivial con  $F = \text{Id}_{S_\omega}$ , ya que en este caso  $V_\omega$  solo tiene un vértice.

Como  $\omega$  tiene un número par de caracteres, podemos suponer que  $\text{Long}(\omega) \geq 4$ . Lo primero que haremos es usar la regla Lema 17.3-(b) tantas veces cuantas sea posible para encontrar una pareja en  $\mathcal{K}$  equivalente a  $(\omega, \mathcal{T})$  sin pares adyacentes de primera especie. En este camino lógicamente perdemos vértices (uno cada vez que se aplique la regla), se reduce la longitud de  $\omega$  y no se altera el carácter de orientabilidad del esquema. Este proceso nos podría dirigir de nuevo al caso del esquema de longitud 2 ya discutido, en cuyo caso habríamos acabado.

Por tanto, no supone pérdida de generalidad admitir que  $\omega$  no contiene pares adyacentes de primera especie, que  $\text{Long}(\omega) \geq 4$  y que  $V_\omega$  tiene al menos dos vértices adyacentes distintos. Elijamos un vértice  $P \in V_\omega$ .

Vamos a demostrar que existe  $(\mu_1, \mathcal{T}_1) \in \mathcal{K}$  tal que  $(\omega, \mathcal{T}) \sim (\mu_1, \mathcal{T}_1)$  y  $\#V_{\mu_1} \leq \#V_\omega - 1$ .

En efecto, consideremos una realización  $S_\omega$  de  $\omega$  en un disco  $X$  y la identificación  $\sigma_\omega: X \rightarrow S_\omega$  asociada. Como hay al menos dos vértices distintos, existe un carácter o sílaba  $b^\epsilon$ ,  $\epsilon \in \{1, -1\}$ , en la secuencia que define a  $\omega$  (salvo la reversión global Lema 17.3-(a)-(ii), supondremos  $\epsilon = 1$ ) de forma que el arco de Jordan  $\sigma_\omega(\gamma_b) \subset \Gamma_\omega$  tiene por extremos a puntos  $P$  y  $Q \in V_\omega \setminus \{P\}$ , donde  $\gamma_b \subset \text{Bd}(X)$  es el arco asociado a  $b$  en la representación de  $\omega$  sobre  $X$ . El esquema  $\omega$  puede adoptar las siguientes cuatro formas:

$$\zeta_1 a \stackrel{P}{\wedge} \zeta_2 \stackrel{Q}{\wedge} b \stackrel{P}{\wedge} a^{-1}, \quad \zeta_1 \stackrel{P}{\wedge} a \zeta_2 a^{-1} \stackrel{P}{\wedge} b \stackrel{Q}{\wedge}, \quad \zeta_1 a \stackrel{P}{\wedge} \zeta_2 a \stackrel{P}{\wedge} b \stackrel{Q}{\wedge}, \quad \zeta_1 \stackrel{P}{\wedge} a \zeta_2 \stackrel{Q}{\wedge} b \stackrel{P}{\wedge} a.$$

Pensemos en el caso  $\omega = \zeta_1 a \stackrel{P}{\wedge} \zeta_2 \stackrel{Q}{\wedge} b \stackrel{P}{\wedge} a^{-1}$  (los otros son análogos).

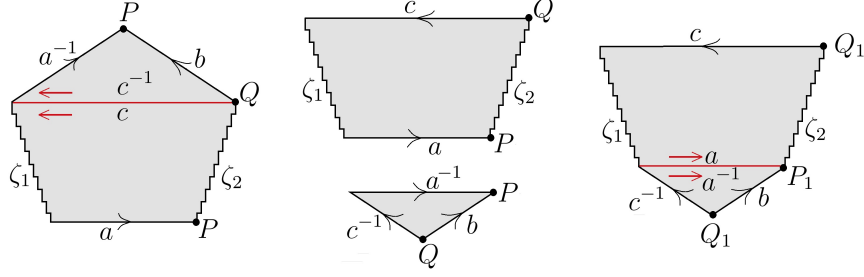
Aplicando el Lema 17.3-(a)-(iii) para  $\zeta_1 = \zeta_1$ ,  $\zeta_2 = 1$ ,  $\zeta_3 = \zeta_2$  y  $\zeta_4 = b$ , inferimos que  $(\omega, \mathcal{T}) \stackrel{F_1}{\sim} (\omega_1, \mathcal{T}_1')$  donde

$$\omega_1 = \zeta_1 c \stackrel{Q_1}{\wedge} b \stackrel{P_1}{\wedge} \zeta_2 \stackrel{Q_1}{\wedge} c^{-1},$$

donde  $Q_1 = F_1(Q)$  y  $P_1 = F_1(P)$ . Claramente  $\text{Long}(\omega_1) = \text{Long}(\omega)$  y

$$m_{\omega_1}(P_1) = m_\omega(P) - 1,$$

esto es, reducimos en una unidad entera la cantidad de puntos en  $\sigma_{\omega_1}^{-1}(P_1)$  respecto a la de  $\sigma_\omega^{-1}(P)$ . A continuación sometemos a  $\omega_1$  a la regla Lema 17.3-(b) tantas veces cuantas sea posible para encontrar una pareja equivalente en  $\mathcal{K}$ , que abusando del lenguaje llamaremos también  $(\omega_1, \mathcal{T}_1')$  sin pares adyacentes de primera especie. En este proceso eventualmente se podrían perder vértices y reducir la longitud de  $\omega_1$ .



De persistir el (heredero del) vértice  $P_1$  tras estas reducciones y haber más de un vértice en  $V_{\omega_1}$ , reiteramos el proceso anterior de forma inductiva. Así construimos

$$(\omega_0, \mathcal{T}'_0) = (\omega, \mathcal{T}) \stackrel{F_1}{\sim} (\omega_1, \mathcal{T}'_1) \stackrel{F_2}{\sim} \dots \stackrel{F_{j-1}}{\sim} (\omega_{j-1}, \mathcal{T}'_{j-1}) \stackrel{F_j}{\sim} (\omega_j, \mathcal{T}'_j),$$

de forma que  $\text{Long}(\omega_i) \leq \text{Long}(\omega_{i-1})$ ,  $\#V_{\omega_i} \leq \#V_{\omega_{i-1}}$  y  $m_{\omega_i}(P_i) = m_{\omega_{i-1}}(P_{i-1}) - 1$ , donde  $P_i = F_i(P_{i-1})$ , para todo  $1 \leq i \leq j$  (hemos hecho el convenio  $F_0 = \text{Id}_{S_\omega}$  y  $P_0 = P$ ).

En general, cuando ocurre la multiplicidad 1 para un vértice de un esquema esto significa que éste es incidente a un par de lados adyacentes de primera especie. Por tanto en caso de persistencia y tras dar a lo más  $m_1 := m_\omega(P) - 1$  pasos, este proceso nos dirigiría a un esquema en el que el vértice  $P_{m_\omega(P)-1}$  se desvanece al aplicar la regla Lema 17.3-(b) para llegar a  $\omega_{m_1}$ , de donde necesariamente  $\#V_{\omega_{m_1}} \leq V_\omega - 1$ . Basta pues elegir  $(\mu_1, \mathcal{T}_1) := (\omega_{m_1}, \mathcal{T}'_{m_1})$ .

Si  $\mu_1 \neq \mathfrak{w}_0$  y tiene dos o más vértices, reiteramos el proceso anteriormente seguido para  $\omega$  y construimos  $(\mu_2, \mathcal{T}_2) \in \mathcal{K}$  tal que  $(\mu_1, \mathcal{T}_1) \sim (\mu_2, \mathcal{T}_2)$  y  $\#V_{\mu_2} \leq \#V_{\mu_1} - 1$ , y así sucesivamente. Tras una cantidad finita de pasos alcanzaremos una pareja  $(\omega_0, \mathcal{T}_0) \sim (\omega, \mathcal{T})$  con  $\omega_0 = \mathfrak{w}_0$     $\#V_{\omega_0} = 1$ , lo que concluye la prueba.

La información extra en relación al compacto  $Z$  en el enunciado se sigue del uso apropiado del Lema 17.3 dentro de la demostración. ■

**Teorema 17.6 (Representaciones binarias puras no orientables)** *Sea  $(\omega, \mathcal{T}) \in \mathcal{K}$ , donde  $\omega$  es binario puro y no orientable. Entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  y  $\mathcal{T}_0$  triangulación de  $S_n^*$  adaptada a  $\mathfrak{w}_n^*$  tal que  $(\omega, \mathcal{T}) \stackrel{F}{\sim} (\mathfrak{w}_n^*, \mathcal{T}_0)$ .*

*Además, si  $Z \subset S_\omega \setminus \Gamma_\omega$  es un compacto el homeomorfismo combinatorio  $F$  se puede elegir para que  $F(Z) \subset S_{\mathfrak{w}_n^*} \setminus \Gamma_{\mathfrak{w}_n^*}$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Por el Lema 17.5 podemos suponer sin perdida de generalidad que  $\#V_\omega = 1$ , y en particular, que  $\omega$  no tiene pares adyacentes de primera especie.

Como  $\omega$  es no orientable ha de tener pares de segunda especie. Veamos que podemos encontrar  $(\mu_1, \mathcal{T}_1) \in \mathcal{K}$  equivalente a  $(\omega, \mathcal{T})$  con  $\text{Long}(\mu_1) = \text{Long}(\omega)$ , con  $\#V_{\mu_1} = 1$  y con todos los pares de segunda especie adyacentes.

En efecto, supongamos que hay un par de segunda especie no adyacente en  $\omega$  con símbolo  $a_1$ , y escribamos  $\omega = \omega_1 \omega_2 a_1 \omega_3 \omega_4 a_1$  donde  $\omega_1, \omega_3 \neq 1$  y  $\omega_2 = \omega_4 = 1$ . Aplicando la regla Lema 17.3-(a)-(iv),

$$(\omega, \mathcal{T}) \sim (\omega_3^{-1} \omega_1 b_1 b_1, \mathcal{T}').$$

De esta forma sustituimos el par de segunda especie asociado a  $a_1$  en  $\omega$  por el adyacente con símbolo  $b_1$  en el nuevo esquema  $\omega' := \omega_3^{-1} \omega_1 b_1 b_1$ , manteniendo la longitud del esquema y el hecho de que  $\#V_{\omega'}$  sea unitario. Obsérvase que de haber un par de segunda especie adyacente en  $\omega$ , obviamente con símbolo distinto a  $a_1$ , éste ha de estar

necesariamente incluido en  $\omega_1$  ó en  $\omega_3$ , por lo que nuestro procedimiento traduce ese par adyacente en otro de igual naturaleza en  $\omega'$ . Por tanto el procedimiento aplicado es acumulativo y no deshace el trabajo previo. Si  $\omega'$  presentase pares de segunda especie no adyacentes, se reiteraría el procedimiento anterior hasta llegar a una pareja  $(\mu_1, \mathcal{T}_1) \in \mathcal{K}$  satisfaciendo las propiedades deseadas.

Supongamos que  $\mu_1$  tiene un par de primera especie, obviamente no adyacente.

Veamos que entonces podemos encontrar  $(\mu_2, \mathcal{T}_2) \in \mathcal{K}$  equivalente a  $(\mu_1, \mathcal{T}_1)$ , luego a  $(\omega, \mathcal{T})$ , con  $\text{Long}(\mu_2) = \text{Long}(\mu_1)$ , con  $\sharp V_{\mu_2} = 1$  y con más pares de segunda especie que  $\mu_1$ , todos ellos adyacentes. En efecto, supongamos que existe un par de primera especie en  $\mu_1$  con sílaba  $c_1$ . Podemos escribir  $\mu_1 = \nu_1 c_1 \nu_2 c_1^{-1} \nu_3 a_1 a_1$  para ciertos subesquemas  $\nu_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , y para cierto  $a_1$ . Aplicando la regla (a)-(iv) del Lema 17.3 para las elecciones  $\nu_1 \rightsquigarrow \nu_1 c_1$ ,  $\nu_2 \rightsquigarrow \nu_2 c_1^{-1} \nu_3$ ,  $\nu_3 = \nu_4 \rightsquigarrow 1$ , obtendríamos que

$$(\mu, \mathcal{T}_1) \sim (\nu_1 c_1 b_1 \nu_3^{-1} c_1 \nu_2^{-1} b_1, \mathcal{T}_1').$$

Como cada par de segunda especie de  $\mu_1$ , distinto del determinado por  $a_1$ , está contenido en  $\nu_j$  para algún  $j = 1, 2, 3$ , inferimos que el esquema  $\mu'_1 := \nu_1 c_1 b_1 \nu_3^{-1} c_1 \nu_2^{-1} b_1$  tiene un par de segunda especie más que  $\mu_1$ , su misma longitud y  $\sharp(V_{\mu'_1}) = 1$ . La pareja  $(\mu'_1, \mathcal{T}_1') \in \mathcal{K}$  puede ser sometida al primer procedimiento aplicado a  $(\omega, \mathcal{T})$ , lo que nos llevaría a un par  $(\mu_2, \mathcal{T}_2) \in \mathcal{K}$  satisfaciendo lo deseado.

Si  $\mu_2$  tuviese de nuevo un par de primera especie, someteríamos a  $(\mu_2, \mathcal{T}_2)$  al mismo procedimiento que acabamos de explicar para  $(\mu_1, \mathcal{T}_1)$ , y así sucesivamente. Tras una cantidad finita de pasos llegaremos a un par  $(\mu, \mathcal{T}_0) \in \mathcal{K}$  equivalente a  $(\omega, \mathcal{T})$ , con  $n := \text{Long}(\mu) = \text{Long}(\omega)$ , con todos los pares de segunda especie adyacentes, sin pares de primera especie y con  $\sharp(V_\mu) = 1$ . Necesariamente  $\mu = \mathfrak{w}_n^*$ , lo que completa la prueba.

La información extra en relación al compacto  $Z$  en el enunciado es consecuencia inmediata del uso del Lema 17.3 dentro de la demostración. ■

**Teorema 17.7 (Representaciones binarias puras orientables)** *Sea  $(\omega, \mathcal{T}) \in \mathcal{K}$ , donde  $\omega$  es binario puro y orientable. Entonces existe  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $\mathcal{T}_0$  triangulación de  $S_n$  adaptada a  $\mathfrak{w}_n$  tal que  $(\omega, \mathcal{T}) \stackrel{F}{\sim} (\mathfrak{w}_n, \mathcal{T}_0)$ .*

*Además, si  $Z \subset S_\omega \setminus \Gamma_\omega$  es un compacto, el homeomorfismo combinatorio  $F$  se puede lograr para que  $F(Z) \subset S_{\mathfrak{w}_n} \setminus \Gamma_{\mathfrak{w}_n}$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Como  $\omega$  es orientable todos sus pares son de primera especie. Por el Lema 17.5 podemos reducirnos al caso en que  $V_\omega$  contiene un sólo vértice.

Introduzcamos el siguiente lenguaje. Dos pares de primera especie en  $\omega$ , que representaremos con los símbolos  $a$  y  $b$ , se dirán en *posición enlazada* si su disposición en la secuencia que define  $\omega$  es la siguiente:

$$\omega = \nu_1 a \nu_2 b \nu_3 a^{-1} \nu_4 b^{-1} \nu_5.$$

Si adicionalmente  $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 1$ , esto es, si  $\omega = \nu_1 a b a^{-1} b^{-1} \nu_5$ , entonces se dirá que la pareja de pares enlazados representada por  $a$  y  $b$  es *adyacente*.

Primero observemos que toda pareja de primera especie en  $\omega$  está en posición enlazada con alguna otra pareja de primera especie en  $\omega$ . En efecto, en otro caso existe un par de primera especie en  $\omega$ , representado por la letra  $a_1$ , que no está enlazado con ningún otro par de primera especie en  $\omega$ . Tengamos presente que las parejas  $aa^{-1}$  no ocurren en  $\omega$  por nuestro trabajo previo (sólo hay un vértice en  $V_\omega$ ), y por tanto  $\omega = a_1 \nu_1 a_1^{-1} \nu'_1$ , donde  $\nu_1, \nu'_1 \neq 1$ . Por nuestra suposición, para cualquiera  $b \in \text{sop}(\nu_1)$  necesariamente  $b^{-1} \in \text{sop}(\nu_1)$ , y análogamente con  $\nu'_1$ . Por tanto el conjunto de vértices

de  $V_\omega$  aportados por la secuencia  $\nu_1$  ha de ser disjunto del asociado a la secuencia  $\nu'_1$ , generando una contradicción.

Vamos a explicar un procedimiento que generará una pareja *adyacente* de pares de primera especie enlazados extra a partir de una pareja no adyacente de pares de primera especie enlazados en  $\omega$ . Este método será acumulativo, en el sentido de que si  $\omega$  contuviese  $k$  parejas adyacentes de pares enlazados, el resultado final sería un esquema con  $k + 1$  parejas adyacentes de pares enlazados. Además preservará la propiedad de que el conjunto de vértices del esquema es unitario. Vayamos a los detalles.

Supongamos que  $\omega$  contiene  $k \geq 0$  parejas adyacentes de pares enlazados y que  $\text{Long}(\omega) > 4k$ . Veamos que existe un esquema binario  $\mu_1$  y una triangulación  $\mathcal{T}_1$  de  $S_{\mu_1}$  adaptada a  $\mu_1$  tales que:

- $(\mu_1, \mathcal{T}_1)$  es equivalente a  $(\omega, \mathcal{T})$ .
- $\text{Long}(\mu_1) = \text{Long}(\omega)$ .
- $V_{\mu_1}$  contiene un único vértice.
- $\mu_1$  tiene  $k + 1$  parejas adyacentes de pares enlazados.

Como  $\omega$  tiene una pareja de primera especie no adyacente de pares enlazados, podemos escribir  $\omega = \nu_1 a_1 \nu_2 a_2 \nu_3 a_1^{-1} \nu_4 a_2^{-1}$  para ciertos símbolos  $a_1$  y  $a_2$ . Por la regla Lema 17.3-(a)-(iii) aplicada para las elecciones  $\nu_1 \rightsquigarrow \nu_1 a_1$ ,  $\nu_2 \rightsquigarrow \nu_2$ ,  $a \rightsquigarrow a_2$ ,  $\nu_3 \rightsquigarrow \nu_3$  y  $\nu_4 \rightsquigarrow a_1^{-1} \nu_4$ , obtenemos que

$$(\omega, \mathcal{T}) \sim (\omega', \mathcal{T}'), \quad \omega' = \nu_2 \nu_1 a_1 b_1 a_1^{-1} \nu_4 \nu_3 b_1^{-1} \equiv \nu_4 \nu_3 b_1^{-1} \nu_2 \nu_1 a_1 b_1 a_1^{-1}.$$

Por Lema 17.3-(a)-(iii) de nuevo aplicado en  $\omega'$  para  $\nu_1 \rightsquigarrow \nu_4 \nu_3 b_1^{-1}$ ,  $\nu_2 \rightsquigarrow \nu_2 \nu_1$ ,  $a \rightsquigarrow a_1$ ,  $\nu_3 \rightsquigarrow b_1$  y  $\nu_4 \rightsquigarrow 1$ , obtenemos que

$$(\omega', \mathcal{T}') \sim (\omega'', \mathcal{T}''), \quad \omega'' = \nu_2 \nu_1 \nu_4 \nu_3 b_1^{-1} d_1 b_1 d_1^{-1} \equiv b_1^{-1} d_1 b_1 d_1^{-1} \nu_2 \nu_1 \nu_4 \nu_3.$$

Notemos que por la naturaleza de la regla Lema 17.3-(a)-(iii) no se ha destruido ninguna pareja adyacente de pares enlazados preexistente en  $\omega$ . De igual modo el conjunto de vértices tanto de  $\omega'$  como de  $\omega''$  es unitario. Por conveniencia cambiaremos el símbolo  $b_1$  por  $c_1^{-1}$ , y por tanto  $b_1^{-1}$  por  $c_1$ . Llamemos  $\omega_1 = \nu_2 \nu_1 \nu_4 \nu_3$  y definamos la pareja

$$(\mu_1 := c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \omega_1, \mathcal{T}_1 := \mathcal{T}'') \in \mathcal{K},$$

obviamente equivalente a  $(\omega, \mathcal{T})$ . Por su generación, es claro también que  $\mu_1$  es puro, orientable y con  $\text{Long}(\mu_1) = \text{Long}(\omega)$ . Por tanto la pareja  $(\mu_1, \mathcal{T}_1)$  satisface las propiedades deseadas.

Si  $\mu_1 \neq \mathfrak{w}_n$  para algún  $n$ , ha de contener alguna pareja no adyacente de pares de primera especie enlazados y podemos reiterar el procedimiento anterior. Tras una cantidad finita de pasos llegaremos a una pareja  $(\mu, \mathcal{T}_0)$  equivalente a  $(\omega, \mathcal{T})$  de forma que  $\mu = \mathfrak{w}_n$  para algún  $n$ , probando el resultado.

La información extra en relación al compacto  $Z$  en el enunciado es consecuencia inmediata del uso del Lema 17.3 dentro de la demostración. ■

Estamos en condiciones de probar el siguiente

**Corolario 17.8 (Clasificación de las superficies compactas sin borde)** *Si  $S$  es una superficie topológica compacta sin borde, entonces  $S$  es homeomorfa a una superficie de la lista*

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} &:= \{S_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{S_n^* : n \in \mathbb{N}\} = \\ &= \left\{ S_{\mathfrak{w}} : \mathfrak{w} \in \{\mathfrak{w}_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{\mathfrak{w}_n^* : n \in \mathbb{N}\} \right\},\end{aligned}$$

en la que ningún par de superficies es homeomorfo entre sí. Al número  $n$  en ambos casos se le llama género de la superficie.

En particular, si  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  son dos triangulaciones de  $S$  entonces:

- $\chi_{\mathcal{T}_1}(S) = \chi_{\mathcal{T}_2}(S)$ .
- $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  tienen el mismo carácter de orientabilidad.

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que el Corolario 16.4 garantiza que en la lista de superficies  $\mathfrak{S}$  no hay dos espacios homeomorfos.

Por el Teorema de Radó  $S$  admite una triangulación  $\mathcal{T}$ . Por el Teorema 16.23, existe un esquema  $\omega_{\mathcal{T}}$  binario, una triangulación  $\mathcal{T}'$  de  $S_{\omega_{\mathcal{T}}}$  adaptada a  $\omega_{\mathcal{T}}$  y un homeomorfismo combinatorio  $F: (S, \mathcal{T}) \rightarrow (S_{\omega_{\mathcal{T}}}, \mathcal{T}')$ . Por la Proposición 16.19,  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  reflejan el mismo valor para la característica de Euler y tienen el mismo carácter de orientabilidad. Por los Teoremas 17.6 y 17.7,  $(S_{\omega_{\mathcal{T}}}, \mathcal{T}') \sim (S_{\mathfrak{w}}, \mathcal{T}_0) \in \mathcal{K}$  para un *único esquema* canónico  $\mathfrak{w} \in \{\mathfrak{w}_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{\mathfrak{w}_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ . Esto prueba la primera parte del teorema.

Por otra parte, de las Proposiciones 16.21 y 16.19 deducimos que *para cualquier* triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$ :

- $\chi_{\mathcal{T}}(S) = \chi_{\omega_{\mathcal{T}}}(S_{\omega_{\mathcal{T}}}) = \chi_{\mathcal{T}_0}(S_{\mathfrak{w}}) = 1 + \chi(\Gamma_{\mathfrak{w}})$ .
- $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}_0$  tienen el mismo carácter de orientabilidad, a saber, el de  $S_{\mathfrak{w}}$  (ó  $\mathfrak{w}$ ).

Por tanto la característica de Euler y el carácter de orientabilidad no dependen de la triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$  elegida, sólo de la única superficie en la lista  $\mathfrak{S}$  a la que  $S$  es homeomorfa. Esto concluye el Corolario. ■

Como consecuencia, la siguiente definición es consistente.

**Definición 17.9** *Sea  $S$  una superficie topológica compacta sin borde.*

*Definiremos la característica de Euler de  $S$  como el número entero*

$$\chi(S) := \chi_{\mathcal{T}}(S), \quad \mathcal{T} \text{ cualquiera triangulación de } S.$$

*De igual forma,  $S$  se dirá orientable (no orientable) si  $\mathcal{T}$  es orientable (no orientable), donde  $\mathcal{T}$  es cualquiera triangulación de  $S$ .*

**Corolario 17.10** *Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies topológicas compactas sin borde.*

- (I)  $S_1 \cong S_2 \iff \chi(S_1) = \chi(S_2)$  y tienen ambas el mismo carácter de orientabilidad.
- (II)  $S_1 \cong S_2 \iff \Pi_1(S_1) \cong \Pi_1(S_2)$ .

DEMOSTRACIÓN: Por cálculo directo

$$\chi(S_{\mathfrak{w}_n}) = 1 + \chi(\Gamma_{\mathfrak{w}_n}) = 2 - 2n \quad \text{y} \quad \chi(S_{\mathfrak{w}_n^*}) = 1 + \chi(\Gamma_{\mathfrak{w}_n^*}) = 2 - n.$$

Por tanto la característica de Euler y el carácter de orientabilidad discriminan todos los objetos de la lista canónica de superficies  $\mathfrak{S}$  del Corolario 17.8. El ítem (I) se sigue de forma trivial. Ítem (II) es consecuencia de la Definición 9.10 y el Corolario 9.11. ■

## 17.2. Clasificación de las superficies compactas con borde

La siguiente proposición jugará un papel fundamental.

**Proposición 17.11** *Sea  $(S_j, \mathcal{T}_j)$  una superficie compacta triangulada con  $\text{Bd}(S_j) \neq \emptyset$ ,  $j = 1, 2$  con  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Fijemos una componente conexa  $\gamma_j \subset \text{Bd}(S_j)$ ,  $j = 1, 2$ , y un homeomorfismo  $h: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ . Consideremos en el espacio topológico suma  $X = S_1 \cup S_2$  la relación de equivalencia:*

$$p \sim_h q \iff p = q \quad \text{ó} \quad \{p, q\} = \{r, h(r)\} \text{ para algún } r \in \gamma_1.$$

*Entonces  $S := X/\sim_h$  es una superficie topológica compacta y  $\gamma_j$  es homeomorfa vía  $\sigma$  a  $\gamma := \sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2) \subset \text{Int}(S)$ ,  $j = 1, 2$ , donde  $\sigma: X \rightarrow S$  es la proyección. Además existen  $\mathcal{T}'_j \prec \mathcal{T}_j$ ,  $j = 1, 2$ , tales que  $\sigma|_T: T \rightarrow \sigma(T)$  es un homeomorfismo para todo  $T \in \mathcal{T}'_j$ ,  $j = 1, 2$ , y  $\mathcal{T} := \{\sigma(T): T \in \mathcal{T}'_1 \cup \mathcal{T}'_2\}$  es una triangulación de  $S$ . En particular,*

(a)  $\chi_{\mathcal{T}}(S) = \chi_{\mathcal{T}_1}(S_1) + \chi_{\mathcal{T}_2}(S_2).$

(b)  $\mathcal{T}$  es orientable  $\iff \mathcal{T}_j$  es orientable,  $j = 1, 2$ .

**DEMOSTRACIÓN:** No es difícil comprobar de la Observación 2.6 que  $S$  es Hausdorff y II-Axioma de Numerabilidad. Por tanto, para comprobar que  $S$  es superficie topológica bastará con garantizar que  $S$  es localmente euclidiana alrededor de los puntos en  $\gamma$ . En efecto, tomemos  $p \in \gamma$  arbitrario y llamemos  $p_j := \sigma^{-1}(p) \cap S_j \in \gamma_j \subset \text{Bd}(S_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Elijamos un abierto  $D_j \subset S_j$  conteniendo a  $p_j$  y un homeomorfismo

$$F_j: D_j \rightarrow D_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\} \text{ con } F_j(p_j) = (0, 0), \quad j = 1, 2.$$

Obsérvese que  $\beta_j := D_j \cap \text{Bd}(S_j) = F_j^{-1}([ -1, 1] \times \{0\})$  es un arco de Jordan abierto en  $\gamma_j$  conteniendo  $p_j$ , y sin pérdida de generalidad supongamos que  $h(\beta_1) = \beta_2$ . Claramente  $D_1 \cup D_2$  es un abierto  $\sigma$ -saturado de  $X$ , por lo que  $\hat{D} := \sigma(D_1 \cup D_2)$  es abierto en  $S$  y la aplicación  $\sigma|_{D_1 \cup D_2}: D_1 \cup D_2 \rightarrow \hat{D}$  es una identificación (continua, sobreyectiva y abierta). Si escribimos  $\sigma_0 := \sigma|_{D_1 \cup D_2}$ , la relación de equivalencia  $\sim_{\sigma_0}$  no es sino la que corresponde al pegado de los semidisos abiertos  $D_1$  y  $D_2$  por el homeomorfismo  $h|_{\beta_1}: \beta_1 \rightarrow \beta_2$ , por lo que  $(D_1 \cup D_2)/\sim_{\sigma_0} \cong \hat{D}$  es homeomorfo al disco unidad abierto. Se deduce que  $p \in S$  admite un abierto (a saber  $\hat{D}$ ) homeomorfo a un disco abierto plano. Esto prueba que  $S$  es una superficie y  $\gamma \subset \text{Int}(S)$ . Claramente  $\gamma_j \cong \gamma$  vía  $\sigma$ ,  $j = 1, 2$ .

Usando las ideas en la prueba de la Proposición 16.13, es fácil construir subdivisiones  $\mathcal{T}'_j \prec \mathcal{T}_j$ ,  $j = 1, 2$ , compatibles a lo largo de  $\gamma$ , esto es, con  $\sigma(V(\mathcal{T}'_1)) \cap \gamma = \sigma(V(\mathcal{T}'_2)) \cap \gamma$ . De hecho, ésto se puede llevar a cabo de forma elemental subdividiendo exclusivamente los triángulos de  $\mathcal{T}_j$  con algún lado en  $\gamma_j$  de forma que  $V(\mathcal{T}'_j) \cap \text{Int}(S_j) = V(\mathcal{T}_j) \cap \text{Int}(S_j)$ . Una vez hecho esto, la familia de triángulos

$$\mathcal{T} := \{\sigma(T): T \in \mathcal{T}'_1 \cup \mathcal{T}'_2\}$$

determina la triangulación deseada de  $S$ .

Como los lados y vértices de  $\mathcal{T}'_j$  que descansan en la curva de Jordan  $\gamma_j$  aportan 0 al cálculo de  $\chi_{\mathcal{T}'_j}(S_j)$ ,  $j = 1, 2$ , de la Proposición 16.19 inferimos que

$$\chi_{\mathcal{T}}(S) = \chi_{\mathcal{T}'_1}(S_1) + \chi_{\mathcal{T}'_2}(S_2) = \chi_{\mathcal{T}_1}(S_1) + \chi_{\mathcal{T}_2}(S_2).$$

Esto prueba (a).

Probemos (b). Por la Proposición 16.19 sabemos que la orientabilidad de  $\mathcal{T}_j$  es equivalente a la orientabilidad de  $\mathcal{T}'_j$ . La implicación  $\implies$  es trivial sin más que levantar a  $\mathcal{T}'_j$  vía  $\sigma$  las orientaciones de los triángulos compatiblemente orientados de  $\mathcal{T}$ ,  $j = 1, 2$ . Para la recíproca, supongamos que  $\mathcal{T}'_j$  es orientable,  $j = 1, 2$ , y elijamos una orientación global compatible en los triángulos de  $\mathcal{T}'_j$ ,  $j = 1, 2$ . La orientación de los triángulos de  $\mathcal{T}'_j$  con un lado en  $\text{Bd}(S_j)$  induce una orientación de ese lado contenido en  $\text{Bd}(S_j)$ , que globalmente contemplada determina un sentido de recorrido de cada curva de Jordan en  $\text{Bd}(S_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Si las orientaciones inducidas sobre los lados en  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  por  $\mathcal{T}'_1$  y  $\mathcal{T}'_2$  respectivamente fuesen coincidentes, cambiaríamos la orientación global de  $\mathcal{T}'_1$  a su opuesta para lograr que sean opuestas. Una vez hecho esto, orientamos cada triángulo de  $\mathcal{T}$  proyectando vía  $\sigma$  las orientaciones de los triángulos de  $\mathcal{T}'_1 \cup \mathcal{T}'_2$ , generando así una orientación global compatible en  $\mathcal{T}$  y probando que esta triangulación de  $S$  es orientable. ■

**Lema 17.12** *Sea  $S$  una superficie, sea  $X_1, \dots, X_k$ ,  $k \geq 1$ , una colección de discos topológicos compactos disjuntos dos a dos en  $\text{Int}(S)$ , y sea  $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$  una colección de arcos de Jordan disjuntos dos a dos en  $\text{Int}(S)$ . Admitamos que  $\gamma_j$  tiene punto inicial en  $\text{Bd}(X_j)$  y punto final en  $\text{Bd}(X_{j+1})$  e  $\text{Int}(\gamma_j) \cap ((\cup_{i=1}^k X_i) \cup (\cup_{i \neq j} \gamma_i)) = \emptyset$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ .*

*Supongamos que existe una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$  de forma los discos  $X_j$  y los arcos  $\gamma_i$  sean uniones de triángulos de  $F(\mathcal{T})$  y lados de  $E(\mathcal{T})$ , respectivamente.*

*Entonces, para todo abierto  $U \subset \text{Int}(S)$  conteniendo a  $X := \cup_{j=1}^{k-1} (X_j \cup \gamma_j \cup X_{j+1})$  existen  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$  y un disco topológico compacto  $Y_0$  en  $S$  tales que:*

- $Y_0$  es unión de triángulos de  $\mathcal{T}'$ .
- $X \subset \text{Int}(Y_0) \subset Y_0 \subset U$ .

DEMOSTRACIÓN: Por conveniencia pongamos  $\text{Bd}(X) = \cup_{j=1}^{k-1} (\text{Bd}(X_j) \cup \gamma_j \cup \text{Bd}(X_{j+1}))$  y  $X_0 := \cup_{j=1}^k X_k$ . Llamemos

$$\mathcal{T}_X = \{T \in \mathcal{T} : T \cap \text{Bd}(X) \neq \emptyset, T \not\subset X\}.$$

Salvo previamente realizar una apropiada subdivisión de  $\mathcal{T}$  (por ejemplo, asociada a una nube suficientemente densa de puntos y un recubrimiento abierto  $\mathcal{V}$  suficientemente fino de  $S$ ; usar la Proposición 16.13), podemos suponer que  $T \cap \text{Bd}(X)$  consiste en un lado o un vértice de  $T$  para todo  $T \in \mathcal{T}_X$  y que

$$\cup_{T \in \mathcal{T}_X} T \subset U.$$

Para cada  $T \in \mathcal{T}_X$  elijamos un punto  $v_T \in \text{Int}(T)$  y dos puntos  $x_{l_1, T} \in \text{Int}(l_1)$ ,  $x_{l_2, T} \in \text{Int}(l_2)$ , donde  $l_1$  y  $l_2$  son los dos lados de  $T$  no contenidos en  $\text{Bd}(X)$ . Escribamos  $A_T = \{v_T, x_{l_1, T}, x_{l_2, T}\}$ . Hagamos estas elecciones de forma que si  $T_1$  y  $T_2 \in \mathcal{T}_X$  comparten un lado  $l$  entonces  $x_{l, T_1} = x_{l, T_2}$ .

Llamemos  $A = \cup_{T \in \mathcal{T}_X} A_T$  y consideremos, vía la Proposición 16.13, una subdivisión  $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$  tal que  $A \subset V(\mathcal{T}')$ . Tracemos dentro de cada triángulo  $T \in \mathcal{T}_X$  un arco de Jordan pasando por los tres puntos de  $A_T$ , contenido en  $\cup_{l \in E(\mathcal{T}')} l$  y con  $\text{Int}(\gamma_T) \subset \text{Int}(T)$  (luego disjunto de  $X$ ). Como la configuración de triángulos de  $\mathcal{T}'$  en  $T$  admite una realización por triángulos geométricos en el plano, el Teorema 3.15 nos permite concluir que  $\gamma_T$  parte  $T$  en dos componentes conexas que son discos topológicos compactos, uno de ellos, que llamaremos  $D_T$ , satisfaciendo  $D_T \cap X = T \cap X$  y el otro disjunto de  $X$ . A modo de resumen, por construcción:

- $\text{Bd}(D_T) \subset \cup_{l \in E(\mathcal{T}')} l$ , por lo que  $D_T$  es unión de triángulos de  $\mathcal{T}'$ .
- $D_{T_1} \cap D_{T_2} \neq \emptyset$  si y sólo si  $T_1 \cap T_2$  comparten un lado  $l$  no contenido en  $X$  e incidente con un vértice  $v \in V(\mathcal{T}) \cap \text{Bd}(X)$ , y en este caso  $D_{T_1} \cap D_{T_2} = \text{Bd}(D_{T_1}) \cap \text{Bd}(D_{T_2})$  es un arco de Jordan en  $l$  con punto inicial  $v \in \text{Bd}(X)$ .
- $D_T \cap X \subset \text{Bd}(X)$  y consiste o en un vértice de  $V(\mathcal{T})$  o un lado de  $E(\mathcal{T})$ .
- $D_T$  corta exactamente a dos discos de la familia  $\{D_{T'} : T' \in \mathcal{T}_X \setminus \{T\}\}$ .
- $\text{Bd}(D_T) \setminus \left( X \cup \left( \bigcup_{T' \in \mathcal{T}_X \setminus \{T\}} D_{T'} \right) \right) \neq \emptyset$  es un arco de Jordan abierto.

Llamemos

$$Y_j = X_j \cup \left( \bigcup_{\{T \in \mathcal{T}_X, T \cap X_j \neq \emptyset\}} D_T \right), \quad j = 1, \dots, k.$$

Usando la Proposición 3.11 es fácil ver que  $Y_j$  es un disco topológico compacto conteniendo a  $X_j$  en su interior. En efecto, ordenemos cíclicamente  $\{D_1, \dots, D_m\}$  los discos de la familia  $\{D_T : T \in \mathcal{T}_X, T \cap X_j \neq \emptyset\}$  de forma que:

- $D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset$  es un arco de Jordan en el borde común a ambos discos,  $j = 1, \dots, m$ , donde  $D_{m+1} = D_1$ , y por tanto
- $D_j \cap D_i \neq \emptyset$  si y sólo si  $i = j - 1, j, j + 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ , donde  $D_0 = D_m$  y  $D_{m+1} = D_1$ .

Como  $X_j$  y  $D_1$  comparten un arco de Jordan  $\beta_1$  borde común,  $X_j \cup D_1$  es un disco. Por un proceso inductivo, como  $\beta_{i+1} := D_{i+1} \cap (X_j \cup (\cup_{a=1}^i D_a))$  es un arco de Jordan borde común a los discos  $D_{i+1}$  y  $X_j \cup (\cup_{a=1}^i D_a)$ , se concluye que  $X_j \cup (\cup_{a=1}^{i+1} D_a)$  es un disco,  $i = 1, \dots, m - 1$ . Finalmente  $Y_j = X_j \cup (\cup_{a=1}^m D_a)$  es un disco. La Proposición 3.11 también garantiza durante el proceso inductivo que  $\text{Bd}(X_j)$  está contenido en  $\text{Int}(Y_j)$ , por lo que  $X_j \subset \text{Int}(Y_j)$ .

Por un procedimiento similar, el conjunto

$$Z_j = \bigcup_{\{T \in \mathcal{T}_X, T \cap X_0 = \emptyset, T \cap \gamma_j \neq \emptyset\}} D_T$$

es un disco topológico conteniendo a  $\text{Int}(\gamma_j)$  en su interior,  $j = 1, \dots, k - 1$ . En efecto, la familia  $\{T \in \mathcal{T}_X, T \cap X_0 = \emptyset, T \cap \gamma_j \neq \emptyset\}$  se puede poner como unión ordenada de dos familias de discos  $\{D_i^+ : i = 1, \dots, s\}$  y  $\{D_i^- : i = 1, \dots, s\}$ , de forma que

- $D_j^+ \cap D_{j+1}^+ \neq \emptyset$  es un arco de Jordan en el borde común a ambos discos,  $j = 1, \dots, s$ ,
- $D_T \cap X \subset \gamma_j$  y consiste o en un vértice de  $V(\mathcal{T})$  o un lado de  $E(\mathcal{T})$ .
- $D_j^+ \cap D_i^+ \neq \emptyset$  si y sólo si  $i$  y  $j$  son enteros consecutivos,

y análogamente con los discos  $\{D_i^- : i = 1, \dots, s\}$ . Razonando como arriba,  $\cup_{j=1}^s D_j^+$  y  $\cup_{j=1}^s D_j^-$  son discos topológicos. Como

$$(\cup_{j=1}^s D_j^+) \cap (\cup_{j=1}^s D_j^-) = \gamma_j \setminus (\text{Est}_{\mathcal{T}}^*(v_j) \cup \text{Est}_{\mathcal{T}}^*(v_{j+1})),$$

donde  $v_j := X_j \cap \gamma_j$  y  $v_{j+1} := X_j \cap \gamma_j$ , la Proposición 3.11 garantiza que  $Z_j = (\cup_{j=1}^s D_j^+) \cup (\cup_{j=1}^s D_j^-)$  es un disco topológico,  $j = 1, \dots, k - 1$ .



Por construcción,  $Y_j \cap Z_j$  es un arco de Jordan en  $\text{Bd}(\text{Est}_{\mathcal{T}}(v_j))$ , y de forma similar  $Z_j \cap Y_{j+1}$  es un arco de Jordan en  $\text{Bd}(\text{Est}_{\mathcal{T}}(v_{j+1}))$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ . Como  $Z_j \cap Z_i = \emptyset$ ,  $Y_j \cap Y_i = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , y  $Z_i \cap Y_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $i$  y  $j$  son consecutivos, un razonamiento cíclico ordenado usando la Proposición 3.11 nos permite concluir que

$$Y_0 := \bigcup_{j=1}^{k-1} (Y_j \cup Z_j \cup Y_{j+1})$$

es un disco topológico. Obviamente  $X \subset \text{Int}(Y_0)$ ,  $Y_0$  es unión de triángulos de  $\mathcal{T}'$  e  $Y_0 \subset U$ , lo que concluye la proposición. ■

Ahora podemos afrontar los teoremas centrales de esta sección.

**Corolario 17.13 (Clasificación de las superficies compactas con borde)** *Si  $S$  es una superficie topológica compacta con borde, entonces  $S$  es homeomorfa a una superficie de la lista*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^* &:= \{S_{n,k} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{S_{n,k}^* : n, k \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{S_{\mathfrak{w}} : \mathfrak{w} \in \{\mathfrak{w}_{n,k} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathfrak{w}_{n,k}^* : n, k \in \mathbb{N}\}\}, \end{aligned}$$

donde ningún par de superficies es homeomorfo entre sí. Al número  $n$  en ambos casos se le llama género de la superficie.

En particular, para toda triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$ :

- $\chi_{\mathcal{T}}(S) = 2 - 2n - k$  si  $S \cong S_{n,k}$  y  $\chi_{\mathcal{T}}(S) = 2 - n - k$  si  $S \cong S_{n,k}^*$ .
- $\mathcal{T}$  es orientable si  $S \cong S_{n,k}$  y no orientable si  $S \cong S_{n,k}^*$ .

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que el Corolario 16.4 garantiza que en la lista de superficies  $\mathfrak{S}^*$  no hay dos espacios homeomorfos.

Por el Teorema de Radó  $S$  es triangulable. Tomemos una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $S$  y escribamos  $\text{Bd}(S) = \bigcup_{j=1}^k \gamma_j$ , donde  $\gamma_j$  son curvas de Jordan disjuntas dos a dos. Elijamos  $X_1, \dots, X_k$  discos topológicos compactos disjuntos dos a dos. Construyamos una triangulación  $\mathcal{T}_j$  de  $X_j$  con la misma cantidad de lados en  $\text{Bd}(X_j)$  que  $\mathcal{T}$  en  $\gamma_j$ , y a continuación un homeomorfismo  $h_j : \gamma_j \rightarrow \text{Bd}(X_j)$  que lleve lados de  $\mathcal{T}$  en lados de  $\mathcal{T}_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Aplicando inductivamente la Proposición 17.11, podemos pegar los discos  $X_j$  a  $S$  usando los homeomorfismos  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , para construir una superficie topológica compacta  $\hat{S}$  sin borde que salvo identificaciones canónicas contenga a  $S$  y a  $X_j$  para todo  $j$ . Análogamente,  $\hat{\mathcal{T}} := \mathcal{T} \cup (\bigcup_{j=1}^k \mathcal{T}_j)$  es una triangulación de  $\hat{S}$ .

Del Lema 17.12, salvo tomar una subdivisión de  $\hat{\mathcal{T}}$ , podemos suponer que existe un disco  $Y_0$  unión de triángulos de  $\hat{\mathcal{T}}$  de forma que  $\bigcup_{j=1}^k X_j \subset Y_0$ .

Por el Teorema 16.23 y la Observación 16.24, existe un esquema binario puro  $\omega$ , una triangulación  $\mathcal{T}_1$  de  $S_{\omega}$  adaptada a  $\omega$ , y un homeomorfismo combinatorio  $G : (\hat{S}, \hat{\mathcal{T}}) \rightarrow (S_{\omega}, \mathcal{T}_1)$  de forma que  $G(\text{Int}(Y_0)) \subset S_{\omega} \setminus \Gamma_{\omega}$ , y en particular  $\bigcup_{j=1}^n G(X_j) \subset S_{\omega} \setminus \Gamma_{\omega}$ . Sin pérdida de generalidad (salvo tomar subdivisiones) suponderemos que  $G(\hat{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}_1$ .

Por los Teoremas 17.6 y 17.7, existe  $H : (S_{\omega}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (S_{\mathfrak{w}}, \mathcal{T}_0)$  homeomorfismo combinatorio tal que  $\bigcup_{j=1}^k H(G(X_j)) \subset S_{\mathfrak{w}} \setminus \Gamma_{\mathfrak{w}}$  para algún  $\mathfrak{w} \in \{\mathfrak{w}_{n,k} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathfrak{w}_{n,k}^* : n, k \in \mathbb{N}\}$ . No supone pérdida de fuerza admitir que  $H(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_0$ , salvo tomar subdivisiones. Por simplicidad, en lo que sigue escribiremos  $Y_j = H(G(X_j))$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Consideremos una región poligonal  $\Delta$  en  $\mathbb{R}^2$ , una triangulación por triángulos geométricos  $\mathcal{T}^*$  de  $\Delta$ , y una identificación  $\sigma : \Delta \rightarrow S_{\mathfrak{w}}$  tal que  $\sigma(\mathcal{T}^*) = \mathcal{T}_0$  y  $\sigma(\text{Bd}(\Delta)) = \Gamma_{\mathfrak{w}}$ . La existencia de esta identificación está encerrada en el Lema 16.16 y la Proposición 16.21. Fijado  $P_0 \in \sigma^{-1}(V_{\mathfrak{w}})$  y salvo subdividir convenientemente  $\mathcal{T}^*$ , existen arcos de Jordan  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  en  $\Delta$  tales que:

- $\gamma_j$  tiene punto inicial  $P_0$ , extremos en  $\sigma^{-1}(V_{\mathfrak{w}})$  y  $\gamma_j \subset \cup_{l \in E(\mathcal{T}^*)} l$  para todo  $j$ .
- $\text{Int}(\gamma_j) \cap \text{Int}(\gamma_i) = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , e  $\text{Int}(\gamma_j) \subset \text{Int}(\Delta)$  para todo  $j$ .
- $\gamma_j \cap \sigma^{-1}(Y_i) = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , y  $\gamma_j \cap \sigma^{-1}(Y_j)$  es un arco de Jordan para todo  $j$ .

Por el Teorema 3.15, es fácil ver que las curvas  $\cup_{j=1}^k \gamma_j$  parten  $\Delta \setminus (\cup_{j=1}^k \sigma^{-1}(Y_j))$  en  $k+1$  componentes conexas, cuyos cierres son discos topológicos compactos que denotaremos por  $\Delta_1, \dots, \Delta_{k+1}$ . Sea  $\beta_j$  la componente conexa (subarco de Jordan) de  $\gamma_j \setminus \text{Int}(\sigma^{-1}(Y_j))$  que no contiene a  $P_0$  para todo  $j$ , y observemos que  $\beta_j$  descansa en el borde de dos discos de la anterior lista. Salvo añadirles una etiqueta que los distinga, podremos tratar los  $\Delta_j$ 's como disjuntos dos a dos. De esa forma, si  $\beta \in \{\beta_j : j = 1, \dots, k\}$  y  $\Delta_\beta^+$  y  $\Delta_\beta^-$  son los dos discos en  $\{\Delta_j : j = 1, \dots, k+1\}$  incidentes en  $\beta$  (llamaremos  $\beta^+ \subset \Delta_\beta^+$  y  $\beta^- \subset \Delta_\beta^-$  a las dos copias de  $\beta$  en cada uno de ellos), la aplicación  $h_\beta : \beta^+ \rightarrow \beta^-$ ,  $h_\beta := (\sigma|_{\beta^-})^{-1} \circ (\sigma|_{\beta^+})$  es un homeomorfismo. Usando la Proposición 3.11 para pegar todos los discos  $\Delta_1, \dots, \Delta_{k+1}$  vía los homeomorfismos  $\mathfrak{h} := \{h_{\beta_1}, \dots, h_{\beta_k}\}$ , generamos un nuevo disco topológico  $\Delta^* = (\cup_{j=1}^{k+1} \Delta_j) / \sim_{\mathfrak{h}}$ . Si llamamos  $\rho : \cup_{j=1}^{k+1} \Delta_j \rightarrow \Delta^*$  a la correspondiente proyección, la única aplicación

$$\sigma_0 : \Delta^* \rightarrow S_{\mathfrak{w}} \setminus (\cup_{j=1}^k Y_j), \quad \sigma_0 \circ \rho = \sigma,$$

es una identificación. Analizando la relación  $\sim_{\sigma_0}$ , esta identificación materializa la superficie  $S_{\mathfrak{w}} \setminus (\cup_{j=1}^k Y_j)$  como realización en  $\Delta^*$  del esquema  $\mathfrak{w}' := \mathfrak{w}_{n,k}$  si  $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_n$ , o del esquema  $\mathfrak{w}' := \mathfrak{w}_{n,k}^*$  si  $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_n^*$ . Al ser  $F_0 := (H \circ G)|_S : S \rightarrow S_{\mathfrak{w}} \setminus (\cup_{j=1}^k Y_j)$  un homeomorfismo, concluimos que  $S$  es homeomorfa a una superficie de la lista  $\mathfrak{S}^*$ . Llamando  $\mathcal{T}' = \{T \in \hat{\mathcal{T}} : T \subset S\}$ , que tras los procesos anteriores es una subdivisión de  $\mathcal{T}$ , de nuestra construcción se sigue que  $\mathcal{T}'_0 := F_0(\mathcal{T}')$  es una triangulación de  $S_{\mathfrak{w}'}$  adaptada a  $\mathfrak{w}'$ . Por las Proposiciones 16.19 y 16.21,

- $\mathcal{T}$  es orientable  $\iff \mathcal{T}'$  es orientable  $\iff S_{\mathfrak{w}}$  es orientable.
- $\chi_{\mathcal{T}}(S) = \chi_{\mathcal{T}'}(S) = \chi_{\mathcal{T}'_0}(S_{\mathfrak{w}'}) = 1 + \chi(\Gamma_{\mathfrak{w}'}) = 1 + \chi(\Gamma_{\mathfrak{w}}) - k = \chi(S_{\mathfrak{w}}) - k$ .

Finalmente, como las superficies en la lista  $\mathfrak{S}^*$  no son homeomorfas dos a dos, cada par de triangulaciones distintas  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  de  $S$  nos han de dirigir por el proceso anterior a homeomorfismos sobre la misma realización canónica  $S_{\mathfrak{w}'}$ , de forma que salvo subdivisiones ambas triangulaciones se aplican vía estos homeomorfismos en triangulaciones de  $S_{\mathfrak{w}'}$  adaptadas a  $\mathfrak{w}'$ . En consecuencia  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  han de tener el mismo carácter de orientabilidad (a saber el de  $S_{\mathfrak{w}'}$ ) y la misma caraterística de Euler (a saber,  $1 + \chi(\Gamma_{\mathfrak{w}'})$ ). Esto concluye la demostración. ■

Como consecuencia, la siguiente definición es consistente.

**Definición 17.14** *Sea  $S$  una superficie topológica compacta con borde.*

*Definiremos la característica de Euler de  $S$  como el número entero*

$$\chi(S) := \chi_{\mathcal{T}}(S), \quad \mathcal{T} \text{ cualquier triangulación de } S.$$

*De igual forma,  $S$  se dirá orientable (no orientable) si  $\mathcal{T}$  es orientable (no orientable), donde  $\mathcal{T}$  es cualquiera triangulación de  $S$ .*

**Corolario 17.15** *Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies topológicas compactas con borde.*

- (I)  $S_1 \cong S_2 \iff \chi(S_1) = \chi(S_2)$ ,  $S_1$  y  $S_2$  tienen el mismo carácter de orientabilidad y  $S_1$  y  $S_2$  tienen la misma cantidad de componentes conexas en el borde.
- (II)  $S_1 \cong S_2 \iff \Pi_1(S_1) \cong \Pi_1(S_2)$  y  $S_1$  y  $S_2$  tienen la misma cantidad de componentes conexas en el borde.

DEMOSTRACIÓN: Probemos item (I).

$\Rightarrow$ ) Sea  $H: S_1 \rightarrow S_2$  un homeomorfismo, y sea  $\mathcal{T}_1$  una triangulación de  $S_1$ . La triangulación  $\mathcal{T}_2 := H(\mathcal{T}_1)$  de  $S_2$  tiene el mismo carácter de orientabilidad y característica de Euler que  $\mathcal{T}_1$ , por lo que  $S_1$  y  $S_2$  tienen el mismo carácter de orientabilidad y característica de Euler. Como el número de componentes en el borde es un invariante topológico,  $S_1$  y  $S_2$  tienen la misma cantidad de componentes en el borde.

$\Leftarrow$ ) La Proposición 16.21 garantiza que  $S_{n,k}$  y  $S_{n,k}^*$  admiten triangulaciones adaptadas a  $\mathfrak{w}_{n,k}$  y  $\mathfrak{w}_{n,k}^*$ , que puede ser utilizadas para calcular la característica de Euler y determinar el carácter de orientabilidad. Por tanto,  $S_{n,k}$  es una superficie orientable con  $k$  componentes en el borde y

$$\chi(S_{n,k}) = 1 + \chi(\Gamma_{n,k}) = 1 + \chi(\Gamma_n) - k = \chi(S_n) - k = 2 - 2n - k.$$

Análogamente  $S_{n,k}^*$  es una superficie no orientable con  $k$  componentes en el borde y

$$\chi(S_{n,k}^*) = \chi(S_n^*) - k = 2 - n - k.$$

Por tanto, la característica de Euler, el carácter de orientabilidad y el número de componentes en el borde discriminan las superficies de  $\mathfrak{S}^*$ . Esto prueba (I).

El item (II) es análogo, ya que si dos superficies tienen el mismo carácter de orientabilidad y el mismo número  $k$  de componentes en el borde, por el Corolario 17.13 han de estar en la lista  $\{S_{n,k}: n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  si son orientables o en la lista  $\{S_{n,k}^*: n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  si no lo son. La Definición 9.12 implica que son homeomorfas si y sólo tienen el mismo grupo fundamental. ■

### 17.3. Suma conexa de superficies

Consideremos dos superficies topológicas compactas y disjuntas  $S_1$  y  $S_2$ , y tomemos discos topológicos compactos  $K_j \subset \text{Int}(S_j)$  satisfaciendo la siguiente condición

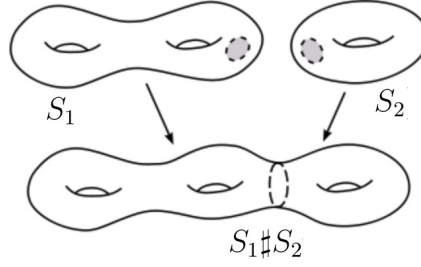
$$S'_j := S_j \setminus \text{Int}(K_j) \text{ es una superficie y } \text{Bd}(S'_j) = \text{Bd}(S_j) \cup \text{Bd}(K_j), j = 1, 2.$$

**Observación 17.16** *La condición anterior es equivalente a la existencia de una triangulación  $\mathcal{T}_j$  de  $S_j$  de forma que  $K_j$  es unión de triángulos de  $\mathcal{T}_j$ . No obstante, esta hipótesis es innecesaria y siempre se cumple como consecuencia del Teorema de Jordan-Schöenflies, que está más allá de las posibilidades de este curso.*

Sea  $h: \text{Bd}(K_1) \rightarrow \text{Bd}(K_2)$  un homeomorfismo, y  $\sim_h$  la relación de equivalencia de pegado inducida en  $S'_1 \cup S'_2$ . Como consecuencia de la Proposición 17.11,  $(S'_1 \cup S'_2)/\sim_h$  es una superficie. Como la característica de Euler y el carácter de orientabilidad de  $(S'_1 \cup S'_2)/\sim_h$  están determinados por los de  $S_1$  y  $S_2$  (ver los Corolarios 17.10 y 17.15), la superficie cociente  $(S'_1 \cup S'_2)/\sim_h$  no depende de  $h$ .

**Definición 17.17** *La superficie  $(S'_1 \cup S'_2)/\sim_h$  es conocida como la suma conexa de  $S_1$  y  $S_2$ , y denotada por  $S_1 \sharp S_2$ .*

De la Proposición 17.11,



- $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$ .
- $S_1 \# S_2$  es orientable  $\iff S_j$  es orientable,  $j = 1, 2$ .

El Corolario 17.10 implica que una superficie topológica orientable sin borde distinta de  $\mathbb{S}^2$  es suma conexa de una cantidad finita de toros, cantidad que coincide con el género de la superficie. Basta observar que haciendo sumas conexas de toros generamos superficies compactas orientables sin borde que barren todas las características de Euler posibles para esa familia de superficies:

*$S_n$  es suma conexa de  $n$  toros.*

Análogamente, una superficie compacta no orientable sin borde es suma conexa de una cantidad (que coincide con el género de la superficie) de planos proyectivos:

*$S_n^*$  es suma conexa de  $n$  proyectivos.*

Es posible hacer una discusión similar para superficies con borde.

## 18. Superficies topológicas y recubridores

La Proposición 15.7 expresa que la teoría de recubridores es interna en la familia de superficies. El siguiente lema de levantamiento tendrá aplicaciones prácticas a la teoría de superficies.

**Lema 18.1** *Sea  $(Y, \pi)$  un recubridor de  $X$ , y sea  $A \subset X$  un subespacio topológico simplemente conexo.*

*Entonces  $\pi|_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow A$  es un homeomorfismo para toda arcocomponente  $\tilde{A}$  de  $\pi^{-1}(A)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos  $i: A \rightarrow X$  a la aplicación inclusión, es evidente que  $i_*(\Pi_1(A, x)) = \{0\} \subset \pi_*(\Pi_1(Y, y))$  para cualesquiera  $x \in A$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$ . El Lema es consecuencia inmediata del Corolario 11.12. ■

El siguiente teorema enuncia algunos hechos básicos.

**Teorema 18.2** *Sea  $(Y, \pi)$  un recubrimiento de  $X$ , donde  $X$  e  $Y$  son superficies topológicas. Entonces:*

- (a)  $\pi(\text{Bd}(Y)) = \text{Bd}(X)$ . Además, si  $\gamma$  es una arcocomponente de  $\text{Bd}(X)$  y  $\tilde{\gamma}$  es una arcocomponente de  $\pi^{-1}(\gamma)$  en  $\text{Bd}(Y)$ , entonces  $\pi|_{\tilde{\gamma}}: \tilde{\gamma} \rightarrow \gamma$  es recubridora.
- (b) Si  $Y$  es compacta entonces  $X$  es compacta y  $\chi(Y) = n\chi(X)$ , donde  $n$  es el número de hojas de  $(Y, \pi)$ .

(c)  $X$  orientable  $\implies Y$  orientable (el recíproco no es cierto).

DEMOSTRACIÓN: Para probar ítem (a), primero observemos que  $\pi(\text{Bd}(Y)) = \text{Bd}(X)$  como consecuencia de que  $\pi$  es un homeomorfismo local. Consideremos ahora una arco-componente  $\gamma$  de  $\text{Bd}(X)$ , que como bien sabemos es homeomorfa a  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{S}^1$ . Si  $\gamma \cong \mathbb{R}$  cualquiera arco-componente de  $\pi^{-1}(\gamma)$  es homeomorfa a  $\gamma$  por el Lema 18.1.

Supongamos que  $\gamma \cong \mathbb{S}^1$ . Fijemos puntos  $x \in \gamma$  e  $y \in \pi^{-1}(x)$ . Sea  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \gamma$  una parametrización de  $\gamma$  con  $\alpha(0) = \alpha(1) = x$  y  $\alpha|_{[0,1[}$  inyectiva. Llamemos  $\alpha_1: [0, 1] \rightarrow Y$  al levantamiento de  $\alpha$  con condición inicial  $\alpha_1(0) = y$ . Inductivamente, definamos  $\alpha_j: [0, 1] \rightarrow Y$  como el levantamiento de  $\alpha$  con condición inicial  $\alpha_j(0) = \alpha_{j-1}(1)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , donde por convenio  $\alpha_0(1) = y$ . La secuencia de arcos  $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  puede ser infinita y (si  $\alpha_j(1) \neq y$  para todo  $j$ ) o contener sólo una cantidad finita de  $k$  arcos (probar como ejercicio que  $k$  es divisor de  $n := \text{número de hojas de } \pi$ ) si  $k$  es el primer natural para el que  $\alpha_k(1) = y$ . En cualquier caso  $\tilde{\gamma} := \cup_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j([0, 1])$  es una arco-componente de  $\text{Bd}(Y)$ , y por construcción  $\pi|_{\tilde{\gamma}}: \tilde{\gamma} \rightarrow \gamma$  es recubridora. Esto prueba (a).

Para el ítem (b), consideremos una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $X$  (Teorema de Radó). Si  $T \in \mathcal{T}$  y  $\tilde{T}$  es una arco-componente de  $\pi^{-1}(T)$ , el Lema 18.1 garantiza que  $\pi|_{\tilde{T}}: \tilde{T} \rightarrow T$  es un homeomorfismo. Si definimos

$$\tilde{\mathcal{T}} := \{\tilde{T} \subset Y : \text{existe } T \in \mathcal{T} \text{ tal que } \pi|_{\tilde{T}}: \tilde{T} \rightarrow T \text{ es un homeomorfismo}\},$$

entonces  $\tilde{\mathcal{T}}$  determina una triangulación de  $Y$  y  $\chi(Y) = \chi_{\tilde{\mathcal{T}}}(Y) = n\chi_{\mathcal{T}}(X) = n\chi(X)$ , donde  $n$  es el número de hojas de  $(Y, \pi)$ .

Por último, para probar (c) consideremos una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $X$  globalmente orientada de forma compatible, y construyamos como antes la única triangulación  $\tilde{\mathcal{T}}$  de  $Y$  tal que  $\pi(\tilde{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}$ . La orientaciones de los triángulos  $T \in \mathcal{T}$  se pueden levantar vía  $\pi$  de forma natural a orientaciones de los triángulos  $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$ , y la compatibilidad de las orientaciones de los primeros garantiza la compatibilidad de las orientaciones de los segundos.

Recordemos que el plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2 = S_{\mathbf{w}_1}$  es recubierto por  $\mathbb{S}^2 = S_{\mathbf{w}_0}$ , por lo que el recíproco de (c) no es cierto. ■

Para acabar, probaremos este interesante resultado.

**Teorema 18.3 (Recubridor de dos hojas orientable)** *Sea  $X$  una superficie topológica compacta no orientable.*

*Entonces existe un único (salvo isomorfismos) recubridor  $(X_0, \pi_0)$  de  $X$  satisfaciendo:*

- $X_0$  es una superficie orientable.
- $(X_0, \pi_0)$  tiene dos hojas.

*Además, si  $\text{Bd}(X)$  tiene  $k$  componentes entonces  $\text{Bd}(X_0)$  tiene  $2k$  componentes.*

DEMOSTRACIÓN: Nótese que de existir un recubridor de dos hojas orientable  $(X_0, \pi_0)$  de  $X$ ,  $X_0$  ha de ser compacta el Corolario 12.3.

Probemos primero el teorema en el caso  $\text{Bd}(X) = \emptyset$ .

Llamemos  $\mathfrak{U}$  a la familia de parejas  $(U, [\alpha])$ , donde

- $U$  es un disco topológico compacto en  $X$ .
- $[\alpha]$  es un generador universal de  $\Pi_1(U^*)$ ; ver Definición 16.7.

Para cada  $p \in X$  llamemos  $\mathfrak{U}_p := \{(U, [\alpha]) \in \mathfrak{U} : p \in \text{Int}(U)\}$  (reparemos en que  $\text{Int}(U) = U \setminus \text{Bd}(U)$  coincide con el interior topológico de  $U$  en  $X$  por el Teorema de Invarianza del Dominio, ver Teorema 15.3).

Sean  $(U_1, [\alpha_1]), (U_2, [\alpha_2]) \in \mathfrak{U}_p$ , y tomemos  $U_0 \in \mathfrak{U}_p$  tal que  $U_0 \subset U_1 \cap U_2$ . Fijemos  $[\alpha_0]$  generador universal de  $\Pi_1(U_0^*)$ , y observemos que  $[\alpha_j] = (i_j)_*(\epsilon_j[\alpha_0])$  para cierto  $\epsilon_j \in \{1, -1\}$ , donde  $i_j: U_0 \setminus \{p\} \rightarrow U_j \setminus \{p\}$  es la inclusión (equivalencia homotópica).

Las parejas  $(U_1, [\alpha_1]), (U_2, [\alpha_2]) \in \mathfrak{U}_p$  se dirán *compatiblemente orientadas*, y escribiremos  $(U_1, [\alpha_1]) \sim_p (U_2, [\alpha_2])$ , si  $\epsilon_1 \epsilon_2 = 1$ . Obviamente, si  $(U, [\alpha]) \in \mathfrak{U}_p$  entonces  $(U, -[\alpha]) \in \mathfrak{U}_p$  y  $(U, [\alpha]) \approx_p \mathfrak{U}_p(U, -[\alpha])$ . La relación  $\sim_p$  es de equivalencia en  $\mathfrak{U}_p$ , y de lo anterior es elemental el comprobar que el cociente  $\mathfrak{U}_p / \sim_p$  tiene sólo dos clases de equivalencia, que llamaremos  $\mathfrak{o}_p^+$  y  $\mathfrak{o}_p^-$ . Denotemos por

$$\mathfrak{o}_p: \mathfrak{U}_p \rightarrow \{\mathfrak{o}_p^+, \mathfrak{o}_p^-\}$$

a la correspondiente proyección. Consideremos el conjunto

$$X_0 := \cup_{p \in X} \{\mathfrak{o}_p^+, \mathfrak{o}_p^-\}.$$

Para dotar a  $X_0$  de topología, tomemos cualquier  $(U, [\alpha]) \in \mathfrak{U}$  y definamos

$$[(U, [\alpha])] := \{\mathfrak{o}_q((U, [\alpha])) : q \in \text{Int}(U)\} \subset X_0.$$

Dotemos a  $X_0$  de la única topología que contiene a

$$\bigcup_{(U, [\alpha]) \in \mathfrak{U}} [(U, [\alpha])]$$

como base.

De la definición es inmediato comprobar que  $X_0$  es  $T_2$  y II-Axioma de numerabilidad (ya que  $X$  lo es). Además  $\pi_0$  es un homeomorfismo local, por lo que  $X_0$  es localmente euclidiano (ya que  $X$  lo es). Si  $X_0$  fuese arcoconexo, sería una superficie topológica y

$$\pi_0: X_0 \rightarrow X, \quad \pi_0(\mathfrak{o}_p^+) = \pi_0(\mathfrak{o}_p^-) := p,$$

un recubridor de dos hojas.

Para comprobar la arcoconexión de  $X_0$ , probemos primero que existe  $p \in X$  de forma que  $\mathfrak{o}_p^+$  y  $\mathfrak{o}_p^-$  se pueden conectar por un arco en  $X_0$ . En efecto, elijamos una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $X$ . Como  $X$  es no orientable,  $\mathcal{T}$  es no orientable. Por tanto debe existir una subsecuencia  $\{T_1, \dots, T_a\} \subset \mathcal{T}$  de forma que  $T_j$  y  $T_{j+1}$  compartan un lado y estén compatiblemente orientados,  $j = 1, \dots, a-1$ , y  $T_1$  y  $T_a$  compartan un lado  $l$  y no estén compatiblemente orientados.

Llamemos  $U_j := T_j \cup T_{j+1}$ ,  $j = 0, \dots, a$ , donde hemos hecho el convenio  $T_0 = T_a$  y  $T_{a+1} = T_1$ . En consecuencia,

$$U_0 = U_a = T_1 \cup T_a.$$

Denotemos por  $[\alpha_j]$  el generador universal de  $\Pi_1(U_j^*)$  inducido por la orientación compatible entre  $T_j$  y  $T_{j+1}$ , para todo  $j = 1, \dots, a-1$ . Por la compatibilidad de las orientaciones de los triángulos  $T_j$  y  $T_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, a-1$ ,  $\mathfrak{o}_q((U_j, [\alpha_j])) = \mathfrak{o}_q((U_{j+1}, [\alpha_{j+1}]))$  para todo  $q \in \text{Int}(U_j \cap U_{j+1})$ ,  $j = 1, \dots, a-2$ .

Llamemos  $[\alpha_0]$  el generador universal de  $\Pi_1(U_0^*)$  tal que  $\mathfrak{o}_q((U_0, [\alpha_0])) = \mathfrak{o}_q((U_1, [\alpha_1]))$  para todo  $q \in \text{Int}(U_0 \cap U_1)$ , y análogamente  $[\alpha_a]$  al generador universal de  $\Pi_1(U_a^*)$  tal que  $\mathfrak{o}_q((U_a, [\alpha_a])) = \mathfrak{o}_q((U_{a-1}, [\alpha_{a-1}]))$  para todo  $q \in \text{Int}(U_a \cap U_{a-1})$ . Como las orientaciones de  $T_1$  y  $T_a$  no son compatibles, de nuestra construcción  $[\alpha_0] = -[\alpha_a]$ . Por tanto, el

abierto conexo (luego arcoconexo) de  $X_0$  dado por  $V := \bigcup_{j=0}^a [(U_j, [\alpha_j])]$  contiene a los puntos  $\{o_q^+, o_q^- : q \in \text{Int}(U_0) = \text{Int}(U_a)\} = \{o_q((U_0, [\alpha_0])), o_q((U_a, [\alpha_a])) : q \in \text{Int}(U_0) = \text{Int}(U_a)\} \subset V$ , y en particular cualesquiera dos de ellos se pueden conectar por un arco en  $X_0$ .

Ahora podemos probar la arcoconexión de  $X_0$ . Fijemos  $p \in X_0$  tal que  $o_p^+$  y  $o_p^-$  se puedan conectar por un arco en  $X_0$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $p$  pertenece al interior de algún triángulo de  $\mathcal{T}$ . Vamos a probar que cualquier punto  $\hat{q} \in X_0$  se conecta con alguno de los puntos  $o_p^+, o_p^-$ . Es suficiente con demostrar este hecho para puntos  $\hat{q} \in X_0$  de forma que  $q := \pi_0(\hat{q})$  esté contenido en el interior de un triángulo de  $\mathcal{T}$ . Por la conexión de  $X$  existe una sucesión de triángulos  $T_1, \dots, T_a \subset \mathcal{T}$  de forma que  $T_j \cap T_{j+1}$  consiste en un lado común,  $j = 1, \dots, a$ , (hemos hecho el convenio  $T_{a+1} = T_1$ )  $p \in \text{Int}(T_1)$  y  $q \in \text{Int}(T_a)$ . Llamando  $U_j := T_j \cup T_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, a-1$  y por un argumento similar al anterior, podemos construir una secuencia  $\{(U_j, [\alpha_j]) : j = 1, \dots, a-1\} \subset \mathcal{U}$  de forma que  $[(U_j, [\alpha_j])] \cap [(U_{j+1}, [\alpha_{j+1}])] \neq \emptyset$ ,  $j = 1, \dots, a-2$ . Como antes  $W := \bigcup_{j=1}^{a-1} [(U_j, [\alpha_j])]$  es un abierto arcoconexo que contiene algún punto de  $\{o_p^+, o_p^-\}$  y algún punto de  $\{o_q^+, o_q^-\}$ . De igual forma,  $W^* := \bigcup_{j=1}^{a-1} [(U_j, -[\alpha_j])]$  es un abierto conexo que contiene los puntos complementarios a los anteriormente señalados en  $\{o_p^+, o_p^-\}$  y  $\{o_q^+, o_q^-\}$ . Teniendo en cuenta que  $o_p^+$  y  $o_p^-$  se pueden conectar por un arco en  $X_0$ , se concluye.

Así pues  $X_0$  es una superficie topológica.

Resta garantizar que  $X_0$  es orientable. Para ello consideremos una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $X$  y su levantada  $\hat{\mathcal{T}}$  a  $X_0$  vía el recubridor de dos hojas  $\pi_0 : X_0 \rightarrow X$ ; ver la prueba del Teorema 18.2.

Para cada triángulo  $\hat{T} \in \hat{\mathcal{T}}$  elijamos un punto  $\hat{p}_{\hat{T}} \in \text{Int}(\hat{T})$ , y consideremos en  $T := \pi_0(\hat{T}) \in \mathcal{T}$  el generador universal  $[\alpha]$  de  $\Pi_1(T^*)$  tal que  $\hat{p}_{\hat{T}} = o_{p_T}(T, [\alpha])$ , donde  $p_T = \pi_0(\hat{p}_{\hat{T}})$ . La orientación de  $\text{Bd}(T)$  inducida por  $[\alpha]$  determina unívocamente una ordenación de los vértices de  $V(T)$  de forma natural, y esta ordenación de vértices se puede levantar vía  $\pi_0$  a una ordenación de los vértices en  $V(\hat{T})$  que orienta  $\hat{T}$ . De esta forma orientamos todos y cada uno de los triángulos de  $\hat{\mathcal{T}}$ .

Veamos que esta orientación global de  $\hat{\mathcal{T}}$  es compatible. Para ello consideremos dos triángulos  $\hat{T}_1, \hat{T}_2 \in \hat{\mathcal{T}}$  con un lado  $\hat{l}$  en común. Sabemos que  $\hat{K} := \hat{T}_1 \cup \hat{T}_2$  es un disco topológico compacto que se proyecta vía  $\pi_0$  en el disco topológico compacto  $K = T_1 \cup T_2$ , donde  $T_j = \pi_0(\hat{T}_j)$ . Si elegimos  $\hat{p} \in \hat{l}$ , como antes  $\hat{p}$  induce un sentido de recorrido de  $\text{Bd}(\hat{K})$  que ha de coincidir con el sentido de recorrido de  $\text{Bd}(T_j)$  inducido por  $\hat{p}_{T_j}$  sobre el arco de Jordan  $\text{Bd}(K) \cap \text{Bd}(T_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Por tanto, los triángulos  $T_1$  y  $T_2$ , con las orientaciones inducidas por  $p_{T_1}$  y  $p_{T_2}$  respectivamente, están compatiblemente orientados. Por la definición de las orientaciones en  $\hat{T}_1$  y  $\hat{T}_2$ , éstos están también compatiblemente orientados. Esto prueba que  $\hat{T}$  es orientable, luego  $X_0$  es orientable.

Para acabar el teorema (en el caso  $\text{Bd}(X) = \emptyset$ ), resta demostrar que  $(X_0, \pi_0)$  es el *único* recubridor de dos hojas orientable de  $X$ . En efecto, consideremos otro recubridor de dos hojas  $(Y, \pi)$  de  $X$  tal que  $Y$  sea una superficie orientable.

Tomemos una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $X$  y llamemos  $\mathcal{T}'$  a su levantada vía  $\pi$  a  $Y$ . Sea  $p \in X$  un punto arbitrario en el interior de un lado de  $E(\mathcal{T})$ , y sea  $\alpha$  un lazo en  $X$  con base  $p$ . Por conexión existe una secuencia de triángulos  $T_1, \dots, T_k$  en  $\mathcal{T}$  de forma que:

- $T_j \cap T_{j+1}$  comparten un lado.  $j = 1, \dots, k$ , donde  $T_{k+1} = T_1$ , y  $p \in T_1 \cap T_k$ .
- La traza de  $\alpha$  esté contenida en  $\bigcup_{j=1}^k T_j$ .

Llamamos la atención sobre el hecho de que podría haber triángulos de  $\mathcal{T}$  repetidos en la secuencia. Elijamos orientaciones en  $T_1, \dots, T_k$  de forma que  $T_j$  y  $T_{j+1}$  estén compa-

tiblemente orientados para todo  $j = 1, \dots, k-1$ . Fijemos  $q \in \pi^{-1}(p)$  y la correspondiente secuencia de triángulos levantados  $T'_1, \dots, T'_k$  en  $\mathcal{T}'$  que satisface  $\tilde{\alpha}_q^\pi \subset \cup_{j=1}^k T'_j$ . Levantemos la orientación de  $T_j$  a  $T'_j$  para todo  $j$ , y observemos que  $T'_j$  y  $T'_{j+1}$  están compatiblemente orientados para todo  $j = 1, \dots, k-1$ . Es claro que  $T'_k \cap T'_1 \neq \emptyset$  si y sólo si  $\tilde{\alpha}_q^\pi$  es un lazo en  $Y$ , y como  $Y$  es orientable, si y sólo si  $T'_k$  y  $T'_1$  son triángulos con un lado en común y compatiblemente orientados. Pero esto es equivalente a decir que  $\tilde{\alpha}_{q_0}^{\pi_0}$  es un lazo en  $X_0$ , donde  $q_0 \in \pi_0^{-1}(p)$  es un punto arbitrario. Por tanto  $\pi_*(\Pi_1(Y, q)) = (\pi_0)_*(\Pi_1(X_0, q_0))$ , lo que por el Corolario 13.5 implica que existe un isomorfismo de recubridores  $\Phi: (Y, \pi) \rightarrow (X_0, \pi_0)$  con  $\Phi(q_0) = q$ . Esto concluye la prueba del teorema para el caso  $\text{Bd}(X) = \emptyset$ .

Supongamos que  $\text{Bd}(X) \neq \emptyset$  y  $X$  tiene  $k \in \mathbb{N}$  componentes en el borde. Tal y como explicamos en la prueba del Corolario 17.13, la Proposición 17.11 nos permite pegar a  $X$  por su borde  $k$  discos topológicos  $X_1, \dots, X_k$  para generar una superficie sin borde  $X'$ . La superficie  $X'$  admite recubridor orientable de dos hojas  $(X'_0, \pi'_0)$  por lo ya demostrado. Además, como cada disco  $X_j \subset X'$  es simplemente conexo,  $(\pi'_0)^{-1}(X_j)$  es la unión disjunta de dos discos  $X_j^+$  y  $X_j^-$ , ambos copias homeomórficas de  $X_j$  vía  $\pi'_0$ . Definiendo  $X_0 := X'_0 \setminus \bigcup_{j=1}^k (\text{Int}(X_j^+) \cup \text{Int}(X_j^-))$  y  $\pi_0 := \pi'_0|_{X_0}: X_0 \rightarrow X$ , el par  $(X_0, \pi_0)$  es un recubridor de dos hojas orientable de  $X$ . Además resulta evidente que  $X_0$  tiene  $2k$  componentes en el borde. La unicidad de este tipo de recubridor se prueba como arriba. ■

**Corolario 18.4** *El espacio recubridor de dos hojas orientable de  $S_{n,k}^*$  es  $S_{n-1,2k}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 18.2, el recubridor de dos hojas orientable  $X_0$  de  $S_{n,k}^*$  es una superficie compacta orientable con  $\chi(X_0) = 2\chi(S_{n,k}^*) = 2(2 - n - k)$ . Además el Teorema 18.3 nos dice que  $X_0$  tiene  $2k$  componentes en el borde.

Como  $X_0$  es orientable, ha de coincidir con  $S_{n',2k}$  para algún  $n' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , ver Corolarios 17.8 y 17.13. Pero  $\chi(S_{n',2k}) = 2 - 2n' - 2k$ , por lo que  $n' = n - 1$ . ■



## Ejercicios del Tema 3

1. Sea  $X = \mathbb{S}^2 \cup \{x_0\}$ , donde  $x_0 \in \mathbb{R}^3 - \mathbb{S}^2$ . En  $X$  se considera la topología tal que los entornos de los puntos de  $\mathbb{S}^2$  son los usuales, y los de  $x_0$  son de la forma  $(V - \{N\}) \cup \{x_0\}$ , donde  $N = (0, 0, 1)$  y  $V$  es un entorno de  $N$  en  $\mathbb{S}^2$ . Demostrar que cada punto de  $X$  tiene un entorno homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^2$  pero  $X$  no es  $T_2$ .
2. Consideremos el espacio producto  $X = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , donde en  $\mathbb{R}^2$  se considera la topología usual y en  $\mathbb{R}$  la topología discreta. Demostrar que cada punto de  $X$  tiene un entorno homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^2$  pero  $X$  no es IIAN.
3. Demostrar que los siguientes espacios topológicos no son superficies:
  - a)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ .
  - b)  $\mathbb{R}^n$  con  $n \neq 2$ .
  - c)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$ .

¿Es la unión o intersección de dos superficies en  $\mathbb{R}^3$  una superficie?

4. Sea  $\rho : \tilde{S} \rightarrow S$  recubridora. Probar que  $\tilde{S}$  es una superficie si y sólo si lo es  $S$ .
5. Sea  $S$  una superficie y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Definimos el grafo de  $f$  como:

$$G(f) = \{(x, t) \in S \times \mathbb{R} / t = f(x)\}$$

con la topología inducida por la topología producto en  $S \times \mathbb{R}$ . Probar que  $G(f)$  es una superficie, que además es compacta si y sólo si lo es  $S$ .

6. Encontrar un atlas de  $\mathbb{RP}^2$ , esto es, una familia de sistemas de coordenadas en  $\mathbb{RP}^2$  cuyos entornos coordenados recubran  $\mathbb{RP}^2$ .
7. Encontrar una triangulación de la botella de Klein  $K$ .
8. En cada uno de los siguientes casos clasificar la superficie  $S$  con presentación poligonal  $Q/\sim_E$ , donde  $Q$  es un polígono cerrado de  $n$  lados identificados mediante el esquema  $E$ :

- a)  $n = 6$ ,  $E = abacb^{-1}c^{-1}$ ,
- b)  $n = 6$ ,  $E = abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ ,
- c)  $n = 8$ ,  $E = abcdca^{-1}bd^{-1}$ ,
- d)  $n = 10$ ,  $E = aba^{-1}cdb^{-1}c^{-1}ed^{-1}e^{-1}$ ,
- e)  $n = 12$ ,  $E = abcadb^{-1}efce^{-1}df^{-1}$ .

Clasificar la suma conexa de las superficies representadas en los apartados a) y b).

9. ¿Qué superficie está representada por la unión de 4 triángulos disjuntos cuyas aristas se etiquetan e identifican según el esquema  $E = abc, bde, c^{-1}df, e^{-1}fa$ ?
10. ¿Qué superficie se obtiene cuando identificamos las aristas de un polígono cerrado de  $2n$  lados con  $n \geq 2$  mediante el esquema  $E = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} \cdots a_n^{-1}$ ?  
¿Y si cambiamos la última etiqueta por  $a_n$ ?

11. Demostrar que toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a una y sólo una de las siguientes superficies:

$$\mathbb{S}^2, \mathbb{T}_n, \mathbb{RP}^2, K, \mathbb{T}_n \# \mathbb{RP}^2, \mathbb{T}_n \# K.$$

12. Identificar, salvo homeomorfismos, las superficies compactas y conexas con característica de Euler igual a  $-2$ .
13. Sea  $S$  una superficie compacta y conexa. Probar que  $\chi(S) \geq -2$  si y sólo si  $S$  tiene una presentación poligonal  $Q/\sim_E$  donde  $Q$  es un octógono.
14. Discutir de forma razonada si cada par de las siguientes superficies compactas y conexas son o no homeomorfas entre sí:
- a)  $S_1 \cong Q/\sim_E$ , donde  $Q$  es un octógono y  $E = abcdad^{-1}cb^{-1}$ ,
  - b)  $S_2$  cumple  $\chi(S_2) \geq 0$  y  $\Pi_1(S_2)$  no es abeliano,
  - c)  $S_3$  cumple que  $\Pi_1(S_3) \cong \langle A, B, C; ACBCBA^{-1} \rangle$ .

Obtener también la presentación poligonal canónica de  $S_1$  efectuando para ello las transformaciones que sean necesarias.

15. Sea  $S$  la superficie compacta y conexa que admite una presentación poligonal obtenida identificando los lados de un decágono mediante el esquema:

$$E = ab^{-1}c - da^{-1}ebc^{-1} - ,$$

donde cada guión  $-$  está ocupado por una única etiqueta. Completar el esquema para que  $S$  sea homeomorfa a:

- a)  $\mathbb{T}_2 = T \# T$ ,
  - b)  $\mathbb{RP}_4^2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ ,
  - c) la superficie modelo con primer grupo de homología isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^4$ .
16. Un *poliedro regular* en  $\mathbb{R}^3$  es un subconjunto  $P \subset \mathbb{R}^3$  dado por la unión de una cantidad finita de polígonos cerrados regulares (llamados caras de  $P$ ) tal que:
- a) todas las caras tienen el mismo número de lados,
  - b) a cada vértice llegan el mismo número de aristas,
  - c)  $P \cong \mathbb{S}^2$ .

Probar la *fórmula de Euler* dada por  $V - A + F = 2$ , donde  $V$  es el número de vértices del poliedro,  $A$  es el número de aristas y  $F$  el número de caras. A partir de aquí, deducir que hay solamente 5 poliedros regulares: tetraedros, octaedros, icosaedros, cubos y dodecaedros.

17. Se divide un balón de fútbol en piezas homeomorfas a pentágonos o hexágonos (no todas las piezas han de ser homeomorfas al mismo tipo de polígono) de modo que:
- a) cada arista es compartida por exactamente dos piezas,
  - b) a cada vértice llegan exactamente tres aristas.

Demostrar que el número de piezas pentagonales es 12.



18. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

- a) Sea  $S$  una superficie. Demostrar que  $S \# \mathbb{S}^2 \cong S$ .
- b) Si  $S_1$  y  $S_2$  son superficies compactas y conexas, ¿se cumple necesariamente que  $\Pi_1(S_1 \# S_2) \cong \Pi_1(S_1) * \Pi_1(S_2)$ ? ¿Y que  $H_1(S_1 \# S_2) \cong H_1(S_1) \times H_1(S_2)$ ?
- c) ¿Es cierto que  $\mathbb{RP}_3^2 \cong \mathbb{RP}^2 \# T \cong \mathbb{RP}^2 \# K$ ?
- d) ¿Existe  $S$  superficie compacta y conexa con  $\chi(S) \leq -7$  y  $H_1(S) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^7$ ?
- e) Sea  $Q$  una unión finita de polígonos cerrados disjuntos con el mismo número de lados. Describir todas las posibles configuraciones de  $Q$  a partir de las que se puede obtener una presentación poligonal con un único vértice del 2-toro  $\mathbb{T}_2 = T \# T$ .

19. Determina los espacios topológicos *compactos*  $Y$  para los que existe una aplicación recubridora  $\pi: Y \rightarrow X$  en cada uno de los siguientes casos:

- a)  $X = \mathbb{S}^2$ .
- b)  $X = \mathbb{RP}^2$ .
- c)  $X = \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$ .
- d)  $X = \mathbb{T}$ , donde  $\mathbb{T} := S^1 \times S^1$ .

20. Determina los espacios topológicos  $X$  para los que existe una aplicación recubridora  $\pi: Y \rightarrow X$  en cada uno de los siguientes casos:

- a)  $Y = \mathbb{RP}^2$ .
- b)  $Y = \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$ .
- c)  $Y = \mathbb{T}$ , donde  $\mathbb{T} := S^1 \times S^1$ .
- d)  $Y = \mathbb{T} \sharp \mathbb{T}$ .

21. Explicita el recubridor universal de

- a)  $\overline{D} \setminus \{0\}$ .
- b)  $\mathbb{S}^2 \cup (\{(0,0)\} \times [-1,1])$ . Pista: observar que este espacio es homeomorfo a  $\mathbb{S}^2 \cup c$ , donde  $c$  es un arco de Jordan en el exterior de la bola unidad de  $\mathbb{R}^3$  conectando los dos polos de la esfera.