Relación de ejercicios del tema 2

Topología II. Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática
Curso 2021/2022
Profesor: Rafael López Camino
Actualización: 29/11/2022, hora: 21:35:12

Si no se dice nada, se supondrá que $(\tilde{X}, p)$ es un espacio recubridor de X.

1. Probar que la aplicación recubridora es abierta.

2. Probar que la familia de todos los entornos fundamentales del espacio base es una base de abiertos de la topología.

3. Si $f\colon X \to Y$, $g\colon Z \to \tilde{X}$ son homeomorfismos, entonces $(\tilde{X}, f \circ p)$ es recubridor de Y y $(Z, p \circ g)$ de X.

4. Si Y es un espacio discreto, entonces $(X \times Y, p\colon X \times Y \to X)$ es recubridor de X.

5. Sea $Z = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \tilde{X} \times \tilde{X} : p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)\}$. Probar que (Z, f) es recubridor de X donde $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$.

6. (Composición de recubridores) Probar que si (Y, f) es recubridor de X y (X, g) es recubridor de Z donde las fibras son finitas, entonces $(Y, g \circ f)$ es recubridor de Z.

7. Si $\tilde{X}$ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y X el hiperboloide reglado $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, encontrar $p\colon \tilde{X} \to X$ de manera que $(\tilde{X}, p)$ es recubridor de X.

8. Consideramos la hélice
$$H = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$
Probar que H es un recubridor de $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ mediante la proyección ortogonal.

9. Supongamos que todas las fibras son finitas. Probar que $\tilde{X}$ es compacto y Hausdorff si y sólo si X es compacto y Hausdorff.

10. (Recubridor de la banda de Möbius). Consideramos $\mathbb{M}$ como cociente de $\mathbf{I}^2$ de la forma habitual. Sea $\tilde{X} = \mathbb{R} \times \mathbf{I}$ y el homeomorfismo $f\colon X \to X$ definido por $f(x, y) = (x+1, 1-y)$. Sea G el grupo generador por f. Probar que G actúa propia y discontinuamente sobre X y deducir que X es un recubridor de $\mathbb{M}$.

11. (Recubridor de la banda de Möbius de dos hojas). Consideramos $X = \mathbf{I}^2 \cup ([1,2] \times \mathbf{I})$ con la relación de equivalencia $\sim$ identificando los lados $\{0,2\} \times \mathbf{I}$ para que dé un cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbf{I}$. Hallar una aplicación $p\colon X/\sim \to \mathbb{M}$ para que (X, p) sea un recubridor de $\mathbb{M}$.

12. Probar que la aplicación $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $((n,m),(x,y)) \to (x+n, y+m)$, es una acción continua y que es propiamente discontinua. Deducir que $\mathbb{R}^2$ es un recubridor del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

13. (continuación del anterior). Consideramos el toro como el cociente $T = \mathbb{R}^2/G$, con $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y dado $n \in \mathbb{N}$, sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definimos

$$f\colon T \to T, \quad f([(x,y)]) = [A(x,y)],$$

donde $A(x,y)$ es el producto de las dos matrices y los corchetes indican clase de equivalencia. Probar que (T, f) es un recubridor de n hojas de T. Calcular el grupo de automorfismos de (T, f).

14. Construir una aplicación recubridora de dos hojas del toro sobre la botella de Klein y deducir que el recubridor universal de $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}^2$.

15. Probar que $p_*\colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to \pi_1(X, x_0)$ es isomorfismo si y sólo si p es homeomorfismo.

16. Consideramos $(\mathbb{S}^1, p_n(z) = z^n)$ recubridor de $\mathbb{S}^1$. Probar que la aplicación p_m tiene un levantamiento mediante p_n si y sólo si $m = nk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. En tal caso, se tiene $\tilde{p_m} = p_k$ donde $\tilde{p_m}$ es el único levantamiento de p_m con condición inicial $\tilde{p_m}(1) = 1$.

17. Hallando los automorfismos del recubridor universal, hallar recubridores del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

18. Clasificar los recubridores del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

19. Clasificar los recubridores del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbf{I}$.

20. Clasificar los recubridores de $\mathbb{P}^n$, $n \geq 2$.

21. Clasificar los recubridores de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, $n, m \geq 2$.

22. Sea $\tilde{X} = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\cup_{n \in \mathbb{Z}} [0,1] \times \{n\})$ y $X = \mathbb{S}^1 \cup \{(x,0) : 1 \leq x \leq 2\}$. Hallar $p \colon \tilde{X} \to X$ para que $(\tilde{X}, p)$ sea recubridor de X. Probar que es el recubridor universal y deducir todos los recubridores de X.

23. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ el grupo $G = \{\phi_{n,m} : n, m \in \mathbb{Z}\}$ de homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ donde
$$\phi_{n,m}(x,y) = A^n(x,y) + (n, (-1)^n m).$$
Haciendo actuar G sobre $\mathbb{R}^2$ de manera natural, probar que G actúa propia y discontinuamente sobre $\mathbb{R}^2$ y el espacio de órbitas es $\mathbb{K}$.

24. Consideramos el toro T como cociente de $\mathbb{R}^2$ con la relación $(x,y) \sim (x',y')$ si $x' - x \in 2\mathbb{Z}$, $y - y' \in \mathbb{Z}$. Sea $f \colon T \to T$ dado por $f([(x,y)]) = [(x+1, -y)]$. Probar que f es un homeomorfismo y que $G = \{1_T, f\}$ es un grupo que actúa propia y discontinuamente sobre T. Probar que T/G es homeomorfo a la botella de Klein y deducir que T es un recubridor de dos hojas de $\mathbb{K}$.

25. Determinar el grupo de automorfismos para los siguientes recubridores:
    (a) $(\mathbb{R}, p(t) = e^{2\pi i t})$ de $\mathbb{S}^1$.
    (b) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, p \times p)$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
    (c) $(\mathbb{R}^2, p \times 1_{\mathbb{R}})$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
    (d) $(\mathbb{S}^1, p_n(z) = z^n)$ de $\mathbb{S}^1$, $n \in \mathbb{N}$.
    (e) $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_n \times p_m)$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $n, m \in \mathbb{N}$.
    (f) $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p \times p_n)$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

26. Hallar el recubridor universal de $\mathbb{D} \setminus \{(0,0)\}$ y de la corona circular $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq |(x,y)| \leq 2\}$.

27. Hallar el recubridor universal de $\mathbb{S}^2$ junto con un arco en el exterior de la bola unidad que una los dos polos de la esfera.

28. Estudiar si $\mathbb{S}^1$ puede ser recubridor de $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{P}$ de $\mathbb{S}^1$, y $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{P}$.

29. Si α es un lazo en X, ¿es necesariamente alguno de sus levantamientos un lazo en $\tilde{X}$?

30. Sea $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. ¿Es $(\mathbb{C}, f)$ recubridor de $\mathbb{C}$?

31. Probar que si $\tilde{X}$ es compacto y simplemente conexo, entonces $\pi_1(X)$ es finito.

32. Sea G un subgrupo de homeomorfismos de X actuando sobre X. Si la aplicación proyección $p\colon X \to X/G$ es recubridora, entonces la acción es propiamente discontinua.

33. Sea X un espacio cuyo grupo fundamental es finito. Probar que si (X, p) es recubridor, entonces p es un homeomorfismo.

34. (a) Si $\tilde{X}$ es compacto, el número de hojas es finito.
    (b) Si $\tilde{X}$ es simplemente conexo, $\mathrm{card}(\pi_1(X))$ es el número de hojas.
    (c) Si X es compacto y el número de hojas es finito, $\tilde{X}$ es compacto.

35. Sean $p_1\colon Z \to Y$, $p_2\colon Y \to X$ dos aplicaciones continuas, sobreyectivas y abiertas. Supongamos que $(Z, p_2 \circ p_1)$ es recubridor de X. Probar que (Z, p_1) es recubridor de Y si y sólo si (Y, p_2) lo es de X.