Tema 1

Números complejos

Como primer paso para el estudio de las funciones de variable compleja, debemos presentar el cuerpo de los números complejos. De entre los muchos métodos que permiten introducirlo, usaremos el más directo, aunque no sea el más intuitivo. Estudiaremos entonces la definición y las propiedades básicas del módulo y los argumentos de un número complejo.

1.1. El cuerpo de los números complejos

Para definir los números complejos, partimos del conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$, que sabemos tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones de suma y producto por escalares definidas por

(a) $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \qquad \forall\, x,y,u,v \in \mathbb{R}$
(b) $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \qquad \forall\, \lambda,x,y \in \mathbb{R}$

Olvidando por un momento el producto por escalares, vemos $\mathbb{R}^2$ como un grupo aditivo, en el que definimos una segunda operación, llamada *producto* y denotada por yuxtaposición:

(c) $(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu) \qquad \forall\, x,y,u,v \in \mathbb{R}$

Se comprueba rutinariamente que este producto es asociativo, conmutativo y distributivo con respecto a la suma. Es claro también que $(1,0)$ es elemento neutro para el producto. Además, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $(x,y) \neq (0,0)$, tenemos $x^2 + y^2 > 0$ y comprobamos enseguida que

$$(x, y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}\,,\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1, 0)$$

es decir, (x,y) tiene un elemento simétrico respecto del producto. En resumen:

- $\mathbb{R}^2$, *con la suma y producto definidos en* **(a)** *y* **(c)**, *es un cuerpo conmutativo, al que llamamos* **cuerpo de los números complejos** *y denotamos por* $\mathbb{C}$.

Así pues, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son el mismo conjunto, lo que los diferencia es la estructura que en dicho conjunto consideramos. Cuando lo vemos como un espacio vectorial, y sus elementos como vectores, estamos pensando en $\mathbb{R}^2$, mientras que, cuando lo vemos como un cuerpo, estamos pensando en $\mathbb{C}$, cuyos elementos son los **números complejos**.

Pensemos ahora en la aplicación $x \mapsto (x,0)$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, que claramente es inyectiva. Es evidente que esta aplicación conserva sumas y productos, luego es un monomorfismo de cuerpos. Por tanto, su imagen es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$. Podemos pues, para cada $x \in \mathbb{R}$, identificar x con $(x,0)$ y ver cada número real como un número complejo. Así lo haremos siempre a partir de ahora, entendiendo por tanto que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Esto hace que para $x \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$ tengan sentido $x+z$ y xz como suma y producto de números complejos.

Recuperemos ahora el producto por escalares en $\mathbb{R}^2$: $\lambda(x,y)$ es el producto del escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por el vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pero acabamos de identificar λ con el número complejo $(\lambda,0)$, que podemos multiplicar por el número complejo (x,y). Observamos que ambos productos coinciden:

$$(\lambda,0)(x,y) = (\lambda x, \lambda y) = \lambda(x,y)$$

Así pues, asumida la inclusión $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, el producto por escalares definido en **(b)** queda como caso particular del producto de números complejos definido en **(c)**. Enseguida aprovechamos esta idea para conseguir una descripción más cómoda de los números complejos, que también permite recordar fácilmente la definición del producto en $\mathbb{C}$.

Los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ forman, como bien sabemos, una base de $\mathbb{R}^2$. La expresión de cada vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los elementos de esa base es bien obvia. Para traducirla al lenguaje de los números complejos, pensemos que el número complejo $(1,0)$ se ha identificado con el número real 1 y pongamos $i = (0,1)$. Tenemos por tanto que cada número complejo $z = (x,y)$ se expresa de manera única en la forma

$$z = (x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x1 + yi = x + iy$$

con $x,y \in \mathbb{R}$. Lo interesante es que, en el último miembro de esta igualdad, sólo aparecen las operaciones del cuerpo $\mathbb{C}$. El resultado era bastante evidente, pero nos da la descripción cómoda de los números complejos que buscábamos. Además nos da pie para introducir el nombre con el que se designan las dos componentes de cada número complejo.

- *Cada $z \in \mathbb{C}$ se expresa de manera única como $z = x + iy$ con $x,y \in \mathbb{R}$, donde $i = (0,1)$. Se dice que x es la* **parte real** *del número complejo z, y escribimos $x = \operatorname{Re} z$, mientras que y es la* **parte imaginaria** *de z que se denota por $y = \operatorname{Im} z$. En particular, $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si, $\operatorname{Im} z = 0$. Cuando $\operatorname{Re} z = 0$ decimos que z es un número imaginario puro.*

Tenemos ahora una notación que permite distinguir entre números complejos y vectores de $\mathbb{R}^2$. Un número complejo z suele escribirse siempre en la forma $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, sólo escribimos $z = (x,y)$ cuando queremos ver z como vector de $\mathbb{R}^2$. Recordar ahora el producto de números complejos es bien fácil, sólo debemos recordar que $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo que contiene a $\mathbb{R}$, y un caso muy particular de **(c)**: $i^2 = -1$. Entonces, para cualesquiera $x,y,u,v \in \mathbb{R}$, recuperamos la igualdad **(c)**:

$$(x+iy)(u+iv) = xu + i(xv+yu) + i^2 yv = xu - yv + i(xv+yu)$$

Las definiciones de suma y producto de números complejos se traducen en propiedades de las funciones *parte real* y *parte imaginaria*, es decir, las funciones $z \mapsto \operatorname{Re} z$ y $z \mapsto \operatorname{Im} z$, de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$. Concretamente, es claro que para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z+w) &= \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w\,; \qquad & \operatorname{Re}(zw) &= \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w \\ \operatorname{Im}(z+w) &= \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w\,; \qquad & \operatorname{Im}(zw) &= \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Re} w \end{aligned}$$

La interpretación geométrica de los números complejos no es otra que la de $\mathbb{R}^2$, es decir, $\mathbb{C}$ se interpreta geométricamente como el conjunto de los puntos de un plano, sólo cambiamos algunas expresiones para resaltar que vemos los puntos del plano como números complejos. Es por ello que, en vez del plano euclídeo, hablamos del *plano complejo*. Así pues, identificamos cada número complejo z con el punto del plano complejo que tiene abscisa $\operatorname{Re} z$ y ordenada $\operatorname{Im} z$. Al eje de abscisas, en el que aparecen los números reales, se le llama *eje real*, mientras que al eje de ordenadas se le llama *eje imaginario*, pues en él aparecen los números imaginarios puros. La interpretación geométrica de la suma de números complejos no ofrece dificultad, es la misma que la suma de vectores de $\mathbb{R}^2$, así que podemos usar la regla del paralelogramo. Dejamos para más adelante la interpretación geométrica del producto de números complejos.

1.2. Módulo

El módulo de un número complejo z es algo que conocemos bien: la norma euclídea de z, visto como vector de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, algunas propiedades del módulo de un número complejo se obtendrán traduciendo directamente las propiedades de la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. Pero ahora nos interesa la relación con el producto de números complejos, que será una grata sorpresa.

Antes de hacer con detalle la discusión anunciada, definimos una aplicación de $\mathbb{C}$ en sí mismo, llamada *conjugación*, que tiene una clara interpretación geométrica: es la simetría con respecto al eje real. Para cada $z \in \mathbb{C}$, el **conjugado** de z es el número complejo $\overline{z}$ definido por:

$$\overline{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$$

Operando con un número complejo y su conjugado, obtenemos sus partes real e imaginaria, pues para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene claramente:

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \overline{z} = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \overline{z} = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Comprobamos fácilmente varias propiedades de la *conjugación*, la aplicación $z \mapsto \bar{z}$, de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, que geométricamente es, como hemos dicho, la simetría respecto del eje real. Se trata de un automorfismo involutivo del cuerpo $\mathbb{C}$, es decir, para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}\,, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}\,, \qquad \overline{\overline{z}} = z$$

Para $z \in \mathbb{C}$ tenemos que $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ es un número real no negativo, cuya raíz cuadrada recibe el nombre de **módulo** del número complejo z y se denota por $|z|$. Así pues,

$$|z| = \big(z\bar{z}\big)^{1/2} = \big((\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2\big)^{1/2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Nótese que el módulo de un número real coincide con su valor absoluto, así que la notación que usamos para el módulo de un número complejo es coherente con la inclusión $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Resumimos en un sólo enunciado las principales propiedades del módulo:

- *Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:*

  (i) $|z| \in \mathbb{R}_0^+$

  (ii) $|z| = 0 \iff z = 0$

  (iii) $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z \pm w| \leqslant |z| + |w|$

  (iv) $\text{máx}\,\big\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\big\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

  (v) $|zw| = |z|\,|w|$

Las cuatro primeras afirmaciones son propiedades bien conocidas de la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. Resaltamos (v), que involucra el producto de números complejos y refuerza la similitud del módulo de un número complejo con el valor absoluto de un número real. Su demostración es inmediata, usando una propiedad de la conjugación:

$$|zw|^2 = z\,w\,\overline{z\,w} = z\,w\,\overline{z}\,\overline{w} = |z|^2\,|w|^2$$

y basta extraer raíces cuadradas para obtener la igualdad buscada. ■

1.3. Argumentos de un número complejo

De las dos coordenadas polares de un punto de $\mathbb{R}^2$, hemos discutido ya el radio polar, que es el módulo del correspondiente número complejo. Consideramos ahora el ángulo polar, excluyendo lógicamente el origen de coordenadas. En lo sucesivo escribiremos:

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$$

Pues bien, dado $z \in \mathbb{C}^*$, decimos que $\theta \in \mathbb{R}$ es **un argumento** de z cuando verifica que $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y denotamos por $\operatorname{Arg} z$ al conjunto de todos los argumentos de z:

$$\operatorname{Arg} z = \big\{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\big\}$$

Equivalentemente, para $\theta \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\theta \in \operatorname{Arg} z \iff \cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

Para $z \in \mathbb{C}^*$ fijo, vamos a describir explícitamente el conjunto de sus argumentos. Para simplificar la notación escribimos $a = \operatorname{Re} z/|z|$ y $b = \operatorname{Im} z/|z|$, con lo que $a^2 + b^2 = 1$, y los argumentos de z son las soluciones $\theta \in \mathbb{R}$ de un sistema de dos ecuaciones:

$$\cos\theta = a \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = b \tag{1}$$

La periodicidad del seno y el coseno nos dice que, si $\theta \in \operatorname{Arg} z$, entonces $\theta + 2k\pi \in \operatorname{Arg} z$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Recíprocamente, si $\theta, \varphi \in \operatorname{Arg} z$, la fórmula de adición para el coseno nos da

$$\cos(\varphi - \theta) = \cos\varphi \cos\theta + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta = a^2 + b^2 = 1$$

pero el coseno sólo toma el valor 1 en los múltiplos enteros de 2π, luego $\varphi = \theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Así pues, tendremos todas las soluciones de (1) tan pronto como encontremos una.

Para buscarla, es lógico pensar en $\psi = \arccos a$, que es solución de la primera ecuación, pero entonces, para la segunda ecuación sólo tendremos $\operatorname{sen}^2 \psi = b^2$, es decir, $|\operatorname{sen}\psi| = |b|$. Como $\psi \in [0, \pi]$, tenemos también $\operatorname{sen}\psi \geqslant 0$, luego ψ es solución de (1) cuando $b \geqslant 0$. Si $b < 0$, tendremos $\operatorname{sen}\psi = -b$, la imparidad del seno nos dice que $\operatorname{sen}(-\psi) = b$ y la paridad del coseno que $\cos(-\psi) = a$, luego en este caso la solución buscada es $-\psi$. En cualquier caso tenemos una solución del sistema (1), dada por

$$\theta = \operatorname{sgn}(b) \arccos a$$

donde $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función signo, extendida a todo $\mathbb{R}$ definiendo $\operatorname{sgn}(0) = 1$. Nótese que en realidad, cuando $b = 0$ tanto ψ como $-\psi$ eran soluciones del sistema (1) y pueden darse dos casos, o bien $a = 1$, y entonces $\psi = -\psi = 0$, o bien $a = -1$, y entonces tenemos dos soluciones distintas, π y $-\pi$, de las que hemos preferido elegir π.

Cuando $b \neq 0$, tenemos $|a| < 1$, luego $0 < \arccos a < \pi$, es decir, $0 < |\theta| < \pi$. Para $b = 0$ hemos visto que $\theta = 0$ si $a = 1$ y $\theta = \pi$ si $a = -1$. Por tanto, en cualquier caso tenemos $-\pi < \theta \leqslant \pi$. De hecho θ es la única solución de (1) en el intervalo $]-\pi, \pi]$. En efecto, si φ es otra solución en dicho intervalo, sabemos que $\varphi = \theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, pero de $\theta, \varphi \in]-\pi, \pi]$ deducimos que $-2\pi < \varphi - \theta < 2\pi$, luego $k = 0$ y $\varphi = \theta$. Resumimos en un sólo enunciado toda la discusión anterior, teniendo en cuenta la definición de a y b, y resaltando el argumento concreto de cada $z \in \mathbb{C}^*$ que hemos calculado explícitamente, para obtener todos los demás a partir de él.

- *Para cada $z \in \mathbb{C}^*$, existe un único argumento de z que pertenece al intervalo semiabierto $]-\pi, \pi]$. Se le llama* **argumento principal** *de z y se denota por $\arg z$. De hecho se tiene:*

$$\arg z = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z)\, \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

entendiendo que $\operatorname{sgn} 0 = 1$. Se verifica además que

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

La interpretación geométrica de los argumentos de $z \in \mathbb{C}^*$ se comentó por adelantado. Son todas las medidas en radianes del ángulo polar determinado por el punto z, es decir, el ángulo orientado con vértice en el origen que va de la parte positiva del eje real (semieje real positivo) a la semirrecta que pasa por z. Como es lógico, cualesquiera dos de estas medidas difieren en un múltiplo entero de 2π. Al destacar el argumento principal hemos elegido una forma muy natural de medir dicho ángulo, como vamos a ver.

Tenemos $0 < \arg z < \pi$ cuando $\operatorname{Im} z > 0$ (semiplano superior) y $-\pi < \arg z < 0$ cuando $\operatorname{Im} z < 0$ (semiplano inferior). En el eje real es $\arg x = 0$ para $x \in \mathbb{R}^+$ y $\arg x = \pi$ para $x \in \mathbb{R}^-$. Todo ello es muy acorde con la intuición geométrica.

Para estudiar las propiedades de los argumentos, conviene observar que el conjunto $2\pi\mathbb{Z}$, de los múltiplos enteros de 2π, es un subgrupo del grupo aditivo abeliano $\mathbb{R}$, que da lugar al grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Para cada $z \in \mathbb{C}^*$, es claro que $\operatorname{Arg} z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, concretamente $\operatorname{Arg} z$ es la clase de equivalencia a la que pertenece el argumento principal $\arg z$, o cualquier otro argumento de z. Podemos por tanto pensar en la aplicación $z \mapsto \operatorname{Arg} z$, de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, cuya propiedad clave es la siguiente:

- *Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:*

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \{\theta + \varphi : \theta \in \operatorname{Arg} z,\ \varphi \in \operatorname{Arg} w\}$$

Basta probar que si $\theta \in \operatorname{Arg} z$ y $\varphi \in \operatorname{Arg} w$, entonces $\theta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$. En efecto, tenemos claramente:

$$\begin{aligned} zw &= |z|\big(\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta\big)\,|w|\big(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi\big) \\ &= |z|\,|w|\big(\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + i\,\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + i\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\big) \\ &= |zw|\big(\cos(\theta+\varphi) + i\,\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\big) \end{aligned}$$

donde hemos usado una propiedad del módulo ya conocida y las fórmulas de adición para el coseno y el seno. ■

Resaltamos la interpretación algebraica del resultado anterior: la aplicación $z \mapsto \operatorname{Arg} z$ es un epimorfismo del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ sobre el grupo aditivo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Para obtener un isomorfismo de grupos basta restringirlo a un subgrupo adecuado de $\mathbb{C}^*$: el grupo multiplicativo $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ resulta ser isomorfo a $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Como consecuencia obvia del resultado anterior, para $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z$$

Conviene resaltar que todos los resultados anteriores dejan de ser válidos si, en vez del conjunto de todos los argumentos, usamos el argumento principal. Tomando $z = w = -1$, es claro que $\arg(zw) = 0 \neq 2\pi = \arg z + \arg w$ y también que $\arg(1/z) \neq -\arg z$. Se podría pensar que este problema se debe a una errónea elección del argumento principal, pero no es así. No podemos elegir un argumento de cada $z \in \mathbb{C}^*$ de forma que se cumplan las propiedades algebraicas que hemos probado para el conjunto de todos los argumentos. Más concretamente, si una aplicación $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ verifica que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, entonces φ no puede verificar la igualdad $\varphi(zw) = \varphi(z) + \varphi(w)$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$, pues en tal caso, tomando $w = 1$ tendríamos $\varphi(1) = 0$, pero tomando entonces $z = w = -1$, obtendríamos que $0 = \varphi(-1) \in \operatorname{Arg}(-1)$, lo cual es absurdo.

Comentemos finalmente la interpretación geométrica del producto de números complejos. En primer lugar, dado $u \in \mathbb{T}$, esto es, $u \in \mathbb{C}$ con $|u| = 1$, describimos geométricamente la multiplicación por u, es decir, la aplicación $z \mapsto uz$, de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Para todo $z \in \mathbb{C}^*$, sabemos que $\arg u + \arg z \in \operatorname{Arg}(uz)$ y $|uz| = |z|$, luego el punto uz se obtiene al girar el punto z, haciendo centro en el origen, un ángulo de amplitud $\theta = \arg u$, en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj) cuando $\theta > 0$ y negativo si $\theta < 0$. Así pues, la multiplicación por $u \in \mathbb{T}$ se interpreta geométricamente como un *giro* de ángulo $\theta = \arg u$.

Por otra parte la multiplicación por $\rho \in \mathbb{R}^+$, es decir, la aplicación $z \mapsto \rho z$, de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, es la *homotecia* de razón ρ, cuya interpretación geométrica es bien conocida. Para todo $z \in \mathbb{C}^*$, tenemos $\arg(\rho z) = \arg z$ y $|\rho z| = \rho|z|$, luego los puntos z y ρz están situados en una misma semirrecta que parte del origen, de forma que el cociente entre sus distancias al origen es la razón de homotecia.

Finalmente, fijado $w \in \mathbb{C}^*$, podemos escribir $w = \rho u$, con $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $u \in \mathbb{T}$, con lo que la multiplicación por w se obtiene como composición de la homotecia de razón $\rho = |w|$ con el giro de ángulo $\arg u = \arg w$. Es claro que esta interpretación permite construir gráficamente el producto de dos números complejos cualesquiera.

1.4. Ejercicios

1. Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \, : \, a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

   con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los números complejos

$$\frac{i-\sqrt{3}}{1+i} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{i\sqrt{3}-1}$$

3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}\,z} \qquad \forall z \in U$$

   Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

4. Dados $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

5. Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por

$$A = \big\{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z+i| = 2|z-i| \big\} \quad \text{y} \quad B = \big\{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z-i| + |z+i| = 4 \big\}$$

6. Probar que $\arg z = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right)$ para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

7. Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi & \text{si } x < 0,\ y > 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi & \text{si } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

8. Probar las *fórmulas de De Moivre:*

$$\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^8$

10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

(a) $$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$$

(b) $$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$$

Tema 2

Topología del plano complejo

Repasamos algunos conceptos y resultados acerca de las propiedades métricas y topológicas del plano complejo. Todos ellos son bien conocidos, pues como espacio métrico, $\mathbb{C}$ es idéntico a $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclídea, luego la topología usual de $\mathbb{C}$ es la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

2.1. La topología de $\mathbb{C}$

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos y el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ no sólo se identifican como conjuntos, sino también como espacios métricos. Más concretamente, $\mathbb{C}$ es un espacio métrico con la distancia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$d(z,w) = |w - z| \qquad \forall z,w \in \mathbb{C}$$

Decimos simplemente que d es **la distancia** de $\mathbb{C}$, pues nunca consideramos otra. Cualquier noción métrica que usemos en $\mathbb{C}$, como la complitud, la acotación o la continuidad uniforme, se refiere siempre a esta distancia. Recordando que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, al restringir d a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ obtenemos la distancia usual de $\mathbb{R}$, luego vemos siempre a $\mathbb{R}$ como *subespacio métrico* de $\mathbb{C}$.

Las bolas abiertas o cerradas en $\mathbb{C}$ suelen llamarse discos. Más concretamente, para $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, el *disco abierto* y el *disco cerrado*, de centro a y radio r, vienen dados por

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \qquad \text{y} \qquad \overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$$

Naturalmente, **la topología** de $\mathbb{C}$ es la generada por su distancia, y es también la única topología que consideramos en $\mathbb{C}$. Cualquier noción topológica que usemos en $\mathbb{C}$, como la continuidad, la compacidad, la conexión y tantas otras, se refiere siempre a dicha topología. Por supuesto, la topología de $\mathbb{C}$ induce en $\mathbb{R}$ su topología usual.

Los abiertos de $\mathbb{C}$ son las uniones (arbitrarias) de discos abiertos. Equivalentemente, un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es *abierto* cuando coincide con su *interior*:

$$\Omega \text{ abierto} \iff \Omega = \Omega^\circ \iff \forall z \in \Omega \ \exists r \in \mathbb{R}^+ : D(z,r) \subset \Omega$$

2.2. Sucesiones de números complejos

Como en cualquier espacio métrico, la topología de $\mathbb{C}$ puede caracterizarse mediante la convergencia de sucesiones, noción que ahora vamos a repasar.

Si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos y $z \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\{z_n\} \to z \iff \left[\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant m \ \Rightarrow \ |z_n - z| < \varepsilon\right]$$

lo que equivale a $\big\{|z_n - z|\big\} \to 0$. En particular $\{z_n\} \to 0$ si, y sólo si, $\big\{|z_n|\big\} \to 0$.

Sabemos que, para un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ y un punto $z \in \mathbb{C}$, se tiene $z \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión de puntos de A que converge a z. Por tanto, A es cerrado si, y sólo si, contiene a los límites de todas las sucesiones de puntos de A que sean convergentes:

$$A \text{ cerrado} \iff A = \overline{A} \iff \left[z_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \{z_n\} \to z \in \mathbb{C} \ \Rightarrow \ z \in A\right]$$

Queda así caracterizada la topología de $\mathbb{C}$ mediante la convergencia de sucesiones.

La convergencia de una sucesión de números complejos equivale a la de las sucesiones de sus partes reales e imaginarias,

$$\{z_n\} \to z \qquad \iff \qquad \{\operatorname{Re} z_n\} \to \operatorname{Re} z \quad \text{y} \quad \{\operatorname{Im} z_n\} \to \operatorname{Im} z \tag{1}$$

equivalencia que se comprueba directamente usando que

$$\text{máx}\,\big\{\,|\operatorname{Re} w|\,,\,|\operatorname{Im} w|\,\big\} \leqslant |w| \leqslant |\operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} w| \qquad \forall w \in \mathbb{C} \tag{2}$$

Estas desigualdades también nos dicen que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es de Cauchy si, y sólo si, tanto $\{\operatorname{Re} z_n\}$ como $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son sucesiones de Cauchy de números reales. Del teorema de complitud de $\mathbb{R}$ deducimos la principal propiedad de $\mathbb{C}$ como espacio métrico:

- $\mathbb{C}$ *es un espacio métrico* ***completo***. *Por tanto, un subespacio métrico de* $\mathbb{C}$ *es completo si, y sólo si, es un subconjunto cerrado de* $\mathbb{C}$.

2.3. Acotación y compacidad

Claramente, un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ está **acotado**, si y sólo si, A está *acotado en módulo*:

$$A \text{ acotado} \iff \exists M \in \mathbb{R} \,:\, |z| \leqslant M \quad \forall z \in A$$

Recordamos también que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ está acotada cuando lo está el conjunto de sus términos:

$$\{z_n\} \text{ acotada} \iff \exists M \in \mathbb{R} \,:\, |z_n| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Toda sucesión convergente de números complejos está acotada: si $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}$, se tiene $|z_n| \leqslant |z_n - z| + |z|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y basta usar que $\big\{\,|z_n - z|\,\big\} \to 0$.

De las desigualdades (2) deducimos que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ está acotada si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ están acotadas. Esto permite probar fácilmente para $\mathbb{C}$ el teorema de Bolzano-Weierstrass, que de hecho es válido en $\mathbb{R}^N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Así pues,

- *Toda sucesión acotada de números complejos admite una sucesión parcial convergente.*

Recordemos ahora que un subconjunto K de un espacio métrico E es compacto si, y sólo si, toda sucesión de puntos de K admite una sucesión parcial que converge a un punto de K. Esto implica siempre que K está acotado y es un subconjunto cerrado de E. En el caso $E = \mathbb{C}$, como ocurre en general en $\mathbb{R}^N$, usando el teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos fácilmente el recíproco. Por tanto:

- *Un subconjunto de $\mathbb{C}$ es* ***compacto*** *si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

En particular los discos cerrados son compactos, y obtenemos otra propiedad topológica clave de $\mathbb{C}$: *es un espacio topológico localmente compacto*, es decir, todo punto de $\mathbb{C}$ tiene un entorno compacto.

2.4. Cálculo de límites

Antes de repasar la reglas generales para el cálculo de límites de sucesiones, recordamos la noción de sucesión divergente.

Una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos es **divergente**, cuando la sucesión de números reales $\{|z_n|\}$ diverge positivamente, en cuyo caso escribimos $\{z_n\} \to \infty$:

$$\{z_n\} \to \infty \iff \big\{|z_n|\big\} \to +\infty \iff \big[\forall M \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \Rightarrow |z_n| > M\big]$$

Es claro que entonces, toda sucesión parcial de $\{z_n\}$ también diverge. Como en $\mathbb{R}$, del teorema de Bolzano-Weierstrass deducimos que *una sucesión de números complejos es divergente si, y sólo si, no admite ninguna sucesión parcial convergente.*

Conviene resaltar que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ puede ser divergente, sin que lo sea ninguna de las sucesiones $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$. Por ejemplo, tomando

$$z_n = n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

tenemos $|z_n| = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{z_n\} \to \infty$, pero $\operatorname{Re} z_{2n-1} = 0 = \operatorname{Im} z_{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{\operatorname{Re} z_n\}$ no es divergente, como tampoco lo es $\{\operatorname{Im} z_n\}$.

Las reglas para estudiar el comportamiento de una suma, producto o cociente, de sucesiones convergentes o divergentes de números complejos, son exactamente las mismas que teníamos en $\mathbb{R}$. De cualquier forma que se aborde, la demostración es rutinaria, pero no conviene trasladar sistemáticamente el problema a $\mathbb{R}^2$ usando las sucesiones de partes reales e imaginarias. Es preferible trabajar como en $\mathbb{R}$, aprovechando que el módulo de un número complejo tiene formalmente las mismas propiedades que el valor absoluto de un número real.

- *Sean* $\{z_n\}$ *y* $\{w_n\}$ *sucesiones de números complejos y* $z, w \in \mathbb{C}$. *Se tiene:*

(i) *Si* $\{z_n\} \to z$, *entonces* $\{|z_n|\} \to |z|$
(ii) *Si* $\{z_n\} \to z$ *y* $\{w_n\} \to w$, *entonces* $\{z_n + w_n\} \to z + w$
(iii) *Si* $\{z_n\} \to \infty$ *y* $\{w_n\}$ *está acotada, entonces* $\{z_n + w_n\} \to \infty$
(iv) *Si* $\{z_n\} \to 0$ *y* $\{w_n\}$ *está acotada, entonces* $\{z_n w_n\} \to 0$
(v) *Si* $\{z_n\} \to z$ *y* $\{w_n\} \to w$, *entonces* $\{z_n w_n\} \to zw$
(vi) *Si* $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ *y* $\{w_n\} \to \infty$, *entonces* $\{z_n w_n\} \to \infty$
(vii) *Si* $\{z_n\} \to \infty$ *y* $\{w_n\} \to \infty$, *entonces* $\{z_n w_n\} \to \infty$
$(viii)$ *Si* $w_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\{w_n\} \to w \neq 0$, *entonces* $\{1/w_n\} \to 1/w$
(ix) *Si* $w_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\{w_n\} \to 0$ *si, y sólo si,* $\{1/w_n\} \to \infty$

Indicamos en cada caso una igualdad o desigualdad de comprobación evidente, válida para todo $n \in \mathbb{N}$, de la que se deduce con facilidad el resultado, bien directamente, o bien usando resultados anteriores:

$$
\begin{array}{rl}
(i) & \big|\,|z_n| - |z|\,\big| \leqslant |z_n - z| \\
(ii) & \big|(z_n + w_n) - (z + w)\big| \leqslant |z_n - z| + |w_n - w| \\
(iii) & |z_n + w_n| \geqslant |z_n| - \sup\big\{|w_k| : k \in \mathbb{N}\big\} \\
(iv) & |z_n w_n| \leqslant |z_n| \sup\big\{|w_k| : k \in \mathbb{N}\big\} \\
(v) & z_n w_n - zw = (z_n - z)w_n + z(w_n - w) \\
(vi) & |z_n w_n| \geqslant |w_n|\big(|z| - |z - z_n|\big) \\
(vii) & |z_n w_n| = |z_n|\,|w_n| \\
(viii) & \left|\dfrac{1}{w_n} - \dfrac{1}{w}\right| = \dfrac{|w - w_n|}{|w_n|\,|w|} \\
(ix) & \left|\dfrac{1}{w_n}\right| = \dfrac{1}{|w_n|}
\end{array}
$$

Nótese que, en todos los casos, el razonamiento es literalmente el mismo que en $\mathbb{R}$. ■

2.5. Funciones complejas de variable compleja

Empezamos ya a trabajar con las funciones que desde ahora nos van a interesar. En todo lo que sigue, A será un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y denotaremos por $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{C}$. En general, decimos que los elementos de $\mathcal{F}(A)$ son funciones complejas de variable compleja, pero puede ocurrir que A esté contenido en $\mathbb{R}$, con lo que los elementos de $\mathcal{F}(A)$ serán funciones complejas de variable real. Incluso, para $A \subset \mathbb{R}$, una función $f \in \mathcal{F}(A)$ puede verificar que $f(A) \subset \mathbb{R}$, en cuyo caso f es una función real de variable real. Por tanto, el estudio que ahora iniciamos no debe verse como una teoría paralela, sino como una auténtica generalización del estudio de las funciones reales de variable real. No obstante, en el caso que realmente más nos interesa, A será un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, que obviamente no puede estar contenido en $\mathbb{R}$.

Las operaciones del cuerpo $\mathbb{C}$ se trasladan de forma natural a $\mathcal{F}(A)$. Concretamente, para dos funciones $f, g \in \mathcal{F}(A)$ definimos su *suma* $f+g$ y su *producto* fg por

$$\big(f+g\big)(z) = f(z) + g(z) \quad \text{y} \quad \big(fg\big)(z) = f(z)g(z) \quad \forall z \in A$$

Estas dos operaciones convierten $\mathcal{F}(A)$ en un *anillo conmutativo con unidad* que, salvo en el caso trivial de que A se reduzca a un punto, tiene divisores de cero, luego no es un cuerpo. No obstante, si $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, tenemos la función *cociente* $f/g \in \mathcal{F}(A)$ definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \qquad \forall z \in A$$

Como caso particular del producto de funciones, cuando una de ellas es constante, obtenemos un *producto por escalares complejos*. Concretamente, para $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\mathcal{F}(A)$ escribimos

$$\big(\lambda f\big)(z) = \lambda f(z) \qquad \forall z \in A$$

Con la suma antes definida y este producto por escalares, $\mathcal{F}(A)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, esto es, un *espacio vectorial complejo*.

Usaremos a menudo la composición de funciones. Si $f \in \mathcal{F}(A)$, $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$ y $g \in \mathcal{F}(B)$, la *composición* de f con g es la función $g \circ f \in \mathcal{F}(A)$ dada por $\big(g \circ f\big)(z) = g\big(f(z)\big)$ para todo $z \in A$. Componiendo una función $f \in \mathcal{F}(A)$ con las funciones parte real, parte imaginaria, conjugación y módulo, definidas en todo $\mathbb{C}$, obtenemos las funciones $\operatorname{Re} f$ *(parte real de f)*, $\operatorname{Im} f$ *(parte imaginaria de f)*, $\overline{f}$ *(conjugada de f)* y $|f|$ *(módulo de f)*. Así pues, para todo $z \in A$ tenemos

$$\big(\operatorname{Re} f\big)(z) = \operatorname{Re} f(z)\,, \quad \big(\operatorname{Im} f\big)(z) = \operatorname{Im} f(z)\,, \quad \overline{f}(z) = \overline{f(z)} \quad \text{y} \quad |f|(z) = |f(z)|$$

Mencionamos relaciones obvias entre estas funciones:

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f\,, \quad \overline{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f\,, \quad \operatorname{Re} f = \frac{f+\overline{f}}{2}\,, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f-\overline{f}}{2i} \tag{3}$$

$$|f| = \big|\overline{f}\big| = \big(f\,\overline{f}\big)^{1/2} = \big((\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2\big)^{1/2}$$

2.6. Continuidad en un punto

Ni que decir tiene, para una función $f \in \mathcal{F}(A)$, la continuidad de f en un punto $z \in A$ es caso particular de la noción general de continuidad en un punto para una función de un espacio topológico en otro, entendiendo claro está, que A tiene la topología inducida por la de $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ es un espacio métrico y A un subespacio métrico de $\mathbb{C}$, dicha noción se expresa cómodamente usando la distancia de $\mathbb{C}$ y se caracteriza mediante la convergencia de sucesiones. Por tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} f \text{ **continua** en } z \iff & \big[\,\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : w \in A,\ |w-z| < \delta \ \Rightarrow\ |f(w) - f(z)| < \varepsilon\,\big] \\ \iff & \big[\, z_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \{z_n\} \to z \ \Rightarrow\ \big\{f(z_n)\big\} \to f(z)\,\big] \end{aligned}$$

Resaltamos el carácter local de la continuidad, cuya comprobación es clara:

- *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$ y B un subconjunto no vacío de A. Si f es continua en un punto $z \in B$, entonces la restricción $f|_B$ es continua en z. En el otro sentido, si $f|_B$ es continua en z, y existe $\delta > 0$ tal que $D(z,\delta) \cap A \subset B$, entonces f es continua en z.*

Comprobamos también rutinariamente, que si $f, g \in \mathcal{F}(A)$ son continuas en un punto $z \in A$, entonces la suma $f + g$ y el producto fg también son funciones continuas en z. Si además se tiene $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces la función cociente f/g es continua en z.

Recordamos también que la continuidad se conserva al componer funciones. Si $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$, $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$ y $g \in \mathcal{F}(B)$ es continua en el punto $f(z)$, entonces $g \circ f$ es continua en el punto z.

Por ejemplo, la conjugación es una *isometría* de $\mathbb{C}$ en sí mismo, es decir, para $w, z \in \mathbb{C}$ se tiene $|\overline{w} - \overline{z}| = |w - z|$, y en particular es una función continua en todo punto de $\mathbb{C}$. Por tanto, si $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$, $\overline{f}$ también lo es. El recíproco también es cierto, ya que $f = \overline{\overline{f}}$. De las igualdades (3) deducimos algo que merece la pena destacar, pues hace equivalente la continuidad de una función compleja a la de dos funciones reales:

- *Una función $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$ si, y sólo si, $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son continuas en z.*

Por otra parte, la desigualdad $\big||w| - |z|\big| \leqslant |w - z|$, válida para cualesquiera $w, z \in \mathbb{C}$, nos dice que la función módulo es continua en todo punto de $\mathbb{C}$. Usándola igual que hemos usado la conjugación, deducimos que si $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$, entonces $|f|$ es continua en z. Esta vez el recíproco es obviamente falso.

2.7. Continuidad

Como bien sabemos, para una función $f \in \mathcal{F}(A)$, la continuidad en un sólo punto tiene poca utilidad. Decimos que f es *continua en un conjunto* no vacío $B \subset A$ cuando es continua en todo punto $z \in B$ y, si f es continua en A decimos simplemente que f es **continua**. Denotamos por $\mathcal{C}(A)$ al conjunto de todas las funciones continuas de A en $\mathbb{C}$. De nuevo, esta noción de continuidad es caso particular de la continuidad de una función entre dos espacios topológicos, entendiendo siempre que A tiene la topología inducida por la de $\mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{T}$ a la topología de $\mathbb{C}$, con lo que los abiertos (relativos) de A son los conjuntos de la forma $U \cap A$ con $U \in \mathcal{T}$. Entonces, para $f \in \mathcal{F}(A)$ tenemos:

$$f \in \mathcal{C}(A) \iff \forall V \in \mathcal{T} \ \exists U \in \mathcal{T} \,:\, f^{-1}(V) = U \cap A$$

El carácter local de la continuidad, ahora en todo el conjunto A, suele usarse como sigue:

- *Supongamos que $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ donde Λ es un conjunto arbitrario y, para cada $\lambda \in \Lambda$, A_λ es un abierto (relativo) de A. Para $f \in \mathcal{F}(A)$ se tiene que $f \in \mathcal{C}(A)$ si, y sólo si, $f|_{A_\lambda} \in \mathcal{C}(A_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

La estabilidad por diversas operaciones de la continuidad en un punto, nos hace ver que $\mathcal{C}(A)$ es un *subanillo* y también un *subespacio vectorial* de $\mathcal{F}(A)$. También que para $f,g \in \mathcal{C}(A)$ con $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, se tiene $f/g \in \mathcal{C}(A)$, así como que si $f \in \mathcal{C}(A)$ y $g \in \mathcal{C}(B)$ con $f(A) \subset B$, entonces $g \circ f \in \mathcal{C}(A)$. Con respecto a la función conjugada, las partes real e imaginaria, o el módulo de una función, para $f \in \mathcal{F}(A)$ tenemos claramente que

$$f \in \mathcal{C}(A) \iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{C}(A) \iff \overline{f} \in \mathcal{C}(A)$$

y también que $f \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow |f| \in \mathcal{C}(A)$, siendo falsa la implicación recíproca.

Pasamos ahora a comentar las propiedades clave de las funciones continuas, que usaremos muy a menudo. Las agrupamos en un sólo enunciado, que incluye las versiones para funciones complejas de los teoremas de Weierstrass, de Heine y del valor intermedio. No son más que casos particulares de resultados válidos para funciones continuas entre espacios métricos:

Teorema. *Para un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}(A)$ se tiene:*

- *Si A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto y f es uniformemente continua.*
- *Si A es conexo, entonces $f(A)$ es conexo.*

Comentamos brevemente las dos nociones que han aparecido en el enunciado anterior. Recordamos que $f \in \mathcal{F}(A)$ es **uniformemente continua** cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ z,w \in A\,,\ |z-w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

y es evidente que entonces $f \in \mathcal{C}(A)$, pero en general el recíproco no es cierto, de ahí el interés del teorema de Heine.

Recordemos una condición suficiente para la continuidad uniforme. Decimos que $f \in \mathcal{F}(A)$ es **lipschitziana** cuando existe una constante $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|f(z) - f(w)| \leqslant M|z-w| \qquad \forall z,w \in A$$

La mínima constante que verifica la desigualdad anterior es la *constante de Lipschitz* de f, que claramente viene dada por

$$M_0 = \sup\left\{ \frac{|f(z) - f(w)|}{|z-w|} \ : \ z,w \in A\,, z \neq w \right\}$$

Las funciones parte real, parte imaginaria y módulo, son lipschitzianas con constante $M_0 = 1$. En general, es obvio que *toda función lipschitziana es uniformemente continua,* pero sabemos que el recíproco es falso.

La otra noción que ha aparecido en el teorema anterior es la conexión de un subconjunto de $\mathbb{C}$, que desde luego es caso particular de la noción de espacio topológico conexo. Para $A \subset \mathbb{C}$, sabemos que A es **conexo** cuando no se puede expresar como unión de dos abiertos relativos, no vacíos y disjuntos. Ello equivale claramente a que $\emptyset$ y A sean los únicos subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados relativos de A. Así pues, denotando por $\mathcal{T}_A$ a la topología inducida en A por la topología de $\mathbb{C}$, tenemos:

$$\begin{aligned} A \text{ conexo } &\iff \big[\, U, V \in \mathcal{T}_A\,,\ A = U \cup V\,,\ U \cap V = \emptyset \ \Rightarrow \ U = \emptyset \text{ o bien } V = \emptyset \,\big] \\ &\iff \big[\, U \in \mathcal{T}_A\,, A \setminus U \in \mathcal{T}_A \ \Rightarrow \ U = \emptyset \text{ o bien } U = A \,\big] \end{aligned}$$

Consideremos el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, aunque cualquier otro espacio con la topología discreta podría servir. Si $A \subset \mathbb{C}$ es conexo y $f \in \mathcal{C}(A)$ verifica que $f(A) \subset \mathbb{Z}$, el teorema anterior nos dice que $f(A)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{Z}$, es decir, f es constante. Recíprocamente, supongamos que toda función continua de A en $\mathbb{Z}$ es constante, para probar que A es conexo. Dado $U \in \mathcal{T}_A$ tal que $A \setminus U \in \mathcal{T}_A$, la función característica de U, definida por $f(z) = 1$ para todo $z \in U$ y $f(z) = 0$ para todo $z \in A \setminus U$, que es continua por el carácter local de la continuidad, ha de ser constante, lo que claramente implica que $U = \emptyset$, o bien, $U = A$. Hemos comprobado la siguiente caracterización de los subconjuntos conexos de $\mathbb{C}$, que a poco que se piense, es válida para cualquier espacio topológico:

$$A \text{ conexo} \iff \big[\, f \in \mathcal{C}(A)\,,\ f(A) \subset \mathbb{Z} \ \Rightarrow\ f \text{ constante} \,\big]$$

2.8. Límite funcional

Recordemos primeramente la definición del conjunto A' de los puntos de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, así como su caracterización secuencial. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} \alpha \in A' &\iff D(\alpha,\varepsilon) \cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \\ &\iff \exists\, \{z_n\} \ :\ z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N},\ \{z_n\} \to \alpha \end{aligned}$$

Pues bien, si $f \in \mathcal{F}(A)$, $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{C}$, sabemos que

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\alpha} f(z) = L &\iff \big[\, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ :\ z \in A,\ 0 < |z-\alpha| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z) - L| < \varepsilon \,\big] \\ &\iff \big[\, z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N},\ \{z_n\} \to \alpha \ \Rightarrow\ \{f(z_n)\} \to L \,\big] \end{aligned}$$

Es evidente que $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z) = L$ si, y sólo si, $\lim\limits_{z\to\alpha} |f(z) - L| = 0$. En particular, tomando $L = 0$ tenemos que $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z) = 0$ si, y sólo si, $\lim\limits_{z\to\alpha} |f(z)| = 0$.

También relacionamos claramente el límite de una función compleja con los de su parte real e imaginaria:

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = L \quad\iff\quad \lim_{z\to\alpha} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} L \ \text{ y } \ \lim_{z\to\alpha} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} L$$

Recordemos ahora la relación entre límite funcional y continuidad:

- *Para $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\alpha \in A \cup A'$, se pueden dar tres casos:*
  - (i) *Si $\alpha \in A \setminus A'$, entonces f es continua en el punto α.*
  - (ii) *Si $\alpha \in A \cap A'$, entonces f es continua en α si, y sólo si, $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z) = f(\alpha)$.*
  - (iii) *Finalmente, si $\alpha \in A' \setminus A$, entonces f tiene límite en el punto α si, y sólo si, existe una función $g \in \mathcal{F}\big(A \cup \{\alpha\}\big)$ que es continua en α y extiende a f, en cuyo caso se tiene $g(\alpha) = \lim\limits_{z\to\alpha} f(z)$.*

Usaremos también la divergencia de funciones. Para $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\alpha \in A'$, decimos que f diverge en el punto α, y escribimos $f(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$, cuando $|f|$ diverge positivamente en dicho punto, es decir:

$$\begin{aligned} f(z) \to \infty \ (z \to \alpha) &\iff \big[\, \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ : \ z \in A, \ 0 < |z - \alpha| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z)| > M \,\big] \\ &\iff \big[\, z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{z_n\} \to \alpha \ \Rightarrow \ \{f(z_n)\} \to \infty \,\big] \end{aligned}$$

Resaltamos el carácter local del límite funcional y de la divergencia en un punto:

- *Sean $f \in \mathcal{F}(A)$, $\alpha \in A'$. Fijado $\delta > 0$, sea g la restricción de f al conjunto $A \cap D(z, \delta)$. Entonces α es punto de acumulación de dicho conjunto y, para cualquier $L \in \mathbb{C}$, se tiene:*

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = L \iff \lim_{z \to \alpha} g(z) = L$$

Análogamente, f diverge en el punto α si, y sólo si, g diverge en α.

Las reglas para el cálculo de límites, o el estudio de la divergencia de funciones, son análogas a las que teníamos para sucesiones, y de hecho se deducen rutinariamente de ellas. Las reunimos en un enunciado:

- *Sean $f, g \in \mathcal{F}(A)$, $\alpha \in A'$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Se tiene:*
  - (i) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} |f(z)| = |\lambda|$
  - (ii) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$ *y* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} \big(f + g\big)(z) = \lambda + \mu$
  - (iii) *Si* $f(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$ *y* g *está acotada, entonces* $\big(f + g\big)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$
  - (iv) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = 0$ *y* g *está acotada, entonces* $\lim_{z \to \alpha} \big(f g\big)(z) = 0$
  - (v) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$ *y* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} \big(f g\big)(z) = \lambda \mu$
  - (vi) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}^*$ *y* $g(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$, *entonces* $(f g)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$
  - (vii) *Si* $f(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$ *y* $g(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$, *entonces* $(f g)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$
  - $(viii)$ *Si* $g(A) \subset \mathbb{C}^*$ *y* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu \in \mathbb{C}^*$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} (1/g)(z) = 1/\mu$
  - (ix) *Si* $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = 0$ *si, y sólo si,* $(1/g)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$

Comentemos finalmente las nociones de límite y divergencia en el infinito de una función. Si el conjunto A no está acotado, $f \in \mathcal{F}(A)$ y $L \in \mathbb{C}$, definimos

$$\begin{aligned} \lim_{z \to \infty} f(z) = L &\iff \big[\, \forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \ : \ z \in A, \ |z| > R \ \Rightarrow \ |f(z) - L| < \varepsilon \,\big] \\ &\iff \big[\, z_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{z_n\} \to \infty \ \Rightarrow \ \{f(z_n)\} \to L \,\big] \end{aligned}$$

y con respecto a la divergencia, tenemos

$$\begin{aligned} f(z) \to \infty \ (z \to \infty) &\iff \big[\, \forall M \in \mathbb{R} \ \exists R > 0 \ : \ z \in A, \ |z| > R \ \Rightarrow \ |f(z)| > M \,\big] \\ &\iff \big[\, z_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{z_n\} \to \infty \ \Rightarrow \ \{f(z_n)\} \to \infty \,\big] \end{aligned}$$

El comportamiento en el infinito de una función equivale al comportamiento en el origen de otra, que se obtiene de ella mediante un cambio de variable:

- *Sea A un conjunto no acotado y $f \in \mathcal{F}(A)$. Sea $B = \{w \in \mathbb{C}^* : 1/w \in A\}$ y consideremos la función $g \in \mathcal{F}(B)$ definida por $g(w) = f(1/w)$ para todo $w \in B$. Entonces $0 \in B'$ y para $L \in \mathbb{C}$ se tiene*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = L \iff \lim_{w \to 0} g(w) = L \iff \lim_{w \to 0} f(1/w) = L$$

Análogamente, f diverge en el infinito si, y sólo si, g diverge en el origen.

Esta equivalencia permite aplicar al límite y la divergencia en el infinito de una función todas las propiedades antes comentadas para el límite o la divergencia en un punto del plano.

2.9. Ejercicios

1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal, $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$.

2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : \theta \notin \operatorname{Arg} z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.

3. Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

4. Probar que la función $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \operatorname{Arg} z$, se puede elegir $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \to \theta$.

5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y calcular su límite.

Tema 3

Funciones holomorfas

A partir de ahora entramos de lleno en el estudio del Análisis Complejo, discutiendo el concepto de *derivada* para funciones complejas de variable compleja. Lo primero que llamará la atención es que dicho concepto es formalmente idéntico al que conocemos para funciones reales de una variable real. Como consecuencia, las reglas de derivación de sumas productos y cocientes, así como la regla de la cadena, son exactamente las mismas que en variable real. Además, la función derivada resulta ser del mismo tipo que la función de partida, lo que más adelante permitirá considerar por inducción las derivadas sucesivas, exactamente igual que se hace para funciones reales de una variable real.

Las llamadas *ecuaciones de Cauchy-Riemann* nos permitirán aclarar la relación entre el nuevo concepto de derivada y la diferenciabilidad en sentido real, algo imprescindible, puesto que al fin y al cabo, estamos trabajando con funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$. Introducimos entonces el concepto de *función holomorfa*, que no es más que una función derivable en un abierto del plano. Las funciones holomorfas serán nuestro objeto de estudio en todo lo que sigue. De momento, probamos algunas propiedades elementales.

3.1. Concepto de derivada

Las definiciones que siguen no requieren motivación. Para evitar repeticiones, fijamos un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$, una función $f \in \mathcal{F}(A)$ y un punto $a \in A \cap A'$.

Consideramos la función $f_a : A \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f_a(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \qquad \forall z \in A \setminus \{a\}$$

Puesto que $a \in \big(A \setminus \{a\}\big)'$, tiene sentido preguntarse si f_a tiene o no límite en a. Pues bien, se dice que f es **derivable** en el punto a cuando la función f_a tiene límite en a. Dicho límite, que es un número complejo, recibe el nombre de **derivada** de la función f en el punto a, y se denota por $f\,'(a)$.

Así pues, simbólicamente:

$$f'(a) = \lim_{z \to a} f_a(z) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Naturalmente, para un conjunto no vacío $B \subset A \cap A'$, decimos que f es derivable en B cuando es derivable en todo punto $z \in B$. Sea ahora A_1 el conjunto de puntos de $A \cap A'$ en los que f es derivable. Si A_1 no es vacío, tenemos la función $z \mapsto f'(z)$ que a cada punto de A_1 hace corresponder la derivada de f en dicho punto, es decir, la **función derivada** de f, que se denota por f'. Simbólicamente:

$$f' : A_1 \to \mathbb{C}, \quad f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \qquad \forall z \in A_1$$

Dos observaciones inmediatas deben estar claras desde el principio. En primer lugar, de la derivabilidad de una función en un punto se deduce su continuidad en dicho punto:

- *Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.*

Como $f(z) = f(a) + f_a(z)(z - a)$ para todo $z \in A \setminus \{a\}$, cuando f_a tiene límite en el punto a tenemos $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$. De hecho, bastaba la acotación de f_a en un entorno de a. ■

Por otra parte, el concepto de derivada tiene carácter local:

- *Si B es un subconjunto no vacío de A, y f es derivable en un punto $b \in B \cap B'$, entonces la restricción $f|_B$ es derivable en b con $(f|_B)'(b) = f'(b)$. En el otro sentido, si $f|_B$ es derivable en b y existe $\delta > 0$ tal que $D(b, \delta) \cap A \subset B$, entonces f es derivable en b.*

Basta tener en cuenta que $\big(f|_B\big)_b = f_b|_B$ y aplicar a la función f_b el carácter local del concepto de límite en un punto. ■

Puede parecer sorprendente que hablemos de la derivabilidad en puntos de $A \cap A'$ y no sólo en puntos de A°, como se hace con la diferenciabilidad de funciones de dos variables reales, para tener asegurada la unicidad de la diferencial. Ahora la derivada es el límite de una función, que tiene sentido, y si existe es único, en cualquier punto de $A \cap A'$. En realidad trabajaremos casi siempre en puntos de A°, luego la mayor generalidad del planteamiento es sólo formal. Sin embargo, trabajar en puntos de acumulación de A que no sean interiores, permite considerar los casos particulares que siguen.

Cuando $A \subset \mathbb{R}$ y $f(A) \subset \mathbb{R}$, está claro que el concepto de derivada recién introducido es exactamente el mismo que conocíamos para funciones reales de una variable real. Estamos pues generalizando ese caso bien conocido.

Todavía con $A \subset \mathbb{R}$, pero permitiendo que f tome valores complejos, es claro que, para todo $t \in A \setminus \{a\}$, se tiene

$$\begin{aligned} f_a(t) &= \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{\operatorname{Re} f(t) - \operatorname{Re} f(a)}{t - a} + i\, \frac{\operatorname{Im} f(t) - \operatorname{Im} f(a)}{t - a} \\ &= \big(\operatorname{Re} f\big)_a(t) + i\,\big(\operatorname{Im} f\big)_a(t) \end{aligned}$$

Tenemos por tanto:

$$\operatorname{Re} f_a = \big(\operatorname{Re} f\big)_a \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} f_a = \big(\operatorname{Im} f\big)_a$$

pero nótese, para evitar malentendidos, que este paso ha sido posible porque $t-a \in \mathbb{R}$.

Deducimos que f_a tendrá límite en el punto a si, y sólo si, lo tienen $(\operatorname{Re} f)_a$ y $(\operatorname{Im} f)_a$, en cuyo caso la relación entre los tres límites es clara. Hemos probado:

- *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. Una función $f \in \mathcal{F}(A)$ es derivable en el punto a si, y sólo si,* $\operatorname{Re} f$ *y* $\operatorname{Im} f$ *son derivables en a, en cuyo caso se tiene:*

$$f'(a) = \big(\operatorname{Re} f\big)'(a) + i\big(\operatorname{Im} f\big)'(a)$$

3.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Pasamos ya a considerar el caso que más nos interesa. Dado un punto $z_0 \in A^\circ \subset A \cap A'$, para $f \in \mathcal{F}(A)$ tiene sentido la derivabilidad de f en z_0 recién definida (derivabilidad en sentido complejo), pero también lo tiene la diferenciabilidad de f en z_0, viendo f como una función definida en $A \subset \mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$ (diferenciabilidad en sentido real).

Es obligado preguntarse por la relación entre ambas nociones. Para aclararla, empezamos por reformular la primera de forma que empiece a recordarnos la segunda. Es claro que f es derivable (en sentido complejo) en el punto z_0 si, y sólo si, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{z-z_0} = 0$$

o lo que es lo mismo,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)|}{|z-z_0|} = 0 \tag{1}$$

en cuyo caso se tiene $f'(z_0)=\lambda$.

Por otra parte, sabemos que f es diferenciable (en sentido real) en el punto z_0 si, y sólo si, existe una aplicación lineal $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\|f(z)-f(z_0)-L(z-z_0)\|}{\|z-z_0\|} = 0 \tag{2}$$

en cuyo caso L es única, y es la diferencial de f en z_0. Por supuesto en (2) debemos entender que, para todo $z\in A$, y en particular para $z=z_0$, tanto z como $f(z)$ son vectores de $\mathbb{R}^2$, y sabemos que podemos usar cualquier norma en $\mathbb{R}^2$. Usando la euclídea, la única diferencia entre (1) y (2) estriba en que, mientras en (1) vemos $z-z_0$ como un número complejo que multiplicamos por λ, en (2) lo vemos como un vector de $\mathbb{R}^2$ al que aplicamos la función L. Debemos por tanto aclarar la relación entre las aplicaciones que consisten en multiplicar por un número complejo y las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Si para $\lambda \in \mathbb{C}$ escribimos $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vemos claramente que la multiplicación por λ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y calculamos la matriz que la representa en la base usual de $\mathbb{R}^2$. Escribiendo en columna los vectores de $\mathbb{R}^2$, se trata de la aplicación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

Por tanto, si $\lambda \in \mathbb{C}$ verifica (1), tomando como L la multiplicación por λ tenemos (2). Además, la matriz que representa a L en la base usual de $\mathbb{R}^2$, es decir, la matriz jacobiana de f en el punto z_0, es la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ donde $\alpha = \operatorname{Re}\lambda$ y $\beta = \operatorname{Im}\lambda$.

Pero recíprocamente, si se verifica (2) y la matriz jacobiana de f en el punto z_0 tiene la forma $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tomando $\lambda = \alpha + i\beta$ tenemos claramente (1).

A la hora de enunciar el resultado obtenido, con el fin de aludir más cómodamente a la diferenciabilidad de f en sentido real, para cada $z \in A$ escribimos $z = (x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y en particular $z_0 = (x_0, y_0)$, con lo que queda claro que vemos f como función de dos variables reales. Pero también estamos viendo f como función con valores en $\mathbb{R}^2$, lo que se clarifica considerando sus componentes, que denotaremos por u y v. Son las partes real e imaginaria de f, consideradas como funciones reales de dos variables reales.

Sabemos que la diferenciabilidad en sentido real de f en el punto (x_0, y_0) equivale a la de u y v, en cuyo caso la matriz jacobiana de f en dicho punto es:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Hemos probado por tanto el siguiente resultado:

Teorema. *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{F}(A)$. Como $A \subset \mathbb{R}^2$, podemos considerar las funciones $u, v : A \to \mathbb{R}$ definidas, para todo $(x,y) \in A$, por*

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \qquad y \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

Para $z_0 = (x_0, y_0) \in A^\circ$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) La función f es derivable en el punto z_0.
(ii) Las funciones u y v son diferenciables en el punto (x_0,y_0) verificando que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \tag{3}$$

Caso de que se cumplan (i) y (ii), se tiene:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \tag{4}$$

Puede resultar sorprendente que en (4) sólo aparezcan las derivadas parciales de u y v con respecto a la primera variable. En realidad, usando (3) tenemos otras tres expresiones de la derivada compleja, en las que aparecen las dos derivadas parciales de u, las dos de v, o las de u y v con respecto a la segunda variable. Concretamente:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \tag{5}$$

entendiendo que todas las derivadas parciales se evalúan en el punto (x_0, y_0).

Las igualdades (3) se conocen como **ecuaciones de Cauchy-Riemann**. Naturalmente esta denominación está pensada para el caso de que A sea abierto, u y v sean diferenciables en A y se verifique (3) para todo $(x_0, y_0) \in A$, con lo que u y v son soluciones de un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

Usando el teorema anterior, vemos fácilmente que la función parte real, $z \mapsto \operatorname{Re} z$, no es derivable en ningún punto del plano. En efecto, tomando $f(z) = \operatorname{Re} z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, tenemos $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ciertamente u y v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, pero la primera ecuación de Cauchy Riemann no se verifica en ningún punto:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Lo mismo les ocurre a la función parte imaginaria $z \mapsto \operatorname{Im} z$, y a la conjugación $z \mapsto \overline{z}$.

Como ejemplo más favorable, consideremos la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{6}$$

Se trata de la función **exponencial** que pronto estudiaremos a fondo. En este caso, para $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$u(x,y) = e^x \cos y \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$$

luego u y v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, pero también es claro que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -v = -\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

luego las ecuaciones de Cauchy-Riemann se verifican en todo el plano. Deducimos que f es derivable en todo el plano y vemos también que f coincide con su derivada. En efecto, si para $z \in \mathbb{C}$ escribimos $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y) = f(z)$$

3.3. Reglas de derivación

Arrancamos con los ejemplos más obvios de funciones derivables: las funciones constantes y la función identidad son derivables en $\mathbb{C}$. Usando directamente la definición de derivada, es claro que si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ es constante, se tiene $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, mientras que si $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tendremos $f'(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. A partir de estos dos ejemplos, usando las reglas de derivación, probaremos la derivabilidad de las funciones polinómicas y racionales.

Las reglas para la derivación de una suma, producto o cociente, de funciones derivables, son literalmente las mismas que conocemos para funciones reales de variable real, con idéntica demostración.

- *Si $f, g \in \mathcal{F}(A)$ son funciones derivables en un punto $a \in A \cap A'$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene:*
  (i) *$f+g$ es derivable en a con $\big(f+g\big)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
  (ii) *fg es derivable en a con $\big(fg\big)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
  (iii) *λf es derivable en a con $\big(\lambda f\big)'(a) = \lambda f'(a)$.*
  (iv) *Suponiendo que $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces f/g es derivable en a con*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

(i) Basta pensar que, para todo $z \in A \setminus \{a\}$ se tiene

$$\frac{\big(f+g\big)(z) - \big(f+g\big)(a)}{z-a} = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} + \frac{g(z)-g(a)}{z-a}$$

(ii) Ahora, para todo $z \in A \setminus \{a\}$ se tiene

$$\frac{\big(fg\big)(z) - \big(fg\big)(a)}{z-a} = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, g(z) + f(a)\, \frac{g(z)-g(a)}{z-a}$$

y basta recordar que g es continua en a.

(iii) Basta aplicar (ii) con $g(z) = \lambda$ para todo $z \in A$.

(iv) Basta pensar que

$$\frac{\big(f/g\big)(z) - \big(f/g\big)(a)}{z-a} = \frac{1}{g(z)g(a)} \left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, g(a) - f(a)\, \frac{g(z)-g(a)}{z-a} \right)$$

y volver a tener en cuenta que g es continua en a. ■

Para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos ya claramente por inducción, que la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f_n(z) = z^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$, es derivable en $\mathbb{C}$ con $f_n'(z) = n z^{n-1}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En efecto, el caso $n = 1$ ya se comentó, y suponiendo que f_n es derivable en $\mathbb{C}$ con $f_n' = n f_{n-1}$, la regla para la derivada de un producto nos dice que $f_{n+1} = f_n f_1$ es derivable en $\mathbb{C}$ con

$$f_{n+1}'(z) = f_n'(z) f_1(z) + f_n(z) f_1'(z) = n z^{n-1} z + z^n = (n+1) z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Naturalmente, decimos que $P \in \mathcal{F}(A)$ es una *función polinómica* cuando existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k \qquad \forall z \in A$$

De lo dicho anteriormente se deduce que entonces P es derivable en $A \cap A'$ y su derivada es otra función polinómica, que viene dada por

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{n} k\,\alpha_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\alpha_{k+1} z^k \qquad \forall z \in A \cap A'$$

Nótese que, cuando P es constante, podemos tomar $n = 1$ y $\alpha_1 = 0$ con lo que la expresión anterior nos da $P'(z) = 0$ para todo $z \in A \cap A'$, como ya sabíamos.

Ahora $f \in \mathcal{F}(A)$ es una *función racional* cuando existen funciones polinómicas $P, Q \in \mathcal{F}(A)$ tales que $Q(z) \neq 0$ y $f(z) = P(z)/Q(z)$ para todo $z \in A$. De la regla para la derivada de un cociente deducimos:

- *Si $f : A \to \mathbb{C}$ es una función racional, entonces f es derivable en $A \cap A'$ y su derivada $f' : A \cap A' \to \mathbb{C}$ es otra función racional.*

Pasamos a comprobar la regla de la cadena:

- *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{F}(A)$ una función derivable en un punto $a \in A \cap A'$. Supongamos que $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$, que $f(a) \in B'$ y que $g \in \mathcal{F}(B)$ es derivable en el punto $f(a)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en a con $(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a)$.*

Escribiendo $b = f(a)$, consideramos la función $\Phi : B \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(w) = \frac{g(w) - g(b)}{w - b} \quad \forall w \in B \setminus \{b\} \quad \text{y} \quad \Phi(b) = g'(b)$$

Por ser g derivable en b, tenemos que Φ es continua en b y claramente verifica que

$$g(w) - g(b) = \Phi(w)\,(w - b) \qquad \forall w \in B$$

Para $z \in A \setminus \{a\}$, tomando $w = f(z)$ se tiene entonces

$$\frac{\big(g \circ f\big)(z) - \big(g \circ f\big)(a)}{z - a} = \Phi\big(f(z)\big)\,\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Como f es continua en a y Φ es continua en $b = f(a)$ tenemos que $\Phi \circ f$ es continua en a y concluimos que

$$\lim_{z \to a} \frac{\big(g \circ f\big)(z) - \big(g \circ f\big)(a)}{z - a} = \Phi\big(f(a)\big)\, f'(a) = g'\big(f(a)\big)\, f'(a)$$

como queríamos demostrar. ■

3.4. Funciones holomorfas

Hasta ahora hemos trabajado con la derivabilidad de una función en un sólo punto pero, como se puede fácilmente adivinar, esta propiedad no permite obtener resultados interesantes. Recuérdese lo que ocurre en el cálculo diferencial para funciones reales de variable real: los resultados clave se refieren a funciones que son derivables en un intervalo no trivial. Lo mismo ocurre en variable compleja: debemos trabajar con funciones que sean derivables al menos en un abierto no vacío de $\mathbb{C}$.

Dado un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$, decimos que $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ es una **función holomorfa** en Ω, cuando f es derivable en todo punto de Ω. Denotamos por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω.

Sabemos que toda función holomorfa es continua, es decir, $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$, inclusión que siempre es estricta. Pensemos por ejemplo en la restricción a Ω de la función parte real. Por el carácter local del concepto de derivada, dicha función no es derivable en ningún punto de Ω.

De dicho carácter local deducimos claramente que *la holomorfía es una propiedad local*, es decir, una propiedad que se puede comprobar *localmente* :

- *Sea* $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ *donde el conjunto de índices* Λ *es arbitrario y, para cada* $\lambda \in \Lambda$, U_λ *es un subconjunto abierto no vacío de* $\mathbb{C}$. *Para* $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ *y* $\lambda \in \Lambda$ *sea* f_λ *la restricción de* f *a* U_λ. *Entonces,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *si, y sólo si,* $f_\lambda \in \mathcal{H}(U_\lambda)$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$.

Las reglas de derivación nos dicen que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subanillo y un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\Omega)$. Además, si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, entonces $f/g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Por tanto, $\mathcal{H}(\Omega)$ contiene al conjunto $\mathcal{R}(\Omega)$ formado por todas las funciones racionales en Ω, que a su vez contiene al conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ formado por todas las funciones polinómicas en Ω. Tenemos por tanto la cadena de inclusiones

$$\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{R}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega)$$

donde cada conjunto es subanillo y subespacio vectorial de los que le siguen.

Disponemos de un ejemplo para mostrar que la inclusión $\mathcal{R}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es estricta, es decir, una función holomorfa en Ω que no es una función racional. Concretamente, la función exponencial f, definida en la igualdad (6), era derivable en todo $\mathbb{C}$, luego su restricción a Ω es una función holomorfa en Ω. Se comprueba sin dificultad que, cualquiera que sea el abierto no vacío Ω, la función $f|_\Omega$ nunca es una función racional.

Nuevos ejemplos de funciones holomorfas se pueden conseguir usando la regla de la cadena. Es claro que si Ω y U son abiertos no vacíos de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica que $f(\Omega) \subset U$ y $g \in \mathcal{H}(U)$, entonces $g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Tiene especial interés el caso particular $\Omega = \mathbb{C}$. Una **función entera** es, por definición, una función holomorfa en $\mathbb{C}$, así que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es el conjunto de todas las funciones enteras. Tenemos claramente $\mathcal{P}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y la función exponencial nos asegura que esa inclusión también es estricta. Nótese que, por el teorema fundamental del Álgebra, que probaremos más adelante, se tendrá $\mathcal{R}(\mathbb{C}) = \mathcal{P}(\mathbb{C})$.

3.5. Primeras propiedades de las funciones holomorfas

Al iniciar el estudio de las funciones holomorfas, es natural preguntarse si habrá para ellas una versión del teorema de Rolle, que es la pieza clave del cálculo diferencial para funciones reales de variable real. La respuesta es rotundamente negativa, para funciones holomorfas, e incluso para funciones complejas de variable real, como vamos a ver.

La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(y) = \cos y + i \operatorname{sen} y \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

es derivable en $\mathbb{R}$ y verifica que $f(0) = f(2k\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, pero su derivada no se anula: para $y \in \mathbb{R}$ se tiene $g'(y) = i g(y)$, luego $|g'(y)| = |g(y)| = 1$.

Análoga situación tenemos para una función entera, como es la función exponencial f. Verifica evidentemente que $f(0) = f(2k\pi i)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, pero su derivada tampoco se anula, ya que

$$|f'(z)| = |f(z)| = e^{\operatorname{Re} z} > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Sin embargo, no todo está perdido, no tenemos un teorema de Rolle, ni un teorema del valor medio, pero sí vamos a poder probar alguna consecuencia importante. Concretamente, un corolario del teorema del valor medio nos dice que, si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto no vacío y $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en I con $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$, entonces f es constante. Pues bien, vamos a establecer el resultado análogo para funciones holomorfas en un abierto de $\mathbb{C}$, que obviamente deberá ser conexo. Para abreviar, usamos la siguiente definición: un **dominio** será un subconjunto no vacío, abierto y conexo, de $\mathbb{C}$.

- *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es constante.*

Para probarlo, fijamos $a \in \Omega$, consideramos el conjunto $A = \{z \in \Omega : f(z) = f(a)\}$ y bastará probar que $A = \Omega$. Como f es continua, A es un subconjunto cerrado (relativo) de Ω, luego por ser Ω conexo, y $A \neq \emptyset$, bastará ver que A es abierto.

Fijado $z \in A$, por ser Ω abierto, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z,r) \subset \Omega$, y bastará ver que, de hecho, $D(z,r) \subset A$. Fijado $w \in D(z,r)$, queremos probar que $f(w) = f(a)$ y sabemos que $f(z) = f(a)$, luego es natural pensar en los valores de f en el segmento que une z con w. Tenemos $(1-t)z + tw \in D(z,r) \subset \Omega$ para todo $t \in [0,1]$, lo que permite definir:

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \varphi(t) = f\big((1-t)z + tw\big) \quad \forall t \in [0,1]$$

Usando la regla de la cadena vemos que φ es derivable en $[0,1]$ con $\varphi'(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$. Si ahora definimos $\alpha(t) = \operatorname{Re} \varphi(t)$ y $\beta(t) = \operatorname{Im} \varphi(t)$ para todo $t \in [0,1]$, las funciones $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$ son derivables en $[0,1]$ con $\alpha'(t) = \beta'(t) = 0$, para todo $t \in [0,1]$. Por el teorema del valor medio para funciones reales de variable real, tenemos $\alpha(1) = \alpha(0)$ y $\beta(1) = \beta(0)$, luego $\varphi(1) = \varphi(0)$, es decir, $f(w) = f(z) = f(a)$, como queríamos. ■

Así pues, una función holomorfa en un dominio queda determinada por su función derivada, salvo una constante aditiva. Aprovechando ahora que la derivada puede obtenerse a partir de la parte real o la parte imaginaria de la función de partida, deducimos otras condiciones que obligan a una función holomorfa en un dominio a ser constante:

- *Sea* Ω *un dominio y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
  - (i) *Si* $\operatorname{Re} f$ *es constante, entonces* f *es constante.*
  - (ii) *Si* $\operatorname{Im} f$ *es constante, entonces* f *es constante.*
  - (iii) *Si* $|f|$ *es constante, entonces* f *es constante.*

Definimos $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ por $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ y $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ para todo $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

(i) Como u es constante, si para $z \in \Omega$ escribimos $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

donde hemos usado (5). Basta ahora aplicar el resultado anterior.

(ii) Se puede razonar análogamente, usando v en vez de u, o bien pensar que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}(-if)$ y aplicar (i) a la función $-if$.

(iii). Sea $|f(z)| = \rho$ para todo $z \in \Omega$. Si $\rho = 0$ tenemos $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, así que suponemos $\rho > 0$. Escribiremos a partir de ahora una serie de igualdades entre funciones, que por tanto son válidas en todo Ω. Como $u^2 + v^2$ es constante, tenemos

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{y} \qquad u\,\frac{\partial u}{\partial y} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} - v\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{y} \qquad u\,\frac{\partial u}{\partial y} + v\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

de donde

$$0 = u\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} - v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + v\left(u\,\frac{\partial u}{\partial y} + v\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho^2\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

y de manera similar,

$$0 = -v\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} - v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(u\,\frac{\partial u}{\partial y} + v\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho^2\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

Como $\rho \neq 0$, deducimos que $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$. Basta ahora razonar como en (i) para concluir que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. ■

Es claro que en los resultados anteriores, la conexión de Ω es necesaria. Si por el contrario $\Omega = U \cup V$ donde U y V son abiertos no vacíos disjuntos, podemos definir $f(z) = 1 + i$ para todo $z \in U$ y $f(z) = 1 - i$ para todo $z \in V$. El carácter local de la holomorfía nos dice que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. También es claro que $\operatorname{Re} f$ y $|f|$ son constantes, pero f no es constante. Sin embargo, podemos extender dichos resultados, viendo realmente lo que ocurre cuando tenemos un abierto Ω que no es conexo. Lógicamente debemos pensar en las componentes conexas de Ω, teniendo en cuenta dos sencillas observaciones:

- *Las componentes conexas de todo abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$ son dominios. Además, el conjunto de las componentes conexas de Ω es numerable.*

En efecto, si U es una componente conexa de Ω, por supuesto U es un conjunto no vacío y conexo, pero también es abierto. Esto no es cierto en cualquier espacio topológico, pero sí en $\mathbb{C}$, que es un espacio topológico *localmente conexo*, es decir, todo punto de $\mathbb{C}$ tiene una base de entornos conexos. Concretamente, para cualesquiera $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$ el disco $D(a,r)$ es convexo, luego también es conexo. Entonces, para cada $a \in U$ tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y, por ser conexo, $D(a,r)$ ha de estar contenido en una componente conexa de Ω. Pero, como $a \in U$, esa componente conexa no puede ser otra que U, luego $D(a,r) \subset U$, lo que prueba que U es abierto.

La segunda afirmación se debe a otra propiedad del espacio topológico $\mathbb{C}$: es *separable*, es decir, existe un conjunto numerable, denso en $\mathbb{C}$. Basta considerar el conjunto $A = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ de los números complejos cuyas partes real e imaginaria son números racionales, que obviamente es numerable. Para $z \in \mathbb{C}$ existen sucesiones $\{r_n\}$ y $\{s_n\}$ de números racionales tales que $\{r_n\} \to \operatorname{Re} z$ y $\{s_n\} \to \operatorname{Im} z$, con lo que $\{r_n + i s_n\}$ es una sucesión de puntos de A que converge a z, luego $\overline{A} = \mathbb{C}$. Sea pues $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ el conjunto de las componentes conexas de Ω, de forma que para $\lambda, \mu \in \Lambda$ con $\lambda \neq \mu$ se tiene $U_\lambda \cap U_\mu = \emptyset$. Definimos una aplicación $\varphi : \Lambda \to A$ tomando, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\varphi(\lambda) \in U_\lambda \cap A$, intersección que no es vacía, porque A es denso en $\mathbb{C}$ y U_λ es abierto. Es claro que φ es inyectiva, luego Λ es numerable. ■

Podemos ya extender fácilmente los resultados sobre funciones holomorfas en un dominio, probados anteriormente:

- *Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, o bien, cualquiera de las funciones* $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ *o* $|f|$ *es constante, entonces f es constante en cada componente conexa de Ω y, por tanto, $f(\Omega)$ es un conjunto numerable.*

La demostración es ya evidente. Si U es una componente conexa de Ω, entonces U es un dominio, $f|_U \in \mathcal{H}(U)$ y $f|_U$ hereda cualquiera de las propiedades que hayamos supuesto para f, luego $f|_U$ es constante. Si ahora $\mathcal{U}$ es el conjunto de todas las componentes conexas de Ω sabemos que $\mathcal{U}$ es numerable, luego $f(\Omega) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f(U)$ es numerable, como unión numerable de conjuntos con un sólo elemento. ■

3.6. Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como se indica:

   (a) $f(z) = z(\operatorname{Re} z)^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

   (b) $f(x+iy) = x^3 - y + i\left(y^3 + \dfrac{x^2}{2}\right) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

   (c) $f(x+iy) = \dfrac{x^3 + i\,y^3}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0) = 0$

2. Probar que existe una función entera f tal que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Si se exige además que $f(0) = 0$, entonces f es única.

3. Encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir $a,b,c \in \mathbb{R}$ para que exista una función entera f tal que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

4. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existen $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que

$$a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c \qquad \forall z \in \Omega$$

Probar que f es constante.

5. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es constante.

6. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Omega^* = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})} \qquad \forall z \in \Omega^*$$

Probar que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$.

7. Probar que la restricción de la función exponencial a un subconjunto abierto no vacío del plano, nunca es una función racional.

Tema 4

Funciones analíticas

Vamos a analizar un importante método para construir funciones holomorfas, como límites de sucesiones de funciones polinómicas. Previamente discutimos la convergencia de series de números complejos, así como la de sucesiones y series de funciones complejas. Nos interesa un tipo muy particular de series de funciones, llamadas *series de potencias*, cuyas sumas parciales son funciones polinómicas de forma muy concreta. Tras estudiar la convergencia de una serie de potencias complejas y definir su dominio de convergencia, probaremos que su suma es una función holomorfa, de hecho indefinidamente derivable, en dicho dominio. Llegamos así al concepto de función *analítica* en un abierto del plano.

4.1. Series de números complejos

Por conveniencia de notación, trabajaremos principalmente con series cuyos sumandos se numeran empezando en 0. Por tanto, llamamos **serie de números complejos** a toda sucesión de la forma

$$\sum_{n\geqslant 0} z_n \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} z_k \right\} = \{S_n\} \tag{1}$$

donde $z_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Cuando dicha serie converge, como sucesión que es, a su límite le llamamos **suma de la serie** y escribimos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} z_k$$

Está claro que entonces la sucesión $\{z_n\}$, el *término general de la serie*, converge a cero:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \big(S_{n+1} - S_n \big) = 0$$

Fijado, $m \in \mathbb{N}$ también podemos considerar la serie

$$\sum_{n\geqslant m} z_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{n\geqslant 0} z_{m+n} = \left\{ \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k \right\} = \{T_n\} \tag{2}$$

La suma de esta nueva serie, cuando es convergente, se denota por

$$\sum_{n=m}^{\infty} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k$$

En vista de (1) y (2), para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$S_{m+n} = \sum_{k=0}^{m-1} z_k + \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k = \sum_{k=0}^{m-1} z_k + T_n$$

de donde deducimos que la convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant m} z_n$ equivale a la de $\sum\limits_{n\geqslant 0} z_n$ y, cuando ambas convergen, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{m-1} z_n + \sum_{n=m}^{\infty} z_n$$

Volviendo a la serie definida en (1), para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\operatorname{Re} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re} z_k \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im} z_k$$

de donde deducimos que la serie de números complejos $\sum\limits_{n\geqslant 0} z_n$ es convergente si, y sólo si, las series de números reales $\sum\limits_{n\geqslant 0} \operatorname{Re} z_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 0} \operatorname{Im} z_n$ convergen, en cuyo caso se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$$

Así pues el estudio de la convergencia de una serie de números complejos se reduce a estudiar dos series de números reales. Sin embargo, frecuentemente no es necesario usar esta idea, como vamos a ver.

Se dice que la serie de números complejos $\sum\limits_{n\geqslant 0} z_n$ es **absolutamente convergente** cuando la serie de números reales no negativos $\sum\limits_{n\geqslant 0} |z_n|$ es convergente. Razonando como en $\mathbb{R}$, pero usando el teorema de complitud de $\mathbb{C}$ en lugar del de $\mathbb{R}$, o bien considerando las series de partes reales e imaginarias y aplicando el criterio de comparación para series de términos no negativos, comprobamos el siguiente resultado clave:

- *Toda serie de números complejos absolutamente convergente es convergente.*

Además, si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} z_n$ converge absolutamente, es claro que

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

4.2. Sucesiones de funciones complejas

Una **sucesión de funciones**, definidas en un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$, no es más que una sucesión de elementos de $\mathcal{F}(A)$, es decir, una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(A)$, que como es habitual, denotamos por $\{f_n\}$, donde $f_n = \varphi(n) \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En lo que sigue, para evitar repeticiones, fijamos una tal sucesión $\{f_n\}$ y un conjunto no vacío $B \subset A$.

Se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** en B cuando, para todo $z \in B$, la sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ es convergente. Tenemos entonces la función $f \in \mathcal{F}(B)$ dada por

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in B$$

y decimos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en B, o bien que f es límite puntual en B de la sucesión $\{f_n\}$. En lo que sigue suponemos que se verifica esta convergencia puntual.

Estamos por tanto suponiendo que

$$\forall z \in B \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \;\; \Rightarrow \;\; |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

donde, en principio, m depende de ε y de z. Cuando podemos conseguir que m sólo dependa de ε pero no del punto $z \in B$ considerado, decimos que la convergencia es uniforme en B.

Así pues, $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a f en B cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \;\; \Rightarrow \;\; |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \;\; \forall z \in B \tag{3}$$

Tomando por ejemplo $\varepsilon = 1$ obtenemos $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant p$ la función $f_n - f$ está acotada en B. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, en (3) siempre podemos tomar $m \geqslant p$, con lo que (3) resulta equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \;\; \Rightarrow \;\; \sup\big\{ |f_n(z) - f(z)| \, : \, z \in B \big\} < \varepsilon$$

Esto equivale a que $\{\alpha_n\} \to 0$, donde $\alpha_n = \big\{ \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in B\}\big\}$ para $n \geqslant p$, sin que obviamente sea necesario especificar el valor de α_n para $n < p$. Obtenemos así un criterio útil para probar la convergencia uniforme, siempre que conozcamos la función f:

- *La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B si, y sólo si, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant p$ la función $f_n - f$ está acotada en B y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\big\{ |f_n(z) - f(z)| \, : \, z \in B \big\} = 0 \tag{4}$$

Este criterio se puede reformular de una manera que tiene especial utilidad cuando queremos probar que la convergencia no es uniforme:

- *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B.*
  - (ii) *Para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de B, se tiene que $\{f_n(z_n) - f(z_n)\} \to 0$.*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $z_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant m$ se tiene $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in B$ y, en particular, $|f_n(z_n) - f(z)| < \varepsilon$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, si la función $f_n - f$ no está acotada en B, existe $z_n \in B$ tal que $|f(z_n) - f(z_n)| > n$, y en otro caso podemos tomar $z_n \in B$ de forma que

$$\sup\left\{ |f_n(z) - f(z)| : z \in B \right\} < |f_n(z_n) - f(z_n)| + \frac{1}{n} \tag{5}$$

Por (ii) tenemos $\{f_n(z_n) - f(z_n)\} \to 0$, con lo que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(z_n) - f(z_n)| > n\}$ ha de ser finito, luego existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant p$ la función $f_n - f$ está acotada en B y se verifica (5). Pero entonces es claro que también se cumple (4), luego $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B. ■

Ejemplo. Para ilustrar los criterios anteriores, consideremos la sucesión $\{f_n\}$ dada por

$$f_n(z) = z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Es claro que $\{z^n\} \to 0$ para todo $z \in D(0,1)$, mientras $\{z^n\} \to \infty$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$. Si $z \in \mathbb{T}$, $\{z^n\}$ sólo es convergente cuando $z = 1$. En efecto, de $\{z^n\} \to u \in \mathbb{T}$, deducimos $\{z^{n+1}\} \to u$, pero $\{z^{n+1}\} = \{z^n z\} \to uz$, luego $uz = u$ y $z = 1$ como queríamos. En resumen, para $z \in \mathbb{C}$ vemos que $\{z^n\}$ es convergente si, y sólo si, $z \in D(0,1) \cup \{1\}$. Definiendo

$$f(z) = 0 \quad \forall z \in D(0,1) \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1$$

tenemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $D(0,1) \cup \{1\}$.

Dado ahora un conjunto no vacío $B \subset D(0,1) \cup \{1\}$, y excluyendo el caso trivial $B = \{1\}$, vamos a comprobar que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B si, y sólo si, $\rho < 1$, donde $\rho = \sup\left\{ |z| : z \in B \setminus \{1\} \right\}$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, puesto que $f_n(1) = f(1)$, vemos que

$$\sup\left\{ |f_n(z) - f(z)| : z \in B \right\} = \sup\left\{ |z|^n : z \in B \setminus \{1\} \right\} = \rho^n$$

Cuando $\rho < 1$ tenemos $\{\rho^n\} \to 0$ y usando (4) deducimos la convergencia uniforme en B. En cambio, si $\rho = 1$, para $n \in \mathbb{N}$ tomamos $z_n \in B$ tal que $n/(n+1) < |z_n| < 1$, con lo que

$$|f_n(z_n) - f(z_n)| = |z_n|^n > \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego $\{f_n(z_n) - f(z_n)\}$ no converge a cero y $\{f_n\}$ no converge uniformemente en B. ■

Nótese que la convergencia puntual tendría perfecto sentido para sucesiones de funciones definidas en un conjunto no vacío A totalmente arbitrario, con valores en cualquier espacio topológico. Para la convergencia uniforme, el conjunto de definición puede ser arbitrario, pero las funciones deben tomar valores en un espacio métrico. Cuando dicho espacio métrico es completo, como le ocurre a $\mathbb{C}$, tenemos un criterio de Cauchy para la convergencia uniforme. Su utilidad estriba, como ocurre con todos los criterios de este tipo, en que nos permite probar la convergencia uniforme de una sucesión de funciones, sin conocer la función límite, como ocurre sobre todo cuando trabajamos con series de funciones.

Volvamos a nuestra sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en $A \subset \mathbb{C}$ y sea B un subconjunto no vacío de A. Decimos que $\{f_n\}$ es **uniformemente de Cauchy** en B cuando:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, p,q \geqslant m \;\Rightarrow\; |f_p(z) - f_q(z)| < \varepsilon \;\; \forall z \in B \tag{6}$$

Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en B a una función $f \in \mathcal{F}(B)$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$ y $z \in B$ se tenga $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/2$. Entonces, para $p,q \geqslant m$ y $z \in B$ se tiene

$$|f_p(z) - f_q(z)| \leqslant |f_p(z) - f(z)| + |f(z) - f_q(z)| < \varepsilon$$

luego $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en B.

Recíprocamente, supongamos que se cumple (6). Entonces, para cada $z \in B$, la sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ es de Cauchy, luego convergente. Tenemos por tanto una función $f \in \mathcal{F}(B)$ tal que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en B. Además, podemos aplicar (6) al número positivo $\varepsilon/2$, y fijar tanto $z \in B$ como $p \geqslant m$. Tomando $q = p+n$ tenemos

$$|f_p(z) - f_{p+n}(z)| < \varepsilon/2 \;\; \forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad \text{luego} \quad |f_p(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Esta última desigualdad es válida para todo $z \in B$ siempre que se tenga $p \geqslant m$, y está claro que m no depende de z, luego $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B. Hemos probado:

- *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f_n \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en un conjunto $B \subset A$ si, y sólo si, es uniformemente de Cauchy en B.*

Resaltamos finalmente la principal ventaja de la convergencia uniforme frente a la puntual: permite deducir la continuidad de la función límite a partir de la continuidad de los términos de la sucesión.

- *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f_n \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en A a una función $f \in \mathcal{F}(A)$. Si f_n es continua en un punto $z \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua en z.*

Fijado $\varepsilon > 0$, la convergencia uniforme nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon/3 \quad \forall w \in A$$

Por otra parte, la función f_m es continua en el punto z, luego existe $\delta > 0$ tal que

$$w \in A\,, \;\; |w - z| < \delta \;\Longrightarrow\; |f_m(w) - f_m(z)| < \varepsilon/3$$

Entonces, para $w \in A$ con $|w - z| < \delta$ tenemos

$$|f(w) - f(z)| \leqslant |f(w) - f_m(w)| + |f_m(w) - f_m(z)| + |f_m(z) - f(z)| < \varepsilon$$

lo que demuestra que f es continua en el punto z. ■

4.3. Series de funciones complejas

Todo lo dicho anteriormente sobre sucesiones de funciones se aplica obviamente a las series de funciones, para las que también prestaremos atención a la convergencia absoluta.

Dado $A \subset \mathbb{C}$, llamamos **serie de funciones** definidas en A, a toda sucesión de la forma

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_k \right\} \tag{7}$$

donde $f_n \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es claro que dicha serie **converge puntualmente** en un conjunto $B \subset A$ cuando, para cada $z \in B$, la serie de números $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(z)$ es convergente. Definimos entonces en B la **suma de la serie**, que es la función $f \in \mathcal{F}(B)$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in B$$

La convergencia puntual de nuestra serie en un conjunto B implica claramente que $\{f_n(z)\} \to 0$ para todo $z \in B$, es decir, la sucesión de funciones $\{f_n\}$, *término general* de la serie, converge puntualmente en B a la función idénticamente nula.

Fijado $p \in \mathbb{N}$, podemos también considerar la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant p} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geqslant 0} f_{p+n} = \left\{ \sum_{k=p}^{p+n-1} f_k \right\} \tag{8}$$

Es claro que la convergencia puntual de esta nueva serie en cualquier conjunto $B \subset A$, equivale a la de la serie que aparece en (7), en cuyo caso tendremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{p-1} f_n(z) + \sum_{n=p}^{\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in B \tag{9}$$

Como sucesión de funciones que es, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ puede converger uniformemente en B. Usando (9) esta **convergencia uniforme** se expresa como sigue:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geqslant m \ \Rightarrow \ \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon \ \forall z \in B \tag{10}$$

Esto implica claramente que para $n \geqslant m$ se tiene $|f_n(z)| < 2\varepsilon$ para todo $z \in B$. Por tanto:

- *Si una serie de funciones converge uniformemente en un conjunto, entonces su término general converge uniformemente en dicho conjunto a la función idénticamente nula.*

Fijado $p \in \mathbb{N}$, también es fácil ver que la convergencia uniforme en un conjunto de la serie definida en (8) equivale a la de la serie que aparece en (7), igual que ocurría con la convergencia puntual.

La condición (10) para la convergencia uniforme no es fácil de manejar. Además, los dos criterios antes obtenidos para la convergencia uniforme de sucesiones de funciones, obviamente son válidos para series, pero tampoco se usan con comodidad. En la práctica, el problema es que rara vez se conoce explícitamente la suma de una serie de funciones. Enseguida veremos un criterio muy útil para trabajar con series de funciones, pero comentemos previamente la convergencia absoluta de tales series.

Naturalmente, decimos que la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ **converge absolutamente** en B cuando la serie $\sum_{n\geqslant 0} |f_n(z)|$ es convergente para todo $z\in B$, en cuyo caso está claro que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge puntualmente en B y se tendrá

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)| \qquad \forall z\in B$$

Por comparación con una serie convergente de números reales positivos, conseguimos a la vez la convergencia absoluta y la uniforme de una serie de funciones. Este es el criterio de convergencia para series de funciones que siempre vamos a usar:

Test de Weierstrass. *Sea* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *una serie de funciones complejas, definidas en un conjunto* $A\subset\mathbb{C}$, *y sea* $B\subset A$. *Supongamos que, para cada* $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, *existe una constante* $M_n\in\mathbb{R}$ *tal que:*

$$|f_n(z)| \leqslant M_n \qquad \forall z\in B$$

Si la serie de números reales $\sum_{n\geqslant 0} M_n$ *es convergente, entonces la serie de funciones* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge absoluta y uniformemente en* B.

La convergencia absoluta se deduce del criterio de comparación para series de números reales no negativos: la serie $\sum_{n\geqslant 0} M_n$ es convergente, luego la serie $\sum_{n\geqslant 0} |f_n(z)|$ es convergente para todo $z\in B$.

Con vistas a probar la convergencia uniforme, para cualesquiera $n\in\mathbb{N}$ y $z\in B$ escribimos

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) \qquad \text{y} \qquad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k$$

Dados $p,q\in\mathbb{N}$, con $q<p$, para todo $z\in B$ tenemos

$$|S_p(z)-S_q(z)| = \left|\sum_{k=q}^{p-1} f_n(z)\right| \leqslant \sum_{k=q}^{p-1} |f_k(z)| \leqslant \sum_{k=q}^{p-1} M_k = \sigma_p - \sigma_q = |\sigma_p-\sigma_q|$$

La desigualdad así obtenida es trivial cuando $p=q$ y no se altera al intercambiar p y q, luego:

$$|S_p(z)-S_q(z)| \leqslant |\sigma_p-\sigma_q| \quad \forall p,q\in\mathbb{N}\ \forall z\in B$$

Por hipótesis, la serie $\sum_{n\geqslant 0} M_n$ es convergente, es decir, $\{\sigma_n\}$ es una sucesión de Cauchy. De la desigualdad anterior deducimos claramente que $\{S_n\}$ es uniformemente de Cauchy en B, luego converge uniformemente en B, como queríamos demostrar. ■

4.4. Series de potencias

Presentamos ya las series de funciones complejas que más nos interesan, porque permitirán construir abundantes ejemplos de funciones holomorfas en ciertos dominios del plano.

Una **serie de potencias**, centrada en un punto $a \in \mathbb{C}$, es una serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ donde, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ viene dada por

$$f_n(z) = \alpha_n (z-a)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

con $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Dicha serie se denota simplemente por $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$, notación que no nos debe confundir: no hemos fijado $z \in \mathbb{C}$ para tener una serie de números complejos, sino que z es variable y tenemos una serie de funciones, la sucesión de funciones polinómicas dada por

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (z-a)^k \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

El resultado clave para estudiar la convergencia de una serie de potencias es el siguiente:

Lema de Abel. *Dado* $\rho \in \mathbb{R}^+$, *supongamos que la sucesión* $\{|\alpha_n| \rho^n\}$ *está mayorada. Entonces la serie de potencias* $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ *converge absolutamente en el disco abierto* $D(a,\rho)$ *y uniformemente en cada compacto* K *que esté contenido en dicho disco.*

Demostración. Existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\alpha_n| \rho^n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Fijado un compacto $K \subset D(a,\rho)$, sea $r = \text{máx}\{|z-a| : z \in K\}$, que verifica $r < \rho$. Entonces, para cualesquiera $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $z \in K$ se tiene

$$|\alpha_n (z-a)^n| \leqslant |\alpha_n| r^n = |\alpha_n| \rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leqslant M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

Como la serie geométrica $\sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ es convergente, el test de Weierstrass nos dice que nuestra serie de potencias converge absoluta y uniformemente en K. Para cada $z \in D(a,\rho)$ podemos tomar $K = \{z\}$, luego tenemos convergencia absoluta en $D(a,\rho)$. ■

A partir de este lema podemos obtener abundante información sobre la convergencia de cualquier serie de potencias. Para estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$, seguimos una clara estrategia: aplicar el lema de Abel con ρ tan grande como sea posible. Consideramos por tanto el conjunto

$$\Lambda = \left\{\rho \in \mathbb{R}^+ : \{|\alpha_n| \rho^n\} \text{ está mayorada}\right\}$$

y cabe distinguir tres casos, en cada uno de los cuales vamos a definir el **radio de convergencia** de nuestra serie de potencias, que denotaremos por R.

- Si $\Lambda = \emptyset$, el radio de convergencia es cero: $R = 0$.
- Si $\Lambda \neq \emptyset$ y Λ no está mayorado, el radio de convergencia es infinito: $R = \infty$.
- Finalmente, si $\Lambda \neq \emptyset$ y Λ está mayorado, el radio de convergencia es: $R = \sup \Lambda$.

Conociendo el radio de convergencia R, describimos con bastante precisión la convergencia de nuestra serie de potencias:

- *Sea R el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$. Se tiene:*

  (i) *Si $R \in \mathbb{R}^+$, la serie converge absolutamente en $D(a,R)$, converge uniformemente en cada compacto $K \subset D(a,R)$ y no converge en ningún punto de $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,R)$.*

  (ii) *Si $R = \infty$, la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$ y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{C}$.*

  (iii) *Si $R = 0$, la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.*

Si $R \in \mathbb{R}^+$ y K es un compacto con $K \subset D(a,R)$, tendremos $\max\{|z-a| : z \in K\} < R$, luego por definición de R, existirá $\rho \in \Lambda$ tal que $K \subset D(a,\rho)$. El lema de Abel nos dice que la serie converge absoluta y uniformemente en K. En particular, converge absolutamente en $D(a,R)$.

Cuando $R = \infty$, el razonamiento anterior es válido para cualquier compacto $K \subset \mathbb{C}$, puesto que siempre existe $\rho \in \Lambda$ tal que $K \subset D(a,\rho)$. Esto demuestra (ii).

Volviendo al caso $R \in \mathbb{R}^+$, sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-a| > R$. Entonces $|z-a| \in \mathbb{R}^+ \setminus \Lambda$, luego la sucesión $\{\alpha_n (z-a)^n\}$ no está acotada, mucho menos puede converger a cero, así que la serie de potencias no converge en el punto z. Esto completa la demostración de (i).

En el caso $R = 0$, el último razonamiento es válido para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, pues entonces $|z-a| \in \mathbb{R}^+ \setminus \Lambda$. Por tanto la serie sólo converge en el punto a, lo que demuestra (iii). ■

Comentemos las preguntas que no tienen una respuesta general, conociendo sólo el radio de convergencia de una serie de potencias. En el caso $R = \infty$ cabe preguntar si la serie converge uniformemente en $\mathbb{C}$. Cuando $R \in \mathbb{R}^+$, nada hemos dicho sobre el comportamiento de la serie en la circunferencia de centro a y radio R, y también cabría preguntarse si hay convergencia uniforme en $D(a,R)$ o incluso en $\overline{D}(a,R)$. Veremos con ejemplos que estas preguntas no tienen una respuesta general, habría que estudiarlas en cada caso concreto.

Concluimos el estudio de la convergencia de una serie de potencias, dando un método muy expeditivo para calcular el radio de convergencia. Como dicho radio no depende del punto a en el que centramos la serie, suponemos sin perder generalidad que $a = 0$.

Fórmula de Cauchy-Hadamard. *Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n z^n$.*

(i) *Si la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\}$ no está mayorada, entonces $R = 0$.*

(ii) *Si $\left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\} \to 0$, entonces $R = \infty$.*

(iii) *En otro caso se tiene:* $R = \dfrac{1}{\limsup \left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\}}$ (7)

Demostración. Basta estudiar la convergencia absoluta de la serie de potencias, aplicando el criterio de la raíz para series de números reales no negativos, lo que nos lleva a estudiar, para cada $z \in \mathbb{C}$, la sucesión

$$\left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n z^n|} \right\} = \left\{ |z| \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\}$$

(i). Para todo $z \in \mathbb{C}^*$, la sucesión anterior no está mayorada, y el criterio de la raíz nos dice que la serie de potencias no converge absolutamente en z, luego $R = 0$.

(ii). En este caso tenemos $\limsup \left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n z^n|} \right\} = 0 < 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$ y el criterio de la raíz nos dice que la serie de potencias converge absolutamente en $\mathbb{C}$, luego $\mathbb{R} = \infty$.

(iii). Excluidos los casos (i) y (ii) podemos escribir $\limsup \left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\} = \lambda \in \mathbb{R}^+$ y, para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos claramente

$$\limsup \left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n z^n|} \right\} = \lambda |z|$$

El criterio de la raíz nos dice que la serie de potencias converge absolutamente en el punto z cuando $|z| < 1/\lambda$, y no lo hace cuando $|z| > 1/\lambda$, luego $R = 1/\lambda$. ■

Ha quedado claro que siempre se presenta uno, y sólo uno, de los tres casos del enunciado, luego las tres implicaciones dadas son en realidad equivalencias. La igualdad (7) es la fórmula de Cauchy-Hadamard y se puede entender que el radio de convergencia siempre viene dado por dicha fórmula. Concretamente, en el caso (i) podemos entender que el límite superior es $+\infty$ y que $R = 1/+\infty = 0$, mientras en el caso (ii) podemos entender que $R = 1/0 = \infty$.

Naturalmente, a la hora de estudiar la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\}$, puede ser útil el criterio de la raíz para sucesiones de números positivos, que nos da directamente lo siguiente:

- *Supongamos que* $\alpha_n \in \mathbb{C}^*$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y sea* R *el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$.

  (i) *Si* $\left\{ \alpha_{n+1}/\alpha_n \right\} \to \infty$, *entonces* $R = 0$.

  (ii) *Si* $\left\{ \alpha_{n+1}/\alpha_n \right\} \to 0$, *entonces* $R = \infty$.

  (iii) *Si* $\left\{ |\alpha_{n+1}|/|\alpha_n| \right\} \to \lambda \in \mathbb{R}^+$, *entonces* $R = 1/\lambda$.

Vamos a comentar algunos ejemplos, en los que calculamos el radio de convergencia de una serie de potencias y contestamos algunas preguntas adicionales.

Como primer ejemplo sencillo, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n^n}$ tiene obviamente radio de convergencia ∞. Es fácil ver que su término general no converge uniformemente en $\mathbb{C}$, luego la serie tampoco. Invirtiendo sus coeficientes obtenemos la serie $\sum_{n\geqslant 1} n^n z^n$, que tiene radio de convergencia cero.

Consideremos la **serie geométrica** $\sum_{n\geqslant 0} z^n$, que obviamente tiene radio de convergencia 1. Su suma se calcula exactamente igual que cuando la razón es un número real. Concretamente, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$(z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=1}^{n} z^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = z^n - 1$$

Para $z \in D(0,1)$ tenemos $\{z^n\} \to 0$ y deducimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Observamos que para $z \in \mathbb{T}$, la sucesión $\{z^n\}$ no converge a cero, luego la serie geométrica no converge en ningún punto de $\mathbb{T}$, que es la circunferencia centrada en el origen con radio igual al de convergencia.

De hecho, el término general de la serie geométrica se estudió como ejemplo de sucesión de funciones, y vimos que no converge uniformemente en ningún conjunto $B \subset D(0,1)$ tal que $\sup\{|z| : z \in B\} = 1$, luego la serie geométrica no converge uniformemente en $D(0,1)$.

Como último ejemplo, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ también tiene radio de convergencia 1, pero se comporta de manera totalmente opuesta a como lo hace la serie geométrica. Ahora tenemos

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \forall z \in \overline{D}(0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y el test de Weierstrass nos dice que tenemos convergencia absoluta y uniforme en $\overline{D}(0,1)$.

Los dos últimos ejemplos ponen de manifiesto que en general, si sólo conocemos el radio de convergencia R de una serie de potencias centrada en un punto $a \in \mathbb{C}$, nada podemos afirmar sobre el comportamiento de la serie en la circunferencia de centro a y radio R, ni sobre la convergencia uniforme en $D(a,R)$. Hemos visto que pueden darse los dos casos extremos y podríamos dar ejemplos de situaciones intermedias. En realidad no vamos a profundizar en este tema, que forma parte del Análisis de Fourier.

4.5. La suma de una serie de potencias

Nuestro próximo objetivo es estudiar la función que se obtiene como suma de una serie de potencias. Esto carece de sentido cuando la serie tiene radio de convergencia cero, en cuyo caso diremos que la serie de potencias es *trivial*. Para una serie de potencias no trivial, centrada en $a \in \mathbb{C}$ y con radio de convergencia R, definimos su **dominio de convergencia** Ω de la siguiente forma: $\Omega = D(a,R)$ cuando $R \in \mathbb{R}^+$ y $\Omega = \mathbb{C}$ cuando $R = \infty$. Obsérvese que en ambos casos, Ω es el interior del conjunto de puntos del plano en los que la serie converge. De toda la discusión anterior acerca de la convergencia de las series de potencias, resaltamos lo que realmente nos interesa:

- *Si Ω es el dominio de convergencia de una serie de potencias no trivial, entonces la serie converge absolutamente en Ω y uniformemente en cada compacto $K \subset \Omega$.*

Si $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ es una serie de potencias no trivial y Ω su dominio de convergencia, definimos la **suma de la serie** como la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega$$

Usando la convergencia uniforme de la serie en cada subconjunto compacto de Ω, junto con el carácter local de la continuidad, sería fácil comprobar que f es continua, pero vamos a probar algo mejor. Concretamente, vamos a ver que f es holomorfa en Ω y que f' es la suma de la serie de potencias que se obtiene al derivar término a término la de partida:

$$\sum_{n\geqslant 1} n\,\alpha_n\,(z-a)^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\alpha_{n+1}(z-a)^n$$

Para que tal afirmación tenga sentido, el dominio de convergencia de esta nueva serie deberá contener a Ω. Empezamos viendo que, de hecho, coincide con Ω.

Lema. *Las series de potencias* $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\,(z-a)^n$ *y* $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,\alpha_{n+1}\,(z-a)^n$ *tienen el mismo radio de convergencia.*

Demostración. Sean respectivamente R y R_1 los radios de convergencia de las series en cuestión. Para ver que $R = R_1$ se puede usar la fórmula de Cauchy-Hadamard, junto con propiedades elementales del límite superior de una sucesión de números reales no negativos. Preferimos usar la definición de R y R_1, así que consideramos los conjuntos

$$\Lambda = \big\{\rho\in\mathbb{R}^+ \,:\, \{|\alpha_n|\rho^n\} \text{ mayorada}\big\} \quad \text{y}$$
$$\Lambda_1 = \big\{\rho\in\mathbb{R}^+ \,:\, \{(n+1)|\alpha_{n+1}|\rho^n\} \text{ mayorada}\big\}$$

Es fácil ver que $\Lambda_1\subset\Lambda$. En efecto, si $\rho\in\Lambda_1$ y $M_1\in\mathbb{R}^+$ verifica $(n+1)\,|\alpha_{n+1}|\,\rho^n \leqslant M_1$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, tenemos claramente

$$|\alpha_{n+1}|\,\rho^{n+1} \leqslant \frac{M_1\,\rho}{n+1} \leqslant M_1\,\rho \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

y deducimos que la sucesión $\{|\alpha_n|\,\rho^n\}$ está mayorada, es decir, $\rho\in\Lambda$.

En el otro sentido, vamos a ver que si $\rho\in\Lambda$ y $r\in\,]0,\rho[$, entonces $r\in\Lambda_1$. Para ello, si $M\in\mathbb{R}^+$ verifica que $|\alpha_n|\,\rho^n\leqslant M$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, tenemos

$$(n+1)\,|\alpha_{n+1}|\,r^n = |\alpha_{n+1}|\,\rho^{n+1}\,\frac{n+1}{\rho}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leqslant \frac{M}{\rho}\,(n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \qquad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\,(r/\rho)^n = 0$, deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\,|\alpha_{n+1}|\,r^n = 0$ y, en particular, $r\in\Lambda_1$. En resumen, para $\rho\in\mathbb{R}^+$ hemos probado que

$$\rho\in\Lambda_1 \implies \rho\in\Lambda \implies\,]0,\rho[\,\subset\Lambda_1$$

A partir de estas dos implicaciones, la igualdad $R_1 = R$ es ya evidente. Si $\Lambda=\emptyset$, la primera implicación nos dice que $\Lambda_1=\emptyset$ luego $R_1 = R = 0$. Si $\Lambda\neq\emptyset$ y Λ no está mayorado, la segunda implicación nos dice que lo mismo le ocurre a Λ_1, luego $R_1 = R = \infty$. Finalmente, si $\Lambda\neq\emptyset$ y Λ está mayorado, la segunda implicación nos dice que $\Lambda_1\neq\emptyset$, y la primera que Λ_1 está mayorado con $\sup\Lambda_1\leqslant\sup\Lambda$, pero esta desigualdad ha de ser una igualdad, pues en otro caso tomaríamos $\rho\in\Lambda$ tal que $\sup\Lambda_1<\rho$ y $r\in\mathbb{R}^+$ tal que $\sup\Lambda_1<r<\rho$, con lo que la segunda implicación nos diría que $r\in\Lambda_1$, una contradicción. Así pues, en este último caso queda también probado que $R_1 = \sup\Lambda_1 = \sup\Lambda = R$. ■

Pasamos ya a probar la holomorfía de la suma de una serie de potencias:

Teorema. *Sea f la suma de una serie de potencias no trivial, es decir,* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$ *para todo $z \in \Omega$, donde Ω es el dominio de convergencia de la serie. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha_{n+1}\,(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha_n\,(z-a)^{n-1} \qquad \forall z \in \Omega$$

Demostración. Trasladamos el problema al origen, definiendo $\Omega_0 = \{z-a : z \in \Omega\}$, que es el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n\, w^n$, cuya suma viene dada por

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, w^n \qquad \forall w \in \Omega_0$$

Tenemos claramente $f(z) = g(z-a)$ para todo $z \in \Omega$, luego trabajamos con g, para luego aplicar la regla de la cadena. Nótese que se tiene $\Omega_0 = \mathbb{C}$, o bien $\Omega_0 = D(0,R)$ con $R \in \mathbb{R}^+$, según sea $\Omega = \mathbb{C}$, o bien $\Omega = D(a,R)$ respectivamente.

Fijamos $b \in \Omega_0$ para probar que g es derivable en b y calcular $g'(b)$. Observamos que existe $\delta > 0$ tal que $|b| + \delta \in \Omega_0$ y $\overline{D}(b,\delta) \subset \Omega_0$. Si $\Omega_0 = \mathbb{C}$, δ puede ser arbitrario, y en otro caso tenemos $\Omega_0 = D(0,R)$ con $0 \leqslant |b| < R$, luego basta tomar $0 < \delta < R - |b|$, pues entonces es obvio que $|b| + \delta \in D(0,R)$ y que para $w \in \overline{D}(b,\delta)$ se tiene $|w| \leqslant |b| + \delta < R$.

Por el lema anterior, el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} (n+1)\,\alpha_{n+1}\, w^n$ es Ω_0, luego dicha serie converge absolutamente en el punto $|b| + \delta$. Anotemos este hecho:

$$\text{la serie } \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\,|\alpha_{n+1}|\,\big(|b| + \delta\big)^n \text{ converge} \tag{8}$$

Pues bien, para todo $w \in \Omega_0$ tenemos

$$g(w) - g(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\,(w^n - b^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1}\,(w^{n+1} - b^{n+1})$$

luego, para $w \in \Omega_0 \setminus \{b\}$ será

$$g_b(w) \overset{\text{def}}{=} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} \frac{w^{n+1} - b^{n+1}}{w - b} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_{n+1} \sum_{k=0}^{n} w^{n-k}\, b^k \right) \tag{9}$$

donde, para la última igualdad, hemos usado algo bien conocido:

$$\begin{aligned}(w - b) \sum_{k=0}^{n} w^{n-k}\, b^k &= \sum_{k=0}^{n} w^{n-k+1}\, b^k - \sum_{k=0}^{n} w^{n-k}\, b^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} w^{n-k+1}\, b^k - \sum_{k=1}^{n+1} w^{n-k+1}\, b^k = w^{n+1} - b^{n+1}\end{aligned}$$

Considerando, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función polinómica P_n definida por

$$P_n(w) = \alpha_{n+1} \sum_{k=0}^{n} w^{n-k} b^k \qquad \forall w \in \mathbb{C}$$

la igualdad (9) nos dice que la serie $\sum_{n \geqslant 0} P_n$ converge puntualmente en $\Omega_0 \setminus \{b\}$ a la función g_b cuyo límite en el punto b pretendemos calcular. Estudiemos pues dicha serie con más detalle.

Para cualesquiera $w \in \overline{D}(b,\delta)$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos

$$\begin{aligned} |P_n(w)| &\leqslant |\alpha_{n+1}| \sum_{k=0}^{n} |w|^{n-k} |b|^k \leqslant |\alpha_{n+1}| \sum_{k=0}^{n} \big(|b| + \delta\big)^{n-k} \big(|b| + \delta\big)^k \\ &= (n+1)\,|\alpha_{n+1}|\,\big(|b| + \delta\big)^n \end{aligned}$$

En vista de (8), el test de Weierstrass nos dice que la serie $\sum_{n \geqslant 0} P_n$ converge uniformemente en $\overline{D}(b,\delta)$. Consideremos su suma, es decir, la función $\varphi : \overline{D}(b,\delta) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(w) \qquad \forall w \in \overline{D}(b,\delta)$$

Como la convergencia uniforme preserva la continuidad, φ es continua. En vista de (9), para $0 < |w - b| \leqslant \delta$ tenemos $g_b(w) = \varphi(w)$ y esto es suficiente para estudiar el límite de g_b en el punto b. Concluimos pues que g es derivable en b, y calculamos la derivada:

$$\lim_{w \to b} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} = \lim_{w \to b} \varphi(w) = \varphi(b) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(b) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha_{n+1}\, b^n$$

Puesto que $b \in \Omega_0$ era arbitrario, hemos probado que $g \in \mathcal{H}(\Omega_0)$ con

$$g'(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha_{n+1}\, w^n \qquad \forall w \in \Omega_0$$

Finalmente, la regla de la cadena nos dice que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con

$$f'(z) = g'(z-a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha_{n+1}\,(z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega \qquad \blacksquare$$

La siguiente observación cae por su peso: la función derivada f' ha resultado ser la suma de una serie de potencias cuyo dominio de convergencia sigue siendo Ω, luego el teorema anterior puede aplicarse a f', y así sucesivamente. Ha llegado pues el momento de comprobar que la definición de las derivadas sucesivas de una función compleja de variable compleja no tiene ninguna dificultad. Se hace por inducción, exactamente igual que para funciones reales de variable real.

4.6. Derivadas sucesivas

Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$ y una función $f \in \mathcal{F}(A)$, definimos por inducción, cuando y donde ello sea posible, su n-ésima derivada $f^{(n)}$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Usamos el convenio habitual $f^{(0)} = f$ y para $n = 1$ tenemos la función derivada $f^{(1)} = f' : A_1 \to \mathbb{C}$ donde A_1 es el conjunto de puntos de $A \cap A'$ en los que f es derivable.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ y supongamos definida la función derivada n-ésima $f^{(n)} : A_n \to \mathbb{C}$. Cuando $z \in A_n \cap A_n'$ y $f^{(n)}$ es derivable en z, decimos que f es $n+1$ *veces derivable* en z, la derivada de $f^{(n)}$ en z recibe el nombre de $(n+1)$-*ésima derivada* de f en z, y se denota por $f^{(n+1)}(z)$. Si ahora A_{n+1} es el conjunto de puntos de $A_n \cap A_n'$ en los que f es $n+1$ veces derivable, cuando sea $A_{n+1} \neq \emptyset$, podemos considerar la *función derivada* $(n+1)$-*ésima* de f, es decir, la función $f^{(n+1)} : A_{n+1} \to \mathbb{C}$ que a cada punto de A_{n+1} hace corresponder la $(n+1)$-ésima derivada de f en dicho punto. En resumen:

$$A_{n+1} = \{z \in A_n \cap A_n' : f^{(n)} \text{ es derivable en } z\}, \qquad \text{y si } A_{n+1} \neq \emptyset,$$
$$f^{(n+1)} : A_{n+1} \to \mathbb{C}, \quad f^{(n+1)}(z) = \lim_{w \to z} \frac{f^{(n)}(w) - f^{(n)}(z)}{w - z} \quad \forall z \in A_{n+1}$$

Finalmente, cuando $A \subset A'$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que f es n veces derivable en todo punto de A, decimos que f es *indefinidamente derivable* en A y tendremos definidas en A todas las derivadas: $f^{(n)} \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, si f es una función racional, definida en un conjunto $A \subset A'$, mediante una obvia inducción vemos que f es indefinidamente derivable en A y $f^{(n)} \in \mathcal{F}(A)$ es una función racional para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como casos particulares de las definiciones anteriores, podemos considerar los mismos que para la primera derivada. Si $A \subset \mathbb{R}$ y $f(A) \subset \mathbb{R}$ no hemos hecho más que repetir la definición de las derivadas sucesivas de una función real de variable real.

Cuando $A \subset \mathbb{R}$ pero f puede tomar valores complejos cualesquiera, una obvia inducción nos dice que, para todo $n \in \mathbb{N}$, f es n veces derivable en un punto $t \in A$ si, y sólo si, lo son las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$, en cuyo caso:

$$f^{(n)}(t) = \big(\operatorname{Re} f\big)^{(n)}(t) + i\,\big(\operatorname{Im} f\big)^{(n)}(t)$$

Por tanto, cuando $A \subset A'$, tenemos que f es indefinidamente derivable en A si, y sólo si, lo son $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$, verificándose la igualdad anterior para todo $t \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pero vayamos ya al caso que más nos interesa: $A = \Omega$ es el dominio de convergencia de una serie de potencias no trivial y f es la suma de dicha serie. Como ya hemos adelantado, a partir del teorema que nos dio la holomorfía de f obtenemos fácilmente que f es indefinidamente derivable en Ω y que las derivadas sucesivas de f se obtienen derivando término a término la serie usada para definir f, manteniéndose constante el radio de convergencia.

Enunciamos explícitamente el resultado, que sólo tiene un interés provisional, pues más adelante probaremos algo mucho más general:

- *Sea* $\sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha_n\,(z-a)^n$ *una serie de potencias no trivial, sea* Ω *su dominio de convergencia y denotemos por* f *a la suma de la serie:*

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\,(z-a)^n \quad \forall z\in\Omega$$

Entonces f *es indefinidamente derivable en* Ω. *De hecho, para todo* $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, *la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(n+k)\,!}{n\,!}\alpha_{n+k}\,(z-a)^n$ *tiene dominio de convergencia* Ω *y se verifica que:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)\,!}{n\,!}\alpha_{n+k}\,(z-a)^n = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n\,!}{(n-k)\,!}\alpha_n\,(z-a)^{n-k} \quad \forall z\in\Omega$$

En particular, tomando $z=a$, *se tiene:* $f^{(k)}(a) = k\,!\,\alpha_k$ *para todo* $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Se razona obviamente por inducción sobre k. El caso $k=0$ no es más que la definición de f y el caso $k=1$ es el último teorema, junto con su lema previo. Suponiendo cierto el resultado para $k\in\mathbb{N}$ empezamos aplicando el mismo lema que, junto con la hipótesis de inducción, nos dice que la serie

$$\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\frac{(n+1+k)\,!}{(n+1)\,!}\alpha_{n+1+k}(z-a)^n = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+k+1)\,!}{n\,!}\alpha_{n+k+1}(z-a)^n$$

tiene dominio de convergencia Ω. Usando otra vez la hipótesis de inducción, que nos da $f^{(k)}$ como suma de una serie de potencias con dominio de convergencia Ω, el último teorema nos dice que $f^{(k)}\in\mathcal{H}(\Omega)$, luego f es $k+1$ veces derivable en Ω, y para todo $z\in\Omega$ se tiene

$$f^{(k+1)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(n+1+k)\,!}{(n+1)\,!}\alpha_{n+1+k}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)\,!}{n\,!}\alpha_{n+k+1}(z-a)^n$$

Esto completa el proceso de inducción y prueba que f es indefinidamente derivable en Ω. ■

La última igualdad del enunciado anterior tiene interés, pues nos dice que la función f determina de forma única a la serie de potencias usada para definirla, concretamente:

$$\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\,(z-a)^n = \sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(z-a)^n$$

Es natural decir que esta serie de potencias es la *serie de Taylor* de la función f centrada en el punto a. En vista del carácter local del concepto de derivada, que se transmite claramente a las derivadas sucesivas, para conocer esta serie basta conocer f en un entorno de a. Tenemos por tanto el siguiente resultado, conocido como *principio de identidad* para series de potencias. Permite identificar los coeficientes de dos series de potencias, igual que podemos identificar los coeficientes de dos polinomios que coincidan en suficientes puntos:

- *Sean* $\sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha_n\,(z-a)^n$ *y* $\sum\limits_{n\geqslant 0}\beta_n\,(z-a)^n$ *series de potencias no triviales, con dominios de convergencia* Ω_1 *y* Ω_2 *respectivamente. Supongamos que existe* $\rho\in\mathbb{R}^+$ *tal que* $D(a,\rho)\subset\Omega_1\cap\Omega_2$ *y*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(z-a)^n\quad\forall z\in D(a,\rho)$$

Entonces, ambas series son idénticas, es decir, $\alpha_n=\beta_n$ *para todo* $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Sean $f\in\mathcal{H}(\Omega_1)$ y $g\in\mathcal{H}(\Omega_2)$ las sumas de las respectivas series y denotemos por f_ρ y g_ρ a las restricciones de f y g al disco $D(a,\rho)$. Por hipótesis tenemos $f_\rho=g_\rho$, con lo que basta aplicar el resultado anterior, teniendo en cuenta el carácter local de las sucesivas derivadas:

$$\alpha_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{f_\rho^{(n)}(a)}{n!}=\frac{g_\rho^{(n)}(a)}{n!}=\frac{g^{(n)}(a)}{n!}=\beta_n\quad\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Por supuesto, esto implica que $\Omega_1=\Omega_2$ y $f=g$. ■

4.7. Funciones analíticas

Ha quedado claro que las series de potencias nos dan un procedimiento muy útil para definir funciones holomorfas, pero tienen una clara limitación: siempre obtenemos funciones enteras o funciones holomorfas en un disco. Por ejemplo, si una función holomorfa en un semiplano es la suma de una serie de potencias, dicha función ha de ser la restricción al semiplano de una función entera. Sin embargo, las principales propiedades obtenidas para las sumas de series de potencias, en particular su holomorfía, son propiedades locales, luego también las tendrá cualquier función que pueda expresarse *localmente* como suma de una serie de potencias. Esto motiva la definición que sigue. Fijamos un abierto no vacío $\Omega\subset\mathbb{C}$.

Se dice que $f\in\mathcal{F}(\Omega)$ es una **función analítica** en Ω, cuando para cada $a\in\Omega$ se puede encontrar $\rho_a\in\mathbb{R}^+$, con $D(a,\rho_a)\subset\Omega$, y una serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha_n^{(a)}(z-a)^n$, centrada en a y con radio de convergencia mayor o igual que ρ_a, tales que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(a)}(z-a)^n\quad\forall z\in D(a,\rho_a)\tag{10}$$

La definición anterior puede parecer enrevesada, pero formaliza con precisión la idea anunciada: f es analítica en Ω cuando localmente, es decir en un entorno de cada punto $a\in\Omega$, puede expresarse como suma de una serie de potencias.

Es inmediato establecer para las funciones analíticas las mismas propiedades (locales) que hemos probado para la suma de una serie de potencias. Concretamente:

- *Si* f *es una función analítica en* Ω, *entonces* $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ *y* f' *también es analítica en* Ω.

Fijado $a \in \Omega$, tenemos $\rho_a \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,\rho_a) \subset \Omega$ y se verifica (10) para conveniente serie de potencias con radio de convergencia mayor o igual que ρ_a. El teorema que nos da la holomorfía de la suma de una serie de potencias se puede aplicar entonces a la restricción de f a $D(a,\rho_a)$. El carácter local de la derivada nos dice que f es derivable en $D(a,\rho_a)$ con

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1}^{(a)}(z-a)^n \quad \forall z \in D(a,\rho_a)$$

y esta serie de potencias tiene radio de convergencia mayor o igual que ρ_a. Como $a \in \Omega$ era arbitrario, hemos probado que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y que f' es analítica en Ω. ■

Una obvia inducción nos dice que, si f es analítica en Ω, entonces f es indefinidamente derivable en Ω y las sucesivas derivadas de f son funciones analíticas en Ω.

Conviene resaltar que para la suma de una serie de potencias no trivial, digamos f, no hemos probado que f sea analítica en el dominio de convergencia Ω de la serie. Si $\Omega = D(a,R)$ con $a \in \mathbb{C}$ y $R \in \mathbb{R}^+$, para probarlo deberíamos expresar f como suma de una serie de potencias centrada en cada punto $b \in \Omega$, cosa que en principio sólo sabemos para $b = a$, y a poco que se piense, esto no es del todo fácil. No vamos a profundizar en el estudio de las funciones analíticas, por una sencilla razón: como resultado fundamental de la *teoría local de Cauchy*, que vamos a desarrollar más adelante, probaremos que *toda función holomorfa en un abierto del plano, es analítica, y en particular indefinidamente derivable, en dicho abierto.*

4.8. Ejercicios

1. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{(a)}\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \text{(b)}\ \sum_{n\geqslant 0} z^{2n} \qquad \text{(c)}\ \sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{n!} \qquad \text{(d)}\ \sum_{n\geqslant 0} \big(3+(-1)^n\big)^n z^n$$

$$\text{(e)}\ \sum_{n\geqslant 0} (n+a^n)z^n \quad (a \in \mathbb{R}^+) \qquad \text{(f)}\ \sum_{n\geqslant 0} a^{n^2} z^n \quad (a \in \mathbb{C})$$

2. Conocido el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$, calcular el de las siguientes:

$$\text{(a)}\ \sum_{n\geqslant 0} n^k \alpha_n z^n \quad (k \in \mathbb{N} \text{ fijo}) \qquad \text{(b)}\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$$

3. Caracterizar las series de potencias que convergen uniformemente en todo el plano.

4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ donde

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$

Tema 5

Funciones elementales

A continuación estudiamos algunos ejemplos de funciones holomorfas que, junto con las racionales, forman la familia de las llamadas *funciones elementales* de variable compleja. Son extensiones naturales de las funciones reales de variable real que llevan el mismo nombre.

Empezamos con el ejemplo más importante, la función *exponencial* compleja. Se trata de una función entera que extiende a la exponencial real y comparte con ella algunas propiedades, entre las que destaca la *fórmula de adición*, pero difiere en un aspecto esencial: toma todos los valores complejos no nulos y, no sólo no es inyectiva, sino que es periódica.

Ocurre pues que cada número complejo no nulo tiene infinitos *logaritmos*, que calculamos explícitamente, encontrando una correspondencia biunívoca entre logaritmos y argumentos de un número complejo no nulo. Al argumento principal corresponde el *logaritmo principal*, que es una extensión natural del logaritmo real. Planteamos, y analizamos de forma preliminar, un problema acerca de los logaritmos complejos, típico de muchas funciones complejas: la posibilidad de elegir, para cada punto de un abierto del plano, uno de sus logaritmos, de forma que se obtenga una función holomorfa en dicho abierto.

A partir de la exponencial y el logaritmo se definen fácilmente el resto de las funciones elementales: potencias, raíces y funciones trigonométricas e hiperbólicas. Las mencionamos brevemente, comentando algunas de sus propiedades.

5.1. La exponencial

Partimos del desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial real:

$$\exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es claro que la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ tiene radio de convergencia infinito, luego su suma nos da una función definida en todo el plano, que extiende a la exponencial real, por lo que podemos denotarla de la misma forma.

Así pues la **exponencial compleja** es la función $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Si no hay peligro de confundir esta función con la exponencial real, que es su restricción a $\mathbb{R}$, la llamamos simplemente *la exponencial*. La holomorfía de la suma de una serie de potencias nos da la primera propiedad de la exponencial, que será la clave para deducir todas las demás:

E.1. *La exponencial es una función entera que coincide con su derivada.*

En efecto, el mencionado teorema nos dice que

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \blacksquare$$

Deducimos fácilmente la propiedad más genuina de la exponencial:

E.2. Formula de adición. *Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene: $e^{z+w} = e^z e^w$*

La demostración es bien sencilla. Fijado $a \in \mathbb{C}$, definimos $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$h(z) = e^z e^{a-z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

La regla de la cadena y la de derivación de un producto nos dicen que $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con

$$h'(z) = e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Como $\mathbb{C}$ es un dominio, deducimos que h es constante, es decir, $h(z) = h(0) = e^a$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Pero $a \in \mathbb{C}$ era arbitrario, luego tenemos

$$e^z e^{a-z} = e^a \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Dados $z, w \in \mathbb{C}$, basta tomar $a = z + w$ para obtener la fórmula de adición. $\blacksquare$

En particular, $e^z e^{-z} = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, luego la exponencial no se anula y, por la fórmula de adición, es un homomorfismo del grupo aditivo $\mathbb{C}$ en el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$. Una obvia inducción nos da: $e^{pz} = \left(e^z\right)^p$ para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$ y $p \in \mathbb{Z}$. Deducimos también que, ser una función entera que coincide con su derivada, caracteriza a la exponencial salvo un factor de proporcionalidad:

E.3. *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verifica que $f'(z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces existe una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \lambda e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Definiendo $h(z) = f(z)\,e^{-z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, tenemos claramente $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $h'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Deducimos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene $h(z) = \lambda$, luego $f(z) = f(z)\,e^{-z} e^z = h(z)\,e^z = \lambda e^z$. $\blacksquare$

Por supuesto, si en el resultado anterior queremos conseguir $f(z) = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, bastará suponer adicionalmente que $f(0) = 1$.

Veamos otra consecuencia clara de la fórmula de adición:

E.4. *La exponencial es una función analítica en* $\mathbb{C}$.

En efecto, basta observar que para todo $a \in \mathbb{C}$ se tiene

$$e^z = e^a e^{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \blacksquare$$

Por otra parte, para $x, y \in \mathbb{R}$ la fórmula de adición nos da $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, lo que nos lleva a pensar en la función $y \mapsto e^{iy}$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, que enseguida relacionamos con las funciones trigonométricas reales:

E.5. Fórmula de Euler. *Se verifica que* $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ escribiendo, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = e^{it}, \quad \varphi(t) = \operatorname{Re} g(t) \quad \text{y} \quad \psi(t) = \operatorname{Im} g(t)$$

Como g es derivable en $\mathbb{R}$, con $g' = ig$, deducimos que φ y ψ también son derivables en $\mathbb{R}$, con $\varphi' + i\psi' = i(\varphi + i\psi)$. Tenemos por tanto $\varphi' = -\psi$ y $\psi' = \varphi$. Definimos ahora otra función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(t) = \big(\varphi(t) - \cos t\big)^2 + \big(\psi(t) - \operatorname{sen} t\big)^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

que es también derivable en $\mathbb{R}$ y, para todo $t \in \mathbb{R}$ verifica

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2\big(\varphi(t) - \cos t\big)\big(\varphi'(t) + \operatorname{sen} t\big) + 2\big(\psi(t) - \operatorname{sen} t\big)\big(\psi'(t) - \cos t\big) \\ &= 2\big(\varphi(t) - \cos t\big)\big(\operatorname{sen} t - \psi(t)\big) + 2\big(\psi(t) - \operatorname{sen} t\big)\big(\varphi(t) - \cos t\big) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $h(t) = h(0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pero de $g(0) = 1$ deducimos claramente que $h(0) = 0$, luego h es idénticamente nula, esto es, $\varphi(t) = \cos t$ y $\psi(t) = \operatorname{sen} t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, como queríamos demostrar. $\blacksquare$

Más allá de la popular igualdad $e^{\pi i} + 1 = 0$, la fórmula de Euler muestra que la función exponencial está íntimamente ligada a la estructura básica del cuerpo complejo. Por ejemplo, tenemos $\mathbb{T} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ y el giro de ángulo $\theta \in \mathbb{R}$ no es más que la aplicación $z \mapsto e^{i\theta} z$. También podemos reescribir la definición de argumento, usando la exponencial:

$$\operatorname{Arg} z = \big\{\theta \in \mathbb{R} : z = |z| e^{i\theta}\big\} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Por otra parte, las funciones trigonométricas seno y coseno, que como funciones reales de variable real, no guardan relación alguna con la exponencial real, se obtienen fácilmente a partir de la exponencial compleja. De la fórmula de Euler deducimos claramente que, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene $e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$, luego

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Por ejemplo, las fórmulas de adición para las funciones seno y coseno pueden verse como casos muy particulares de la fórmula de adición para la exponencial compleja. Basta pensar que para $t, s \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\cos(t+s) + i \operatorname{sen}(t+s) = e^{i(t+s)} = e^{it} e^{is} = (\cos t + i \operatorname{sen} t)(\cos s + i \operatorname{sen} s)$$

Para $x, y \in \mathbb{R}$, la fórmulas de adición y de Euler nos dan $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, donde vemos la parte real e imaginaria, el módulo y los argumentos de la exponencial:

E.6. *Para todo* $z \in \mathbb{C}$ *se tiene:*

(i) $\operatorname{Re} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)$ *y* $\operatorname{Im} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)$.
(ii) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ *y* $\operatorname{Arg}(e^z) = \{\operatorname{Im} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Deducimos la imagen de la exponencial y calculamos explícitamente los puntos en los que toma cada uno de sus valores. Denotamos de momento por $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a la función logaritmo.

E.7. *La imagen de la exponencial es* $\mathbb{C}^*$. *De hecho, para cada* $w \in \mathbb{C}^*$ *se tiene:*

$$\{z \in \mathbb{C} : e^z = w\} = \{\ln|w| + i\theta : \theta \in \operatorname{Arg} w\} \tag{1}$$

En particular, para todo $R \in \mathbb{R}^+$ *se tiene* $\{e^z : z \in \mathbb{C},\ |z| > R\} = \mathbb{C}^*$.

De $e^z = w$ deducimos, por una parte, que $e^{\operatorname{Re} z} = |w|$, es decir, $\operatorname{Re} z = \ln|w|$, y por otra, que $\operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg} w$. Recíprocamente, si $z = \ln|w| + i\theta$ con $\theta \in \operatorname{Arg} w$, tendremos

$$e^z = e^{\ln|w|} e^{i\theta} = |w| e^{i\theta} = w$$

Fijados $R \in \mathbb{R}^+$ y $w \in \mathbb{C}^*$, tomando $\theta \in \operatorname{Arg} w$ tal que $\theta > R$, y $z = \ln|w| + i\theta$, tenemos $|z| > R$ y $e^z = w$. ■

Como $\{e^n\} \to \infty$ y $\{e^{-n}\} \to 0$, estaba claro que la exponencial no tiene límite ni diverge en infinito. Pero su comportamiento es mucho más caótico: fijado $R \in \mathbb{R}^+$, la condición $|z| > R$, por muy grande que sea R, no da ninguna información sobre el valor de e^z.

Comentamos finalmente la periodicidad de la exponencial. Esta propiedad se define para funciones complejas exactamente igual que para funciones reales de variable real. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es un *periodo* de una función $f \in \mathcal{F}(A)$ cuando tanto A como f son invariantes por la traslación mediante w, esto es,

$$\{z + w : z \in A\} = A \qquad \text{y} \qquad f(z+w) = f(z) \quad \forall z \in A$$

Naturalmente, decimos que f es una función *periódica* cuando tiene un periodo $w \in \mathbb{C}^*$. Está claro que entonces kw también es un periodo de f, para todo $k \in \mathbb{Z}$. De hecho el conjunto de todos los periodos de f es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$. Cuando dicho grupo de periodos está engendrado por un sólo elemento, es decir, tiene la forma $\{kw : k \in \mathbb{Z}\}$ se dice que f es *simplemente periódica* y que w es un *periodo fundamental* de f, en cuyo caso f tiene exactamente dos periodos fundamentales: w y $-w$. Pues bien:

E.8. *La exponencial es una función simplemente periódica con periodo fundamental* $2\pi i$.

Es claro que $e^{z+2\pi i} = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, luego $2\pi i$ es un periodo de la exponencial, pero si w es otro periodo, se tendrá $e^w = 1$, de donde $w = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$. ■

5.2. Logaritmos de un número complejo

En vista de (1), para $z \in \mathbb{C}^*$ definimos el **conjunto de los logaritmos** de z por

$$\operatorname{Log} z = \left\{ w \in \mathbb{C} \,:\, e^w = z \right\} = \left\{ \ln|z| + i\theta \,:\, \theta \in \operatorname{Arg} z \right\}$$

Geométricamente, los logaritmos de $z \in \mathbb{C}^*$ están situados en la recta vertical de abscisa $\ln|z|$, separados a intervalos de longitud 2π. Tenemos una clara relación entre logaritmos y argumentos. Concretamente, para todo $z \in \mathbb{C}^*$ podemos escribir

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Im}\big(\operatorname{Log} z\big) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

Al argumento principal $\arg z$ corresponde el **logaritmo principal** $\log z$, definido por

$$\log z = \ln|z| + i \arg z \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Decimos también que la función $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ es *el logaritmo principal*. No hay peligro de confusión, por el contexto se sabe si al hablar del logaritmo principal nos referimos a esta función o a su valor en un punto concreto. Nótese que el logaritmo principal es una extensión del logaritmo real: $\log x = \ln x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Los números reales negativos no tienen ningún logaritmo real.

La propiedad algebraica de la que gozaba el conjunto de todos los argumentos se transmite claramente al conjunto de todos los logaritmos pero, para los logaritmos, podemos también deducirla directamente de la fórmula de adición para la exponencial:

- *Para cualesquiera* $z, w \in \mathbb{C}^*$ *se tiene:*

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w = \left\{ \alpha + \beta \,:\, \alpha \in \operatorname{Log} z,\ \beta \in \operatorname{Log} w \right\}$$

De $e^{\alpha} = z$ y $e^{\beta} = w$ deducimos claramente $e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha} e^{\beta} = zw$. Pero recíprocamente, dado $\lambda \in \operatorname{Log}(zw)$, elegimos $\alpha \in \operatorname{Log} z$ y tomando $\beta = \lambda - \alpha$ vemos que $\beta \in \operatorname{Log} w$, ya que $e^{\beta} = e^{\lambda}/e^{\alpha} = zw/z = w$. ■

La interpretación algebraica de esta propiedad es análoga a la hecha para los argumentos. El conjunto $2\pi i\mathbb{Z}$ de los múltiplos enteros de $2\pi i$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$ y la aplicación $z \mapsto \operatorname{Log} z$ es un epimorfismo del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ sobre el grupo cociente $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$.

Como ocurría con el argumento principal, el logaritmo principal no goza de esta propiedad algebraica y, de hecho no podemos elegir un logaritmo de cada número complejo no nulo de forma que se tenga tal propiedad: si una función $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ verificase que $f(z) \in \operatorname{Log} z$ y $f(zw) = f(z) + f(w)$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$, tomando $\varphi = \operatorname{Im} f$ se tendría $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ y $\varphi(zw) = \varphi(z) + \varphi(w)$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$, pero sabemos que no existe ninguna función $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ con esas propiedades.

5.3. El problema del logaritmo holomorfo

Es natural preguntar si se puede elegir un logaritmo de cada número complejo no nulo para obtener una función holomorfa en $\mathbb{C}^*$, es decir, si existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ verificando que $f(z) \in \operatorname{Log} z$, o lo que es lo mismo $e^{f(z)} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Como consecuencia de un ejercicio propuesto en el Tema 2, la respuesta es negativa. En efecto, una tal función f sería en particular continua en $\mathbb{C}^*$, y entonces $\varphi = \operatorname{Im} f$ sería una función continua en $\mathbb{C}^*$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, pero el mencionado ejercicio afirmaba que tal función φ no existe. De hecho, más adelante probaremos un resultado negativo aún más fuerte.

Aceptado que no podemos elegir un logaritmo de cada número complejo no nulo para tener una función que sea siquiera continua en $\mathbb{C}^*$, lo oportuno es trabajar en abiertos más pequeños. Concretamente, para diversos abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, veremos que existe un *logaritmo holomorfo* en Ω, es decir, una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) \in \operatorname{Log} z$ para todo $z \in \Omega$.

Conviene plantear un problema más general. Para un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, nos preguntamos si existe un *logaritmo holomorfo de la función* g, es decir, una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando que $f(z) \in \operatorname{Log}\big(g(z)\big)$, o lo que es lo mismo, $e^{f(z)} = g(z)$, para todo $z \in \Omega$. Como consecuencia del siguiente resultado, vemos que la dificultad estriba en conseguir la continuidad de f, pues entonces su holomorfía es automática.

Lema 1. *(Derivabilidad de logaritmos continuos). Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$, $g : A \to \mathbb{C}^*$ una función, y f un logaritmo de g, es decir, una función $f : A \to \mathbb{C}$ verificando que $e^{f(z)} = g(z)$, para todo $z \in A$. Si g es derivable en un punto $a \in A \cap A'$ y f es continua en a, entonces f es derivable en a con $f'(a) = g'(a)/g(a)$.*

Demostración. Sea $b = f(a)$ y consideremos la función $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(w) = \frac{e^w - e^b}{w - b} \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{b\} \quad \text{y} \quad \Phi(b) = e^b$$

que claramente es continua en b con $\Phi(b) \neq 0$ por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Phi(w) \neq 0$ para todo $w \in D(b, \varepsilon)$. También es claro que $e^w - e^b = \Phi(w)\,(w - b)$ para todo $w \in \mathbb{C}$, luego tomando $w = f(z)$ obtenemos:

$$g(z) - g(a) = e^{f(z)} - e^{f(a)} = \Phi\big(f(z)\big)\big(f(z) - f(a)\big) \qquad \forall z \in A \tag{2}$$

Como f es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que, para $z \in A \cap D(a, \delta)$ se tiene $|f(z) - b| < \varepsilon$, luego $\Phi\big(f(z)\big) \neq 0$. De (2) deducimos entonces claramente que

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{1}{\Phi\big(f(z)\big)} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} \qquad \forall z \in \big(A \setminus \{a\}\big) \cap D(a, \delta) \tag{3}$$

Como $\Phi \circ f$ es continua en a, también tenemos

$$\lim_{z \to a} \Phi\big(f(z)\big) = \Phi\big(f(a)\big) = \Phi(b) = e^b = e^{f(a)} = g(a) \neq 0$$

Usando ahora que g es derivable en a, de (3) deducimos que

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{g'(a)}{g(a)} \qquad \blacksquare$$

El resultado anterior sugiere dos ideas importantes en relación con el problema que habíamos planteado. Por una parte, como ya de dijo, es una cuestión topológica: dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, para obtener un logaritmo holomorfo de g, bastará conseguir un *logaritmo continuo*, es decir: $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $e^{f(z)} = g(z)$ para todo $z \in \Omega$. Ahora bien, obligadamente ha de ser $\operatorname{Re} f(z) = \ln|g(z)|$ para todo $z \in \Omega$, y esta función es continua, luego el problema es conseguir que $\operatorname{Im} f$ sea continua. Como también ha de ser $\operatorname{Im} f(z) \in \operatorname{Arg}\big(g(z)\big)$ para todo $z \in \Omega$, el problema es conseguir un *argumento continuo* de g, esto es, una función continua $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}\big(g(z)\big)$ para todo $z \in \Omega$.

Por otra parte, desde un punto de vista más analítico, el resultado anterior nos dice que cualquier logaritmo holomorfo f de nuestra función holomorfa g ha de ser una *primitiva* de la función g'/g. Recíprocamente, vamos a ver ahora que, a partir de una primitiva de g'/g, es fácil conseguir un logaritmo holomorfo de g, de modo que nuestro problema puede verse también como un problema de existencia de primitivas.

Lema 2. *(Logaritmos holomorfos y primitivas). Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y sea $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica que $f'(z)g(z) = g'(z)$ para todo $z \in \Omega$, entonces existe una función $\lambda \in \mathcal{H}(\Omega)$, que es constante en cada componente conexa de Ω, tal que $\lambda + f$ es un logaritmo holomorfo de g, es decir, $e^{\lambda(z)+f(z)} = g(z)$, para todo $z \in \Omega$.*

La función $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ dada por $h(z) = g(z)\, e^{-f(z)}$ para todo $z \in \Omega$ verifica que

$$h'(z) = g'(z)\, e^{-f(z)} - f'(z)\, g(z)\, e^{-f(z)} = 0 \qquad \forall z \in \Omega$$

luego h es constante en cada componente conexa de Ω. Como h no se anula, podemos definir $\lambda(z) = \log h(z)$ para todo $z \in \Omega$. Claramente λ también es constante en cada componente conexa de Ω, luego $\lambda \in \mathcal{H}(\Omega)$. Finalmente tenemos

$$e^{\lambda(z)+f(z)} = e^{\lambda(z)}\, e^{f(z)} = h(z)\, e^{f(z)} = g(z) \qquad \forall z \in \Omega \qquad \blacksquare$$

Resumimos todas las ideas comentadas sobre el problema del logaritmo holomorfo en el siguiente enunciado, que lo reformula de tres maneras equivalentes:

- *Para un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *g admite un* ***argumento continuo****:* $\exists\, \varphi \in \mathcal{C}(\Omega) : \varphi(z) \in \operatorname{Arg}\big(g(z)\big) \quad \forall z \in \Omega$
  - (ii) *g admite un* ***logaritmo continuo****:* $\exists\, f \in \mathcal{C}(\Omega) : e^{f(z)} = g(z) \quad \forall z \in \Omega$
  - (iii) *g admite un* ***logaritmo holomorfo****:* $\exists\, f \in \mathcal{H}(\Omega) : e^{f(z)} = g(z) \quad \forall z \in \Omega$
  - (iv) *g'/g admite una* ***primitiva****:* $\exists\, h \in \mathcal{H}(\Omega) : h'(z) = g'(z)/g(z) \quad \forall z \in \Omega$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Basta tomar $f(z) = \ln|g(z)| + i\varphi(z)$ para todo $z \in \Omega$.

$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$. Se deducen del Lema 1.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Se deduce del Lema 2.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Evidente.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Basta tomar $\varphi = \operatorname{Im} f$. $\blacksquare$

5.4. Ejemplos de logaritmos holomorfos

En lo que sigue nos concentramos de nuevo en el caso que motivó la discusión anterior, es decir, el caso en que $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ y $g(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. El Lema 1 de la sección anterior permite estudiar fácilmente la holomorfía del logaritmo principal:

- *El logaritmo principal es una función holomorfa en* $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$*, con*

$$\log'(z) = 1/z \qquad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$$

El argumento principal $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ es una función continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Para comprobarlo recordamos que, con el convenio $\operatorname{sgn} 0 = 1$, que no se va a usar siquiera, se tiene

$$\arg z = \operatorname{sgn}\big(\operatorname{Im} z\big) \operatorname{arc\,cos}\big(\operatorname{Re} z/|z|\big) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

De la continuidad en $\mathbb{R}^*$ de la función signo deducimos la del argumento principal en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En cada punto $x \in \mathbb{R}^+$, basta observar que

$$\lim_{z \to x} |\arg z| = \lim_{z \to x} \operatorname{arc\,cos} \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \operatorname{arc\,cos} 1 = 0, \quad \text{luego} \quad \lim_{z \to x} \arg z = 0 = \arg x$$

Tenemos pues la continuidad en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ de la parte imaginaria del logaritmo principal. Su parte real, la función $z \mapsto \ln|z|$, es continua en $\mathbb{C}^*$. Por tanto, el logaritmo principal es una función continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, luego basta aplicar el Lema 1. ■

El argumento principal no tiene límite en ningún punto de $\mathbb{R}^-$, luego lo mismo le ocurre al logaritmo principal. Concretamente, fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, para $n \in \mathbb{N}$ tomamos $z_n = \rho\, e^{i\theta_n} \in \mathbb{C}^*$, donde $\theta_n = \pi + \big((-1)^n/n\big)$. Tenemos $0 < \theta_{2n-1} < \pi$, luego $\arg z_{2n-1} = \theta_n$, mientras que de $\pi < \theta_{2n} < 2\pi$ deducimos $\arg z_{2n} = \theta_n - 2\pi$. Por tanto $\{\arg z_{2n-1}\} \to \pi$ y $\{\arg z_{2n}\} \to -\pi$. Como $\{z_n\} \to -\rho$, pero $\{\arg z_n\}$ no es convergente, concluimos que el argumento principal no tiene límite en el punto $-\rho$, como se quería.

La semirrecta $\mathbb{R}^-$ no tiene nada de especial, podemos elegir el logaritmo de cada número complejo no nulo, para conseguir una función holomorfa en el dominio obtenido al suprimir de $\mathbb{C}^*$ cualquier otra semirrecta con vértice en el origen. De hecho, dicha función guarda una relación sencilla con el logaritmo principal:

- *Fijado* $\theta \in \mathbb{R}$*, la función* $f_\theta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$f_\theta(z) = \log\big(e^{i(\pi-\theta)} z\big) - i(\pi - \theta) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

verifica que $f_\theta(z) \in \operatorname{Log} z$ *para todo* $z \in \mathbb{C}^*$*. Además,* f_θ *es holomorfa en el dominio* $\Omega_\theta = \mathbb{C}^* \setminus \{\rho\, e^{i\theta} : \rho \in \mathbb{R}^+\}$ *con* $f_\theta'(z) = 1/z$ *para todo* $z \in \Omega_\theta$*.*

Es evidente que $e^{f_\theta(z)} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$. En cuanto a la holomorfía de f_θ basta aplicar la del logaritmo principal y la regla de la cadena. En efecto, para $z \in \Omega_\theta$ se tiene claramente que $e^{i(\pi-\theta)} z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, luego el logaritmo principal es derivable en $e^{i(\pi-\theta)} z$ y por tanto f_θ es derivable en el punto z con

$$f_\theta'(z) = \log'\big(e^{i(\pi-\theta)} z\big)\, e^{i(\pi-\theta)} = \frac{1}{e^{i(\pi-\theta)} z}\, e^{i(\pi-\theta)} = \frac{1}{z}$$ ■

5.5. Desarrollos en serie

Vamos a calcular ahora el desarrollo en serie del logaritmo principal, centrado en cada punto de $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, lo que nos dará un ejemplo de función analítica más interesante que los conocidos hasta ahora. De hecho, empezamos por probar que la función $z \mapsto 1/z$ es analítica en $\mathbb{C}^*$.

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$, para todo $z \in D\big(a, |a|\big)$ se tiene que $\big| -(z-a)/a \big| < 1$ y, usando la suma de la serie geométrica, obtenemos

$$\frac{1}{z} = \frac{1/a}{1 - \big(-(z-a)/a\big)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

Ahora, en el disco $D(a, |a|)$ es bien fácil encontrar una primitiva de la función $z \mapsto 1/z$, que usando el Lema 2 nos dará un logaritmo holomorfo en dicho disco. Basta pensar en una serie de potencias cuya derivada término a término sea la serie que acaba de aparecer. Concretamente, la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ también tiene radio de convergencia $|a|$ y su suma,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n}(z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

es una función holomorfa en $D\big(a, |a|\big)$ con $h'(z) = 1/z$ para todo $z \in D\big(a, |a|\big)$.

Los discos son conexos, luego el Lema 2 nos da una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $e^{\lambda + h(z)} = z$ para todo $z \in D\big(a, |a|\big)$. En particular, como $h(a) = 0$, se tendrá $e^{\lambda} = a$, luego λ puede ser cualquier logaritmo de a, ya que la expresión $e^{\lambda + h(z)}$ no se altera al sustituir λ por cualquier otro logaritmo de a. Así pues, tomando por ejemplo $\lambda = \log a$, hemos probado:

- *Dado $a \in \mathbb{C}^*$, definiendo*

$$f(z) = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n}(z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

se tiene que $f \in \mathcal{H}\big(D(a, |a|)\big)$ y $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in D\big(a, |a|\big)$.

Cuando $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ podemos comparar el logaritmo holomorfo f que acaba de aparecer, con el logaritmo principal. Para ello usaremos un $\rho_a > 0$ de forma que $D(a, \rho_a) \subset \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Cuando $\operatorname{Re} a \geqslant 0$ es claro que podemos tomar $\rho_a = |a|$, mientras que si $\operatorname{Re} a < 0$, basta tomar $\rho_a = |\operatorname{Im} a|$. En todo caso, las restricciones de f y del logaritmo principal a $D(a, \rho_a)$ son funciones holomorfas en dicho disco con la misma derivada, luego por ser $D(a, \rho_a)$ un dominio, difieren en una constante. Como $f(a) = \log a$, concluimos que dichas funciones coinciden. Hemos probado:

- *Para $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, sea $\rho_a = |a|$ si $\operatorname{Re} a \geqslant 0$, y $\rho_a = |\operatorname{Im} a|$ si $\operatorname{Re} a < 0$. Entonces:*

$$\log z = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, \rho_a)$$

En particular, el logaritmo principal es una función analítica en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

5.6. Potencias complejas

Recordemos que la potencia de base $x \in \mathbb{R}^+$ y exponente $y \in \mathbb{R}$ se define por $x^y = e^{y \ln x}$. Usando la exponencial y los logaritmos complejos es claro que podemos extender la definición al caso de una base $z \in \mathbb{C}^*$ y un exponente $w \in \mathbb{C}$, pero tenemos claramente dos opciones: usar todos los logaritmos de z, obteniendo un conjunto de números complejos, o sólo el logaritmo principal, para tener un número complejo bien definido. Veremos que, dependiendo del uso que queramos hacer de la potencia, la opción más adecuada no es siempre la misma, así que por ahora consideramos ambas posibilidades.

Fijados $z \in \mathbb{C}^*$ y $w \in \mathbb{C}$, definimos la **potencia** de base z y exponente w, como el conjunto $\left[z^w\right]$ de números complejos dado por

$$\left[z^w\right] = \exp\left(w \operatorname{Log} z\right) = \left\{\exp(w\lambda) : \lambda \in \operatorname{Log} z\right\}$$

Usando el logaritmo principal tenemos un elemento concreto de la potencia: $\exp(w \log z)$. Antes de darle un nombre y una notación adecuada, consideremos los casos particulares en que este valor ya nos es familiar. En el caso $w = p \in \mathbb{Z}$, con $z \in \mathbb{C}^*$ arbitrario, la fórmula de adición para la exponencial nos da claramente $\exp(p \log z) = \left(\exp(\log z)\right)^p = z^p$. Un segundo caso ya se ha comentado: si $z = x \in \mathbb{R}^+$ y $w = y \in \mathbb{R}$, tenemos también $\exp(y \log x) = e^{y \ln x} = x^y$. Finalmente, en el caso $z = e$, para todo $w \in \mathbb{C}$ se tiene $\exp(w \log e) = \exp(w) = e^w$. En resumen, la igualdad $e^{w \log z} = z^w$ se verifica en todos los casos en los que el segundo miembro tiene por ahora sentido. Esto permite usar dicha igualdad como definición del segundo miembro en cualquier caso, generalizando así todos los casos conocidos.

Para $z \in \mathbb{C}^*$ y $w \in \mathbb{C}$ definimos la **potencia principal** de base z y exponente w como el número complejo no nulo z^w dado por

$$z^w = e^{w \log z}$$

A partir de la potencia principal deducimos claramente todos los elementos del conjunto $\left[z^w\right]$:

$$\left[z^w\right] = \left\{e^{w(\log z + 2k\pi i)} : k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{z^w e^{2k\pi i w} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

No debemos pensar que este conjunto es siempre infinito, ya que la exponencial es periódica. Por ejemplo, si $w \in \mathbb{Z}$, es claro que $\left[z^w\right]$ tiene un solo elemento, para todo $z \in \mathbb{C}^*$.

En general, será fácil saber si una potencia es un conjunto finito y en tal caso conocer su número de elementos. La igualdad anterior deja claro que esto no dependerá de la base, sino solamente del exponente, pues nos dice que, para todo $z \in \mathbb{C}^*$, el conjunto $\left[z^w\right]$ es equipotente a $\left\{e^{2k\pi i w} : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Usaremos varias veces una observación inmediata: para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene

$$e^{2\pi i \alpha} = e^{2\pi i \beta} \implies \alpha - \beta \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

pues de $e^{2\pi i(\alpha - \beta)} = 1$ deducimos $2\pi i(\alpha - \beta) = 2\pi i m$ con $m \in \mathbb{Z}$, luego $\alpha - \beta = m \in \mathbb{Z}$.

Dado $w \in \mathbb{C}$, si $k, h \in \mathbb{Z}$ verifican $e^{2k\pi i w} = e^{2h\pi i w}$, deducimos que $(k-h)w \in \mathbb{Z}$, lo que implica que $k = h$, o bien $w \in \mathbb{Q}$. Por tanto:

- *Para $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ y $z \in \mathbb{C}^*$, la aplicación $k \mapsto z^w e^{2k\pi i w}$, de $\mathbb{Z}$ en $\left[z^w \right]$, es biyectiva.*

Para ver lo que ocurre cuando el exponente es un número racional, empezamos por el caso $w = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, el algoritmo de la división euclídea nos permite escribir $k = qn + r$ donde $q, r \in \mathbb{Z}$ y $0 \leqslant r < n$. Entonces $e^{2k\pi i/n} = e^{2q\pi i} e^{2r\pi i/n} = e^{2r\pi i/n}$, luego, para todo $z \in \mathbb{C}^*$, el conjunto $\left[z^{1/n} \right]$ es finito y tiene a lo sumo n elementos. Además, si $r, s \in \mathbb{Z}$ verifican que $0 \leqslant r, s < n$, de $e^{2r\pi i/n} = e^{2s\pi i/n}$ usando (4) deducimos que $(r-s)/n \in \mathbb{Z}$, pero $-1 < (r-s)/n < 1$, luego $r = s$. Por tanto, $\left[z^{1/n} \right]$ tiene exactamente n elementos. Por otra parte, para $v \in \left[z^{1/n} \right]$ tenemos $v = e^{(1/n)\log z} e^{2k\pi i/n}$ con $k \in \mathbb{Z}$ y la fórmula de adición para la exponencial nos dice claramente que $v^n = e^{\log z} e^{2k\pi i} = z$. Así pues, los n elementos de $\left[z^{1/n} \right]$ son soluciones de la ecuación $v^n = z$, que obviamente no puede tener más soluciones. Hemos probado:

- *Para cada $n \in \mathbb{N}$, todo número complejo no nulo tiene n **raíces n-ésimas** distintas, que son precisamente los elementos de la potencia $\left[z^{1/n} \right]$:*

$$[z^{1/n}] = \left\{ v \in \mathbb{C} \,:\, v^n = z \right\} = \left\{ z^{1/n} e^{2r\pi i/n} \,:\, r \in \mathbb{Z},\, 0 \leqslant r < n \right\}$$

Naturalmente decimos que $z^{1/n}$ es la **raíz n-ésima principal** de cada $z \in \mathbb{C}^*$. Cuando $z = x \in \mathbb{R}^+$, es claro que $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es la única raíz n-ésima positiva de x. Para $x = 1$ es obvio que $1^{1/n} = 1$ mientras el conjunto $\left[1^{1/n} \right]$ nos da las *raíces n-ésimas de la unidad* que, escribiendo $u_n = e^{2\pi i/n}$, vienen dadas por

$$\left[1^{1/n} \right] = \left\{ v \in \mathbb{C} \,:\, v^n = 1 \right\} = \left\{ 1, u_n, u_n^2, \ldots, u_n^{n-1} \right\}$$

Forman el grupo cíclico de orden n con generador u_n y, geométricamente, son los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en la circunferencia de centro 0 y radio 1, de forma que un vértice es 1. A partir de ellas obtenemos las raíces n-ésimas de cualquier $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left[z^{1/n} \right] = \left\{ z^{1/n} u_n^r \,:\, r \in \mathbb{Z},\, 0 \leqslant r < n \right\}$$

que de nuevo son los vértices del n-ágono regular inscrito en la circunferencia centrada en el origen con radio $|z|^{1/n}$, siendo $z^{1/n}$ uno de esos vértices.

Podemos ya contar fácilmente el número de elementos del conjunto $\left[z^w \right]$ para cualesquiera $z \in \mathbb{C}^*$ y $w \in \mathbb{Q}$. Para ello tomamos $n = \min\{ m \in \mathbb{N} : mw \in \mathbb{Z} \}$ conjunto que no es vacío porque $w \in \mathbb{Q}$, y tiene mínimo por el principio de buena ordenación. Entonces $w = p/n$ con $p \in \mathbb{Z}$ y la fórmula de adición para la exponencial nos dice claramente que

$$\left[z^w \right] = \left[z^{p/n} \right] = \left\{ v^p \,:\, v \in \left[z^{1/n} \right] \right\} = \left\{ z^{p/n} e^{2r\pi i p/n} : r \in \mathbb{Z},\, 0 \leqslant r < n \right\}$$

Para concluir que este conjunto tiene exactamente n elementos, supongamos por el contrario que $e^{2r\pi i p/n} = e^{2s\pi i p/n}$ con $r, s \in \mathbb{Z}$ y $0 \leqslant r < s < n$. Usando de nuevo (4) vemos que $(s-r)\,p/n \in \mathbb{Z}$, es decir, $(s-r)\,w \in \mathbb{Z}$, lo que contradice la definición de n, ya que $s - r \in \mathbb{N}$ y $s - r \leqslant s < n$.

- *Si $w \in \mathbb{Q}$ y $n = \min\{ m \in \mathbb{N} \,:\, mw \in \mathbb{Z} \}$, entonces $\left[z^w \right]$ tiene exactamente n elementos, para todo $z \in \mathbb{C}^*$.*

5.7. Funciones exponenciales y funciones potencia

A la hora de definir este tipo de funciones, tenemos dos opciones, usar la potencia como un conjunto del que elegir un elemento según convenga, como hemos hecho con los logaritmos, o usar solamente la potencia principal.

Para las funciones exponenciales, fijamos la base $a \in \mathbb{C}^*$ y para $z \in \mathbb{C}$ debemos elegir entre a^z y $\left[a^z\right]$. La elección está muy clara, porque la función $z \mapsto a^z = e^{z \log a}$ tiene las propiedades deseables, tanto desde el punto de vista analítico, es una función entera, como desde el algebraico, es un epimorfismo del grupo aditivo $\mathbb{C}$ sobre el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$:

- *Fijado* $a \in \mathbb{C}^*$ *la función exponencial de base* a *es la función* $\exp_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *dada por*

$$\exp_a(z) = a^z = e^{z \log a} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Es una función entera y verifica que $a^{z+w} = a^z a^w$ *para cualesquiera* $z, w \in \mathbb{C}$.

Como ocurría en el caso real, esta gama de funciones no aporta nada nuevo, su estudio se reduce al de la función exponencial por antonomasia: $\exp_e = \exp$. Nótese que han aparecido funciones exponenciales cuya base es un número real negativo, por ejemplo : $(-1)^z = e^{i\pi z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. A título de curiosidad, la igualdad $\left[a^{z+w}\right] = \left[a^z\right]\left[a^w\right]$, donde el segundo miembro se entiende lógicamente como el conjunto de todos los productos de los elementos de $\left[a^z\right]$ por los de $\left[a^w\right]$, no es cierta en general. Por ejemplo, para $a = -1$ y $z = 1/2 = -w$ se tiene $\left[a^{z+w}\right] = \{1\}$ pero $\left[a^z\right] = \left[a^w\right] = \{i, -i\}$, luego $\left[a^z\right]\left[a^w\right] = \{1, -1\}$.

Con las funciones potencia va a ocurrir lo contrario que con las exponenciales. Fijado $\alpha \in \mathbb{C}$, para $z \in \mathbb{C}^*$ debemos optar entre z^α y $\left[z^\alpha\right]$. Nótese que si $\alpha \in \mathbb{Z}$, z^α es el único elemento de $\left[z^\alpha\right]$ y la función potencia $z \to z^\alpha$ no ofrece ningún problema, es una función racional. En general, es $z \mapsto \left[z^\alpha\right]$ la que tiene la propiedad algebraica típica de las funciones potencia:

$$\left[(zw)^\alpha\right] = \left[z^\alpha\right]\left[w^\alpha\right] \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$$

Operando con conjuntos, el razonamiento es muy claro:

$$\begin{aligned}\left[(zw)^\alpha\right] &= \exp\big(\alpha \operatorname{Log}(zw)\big) = \exp\big(\alpha(\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w)\big) \\ &= \exp\big(\alpha \operatorname{Log} z\big)\,\exp\big(\alpha \operatorname{Log} w\big) = \left[z^\alpha\right]\left[w^\alpha\right]\end{aligned}$$

Por el contrario, en general $(zw)^\alpha$ puede no coincidir con $z^\alpha w^\alpha$. En el caso más sencillo, $\alpha = 1/2$, tomando $z = w = -1$ vemos que dicha igualdad no se verifica, pues $(-1)^{1/2} = i$, luego $(-1)^{1/2}(-1)^{1/2} = -1$, pero $1^{1/2} = 1$. Podríamos decir que, desde el punto de vista algebraico, la opción adecuada para la función potencia es $z \mapsto \left[z^\alpha\right]$.

Se plantea entonces, igual que con el logaritmo, el problema de elegir, para cada $z \in \mathbb{C}^*$, un elemento de $\left[z^\alpha\right]$, de forma que se obtenga una función holomorfa. Nos centramos en el caso $\alpha = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ que es el más interesante. Ahora el problema es si podemos elegir, para cada $z \in \mathbb{C}^*$, o incluso también para $z = 0$, una raíz n-ésima de z de forma que obtengamos una función que al menos sea continua. La relación de este problema con el planteado para el logaritmo es clara:

- *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}^*$ tal que exista un logaritmo holomorfo en Ω, es decir, una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una* ***raíz n-ésima holomorfa*** *en Ω, es decir, existe una función $\varphi_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi_n(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$.*

En efecto basta tomar $\varphi_n(z) = e^{(1/n)f(z)}$ para todo $z \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$. ■

En particular, fijado $\theta \in \mathbb{R}$, en el dominio $\Omega_\theta = \mathbb{C}^* \setminus \{\rho e^{i\theta} : \rho \in \mathbb{R}^+\}$ existe una raíz n-ésima holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$. Cuando $\theta = \pi$, se trata de la **raíz n-ésima principal** $z \mapsto z^{1/n}$, holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Cuando el abierto Ω contiene una circunferencia centrada en el origen, probamos ahora que no existe en Ω una raíz cuadrada continua, luego tampoco holomorfa. Por lo recién demostrado, tampoco puede existir en Ω un logaritmo holomorfo, como ya sabíamos, pero ahora tendremos un resultado más fuerte:

- *Sea $r \in \mathbb{R}^+$ y consideremos la circunferencia $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. No existe una raíz cuadrada continua en S, es decir, no existe una función continua $\varphi : S \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(z)^2 = z$ para todo $z \in S$.*

Supongamos, por reducción al absurdo, que φ es una raíz cuadrada continua en S. Por otra parte sea ψ la restricción a S de la raíz cuadrada principal, es decir $\psi(z) = z^{1/2} = e^{(1/2)\log z}$ para todo $z \in S$, que sabemos es una función continua en $S_0 = S \setminus \{-r\} = S \cap (\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$, pero del comportamiento del logaritmo principal en $\mathbb{R}^-$ se deduce que ψ no tiene límite en $-r$.

Ambas funciones son continuas en S_0 y verifican que $\varphi(z)^2 = \psi(z)^2 = z \neq 0$ para todo $z \in S_0$ luego ψ/φ es una función continua en S_0 que sólo toma los valores 1 y -1. Ahora bien, S_0 es conexo, por ser la imagen del intervalo $]-\pi, \pi[$ por la función continua $t \mapsto re^{it}$. Por tanto, o bien $\psi(z) = \varphi(z)$ para todo $z \in S_0$, o bien $\psi(z) = -\varphi(z)$ para todo $z \in S_0$. En ambos casos llegamos a contradicción, pues φ tiene límite en $-r$ pero ψ no lo tiene. ■

Nótese que, para preguntarse si en un abierto no vacío Ω existe una raíz cuadrada continua, no parecía en principio necesario suponer que $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, pero si $0 \in \Omega$, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(0,r) \subset \Omega$ y el resultado recién probado nos da respuesta negativa.

5.8. El seno y el coseno

La fórmula de Euler indica claramente cómo podemos extender las funciones reales seno y coseno para definirlas en todo el plano complejo. Por tanto, el **coseno** y el **seno** son las funciones enteras definidas, para todo $z \in \mathbb{C}$, por

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

que claramente verifican $\operatorname{sen}' z = \cos z$ y $\cos'(z) = -\operatorname{sen} z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Nótese que seguimos teniendo $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, pero obviamente esto ya no implica que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ sean la parte real e imaginaria de e^{iz}.

Como se puede adivinar, todas las propiedades del seno y el coseno, que generalizan las de sus restricciones a $\mathbb{R}$, se deducen fácilmente de las propiedades de la exponencial compleja. Repasaremos algunas de ellas, cuya comprobación es siempre rutinaria.

Es obvio que el coseno es una función *par* y el seno es una función impar, es decir, para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\cos(-z) = \cos z \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$$

Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$, la fórmula de adición de la exponencial nos permite escribir

$$\begin{aligned} \cos(z+w) + i\operatorname{sen}(z+w) &= \big(\cos z + i\operatorname{sen} z\big)\big(\cos w + i\operatorname{sen} w\big) \quad \text{y} \\ \cos(z+w) - i\operatorname{sen}(z+w) &= \big(\cos z - i\operatorname{sen} z\big)\big(\cos w - i\operatorname{sen} w\big) \end{aligned}$$

de donde claramente deducimos las *fórmulas de adición* para el seno y el coseno

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \quad \text{y} \\ \operatorname{sen}(z+w) &= \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w \end{aligned}$$

De ellas se deduce claramente que otras muchas identidades trigonométricas, conocidas en variable real, se siguen verificando en todo el plano complejo. Por ejemplo, para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\cos\big(z + (\pi/2)\big) = -\operatorname{sen} z = \cos'(z) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\big(z + (\pi/2)\big) = \cos z = \operatorname{sen}'(z)$$

También vemos que, para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$\cos\big(z + (-1)^k \pi\big) = (-1)^k \cos z \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\big(z + (-1)^k \pi\big) = (-1)^k \operatorname{sen} z$$

luego el seno y el coseno son funciones 2π-*periódicas*.

De la fórmula de adición para el coseno, tomando $w = -z$ deducimos que

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

pero es un error pensar que, como ocurría en $\mathbb{R}$, las funciones seno y coseno estén acotadas.

Para tener expresiones cómodas de la parte real e imaginaria del coseno y el seno, conviene introducir las funciones **coseno hiperbólico** y **seno hiperbólico**, que son las funciones enteras ch y sh definidas, para todo $z \in \mathbb{C}$, por

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Esta vez, para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos claramente

$$\operatorname{ch}'(z) = \operatorname{sh} z, \qquad \operatorname{sh}'(z) = \operatorname{ch} z \qquad \text{y} \qquad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$

La relación entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas es clara. Para $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\cos z = \operatorname{ch}(iz) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = -i\operatorname{sh}(iz)$$

En particular, para $y \in \mathbb{R}$, tomando $z = iy$ obtenemos

$$\cos(iy) = \operatorname{ch}(-y) = \operatorname{ch} y \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(iy) = -i \operatorname{sh}(-y) = i \operatorname{sh} y$$

Ahora las fórmulas de adición nos dicen que para $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

Puesto que el seno y coseno hiperbólico, al igual que los trigonométricos, toman valores reales en el eje real, las anteriores igualdades nos dan la parte real e imaginaria del seno y coseno. También podemos calcular fácilmente su módulo

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \qquad \text{y} \qquad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

donde, para ambas igualdades hemos usado que $\operatorname{ch}^2 y = 1 + \operatorname{sh}^2 y$.

Como $\operatorname{sh} y \to +\infty$ $(y \to \pm\infty)$ vemos claramente que el seno y el coseno complejos no son funciones acotadas. De hecho probamos fácilmente que la imagen de ambas funciones es $\mathbb{C}$. En vista de la igualdad $\operatorname{sen}\big(z + (\pi/2)\big) = \cos z$, basta trabajar con el coseno.

Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} \cos z = w \quad &\Leftrightarrow \quad e^{iz} - 2w = -e^{-iz} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz} - 2we^{iz} = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \big(e^{iz} - w\big)^2 = w^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} - w \in \big[(w^2 - 1)^{1/2}\big] \end{aligned}$$

Para todo $w \in \mathbb{C}$, es claro que $w \pm \big(w^2 - 1\big)^{1/2} \neq 0$, luego la última ecuación tiene infinitas soluciones, que pueden describirse de la siguiente forma

$$\cos z = w \iff z \in -i \operatorname{Log}\big(w \pm (w^2 - 1)^{1/2}\big)$$

Tenemos aquí calculados todos los valores del arco-coseno y podríamos hacer un estudio del mismo como función compleja de variable compleja, similar al del logaritmo y directamente relacionado con él. Preferimos estudiar con más detalle el arco-tangente.

5.9. La tangente y el arco-tangente

La tangente se definirá naturalmente como el cociente entre seno y coseno, luego debemos descartar los puntos en los que se anula el coseno. Se puede tomar $w = 0$ en la discusión anterior, pero también se puede usar el módulo del coseno, pues para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\cos(x + iy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sh} y = \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \ \text{ y } \ x = (2k+1)\pi/2 \ \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

Nos encontramos con la grata sorpresa de que el coseno complejo no tiene más ceros que los del coseno real, podemos definir la tangente en todo punto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Consideramos por tanto el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ y definimos en él la función **tangente** por

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \forall z \in \Omega$$

Tenemos claramente $\operatorname{tg} \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\operatorname{tg}'(z) = 1 + \operatorname{tg}^2 z$ para todo $z \in \Omega$. También es claro que $\{z+\pi : z\in\Omega\} = \Omega$ y $\operatorname{tg}(z+\pi) = \operatorname{tg} z$ para todo $z\in\Omega$, luego la tangente es una función π-*periódica*. Para calcular su imagen, dados $w\in\mathbb{C}$ y $z\in\Omega$, tenemos claramente

$$\operatorname{tg} z = w \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} - e^{-iz} = iw\big(e^{iz} + e^{-iz}\big) \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz}\big(1 - iw\big) = e^{-iz}\big(1 + iw\big)$$

Cuando $w = \pm i$ la última igualdad es imposible puesto que uno de sus miembros se anula y el otro no. Para $w\in\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ tenemos claramente $(1+iw)/(1-iw)\neq 0$ y concluimos que

$$\operatorname{tg} z = w \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right)$$

Por tanto, la imagen de la tangente es $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ y para cada w en dicho conjunto, tenemos calculados los puntos en los que la tangente toma el valor w, que lógicamente serán todos los valores del arco tangente.

Cambiando la notación para usar siempre z como variable, para $z\in\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ definimos el **conjunto arco-tangente** de z por

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z \,=\, \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

Naturalmente, la función **arco-tangente principal** se define usando el logaritmo principal:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$$

Se puede deducir directamente de la definición que esta función extiende al arco-tangente real, lo que justifica la notación, pero lo comprobaremos de otra forma más adelante.

Vemos que $\operatorname{arc}\operatorname{tg}$ es derivable en $z\in\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ si, y sólo si, $(1+iz)/(1-iz)\notin\mathbb{R}^-$. Es claro que $(1+iz)/(1-iz)\neq -1$, mientras que para $\rho\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ tenemos

$$\frac{1+iz}{1-iz} = -\rho \quad \Leftrightarrow \quad z = i\,\frac{1+\rho}{1-\rho} \quad \Leftrightarrow \quad z = iy \quad \text{con } y\in\mathbb{R},\ |y|>1$$

Tenemos por tanto una función holomorfa en el dominio $U = \mathbb{C}\setminus\{iy : y\in\mathbb{R},\ |y|\geqslant 1\}$ que se obtiene al suprimir del plano dos semirrectas contenidas en el eje imaginario. Calculamos fácilmente su derivada, usando la del logaritmo principal y las reglas de derivación:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg}'(z) = \frac{1}{2i}\,\frac{1-iz}{1+iz}\,\frac{2i}{(1-iz)^2} = \frac{1}{1+z^2} \qquad \forall z\in U$$

Si ahora f es la restricción a $\mathbb{R}$ del arco tangente principal, sabemos que f es derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 1/(1+x^2)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Como $f(0)=0$, deducimos que f es el arco-tangente real, función que hemos extendido obteniendo una función holomorfa en U.

Finalmente, en $D(0,1)$ expresamos el arco-tangente como suma de una serie de potencias centrada en el origen. Para ello usamos nuevamente la suma de la serie geométrica:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad \forall z\in D(0,1)$$

Esto nos lleva a considerar la función $h : D(0,1) \to \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Tenemos claramente $h \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ con $h'(z) = 1/(1+z^2) = \operatorname{arc\,tg}'(z)$ para todo $z \in D(0,1)$. Por tanto, en el dominio $D(0,1)$, tenemos que h y el arco-tangente principal difieren en una constante. Como $h(0) = 0 = \operatorname{arc\,tg} 0$, concluimos que

$$\operatorname{arc\,tg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

5.10. Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función verificando que

$$f(z+w) = f(z)\, f(w) \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

   Probar que, si f es derivable en algún punto del plano, entonces f es entera. Encontrar todas las funciones enteras que verifiquen la condición anterior. Dar un ejemplo de una función que verifique dicha condición y no sea entera.

2. Calcular la imagen por la función exponencial de una banda horizontal o vertical y del dominio cuya frontera es un rectángulo de lados paralelos a los ejes.

3. Dado $\theta \in]-\pi, \pi]$, estudiar la existencia del límite en $+\infty$ de la función $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(r) = \exp(r e^{i\theta})$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$.

4. Probar que si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son sucesiones de números complejos, con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \to 1$, entonces

$$\{w_n(z_n - 1)\} \to \lambda \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad \{z_n^{w_n}\} \to e^{\lambda}$$

5. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-nz^2}$.

6. Probar que $a, b, c \in \mathbb{T}$ son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $a+b+c = 0$.

7. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}^*$ y $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $\varphi(z)^2 = z$ para todo $z \in \Omega$. Probar que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y calcular su derivada.

8. Probar que, para todo $z \in D(0,1)$ se tiene:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1+z)$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)} = 2z - (1+z)\log(1+z) + (1-z)\log(1-z)$

9. Probar que la función $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -1\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$$

es holomorfa en el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$ y calcular su derivada. Probar también que

$$f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

10. Sean $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$ con $\alpha < \beta$ y consideremos el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha < \arg z < \beta\}$. Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho\alpha, \rho\beta \in [-\pi, \pi]$, probar que definiendo $f(z) = z^{\rho}$ para todo $z \in \Omega$, se obtiene una biyección de Ω sobre el dominio $\Omega_{\rho} = \{z \in \mathbb{C}^* : \rho\alpha < \arg z < \rho\beta\}$, tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega_{\rho})$.

11. Probar que el seno, el coseno y la tangente son funciones simplemente periódicas.

12. Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$

13. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$. Probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\cos f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$ y $f(x) = \arccos x$ para todo $x \in]-1, 1[$. Calcular la derivada de f.

14. Para $z \in D(0,1)$ con $\operatorname{Re} z \neq 0$, probar que

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Re} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

Tema 6

Integral curvilínea

Iniciamos aquí el desarrollo de la *teoría local de Cauchy*, cuyo resultado más llamativo será la equivalencia entre analiticidad y holomorfía. La herramienta imprescindible en esta teoría es una integral muy concreta para funciones complejas, llamada *integral curvilínea*. Como paso previo, extendemos la integral de Cauchy al caso en que el integrando toma valores complejos. Las propiedades básicas de la integral curvilínea nos permitirán probar el primer resultado de la teoría de Cauchy, una caracterización de la existencia de primitiva, que puede entenderse como la versión compleja del teorema fundamental del Cálculo.

6.1. Integral de Cauchy

En lo que sigue fijamos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. De forma bastante rutinaria, extendemos la definición y las propiedades básicas de la integral de Cauchy, bien conocidas para funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, viendo que son válidas cuando el integrando toma valores complejos. Para una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ definimos su integral como cabe esperar:

$$\int_a^b f(t)\,dt \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt$$

Las dos primeras propiedades de esta integral, describen su dependencia con respecto al integrando y se comprenden mejor si pensamos en la integral como una aplicación que, a cada función continua en el intervalo $[a, b]$, hace corresponder un número complejo. Concretamente, consideramos el espacio de Banach complejo $C[a, b]$ de todas las funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{C}$, cuya norma viene dada por

$$\|f\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \text{máx}\,\big\{\, |f(t)| \,:\, t \in [a, b] \,\big\} \qquad \forall f \in C[a, b]$$

Podemos entonces pensar en la integral como el funcional $\Phi : C[a, b] \to \mathbb{C}$ definido por

$$\Phi(f) = \int_a^b f(t)\,dt \qquad \forall f \in C[a, b]$$

y comprobaremos fácilmente que Φ es lineal y continuo.

- **Linealidad.** *El funcional* Φ *es lineal, es decir: para* $f,g \in C[a,b]$ *y* $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$ *se tiene:*

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$

Sabiendo que esta igualdad es cierta cuando $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ y f,g toman valores reales, basta hacer la siguiente observación. Para $f \in C[a,b]$, escribiendo $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$, se tiene:

$$\Phi(if) = \Phi(-v+iu) = -\Phi(v) + i\Phi(u) = i\big(\Phi(u) + i\Phi(v)\big) = i\Phi(f) \qquad \blacksquare$$

Recordemos la positividad (o crecimiento) de la integral para funciones con valores reales: si $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas y $f(t) \leqslant g(t)$ para todo $t \in [a,b]$, entonces $\Phi(f) \leqslant \Phi(g)$. Esta propiedad, que por supuesto usaremos siempre que convenga, no nos da información para funciones con valores complejos. Pero de ella se deduce que $|\Phi(f)| \leqslant \Phi\big(|f|\big) \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$ desigualdad que, sustituyendo valores absolutos por módulos, sí es válida en general, lo que nos da la continuidad del funcional Φ.

- **Continuidad.** *El funcional* Φ *es continuo. De hecho, para* $f \in C[a,b]$ *se tiene:*

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty$$

Escribimos $|\Phi(f)| = \lambda\Phi(f) = \Phi(\lambda f)$ con $\lambda \in \mathbb{T}$ y tenemos claramente:

$$|\Phi(f)| = \Phi(\lambda f) = \operatorname{Re}\Phi(\lambda f) = \Phi\big(\operatorname{Re}(\lambda f)\big) \leqslant \Phi\big(|\lambda f|\big) = \Phi\big(|f|\big) \qquad \blacksquare$$

La tercera propiedad básica de la integral se refiere a su dependencia respecto del intervalo de integración, por lo que conviene ponerse en una situación que permita mover con libertad dicho intervalo. *En lo que sigue fijamos un intervalo no trivial* $I \subset \mathbb{R}$ *y denotamos por* $C(I)$ *al conjunto de todas las funciones continuas de* I *en* $\mathbb{C}$. Para $f \in C(I)$ usaremos la integral de f con límites de integración arbitrarios $a,b \in I$, con los convenios usuales:

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

La aditividad de la integral, conocida para funciones con valores reales, se extiende obviamente al caso general:

- **Aditividad.** *Para cualesquiera* $f \in C(I)$ *y* $a,b,c \in I$ *se tiene:*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

Comprobamos también de forma rutinaria que el teorema fundamental del Cálculo es válido para funciones con valores complejos.

- **Teorema.** *Dada* $f \in C(I)$, *y fijado* $a \in I$, *la función* $F : I \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in I$$

es derivable en I *con* $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in I$.

Basta tener en cuenta que para todo $x \in I$ se tiene

$$\operatorname{Re} F(x) = \int_a^x \operatorname{Re} f(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} F(x) = \int_a^x \operatorname{Im} f(t)\,dt$$

de modo que, al aplicar la versión ya conocida de este teorema a las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$, se obtiene la derivabilidad de las funciones $\operatorname{Re} F$ y $\operatorname{Im} F$, luego también la de F, con

$$F'(x) = \big(\operatorname{Re} F\big)'(x) + i\big(\operatorname{Im} F\big)'(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = f(x) \qquad \forall x \in I \qquad \blacksquare$$

Destacamos finalmente las dos consecuencias del teorema anterior que más nos interesan. Se pueden deducir del teorema exactamente igual que se hace para funciones con valores reales, o también deducirlas directamente del caso particular conocido, igual que se ha hecho con todas las propiedades anteriores de la integral.

- **Regla de Barrow.** *Si* $f \in C(I)$ *y* $G : I \to \mathbb{C}$ *es una primitiva de* f, *es decir, una función derivable en* I *con* $G'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in I$, *entonces:*

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \qquad \forall a,b \in I$$

- **Fórmula de cambio de variable.** *Sea* J *otro intervalo no trivial,* $\varphi : J \to I$ *una función de clase* C^1 *y* $f \in C(I)$. *Si* $\alpha,\beta \in J$, $a = \varphi(\alpha)$ *y* $b = \varphi(\beta)$, *se tiene:*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(s)\big)\,\varphi'(s)\,ds$$

6.2. Curvas en el plano

Como su nombre indica, la integral curvilínea será una integral a lo largo de una curva, así que de algún modo vamos a sustituir el intervalo $[a,b]$, que hemos usado para la integral de Cauchy, por una curva en el plano complejo. De momento adoptamos la definición general de curva que suele hacerse en Topología, aunque en realidad sólo usaremos tipos muy particulares de curvas.

Así pues, llamaremos **curva** a toda función continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ donde $a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. La imagen de una curva φ se denota por φ^*, es decir,

$$\varphi^* = \big\{\, \varphi(t) \;:\; t \in [a,b] \,\big\}$$

Vemos que φ^* es un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{C}$. En él destacamos el punto $\varphi(a)$, llamado **origen** de la curva φ, y el punto $\varphi(b)$, que es el **extremo** de φ. Cuando $\varphi(a) = \varphi(b)$ se dice que φ es una **curva cerrada**.

La nomenclatura ya indica la interpretación intuitiva que conviene tener en cuenta: una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ describe un movimiento en el plano, durante un intervalo de tiempo $[a,b]$, de forma que en cada instante $t \in [a,b]$, el móvil ocupa la posición $\varphi(t)$, con lo que φ^* es la trayectoria recorrida, $\varphi(a)$ la posición inicial y $\varphi(b)$ la final. Es claro que curvas muy diferentes pueden tener la misma imagen, por lo que no debemos confundir la curva φ, que es una función, con su imagen φ^*, que es un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Pasamos a definir una operación con curvas que, por una razón que se verá más adelante, llamaremos "suma" de curvas, pero no se trata de sumar funciones, sino por así decirlo, de encadenar dos movimientos. La suma de dos curvas φ y ψ será una curva que describe el movimiento consistente en realizar el movimiento descrito por φ seguido del descrito por ψ. Para que esto pueda hacerse sin perder la continuidad, el extremo de φ deberá coincidir con el origen de ψ. Además, si las curvas están definidas en intervalos no consecutivos, debemos trasladar uno de ellos.

Consideremos por tanto dos curvas $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\psi\colon [c,d] \to \mathbb{C}$, tales que $\varphi(b) = \psi(c)$. La **suma de curvas** $\gamma = \varphi + \psi$, es la función $\gamma\colon [a,b+d-c] \to \mathbb{C}$ definida por

$$\gamma(t) = \varphi(t) \;\; \forall t \in [a,b] \quad \text{y} \quad \gamma(t) = \psi(c+t-b) \;\; \forall t \in [b,b+d-c] \tag{1}$$

La condición $\varphi(b) = \psi(c)$ hace que γ esté bien definida y sea continua en el punto b, luego usando el carácter local de la continuidad, vemos que γ es continua, es decir, es una curva.

Examinemos con más detalle la definición de la curva suma. La restricción de γ al intervalo $[a,b]$ coincide obviamente con φ y cuando t recorre dicho intervalo, $\gamma(t)$ recorre el conjunto φ^*. A su vez, la restricción de γ a $[b,b+d-c]$ es $\varphi\circ\tau$ donde $\tau(t) = c+t-b$ para todo $t \in [b,b+d-c]$, así que τ es la única traslación que lleva $[b,b+d-c]$ a $[c,d]$. Cuando t recorre el intervalo $[b,b+d-c]$ es claro que $s = \tau(t)$ recorre $[c,d]$ y $\gamma(t) = \psi(s)$, recorre el conjunto ψ^*. Esto explica la idea intuitiva de encadenar dos movimientos, que habíamos mencionado. En particular tenemos $(\varphi+\psi)^* = \varphi^* \cup \psi^*$, el origen de γ es el de φ y el extremo de γ es el de ψ.

Resaltemos la forma en que los sumandos φ y ψ se relacionan con restricciones de la función γ:

- *Sean* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ *y* $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ *dos curvas tales que* $\varphi(b) = \psi(c)$ *y consideremos la curva suma* $\gamma = \varphi + \psi : [a,b+d-c] \to \mathbb{C}$. *Entonces:*

$$\gamma\big|_{[a,b]} = \varphi \qquad \text{y} \qquad \gamma\big|_{[b,b+d-c]} = \psi\circ\tau$$

donde τ *es la traslación que lleva el intervalo* $[b,b+d-c]$ *al intervalo* $[c,d]$.

El caso particular más sencillo se presenta cuando $b = c$, es decir, cuando φ y ψ están definidas en intervalos consecutivos: $[a,b]$ y $[b,d]$. Entonces la traslación τ es la identidad, luego φ y ψ son las restricciones de γ a los intervalos $[a,b]$ y $[b,d]$ respectivamente. En el sentido contrario, es decir, partiendo de la curva γ, hemos observado lo siguiente:

- *Si* $\gamma : [a,d] \to \mathbb{C}$ *es una curva, cada punto intermedio* $b \in]a,d[$ *permite expresar* γ *como una suma de curvas:* $\gamma = \gamma\big|_{[a,b]} + \gamma\big|_{[b,d]}$.

Se comprueba rutinariamente que la suma de curvas es asociativa. Más concretamente, si φ_1, φ_2 y φ_3 son curvas tales que los extremos de φ_1 y φ_2 coinciden respectivamente con los orígenes de φ_2 y φ_3, se tiene: $(\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3 = \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3)$, algo intuitivamente obvio. Podemos pues usar con comodidad sumas de curvas con un número arbitrario de sumandos.

Todo lo dicho para la suma de dos curvas se generaliza fácilmente para sumas de un número arbitrario de curvas, lo que se resume en el enunciado que sigue. Su demostración por inducción es completamente obvia. Para entender mejor el enunciado conviene recordar que una **partición** de un intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito $P \subset [a,b]$ que contiene a los extremos: $a,b \in P$. Los elementos de P se numeran siempre de menor a mayor, de modo que si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, se entiende que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Es costumbre resaltar este convenio escribiendo $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$.

- *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geqslant 2$ *y, para cada* $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ *sea* $\varphi_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{C}$ *una curva. Si* $\varphi_k(b_k) = \varphi_{k+1}(a_{k+1})$ *para todo* $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, *tiene sentido la curva suma,*
$$\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$
Concretamente, γ *se define en el intervalo* $[a,b]$ *con* $a = a_1$ *y* $b = a + \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$, *de la siguiente forma. Tomando* $t_0 = a$ *y* $t_k = a + \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)$ *para todo* $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, *tenemos una partición* $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ *del intervalo* $[a,b]$ *y, para cada* $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ *se tiene que* $\gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]} = \varphi_k \circ \tau_k$ *donde* τ_k *es la traslación que lleva el intervalo* $[t_{k-1}, t_k]$ *al intervalo* $[a_k, b_k]$. *De hecho* τ_1 *es la identidad, ya que* $[t_0, t_1] = [a_1, b_1]$.
- *Recíprocamente, toda partición* $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ *de un intervalo* $[a,b]$ *permite expresar cualquier curva* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *como una suma de curvas:*
$$\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$$

Veamos otra operación muy intuitiva que podemos hacer con una sola curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$. Concretamente, llamamos **curva opuesta** de φ a la curva $-\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ definida por
$$(-\varphi)(t) = \varphi(a+b-t) \qquad \forall\, t \in [a,b]$$
Cuando t recorre el intervalo $[a,b]$, vemos que $a+b-t$ lo recorre en sentido opuesto, desde b hacia a, luego $(-\varphi)(t)$ recorre el conjunto φ^* en sentido opuesto al de φ. En particular, $(-\varphi)^* = \varphi^*$, el origen de $-\varphi$ es el extremo de φ y el extremo de $-\varphi$ es el origen de φ.

Intuitivamente podríamos decir que $-\varphi$ describe el movimiento que consiste en "desandar" el movimiento descrito por φ. Obsérvese que las sumas $\varphi + (-\varphi)$ y $(-\varphi) + \varphi$ tienen sentido, y ambas son curvas cerradas, pero son *distintas*. La conmutatividad de la suma de curvas no siempre tiene sentido, pero incluso cuando lo tiene, puede no verificarse.

6.3. Arcos y caminos

El concepto topológico de curva que hasta ahora hemos manejado es muy general, da lugar a situaciones que para nada están de acuerdo con la intuición geométrica o física. Baste citar el ejemplo hallado por Peano de una curva cuya imagen tiene interior no vacío. A partir de ahora nos limitamos a considerar curvas con cierta regularidad.

Llamamos **arco** a una curva de clase C^1, es decir, una función $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$, como siempre con $a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, que es derivable en $[a,b]$ con $\sigma' \in C[a,b]$. La curva opuesta del arco σ viene dada por $(-\sigma)(t) = \sigma(a+b-t)$ para todo $t \in [a,b]$, que también es de clase C^1, así que *la curva opuesta de un arco también es un arco.*

Veamos por ejemplo los dos tipos de arco que usaremos con más frecuencia. Dados $z,w \in \mathbb{C}$, el **segmento** de origen z y extremo w es el arco $\sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definido por

$$\sigma(t) = (1-t)z + tw \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

que se denotará por $[z,w]$. Claramente se trata de un arco, puesto que σ es derivable en $[0,1]$ con $\sigma'(t) = w - z$ para todo $t \in [0,1]$. El arco opuesto de $[z,w]$ viene dado por

$$(-\sigma)(t) = \sigma(1-t) = tz + (1-t)w \qquad \forall t \in [0,1]$$

que es claramente el segmento de origen w y extremo z, es decir, $-[z,w] = [w,z]$.

Observamos también que la imagen $\sigma^* = [z,w]^*$ es el "segmento" de extremos z y w, visto ahora como un subconjunto de $\mathbb{C}$. La coincidencia de nomenclatura no es problema, gracias a la diferente notación: el segmento $[z,w]$ es una función definida en $[0,1]$ mientras el segmento $[z,w]^*$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$. A decir verdad, sí hay un leve problema de notación: para $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el intervalo cerrado y acotado de extremos a y b se seguirá denotando por $[a,b]$, como no podía ser de otra forma, pero ahora es la nomenclatura la que ayuda, basta distinguir entre el intervalo $[a,b]$ y el segmento $[a,b]$. Por ejemplo, el segmento $[b,a]$ tiene sentido, es un arco cuya imagen es el intervalo $[a,b]$, mientras que el intervalo $[b,a]$ es vacío.

Por otra parte, dados $z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, llamamos **circunferencia** de centro z y radio r, que denotamos por $C(z,r)$ al arco cerrado $\varphi : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ definido por

$$\varphi(t) = z + re^{it} \qquad \forall\, t \in [-\pi,\pi]$$

Vemos que $\varphi'(t) = ire^{it}$ para todo $t \in [-\pi,\pi]$. La imagen del arco $\varphi = C(z,r)$ es también la "circunferencia" de centro z y radio r, que ahora estamos entendiendo como un subconjunto del plano: $\varphi^* = C(z,r)^* = \{w \in \mathbb{C} : |w-z| = r\}$.

Para estudiar la integral curvilínea no sólo usaremos arcos, sino también sumas de arcos, y el problema es que la suma de dos arcos puede no ser un arco, como veremos enseguida. Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ son arcos, es claro que la curva suma $\gamma = \varphi + \psi$, definida en el intervalo $J = [a, b+d-c]$ como se hizo en (1), es de clase C^1 en $J \setminus \{b\}$, pero puede no ser derivable en b. De hecho γ tiene derivadas laterales $\gamma'(b-) = \varphi'(b)$ y $\gamma'(b+) = \psi'(c)$, luego γ es un arco si, y sólo si, $\varphi'(b) = \psi'(c)$. Pronto aparecerán abundantes ejemplos en los que esto no ocurre. La forma de resolver este pequeño inconveniente consiste en considerar una familia de curvas que contenga a los arcos y sea estable por sumas, cosa que no es difícil.

Decimos que una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un **camino** cuando se puede expresar como suma de arcos, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$, donde σ_k es un arco, para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Obviamente esta suma de curvas ha de tener sentido, es decir, el extremo del arco σ_k deberá coincidir con el origen de σ_{k+1} para todo $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. En vista de la asociatividad de la suma de curvas, es evidente que toda suma de caminos es un camino. Aclaramos ahora fácilmente qué tipo de regularidad ha de tener una curva para ser un camino:

- *Para una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *γ es un camino*
  - (ii) *Existe una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1},t_k]$ es una función de clase C^1.*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Escribiendo $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$, como una suma de arcos, sabemos que existe una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ tiene la forma $\sigma_k \circ \tau_k$ donde τ_k es una traslación, luego es una función de clase C^1, pues tanto τ_k como σ_k lo son.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Basta escribir $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$ para tener γ expresada como suma de arcos. ■

Al sumar dos segmentos no alineados, o incluso a veces estando alineados, encontramos el ejemplo más sencillo de una suma de arcos que no es un arco: si $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ el camino $[z_0,z_1] + [z_1,z_2]$ es un arco si, y sólo si, $z_1 - z_0 = z_2 - z_1$. Llamaremos poligonal a toda suma de segmentos. Naturalmente, el extremo de cada segmento que aparezca en dicha suma deberá coincidir con el origen del siguiente, para que la suma tenga sentido. Por tanto:

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, llamamos **poligonal** de vértices $z_0, z_1, \ldots, z_n$ al camino definido por

$$[z_0, z_1, \ldots, z_n] = \sum_{k=1}^{n} [z_{k-1}, z_k]$$

Es claro que tenemos un camino cerrado si, y sólo si, $z_0 = z_n$. Naturalmente, la nomenclatura está inspirada en los vértices de un polígono. Por ejemplo, suele decirse que la poligonal cerrada $[z_0,z_1,z_2,z_0] = [z_0,z_1] + [z_1,z_2] + [z_2,z_0]$ es un triángulo.

6.4. Integral curvilínea

Dado un camino γ, nuestro objetivo es definir la integral sobre γ de una función continua $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$. Aunque no es necesario considerarlo previamente, la definición se comprenderá mejor si empezamos por el caso particular en que γ es un arco, para después ver lo que ocurre en general con una suma de arcos.

Sea pues $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un arco y sea $f : \sigma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Definimos entonces la **integral de f sobre el arco σ** mediante la siguiente igualdad:

$$\int_\sigma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\sigma(t)\big)\,\sigma'(t)\,dt \qquad (2)$$

Obsérvese que en el segundo miembro tenemos una integral que hemos estudiado con detalle, la integral de Cauchy de una función continua en el intervalo $[a,b]$ con valores complejos, concretamente la función $(f \circ \sigma)\sigma'$.

Para hacer la misma definición en el caso de un camino γ y una función continua $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$, la función $f \circ \gamma$ sigue siendo continua, pero el problema es que γ' puede no estar siquiera definida en un subconjunto finito de $[a,b]$. La solución podría consistir en usar una integral más general que la de Cauchy, teniendo en cuenta que $(f \circ \gamma)\gamma'$ puede verse como una función acotada de $[a,b]$ en $\mathbb{C}$ que es continua salvo en un conjunto finito de puntos. El propio Cauchy se ocupó de extender la definición de su integral para poderla aplicar a este tipo de función. Alternativamente podemos pensar en la integral de Riemann o incluso en la de Lebesgue, para funciones con valores complejos, pues nuestra función es integrable en cualquiera de los dos sentidos. Sin embargo, para mantener nuestra exposición a un nivel completamente elemental, haremos una definición de la integral sobre un camino que, aunque sea algo más laboriosa, sólo involucra la integral de Cauchy tal y como la hemos estudiado, sin necesidad de usar ninguna integral más general.

Sea pues $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ tal que la función $\gamma_k = \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$ sea de clase C^1 para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Dada una función continua $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la función $f_k = (f \circ \gamma_k)\gamma_k'$ es continua en el intervalo $[t_{k-1},t_k]$ y podemos considerar la suma siguiente:

$$\Sigma(f,P) = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt$$

Pretendemos definir la integral de f sobre γ como esta suma, extendiendo así la definición hecha en el caso de un arco, pero para ello debemos comprobar que la suma $\Sigma(f,P)$ no depende de la partición P que hayamos usado, pues evidentemente P no es única. Pasamos pues a hacer esa comprobación, considerando cualquier otra partición Q del intervalo $[a,b]$ que cumpla la misma condición que P, es decir, tal que la restricción de γ a cada uno de los subintervalos determinados por Q sea una función de clase C^1.

Consideremos primeramente el caso en que $Q = P \cup \{c\}$ se obtiene añadiendo a P un punto $c \in [a,b] \setminus P$ que cumplirá $t_{k-1} < c < t_k$ para algún $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. La aditividad de la integral de Cauchy nos da entonces la igualdad buscada:

$$\Sigma(f,P) - \Sigma(f,Q) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k(t)\,dt - \int_{t_{k-1}}^{c} f_k(t)\,dt - \int_{c}^{t_k} f_k(t)\,dt = 0$$

Mediante una obvia inducción obtenemos que $\Sigma(f,P)$ no varía cuando añadimos a la partición P cualquier conjunto finito de puntos, es decir, que $\Sigma(f,P) = \Sigma(f,Q)$ siempre que se tenga $P \subset Q$. Finalmente, en el caso general basta usar la partición $P \cup Q$ pues, por lo ya demostrado, se tiene $\Sigma(f,P) = \Sigma(f,P \cup Q) = \Sigma(f,Q)$. Podemos ya hacer la siguiente definición.

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Definimos entonces la **integral de f sobre el camino** γ mediante la igualdad:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt \tag{3}$$

donde $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ es cualquier partición del intervalo $[a,b]$ tal que la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ sea de clase C^1 para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. La forma de elegir la partición P hace que todas las integrales que aparecen en el segundo miembro de (3) sean integrales de Cauchy de funciones continuas y, según hemos comprobado previamente, su suma no depende de la partición P que hayamos elegido. Es claro que esta definición generaliza la que hicimos en (2) para el caso de un arco.

Hemos salvado, de la forma más elemental posible, el obstáculo que había para definir la integral sobre un camino, pero queda un detalle por aclarar. En la práctica un camino suele aparecer como suma de arcos definidos en intervalos no consecutivos, en cuyo caso la igualdad (3) no resulta cómoda para calcular la integral, es preferible usar la siguiente observación:

- *Sea $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$ un camino expresado como suma de arcos. Entonces, para toda función continua $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ se tiene:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma_k} f(z)\,dz \tag{4}$$

Nótese que las integrales del segundo miembro tienen sentido, porque al ser $\gamma^* = \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k^*$, la función f es continua en σ_k^* para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Si para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ el arco σ_k está definido en un intervalo $[a_k, b_k]$ y el camino γ lo está en $[a,b]$, sabemos que existe una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ tiene la forma $\sigma_k \circ \tau_k$ donde τ_k es la traslación que lleva $[t_{k-1}, t_k]$ a $[a_k, b_k]$. También para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la fórmula de cambio de variable para la integral de Cauchy nos dice que

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_k} f(z)\,dz &= \int_{a_k}^{b_k} f\big(\sigma_k(s)\big)\,\sigma_k'(s)\,ds = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big((\sigma_k \circ \tau_k)(t)\big)\,(\sigma_k \circ \tau_k)'(t)\,dt \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt\end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variable $s = \tau_k(t)$ teniendo en cuenta que $s = a_k$ para $t = t_{k-1}$ y $s = b_k$ para $t = t_k$, así como que $\tau_k'(t) = 1$ para todo $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Puesto que la partición P es adecuada para calcular la integral de f sobre γ, al sumar miembro a miembro las n igualdades anteriores, obtenemos (4). ■

La igualdad (4) explica la razón por la que llamamos "suma" a la operación con arcos que venimos manejando: lo hacemos para resaltar que a la suma de arcos corresponde la suma de integrales.

La ventaja de (4) con respecto a (3) es que permite olvidar la definición de la suma de arcos, recordando sólo la condición para que tenga sentido. Para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la integral de f sobre el arco σ_k se calcula mediante la definición de σ_k en el intervalo $[a_k,b_k]$, y entonces la integral sobre el camino γ se calcula usando (4). Al estudiar las propiedades de la integral, casi siempre las probaremos primero para un arco, y usaremos (4) para extenderlas al caso general.

6.5. Propiedades de la integral curvilínea

Las propiedades de la integral de Cauchy se van a traducir en las análogas para la integral curvilínea.

Notación. En todo lo que sigue, para evitar repeticiones, fijamos un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ escrito en la forma $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$ donde, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\sigma_k : [a_k,b_k]$ es un arco. Sabemos que γ^* es compacto, luego podemos considerar el espacio de Banach complejo $C(\gamma^*)$ de todas las funciones continuas de γ^* en $\mathbb{C}$, cuya norma viene dada por

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma^*\} \qquad \forall f \in C(\gamma^*)$$

Para cada $f \in C(\gamma^*)$ podemos definir

$$\Lambda(f) = \int_\gamma f(z)\,dz \qquad \text{y} \qquad \Lambda_k(f) = \int_{\sigma_k} f(z)\,dz \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$$

con lo que $\Lambda(f) = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_k(f)$.

Las dos primeras propiedades de la integral curvilínea son la linealidad y la continuidad del funcional $\Lambda : C(\gamma^*) \to \mathbb{C}$.

- **Linealidad.** *El funcional* Λ *es lineal, es decir:*

$$\int_\gamma \big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma g(z)\,dz \qquad \forall f,g \in C(\gamma^*), \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$$

La linealidad de la integral de Cauchy nos hace ver claramente que el funcional Λ_k es lineal para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, luego Λ es lineal, como suma de aplicaciones lineales. ■

Para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ comprobamos ahora fácilmente la continuidad de Λ_k:

$$|\Lambda_k(f)| \leqslant \int_{a_k}^{b_k} \big|f\big(\sigma_k(t)\big)\big|\,\big|\sigma_k'(t)\big|\,dt \leqslant \|f\|_\infty \int_{a_k}^{b_k} |\sigma_k'(t)|\,dt \tag{5}$$

La última integral es, por definición, la longitud del arco σ_k. Así pues, para decirlo en general, la **longitud de un arco** $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ se define por

$$l(\sigma) = \int_c^d |\sigma'(t)|\,dt$$

No vamos a detenernos a explicar que esta definición es coherente con la idea intuitiva de longitud. Simplemente comprobamos que la longitud de un segmento y la de una circunferencia son las que cabe esperar. Para cualesquiera $z,w \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$ es claro que:

$$l\big([z,w]\big) = |w-z| \qquad \text{y} \qquad l\big(C(z,r)\big) = 2\pi r$$

Usando la desigualdad (5), tenemos claramente

$$|\Lambda(f)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\Lambda_k(f)| \leqslant \|f\|_\infty \sum_{k=1}^{n} l(\sigma_k) \tag{6}$$

y es natural definir la **longitud de un camino** γ como la suma de las longitudes de los arcos cuya suma es γ:

$$l(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} l(\sigma_k) \tag{7}$$

Razonando como se hizo con la integral, se puede comprobar que esta definición es correcta, es decir, que $l(\gamma)$ no depende de la forma de expresar γ como suma de arcos, pero no habrá necesidad de usar este hecho. Podemos simplemente entender la igualdad (7) como un convenio de notación. Resaltemos, eso sí, la continuidad del funcional Λ, que aparece en (6):

- **Continuidad.** *El funcional Λ es continuo. Más concretamente, se tiene:*

$$|\Lambda(f)| = \left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leqslant l(\gamma)\,\|f\|_\infty \qquad \forall f \in C(\gamma^*) \tag{8}$$

En la práctica no suele ser necesario calcular con exactitud la norma de f, basta usar una clara consecuencia de (8). Para $M \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene:

$$|f(z)| \leqslant M \quad \forall z \in \gamma^* \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leqslant l(\gamma)\,M$$

Usaremos a menudo la continuidad de la integral, teniendo en cuenta que la convergencia de sucesiones en el espacio de Banach $C(\gamma^*)$ es la uniforme en γ^*. Aprovechando también la linealidad de la integral, lo enunciamos para series:

- *Sea $f_n \in C(\gamma^*)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en γ^*. Entonces:*

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz$$

Vamos con la tercera propiedad importante de la integral curvilínea, que describe la forma en que depende del camino sobre el que se integra:

- **Aditividad.** *Sea φ otro camino cuyo origen coincida con el extremo de γ. Entonces, para toda función $f \in C\big((\gamma+\varphi)^*\big) = C\big(\gamma^* \cup \varphi^*\big)$ se tiene:*

$$\int_{\gamma+\varphi} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\varphi} f(z)\,dz \tag{9}$$

Además, para toda función $f \in C(\gamma^*)$, se tiene también:

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz \tag{10}$$

Para la igualdad (9) expresamos φ como suma de arcos, que numeramos consecutivamente a los que teníamos para γ, es decir, $\varphi = \sum_{k=n+1}^{n+m} \sigma_k$. Por hipótesis, el extremo de γ, que es el de σ_n, coincide con el origen de φ que es el de σ_{n+1}, luego es bien fácil expresar $\gamma+\varphi$ como suma de arcos: $\gamma+\varphi = \sum_{k=1}^{n+m} \sigma_k$. Al aplicar la igualdad (4) a los tres caminos involucrados, obtenemos claramente (9).

Para probar (10) sí usaremos la definición que hicimos en (3) de la integral sobre un camino. Sea $\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $\gamma_k = \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$ sea de clase C^1 para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Tomando

$$s_k = a+b-t_{n-k} \qquad \forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$$

tenemos otra partición $\{a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b\}$ de $[a,b]$, que es adecuada para calcular la integral sobre el camino $-\gamma$. En efecto, fijado $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, para todo $s \in [s_{k-1},s_k]$ se tiene que $a+b-s \in [t_{n-k},t_{n-k+1}]$, luego $(-\gamma)(s) = \gamma(a+b-s) = \gamma_{n-k+1}(a+b-s)$; como γ_{n-k+1} era de clase C^1, vemos que la restricción de $-\gamma$ al intervalo $[s_{k-1},s_k]$ es de clase C^1 como queríamos.

Por otra parte, siempre para cada $k \in \{1,2,\ldots n\}$ la fórmula de cambio de variable para la integral de Cauchy nos permite escribir

$$\int_{s_{k-1}}^{s_k} f\big((-\gamma)(s)\big)(-\gamma)'(s)\,ds = -\int_{s_{k-1}}^{s_k} f\big(\gamma(a+b-s)\big)\gamma'(a+b-s)\,ds = -\int_{t_{n-k}}^{t_{n-k+1}} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt$$

donde hemos hecho el cambio de variable $s = a+b-t$, sustituyendo ds por $-dt$, y hemos permutado los límites de integración, ya que $s = s_{k-1}$ para $t = t_{n-k-1}$ y $s = s_k$ para $t = t_{n-k}$. Al sumar miembro a miembro las n igualdades anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma} f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{n} \int_{s_{k-1}}^{s_k} f\big((-\gamma)(s)\big)(-\gamma)'(s)\,ds = -\sum_{k=1}^{n} \int_{t_{n-k}}^{t_{n-k+1}} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt = -\int_{\gamma} f(z)\,dz\end{aligned}$$

que es la igualdad (10) buscada. ■

Además de reencontrar la razón por la que la suma de caminos se llama así, ahora vemos también la razón por la que el camino opuesto de γ se denota por $-\gamma$.

Pasamos a probar la propiedad de la integral curvilínea que la hace útil para el problema que nos interesa: construir, cuando sea posible, primitivas de una función.

- **Regla de Barrow.** *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Supongamos que f admite una primitiva en Ω, es decir, que existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Entonces, si el camino γ verifica que $\gamma^* \subset \Omega$, se tiene:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

Para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, aplicamos la regla Barrow para la integral de Cauchy:

$$\int_{\sigma_k} f(z)\,dz = \int_{a_k}^{b_k} f\big(\sigma_k(t)\big)\,\sigma_k'(t)\,dt = \int_{a_k}^{b_k} \big(F\circ\sigma_k\big)'(t)\,dt = F\big(\sigma_k(b_k)\big) - F\big(\sigma_k(a_k)\big)$$

Sumaremos miembro a miembro las n igualdades anteriores, pero teniendo en cuenta algo que ahora es importante:

$$\gamma(a) = \sigma_1(a_1), \quad \gamma(b) = \sigma_n(b_n) \quad \text{y} \quad \sigma_k(b_k) = \sigma_{k+1}(a_{k+1}) \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$$

Concluimos entonces que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\sigma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\big[F\big(\sigma_k(b_k)\big) - F\big(\sigma_k(a_k)\big)\big]\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} F\big(\sigma_k(b_k)\big) - \sum_{k=2}^{n} F\big(\sigma_k(a_k)\big) + F\big(\sigma_n(b_n)\big) - F\big(\sigma_1(a_1)\big)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} F\big(\sigma_{k+1}(a_{k+1})\big) - \sum_{k=2}^{n} F\big(\sigma_k(a_k)\big) + F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)\\
&= F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Para abreviar, si un camino γ verifica, como en el resultado anterior, que $\gamma^* \subset \Omega$ donde Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, diremos simplemente que γ es un camino **en** Ω. Hemos obtenido una condición necesaria para que una función $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ admita una primitiva en Ω: su integral sobre cualquier camino en Ω sólo depende del origen y extremo del camino. Dicho de forma más llamativa, la integral de f sobre cualquier camino cerrado γ en Ω ha de anularse, puesto que $\gamma(b) = \gamma(a)$, luego $F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big) = 0$.

Por ejemplo, supongamos que para algún $r \in \mathbb{R}^+$ se tiene $C(0,r)^* \subset \Omega \subset \mathbb{C}^*$. Entonces

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i\,r\,e^{it}\,dt}{r\,e^{it}} = 2\pi i \neq 0$$

y deducimos que la función continua $z \mapsto 1/z$ no admite una primitiva en Ω, cosa que ya sabíamos. Pero ahora no hemos tenido que usar ningún resultado sobre logaritmos holomorfos, argumentos o raíces cuadradas continuas ni nada por el estilo, simplemente hemos calculado una integral sobre un arco cerrado, bien sencilla por cierto.

6.6. Existencia de primitiva

Nuestro próximo objetivo es probar que, la condición necesaria recién obtenida para que una función continua en un abierto admita una primitiva, también es suficiente.

Teorema ***(Caracterización de la existencia de primitiva).*** *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

(ii) *Para todo camino cerrado γ en Ω se tiene que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Demostración. Ya sabemos que $(i) \Rightarrow (ii)$ y, para probar el recíproco, empezamos por reducir el problema al caso en que Ω es un dominio.

(a). Supongamos demostrado el teorema para dominios. Sea entonces Ω abierto y supongamos que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ verifica (ii). Para cada componente conexa U de Ω sabemos que U es un dominio y es claro que la restricción $f\big|_U$ verifica también (ii), puesto que todo camino cerrado en U es un camino cerrado en Ω. Por tanto existirá $F_U \in \mathcal{H}(U)$ tal que $F_U'(z) = f(z)$ para todo $z \in U$. Para cada $z \in \Omega$ definimos entonces $F(z) = F_U(z)$ donde U es la única componente conexa de Ω tal que $z \in U$. Tenemos así $F\big|_U = F_U$ para toda componente conexa U de Ω. Por el carácter local del concepto de derivada deducimos que $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Así pues, suponemos a partir de ahora que Ω es un dominio.

(b). Fijamos en lo que sigue un punto $\alpha \in \Omega$, pues la idea es construir la función F integrando f sobre caminos con origen en α que nos lleven a cualquier punto de Ω. Nuestro próximo paso es probar que efectivamente podemos llegar desde α a cualquier punto de Ω mediante un camino, de hecho mediante una poligonal. Comprobamos por tanto que Ω verifica la siguiente forma fuerte de conexión:

Para todo $z \in \Omega$ existe un camino γ_z en Ω con origen α y extremo z.

Para probarlo consideramos el conjunto $A \subset \Omega$ de los puntos que verifican la propiedad buscada. Es obvio que $A \neq \emptyset$ luego bastará probar que A es abierto y también que es cerrado relativo a Ω, para concluir que $A = \Omega$ como queremos.

Dado $a \in A$ tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$. Por hipótesis tenemos un camino γ_a en Ω con origen α y extremo a. Para cada $z \in D(a,r)$ podemos entonces tomar $\gamma_z = \gamma_a + [a,z]$, suma que está bien definida pues el extremo de γ_a coincide con el origen de $[a,z]$. Además tenemos $\gamma_a^* \subset \Omega$ y $[a,z]^* \subset D(a,r) \subset \Omega$ luego γ_z es un camino en Ω con origen en α y extremo en z. Esto prueba que $z \in A$, luego $D(a,r) \subset A$ y A es abierto.

Sea ahora $z \in \overline{A} \cap \Omega$ que es el cierre de A relativo a Ω. Tomamos otra vez $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z,r) \subset \Omega$ y encontramos $a \in A \cap D(z,r)$. De nuevo existe un camino γ_a en Ω con origen α y extremo a, y de nuevo tomamos $\gamma_z = \gamma_a + [a,z]$ que es un camino en Ω con origen α y extremo z. Esto prueba que $z \in A$, luego A es cerrado relativo a Ω.

Nótese que en los dos razonamientos anteriores, γ_z es una poligonal cuando γ_a lo es. Por tanto, la misma prueba nos dice que, para cada $z \in \Omega$ existe de hecho una poligonal en Ω con origen α y extremo z.

(c). Definimos ya la función F que buscamos, escribiendo, para cada $z \in \Omega$,

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\, dw$$

donde γ_z es cualquier camino en Ω con origen α y extremo z, pero debemos asegurarnos de que la integral no depende del camino γ_z elegido. Sean pues φ_z y ψ_z dos caminos que cumplan las condiciones exigidas a γ_z. Como z es el extremo de φ_z y también el origen de $-\psi_z$, podemos considerar el camino $\varphi_z - \psi_z$. Puesto que $(\varphi_z - \psi_z)^* = \varphi_z^* \cup \psi_z^* \subset \Omega$, tenemos un camino en Ω, pero α es su origen y también su extremo, luego se trata de un camino cerrado. Aplicando la hipótesis (ii) tenemos que

$$0 = \int_{\varphi_z - \psi_z} f(w)\, dw = \int_{\varphi_z} f(w)\, dw - \int_{\psi_z} f(w)\, dw$$

como queríamos comprobar. Así pues la función F está bien definida en todo punto $z \in \Omega$.

(d). Destacamos la propiedad clave de F, de la que se deducirá que es una primitiva de f:

Para todo $a \in \Omega$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\, dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

En efecto, tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y si γ_a es cualquier camino que usemos para definir $F(a)$, para cada $z \in D(a,r)$ usamos $\gamma_z = \gamma_a + [a,z]$. La igualdad buscada es consecuencia evidente de la aditividad de la integral curvilínea:

$$F(z) = \int_{\gamma_a} f(w)\, dw + \int_{[a,z]} f(w)\, dw = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\, dw$$

Para probar que F es una primitiva de f sólo usaremos ya la propiedad de F recién obtenida. Como quiera que más adelante nos encontraremos en situaciones análogas, recogemos el resto de la demostración en forma de lema, que podremos usar cuando sea conveniente, sin tener que repetir el razonamiento.

Lema ***(Construcción de primitivas).*** *Sea $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ donde Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, y sea $F : \Omega \to \mathbb{C}$ una función verificando que, para todo $a \in \Omega$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y*

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\, dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Entonces $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Fijamos $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ dado por la hipótesis. Para $z \in D(a,r)$ se tiene entonces

$$F(z) - F(a) - f(a)(z-a) = \int_{[a,z]} f(w)\, dw - f(a)(z-a) = \int_{[a,z]} \big(f(w) - f(a)\big)\, dw$$

donde, para la última igualdad, hemos usado la regla de Barrow, pues la función constantemente igual a $f(a)$ tiene, en todo el plano, una primitiva obvia: $w \mapsto f(a)\, w$.

Fijado $\varepsilon > 0$, por ser f continua en a, podemos encontrar $\delta \in]0, r[$, tal que

$$w \in \Omega, \ |w - a| < \delta \implies |f(w) - f(a)| < \varepsilon$$

Fijado $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$, para todo $w \in [a,z]^*$ se tiene claramente $|w-a| \leqslant |z-a| < \delta$, luego $|f(w) - f(a)| < \varepsilon$. De la continuidad de la integral curvilínea deducimos que

$$\left| \frac{F(z) - F(a)}{z-a} - f(a) \right| = \frac{1}{|z-a|} \left| \int_{[a,z]} \big(f(w) - f(a)\big)\, dw \right| < \frac{\varepsilon\, l\big([a,z]\big)}{|z-a|} = \varepsilon$$

lo que prueba que F es derivable en a con $F'(a) = f(a)$. Puesto que $a \in \Omega$ era arbitrario, esto concluye la demostración del lema, y con ella la del teorema principal. ■

El teorema anterior puede verse, no sólo como la versión compleja del teorema fundamental del Cálculo, sino como una auténtica generalización del mismo. Aplicándolo formalmente a funciones reales de variable real, este teorema nos diría que una función continua $f : \Omega \to \mathbb{R}$, donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}$, admite una primitiva si, y sólo si, su integral sobre cualquier camino cerrado γ en Ω se anula. Ocurre que un camino cerrado en Ω ha de ser "trivial", en el sentido de que sólo puede ser una suma de segmentos que se recorren en ambos sentidos. Entonces, la integral de cualquier función continua sobre tal camino ha de anularse, luego toda función continua en un abierto de $\mathbb{R}$ admite una primitiva, que es lo que nos asegura el teorema fundamental del Cálculo para funciones reales de variable real.

6.7. Ejercicios

1. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Probar que $\displaystyle\int_{[\alpha,\alpha+r]} f(z)\, dz = \int_0^r f(\alpha+s)\, ds$ para cualquier función $f \in C\big([\alpha,\alpha+r]^*\big)$. ¿Cual es la igualdad análoga para un segmento vertical?

2. Para $r \in]1,+\infty[$ se define $I(r) = \displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{z\,dz}{z^3+1}$ y $J(r) = \displaystyle\int_{\sigma_r} \frac{z^2 e^z}{z+1}\, dz$ donde $\gamma_r = C(0,r)$ y $\sigma_r = [-r, -r+i]$. Probar que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} I(r) = \lim_{r\to+\infty} J(r) = 0$.

3. Probar que $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z}\, dz = 0$ y deducir que $\displaystyle\int_0^\pi \log(1 + r^2 + 2r\cos t)\, dt = 0$, para todo $r \in]0,1[$.

4. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ verificando que $|f(z) - 1| < 1$ para todo $z \in D(0,1)$. Admitiendo que f' es continua, probar que $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$ para todo $r \in]0,1[$.

5. Sean $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ dada por $f(z) = 1/(1+z^2)$ para todo $z \in \Omega$. Probar que f no admite una primitiva en Ω.

6. Probar que $\displaystyle\int_\sigma \frac{dz}{1+z^2} = 0$, donde $\sigma(t) = \cos t + (i/2)\operatorname{sen} t$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Tema 7

Teorema local de Cauchy

La caracterización de la existencia de primitiva nos lleva a buscar teoremas que aseguren que la integral de una función holomorfa en un abierto del plano, sobre un camino cerrado en dicho abierto, se anula. En general esto es falso, pues sabemos que una función holomorfa puede no admitir primitiva. Por tanto, será necesaria alguna hipótesis adicional, que es la que marca la diferencia entre unos resultados y otros. Todos los teoremas de este tipo reciben la denominación genérica de *teoremas de Cauchy*, y por ahora vamos a probar dos de ellos.

El primero se conoce como *teorema de Cauchy para el triángulo*, aludiendo al camino de integración que se usa. Su nombre más apropiado es *teorema de Cauchy-Goursat*, en honor del matemático francés Edouard Goursat (1858-1936), que publicó en 1884 una primera versión, y la mejoró en 1899 evitando una hipótesis que hasta entonces no se sabía si era necesaria, con lo que resolvió un problema que había permanecido abierto muchos años. En realidad Goursat no usaba como camino de integración un triángulo, sino un rectángulo. Fue el matemático alemán Alfred Prinsheim (1850-1941) quien obtuvo en 1901 la versión definitiva del teorema, observando que el mismo razonamiento de Goursat podía hacerse con triángulos, con lo que el resultado tiene más utilidad.

El segundo teorema de Cauchy, que deduciremos fácilmente del primero, es el que se conoce como *teorema de Cauchy para dominios estrellados*. Esta vez la hipótesis adicional se refiere al abierto en el que se trabaja, que ha de tener una forma geométrica concreta, ha de ser lo que llamaremos un dominio estrellado. Se aplica en particular a un disco abierto, por lo que siempre se puede usar localmente, de ahí que también se le conozca como *teorema local de Cauchy*.

Llegando ya al punto culminante de la teoría, probaremos la versión más elemental de la llamada *fórmula integral de Cauchy*, que se deduce fácilmente del teorema local de Cauchy. Se trata de una representación local de una función holomorfa como una integral dependiente de un parámetro. De ella se deducirá la equivalencia entre analiticidad y holomorfía, junto con multitud de propiedades locales de las funciones holomorfas.

7.1. Preliminares

Usaremos reiteradamente un hecho sencillo, acerca de lo que ocurre con la integral sobre un segmento cuando lo descomponemos en dos, usando un punto intermedio:

- *Sean* $z_0, z_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha \in]0,1[$ *y* $z_1 = (1-\alpha)z_0 + \alpha z_2$. *Entonces,* $[z_0, z_1, z_2]^* = [z_0, z_2]^*$ *y para toda función* $f \in C\big([z_0,z_2]^*\big)$ *se tiene:*

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz = \int_{[z_0,z_2]} f(z)\,dz \tag{1}$$

Obsérvese que el primer miembro de (1) es la integral de f sobre la poligonal $[z_0, z_1, z_2]$. Está claro que la imagen de dicha poligonal coincide con la del segmento $[z_0, z_2]$, pero lo comprobamos, para que se adivine la forma de obtener (1). Se tiene claramente:

$$\begin{aligned} [z_0,z_1]^* &= \big\{ (1-t)\,z_0 + t\,z_1 : t \in [0,1] \big\} = \big\{ (1-\alpha t)\,z_0 + \alpha t\,z_2 : t \in [0,1] \big\} \\ &= \big\{ (1-s)\,z_0 + s\,z_2 : s \in [0,\alpha] \big\} \end{aligned}$$

donde hemos hecho la sustitución $s = \alpha t$. Análogamente

$$\begin{aligned} [z_1,z_2]^* &= \big\{ (1-t)\,z_1 + t\,z_2 : t \in [0,1] \big\} \\ &= \big\{ (1-t)(1-\alpha)\,z_0 + \big(\alpha + (1-\alpha)t\big)\,z_2 : t \in [0,1] \big\} \\ &= \big\{ (1-s)\,z_0 + s\,z_2 : s \in [\alpha,1] \big\} \end{aligned}$$

donde la sustitución ha sido $s = \alpha + (1-\alpha)t$. Deducimos claramente que

$$[z_0,z_1,z_2]^* = [z_0,z_1]^* \cup [z_1,z_2]^* = \big\{ (1-s)\,z_0 + s\,z_2 : s \in [0,1] \big\} = [z_0,z_2]^*$$

Ahora, para comprobar (1) hacemos en la primera integral el cambio de variable $s = \alpha t$, y en la segunda $s = \alpha + (1-\alpha)t$, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz &= (z_1 - z_0) \int_0^1 f\big((1-t)\,z_0 + t\,z_1\big)\,dt \\ &= \alpha\,(z_2 - z_0) \int_0^1 f\big((1-\alpha t)\,z_0 + \alpha t\,z_2\big)\,dt \\ &= (z_2 - z_0) \int_0^\alpha f\big((1-s)\,z_0 + s\,z_2\big)\,ds, \qquad \text{así como} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz &= (z_2 - z_1) \int_0^1 f\big((1-t)\,z_1 + t\,z_2\big)dt \\ &= (1-\alpha)(z_2 - z_0) \int_0^1 f\big((1-t)(1-\alpha)\,z_0 + (\alpha + (1-\alpha)t)\,z_2\big)\,dt \\ &= (z_2 - z_0) \int_\alpha^1 f\big((1-s)\,z_0 + s\,z_2\big)\,ds \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades anteriores, obtenemos claramente (1). ■

Por otra parte usaremos algunas cuestiones básicas sobre triángulos en el plano. Dados $a,b,c \in \mathbb{C}$, vamos a trabajar con la poligonal cerrada $\gamma = [a,b,c,a]$, y nos interesa la unión de su imagen γ^* con el conjunto de puntos rodeados por ella, que es el **triángulo** de vértices a,b,c, dado por

$$\Delta(a,b,c) = \bigcup_{z\in[b,c]^*} [a,z]^* \tag{2}$$

Para $w \in \Delta(a,b,c)$ tenemos $w = (1-t)a + tz$ con $t \in [0,1]$ y $z \in [b,c]^*$, así que $z = (1-s)b + sc$ con $s \in [0,1]$ y obtenemos

$$w = (1-t)a + t(1-s)b + tsc = \alpha a + \beta b + \rho c$$

donde $\alpha = 1-t$, $\beta = t(1-s)$ y $\rho = ts$ verifican que $\alpha,\beta,\rho \in [0,1]$ y $\alpha+\beta+\rho = 1$.

Recíprocamente, si w se expresa de esta última forma, podemos tomar $t = 1-\alpha \in [0,1]$ y existe $s \in [0,1]$ tal que $t(1-s) = \beta$ y $ts = \rho$. Concretamente, si $t = 0$ tenemos $\beta = \rho = 0$ y s puede ser arbitrario, mientras que si $t > 0$ basta tomar $s = \rho/t$, pues $0 \leqslant s \leqslant (\rho+\beta)/t = 1$ y $t(1-s) = \beta$. Entonces $w = (1-t)a + tz \in [a,z]^*$ donde $z = (1-s)b + sc \in [b,c]^*$, luego $w \in \Delta(a,b,c)$. En resumen,

$$\Delta(a,b,c) = \big\{ \alpha a + \beta b + \rho c : \alpha,\beta,\rho \in [0,1],\ \alpha+\beta+\rho = 1 \big\} \tag{3}$$

De aquí se deduce claramente que $\Delta(a,b,c)$ es convexo. En vista de (2), es el mínimo conjunto convexo que contiene a los puntos a, b y c. También es claro que $\Delta(a,b,c)$ es compacto.

El **diámetro** de un conjunto no vacío y acotado $A \subset \mathbb{C}$ viene dado por

$$\operatorname{diam} A = \sup \big\{ |w-z| : z,w \in A \big\}$$

definición que puede hacerse en cualquier espacio métrico. Calculamos fácilmente el diámetro de un triángulo:

- *Para cualesquiera $a,b,c \in \mathbb{C}$ se tiene*

$$\operatorname{diam} \Delta(a,b,c) = \text{máx} \big\{ |b-a|, |c-b|, |a-c| \big\} \tag{4}$$

Esta igualdad tiene clara interpretación geométrica: el diámetro de un triángulo es la mayor de las longitudes de sus lados. Denotando por δ al segundo miembro, la definición de diámetro nos da una desigualdad: $\delta \leqslant \operatorname{diam} \Delta(a,b,c)$. Para la otra, fijamos $w,z \in \Delta(a,b,c)$ y escribimos w usando (3): $w = \alpha_1 a + \beta_1 b + \rho_1 c$ con $\alpha_1,\beta_1,\rho_1 \in [0,1]$ y $\alpha_1+\beta_1+\rho_1 = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} |w-z| &= |\alpha_1 a + \beta_1 b + \rho_1 c - (\alpha_1+\beta_1+\rho_1)z| \\ &\leqslant \alpha_1 |a-z| + \beta_1 |b-z| + \rho_1 |c-z| \\ &\leqslant (\alpha_1+\beta_1+\rho_1)\, \text{máx} \big\{ |a-z|, |b-z|, |c-z| \big\} \\ &= \text{máx} \big\{ |a-z|, |b-z|, |c-z| \big\} \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, también $z = \alpha_2 a + \beta_2 b + \rho_2 c$ con $\alpha_2,\beta_2,\rho_2 \in [0,1]$ y $\alpha_2+\beta_2+\rho_2 = 1$, luego

$$|a-z| = |(\beta_2+\rho_2)a - \beta_2 b - \rho_2 c| \leqslant \beta_2 |a-b| + \rho_2 |a-c| \leqslant \delta$$

y usando b y c en lugar de a, obtenemos también $|b-z| \leqslant \delta$ y $|c-z| \leqslant \delta$. En vista de (5) concluimos que $|w-z| \leqslant \delta$, pero $w,z \in \Delta(a,b,c)$ eran arbitrarios, luego $\operatorname{diam} \Delta(a,b,c) \leqslant \delta$, como queríamos comprobar. ■

7.2. Teorema de Cauchy para el triángulo

Todo está preparado para conseguir nuestro primer teorema de Cauchy:

Teorema de Cauchy-Goursat. *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $a,b,c \in \Omega$ *tales que el triángulo de vértices* a,b,c *está contenido en* Ω, *es decir,* $\Delta(a,b,c) \subset \Omega$. *Se tiene entonces:*

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,dz = 0$$

Demostración. Abreviamos la notación escribiendo

$$\gamma = [a,b,c,a], \qquad I = \int_\gamma f(z)\,dz \qquad \text{y} \qquad \Delta = \Delta(a,b,c)$$

Aún más, para $u,v \in \Delta$, escribiremos $I(u,v) = \displaystyle\int_{[u,v]} f(z)\,dz$, recordando que $I(v,u) = -I(u,v)$.

(a). En una primera fase, usamos un ingenioso procedimiento para expresar la integral I como suma de las integrales sobre cuatro poligonales análogas a γ, que resultan de subdividir el triángulo Δ en cuatro triángulos semejantes.

Descomponemos los segmentos cuya suma es γ usando sus puntos medios. Concretamente, tomamos $a' = (b+c)/2$, $b' = (c+a)/2$ y $c' = (a+b)/2$, con lo que tenemos:

$$I = I(a,b)+I(b,c)+I(c,a) = I(a,c')+I(c',b)+I(b,a')+I(a',c)+I(c,b')+I(b',a)$$

Por otra parte, es claro que $0 = I(c',b')+I(b',c')+I(a',c')+I(c',a')+I(b',a')+I(a',b')$. Sumando miembro a miembro ambas igualdades y agrupando debidamente, obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \big[I(a,c')+I(c',b')+I(b',a)\big] + \big[I(b,a')+I(a',c')+I(c',b)\big] \\ &\quad + \big[I(c,b')+I(b',a')+I(a',c)\big] + \big[I(a',b')+I(b',c')+I(c',a')\big] \\ &= \sum_{k=1}^{4} \int_{\varphi_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} J_k \end{aligned}$$

donde $\varphi_1 = [a,c',b',a]$, $\varphi_2 = [b,a',c',b]$, $\varphi_3 = [c,b',a',c]$, $\varphi_4 = [a',b',c',a']$, y para cada $k = 1,2,3,4$, hemos escrito $J_k = \displaystyle\int_{\varphi_k} f(z)\,dz$.

Nos quedaremos con uno sólo de los cuatro triángulos que han aparecido. Obviamente existe $k \in \{1,2,3,4\}$ tal que $|I| \leqslant 4|J_k|$, y eligiendo k de esta forma, escribimos $I_1 = J_k$, llamamos γ_1 a la poligonal φ_k y a_1,b_1,c_1 a sus vértices. Así pues, tenemos $\gamma_1 = [a_1,b_1,c_1\,a_1]$, y también escribimos $\Delta_1 = \Delta(a_1,b_1,c_1)$.

Concretemos la relación entre la nueva terna I_1,γ_1,Δ_1 y la de partida I,γ,Δ. El criterio de elección seguido dos da $|I| \leqslant 4|I_1|$. Por otra parte, es claro que $a_1,b_1,c_1 \in \Delta$, luego $\Delta_1 \subset \Delta$, ya que Δ es convexo y Δ_1 es el mínimo conjunto convexo que contiene a los puntos a_1,b_1,c_1. Además, geométricamente es claro que $l(\gamma_1) = (1/2)\,l(\gamma)$ y $\operatorname{diam}\Delta_1 = (1/2)\operatorname{diam}\Delta$, cualquiera que sea el valor de $k \in \{1,2,3,4\}$ que hayamos elegido. Comprobaremos estas dos igualdades en el caso $k = 1$, pues cualquier otro es análogo.

Suponiendo pues que $a_1 = a$, $b_1 = c'$ y $c_1 = b'$, se tiene

$$|b_1 - a_1| = (1/2)|b-a|, \quad |c_1 - b_1| = (1/2)|c-b| \ \text{ y } \ |a_1 - c_1| = (1/2)||a-c|$$

Sumando miembro a miembro estas tres igualdades obtenemos $l(\gamma_1) = (1/2)\,l(\gamma)$, mientras que al igualar el máximo de los tres primeros miembros con el máximo de los tres segundos, obtenemos $\operatorname{diam}\Delta_1 = (1/2)\operatorname{diam}\Delta$.

Resumimos lo conseguido hasta ahora. A partir de los puntos iniciales a,b,c hemos obtenido puntos a_1,b_1,c_1 tales que la terna I_1,γ_1,Δ_1 dada por

$$\gamma_1 = [a_1,b_1,c_1,a_1], \quad I_1 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \quad \text{y} \quad \Delta_1 = \Delta(a_1,b_1,c_1) \quad \text{verifica:}$$

$$|I| \leqslant 4|I_1|, \qquad l(\gamma_1) = \frac{l(\gamma)}{2}, \qquad \Delta_1 \subset \Delta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{diam}\Delta_1 = \frac{\operatorname{diam}\Delta}{2}$$

(b). El siguiente paso consiste en iterar lo hecho hasta ahora, razonando por inducción. Para $n \in \mathbb{N}$, suponemos construidos puntos $a_n,b_n,c_n \in \mathbb{C}$, tales que, escribiendo

$$\gamma_n = [a_n,b_n,c_n,a_n], \qquad I_n = \int_{\gamma_n} f(z)\,dz \qquad \text{y} \qquad \Delta_n = \Delta(a_n,b_n,c_n) \tag{6}$$

se tiene

$$|I| \leqslant 4^n|I_n|, \quad l(\gamma_n) = \frac{l(\gamma)}{2^n}, \quad \Delta_n \subset \Delta_{n-1} \quad \text{y} \quad \operatorname{diam}\Delta_n = \frac{\operatorname{diam}\Delta}{2^n} \tag{7}$$

Nótese que esto es exactamente lo que sabíamos para $n=1$, entendiendo que $\Delta_0 = \Delta$.

Entonces, aplicando a los puntos a_n,b_n,c_n el mismo razonamiento que hemos usado para a,b,c, obtenemos puntos $a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1} \in \mathbb{C}$ tales que, la terna $I_{n+1},\gamma_{n+1},\Delta_{n+1}$ dada por

$$\gamma_{n+1} = [a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1},a_{n+1}], \quad I_{n+1} = \int_{\gamma_{n+1}} f(z)\,dz \quad \text{y} \quad \Delta_{n+1} = \Delta(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})$$

guarda con I_n,γ_n,Δ_n la misma relación que I_1,γ_1,Δ_1 guardaba con I,γ,Δ, es decir:

$$|I_n| \leqslant 4|I_{n+1}|, \quad l(\gamma_{n+1}) = \frac{l(\gamma_n)}{2}, \quad \Delta_{n+1} \subset \Delta_n \quad \text{y} \quad \operatorname{diam}\Delta_{n+1} = \frac{\operatorname{diam}\Delta}{2}$$

Deducimos claramente que se verifica (7) para $n+1$ en lugar de n. Así pues, por inducción hemos construido sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la terna I_n,γ_n,Δ_n, definida en (6), verifica (7).

(c). Ahora aplicamos en $\mathbb{C}$ una propiedad que caracteriza a los espacios métricos completos: *la intersección de toda sucesión decreciente de cerrados no vacíos, cuyos diámetros convergen a cero, tiene exactamente un elemento.* Como para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\emptyset \neq \Delta_{n+1} \subset \Delta_n = \overline{\Delta_n}$, y claramente $\{\operatorname{diam}\Delta_n\} \to 0$, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \{z_0\}$$

Lo comprobamos en nuestro caso particular, pero la demostración sería la misma en general. Tomamos $z_n \in \Delta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y observamos que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que diam $\Delta_m < \varepsilon$, y para $p,q \geqslant m$, al ser $z_p, z_q \in \Delta_m$, tenemos $|z_p - z_q| \leqslant$ diam $\Delta_m < \varepsilon$. Como $\mathbb{C}$ es completo, tenemos $\{z_n\} \to z_0 \in \mathbb{C}$. Ahora, fijado $k \in \mathbb{N}$, tenemos $z_{k+n} \in \Delta_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego por ser Δ_k cerrado, deducimos que $z_0 \in \Delta_k$, lo cual es cierto para todo $k \in \mathbb{N}$. Si w es otro punto de la intersección, se tiene $|z_0 - w| \leqslant$ diam Δ_n para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde $w = z_0$.

(d). Ha llegado el momento de usar la hipótesis $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ para concluir la demostración. Fijado $\varepsilon > 0$, la derivabilidad de f en el punto z_0 nos da un $\delta > 0$ tal que $D(z_0,\delta) \subset \Omega$ y

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leqslant \varepsilon |z - z_0| \qquad \forall z \in D(z_0,\delta)$$

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que diam $\Delta_n < \delta$. Entonces, para $z \in \gamma_n^*$ tenemos $|z - z_0| \leqslant$ diam $\Delta_n < \delta$ y podemos usar la desigualdad anterior, obteniendo que

$$\begin{aligned} \text{máx}\,\big\{\, |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \,:\, z \in \gamma_n^* \,\big\} &\leqslant \varepsilon \ \text{máx}\,\big\{\, |z - z_0| \,:\, z \in \gamma_n^* \,\big\} \\ &\leqslant \varepsilon \ \text{diam}\, \Delta_n = \frac{\varepsilon \ \text{diam}\, \Delta}{2^n} \end{aligned} \tag{8}$$

Pretendemos usar la desigualdad anterior para acotar la integral I_n, pero hay que modificar el integrando. La función polinómica $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ admite una primitiva en $\mathbb{C}$, luego su integral sobre el camino cerrado γ_n se anula y podemos escribir

$$I_n = \int_{\gamma_n} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \big)\, dz$$

Usando ahora la continuidad de la integral curvilínea, en vista de (7) y (8) obtenemos

$$|I_n| \leqslant \frac{\varepsilon \ \text{diam}\, \Delta}{2^n}\, l(\gamma_n) = \frac{\varepsilon \ \text{diam}\, \Delta}{2^n}\, \frac{l(\gamma)}{2^n} = \frac{\varepsilon \ (\text{diam}\, \Delta)\ l(\gamma)}{4^n}$$

Finalmente, usando otra vez (7) concluimos que $|I| \leqslant 4^n |I_n| \leqslant \varepsilon\ (\text{diam}\, \Delta)\ l(\gamma)$. Puesto que $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos por fin $I = 0$, como queríamos demostrar. ■

Necesitaremos una observación adicional acerca del teorema anterior:

- *El teorema anterior sigue siendo cierto si, en lugar de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, sólo sabemos que existe un punto $z_0 \in \Omega$ tal que $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ y f es continua en el punto z_0.*

La mayor generalidad de este planteamiento es sólo aparente. Veremos más adelante que una función derivable en un abierto salvo en un punto y continua en ese punto, también es derivable en ese punto. Sin embargo, para no caer en un círculo vicioso, necesitamos el teorema en esta forma, aparentemente más general, así que procedemos a probarlo. Usando la misma notación que en el teorema, suponemos ahora que $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ es continua en z_0 y que $a,b,c \in \Omega$ verifican que $\Delta = \Delta(a,b,c) \subset \Omega$, para probar que $I = 0$, donde I es la integral de f sobre la poligonal $\gamma = [a,b,c,a]$.

(0). No hay nada que demostrar cuando $z_0 \notin \Delta$, pues entonces $\Delta \subset \Omega \setminus \{z_0\}$ y aplicamos el teorema al abierto $\Omega \setminus \{z_0\}$ en el que sabemos que f es holomorfa.

Cuando $z_0 \in \Delta$, distinguimos tres casos, según que z_0 sea un vértice del triángulo Δ, esté en uno de sus lados, o se tenga $z_0 \in \Delta^\circ$.

(1). Cuando z_0 es un vértice de Δ, es claro que podemos suponer sin perder generalidad que $z_0 = a$. La igualdad buscada es evidente cuando $a \in [b,c]^*$, pues entonces tenemos

$$I(b,c) = I(b,a) + I(a,c), \qquad \text{luego} \qquad I = I(a,b) + I(b,a) + I(a,c) + I(c,a) = 0$$

Suponemos por tanto que $a \notin [b,c]^*$, fijamos $\varepsilon \in]0,1[$ y escribimos

$$b_\varepsilon = (1-\varepsilon)a + \varepsilon b \in [a,b]^* \qquad \text{y} \qquad c_\varepsilon = (1-\varepsilon)a + \varepsilon c \in [a,c]^*$$

Usando estos puntos intermedios para subdividir los segmentos $[a,b]$ y $[c,a]$, obtenemos

$$I = I(a,b_\varepsilon) + I(b_\varepsilon,b) + I(b,c) + I(c,c_\varepsilon) + I(c_\varepsilon,a)$$

Por otra parte es evidente que $0 = I(b_\varepsilon,c_\varepsilon) + I(c_\varepsilon,b_\varepsilon) + I(b_\varepsilon,c) + I(c,b_\varepsilon)$. Sumando miembro a miembro y agrupando debidamente, obtenemos

$$I = \int_{[a,b_\varepsilon,c_\varepsilon,a]} f(z)\,dz + \int_{[b_\varepsilon,b,c,b_\varepsilon]} f(z)\,dz + \int_{[c,c_\varepsilon,b_\varepsilon,c]} f(z)\,dz \tag{9}$$

Las dos últimas integrales se anulan, pues $z_0 \notin \Delta(b_\varepsilon,b,c)$ y $z_0 \notin \Delta(c,c_\varepsilon,b_\varepsilon)$, y usamos lo ya probado en el caso **(0)**. Ambos hechos son geométricamente evidentes y comprobamos sólo el primero, pues el segundo es análogo. Supongamos por el contrario que $a = z_0 \in \Delta(b_\varepsilon,b,c)$, es decir, existen $\alpha,\beta,\rho \in [0,1]$ con $\alpha+\beta+\rho = 1$, tales que

$$a = \alpha b_\varepsilon + \beta b + \rho c = \alpha(1-\varepsilon)a + (\alpha\varepsilon+\beta)b + \rho c$$

Como $\alpha(1-\varepsilon) \leqslant 1-\varepsilon < 1$, tenemos $0 < 1-\alpha(1-\varepsilon)$ y podemos escribir

$$a = \frac{\alpha\varepsilon+\beta}{1-\alpha(1-\varepsilon)}\,b + \frac{\rho}{1-\alpha(1-\varepsilon)}\,c = \lambda b + \mu c$$

donde $\lambda,\mu \in \mathbb{R}_0^+$ verifican que $\lambda+\mu = \dfrac{\alpha\varepsilon+\beta+\rho}{1-\alpha(1-\varepsilon)} = \dfrac{\alpha\varepsilon+1-\alpha}{1-\alpha(1-\varepsilon)} = 1$. Esto prueba que $a \in [b,c]^*$, contradiciendo la suposición que habíamos hecho.

Así pues, tenemos $I = I_\varepsilon$, donde I_ε es la primera integral que aparece en (9). La acotamos tomando $M = \max\{\,|f(z)| : z \in \Delta\,\}$ y teniendo en cuenta que $\Delta(a,b_\varepsilon,c_\varepsilon) \subset \Delta$:

$$\begin{aligned} |I| = |I_\varepsilon| &\leqslant M\big(|b_\varepsilon - a| + |c_\varepsilon - b_\varepsilon| + |a - c_\varepsilon|\big) \\ &= M\big(\varepsilon|b-a| + \varepsilon|c-b| + \varepsilon|a-c|\big) = M\,\varepsilon\, l(\gamma) \end{aligned}$$

Como $\varepsilon \in]0,1[$ era arbitrario, deducimos que $I = 0$.

(2). Supongamos ahora que z_0 está en uno de los lados del triángulo Δ, sin perder generalidad, $z_0 \in [b,c]^*$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} I &= I(a,b) + I(b,z_0) + I(z_0,c) + I(c,a) \\ &= \big[I(a,b) + I(b,z_0) + I(z_0,a)\big] + \big[I(a,z_0) + I(z_0,c) + I(c,a)\big] \\ &= \int_{[a,b,z_0,a]} f(z)\,dz + \int_{[a,z_0,c,a]} f(z)\,dz \end{aligned}$$

Por lo probado en el caso **(1)**, las dos últimas integrales se anulan, ya que z_0 es un vértice de los triángulos $\Delta(a,b,z_0)$ y $\Delta(a,z_0,c)$. Por tanto, tenemos $I = 0$ también en este caso.

(3). Suponiendo por último que $z_0 \in \Delta^\circ$, tenemos $z_0 \in [a,z]^*$ con $z \in [b,c]^*$. Razonando como en el caso anterior, pero usando z en lugar de z_0,

$$I = \int_{[a,b,z,a]} f(z)\,dz + \int_{[a,z,c,a]} f(z)\,dz$$

Puesto que $z_0 \in [a,z]^* = [z,a]^*$, ambas integrales se anulan por lo ya probado en el caso **(2)**, luego volvemos a obtener $I = 0$. ■

7.3. Teorema de Cauchy para dominios estrellados

Vamos a sacar provecho ahora de una idea muy sencilla, que surge al revisar la forma en que se demostró la caracterización de la existencia de primitiva. En un dominio Ω, se construía una primitiva de una función $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, integrando f sobre caminos que unían un punto fijo $\alpha \in \Omega$ con puntos arbitrarios $z \in \Omega$. La hipótesis sobre f se usaba primero para probar que de esta forma se tenía una función bien definida $F : \Omega \to \mathbb{C}$, y luego para comprobar que F verificaba la hipótesis del lema de construcción de primitivas. Pues bien, si la geometría del dominio lo permite, para cada $z \in \Omega$ podemos usar el segmento de origen α y extremo z, con lo que la buena definición de F está garantizada. Además, suponiendo que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se adivina que la hipótesis del lema de construcción de primitivas se podrá deducir del teorema de Cauchy para el triángulo. La condición que debe cumplir el dominio Ω ha quedado claramente de manifiesto.

Se dice que un abierto Ω del plano es un **dominio estrellado**, cuando existe $\alpha \in \Omega$ tal que $[\alpha,z]^* \subset \Omega$ para todo $z \in \Omega$, lo cual tiene un significado muy intuitivo. Entendiendo que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es el único obstáculo que interrumpe nuestra visión, la inclusión $[\alpha,z]^* \subset \Omega$ se puede interpretar diciendo que desde el punto α vemos el punto z, pues en el segmento $[\alpha,z]^*$ no hay ningún punto de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ que nos lo impida. Entonces un dominio es estrellado, cuando contiene un punto desde el cual podemos divisar todo el dominio. Es claro también que un dominio estrellado se expresa como unión de un haz de segmentos que parten de un mismo punto, lo que hace que en cierto modo tenga forma de estrella.

Es obvio que todo abierto no vacío y convexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio estrellado, pues $[\alpha,z]^* \subset \Omega$ para cualesquiera $\alpha, z \in \Omega$. Claramente, el recíproco no es cierto: $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ es un buen ejemplo de dominio estrellado que no es convexo. En efecto, tomando $\alpha = 1$, si $[1,z]^* \cap \mathbb{C} \setminus \Omega \neq \emptyset$, existirá $t \in [0,1]$ tal que $(1-t) + tz \in \mathbb{C} \setminus \Omega = \mathbb{R}_0^-$, de donde obviamente $z \in \mathbb{R}_0^-$. Por tanto $[1,z]^* \subset \Omega$ para todo $z \in \Omega$.

Teorema local de Cauchy. *Si Ω es un dominio estrellado, entonces toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admite una primitiva en Ω, es decir, existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Equivalentemente, se tiene*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y todo camino cerrado γ en Ω.

Demostración. Fijamos $\alpha \in \Omega$ tal que $[\alpha, z]^* \subset \Omega$ para todo $z \in \Omega$, y definimos:

$$F : \Omega \to \mathbb{C}, \quad F(z) = \int_{[\alpha,z]} f(w)\,dw \quad \forall z \in \Omega$$

Bastará comprobar que F verifica la hipótesis del lema de construcción de primitivas. Dado $a \in \Omega$, tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$, y fijamos también $z \in D(a,r)$. Para $w \in [a,z]^*$ tenemos $w \in D(a,r) \subset \Omega$, luego $[\alpha, w]^* \subset \Omega$. Deducimos que

$$\Delta(\alpha, a, z) = \bigcup_{w \in [a,z]^*} [\alpha, w]^* \subset \Omega$$

Aplicando entonces el teorema de Cauchy para el triángulo tenemos

$$0 = \int_{[\alpha,a,z,\alpha]} f(w)\,dw = \int_{[\alpha,a]} f(w)\,dw + \int_{[a,z]} f(w)\,dw + \int_{[z,\alpha]} f(w)\,dw$$

o lo que es lo mismo,

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw$$

Como esto es válido para todo $z \in D(a,r)$ y $a \in \Omega$ era arbitrario, podemos aplicar el lema de construcción de primitivas para concluir que F es una primitiva de f. ■

Obsérvese que en la demostración anterior, la hipótesis $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sólo se ha usado para poder aplicar a f el teorema de Cauchy para el triángulo. Si sólo sabemos que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ y f es continua en el punto z_0, podemos aplicarle igualmente dicho teorema para obtener una primitiva. Hacemos por tanto la siguiente observación:

- *Sea Ω un dominio estrellado, $z_0 \in \Omega$ y supongamos que $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ es continua en el punto z_0. Entonces*

  $$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

  para todo camino cerrado γ en Ω.

Como ya se comentó, la mayor generalidad de este enunciado es sólo aparente.

Observemos finalmente la razón por la que el teorema anterior se denomina teorema *local* de Cauchy. Como todo disco abierto es un dominio estrellado, el teorema siempre se puede aplicar *localmente*. Si Ω es cualquier abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, para cada $a \in \Omega$ podemos tomar $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$, y el teorema anterior nos dice que existe $F_a \in \mathcal{H}\big(D(a,r)\big)$ tal que $F_a'(z) = f(z)$ para todo $z \in D(a,r)$.

7.4. Fórmula de Cauchy para una circunferencia

Nos acercamos al punto culminante de la teoría local de Cauchy, fácil consecuencia del teorema anterior. Como paso previo, calculamos una integral concreta:

- *Para* $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ *y* $z \in D(a,r)$ *se tiene:* $\displaystyle\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$

Para $w \in C(a,r)^*$, usando la suma de la serie geométrica, tenemos

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1/(w-a)}{1-\big((z-a)/(w-a)\big)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \tag{10}$$

Además, la serie converge uniformemente en $C(a,r)^*$, ya que la serie geométrica converge uniformemente en cada compacto contenido en $D(0,1)$.

Alternativamente, la convergencia uniforme se puede deducir del test de Weierstrass, ya que

$$\left| \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n \qquad \forall w \in C(a,r)^*, \ \ \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

y la serie geométrica de razón $|z-a|/r < 1$ es convergente.

Aplicando la continuidad de la integral curvilínea, de (10) deducimos que

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{C(a,r)} \frac{dw}{(w-a)^{n+1}}\right)(z-a)^n \tag{11}$$

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $w \mapsto (w-a)^{-(n+1)}$ admite en el abierto $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ la primitiva $w \mapsto (-1/n)(w-a)^{-n}$, luego su integral sobre el camino cerrado $C(a,r)$ se anula:

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{(w-a)^{n+1}} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En vista de (11), concluimos que: $\displaystyle\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = \int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-a} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i\,r\,e^{it}\,dt}{r\,e^{it}} = 2\pi i.$ ■

Fórmula de Cauchy. *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{C}$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Dado* $a \in \Omega$, *sea* $r \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. *Se tiene entonces:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad \forall z \in D(a,r) \tag{12}$$

Demostración. Empezaremos viendo que existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset D(a,R) \subset \Omega$. Esto es obvio si $\Omega = \mathbb{C}$, y en otro caso veremos que basta tomar

$$R = d(a, \mathbb{C}\setminus\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\big\{\, |w-a| : w \in \mathbb{C}\setminus\Omega \,\big\}$$

Para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se tiene $|w-a| \geqslant R$, luego $D(a,R) \subset \Omega$, y bastará ver que $r < R$. Ello se debe a que, por ser $\mathbb{C} \setminus \Omega$ cerrado, el ínfimo que define a R es un mínimo. En efecto, consideramos por ejemplo el conjunto $K = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cap \overline{D}(a,R+1)$ que es compacto y no vacío, luego la función continua $w \mapsto |w-a|$ tendrá un mínimo en K, es decir, existe $w_0 \in K$ tal que $|w_0 - a| \leqslant |w-a|$ para todo $w \in K$, pero entonces es claro que $|w_0 - a| \leqslant |w-a|$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, pues si $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ y $w \notin K$, se tiene $|w-a| > R+1 \geqslant |w_0 - a|$. Tenemos por tanto $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tal que $|w_0 - a| = R$, lo que implica que $R > r$, pues en otro caso se tendría $w_0 \in \overline{D}(a,r) \subset \Omega$, una contradicción.

Fijado $z \in D(a,r)$, el paso clave de la demostración consistirá en aplicar el teorema local de Cauchy en el dominio estrellado $D(a,R)$, a la función $g : D(a,R) \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \forall w \in D(a,R) \setminus \{z\} \quad \text{y} \quad g(z) = f'(z)$$

Es claro que $g \in \mathcal{H}\big(D(a,R) \setminus \{z\}\big)$ y g es continua en el punto z, luego la integral de g sobre $C(a,r)$, que es un camino cerrado en $D(a,R)$, se anula. Tenemos por tanto,

$$0 = \int_{C(a,r)} g(w)\,dw = \int_{C(a,r)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\,dw = \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z) \int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z}$$

y usando el lema anterior deducimos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Esto concluye la demostración, ya que $z \in D(a,r)$ era arbitrario. ■

Obsérvese la generalidad del resultado anterior: se aplica a cualquier función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ donde Ω es un abierto arbitrario. Tiene carácter local, puesto que describe la función f en un entorno de cada punto $a \in \Omega$, el disco abierto $D(a,r)$, sin más condición que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. En dicho entorno obtenemos f como una integral dependiente de un parámetro.

Destacamos tres ideas básicas que hacen útil la fórmula de Cauchy. En primer lugar, puede obviamente servir para calcular integrales. Por poner un ejemplo sencillo, tenemos

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z}\,dz = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i$$

En segundo lugar, y mucho más importante, para conocer el segundo miembro de la igualdad (2) basta conocer la función f en la circunferencia $C(a,r)^*$, y entonces la fórmula nos permite conocer f en todo el disco abierto $D(a,r)$. Dicho de forma más llamativa, si dos funciones holomorfas en un abierto que contenga al disco cerrado $\overline{D}(a,r)$, coinciden en $C(a,r)^*$, han de coincidir en $D(a,r)$. Más adelante sacaremos mucho partido de esta clara consecuencia de la fórmula de Cauchy. Para resaltar su importancia, basta pensar lo que sería un resultado análogo en variable real: para una función f derivable en un abierto de $\mathbb{R}$ que contenga al intervalo $[a-r, a+r]$, conociendo $f(a-r)$ y $f(a+r)$, podríamos calcular $f(x)$ para todo $x \in]a-r, a+r[$, afirmación que sólo es cierta cuando f es un polinomio de primer orden.

La tercera idea clave que encierra la fórmula de Cauchy se explicará en el próximo tema, porque es la que permitirá probar la equivalencia entre analiticidad y holomorfía.

7.5. Ejercicios

1. Sean $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Probar que para $z \in \mathbb{C}$ con $|z-a| > r$ se tiene
$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$$

2. Probar la siguiente versión, más general, de la fórmula de Cauchy:
Sean $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ y $f : \overline{D}(a,R) \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}(a,R)$ y holomorfa en $D(a,R)$. Se tiene entonces:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \forall z \in D(a,R)$$

3. Dados $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ y $b, c \in \mathbb{C} \setminus C(a,r)^*$, calcular todos los posibles valores de la integral
$$\int_{C(a,r)} \frac{dz}{(z-b)(z-c)}$$
dependiendo de la posición relativa de b, c respecto de la circunferencia $C(a,r)^*$.

4. Calcular las siguientes integrales:
   (a) $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\, dz \qquad (r \in \mathbb{R}^+,\ r \neq 2)$
   (b) $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\cos z\ dz}{(a^2+1)z - a(z^2+1)} \qquad (a \in \mathbb{C},\ |a| \neq 1)$

5. Dados $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$, sea $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $R > \max\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene:
$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)(z-b)} = 2\pi i\, \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
Deducir que toda función entera y acotada es constante.

Tema 8

Equivalencia entre analiticidad y holomorfía

Estamos ya en condiciones de probar algo que hemos anunciado varias veces: toda función holomorfa en un abierto del plano es de hecho analítica, es decir, admite un desarrollo en serie de potencias centrado en cada punto de dicho abierto. La demostración es una consecuencia fácil de la fórmula de Cauchy y, por la forma concreta en que se obtiene el desarrollo en serie de una función holomorfa, o *desarrollo en serie de Taylor*, el resultado tiene utilidad incluso cuando se aplica a una función para la que ya sabemos que es analítica. En particular, veremos que toda función entera es la suma de una serie de potencias con radio de convergencia infinito, y análogamente, toda función holomorfa en un disco abierto es la suma de una serie de potencias que converge en dicho disco.

Probamos también la llamada *fórmula de Cauchy para las derivadas,* una representación integral para las sucesivas derivadas de una función holomorfa. Finalmente aclaramos una cuestión que tenemos pendiente, probando que una función holomorfa en un abierto, salvo en un punto donde sólo sabemos que es continua, es también derivable en ese punto. De hecho probamos un resultado más fuerte que se conoce como *teorema de extensión de Riemann.*

8.1. Desarrollo en serie de Taylor

Dado un abierto Ω del plano y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, fijemos $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. La fórmula de Cauchy nos dice entonces que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Pensemos en el integrando del segundo miembro como una función definida en $D(a,r)$, es decir, la función $z \mapsto f(w)/(w-z)$ con $w \in C(a,r)^*$ fijo. Se trata de una función racional que podemos desarrollar fácilmente en serie de potencias, luego si conseguimos permutar la integral con la suma de la serie, tendremos la función f expresada como suma de una serie de potencias. Este desarrollo será válido en un entorno de cada punto del abierto Ω en el que f es holomorfa y habremos probado que f es analítica en Ω. Esto explica por adelantado la forma de obtener el siguiente resultado fundamental.

Teorema ***(Desarrollo en serie de Taylor)***. *Si* Ω *es un abierto no vacío de* $\mathbb{C}$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, *entonces* f *es analítica en* Ω *y, en particular,* f *es indefinidamente derivable en* Ω. *Además:*

(i) *Si* $\Omega = \mathbb{C}$, *para todo* $a \in \mathbb{C}$, *la serie* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ *tiene radio de convergencia infinito y se verifica que:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

(ii) *Si* $\Omega \neq \mathbb{C}$ *y para cada* $a \in \Omega$ *tomamos* $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, *la serie* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n$ *tiene radio de convergencia mayor o igual que* R_a *y se verifica que:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, R_a) \tag{2}$$

Demostración. Fijamos $a \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}^+$ con $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ y $z \in D(a,r)$. Usando, como ya hemos hecho anteriormente, la serie geométrica, tenemos

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,(z-a)^n \qquad \forall w \in C(a,r)^* \tag{3}$$

y la serie converge uniformemente en $C(a,r)^*$, pues tomando $M = \max\{|f(w)| : w \in C(a,r)^*\}$, aplicamos el test de Weierstrass:

$$\left| \frac{f(w)\,(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{M}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n \qquad \forall w \in C(a,r)^*, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Usando ahora la fórmula de Cauchy y la continuidad de la integral curvilínea, obtenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^n \tag{4}$$

Resaltamos que las integrales del segundo miembro no dependen del punto $z \in D(a,r)$ fijado, escribiendo

$$\alpha_n(a,r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Entonces, como $z \in D(a,r)$ era arbitrario, hemos probado que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(a,r)\,(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a,r) \tag{5}$$

Así pues, en $D(a,r)$, la función f coincide con la suma de una serie de potencias, cuyo radio de convergencia será mayor o igual que r, pues sabemos que la serie converge en $D(a,r)$. Como $a \in \Omega$ también era arbitrario, hemos probado que f es analítica en Ω.

Para probar las afirmaciones (i) y (ii) basta aprovechar la libertad en la elección de r. Aparentemente, los coeficientes de la serie de potencias obtenida en (4) o (5) dependen de r, pero enseguida nos damos cuenta de que esto no es así. En efecto, el teorema de holomorfía de la suma de una serie de potencias nos permite deducir que

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \alpha_n(a,r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw \qquad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \tag{6}$$

Esto deja claro que los coeficientes no dependen de r, siempre que se tenga $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Concretamente tenemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a,r) \tag{7}$$

La serie de potencias que aparece en el segundo miembro es la **serie de Taylor** de f centrada en a, luego tenemos un **desarrollo en serie de Taylor** de f centrado en a, que de momento es válido en $D(a,r)$, siempre que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Para saber hasta donde llega a ser válido este desarrollo, todo lo que queda es elegir r tan grande como el abierto Ω nos lo permita.

(i). En el caso $\Omega = \mathbb{C}$, cualquiera que sea $a \in \mathbb{C}$, la serie de Taylor de f centrada en a converge en $D(a,r)$ *para todo* $r \in \mathbb{R}^+$, luego tiene radio de convergencia infinito. Además, para todo $z \in \mathbb{C}$ podemos aplicar (7) con $r > |z-a|$ para obtener (1). Así pues, el desarrollo en serie de Taylor de f, centrado en cualquier punto $a \in \mathbb{C}$, es válido en todo $\mathbb{C}$.

(ii). Para $a \in \Omega$ y $R_a = d(a, \mathbb{C}\setminus\Omega)$, la serie de Taylor de f centrada en a converge en $D(a,r)$ *para todo* $r \in]0, R_a[$, luego tiene radio de convergencia mayor o igual que R_a. Además, para todo $z \in D(a,R_a)$ podemos aplicar (7) tomando r de forma que $|z-a| < r < R_a$ y obtenemos (2). Esta vez el desarrollo de Taylor es válido en $D(a,R_a)$, que es el máximo disco abierto de centro a contenido en Ω. ■

Ni que decir tiene, lo más útil del teorema anterior es la equivalencia entre analiticidad y holomorfía. Para muchas aplicaciones de la teoría local de Cauchy, esto será más que suficiente, pero hay en el teorema más información que conviene resaltar, porque es útil aunque sepamos de entrada que nuestra función es analítica.

Empezando por el caso $\Omega = \mathbb{C}$, el teorema anterior nos dice que, por el procedimiento que ya conocíamos, sumar series de potencias con radio de convergencia infinito, obtenemos todas las funciones enteras. Para entender mejor esta idea, consideremos el conjunto

$$\Lambda = \left\{ \alpha : \mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{C} \;:\; \lim_{n\to\infty} |\alpha(n)|^{1/n} = 0 \right\}$$

La fórmula de Cauchy-Hadamard no dice que, para cada $\alpha \in \Lambda$, la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} \alpha(n)\,z^n$ tiene radio de convergencia infinito, luego su suma es una función entera

$$f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n)\,z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{8}$$

Además, por el principio de identidad para series de potencias, sabíamos que si $\alpha, \beta \in \Lambda$ verifican que $f_\alpha = f_\beta$, entonces $\alpha = \beta$. Hasta aquí el método constructivo ya conocido, que nos da tantas funciones enteras como elementos tiene el conjunto Λ.

Ahora sabemos que ese método nos da *todas* las funciones enteras, pues si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, el teorema anterior nos dice que tomando $\alpha(n) = f^{(n)}(0)/n!$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos $\alpha \in \Lambda$ tal que $f = f_\alpha$. Así pues, la aplicación $\alpha \mapsto f_\alpha$, de Λ en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es biyectiva, o por así decirlo, Λ "parametriza" al conjunto de todas las funciones enteras: $\mathcal{H}(\mathbb{C}) = \{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

Todavía en el caso $\Omega = \mathbb{C}$, tenemos aún más información. Sabíamos que la función f_α definida por (8) era una función entera, pero no que f_α fuese analítica en $\mathbb{C}$. Esto habría exigido que, para cada $a \in \mathbb{C}$ hubiésemos expresado f_α, al menos en un disco abierto $D(a, \rho_a)$ con $\rho_a > 0$, como suma de una serie de potencias centrada en a y convergente en dicho disco, cosa que en general no es del todo fácil. Por ejemplo, la función exponencial se definió usando (8) con $\alpha(n) = 1/n!$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pero para probar que la exponencial es una función analítica en $\mathbb{C}$, usamos la fórmula de adición, una propiedad muy específica de la función exponencial. Ahora sabemos que la función f_α siempre es analítica en $\mathbb{C}$, y todavía algo más que conviene resaltar.

Supongamos que ya sabemos que una función f es analítica en $\mathbb{C}$. Entonces, para cada $a \in \mathbb{C}$, sabemos que existe $\rho_a > 0$ tal que la serie de Taylor de f centrada en a tiene radio de convergencia mayor o igual que ρ_a y su suma coincide con f en $D(a, \rho_a)$. Pero el teorema anterior nos dice más: dicha serie de Taylor siempre tiene radio de convergencia infinito y su suma coincide con f en todo el plano. Queda claro que tenemos nueva información sobre las funciones analíticas en $\mathbb{C}$.

Todo lo dicho en el caso $\Omega = \mathbb{C}$ puede repetirse, casi literalmente, para un disco abierto $\Omega = D(a, R)$, con $a \in \mathbb{C}$ y $R \in \mathbb{R}^+$. Lógicamente, ahora usamos el conjunto

$$\Lambda_R = \left\{ \alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C} \;:\; \{|\alpha(n)|^{1/n}\} \text{ mayorada con } \limsup_{n\to\infty} |\alpha(n)|^{1/n} \leqslant 1/R \right\}$$

Para cada $\alpha \in \Lambda_R$, la serie $\sum\limits_{n \geqslant 0} \alpha(n)(z-a)^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que R y podemos definir

$$f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n)(z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega \tag{9}$$

para obtener $f_\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$. Otra vez, la aplicación $\alpha \mapsto f_\alpha$ es una biyección de Λ_R sobre $\mathcal{H}(\Omega)$. Lo nuevo es la sobreyectividad de esta aplicación, que se deduce del teorema anterior teniendo en cuenta que $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega) = R$. Tampoco sabíamos hasta ahora que la función f_α definida por (9) es analítica en Ω. Finalmente, si f es una función analítica en Ω, ahora sabemos que, para cada $b \in D(a,R)$, el desarrollo de Taylor de f centrado en el punto b es válido, no sólo en un disco abierto de centro b y contenido en Ω, sino en el más grande posible: $D(b, R_b)$ donde $R_b = d(b, \mathbb{C} \setminus \Omega) = R - |b-a|$.

Para un abierto Ω arbitrario, no tenemos una "parametrización" tan explícita de $\mathcal{H}(\Omega)$, pero las otras dos observaciones que hemos hecho para el plano y para un disco abierto siguen siendo ciertas. Destacamos la última: si f es una función analítica en Ω y $a \in \Omega$, el desarrollo de Taylor de f centrado en a es válido en el disco abierto más grande posible: $D(a, R_a)$ donde $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.

8.2. Fórmula de Cauchy para las derivadas

La demostración del desarrollo en serie de Taylor incluye una información que aún no hemos comentado, porque no aparece en el enunciado del teorema. Se trata de la forma concreta en la que aparecieron por primera vez los coeficientes de la serie de Taylor. Para un abierto Ω arbitrario y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, fijados $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, en la igualdad (6) teníamos

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{10}$$

Comparemos este resultado con la fórmula de Cauchy que, con las mismas hipótesis, nos da

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \forall z \in D(a,r) \tag{11}$$

Está claro que, si en (11) tomamos $z = a$, obtenemos (10) para $n = 0$. Para $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $f^{(n)} \in \mathcal{H}(\Omega)$, luego podemos por supuesto aplicarle la fórmula de Cauchy, obteniendo

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f^{(n)}(w)}{w-z}\, dw \qquad \forall z \in D(a,r) \tag{12}$$

Podríamos decir que aquí no hay nada nuevo, simplemente ahora podemos aplicar a $f^{(n)}$ la fórmula de Cauchy, como a cualquier otra función holomorfa en Ω. Si en (12) tomamos $z = a$, obtenemos $f^{(n)}(a)$ como una integral que no es la que tenemos en (10), pues en el integrando aparece $f^{(n)}$ y no f, aparte de que los denominadores tampoco coinciden. El interés de (10) estriba en que obtenemos $f^{(n)}(a)$ directamente a partir de la función f, sin calcular ninguna derivada, por así decirlo. Sin embargo, las igualdades (10) tienen un claro inconveniente: para cada $n \in \mathbb{N}$, sólo nos dan el valor de $f^{(n)}$ en el punto a, y no en todo punto $z \in D(a,r)$ como ocurre en (11) y (12). Pues bien, vamos a probar que las igualdades (10) siguen siendo válidas al sustituir a por un $z \in D(a,r)$ arbitrario, obteniendo un resultado general que, para $z = a$ es (10), y para $n = 0$ es (11). Esto es lo que se conoce como fórmula de Cauchy para las derivadas, y no (12) como en principio podría pensarse.

Fórmula de Cauchy para las derivadas. *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dado $a \in \Omega$, sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Se tiene entonces:*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw \qquad \forall z \in D(a,r),\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Demostración. Fijamos, para todo el razonamiento, $k \in \mathbb{N}$, pues el caso $k = 0$ es conocido. Debemos analizar la demostración del desarrollo de Taylor, con un punto de vista diferente. Para $z \in D(a,r)$ y $w \in C(a,r)^*$, usando la serie geométrica teníamos la igualdad (3):

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n$$

Ahora leemos esta igualdad de forma diferente: fijado $w \in C(a,r)^*$, tenemos la función racional $z \mapsto f(w)/(w-z)$, expresada en el disco $D(a,r)$ como suma de una serie de potencias. Ello nos permite calcular la k-ésima derivada de dicha función, derivando término a término la serie de potencias en cuestión, obteniendo que, para todo $z \in D(a,r)$ se tiene:

$$\frac{k!\, f(w)}{(w-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^{n-k} \tag{13}$$

Pero esto es cierto para todo $w \in C(a,r)^*$, lo que permitirá cambiar otra vez el punto de vista.

Fijado $z \in D(a,r)$, la igualdad anterior nos da la función $w \mapsto f(w)/(w-z)^{k+1}$ como suma de una serie de funciones continuas en $C(a,r)^*$. Veamos que la serie converge uniformemente en $C(a,r)^*$, usando el test de Weierstrass. Escribiendo $M = \max\{|f(w)| : w \in C(a,r)^*\}$, para todo $w \in C(a,r)^*$ y todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant k$, tenemos

$$\left| \frac{n!}{(n-k)!} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^{n-k} \right| \leqslant \frac{M}{r|z-a|^k} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n = M_n$$

donde M_n viene definido por la última igualdad. Bastará pues comprobar que la serie $\sum_{n \geqslant k} M_n$ es convergente, pero esto se deduce fácilmente del criterio del cociente, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|z-a|}{(n+1-k)\,r} = \frac{|z-a|}{r} < 1$$

Así pues, usando la continuidad de la integral curvilínea, deducimos de (13) que

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^{n-k} \tag{14}$$

y esta igualdad es válida para todo $z \in D(a,r)$.

Por otra parte recordamos el desarrollo en serie de Taylor de f tal y como se obtuvo por primera vez en (4),

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^n \qquad \forall z \in D(a,r)$$

y lo usamos para calcular la k-ésima derivada de f, obteniendo

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^{n-k} \qquad \forall z \in D(a,r) \tag{15}$$

En vista de (14) y (15), la demostración está concluida. ■

Destacamos el interés del teorema anterior, que incluye la fórmula de Cauchy (caso $k=0$), aunque se ha deducido de ella. Conociendo la función f en la circunferencia $C(a,r)^*$ nos permite obtener todos los valores en el disco abierto $D(a,r)$, no sólo de la función f, sino de todas sus derivadas.

Tenemos también una nueva fórmula, útil para calcular integrales. Un ejemplo sencillo:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z^5}\, dz = \frac{2\pi i}{4!} \cos^{(4)}(0) = \frac{\pi i}{12}$$

8.3. Teorema de extensión de Riemann

Aclaramos ahora el problema que nos dio cierto trabajo en los teoremas de Cauchy para el triángulo y para dominios estrellados. Como se puso de manifiesto en la demostración de la fórmula de Cauchy, necesitábamos versiones más generales de ambos teoremas, pero podemos ya probar que esa mayor generalidad sólo es aparente, como habíamos anunciado.

Para mayor claridad, dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y un punto $z_0 \in \Omega$, tomamos una función $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, que no suponemos siquiera definida en el punto z_0, y nos preguntamos por el comportamiento de f en dicho punto. Lo mejor que puede ocurrir es obviamente que podamos darle un valor en z_0 para obtener una función holomorfa en Ω. Es claro que para ello es necesario que f tenga límite en z_0, lo que implica que f debe estar acotada en un entorno reducido de z_0, es decir, han de existir $\delta, M > 0$ tales que $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in \Omega$ que verifique $0 < |z - z_0| < \delta$. Por último, este tipo de acotación implica claramente que $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$, por tratarse del producto de una función que tiende a 0 por otra que se mantiene acotada al acercarnos a z_0. Pues bien, vamos a probar que esta última condición, aparentemente la más débil, implica la primera, aparentemente la más fuerte.

Merece la pena considerar una situación análoga para funciones reales de variable real. Por ejemplo, para una función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}^*$, las anteriores propiedades de f en el origen tienen sentido y las tres implicaciones comentadas son ciertas, pero ninguna de ellas es reversible. Tomando $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, tenemos una función derivable en $\mathbb{R}^*$ con $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, pero ninguna extensión de f es derivable en $\mathbb{R}$. La función signo es derivable y acotada en $\mathbb{R}^*$, pero no tiene límite en el origen. Por último, tomando $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ tenemos una función derivable en $\mathbb{R}^*$, con $\lim\limits_{x \to 0} x f(x) = 0$, pero f no está acotada en ningún entorno reducido del origen. Esta comparación pone de manifiesto el interés del siguiente resultado:

Teorema de extensión de Riemann. *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.*
(ii) *f tiene límite en el punto z_0.*
(iii) *Existen $\delta, M > 0$ tales que $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in \Omega$ que verifique $0 < |z - z_0| < \delta$.*
(iv) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

Demostración. Por lo ya comentado, basta probar que $(iv) \Rightarrow (i)$. Definimos una función $F : \Omega \to \mathbb{C}$ de la siguiente forma:

$$F(z) = (z - z_0)^2 f(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\} \qquad \text{y} \qquad F(z_0) = 0$$

Claramente $F \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, pero usando (iv) también tenemos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

luego $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $F'(z_0) = 0 = F(z_0)$.

Por tanto, fijado $r \in \mathbb{R}^+$ con $D(z_0, r) \subset \Omega$, el desarrollo en serie de Taylor de F centrado en el punto z_0 nos dice que, para todo $z \in D(z_0, r)$ se tiene:

$$F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-2}$$

En vista de la definición de F, para todo $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ deducimos que

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!}(z - z_0)^n$$

y está ya muy claro el valor que debemos dar a f en el punto z_0 para obtener la extensión holomorfa en Ω que buscamos. Concretamente, definimos $g : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\} \qquad \text{y} \qquad g(z_0) = \frac{F''(z_0)}{2}$$

De esta forma tenemos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!}(z - z_0)^n \qquad \forall z \in D(z_0, r)$$

así que g coincide en $D(z_0, r)$ con la suma de una serie de potencias, luego es derivable en z_0. Como también es claramente holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$ concluimos que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, como queríamos demostrar. ■

En el caso de que la función f esté ya definida y sea continua en el punto z_0, deducimos claramente lo que venimos anunciando:

- *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Si f es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$ y continua en z_0, entonces f es holomorfa en Ω.*

Olvidando por un momento el valor de f en z_0, como su restricción a $\Omega \setminus \{z_0\}$ tiene límite en z_0, el teorema anterior nos da una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ que coincide con f en $\Omega \setminus \{z_0\}$ pero, como f y g son continuas en z_0 tenemos

$$g(z_0) = \lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

luego $f = g \in \mathcal{H}(\Omega)$, como queríamos. ■

8.4. Ejercicios

1. Sea γ un camino y $\varphi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Se define $f : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w - z}\, dw \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

   Probar que f es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ y que

$$f^{(k)}(z) = k! \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{k+1}}\, dw \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

2. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ se define:

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Probar que

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n \qquad \forall z \in D(0,1)$$

3. Obtener el desarrollo en serie de Taylor de la función f, centrado en el origen, en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $f(z) = \log(z^2 - 3z + 2) \quad \forall z \in D(0,1)$
   (b) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$
   (c) $f(z) = \operatorname{arc\,sen} z \quad \forall z \in D(0,1)$
   (d) $f(z) = \cos^2 z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

4. Dado $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{N}$, probar que existe una única función $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$, verificando que

$$z f'(z) - \alpha f(z) = \frac{1}{1+z} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

5. Probar que existe una única función $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$, verificando que $f(0) = 0$ y

$$\exp\big(-z f'(z)\big) = 1 - z \qquad \forall z \in D(0,1)$$

6. Para $z \in \mathbb{C}$ con $1 - z - z^2 \neq 0$ se define $f(z) = (1 - z - z^2)^{-1}$. Sea $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n z^n$ la serie de Taylor de f centrada en el origen. Probar que $\{\alpha_n\}$ es la *sucesión de Fibonacci:*

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \alpha_{n+2} = \alpha_n + \alpha_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

   Calcular en forma explícita dicha sucesión.

7. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando que $f^{(n)}(0) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\Omega = \mathbb{C}$, $a_n = n$ (b) $\Omega = \mathbb{C}$, $a_n = (n+1)!$
   (c) $\Omega = D(0,1)$, $a_n = 2^n n!$ (d) $\Omega = D(0,1/2)$, $a_n = n^n$

8. Dados $r \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$, y $a, b \in \mathbb{C}$ con $|b| < r < |a|$, calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)^k}$$

9. Calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z\,dz}{z^2(z-1)}$, para $\gamma = C(1/4,1/2)$, $\gamma = C(1,1/2)$ y $\gamma = C(0,2)$.

10. Dado $n \in \mathbb{N}$, calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n}\,dz \qquad \text{(b)} \int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\,dz \qquad \text{(c)} \int_{C(0,1/2)} \frac{\log(1+z)}{z^n}\,dz$$

11. Probar la siguiente *fórmula de cambio de variable* para la integral curvilínea:

    Si Ω *es un abierto del plano,* γ *un camino en* Ω *y* $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$*, entonces* $\varphi \circ \gamma$ *es un camino y, para cualquier función* f *que sea continua en* $(\varphi \circ \gamma)^*$ *se tiene:*

$$\int_{\varphi\circ\gamma} f(z)\,dz = \int_\gamma f\big(\varphi(w)\big)\,\varphi'(w)\,dw$$

12. Usar el resultado del ejercicio anterior para calcular las siguientes integrales:

$$\text{(a)} \int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2\,(z-1)^2} \qquad \text{(b)} \int_{C(0,2)} \frac{dz}{(z-1)^2\,(z+1)^2\,(z-3)}$$

Tema 9

Ceros de las funciones holomorfas

A partir de ahora vamos a ir obteniendo una serie de aplicaciones importantes de la teoría local desarrollada anteriormente. El desarrollo en serie de Taylor deja claro que la sucesión de las derivadas en un punto de una función holomorfa no puede ser arbitraria, puesto que la serie de Taylor tiene radio de convergencia no nulo. Esta idea se puede concretar de diversas formas, entre las que elegimos la más elemental, probando las llamadas *desigualdades de Cauchy*. De ellas se deduce el *teorema de Liouville*, que es el resultado básico para el estudio de las funciones enteras, y permite probar muy fácilmente el *teorema fundamental del Álgebra*, afirmando que el cuerpo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado. La demostración que así se obtiene es esencialmente la original, debida al genio matemático de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que la publicó como parte de su tesis doctoral en 1799.

A continuación hacemos un estudio de los *ceros de una función holomorfa*, viendo que se comportan en algunos aspectos como los ceros de un polinomio. Concretamente, se puede definir de forma coherente el *orden* de un cero y ello permite factorizar nuestra función de manera análoga a como se factoriza un polinomio usando uno de sus ceros. A partir de este estudio de los ceros, probamos el *principio de identidad* para funciones holomorfas, mejorando muy mucho el que conocemos para las sumas de series de potencias.

9.1. Desigualdades de Cauchy

Si f es una función holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y fijamos $a \in \Omega$, es natural preguntarse cómo es la sucesión $\{f^{(n)}(a)\}$ de las derivadas de f en el punto a, o lo que viene a ser lo mismo, tomando $\alpha_n = f^{(n)}(a)/n!$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, cómo es la sucesión $\{\alpha_n\}$ de los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de f centrado en a. Tomando $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $D(a,r) \subset \Omega$, sabemos que dicha serie tiene radio de convergencia mayor o igual que r y, usando la fórmula de Cauchy-Hadamard, podemos ver cómo se refleja esta observación en la sucesión $\{\alpha_n\}$, pero sólo tendremos una información de tipo asintótico, referente a lo que ocurre para valores grandes de n. Sin embargo, si disponemos de una acotación de f en una circunferencia de centro a, la fórmula de Cauchy para las derivadas nos nos va a permitir obtener fácilmente información válida *para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Desigualdades de Cauchy. *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $a \in \Omega$. *Dado* $r \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, *sea* $M(f,a,r) = \max\left\{ |f(z)| : z \in C(a,r)^* \right\}$. *Se tiene entonces:*

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leqslant \frac{M(f,a,r)}{r^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{1}$$

Demostración. Nótese que las hipótesis son exactamente las mismas de la fórmula de Cauchy para las derivadas. Usándola en el caso más sencillo, fijado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$$

y bastará acotar la integral del segundo miembro. Puesto que f, a y r están fijos, abreviamos la notación escribiendo $M = M(f,a,r)$. Para $w \in C(a,r)^*$ tenemos $|f(w)| \leqslant M$, luego el integrando está acotado por M/r^{n+1}, mientras la longitud del camino es $2\pi r$. Por tanto,

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leqslant \frac{1}{2\pi}\, 2\pi r \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n}$$

y esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, como queríamos demostrar. ■

En general, para sacar partido a las desigualdades anteriores, fijados f y a, podemos aprovechar la libertad para elegir r, que cuando $\Omega \neq \mathbb{C}$, sólo debe cumplir $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, es decir, $0 < r < d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Tratamos entonces de minimizar la función de r que aparece en el segundo miembro de (1), pero ello exige conocer bien la función $r \mapsto M(f,a,r)$, que es tanto como conocer bien la función $|f|$. La situación es muy sencilla en el caso de una función entera, como vamos a ver enseguida.

9.2. Teorema de Liouville

Cuando trabajamos con una función entera, podemos aplicar las desigualdades de Cauchy tomando por ejemplo $a = 0$ y $r \in \mathbb{R}^+$ arbitrario. Además, si nuestra función entera está acotada, podemos sustituir $M(f,a,r)$ por una constante y el resultado se ve venir:

Teorema de Liouville. *Toda función entera y acotada es constante. De hecho, la imagen de cualquier función entera no constante es un conjunto denso en* $\mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ está acotada, y sea $M = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}$. Para todo $r \in \mathbb{R}^+$ tenemos obviamente $\overline{D}(0,r) \subset \mathbb{C}$ y $M(f,0,r) \leqslant M$, luego las desigualdades de Cauchy nos dicen que

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!\, M}{r^n} \qquad \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{n!M}{r^n} = 0$, luego $f^{(n)}(0) = 0$. Ahora, como el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen es válido en todo $\mathbb{C}$, deducimos que f es constante:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

La segunda afirmación del teorema se deducirá fácilmente de la primera. Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y que $f(\mathbb{C})$ no es denso en $\mathbb{C}$, para probar que f es constante.

Tomando $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$, existirá $\delta > 0$ tal que $D(w,\delta) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$, es decir, $|f(z) - w| \geqslant \delta$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, definiendo

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

obtenemos una función $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ que está acotada, pues $|g(z)| \leqslant 1/\delta$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por la primera parte de la demostración, g es constante, luego lo mismo le ocurre a f. ■

9.3. Teorema fundamental del Álgebra

Este importante resultado, una piedra angular de la Matemática, se deduce fácilmente del teorema de Liouville. Preparamos la demostración observando que todo polinomio no constante P, con coeficientes complejos, diverge en el infinito: $P(z) \to \infty \ \ (z \to \infty)$. En efecto, si $n \in \mathbb{N}$ es el grado de P y $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, con $\alpha_n \neq 0$, sus coeficientes, para todo $z \in \mathbb{C}^*$ se tiene

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k = z^n \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^{k-n}$$

luego basta usar que $z^n \to \infty \ \ (z \to \infty)$ y $\lim\limits_{z\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^{k-n} = a_n \in \mathbb{C}^*$.

Teorema fundamental del Álgebra. *El cuerpo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, es decir, si P es un polinomio con coeficientes complejos, no constante, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, para llegar a una contradicción. Basta para ello definir $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, obteniendo una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Por la observación hecha antes del enunciado, tenemos $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ y esto implica claramente que f está acotada. Así pues, f es una función entera y acotada pero no es constante, lo que contradice el teorema de Liouville. ■

9.4. Principio de identidad

Con el fin de hacer un estudio detallado de los ceros de funciones holomorfas, recordemos las cuestiones básicas referentes a los ceros de un polinomio. Por una parte, si P es una función polinómica no constante, el conjunto de sus ceros, $Z(P) = \{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\}$, es finito. Por otra, cada cero $a \in Z(P)$ tiene un orden, es decir, existe un único $m \in \mathbb{N}$ que nos permite escribir $P(z) = (z-a)^m Q(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, donde Q es un polinomio que verifica $Q(a) \neq 0$. Equivalentemente, se tiene $P^{(k)}(a) = 0$ para $k \in \mathbb{Z}$ con $0 \leqslant k < m$, y $P^{(m)}(a) = 0$.

Para una función holomorfa y no constante en un dominio arbitrario, no podemos esperar que el conjunto de sus ceros tenga que ser finito, basta pensar por ejemplo en el seno y el coseno, que son funciones enteras con infinitos ceros. Sin embargo, vamos a poder definir el orden de un cero de una función holomorfa, generalizando al pie de la letra lo que ocurre para polinomios. Como consecuencia, obtendremos que el conjunto de los ceros, aunque puede ser infinito, no puede ser demasiado grande. Resumimos toda la información en el siguiente enunciado.

Teorema (Ceros de una función holomorfa). *Sea Ω un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que f no es idénticamente nula y sea $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ el conjunto de sus ceros.*

(a) Orden de un cero. *Para cada $a \in Z(f)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Se dice que el número natural $m = \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}$ es el* ***orden*** *del cero de f en el punto a.*

(b) Caracterización del orden. *La función f tiene un cero de orden $m \in \mathbb{N}$ en el punto $a \in \Omega$ si, y sólo si, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^m g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

(c) Principio de los ceros aislados. *Para cada $a \in Z(f)$ existe un $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$. Por tanto, $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en Ω, es decir: $Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$.*

Demostración. La idea clave es pensar que el desarrollo en serie de Taylor permite en gran medida trabajar localmente con la función f como si fuese un polinomio.

(a). Se trata obviamente de probar que $A = \emptyset$, donde

$$A = \left\{ a \in \Omega : f^{(n)}(a) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} Z\big(f^{(n)}\big)$$

Para ello, empezamos observando que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $Z\big(f^{(n)}\big)$ es un subconjunto cerrado de Ω, por ser $f^{(n)}$ continua. Deducimos que A también es un cerrado relativo a Ω, como intersección de cerrados.

Por otra parte, comprobamos que A es abierto. Dado $a \in A$, tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y usamos el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en a, obteniendo que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = 0 \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Deducimos claramente que $f^{(n)}(z) = 0$ para todo $z \in D(a,r)$ y para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, luego $D(a,r) \subset A$ y esto prueba que A es abierto. Como hemos supuesto que f no es idénticamente nula, tenemos $A \neq \Omega$, luego al ser Ω conexo no queda más salida que $A = \emptyset$.

Usando la buena ordenación de los naturales, podemos pues definir el orden m de cada cero $a \in Z(f)$ como el orden de la primera derivada de f que no se anule en el punto a, así que m queda determinado por: $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$ y $f^{(m)}(a) \neq 0$.

(b). Supongamos que f tiene un cero de orden $m \in \mathbb{N}$ en un punto $a \in \Omega$. Fijado $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$, el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en a tendrá la forma

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(a)}{(m+n)!}(z-a)^n \quad \forall z \in D(a,r) \tag{2}$$

Está ya muy claro cómo debemos definir la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ que buscamos:

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m} \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\} \qquad \text{y} \qquad g(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

De esta forma es obvio que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ para todo $z \in \Omega$, así como que $g(a) \neq 0$. También es evidente que $g \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{a\}\big)$, pero la restricción de g al disco abierto $D(a,r)$ coincide con la suma de una serie de potencias, concretamente

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(a)}{(m+n)!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Para $z \in D(a,r) \setminus \{a\}$, esta igualdad se deduce de (2), mientras que para $z = a$, es la definición de $g(a)$. Por tanto g es derivable en el punto a, luego $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, como queríamos.

Recíprocamente, supongamos que existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \quad \forall z \in \Omega \qquad \text{y} \qquad g(a) \neq 0 \tag{3}$$

Fijado de nuevo $r \in \mathbb{R}^+$ con $D(a,r) \subset \Omega$, usamos (3) junto con el desarrollo en serie de Taylor de g centrado en a para obtener el de f:

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{g^{(n-m)}(a)}{(n-m)!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(z,r)$$

Deducimos claramente que $f^{(n)}(a) = 0$ para $0 \leqslant n < m$, mientras que $f^{(m)}(a) = m!\, g(a) \neq 0$. Esto demuestra que f tiene un cero de orden m en el punto a.

(c). Dado $a \in Z(f)$, sea $m \in \mathbb{N}$ el orden del cero de f en a, y usando lo ya demostrado, sea $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ que verifique (3). Como g es continua en el punto a con $g(a) \neq 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Para $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$ tenemos entonces $(z-a)^m \neq 0$ y $g(z) \neq 0$, luego $f(z) = (z-a)^m g(z) \neq 0$.

Para todo $a \in Z(f)$ hemos encontrado $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \cap Z(f) = \{a\}$, así que todos los puntos de $Z(f)$ son aislados, es decir, $Z(f) \cap Z(f)' = \emptyset$. Pero como $Z(f)$ es un subconjunto cerrado de Ω, porque f es continua, tenemos $Z(f)' \cap \Omega \subset Z(f)$, luego $Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$. ■

Obsérvese que, en lo referente al orden de sus ceros, una función f holomorfa en un dominio Ω, que no sea idénticamente nula, se comporta exactamente igual que una función polinómica. La hipótesis de que Ω sea conexo es esencial, pues en otro caso podríamos tener una función idénticamente nula en una componente conexa de Ω, pero no en todo Ω.

En cuanto al tamaño del conjunto $Z(f)$, no tiene por qué ser finito, pero sabemos que $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en Ω. Para una función entera, esto significa que $Z(f)' = \emptyset$. En general, $Z(f)$ puede tener puntos de acumulación, pero han de estar en $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Como ejemplo, consideremos la función $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ dada por $f(z) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{1-z}$ para todo $z \in D(0,1)$. Se tiene claramente $Z(f) = \{1 - (1/n) : n \in \mathbb{N}\}$, luego $Z(f)' = \{1\}$, pero $1 \notin D(0,1)$.

En general, la condición $Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$, de naturaleza topológica, indica que el conjunto $Z(f)$ no puede ser muy grande. En particular, vamos a ver que $Z(f)$ ha de ser numerable. Para ello necesitamos algunas observaciones básicas sobre la topología del plano.

Empezamos viendo que la función distancia de un punto a un conjunto no vacío es una función continua. Concretamente, si E es un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$, la función $\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(z) = d(z,E) = \text{ínf}\,\{\,|\,|z-w|\,:\,w \in E\,\} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

es continua. En efecto, para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $w \in E$ se tiene

$$\delta(z_1) \leqslant |z_1 - w| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2 - w|$$

de donde deducimos $\delta(z_1) - |z_1 - z_2| \leqslant \delta(z_2)$, es decir, $\delta(z_1) - \delta(z_2) \leqslant |z_1 - z_2|$. Pero ahora podemos intercambiar los papeles de z_1 y z_2, para obtener que de hecho δ es lipschitziana, más concretamente, $|\delta(z_1) - \delta(z_2)| \leqslant |z_1 - z_2|$ para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

La siguiente es una útil propiedad topológica de todos los abiertos del plano. De hecho es válida para abiertos de $\mathbb{R}^n$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

- *Todo abierto Ω del plano es unión numerable de conjuntos compactos, es decir, existe una sucesión $\{K_n\}$ de conjuntos compactos, cuya unión es Ω.*

Si $\Omega = \mathbb{C}$, basta tomar $K_n = \overline{D}(0,n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En otro caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos

$$K_n = \overline{D}(0,n) \cap \{\, z \in \mathbb{C} : d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geqslant 1/n \,\}$$

Es claro que $K_n \subset \Omega$ y, como la función $z \mapsto d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ es continua, K_n es cerrado, pero obviamente está acotado, luego es compacto. Dado $z \in \Omega$, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z,r) \subset \Omega$, luego $d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geqslant r$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ de forma que $1/n < r$ y $n > |z|$ tenemos claramente que $x \in K_n$. Esto prueba que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ como queríamos. ■

La siguiente observación es una propiedad de los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, válida en cualquier espacio métrico, que probablemente es conocida:

- *Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y A es un subconjunto infinito de K, entonces A tiene un punto de acumulación en K, es decir, $A' \cap K \neq \emptyset$.*

Como A es infinito, existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de A con términos todos distintos, es decir, $z_n \neq z_m$ para $n \neq m$. Por ser K compacto, la sucesión $\{z_n\}$ admite una sucesión parcial $\{z_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $z \in K$. Entonces, para todo $r \in \mathbb{R}^+$ es claro que $D(z,r)$ contiene infinitos puntos de A, concretamente, todos los términos de la sucesión $\{z_{\sigma(n)}\}$, a partir de uno en adelante, luego $z \in A' \cap K$ como queríamos. ■

Obtenemos ya fácilmente el resultado que habíamos anunciado.

- *Si Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $A \subset \Omega$ verifica que $A' \cap \Omega = \emptyset$, entonces A es numerable.*

Escribimos $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ donde K_n es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, observamos que el conjunto $A_n = A \cap K_n$ ha de ser finito, pues de lo contrario hemos visto que se tendría $\emptyset \neq A_n' \cap K_n \subset A' \cap \Omega$, lo que contradice la hipótesis sobre A. Tenemos claramente

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap K_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

así que A es numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos. ■

Volviendo al conjunto de los ceros de una función holomorfa tenemos claramente:

- *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f no es idénticamente nula, entonces el conjunto de sus ceros $Z(f)$ es numerable.*

Conviene resaltar que, si de $Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$ tan sólo deducimos que $Z(f)$ es numerable, perdemos mucha información. Un conjunto numerable $A \subset \Omega$ puede estar muy lejos de verificar que $A' \cap \Omega = \emptyset$. Por ejemplo, $A = \Omega \cap \{r + is : r, s \in \mathbb{Q}\}$ es numerable, pero $A' \cap \Omega = \Omega$.

Al aplicar el principio de los ceros aislados a la diferencia entre dos funciones, obtenemos:

Principio de identidad para funciones holomorfas. *Sea Ω un dominio y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si A es un subconjunto de Ω tal que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, y $A' \cap \Omega \neq \emptyset$, entonces f y g son idénticas: $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Demostración. Basta observar que $\emptyset \neq A' \cap \Omega \subset Z(f - g)' \cap \Omega$, luego el teorema sobre los ceros de una función holomorfa no deja más salida que $f = g$. ■

En particular, si f y g coinciden en un subconjunto no numerable de Ω, son idénticas. Como ya se ha comentado, esto nos da un principio de identidad mucho más débil que el del enunciado anterior, aunque en la práctica puede ser más que suficiente.

Recordemos el principio de identidad que conocíamos para sumas de series de potencias: si f y g vienen dadas como sumas de series de potencias convergentes en un disco abierto $D(a,R)$ y existe δ con $0 < \delta < R$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D(a,\delta)$, entonces ambas series de potencias son idénticas, luego $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D(a,R)$. Puesto que $D(a,R)$ es un dominio y $D(a,\delta)' = \overline{D}(a,\delta)$, o simplemente $D(a,\delta)$ no es numerable, este resultado es un caso muy particular del que ahora conocemos.

Por ejemplo, la exponencial compleja es la única función entera que extiende a la real, y lo mismo se puede decir del seno, el coseno, o cualquier función entera que tome valores reales en el eje real. Pero podemos llegar mucho más lejos: si $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verifican que $f(1/n) = g(1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f = g$, ya que el conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, aunque sea numerable, verifica que $A' = \{0\} \neq \emptyset$. Claramente, bastaría suponer que f y g son holomorfas en un dominio Ω que contenga al origen.

9.5. Ejercicios.

1. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ tal que
$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|} \qquad \forall z \in D(0,1)$$
Probar que $|f^{(n)}(0)| \leqslant e\,(n+1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea f una función entera verificando que existen constantes $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{R}^+$ tales que
$$z \in \mathbb{C}, \ |z| > \rho \implies |f(z)| \leqslant \alpha |z|^\beta$$
Probar que f es una función polinómica de grado menor o igual que β.

3. Sea f una función entera verificando que
$$f(z) = f(z+1) = f(z+i) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$
Probar que f es constante.

4. Sea f una función entera verificando que $f\big(f(z)\big) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f?

5. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función f, holomorfa en un entorno del origen, y verificando que $f(1/n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande:
(a) $a_{2n} = 0, \ a_{2n-1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(b) $a_{2n} = a_{2n-1} = \dfrac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(c) $a_n = \dfrac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

6. Enunciar y demostrar un resultado referente al orden de los ceros de una suma, producto o cociente de funciones holomorfas.

7. Dado un abierto Ω del plano, probar que el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ es un dominio de integridad si, y sólo si, Ω es conexo.

8. ¿Qué se puede afirmar sobre dos funciones enteras cuya composición es constante?

9. Sea f una función entera verificando que $f(z) \to \infty \ (z \to \infty)$. Probar que f es una función polinómica.

10. Sea f una función entera verificando que
$$z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1 \implies |f(z)| = 1$$
Probar que existen $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Tema 10

Teorema de Morera y sus consecuencias

Abordamos en este tema una segunda tanda de aplicaciones de la teoría local de Cauchy, que se inicia con el *teorema de Morera*, debido al matemático italiano G. Morera (1856-1909). Se trata, ni más ni menos, que del recíproco del teorema de Cauchy para el triángulo, luego da una útil caracterización de las funciones holomorfas. De ella deducimos dos importantes métodos para la construcción de funciones holomorfas. El primero se basa en el *teorema de convergencia de Weierstrass*, que asegura la holomorfía del límite de una sucesión de funciones holomorfas en un abierto, siempre que la convergencia sea uniforme en cada subconjunto compacto de dicho abierto. Por otra parte, el teorema de Morera permite probar, con las hipótesis adecuadas, la *holomorfía de una integral dependiente de un parámetro*.

10.1. Teorema de Morera

La caracterización de la existencia de primitiva se estableció para cualquier función continua en un abierto del plano, y fue la motivación para buscar teoremas del tipo de Cauchy, afirmando que ciertas integrales se anulan. En el primer teorema de este tipo, el del triángulo, trabajamos directamente con una función, no sólo continua, sino holomorfa. Ahora sabemos que esto era lógico, pues si vamos buscando una primitiva, está claro que una función continua en un abierto, que no sea holomorfa, no puede admitir una primitiva. Sin embargo, si olvidamos el problema de la existencia de primitiva, cabe analizar el teorema de Cauchy para el triángulo y preguntarse hasta qué punto sigue siendo cierto para una función que sólo se supone continua. La respuesta es negativa, una función continua en un abierto que verifique la tesis de dicho teorema, ha de ser holomorfa. Tenemos pues el recíproco del teorema de Cauchy para el triángulo:

Teorema de Morera. *Sea Ω un abierto no vacío del plano y f una función continua en Ω, verificando que*

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,dz = 0$$

siempre que todo el triángulo $\Delta(a,b,c)$ esté contenido en Ω. Entonces f es holomorfa en Ω.

Demostración. El razonamiento se puede adivinar fácilmente, recordando la demostración del teorema local de Cauchy. Para conseguir una primitiva F de una función f holomorfa en un dominio estrellado, integrábamos f sobre segmentos con origen fijo y extremo variable. La holomorfía de f sólo se usaba para aplicar el teorema de Cauchy para el triángulo, probando así que F verificaba la hipótesis del lema de construcción de primitivas.

Pues bien, ahora el abierto Ω no es un dominio estrellado, pero tampoco queremos encontrar una primitiva de f, sólo queremos probar que f es holomorfa. Como la holomorfía es una propiedad local, podemos restringir nuestra función a un disco abierto, que sí es un dominio estrellado, y usar el mismo razonamiento que en el teorema local de Cauchy: integrar nuestra función continua entre un punto fijo del disco y otro variable. Para probar que la función así definida verifica la hipótesis del lema de construcción de primitivas, no podemos obviamente aplicar el teorema de Cauchy para el triángulo, ni falta que nos hace, porque la tesis de dicho teorema es justo la hipótesis que ahora tenemos. Por tanto, en cada disco abierto contenido en Ω vamos a tener una primitiva de nuestra función f, luego la restricción de f a dicho disco abierto es holomorfa y basta aplicar el carácter local de la holomorfía. Veamos con detalle este bonito razonamiento.

Fijado $\alpha \in \Omega$, tomamos $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(\alpha, R) \subset \Omega$. Consideramos entonces la función $F : D(\alpha, R) \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \int_{[\alpha,z]} f(w)\,dw \qquad \forall z \in D(\alpha, R)$$

y vamos a comprobar que F verifica la hipótesis del lema de construcción de primitivas. En efecto, sea $a \in D(\alpha, R)$ y tomemos $r = R - |a - \alpha| > 0$ de forma que $D(a, r) \subset D(\alpha, R)$. Para $z \in D(a, r)$, tenemos claramente $\Delta(\alpha, a, z) \subset D(\alpha, R) \subset \Omega$, lo que nos permite usar la hipótesis sobre f para obtener

$$0 = \int_{[\alpha,a,z,\alpha]} f(w)\,dw = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw - F(z)$$

Hemos comprobado como queríamos que, para cada $a \in D(\alpha, R)$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a, r) \subset D(\alpha, R)$ y

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw \qquad \forall z \in D(a, r)$$

El lema de construcción de primitivas nos dice que $F \in \mathcal{H}\big(D(\alpha, R)\big)$ con $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D(\alpha, R)$. Pero entonces también tenemos $F' \in \mathcal{H}\big(D(\alpha, R)\big)$, es decir, la restricción de f a $D(\alpha, R)$ es holomorfa. Por el carácter local del concepto de derivada, f es derivable en el punto α. Como $\alpha \in \Omega$ era arbitrario, tenemos $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ como queríamos. ■

Aunque pueda parecer engorrosa, la hipótesis del teorema anterior se comprueba fácilmente en ciertas situaciones, con lo que el teorema nos da un criterio útil para comprobar que una función es holomorfa, como vamos a ver enseguida.

10.2. Teorema de convergencia de Weierstrass

Cabe preguntarse cual es el tipo de convergencia adecuado para trabajar con sucesiones de funciones holomorfas en un abierto Ω del plano.

Por una parte, la convergencia puntual en Ω es demasiado débil, no garantiza siquiera que la función límite sea continua, pero los ejemplos que suelen darse para ponerlo de manifiesto no siempre son adecuados. Lo correcto sería dar un ejemplo de una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω, que converja puntualmente en Ω a una función que no sea siquiera continua, pero esto no es fácil. Citamos sin demostrarlo, que existe una sucesión de funciones polinómicas que converge puntualmente en todo el plano a una función que no es continua.

En el otro extremo, la convergencia uniforme en Ω es demasiado restrictiva. Por ejemplo, una serie de potencias con radio de convergencia infinito sólo converge uniformemente en $\mathbb{C}$, cuando todos sus coeficientes son nulos a partir de uno en adelante, esto es, cuando la serie se reduce a una suma finita. Debemos buscar un tipo de convergencia intermedio, más fuerte que la puntual, pero menos restrictiva que la uniforme en todo el abierto Ω.

El último ejemplo comentado sugiere cual puede ser la respuesta satisfactoria a la pregunta planteada, pues sabemos que una serie de potencias con radio de convergencia infinito converge uniformemente en cada subconjunto compacto del plano. De manera más general, toda serie de potencias no trivial converge uniformemente en cada compacto contenido en su dominio de convergencia. El siguiente teorema pone de manifiesto que efectivamente, la convergencia uniforme sobre compactos es adecuada para trabajar con sucesiones de funciones holomorfas.

Teorema de convergencia de Weierstrass. *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, en particular:*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que la sucesión $\{f_n^{(k)}\}$ de las k-ésimas derivadas, converge a la derivada k-ésima $f^{(k)}$, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω, en particular:

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) \qquad \forall z \in \Omega,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Demostración. Con el fin de aplicar el teorema de Morera, empezamos comprobando que f es continua. En efecto, para cada $a \in \Omega$ tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en el compacto $\overline{D}(a,r)$, la restricción de f a $\overline{D}(a,r)$ es continua, y el carácter local de la continuidad nos dice que f es continua en el punto a.

El siguiente paso consiste simplemente en aplicar el teorema de Cauchy para el triángulo. Dados $a,b,c \in \Omega$ tales que $\Delta(a,b,c) \subset \Omega$, como $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dicho teorema nos dice que

$$\int_{[a,b,c,a]} f_n(z)\,dz = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en el compacto $[a,b,c,a]^* \subset \Omega$, la continuidad de la integral curvilínea nos permite deducir que

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b,c,a]} f_n(z)\,dz = 0$$

Puesto que esta igualdad es válida siempre que el triángulo $\Delta(a,b,c)$ esté contenido en Ω, el teorema de Morera nos dice que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Fijamos ahora $k \in \mathbb{N}$ para probar que la sucesión $\{f_n^{(k)}\}$ converge a $f^{(k)}$, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. Fijamos también $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,2r) \subset \Omega$. Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \overline{D}(a,r)$, podemos aplicar la fórmula de Cauchy para la derivada k-ésima a la función $f_n - f \in \mathcal{H}(\Omega)$ obteniendo:

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,2r)} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw$$

Ahora acotamos esta integral usando de nuevo la continuidad de la integral curvilínea. Para $w \in C(a,2r)^*$ tenemos claramente $|w-z| \geqslant |w-a| - |z-a| \geqslant r$. Por otra parte, escribimos $M_n = \max\left\{ |f_n(w) - f(w)| : w \in C(a,2r)^* \right\}$ y obtenemos

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \frac{M_n}{r^{k+1}} 4\pi r = \frac{2k!}{r^k} M_n$$

Como esto es cierto para todo $z \in \overline{D}(a,r)$, deducimos que

$$\max\left\{ |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| : z \in \overline{D}(a,r) \right\} \leqslant \frac{2k!}{r^k} M_n$$

y esta desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en el compacto $C(a,2r)^* \subset \Omega$, tenemos $\{M_n\} \to 0$ y la desigualdad anterior nos dice que $\{f_n^{(k)}\}$ converge a $f^{(k)}$ uniformemente en $\overline{D}(a,r)$. Como $a \in \Omega$ era arbitrario, hemos probado que $\{f_n^{(k)}\}$ converge a $f^{(k)}$ uniformemente en un entorno de cada punto de Ω. De esto se puede deducir la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de Ω, como vamos a ver.

Para abreviar escribimos $g_n = f_n^{(k)}$ y $g = f^{(k)}$ y fijamos un compacto $K \subset \Omega$. Para cada punto de K sabemos que existe un disco abierto centrado en dicho punto y contenido en Ω, en el que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g, luego tenemos un recubrimiento de K por abiertos del que, por ser K compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito. Existen por tanto $p \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_p \in K$ y $r_1, r_2, \ldots r_p \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p} D(a_j, r_j) \subset \Omega$$

y $\{g_n\}$ converge uniformemente a g en $D(a_j, r_j)$, para $j = 1,2,\ldots,p$. Ahora la convergencia uniforme en K es evidente: dado $\varepsilon > 0$, para cada $j = 1,2,\ldots p$ existe $m_j \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant m_j$ se tiene $|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in D(a_j, r_j)$; tomando $m = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_p\}$, es claro que, cuando $n \geqslant m$, se tiene $|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$. ■

Resaltamos el último razonamiento anterior: para una sucesión de funciones de Ω en $\mathbb{C}$, no necesariamente holomorfas, la convergencia uniforme en un entorno de cada punto de Ω, implica la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de Ω. El recíproco también es evidentemente cierto, puesto que cada punto de Ω tiene un entorno compacto, cosa que también se usó al principio de la demostración. La equivalencia que así se obtiene muestra que la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de Ω tiene carácter local, por lo que a veces se la denomina *convergencia localmente uniforme.*

Conviene también recordar que, para funciones reales de variable real, no hay nada parecido al teorema anterior, incluso la convergencia uniforme en todo un abierto, de una sucesión de funciones derivables, no garantiza que la función límite sea derivable en dicho abierto. Como ejemplo ilustrativo podemos considerar la sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{1+n^2x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Es claro que f_n es derivable en $\mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y comprobamos fácilmente que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función valor absoluto, $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, que no es derivable en el origen. Basta observar que, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+n^2x^2} - n|x|\right) = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sqrt{1+n^2x^2}+n|x|} \leqslant \frac{1}{n}$$

Nótese que de hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, e incluso es analítica en $\mathbb{R}$ es decir, en un entorno de cada punto, puede expresarse como suma de una serie de potencias.

Por último, resaltamos que el teorema anterior puede obviamente usarse para series:

- *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Suponemos que la serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω y sea f su suma:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, para todo $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω, con

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \qquad \forall z \in \Omega \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Como caso particular, podemos considerar la suma de una serie de potencias no trivial $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ para todo $z \in \Omega$, donde Ω es el dominio de convergencia de la serie, pues sabemos que la serie converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω.

Tomando $f_n(z) = \alpha_n (z-a)^n$ para cualesquiera $z \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el teorema anterior nos dice que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y que

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \alpha_n (z-a)^{n-k} \qquad \forall z \in \Omega \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Así pues, el teorema que nos dio la holomorfía de la suma de una serie de potencias queda ahora como caso muy particular del teorema de convergencia de Weierstrass.

10.3. Integrales dependientes de un parámetro

De manera intuitiva, una integral curvilínea dependiente un parámetro es una expresión de la forma $\int_\gamma \Phi(w,z)\, dw$ donde γ es un camino y Φ es una cierta función de dos variables: la *variable de integración* w, que deberá moverse en la imagen γ^* del camino y el *parámetro* z del que depende nuestra integral, que en principio podría tomar valores en un conjunto arbitrario. La integral tendrá sentido siempre que, para cada valor de z, la función $w \mapsto \Phi(w,z)$, sea continua en γ^*, dando lugar a una función de z. Si queremos obtener una función compleja de variable compleja el parámetro z deberá moverse también en un subconjunto de $\mathbb{C}$, luego Φ va a ser una función compleja de dos variables complejas.

Usaremos pues un camino γ, un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$ y una función $\Phi : \gamma^* \times A \to \mathbb{C}$. Suponiendo que, para cada $z \in A$, la función $w \mapsto \Phi(w,z)$ es continua en γ^*, podemos definir una función $f : A \to \mathbb{C}$ sin más que escribir

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\, dw \qquad \forall z \in A$$

y decimos que f es una integral (curvilínea) dependiente de un parámetro.

Nuestro objetivo es encontrar condiciones suficientes sobre la función Φ para asegurar la holomorfía de f, suponiendo lógicamente que A es abierto. El teorema de Morera sugiere que empecemos por asegurarnos la continuidad de f. Para ello basta fortalecer la hipótesis acerca de la continuidad de Φ, suponiendo que Φ es continua, como función de dos variables:

Lema 1. *(Continuidad de la integral curvilínea dependiente de un parámetro). Sea γ un camino, A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y $\Phi : \gamma^* \times A \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces, la función $f : A \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\, dw$ para todo $z \in A$, es continua.*

Demostración. Fijado $a \in A$ y una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A, con $\{a_n\} \to a$, debemos ver que $\{f(a_n)\} \to f(a)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escribir

$$f(a_n) = \int_\gamma \phi_n(w)\, dw \qquad \text{donde} \qquad \phi_n(w) = \Phi(w,a_n) \quad \forall w \in \gamma^*$$

y análogamente,

$$f(a) = \int_\gamma \phi(w)\, dw \qquad \text{donde} \qquad \phi(w) = \Phi(w,a) \quad \forall w \in \gamma^*$$

En vista de la continuidad de la integral curvilínea, bastará comprobar que la sucesión $\{\phi_n\}$ converge a ϕ uniformemente en γ^*.

El conjunto $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ es compacto, luego $\gamma^* \times K$ también lo es, y el teorema de Heine nos dice que Φ es uniformemente continua en $\gamma^* \times K$. Así pues, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que, para $(w_1, z_1), (w_2, z_2) \in \gamma^* \times K$ se tiene

$$\text{máx}\, \{\, |w_1 - w_2|, |z_1 - z_2|\, \} < \delta \implies |\Phi(w_1, z_1) - \Phi(w_2, z_2)| < \varepsilon$$

Como $\{a_n\} \to a$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $|a_n - a| < \delta$, lo que permite usar la implicación anterior tomando $w_1 = w_2 = w \in \gamma^*$ arbitrario, $z_1 = a_n$ con $n \geqslant m$ y $z_2 = a$, obteniendo que

$$n \geqslant m \implies |\phi_n(w) - \phi(w)| < \varepsilon \quad \forall w \in \gamma^*$$

Esto prueba que $\{\phi_n\} \to \phi$ uniformemente en γ^*, como queríamos. ■

En un segundo paso iremos ya en busca de la holomorfía de la función f del lema anterior, con las hipótesis adecuadas. A poco que se piense, el teorema de Morera nos llevará a considerar la integral de f sobre un cierto triángulo, que claramente será una integral iterada. Poder aplicar la siguiente consecuencia del teorema de Fubini será decisivo como veremos.

Lema 2. *Sean γ y φ dos caminos y $\Phi : \gamma^* \times \varphi^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces:*

$$\int_\varphi \left(\int_\gamma \Phi(w,z)\, dw \right) dz = \int_\gamma \left(\int_\varphi \Phi(w,z)\, dz \right) dw$$

Demostración. Nótese que la existencia de ambas integrales iteradas viene asegurada por el lema anterior. Tomando $A = \varphi^*$, el lema nos dice que la función $z \mapsto \int_\gamma \Phi(w,z)\, dw$ es continua en φ^*, luego podemos considerar su integral sobre el camino φ. Análogo razonamiento se aplica a la otra integral iterada.

Empezamos por considerar el caso particular en que γ y φ son arcos, es decir, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\varphi : [c,d] \to \mathbb{C}$ son funciones de clase C^1 en sus respectivos intervalos. Se tiene entonces

$$\int_\gamma \Phi(w,z)\, dw = \int_a^b \Phi\big(\gamma(t), z\big)\, \gamma'(t)\, dt \qquad \forall z \in \varphi^*$$

de donde deducimos que

$$\int_\varphi \left(\int_\gamma \Phi(w,z)\, dw \right) dz = \int_c^d \left(\int_a^b \Phi\big(\gamma(t), \varphi(s)\big)\, \gamma'(t)\, dt \right) \varphi'(s)\, ds$$

Análogamente, intercambiando los papeles de γ y φ obtenemos

$$\int_\gamma \left(\int_\varphi \Phi(w,z)\, dw \right) dz = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi\big(\gamma(t), \varphi(s)\big)\, \varphi'(s)\, ds \right) \gamma'(t)\, dt$$

La igualdad de las dos integrales iteradas que han aparecido es consecuencia del teorema de Fubini, pues ambas coinciden con la integral doble, sobre el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$ de la función continua F, definida en dicho rectángulo por

$$F(t,s) = \Phi\big(\gamma(t), \varphi(s)\big)\, \gamma'(t)\, \varphi'(s) \qquad \forall (t,s) \in [a,b] \times [c,d]$$

Ciertamente F toma valores complejos, pero eso no supone ninguna dificultad, el teorema de Fubini se aplica a las partes real e imaginaria de F que son funciones continuas con valores reales. Nótese también que aplicamos la versión más elemental del teorema de Fubini, para una función continua en un rectángulo compacto, que ni siquiera requiere conocer la integral de Lebesgue. En algunos textos, a esta versión del teorema se la conoce como el "fubinito".

Probado el lema en el caso de dos arcos, el caso general es pura rutina. Escribimos los caminos γ y φ como suma de arcos: $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ y $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j$. Entonces, usando la aditividad y la linealidad de la integral curvilínea tenemos por una parte:

$$\int_{\varphi} \left(\int_{\gamma} \Phi(w,z)\, dw \right) dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \Phi(w,z)\, dw \right) dz = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \int_{\varphi_j} \left(\int_{\gamma_k} \Phi(w,z)\, dw \right) dz$$

y análogamente

$$\int_{\gamma} \left(\int_{\varphi} \Phi(w,z)\, dz \right) dw = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_k} \left(\int_{\varphi_j} \Phi(w,z)\, dz \right) dw$$

Basta por tanto aplicar lo ya probado en el caso de dos arcos para concluir la demostración. ■

Usando los dos lemas anteriores, podemos ya deducir del teorema de Morera un segundo método muy útil para construir funciones holomorfas:

Teorema (Holomorfía de la integral dependiente de un parámetro). *Sea γ un camino, Ω un abierto del plano y $\Phi : \gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Supongamos que, para cada $w \in \gamma^*$, la función $\Phi_w : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $\Phi_w(z) = \Phi(w,z)$ para todo $z \in \Omega$, es holomorfa en Ω. Entonces, definiendo*

$$f(z) = \int_{\gamma} \Phi(w,z)\, dw \qquad \forall z \in \Omega$$

se obtiene una función holomorfa: $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \Omega$, la función $w \mapsto \Phi_w^{(k)}(z)$, de γ^* en $\mathbb{C}$, es continua y se verifica que

$$f^{(k)}(z) = \int_{\gamma} \Phi_w^{(k)}\, dw \qquad \forall z \in \Omega, \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Demostración. Por el Lema 1 sabemos que f es continua en Ω. Con el fin de aplicar el teorema de Morera, fijamos $a,b,c \in \mathbb{C}$ tales que el triángulo $\Delta(a,b,c)$ esté contenido en Ω. Tomando $\varphi = [a,b,c,a]$, el Lema 2 nos dice que

$$\int_{\varphi} f(z)\, dz = \int_{\varphi} \left(\int_{\gamma} \Phi(w,z)\, dw \right) dz = \int_{\gamma} \left(\int_{\varphi} \Phi_w(z)\, dz \right) dw \tag{2}$$

Para cada $w \in \gamma^*$ tenemos por hipótesis $\Phi_w \in \mathcal{H}(\Omega)$, lo que nos permite aplicar el teorema de Cauchy para el triángulo, obteniendo:

$$\int_{\varphi} \Phi_w(z)\, dz = 0 \quad \forall w \in \gamma^*$$

En vista de (2), tenemos $\int_{\varphi} f(z)\,dz = 0$ y basta aplicar el teorema de Morera.

Para calcular las sucesivas derivadas de f usaremos la fórmula de Cauchy para las derivadas. Fijamos $k \in \mathbb{N}$, un punto $a \in \Omega$ y tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Para $w \in \gamma^*$, como $\Phi_w \in \mathcal{H}(\Omega)$, tenemos

$$\Phi_w^{(k)}(a) = \frac{k\,!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{\Phi(w,z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz$$

La función $\Psi : \gamma^* \times C(a,r)^* \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Psi(w,z) = \frac{k\,!\,\Phi(w,z)}{2\pi i\,(z-a)^{k+1}} \qquad \forall\,(w,z) \in \gamma^* \times C(a,r)^*$$

es continua, como cociente de dos funciones continuas, lo que nos permite aplicar el Lema 1. Nótese que esta vez integramos sobre el camino $C(a,r)^*$, la variable de integración es z y es la variable $w \in \gamma^*$ la que hace el papel de parámetro. Deducimos que la función $\psi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ definida por

$$\psi(w) = \int_{C(a,r)} \Phi(w,z)\,dz = \Phi_w^{(k)}(a) \quad \forall\,w \in \gamma^*$$

es continua. Aplicando ahora el Lema 2, tenemos también

$$\int_{\gamma} \Phi_w^{(k)}(a)\,dw = \int_{\gamma} \left(\int_{C(a,r)} \Psi(w,z)\,dz \right) dw = \int_{C(a,r)} \left(\int_{\gamma} \Psi(w,z)\,dw \right) dz$$

Por otra parte, aplicando también a f la fórmula de Cauchy para las derivadas tenemos

$$\begin{aligned} f^{(k)}(a) &= \frac{k\,!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz = \int_{C(a,r)} \left(\frac{k\,!}{2\pi i\,(z-a)^{k+1}} \int_{\gamma} \Phi(w,z)\,dw \right) dz \\ &= \int_{C(a,r)} \left(\int_{\gamma} \Psi(w,z)\,dz \right) dw \end{aligned}$$

Comparando las dos últimas igualdades obtenemos finalmente

$$f^{(k)}(a) = \int_{\gamma} \Phi_w^{(k)}(a)\,dw$$

y esto es válido para todo $a \in \Omega$, como queríamos demostrar. ∎

La igualdad (1) que da las derivadas sucesivas de la integral dependiente de un parámetro, puede escribirse de manera más intuitiva. Basta pensar que, para cualesquiera $w \in \gamma^*$ y $z \in \Omega$, $\Phi_w^{(k)}$ no es más que una derivada parcial de orden k de la función Φ. Tenemos por tanto:

$$f^{(k)}(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}(w,z)\,dw \qquad \forall\,z \in \Omega,\ \forall\,k \in \mathbb{N}$$

10.4. Ejercicios

1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en un abierto Ω del plano, y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ otra función continua. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (i) $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cada subconjunto compacto de Ω.
   (ii) Para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de Ω que converja a un punto $z \in \Omega$ se tiene que $\{f_n(z_n)\} \to f(z)$.

2. Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones enteras definida por $f_n(z) = z \exp\big(-n^2 z^2/2\big)$ para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ pero no converge uniformemente en ningún entorno del origen.

3. Probar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{1-z^n}$ converge en $D(0,1)$ y que su suma es una función holomorfa en $D(0,1)$.

4. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ tal que $f(0) = 0$. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f\big(z^n\big)$ converge en $D(0,1)$ y que su suma es una función holomorfa en $D(0,1)$.

5. Probar que la sucesión de funciones enteras definida por
$$f_n(z) = \frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\,(nz) \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
converge uniformemente en $\mathbb{R}$ pero no converge uniformemente en ningún subconjunto de $\mathbb{C}$ que tenga interior no vacío.

6. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{sen}\,(nz)}{3^n}$ converge en la banda $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\,\mathrm{Im}\, z| < \log 3\}$ y que su suma es una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Calcular $f\,'(0)$.

7. Sea $\phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ una función continua. Probar que definiendo
$$f(z) = \int_0^1 \phi(t)\, e^{itz}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$
se obtiene una función entera y calcular el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen.

8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por
$$f_n(z) = \int_0^n \sqrt{t}\, e^{-tz}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$
   a) Probar que f_n es una función entera y calcular su desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen.
   b) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$.
   c) Deducir que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-tz}\, dt$ para todo $z \in \Omega$.

Tema 11

Comportamiento local de una función holomorfa

En la última serie de aplicaciones de la teoría local de Cauchy que vamos a estudiar, sacamos partido a un aspecto clave de la fórmula de Cauchy, que se comentó en su momento pero aún no hemos aprovechado a fondo: la fórmula nos da los valores de una función holomorfa en un disco abierto a partir de los valores en la circunferencia. Como caso muy particular de esta idea, obtendremos la llamada *propiedad de la media*, afirmando que el valor de una función holomorfa en el centro de una circunferencia es la media de sus valores en la circunferencia. De aquí deducimos fácilmente el *principio del módulo máximo*, que nos da una de las propiedades más útiles e importantes de las funciones holomorfas. Dicho principio resulta ser equivalente a otro resultado muy llamativo, como es el *teorema de la aplicación abierta*. De él se deduce a su vez la versión para funciones holomorfas del *teorema de la función inversa*, afirmando que toda función holomorfa es localmente inversible en cada punto donde la derivada no se anule. Estudiaremos también cómo se comporta una función holomorfa en el entorno de un cero de su derivada. De esta forma tenemos una descripción del comportamiento local de una función holomorfa, mucho más completa que la que nos da el cálculo en dos variables para funciones diferenciables en sentido real.

11.1. Principio del módulo máximo

En gran medida, todos los resultados que siguen se basan en una observación muy sencilla:

Propiedad de la media. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Para $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, se tiene:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\big(a + r e^{it}\big)\, dt \tag{1}$$

Demostración. Basta aplicar la fórmula de Cauchy:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\big(a+re^{it}\big)}{re^{it}}\, ire^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\big(a+re^{it}\big)dt \qquad \blacksquare$$

Si tenemos en cuenta la definición de la integral de Cauchy como límite de sumas integrales, el segundo miembro de (1) puede muy bien interpretarse como la media de los valores de f en la circunferencia $C(a,r)^*$. Se pone aquí de manifiesto una idea que ya se comentó al obtener la fórmula de Cauchy: para conocer la función f en $D(a,r)$, y en particular para conocer $f(a)$, basta conocer los valores de f en $C(a,r)^*$. Lo único que hemos añadido ahora es el hecho de que la integral que nos permite calcular $f(a)$ es muy sencilla e intuitiva. Para preparar la forma en que usaremos la propiedad de la media, conviene destacar la siguiente consecuencia obvia:

- *Con las mismas hipótesis del resultado anterior, se tiene:*

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f\big(a+re^{it}\big)\big|\,dt \tag{2}$$

De nuevo, el segundo miembro es la media de los valores de $|f|$ en la circunferencia, lo cual es aún más intuitivo, pues ahora estamos promediando números reales. Tenemos solamente una desigualdad, pero se adivina lo que va a ocurrir cuando el valor promedio $|f(a)|$ sea mayor o igual que todos los valores de $|f|$ en $C(a,r)^*$ que son los que promediamos. Esta es la idea que enseguida vamos a aprovechar:

Principio del módulo máximo. *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $|f|$ tiene un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Entonces f es constante.*

Demostración. Fijado $r \in]0,\delta[$, la función continua $\psi : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(t) = |f(a)| - |f(a+re^{it})| \qquad \forall t \in [-\pi,\pi]$$

verifica que $\psi(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [-\pi,\pi]$. Pero usando (2) también tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\,dt = 2\pi\left(|f(a)| - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{it}|\,dt\right) \leqslant 0 \tag{3}$$

Por una propiedad bien conocida de la integral de Cauchy para funciones continuas con valores reales, si fuese $\psi(t) > 0$ para algún $t \in [-\pi,\pi]$, la integral de ψ sería estrictamente positiva, luego (3) no deja más salida que $\psi(t) = 0$ para todo $t \in [-\pi,\pi]$. Hemos probado así que $|f(a+re^{it})| = |f(a)|$ para todo $t \in [-\pi,\pi]$, pero esto además es válido para todo $r \in]0,\delta[$, luego tenemos:

$$|f(z)| = |f(a)| \qquad \forall z \in D(a,\delta)$$

Así pues, la restricción de f al dominio $D(a,\delta)$ es holomorfa y tiene módulo constante, luego es constante. Por el principio de identidad, como obviamente $D(a,\delta)$ tiene puntos de acumulación en Ω, concluimos que f es constante en Ω, como queríamos demostrar. $\blacksquare$

Para sacar partido al teorema anterior, es natural ponerse en una situación que asegure la existencia de un máximo, como hacemos a continuación.

- *Sea* Ω *un dominio acotado y* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ *una función continua en* $\overline{\Omega}$ *y holomorfa en* Ω. *Entonces:* $\max\{\,|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\,\} = \max\{\,|f(z)| : z \in \mathrm{Fr}(\Omega)\,\}$.

Nótese que ambos máximos existen, pues $\overline{\Omega}$ y $\mathrm{Fr}(\Omega)$ son compactos. Dado $a \in \overline{\Omega}$ tal que $|f(a)| = \max\{\,|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\,\}$, caben dos posibilidades. Si $a \in \mathrm{Fr}(\Omega)$, la igualdad buscada es evidente. En otro caso tenemos $a \in \Omega$ y podemos aplicar el teorema anterior a la restricción de f a Ω, cuyo módulo tiene un máximo absoluto en a, obteniendo que f es constante en Ω. Por continuidad, f es constante en $\overline{\Omega}$ y la igualdad buscada vuelve a ser evidente. ■

Así pues, para una función en las condiciones del enunciado anterior, cualquier acotación de su módulo que consigamos en la frontera de Ω, es también válida en $\overline{\Omega}$. Usando esta idea, probamos un resultado nada trivial sobre sucesiones de funciones holomorfas:

- *Sea* Ω *un dominio acotado y, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *sea* $f_n : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ *una función continua en* $\overline{\Omega}$ *y holomorfa en* Ω. *Si la sucesión* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $\mathrm{Fr}(\Omega)$, *entonces* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $\overline{\Omega}$ *a una función continua en* $\overline{\Omega}$ *y holomorfa en* Ω.

Por hipótesis, $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $\mathrm{Fr}(\Omega)$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $p, q \geqslant m$ se tiene $\max\{\,|f_p(z) - f_q(z)| : z \in \mathrm{Fr}(\Omega)\,\} < \varepsilon$. Entonces, para $p, q \geqslant m$, podemos aplicar el resultado anterior a la función $f_p - f_q$, obteniendo que $\max\{\,|f_p(z) - f_q(z)| : z \in \overline{\Omega}\,\} < \varepsilon$. Por tanto, $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $\overline{\Omega}$, luego converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, que de entrada es continua, pues la convergencia uniforme preserva la continuidad. Como obviamente tenemos convergencia uniforme en todo subconjunto compacto de Ω, el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. ■

En otro orden de ideas, es claro que en el principio del módulo máximo, si en lugar de un máximo relativo, suponemos un mínimo relativo, o incluso absoluto, no podemos llegar a la misma conclusión. En efecto, si una función holomorfa en un dominio se anula en un punto, es claro que su módulo tiene un mínimo absoluto en dicho punto y eso no puede implicar que la función sea constante. Sin embargo, vamos ahora a comprobar que, descartado el caso trivial de que la función sea constante, sus ceros son los únicos puntos en los que el módulo de la función puede tener un mínimo absoluto, o incluso relativo.

Principio del módulo mínimo. *Sea* Ω *un dominio y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Supongamos que* $|f|$ *tiene un mínimo relativo en un punto* $a \in \Omega$. *Entonces, o bien* $f(a) = 0$, *o bien* f *es constante.*

Demostración. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \geqslant |f(a)|$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Suponiendo que $f(a) \neq 0$, probaremos que f es constante. Por continuidad, existe $\eta > 0$ tal que $D(a,\eta) \subset D(a,\delta)$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,\eta)$. Esto nos permite considerar la función $g : D(a,\eta) \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = 1/f(z)$ para todo $z \in D(a,\eta)$, holomorfa en el dominio $D(a,\eta)$, cuyo módulo tiene un máximo absoluto en el punto a. Por el principio del módulo máximo, g es constante, luego f es constante en $D(a,\eta)$, y basta aplicar el principio de identidad. ■

Nótese que este principio es más débil que el del módulo máximo, pero ha quedado claro que es lo mejor que podíamos esperar. Los dos principios pueden usarse conjuntamente para encontrar ceros de una función, es decir, para probar que ciertas ecuaciones tienen solución.

- *Sea Ω un dominio acotado y f una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω, que no sea constante. Si $|f|$ es constante en* $\mathrm{Fr}(\Omega)$, *entonces existe $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$.*

Si $|f|$ fuese constante en $\overline{\Omega}$, f sería constante. Como $\overline{\Omega}$ es compacto, existen $a, b \in \overline{\Omega}$ tales que $|f(a)| = \text{mín}\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} < \text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = |f(b)|$. Por el principio del módulo máximo, tenemos $b \in \mathrm{Fr}(\Omega)$ y, puesto que $|f|$ es constante en $\mathrm{Fr}(\Omega)$, deducimos que $a \in \Omega$. El principio del módulo mínimo nos dice entonces que $f(a) = 0$. ■

11.2. Teorema de la aplicación abierta

El principio del módulo máximo se puede reformular de manera equivalente, para poner de manifiesto otra propiedad clave de las funciones holomorfas. Excluidas situaciones más o menos triviales, toda función holomorfa es una aplicación abierta, es decir, transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos. No hay ningún resultado análogo a éste en Análisis real, ni siquiera para funciones reales de una variable real. Cabe pensar por ejemplo en las funciones seno y coseno, funciones analíticas en $\mathbb{R}$ cuya imagen no es un conjunto abierto.

Teorema de la aplicación abierta. *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante. Entonces f es una aplicación abierta, es decir, para todo abierto $U \subset \Omega$ se tiene que $f(U)$ es abierto.*

Demostración. Probamos que $f(\Omega)$ es abierto, es decir, el caso $U = \Omega$, y el caso general se deducirá fácilmente. Fijado $b \in f(\Omega)$, escribimos $b = f(a)$ con $a \in \Omega$, y debemos encontrar $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(b, \rho) \subset f(\Omega)$.

La función $z \mapsto f(z) - b$ es holomorfa en Ω y se anula en el punto a, pero no puede ser idénticamente nula, ya que f no es constante. Por el principio de los ceros aislados, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ y $f(z) \neq b$ para todo $z \in \overline{D}(a,r) \setminus \{a\}$. Bastará entonces tomar

$$\rho = \frac{1}{2}\,\text{mín}\left\{ |f(z) - b| \,:\, z \in C(a,r)^* \right\} > 0$$

Fijado $w_0 \in D(b, \rho)$, pensamos en la función $g : \overline{D}(a,r) \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = f(z) - w_0$ para todo $z \in \overline{D}(a,r)$. Como $|g|$ es continua en el compacto $\overline{D}(a,r)$, existe $z_0 \in \overline{D}(a,r)$ tal que $|g(z_0)| \leqslant |g(z)|$ para todo $z \in \overline{D}(a,r)$. Para $z \in C(a,r)^*$ tenemos

$$|g(z)| = |f(z) - w_0| \geqslant |f(z) - b| - |w_0 - b| \geqslant 2\rho - |w_0 - b| > \rho$$

mientras que $|g(z_0)| \leqslant |g(a)| = |b - w_0| < \rho$, luego $z_0 \notin C(a,r)^*$, así que $z_0 \in D(a,r)$. Por tanto, el módulo de la función $g \in \mathcal{H}\big(D(a,r)\big)$ tiene un mínimo absoluto en $z_0 \in D(a,r)$. Si g fuese constante, f sería constante en $D(a,r)$ y, por el principio de identidad, también sería constante en Ω, contra la hipótesis. Al aplicar a g el principio del módulo mínimo, obtenemos que $g(z_0) = 0$, es decir, $w_0 = f(z_0) \in f(D(a,r)) \subset f(\Omega)$, como queríamos.

Si ahora U es un subconjunto abierto de Ω, comprobamos fácilmente que $f(U)$ es abierto. Expresando U como unión de sus componentes conexas, basta obviamente ver que la imagen por f de cada componente conexa de U es un conjunto abierto. Si V es una componente conexa de U, entonces V es un dominio y $f\big|_V$ es una función holomorfa en V, no constante, pues si f fuese constante en V, el principio de identidad nos diría que f es constante en Ω, de nuevo en contra de la hipótesis. Aplicando a V y $f\big|_V$ lo ya demostrado para Ω y f, obtenemos que $f(V)$ es abierto, como queríamos. ■

Este resultado generaliza claramente otros que habíamos deducido de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Si Ω es un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es constante, el conjunto $f(\Omega)$ es abierto, luego no puede estar contenido en una recta ni en una circunferencia, y en particular, ninguna de las funciones $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ y $|f|$ puede ser constante.

También vemos fácilmente que el principio del módulo máximo se deduce a su vez del teorema anterior:

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando que $|f|$ tiene un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, es decir, que existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y el conjunto $f\big(D(a,\delta)\big)$ está contenido en $\overline{D}\big(0,|f(a)|\big)$. Si f no fuese constante, el teorema anterior nos diría que $f\big(D(a,\delta)\big)$ es abierto, pero entonces tendríamos $f\big(D(a,\delta)\big) \subset D(0,|f(a)|)$ y, en particular, $|f(a)| < |f(a)|$ lo cual es absurdo. Por tanto, f es constante, como queríamos demostrar.

Así pues, el principio del módulo máximo y el teorema de la aplicación abierta pueden verse como resultados equivalentes. Nótese sin embargo que, para deducir el teorema de la aplicación abierta del principio del módulo máximo, el razonamiento es laborioso y requiere el principio de identidad, mientras que en sentido recíproco las cosas son mucho más fáciles, como acabamos de comprobar.

11.3. Teorema de la función inversa

El teorema de la aplicación abierta nos sugiere claramente que pensemos en una función holomorfa e inyectiva en un dominio, que es una aplicación abierta, así que la función inversa también está definida en un abierto y es continua, lo que nos pone en camino para probar que dicha función inversa sea a su vez una función holomorfa. Sin embargo, de entrada es preferible que la inyectividad de nuestra función no sea una hipótesis, pues no suele ser fácil de comprobar, sino que sea parte de la tesis del teorema.

La hipótesis natural para conseguir la inyectividad de una función holomorfa consiste en suponer que su derivada no se anula. En un sentido “global”, enseguida nos damos cuenta de que esta hipótesis no asegura la inyectividad: la exponencial es una función entera cuya derivada no se anula nunca, pero está muy lejos de ser inyectiva.

Sin embargo, si lo que buscamos es un teorema “local”, el ejemplo anterior no nos debe desanimar. Lo que necesitamos es que, cuando la derivada de una función holomorfa no se anule en un punto, la función sea inyectiva en un entorno de dicho punto, y eso sí lo vamos a poder probar. Nótese, por ejemplo, que la función exponencial es inyectiva en un entorno de cada punto del plano: concretamente es inyectiva en $D(a,\pi)$ para todo $a \in \mathbb{C}$.

Para conseguir la inyectividad local que buscamos, podríamos usar el teorema de la función inversa para funciones diferenciables en sentido real, pero es más sencillo usar argumentos propios del plano complejo. Concretamente nos basamos en el siguiente resultado, que volverá a ser útil más adelante:

Lema. *Sea Ω un abierto del plano y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Consideremos la función $\Phi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida, para cualesquiera $z, w \in \Omega$, por:*

$$\Phi(w,z) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z \\ f'(w) = f'(z) & \text{si } w = z \end{cases}$$

Entonces Φ es continua.

Demostración. La continuidad separada de Φ en cada variable está muy clara, pero se trata de probar su continuidad en las dos variables, es decir, que Φ es continua considerando en $\Omega \times \Omega$ la topología producto. El conjunto $U = \{(w,z) \in \Omega \times \Omega : w \neq z\}$ es abierto y $\Phi\big|_U$ es continua, como cociente de funciones continuas, luego Φ es continua en U. Fijado $a \in \Omega$ bastará pues probar que Φ es continua en el punto (a,a).

Dado $\varepsilon > 0$, la continuidad de f' en el punto a nos da un $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y

$$|f'(\xi) - f'(a)| < \varepsilon \qquad \forall \xi \in D(a,\delta) \tag{4}$$

Basta claramente probar que $|\Phi(w,z) - \Phi(a,a)| < \varepsilon$ para cualesquiera $w, z \in D(a,\delta)$. Si $w = z$, la desigualdad buscada es la que aparece en (4), sin más que tomar $\xi = z$. Suponiendo entonces que $w \neq z$, tenemos

$$\Phi(w,z) - \Phi(a,a) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(a) = \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} \big(f'(\xi) - f'(a)\big)\, d\xi$$

donde hemos usado la regla de Barrow para la integral curvilínea, puesto que evidentemente, f' es una primitiva de f mientras que la función constantemente igual a $f'(a)$ tiene también una primitiva obvia.

Basta ya acotar la integral que aparece en la igualdad anterior. Para $\xi \in [z,w]^* \subset D(a,\delta)$ usamos (4) y obtenemos claramente:

$$\big|\Phi(w,z) - \Phi(a,a)\big| < \frac{1}{|w - z|}\, l\big([z,w]\big)\, \varepsilon = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Teorema de la función inversa (local). *Sea Ω un abierto del plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$ tal que $f'(a) \neq 0$. Entonces existe un conjunto abierto U, con $a \in U \subset \Omega$, verificando:*

- (i) *La función f es inyectiva en U y $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.*
- (ii) *El conjunto $V = f(U)$ es abierto y, escribiendo $\varphi = f\big|_U$, se tiene que $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ con*

$$\big(\varphi^{-1}\big)'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)} \qquad \forall z \in U$$

Demostración. Aplicando el lema anterior, por ser $\Phi(a,a) = f'(a) \neq 0$, la continuidad de Φ en el punto (a,a) nos permite encontrar un $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y $\Phi(w,z) \neq 0$ para cualesquiera $w,z \in D(a,r)$. Tomando $U = D(a,r)$ comprobaremos fácilmente las dos afirmaciones del teorema.

(i). Para $w,z \in U$ con $w \neq z$, se tiene que $f(w) - f(z) = \Phi(w,z)(w-z) \neq 0$, luego f es inyectiva en U. Además, para todo $z \in U$ se tiene también $f'(z) = \Phi(z,z) \neq 0$.

(ii) Por el teorema de la aplicación abierta, $\varphi = f\big|_U$ es abierta, en particular $V = \varphi(U)$ es abierto, pero además sabemos ya que φ^{-1} es continua.

Sea $w \in V$ y $\{w_n\}$ una sucesión de puntos de $V \setminus \{w\}$ tal que $\{w_n\} \to w$. Si $z = \varphi^{-1}(w)$ y $z_n = \varphi^{-1}(w_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{z_n\}$ es una sucesión de puntos de $U \setminus \{z\}$ y, por ser φ^{-1} continua en el punto w, tenemos que $\{z_n\} \to z$. Por tanto:

$$\left\{\frac{w_n - w}{z_n - z}\right\} = \left\{\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z}\right\} \to f'(z) \neq 0$$

y deducimos que

$$\left\{\frac{\varphi^{-1}(w_n) - \varphi^{-1}(w)}{w_n - w}\right\} = \left\{\frac{z_n - z}{w_n - w}\right\} \to \frac{1}{f'(z)}$$

Esto demuestra que φ^{-1} es derivable en todo punto $w \in V$, es decir $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}(V)$. Además, para $z \in U$ arbitrario, al aplicar lo anterior con $w = f(z)$ vemos que $\big(\varphi^{-1}\big)'\big(f(z)\big) = 1/f'(z)$. ■

Nuestro próximo objetivo es averiguar lo que ocurre en el teorema anterior si eliminamos la hipótesis $f'(a) \neq 0$, es decir, analizar como se comporta una función holomorfa en el entorno de un cero de su derivada, lógicamente excluyendo el caso trivial de una función constante. Haremos una descripción muy concreta de este comportamiento, algo que está muy lejos de ser posible para funciones diferenciables en sentido real. En particular veremos que la condición $f'(a) \neq 0$, no sólo es suficiente para tener la inyectividad local de f, sino también necesaria.

Como ejemplo orientativo, fijado $m \in \mathbb{N}$ con $m \geqslant 2$, consideremos la función $z \mapsto z^m$, cuya derivada se anula en el origen. Para cada $w \in \mathbb{C}^*$, la ecuación $z^m = w$ tiene exactamente m soluciones distintas. Pues bien, en general vamos a probar que cualquier función f, holomorfa y no constante en un entorno de un punto a, con $f'(a) = 0$, se comporta exactamente de la misma forma en un entorno de a. El valor de m para el que esto va a ocurrir se adivina fácilmente, si pensamos que la función $z \mapsto z^m$ tiene un cero de orden m en el origen. En general deberemos usar el orden del cero en el punto a de la función $z \mapsto f(z) - f(a)$.

Para la demostración de este importante resultado, necesitamos algo que se deduce muy fácilmente del teorema local de Cauchy, una vez que sabemos que la derivada de una función holomorfa también es holomorfa. Hasta ahora no habíamos tenido ocasión de usar este hecho, sobre el que volveremos más adelante.

- *Sea Ω un dominio estrellado y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Entonces f admite un logaritmo holomorfo en Ω, es decir, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$, la función f admite una raíz m-ésima holomorfa en Ω, es decir, existe $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = \big(h(z)\big)^m$ para todo $z \in \Omega$.*

En efecto, f'/f es una función holomorfa en Ω que, por el teorema local de Cauchy, admite una primitiva $g_0 \in \mathcal{H}(\Omega)$. Basta ahora recordar cómo, a partir de g_0 se obtiene fácilmente un logaritmo holomorfo de f. Sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $e^{\lambda + g_0(z)} = f(z)$ para todo $z \in \Omega$, luego $g = \lambda + g_0$ es el logaritmo buscado. Fijado $m \in \mathbb{N}$ definimos entonces $h(z) = e^{g(z)/m}$ para todo $z \in \Omega$, obteniendo evidentemente una raíz m-ésima holomorfa de f. ■

Teorema (Comportamiento local de una función holomorfa en un cero de su derivada). *Sea Ω un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante, y $a \in \Omega$ tal que $f'(a) = 0$. Sea $m \in \mathbb{N}$ el orden del cero en el punto a de la función $z \mapsto f(z) - f(a)$. Entonces existen dos abiertos U y V del plano, con $a \in U \subset \Omega$ y $f(a) \in V$, tales que, para cada $w \in V \setminus \{f(a)\}$, la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente m soluciones distintas en U, es decir, el conjunto $\{z \in U : f(z) = w\}$ tiene m elementos.*

Demostración. La caracterización del orden de un cero, nos permite escribir

$$f(z) - f(a) = (z-a)^m g(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

donde $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g(a) \neq 0$. Usando entonces la continuidad de g en el punto a, encontramos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,r)$.

Por tanto, g es una función holomorfa que no se anula en el dominio estrellado $D(a,r)$, luego admite en dicho dominio una raíz m-ésima holomorfa, es decir, existe $h \in \mathcal{H}\big(D(a,r)\big)$ tal que $g(z) = \big(h(z)\big)^m$ para todo $z \in D(a,r)$. Tenemos entonces

$$f(z) = f(a) + \big((z-a)\,h(z)\big)^m = f(a) + \big(\psi(z)\big)^m \qquad \forall z \in D(a,r) \tag{5}$$

donde hemos escrito $\psi(z) = (z-a)\,h(z)$ para todo $z \in D(a,r)$.

Observamos ahora que ψ es una función holomorfa en $D(a,r)$ con

$$\psi'(z) = h(z) + (z-a)\,h'(z) \qquad \forall z \in D(a,r)$$

y, en particular $\psi'(a) = h(a) \neq 0$, ya que $\big(h(a)\big)^m = g(a) \neq 0$.

Podemos por tanto aplicar a ψ el teorema de la función inversa local, obteniendo un $\delta \in \mathbb{R}^+$, con $\delta < r$, tal que ψ es inyectiva en $D(a,\delta)$ y $\psi\big(D(a,\delta)\big)$ es un conjunto abierto. Como $\psi(a) = 0$, existe $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(0,\rho) \subset \psi\big(D(a,\delta)\big)$. Los abiertos U y V que buscamos se consiguen ya tomando

$$U = D(a,\delta) \cap \psi^{-1}\big(D(0,\rho)\big) \qquad \text{y} \qquad V = D\big(f(a),\rho^m\big)$$

Fijado $w \in V \setminus \{f(a)\}$ debemos pues comprobar que el conjunto $\{z \in U : f(z) = w\}$ tiene m elementos. Denotemos por $w_1, w_2, \ldots, w_m$ a las raíces m-ésimas del número complejo no nulo $w - f(a)$, que sabemos son todas distintas, es decir, para $k, j \in \{1,2,\ldots,m\}$ con $k \neq j$, se tiene $w_k \neq w_j$. Para cada $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, tenemos $|w_k|^m = |w - f(a)| < \rho^m$, de donde $w_k \in D(0,\rho) \subset \psi\big(D(a,\delta)\big)$ y podemos escribir $w_k = \psi(z_k)$ con $z_k \in D(a,\delta)$. De nuevo los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ son todos distintos, pues de $z_k = z_j$ con $k, j \in \{1,2,\ldots,m\}$ deducimos que $w_k = \psi(z_k) = \psi(z_j) = w_j$, luego $k = j$. Concluiremos entonces la demostración probando que $\{z \in U : f(z) = w\} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$.

Para $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, es claro que $z_k \in U$, y usando (5) se tiene

$$f(z_k) = f(a) + \big(\psi(z_k)\big)^m = f(a) + w_k^m = w$$

lo que nos da una inclusión. Recíprocamente, si $z \in U$ y $f(z) = w$, de (5) deducimos que $\big(\psi(z)\big)^m = w - f(a)$ luego existe $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $\psi(z) = w_k = \psi(z_k)$, pero ψ es inyectiva en U luego $z = z_k$. ■

Como una consecuencia relevante del teorema anterior, obtenemos que la condición de que la derivada no se anule, no sólo es suficiente, sino también necesaria para la inyectividad local:

- *Si Ω es un abierto del plano, una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es inyectiva en un entorno de un punto $a \in \Omega$ si, y sólo si, $f'(a) \neq 0$.*

Cuando $f'(a) \neq 0$, el teorema de la función inversa local nos asegura la existencia de un entorno de a en el que f es inyectiva. Para el recíproco, sea $r \in \mathbb{R}^+$ verificando que $D(a,r) \subset \Omega$ y que f es inyectiva en $D(a,r)$. Si fuese $f'(a) = 0$, podríamos aplicar el teorema anterior a la restricción de f al dominio $D(a,r)$, teniendo en cuenta que la función $z \mapsto f(z) - f(a)$ tiene en el punto a un cero de orden $m \geqslant 2$. Obtendríamos un abierto U contenido en $D(a,r)$, tal que f no es inyectiva en U, cual es una contradicción. ■

El resultado anterior no tiene un análogo para funciones de una o varias variables reales. La función $x \mapsto x^3$, de $\mathbb{R}$ en sí mismo, es inyectiva, pero su derivada se anula en el origen. Análogamente, $(x,y) \mapsto (x^3, y^3)$ es una función inyectiva de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo, cuya diferencial en el origen es idénticamente nula. Para funciones holomorfas, la ventaja de la equivalencia se pone de manifiesto en el siguiente resultado:

Teorema (de la función inversa global). *Sea U un dominio y $f \in \mathcal{H}(U)$ una función inyectiva. Entonces $V = f(U)$ es un dominio y $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ con*

$$\big(f^{-1}\big)'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)} \qquad \forall z \in U$$

Demostración. Que V es abierto se deduce del teorema de la aplicación abierta, y está claro que V es conexo, puesto que U es conexo y f es continua. Por el resultado anterior, como f es inyectiva en un entorno de cada punto de U, tenemos que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, y todo lo que queda es aplicar el teorema de la función inversa local. Para cada $z \in U$, dicho teorema nos da dos abiertos U_0 y V_0, con $z \in U_0 \subset U$ y $f(z) \in V_0 \subset V$, tales que si llamamos f_0 a la restricción de f a U_0, entonces f_0 es una biyección de U_0 sobre V_0 y f_0^{-1} es derivable en el punto $f(z)$ con $\big(f_0^{-1}\big)'\big(f(z)\big) = 1/f'(z)$. Como de hecho f es inyectiva, está claro que la inversa local f_0^{-1} ha de coincidir con la restricción a V_0 de la inversa global f^{-1}. Por tanto f^{-1} es derivable en el punto $f(z)$ con $\big(f^{-1}\big)'\big(f(z)\big) = 1/f'(z)$. Como esto es válido para todo $z \in \Omega$, vemos que $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ y la demostración está concluida. ■

11.4. Ejercicios

1. Sea $R \in \mathbb{R}^+$ y $f \in \mathcal{H}\big(D(0,R)\big)$, no constante. Probar que la función $M :]0,R[\to \mathbb{R}$ definida por
$$M(r) = \max\big\{ |f(z)| : z \in C(0,r)^*\big\} \qquad \forall r \in]0,R[$$
es estrictamente creciente.

2. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω, que tenga límite en ∞. Probar que $|f|$ tiene un máximo absoluto en un punto de $\mathbb{T}$. Suponiendo que f no es constante, probar que la función $M : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por
$$M(r) = \max\big\{ |f(z)| : z \in C(0,r)^*\big\} \qquad \forall r \in]1,+\infty[$$
es estrictamente decreciente.

3. Sea P un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ y $M = \max\{|P(z)| : z \in \mathbb{T}\}$. Probar que
$$z \in \mathbb{C}, \quad |z| \geqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad |P(z)| \leqslant M|z|^n$$

4. Sea $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$, que verifica la siguiente condición:
$$z \in \mathbb{T} \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Re} z \leqslant 0 \\ 2 & \text{si } \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$$
Probar que $|f(0)| \leqslant \sqrt{2}$.

5. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $r \in]0,1[$ se tiene
$$\max\big\{ |f(z)| : |z| = r\big\} = r^n$$
Probar que existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$.

6. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ verificando que
$$|f(z)| \leqslant |f(z^2)| \qquad \forall z \in D(0,1)$$
Probar que f es constante.

7. Mostrar que el teorema fundamental del Álgebra se deduce directamente del principio del módulo mínimo.

8. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que, si la función $\operatorname{Re} f$ tiene un extremo relativo en un punto de Ω, entonces f es constante.

9. Sea $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$, tal que $\operatorname{Im} f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{T}$. Probar que f es constante.

10. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función inyectiva. Dados $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, calcular, para cada $z \in D(a,r)$, la integral
$$\int_{C(a,r)} \frac{w\, f'(w)}{f(w) - f(z)}\, dw$$

Tema 12

El teorema general de Cauchy

La teoría local de Cauchy, cuyos dos resultados básicos fueron el teorema de Cauchy para dominios estrellados y la fórmula de Cauchy para una circunferencia, nos ha permitido probar numerosas propiedades de las funciones holomorfas. Nuestro próximo objetivo es completar dicha teoría, encontrando la forma más general posible de esos dos resultados iniciales. Con respecto al teorema local de Cauchy, es natural preguntarse cuales son los abiertos del plano en los que toda función holomorfa admite una primitiva. Es fácil dar ejemplos de dominios con esta propiedad que no son estrellados. Con respecto a la fórmula de Cauchy, cabe preguntarse lo que ocurre al sustituir la circunferencia por otros caminos cerrados.

Veremos que ambas preguntas están íntimamente ligadas, en cierto modo son equivalentes, y abordaremos su estudio empezando por la segunda. Un breve análisis de la fórmula de Cauchy motivará la noción clave que marca la transición de la teoría local de Cauchy ya conocida, a la *teoría global* que ahora iniciamos. Se trata del *índice* de un punto con respecto a un camino cerrado, una noción que formaliza rigurosamente la idea intuitiva del número de vueltas que da un camino cerrado alrededor de un punto.

Por otra parte, introducimos un formalismo que nos permitirá liberarnos de la condición que deben cumplir dos caminos para poder considerar su suma. Basta para ello considerar sumas formales de caminos arbitrarios, que reciben el nombre *cadenas*, y en particular sumas formales de caminos cerrados, que llamaremos *ciclos*. Son nociones propias de una teoría muy general, llamada Álgebra Homológica, que nace con el estudio del teorema de Cauchy. Comprobaremos rutinariamente que la integral de una función continua sobre una cadena conserva las mismas propiedades que tenía la integral sobre un camino: linealidad, continuidad y aditividad.

Con los preparativos comentados, podremos probar la *forma general del teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy*, los dos resultados equivalentes en los que se resume la teoría global. Haremos la demostración publicada por el matemático canadiense John D. Dixon en 1971, históricamente la primera que puede considerarse bien formalizada, por usar sólo argumentos analíticos, evitando las consideraciones geométricas más o menos intuitivas que aparecían en las demostraciones previamente conocidas.

12.1. Índice de un punto respecto a un camino cerrado

Recordemos una integral que jugó un papel clave en la demostración de la fórmula de Cauchy. Fijados $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, para $z \in \mathbb{C} \setminus C(a,r)^*$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 1 & \text{si } |z-a| < r \\ 0 & \text{si } |z-a| > r \end{cases}$$

así que, el primer miembro de la igualdad anterior *indica* si la circunferencia $C(a,r)^*$ rodea o no al punto z. Cabe preguntarse qué ocurrirá en general si, en vez de una circunferencia, consideramos un camino cerrado arbitrario. Ello motiva la definición que sigue.

Si γ es un camino cerrado y $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, el **índice del punto z respecto al camino γ**, que se denota por $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$, viene definido por:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

Nos preguntábamos si, como en el caso particular de una circunferencia, $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ nos informa de la posición relativa del punto z con respecto al camino γ. Enseguida observamos, con ejemplos sencillos, que el índice es un concepto más refinado:

- Si $\gamma = C(a,r) + C(a,r)$, recorremos dos veces $C(a,r)^*$ en sentido positivo, y tenemos

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 2 & \text{si } |z-a| < r \\ 0 & \text{si } |z-a| > r \end{cases}$$

- Si $\gamma = -C(a,r)$, recorremos una vez la misma circunferencia en sentido negativo y

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} -1 & \text{si } |z-a| < r \\ 0 & \text{si } |z-a| > r \end{cases}$$

- Finalmente $\gamma = C(a,r) - C(a,r)$ recorre una vez la circunferencia en cada sentido y

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus C(a,r)^*$$

Estos ejemplos nos hacen sospechar que la información contenida en el índice $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ no es la posición relativa de z respecto de γ^*, sino más bien el *número de vueltas* que da el camino γ alrededor del punto z. De hecho, hay que entender que las vueltas se cuentan positiva o negativamente según el sentido de giro, y que las vueltas en sentidos contrarios se compensan, para obtener lo que podríamos llamar un número *neto* de vueltas. Las propiedades del índice que vamos a ir probando permiten convencerse de que, efectivamente, la definición de índice formaliza la idea intuitiva de número de vueltas que hemos explicado. Para empezar, veremos que el índice es siempre un número entero, cosa que no está nada clara si miramos a su definición. Para probarlo, empezamos considerando el caso de un arco, pero un camino cerrado puede ser suma de arcos no cerrados, luego debemos trabajar con arcos arbitrarios.

- *Dado un arco* $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$*, con* $a,b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$*, fijemos un punto* $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma^*$*. Entonces la función* $\tau : [a,b] \to \mathbb{C}^*$*, definida por* $\tau(t) = \sigma(t) - z$ *para todo* $t \in [a,b]$*, admite un logaritmo derivable en* $[a,b]$*, es decir, existe una función* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ *que es derivable en* $[a,b]$ *y verifica que* $\tau(t) = e^{\varphi(t)}$ *para todo* $t \in [a,b]$*. Como consecuencia, se tiene:*

$$\int_\sigma \frac{dw}{w-z} = \varphi(b) - \varphi(a) \in \operatorname{Log}\left(\frac{\sigma(b)-z}{\sigma(a)-z}\right) \tag{1}$$

La función φ buscada ha de ser una primitiva de τ'/τ, lo que la determina salvo una constante aditiva. Como $\varphi(a)$ debe ser un logaritmo de $\tau(a)$, la forma de definir φ está clara:

$$\varphi(t) = \log \tau(a) + \int_a^t \frac{\tau'(s)}{\tau(s)}\, ds \qquad \forall t \in [a,b]$$

Por el teorema fundamental del Cálculo para la integral de Cauchy, φ es derivable en $[a,b]$ con

$$\varphi'(t) = \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)-z} \qquad \forall t \in [a,b] \tag{2}$$

Para comprobar que φ es el logaritmo buscado, definimos $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ por

$$h(t) = \tau(t)\, e^{-\varphi(t)} \qquad \forall t \in [a,b]$$

obteniendo una función derivable en $[a,b]$ con

$$h'(t) = \tau'(t)\, e^{-\varphi(t)} - \tau(t)\, \varphi'(t)\, e^{-\varphi(t)} = 0 \qquad \forall t \in [a,b]$$

donde hemos usado (2). Aplicando el teorema del valor medio a la partes real e imaginaria de h obtenemos que h es constante. Como $e^{\varphi(a)} = \tau(a)$, tenemos $h(a) = 1$, luego $h(t) = 1$ para todo $t \in [a,b]$. Usando la definición de h obtenemos que φ es el logaritmo buscado: $\tau(t) = e^{\varphi(t)}$ para todo $t \in [a,b]$.

Finalmente, lo demostrado sobre φ nos lleva directamente a (1):

$$\int_\sigma \frac{dw}{w-z} = \int_a^b \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)-z}\, dt = \varphi(b) - \varphi(a) \in \operatorname{Log}\left(\frac{\sigma(b)-z}{\sigma(a)-z}\right) \qquad \blacksquare$$

Con la misma notación, supongamos que el arco σ es cerrado, con lo que $\tau(a) = \tau(b)$. Entonces $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$ son logaritmos del mismo número, luego tienen la misma parte real. En vista de (1), para calcular el índice $\operatorname{Ind}_\sigma(z)$, sólo nos interesa la parte imaginaria $\theta = \operatorname{Im} \varphi$, que es un argumento continuo de τ, es decir, una función continua $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(t) \in \operatorname{Arg} \tau(t)$ para todo $t \in [a,b]$. A partir de (1) obtenemos

$$\operatorname{Ind}_\sigma(z) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi i} = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \tag{3}$$

Como $\theta(a)$ y $\theta(b)$ son argumentos del mismo número complejo, difieren en un múltiplo entero de 2π, luego $\operatorname{Ind}_\sigma(z) \in \mathbb{Z}$. Probaremos lo mismo para cualquier camino cerrado, pero antes conviene resaltar que el argumento continuo θ aclara la interpretación intuitiva del índice.

Suponiendo que el arco τ describe un movimiento, que no pasa por el origen, $\operatorname{Arg}\tau(t)$ es el ángulo orientado entre el semieje real positivo y el vector de posición del móvil en cada instante $t \in [a,b]$. Intuitivamente, la continuidad de τ hace que este ángulo varíe de manera continua, luego no es de extrañar, aunque tampoco sea matemáticamente evidente, que podamos elegir para cada instante $t \in [a,b]$ un número real $\theta(t)$ que mide dicho ángulo, obteniendo una función continua.

Nuestro argumento continuo aumenta o disminuye según que el vector de posición gire en sentido positivo o negativo. Por tanto, la diferencia $\theta(b)-\theta(a)$, entre los valores final e inicial del argumento, se interpreta como el ángulo neto barrido por el vector de posición en todo el movimiento. Por cada vuelta completa que da el móvil alrededor del origen, en sentido positivo, el ángulo barrido aumenta 2π, mientras que cada vuelta en sentido negativo lo hace disminuir 2π. En vista de (3), al dividir por 2π, vemos que $\operatorname{Ind}_\sigma(z)$ es el número neto de vueltas que da nuestro móvil, o si se quiere el arco cerrado τ, alrededor del origen. Cuando trasladamos el origen al punto z, el arco τ se convierte en σ, luego el número de vueltas que da σ alrededor del punto z coincide con el número de vueltas que da τ alrededor del origen, que era $\operatorname{Ind}_\sigma(z)$.

Aunque sólo la hemos explicado en el caso de un arco, la anterior interpretación intuitiva del índice puede hacerse para un camino cerrado, porque sigue existiendo el argumento continuo (aunque ya no derivable) θ, y la igualdad (3) sigue siendo cierta. De hecho (3) sugiere la forma de definir el *índice de un punto respecto a una curva cerrada* arbitraria, para que siga teniendo la misma interpretación, aunque ya no se exprese como una integral curvilínea. De esta forma se generaliza la noción de índice, que aquí sólo usaremos para caminos cerrados, obteniendo de hecho un concepto básico y muy útil en Topología Algebraica.

Probemos ya, para caminos cerrados, las tres propiedades clave del índice:

- *Para todo camino cerrado γ, se tiene:*
  - (i) $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ *para todo* $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$
  - (ii) *La función* $\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C}\setminus\gamma^* \to \mathbb{Z}$ *es continua. Equivalentemente, es constante en cada componente conexa de* $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$
  - (iii) *Si U es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$, se tiene que* $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ *para todo $z \in U$.*

(i). Sea $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$ en el que γ esté definido, verificando que, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1},t_k]$ es un arco, que denotaremos por γ_k. Fijado $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$, y $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, tenemos $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma_k^*$ y podemos aplicar el resultado probado previamente para arcos, obteniendo que

$$\int_{\gamma_k} \frac{dw}{w-z} \in \operatorname{Log}\left(\frac{\gamma(t_k)-z}{\gamma(t_{k-1})-z}\right) \qquad \forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$$

La propiedad clave de los logaritmos de un número complejo nos dice que

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{dw}{w-z} \in \operatorname{Log}\left(\prod_{k=1}^n \frac{\gamma(t_k)-z}{\gamma(t_{k-1})-z}\right) = \operatorname{Log}\left(\frac{\gamma(b)-z}{\gamma(a)-z}\right) = \operatorname{Log} 1$$

Así pues, la integral anterior es un múltiplo entero de $2\pi i$, luego $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

(ii). Para abreviar, escribimos $G = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, que es un conjunto abierto, pues γ^* es compacto. Claramente, la función $\Phi : \gamma^* \times G \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(w,z) = \frac{1}{w-z} \qquad \forall\,(w,z) \in \gamma^* \times G$$

es continua. Por tanto, el lema de continuidad de la integral dependiente de un parámetro nos dice que la función $\operatorname{Ind}_\gamma$, que claramente verifica

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \qquad \forall\, z \in G$$

es continua en G. Su restricción a cada componente conexa de G es una función continua en un conexo con valores enteros, luego es constante. La equivalencia se debe a que las componentes conexas de G son conjuntos abiertos. Toda función, de G en cualquier espacio topológico, que sea constante en cada componente conexa de G, es constante en un entorno de cada punto de G luego, por el carácter local de la continuidad, es continua.

(iii). Veamos previamente que G tiene una única componente conexa no acotada. Como γ^* está acotado, sea $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $\gamma^* \subset D(0,R)$. Entonces $\mathbb{C} \setminus D(0,R)$ está contenido en G y es conexo, luego $\mathbb{C} \setminus D(0,R) \subset U$ donde U es una componente conexa de G, que no está acotada. Si V es otra componente conexa de G, $V \neq U$, se tiene $V \cap \big(\mathbb{C} \setminus D(0,R)\big) \subset V \cap U = \emptyset$, así que $V \subset D(0,R)$ y V está acotada. Nótese que el mismo razonamiento puede usarse para cualquier conjunto acotado $A \subset \mathbb{C}$, obteniendo que $\mathbb{C} \setminus A$ tiene una única componente conexa no acotada.

Pues bien, usando (ii) sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = m$ para todo $z \in U$. Tomando de nuevo $R \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\gamma^* \subset D(0,R)$ tenemos como antes que $\mathbb{C} \setminus D(0,R) \subset U$. Por tanto, para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > R$ podemos escribir

$$|m| = |\operatorname{Ind}_\gamma(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{dw}{w-z} \right| \leqslant \frac{l(\gamma)}{2\pi\big(|z| - R\big)}$$

Deducimos claramente que

$$|m| \leqslant \lim_{z \to \infty} \frac{l(\gamma)}{2\pi\big(|z| - R\big)} = 0$$

luego $m = 0$ como queríamos demostrar. ■

Comentemos finalmente que todas las propiedades anteriores eran claramente esperables a la vista de la interpretación intuitiva del índice. El número de vueltas que da un camino cerrado γ alrededor de un punto $z \in G$ debía ser un número entero. Al desplazar ligeramente z, dicho número de vueltas no debía cambiar, luego la función $\operatorname{Ind}_\gamma$ tenía que ser constante en un entorno de cada punto de G, y por tanto continua, es decir, constante en cada componente conexa de G. Por último, la componente conexa no acotada U contiene claramente puntos que no pueden estar rodeados por γ, luego el índice tenía que anularse en U.

12.2. Cadenas y ciclos

Para estudiar la forma general del teorema de Cauchy, pero sobre todo a la hora de deducir de ella algunas consecuencias interesantes, es útil introducir un formalismo que permite manejar cómodamente la suma de las integrales de una función sobre varios caminos, aunque la suma de dichos caminos no tenga sentido.

Llamaremos **cadena** a toda suma formal

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \tag{4}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y γ_k es un camino para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Resaltamos que dichos caminos son completamente arbitrarios, no es necesario, como ocurría cuando definíamos la suma de caminos, que el extremo de cada camino coincida con el origen del que le sigue. Se verifique o no dicha condición, siempre podemos considerar la suma formal Γ. Por tanto, dos cadenas $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ y $\Sigma = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k$ sólo son iguales cuando $m = n$ y $\sigma_k = \gamma_k$ para todo $k \in I_n$. Dicho de otra forma, la cadena Γ dada por (4) determina en forma única al número natural n y a los caminos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Esto permite hacer las definiciones que siguen.

La **imagen** de la cadena Γ que aparece en (4) es el subconjunto de $\mathbb{C}$ dado por

$$\Gamma^* = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k^*$$

que como en el caso de una curva, es compacto, pero ahora puede no ser conexo. Usaremos también la **longitud** de la cadena Γ, que se define como la suma de las longitudes de los caminos que la forman:

$$l(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} l(\gamma_k)$$

Si ahora $\Sigma = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k$ es otra cadena cualquiera, definimos la **suma** de las cadenas Γ y Σ como una simple yuxtaposición de sumas formales:

$$\Gamma + \Sigma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m$$

También usaremos la **cadena opuesta** de Γ, que viene dada por

$$-\Gamma = (-\gamma_1) + (-\gamma_2) + \ldots (-\gamma_n) = \sum_{k=1}^{n} (-\gamma_k)$$

Es claro que $(\Gamma + \Sigma)^* = \Gamma^* \cup \Sigma^*$, así como que $(-\Gamma)^* = \Gamma^*$.

Generalizamos ahora, de forma bastante obvia, la integral sobre un camino. Para la cadena Γ dada por (4), consideramos el espacio de Banach complejo $C(\Gamma^*)$ de las funciones complejas continuas en el compacto Γ^*, con la norma del máximo:

$$\|f\| = \text{máx}\left\{ |f(z)| : z \in \Gamma^* \right\} \qquad \forall f \in C(\Gamma^*)$$

Para $f \in C(\Gamma^*)$ definimos la **integral** de f sobre la cadena Γ por

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

Las propiedades básicas de la integral sobre un camino se extienden obviamente a esta situación formalmente más general. La integral sobre Γ es una aplicación **lineal y continua** de $C(\Gamma^*)$ en $\mathbb{C}$. Concretamente, es claro que

$$\left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| \leqslant l(\Gamma)\,\|f\| \qquad \forall f \in C(\Gamma^*)$$

Además, la integral es **aditiva**, en el sentido de que, para cualesquiera cadenas Γ y Σ se tiene

$$\int_{\Gamma+\Sigma} f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_\Sigma f(z)\,dz \qquad \forall f \in C(\Gamma^* \cup \Sigma^*)$$

y también es obvio que

$$\int_{-\Gamma} f(z)\,dz = -\int_\Gamma f(z)\,dz \qquad \forall f \in C(\Gamma^*)$$

Llamaremos **ciclo** a toda suma formal de caminos cerrados. Se trata obviamente de un tipo particular de cadena, así que todo lo dicho anteriormente sobre cadenas se aplica en particular a los ciclos. Es claro que la suma de dos ciclos es un ciclo, así como que la cadena opuesta de un ciclo también es un ciclo.

También está clara la forma de extender la noción de índice respecto de un camino cerrado, definiéndola para ciclos. Si $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ es un ciclo, y $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, tenemos $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma_k^*$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, luego podemos definir el **índice del punto** z **respecto al ciclo** Γ por

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{dw}{w-z} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z)$$

Comprobamos fácilmente que el índice respecto a un ciclo tiene la tres propiedades clave que tenía para caminos cerrados:

- *Si* Γ *es un ciclo, se tiene* $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$ *para todo* $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, *la función* $\operatorname{Ind}_\Gamma : \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \to \mathbb{Z}$ *es constante en cada componente conexa de* $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ *y se anula en la componente no acotada.*

Pongamos $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ donde $n \in \mathbb{N}$ y γ_k es un camino cerrado para todo $k \in I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, está claro que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)$ es un número entero, por ser una suma de números enteros. Si V es una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ y $k \in I_n$, se tiene que V está contenida en una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma_k^*$, luego la función $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}$ es constante en V. Como esto ocurre para todo $k \in I_n$, concluimos que $\operatorname{Ind}_\Gamma$ también es constante en V. Finalmente observemos que, por ser Γ^* acotado, $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ tiene una sola componente conexa no acotada, digamos U. Entonces, para todo $k \in I_n$, U está contenida en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma_k^*$, así que $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}$ se anula en U. Como esto ocurre para todo $k \in I_n$, vemos que $\operatorname{Ind}_\Gamma$ también se anula en U. ■

12.3. Comentario sobre el teorema de Cauchy

Varios teoremas conocidos, que enseguida revisaremos, siguen un mismo esquema. Dados un abierto Ω del plano, un camino cerrado γ en Ω y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, el teorema afirma que la integral de f sobre γ se anula. Asumiendo el formalismo que acabamos de introducir, a partir de ahora sustituimos el camino cerrado γ por un ciclo Γ **en** Ω, es decir, tal que $\Gamma^* \subset \Omega$, con lo que la tesis común a los teoremas en cuestión será:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \tag{5}$$

Como esto no siempre es cierto, cada teorema tiene una hipótesis adicional, que puede referirse a la función f, al ciclo Γ o al abierto Ω, dando lugar a tres tipos de teorema.

Para abordar la forma general del teorema de Cauchy, es natural preguntarse cual es la hipótesis más general posible sobre la función f, sobre el ciclo Γ o sobre el abierto Ω. Ahora bien, la condición suficiente más general para que se verifique una afirmación es siempre la que sea a la vez necesaria y suficiente, luego la forma más general de cada tipo de teorema siempre será una equivalencia, o si se quiere, una caracterización. Tenemos por tanto tres problemas diferentes, que vamos a ir analizando:

- *Dado un abierto Ω del plano, caracterizar las funciones $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que verifican (5) para todo ciclo Γ en Ω.*

Conocemos la respuesta a este problema: es la caracterización de la existencia de primitiva, pues la función f verifica (5) para todo ciclo Γ en Ω, si y sólo si, la verifica para todo camino cerrado en Ω, lo que equivale a que f admita una primitiva en Ω. Así pues, para este primer tipo de teorema de Cauchy tenemos ya la forma más general posible, pero la respuesta no es satisfactoria, pues la existencia de primitiva fue precisamente la motivación para estudiar los teoremas de Cauchy. Pasemos pues al segundo problema:

- *Dado un abierto Ω del plano, caracterizar los ciclos Γ en Ω que verifican (5) para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Sobre este problema tenemos aún poca información. El teorema de Cauchy para el triángulo nos da ciclos muy concretos que verifican la condición requerida: los del tipo $\Gamma = [a,b,c,a]$, siempre que todo el triángulo $\Delta(a,b,c)$ esté contenido en Ω. Podríamos mejorar fácilmente el resultado, encontrando otras poligonales con la misma propiedad, pero no merece la pena, ya que vamos a resolver completamente el problema, en la forma que pasamos a explicar.

Partimos de una condición claramente necesaria: si Γ verifica (5) para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, fijado $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, podemos tomar $f(w) = 1/(w-z)$ para todo $w \in \Omega$, y obtenemos que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$. Demos un nombre a los ciclos que verifican esta condición:

Si Ω es un abierto del plano y Γ un ciclo en Ω, se dice que Γ es **nul-homólogo** con respecto a Ω, cuando verifica que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Por ejemplo, es claro que todo ciclo es nul-homólogo con respecto a $\mathbb{C}$.

Esta nomenclatura viene del Álgebra Homológica. En realidad, se dice que dos ciclos en Ω son *homólogos* con respecto a Ω cuando todos los puntos de $\mathbb{C}\setminus\Omega$ tienen el mismo índice respecto a ambos. Se trata claramente de una relación de equivalencia en el conjunto de todos los ciclos en Ω y es fácil ver que la operación de suma de ciclos permite convertir el conjunto cociente en un grupo abeliano que es el *grupo de homología* del abierto Ω. Claramente un ciclo es nul-homólogo con respecto a Ω cuando su clase de equivalencia es el elemento neutro (el cero) de dicho grupo.

Pues bien, la forma general del teorema de Cauchy nos dirá que la condición de que un ciclo Γ en Ω sea nul-homólogo con respecto a Ω, que según hemos visto, es necesaria para que se verifique (5) para toda $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, también es suficiente, consiguiendo la caracterización buscada. La diferencia clave con la respuesta dada al primer problema estriba en que, gracias a la interpretación del índice como número de vueltas, prácticamente podemos saber a simple vista si un ciclo en Ω es o no nul-homólogo con respecto a Ω. Así pues, tenemos una respuesta satisfactoria al segundo problema planteado, de la que se deducirá como veremos una respuesta también satisfactoria al tercero. Se comprende por tanto que este resultado se conozca como *forma general* del teorema de Cauchy. Pasemos ya al tercer problema:

- *Caracterizar los abiertos* Ω *del plano que verifican* (5) *para todo ciclo* Γ *en* Ω *y para toda* $f\in\mathcal{H}(\Omega)$.

Este problema parece el más ambicioso de los tres, pero en realidad se reduce a cualquiera de los otros dos. Por una parte, usando la respuesta al primer problema, vemos que un abierto Ω tiene la propiedad pedida si, y sólo si, toda función holomorfa en Ω admite una primitiva. De nuevo esta respuesta no es satisfactoria, lo que nos gustaría es tener una caracterización más sencilla. Hasta ahora sólo tenemos una respuesta parcial, la que nos da el teorema local de Cauchy: todo dominio estrellado verifica la condición requerida. Usando la solución ya anunciada del segundo problema, obtenemos una respuesta al tercero mucho más prometedora: los abiertos que nos interesan son los que pasamos a definir.

Se dice que un abierto del plano es **homológicamente conexo**, cuando todo ciclo en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω. Esto es tanto como decir que el grupo de homología de Ω es trivial: se reduce al elemento neutro. Nótese también que en realidad basta considerar los ciclos que constan de un sólo camino cerrado. Es obvio que, si todo camino cerrado en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω, todo ciclo en Ω también lo será. Conviene finalmente resaltar que, para un abierto del plano, ser homológicamente conexo no guarda relación con ser conexo. Es claro que existen dominios que no son homológicamente conexos, como $\mathbb{C}^*$ sin ir más lejos, mientras que, por ejemplo la unión de dos discos abiertos disjuntos es un abierto homológicamente conexo que no es conexo. En realidad, es fácil ver que un abierto del plano es homológicamente conexo si, y sólo si, lo son todas sus componentes conexas.

La respuesta a este tercer problema es satisfactoria por la misma razón que la del segundo: prácticamente podemos adivinar a simple vista si un abierto Ω es homológicamente conexo. Si no lo es, existe un camino cerrado γ en Ω y un punto $z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$ tales que $\operatorname{Ind}_\gamma(z)\neq 0$. Intuitivamente, esto significa que el punto z está rodeado por puntos de Ω, los puntos de γ^*, pero no pertenece a Ω, luego Ω tiene un “agujero”. Así pues, hablando intuitivamente, los abiertos homológicamente conexos son los que no tienen “agujeros”.

Pasemos a comentar la forma en que vamos a generalizar la fórmula de Cauchy, empezando por recordar cómo se obtuvo. Fijados $z \in D(a,r) \subset \overline{D}(a,r) \subset \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, el paso clave fue comprobar que

$$\int_{C(a,r)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = 0$$

para lo cual se usaba el teorema local de Cauchy, aplicado a la función integrando, que ahora sabemos que es holomorfa en Ω. Si usamos la versión general del teorema de Cauchy que hemos anunciado, podemos sustituir $C(a,r)$ por cualquier ciclo Γ en Ω que sea nul-homólogo con respecto a Ω, obteniendo

$$\int_{\Gamma} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = 0 \qquad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^* \tag{6}$$

Por la linealidad de la integral y la definición de índice, esta igualdad equivale a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} = \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)\, f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \tag{7}$$

Esta es la forma general de la fórmula de Cauchy. Nótese que la condición $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ equivale precisamente a que la circunferencia $C(a,r)$ sea un ciclo en Ω, nul-homólogo con respecto a Ω, luego ahora tenemos una versión mucho más general de la fórmula, al haber sustituido la circunferencia $C(a,r)$ por un ciclo arbitrario que cumpla la misma hipótesis.

Así pues, la versión general del teorema de Cauchy ya anunciada, permitiría generalizar también la fórmula de Cauchy, con análogo razonamiento al usado para las versiones locales. La primera idea de Dixon fue probar ambos resultados en orden inverso, empezando por generalizar la fórmula, pues luego el teorema es una consecuencia inmediata, como veremos. Así pues, en sus versiones generales, ambos resultados son equivalentes. Se trata por tanto de probar directamente (7), o lo que es lo mismo (6), y aquí viene la segunda gran idea de Dixon: observar que el primer miembro de (6) es una función holomorfa, en principio definida para $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, y extenderla para obtener una función entera que, gracias al teorema de Liouville, acaba siendo idénticamente nula.

12.4. La demostración de Dixon

Veamos ya con detalle la prueba del siguiente resultado:

Forma general del teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy. *Sea Ω un abierto del plano y Γ un ciclo en Ω, nul-homólogo con respecto a Ω. Para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene:*

$$\text{(i)} \quad \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{\Gamma} f(w)\,dw = 0$$

Demostración. (i). Empezamos considerando la función $\Phi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida, para cualesquiera $w, z \in \Omega$, por

$$\Phi(w,z) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z \\ f'(w) = f'(z) & \text{si } w = z \end{cases}$$

Como lema previo al teorema de la función inversa se probó en su momento que Φ es continua, luego también lo es su restricción a $\Gamma^* \times \Omega$. Además, fijado $w \in \Gamma^*$, la función $\Phi_w : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Phi_w(z) = \Phi(w,z) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \forall z \in \Omega \setminus \{w\} \quad \text{y} \quad \Phi_w(w) = f'(w)$$

es claramente holomorfa en $\Omega \setminus \{w\}$ y continua en el punto w. Por el teorema de extensión de Riemann, $\Phi_w \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $w \in \Gamma^*$. El teorema de holomorfía de la integral dependiente de un parámetro nos dice que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ donde

$$\varphi(z) = \int_\Gamma \Phi(w,z)\, dw \qquad \forall z \in \Omega$$

A decir verdad, el teorema se refiere a la integral sobre un camino, pero el ciclo Γ es suma formal de caminos, luego φ es una suma de funciones a las que sí se aplica literalmente el teorema. El próximo paso será extender φ para tener una función entera.

Repetimos el razonamiento hecho para Φ, con otra función de dos variables, muy similar pero más sencilla. Concretamente consideramos, el conjunto $U = \{ z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0 \}$, que es abierto por ser una unión de abiertos, las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ en las que el índice se anule. Definimos entonces $\Psi : \Gamma^* \times U \to \mathbb{C}$ por

$$\Psi(w,z) = \frac{f(w)}{w - z} \qquad \forall (w,z) \in \Gamma^* \times U$$

y esta vez es obvio que Ψ es continua, así como que, fijado $w \in \Gamma^*$, la función $z \mapsto \Psi(w,z)$ es holomorfa en U, pues se trata de una función racional. Aplicando de nuevo la holomorfía de la integral dependiente de un parámetro, tenemos $\psi \in \mathcal{H}(U)$ donde

$$\psi(z) = \int_\Gamma \Psi(w,z)\, dw \qquad \forall z \in U$$

Como, por hipótesis, Γ es nul-homólogo con respecto a Ω, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tenemos $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$, luego $z \in U$. Así pues, $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset U$, es decir, $\Omega \cup U = \mathbb{C}$. Además, para todo $z \in \Omega \cap U$ tenemos

$$\varphi(z) = \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \psi(z) - 2\pi i f(z) \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \psi(z)$$

Tenemos ya la extensión buscada, pues podemos definir $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ escribiendo

$$h(z) = \varphi(z) \quad \forall z \in \Omega \qquad \text{y} \qquad h(z) = \psi(z) \quad \forall z \in U$$

El carácter local de la holomorfía nos asegura que h es una función entera, pero acabaremos viendo que h es idénticamente nula.

Si $R = \max\{|w| : w \in \Gamma^*\}$, el conjunto $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R)$ está contenido en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, y por tanto en U. Si además $M = \max\{|f(w)| : w \in \Gamma^*\}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ que verifique $|z| > R$ se tendrá

$$|h(z)| = |\psi(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \right| \leqslant \frac{M\, l(\Gamma)}{|z| - R}$$

Deducimos que $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$ y en particular h está acotada. Por el teorema de Liouville, h es constante, luego es idénticamente nula. Para $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ tenemos entonces

$$0 = h(z) = \varphi(z) = \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z}\, dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - 2\pi i \operatorname{Ind}_\Gamma(z)\, f(z)$$

de donde se deduce claramente la igualdad (i).

(ii). Fijamos $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ arbitrario y definimos

$$g(w) = (w-z)\, f(w) \qquad \forall\, w \in \Omega$$

Es claro que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, al aplicarle la fórmula de Cauchy recién demostrada, obtenemos

$$0 = \operatorname{Ind}_\Gamma(z)\, g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w)\, dw$$

como queríamos demostrar. ■

12.5. Abiertos homológicamente conexos

Como habíamos anunciado, deducimos del teorema anterior una útil caracterización de los abiertos en los que toda función holomorfa admite una primitiva. De paso resolvemos otro problema que teníamos planteado, acerca de la existencia de logaritmos holomorfos.

Teorema. *Para un abierto Ω del plano, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Ω es homológicamente conexo, es decir, $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ para todo ciclo Γ en Ω y todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$*

(ii) *Para todo ciclo Γ en Ω y toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene que $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$*

(iii) *Toda función holomorfa en Ω admite una primitiva, es decir, para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$*

(iv) *Toda función holomorfa en Ω, que no se anule, admite un logaritmo holomorfo, es decir, para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, se puede encontrar $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$*

Demostración. Las implicaciones $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ son, respectivamente, la forma general del teorema de Cauchy y la caracterización de la existencia de primitiva.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Esta implicación se probó en su momento, en el caso particular de un dominio estrellado, y ahora el razonamiento es el mismo. De (iii) se deduce que la función $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admite una primitiva, pero sabemos que eso equivale a que f admita un logaritmo holomorfo. De hecho, si $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica que $F' = f'/f$, sabemos que existe una función $\lambda \in \mathcal{H}(\Omega)$, constante en cada componente conexa de Ω, tal que $e^{\lambda(z)+F(z)} = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Fijado un punto $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, la función $w \mapsto w - z$ es holomorfa en Ω y no se anula, luego (iv) nos da una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$w - z = e^{g(w)} \qquad \forall w \in \Omega$$

Se tiene entonces claramente

$$1 = e^{g(w)} g'(w) = (w-z) g'(w) \quad \forall w \in \Omega, \qquad \text{es decir,} \qquad g'(w) = \frac{1}{w-z} \quad \forall w \in \Omega$$

Así pues, la función $w \mapsto 1/(w-z)$ admite una primitiva en Ω, luego su integral sobre cualquier camino cerrado en Ω es cero. Esto implica claramente que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ para todo ciclo Γ en Ω, como queríamos demostrar. ■

Como ya quedó explicado, las equivalencias del teorema anterior pueden entenderse como respuesta satisfactoria a todos los problemas que en él aparecen, pues en la práctica, es bien fácil saber si un abierto Ω del plano es homológicamente conexo. Intuitivamente, esto significa que Ω no tiene "agujeros", y una manera fácil de formalizar esta idea consiste en definir los "agujeros" de Ω como las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Es fácil entonces probar una implicación:

- *Si Ω es un abierto del plano y $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no tiene componentes conexas acotadas, entonces Ω es homológicamente conexo.*

Dados un ciclo Γ en Ω y un punto $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, deberemos comprobar que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$. Si V es la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ que contiene al punto z, al ser $V \subset \mathbb{C} \setminus \Omega \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, deducimos que $V \subset U$ donde U es una componente conexa $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. Por hipótesis, V no está acotada, luego U es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. Como $z \in V \subset U$ tenemos $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ como se quería. ■

Aunque no vamos a demostrarlo, conviene saber que el recíproco del enunciado anterior también es cierto. Por tanto, *un abierto Ω del plano es homológicamente conexo si, y sólo si, $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no tiene componentes conexas acotadas.* Se tiene así una caracterización topológica de los abiertos homológicamente conexos del plano, aunque no mediante una propiedad intrínseca al abierto Ω con el que trabajamos, pues se trata de una propiedad topológica de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Se puede argumentar que la acotación no es una propiedad topológica, pero en nuestro caso sí lo es: un conjunto $V \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ está acotado si, y sólo si, su cierre relativo a $\mathbb{C}$ es compacto y, puesto que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es cerrado en $\mathbb{C}$, el cierre de V en $\mathbb{C}$ es el mismo que en $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

En Topología Algebraica se maneja otra caracterización de los abiertos homológicamente conexos del plano que sí es una propiedad topológica intrínseca del abierto con el que se trabaja, y de hecho tiene sentido para cualquier espacio topológico: *la conexión simple*. No vamos a explicar la definición de esta propiedad topológica, que se basa en otra noción básica de la Topología Algebraica, la *homotopía*.

12.6. Ejercicios

1. Enunciar con detalle y demostrar que el índice de un punto respecto a un camino cerrado se conserva por giros, homotecias y traslaciones.

2. Sea $\rho : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^+$ una función de clase C^1, con $\rho(-\pi) = \rho(\pi)$, y sea $\sigma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ el arco definido por
$$\sigma(t) = \rho(t)\, e^{it} \qquad \forall t \in [-\pi, \pi]$$
Calcular $\operatorname{Ind}_{\sigma}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma^*$.

3. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ caminos cerrados y $z \in \mathbb{C}$ verificando que
$$|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t) - z| \qquad \forall t \in [a,b]$$
Probar que $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z)$.

4. Sea $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ una función continua, tal que:
$$\alpha(0) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha(t) \to \infty \ \ (t \to +\infty)$$
y sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \alpha(\mathbb{R}_0^+)$. Probar que Ω es abierto y que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

5. Sea Ω un abierto homológicamente conexo del plano tal que $\mathbb{R}^+ \subset \Omega \subset \mathbb{C}^*$. Probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que
$$f(x) = x^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Tema 13

Singularidades

Del mismo modo que la fórmula de Cauchy para una circunferencia nos permitió obtener el desarrollo en serie de potencias de una función holomorfa, la versión general de la fórmula da lugar a desarrollos o métodos de aproximación más generales, entre los que vamos a estudiar el más sencillo, que se conoce como *desarrollo en serie de Laurent*.

Estas series de Laurent permiten construir explícitamente todas las funciones holomorfas en un *anillo*, es decir, el dominio comprendido entre dos circunferencias concéntricas, admitiendo los casos extremos en que el radio interior es nulo, el exterior es infinito, o ambas cosas. Así aumentamos, de forma muy notable, la familia de los abiertos del plano para los que podemos dar una descripción explícita de todas las funciones holomorfas en cada uno de ellos. Hasta ahora, esto sólo sabíamos hacerlo para el plano y para un disco abierto.

Además, el desarrollo en serie de Laurent facilita el estudio de las posibles *singularidades* de una función holomorfa. Se trata de clasificar con detalle los diferentes comportamientos que puede presentar en un punto, una función que sea holomorfa en un entorno reducido del mismo.

13.1. Series de Laurent

Dado $a \in \mathbb{C}$, una **serie de Laurent** centrada en a, es una serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$, en la que, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f_n : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ viene dada, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, por

$$f_0(z) = c_0 \qquad \text{y} \qquad f_n(z) = c_n \, (z-a)^n + c_{-n} \, (z-a)^{-n} \quad \forall \, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

donde, para cada $k \in \mathbb{Z}$, el coeficiente $c_k \in \mathbb{C}$ es constante.

Por tanto, los datos que determinan una serie de Laurent son: el punto $a \in \mathbb{C}$ en el que está centrada, el coeficiente $c_0 \in \mathbb{C}$ que da lugar al término constante de la serie, y dos sucesiones de coeficientes $\{c_n\}$ y $\{c_{-n}\}$, que son sucesiones arbitrarias de números complejos. La segunda marca la diferencia con las series de potencias: si $c_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la serie de Laurent anterior es una serie de potencias, salvo que habríamos excluido sin motivo el punto a.

Podemos decir que, pasar de las series de potencias a las de Laurent es admitir potencias cuyos exponentes son enteros negativos. Observemos la serie de Laurent recién definida como sucesión de funciones, es decir, veamos cómo son las sumas parciales. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, escribimos $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_k$, es claro que, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$S_{n+1}(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(c_k (z-a)^k + c_{-k} (z-a)^{-k} \big) = \sum_{k=-n}^{n} c_k (z-a)^k$$

Esta expresión refuerza la idea intuitiva de que estamos intentando sumar, ordenadas de cierta forma, todas las potencias enteras de la función $z \mapsto z - a$, afectada cada una de ellas por su correspondiente coeficiente. Vemos que las sumas parciales de una serie de Laurent, centrada en $a \in \mathbb{C}$, son funciones racionales cuyos denominadores sólo pueden anularse en el punto a.

Resaltando la similitud con las series de potencias, la serie de Laurent definida en (1) se denota por

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n \tag{2}$$

y cuando dicha serie converge en un punto $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, su suma se denota por

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k (z-a)^k$$

Esto es sólo una notación sugerente, debe quedar claro que una serie de Laurent no es más que un tipo particular de serie de funciones, y su suma, cuando converge, se define exactamente igual que la de cualquier otra serie de funciones.

13.2. Convergencia de una serie de Laurent

Para no tener que hacer demasiadas distinciones de casos, convenimos en todo lo que sigue que la desigualdad $\rho < \infty$ se verifica para todo $\rho \in \mathbb{R}_0^+$. Por ejemplo, con este convenio, podemos decir que el dominio de convergencia de una serie de potencias no trivial, centrada en a y con radio de convergencia R, es siempre $D(a,R) = \{ z \in \mathbb{C} : |z-a| < R \}$, puesto que cuando $R = \infty$, tenemos simplemente $D(a,\infty) = \mathbb{C}$. Así pues, nuestro convenio evita distinguir los dos casos que se pueden presentar al estudiar una serie de potencias no trivial.

Pues bien, al estudiar la convergencia de una serie de Laurent encontraremos igualmente las no triviales, cuyo dominio de convergencia será la región contenida entre dos circunferencias concéntricas, pero admitiendo los casos extremos, es decir, el radio interior puede anularse y el radio exterior puede ser infinito. Todos los dominios de este tipo reciben el nombre de anillos abiertos. Así pues, el **anillo abierto** de centro $a \in \mathbb{C}$ y radios r y R, con $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, es el dominio definido por

$$A(a\,;r,R) = \{ z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R \}$$

Por supuesto, la situación más natural se presenta cuando $0 < r < R < \infty$ y $A(a\,;\,r,R)$ es el dominio comprendido entre dos circunferencias, pero resaltemos los casos extremos, con el convenio que acabamos de hacer:

- Para $R \in \mathbb{R}^+$ es claro que $A(a\,;\,0,R) = D(a,R) \setminus \{a\}$
- Para $r \in \mathbb{R}^+$ se tiene $A(a\,;\,r,\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,r)$
- Finalmente, es claro que $A(a\,;\,0,\infty) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Pasamos a estudiar la convergencia de la serie de Laurent que aparece en (2), definida más explícitamente en (1). Ello se reduce en gran medida a estudiar dos series de potencias, salvo que en una de ellas hacemos un cambio de variable. Concretamente, podemos escribir

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,(z-a)^n = \sum_{n\geqslant 0} f_n = \sum_{n\geqslant 0}(g_n + h_n) \tag{3}$$

donde $g_0 = f_0$, $h_0 = 0$ y, para cualesquiera $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ y $n \in \mathbb{N}$, hemos definido

$$g_n(z) = c_n\,(z-a)^n \qquad \text{y} \qquad h_n(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{4}$$

Esto nos lleva a estudiar, por una parte, la serie $\sum_{n\geqslant 0} g_n$, que es una serie de potencias, y por otra, la serie $\sum_{n\geqslant 1} h_n$, que se obtiene a partir de $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}\,w^n$ al hacer $w = 1/(z-a)$.

Denotemos pues por R^+ y R^- a los radios de convergencia de las series $\sum_{n\geqslant 0} c_n\,(z-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}\,w^n$ respectivamente, así que $R^+, R^- \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$. Diremos que R^+ y R^- son los **radios de convergencia** de nuestra serie de Laurent. Vienen determinados por ella y podemos calcularlos mediante la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$R^+ = \frac{1}{\limsup\left\{\sqrt[n]{|\,c_n\,|}\right\}} \qquad \text{y} \qquad R^- = \frac{1}{\limsup\left\{\sqrt[n]{|\,c_{-n}\,|}\right\}}$$

entendiendo que el límite superior de una sucesión de números reales no mayorada es ∞, así como que $1/\infty = 0$ y $1/0 = \infty$, convenios que también mantendremos en todo lo que sigue. Para cualquier serie de Laurent con la que estemos trabajando, denotaremos siempre por R^+ y R^- a sus radios de convergencia, recién definidos.

Se adivina claramente que la condición natural para asegurarse la convergencia de nuestra serie de Laurent en un punto $z \in \mathbb{C}\setminus\{a\}$ es que se tenga por una parte $|\,z-a\,| < R^+$, y por otra $\dfrac{1}{|\,z-a\,|} < R^-$, lo que claramente equivale a $\dfrac{1}{R^-} < |\,z-a\,|$. Esto motiva las definiciones que siguen.

Diremos que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,(z-a)^n$ es una **serie de Laurent no trivial**, cuando $\dfrac{1}{R^-} < R^+$, lo que en particular implica que $R^- > 0$ y $R^+ > 0$. Entonces diremos también que $A(a\,;\,1/R^-, R^+)$ es el **anillo de convergencia** de la serie. El siguiente resultado muestra que este anillo hace el mismo papel que tenía el dominio de convergencia de una serie de potencias no trivial. De paso vemos que las series de Laurent nos dan un método muy efectivo para construir funciones holomorfas en anillos arbitrarios.

- *Sea $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,(z-a)^n$ una serie de Laurent no trivial y sea Ω su anillo de convergencia. Entonces la serie converge absolutamente en Ω y uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. Por tanto, su suma*

$$f(z) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \qquad \forall\, z\in\Omega$$

es una función holomorfa en Ω. De hecho, las series $\sum_{n\geqslant 0} c_n\,(z-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ de la misma forma y se tiene:

$$f(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \,+\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \qquad \forall\, z\in\Omega$$

La demostración es bien sencilla. Escribimos la serie de Laurent como en (3) donde $g_0 = f_0$, $h_0 = 0$ y las sucesiones $\{g_n\}$, $\{h_n\}$ vienen dadas por (4). Recordamos que R^+ y R^- son los radios de convergencia de las series de potencias $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}\,w^n$ respectivamente, con lo que $\Omega \,=\, A(a\,;\,1/R^-, R^+)$.

Si K es compacto y $K\subset\Omega$, como $K\subset D(a,R^+)$, la serie $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge absoluta y uniformemente en K. Por otra parte, el conjunto $H \,=\, \big\{\,1/(z-a)\,:\, z\in K\big\}$, es compacto, por ser la imagen de K por una función continua, y verifica que $H\subset D(a,R^-)$, luego la serie $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}\,w^n$ converge absoluta y uniformemente en H. Esto implica claramente que la serie $\sum_{n\geqslant 1} h_n$ converge absoluta y uniformemente en K. Como $|\,f_n(z)\,| \,\leqslant\, |\,g_n(z)\,| + |\,h_n(z)\,|$ para cualesquiera $z\in K$ y $n\in\mathbb{N}$, concluimos que la serie de Laurent $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente en K. Esto es válido para todo conjunto compacto $K\subset\Omega$, y en particular la serie converge absolutamente en Ω. Además, hemos comprobado que su suma verifica:

$$f(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) \,+\, \sum_{n=1}^{\infty} h_n(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n \,+\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \quad \forall\, z\in\Omega$$

Puesto que $f_n\in\mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que $f\in\mathcal{H}(\Omega)$. ■

13.3. Desarrollo de Laurent

El principal interés de la construcción anterior estriba en que, recíprocamente, toda función holomorfa en un anillo arbitrario puede expresarse como suma de una serie de Laurent, como enseguida veremos. Tenemos así una descripción explícita de todas las funciones holomorfas en un anillo, igual que el desarrollo en serie de Taylor nos permitió describir todas las funciones enteras, o todas las funciones holomorfas en un disco abierto.

Desarrollo en serie de Laurent. *Sea* $\Omega = A(a\,;\,r,R)$ *un anillo abierto arbitrario y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Entonces existe una única serie de Laurent no trivial* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$, *cuyo anillo de convergencia contiene a* Ω, *que verifica:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \qquad \forall\, z \in \Omega \tag{5}$$

De hecho, para cualquier $\rho \in \mathbb{R}^+$ *que verifique* $r < \rho < R$, *se tiene:*

$$c_n = \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

Demostración. Empezamos viendo que las integrales de (6) no dependen del $\rho \in]\,r,R\,[$ que usemos. Sean $\rho_1,\rho_2 \in]\,r,R\,[$ y consideremos el ciclo $\Gamma = C_2 - C_1$, donde $C_1 = C(a,\rho_1)$ y $C_2 = C(a,\rho_2)$, que verifica $\Gamma^* \subset \Omega$ y es nul-homólogo con respecto a Ω. En efecto, si $w \in \mathbb{C}\setminus\Omega$ se tendrá, o bien $|\,w-a\,| \leqslant r$, en cuyo caso, $\operatorname{Ind}_{C_1}(w) = \operatorname{Ind}_{C_2}(w) = 1$, o bien $|\,w-a\,| \geqslant R$, con lo que $\operatorname{Ind}_{C_1}(w) = \operatorname{Ind}_{C_2}(w) = 0$; en ambos casos, $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(w) = 0$. Fijado $n \in \mathbb{Z}$, la función $w \mapsto \dfrac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}$ es holomorfa en Ω, luego la forma general del teorema de Cauchy nos dice que

$$0 = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw = \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ podemos por tanto definir sin ambigüedad c_n mediante la igualdad (6) y considerar la serie de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,(z-a)^n$, para comprobar que verifica (5). Denotamos como siempre por R^+ y R^- a los radios de convergencia de esta serie de Laurent.

Fijamos $z \in \Omega$ y usamos el mismo ciclo Γ, pero con $r < \rho_1 < |\,z-a\,| < \rho_2 < R$, de forma que $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = 1$. La versión general de la fórmula de Cauchy nos da:

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \tag{7}$$

Dos desarrollos en serie del integrando nos llevarán al resultado deseado.

Con la circunferencia C_2 trabajamos igual que hicimos para el desarrollo de Taylor. Para $w \in C_2^*$ tenemos $|\,w - a\,| = \rho_2 > |\,z - a\,|$, lo que nos permite escribir:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)\,/\,(w-a)}{1 - \big((z-a)/(w-a)\big)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n \qquad \forall\, w \in C_2^*$$

y esta serie converge uniformemente en C_2^*. En efecto, si $M_2 = \max\big\{\,|\,f(w)\,| \,:\, w \in C_2^*\,\big\}$, tenemos claramente

$$\left| \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n \right| \leqslant \frac{M_2}{\rho_2}\left(\frac{|\,z-a\,|}{\rho_2}\right)^n \qquad \forall\, w \in C_2^*\,,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Esta serie geométrica converge, porque $|\,z - a\,| < \rho_2$, y basta aplicar el test de Weierstrass.

La continuidad de la integral curvilínea nos da:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw\right)(z-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n \end{aligned} \qquad (8)$$

donde hemos usado (6) con $\rho = \rho_2$.

El razonamiento anterior prueba que la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n\,(z-a)^n$ converge en el punto z fijado, luego $R^+ \geqslant |\,z-a\,|$. Pero esto es válido para todo $z \in \Omega$, luego $R^+ \geqslant R$.

Volviendo al punto $z \in \Omega$ fijado, para $w \in C_1^*$ tenemos ahora $|\,w-a\,| = \rho_1 < |\,z-a\,|$, lo que nos permite escribir:

$$-\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)\,/\,(z-a)}{1-\big((w-a)/(z-a)\big)} = \sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \qquad \forall\, w \in C_1^*$$

y comprobamos que esta serie converge uniformemente en C_1^*. En efecto, escribiendo ahora $M_1 = \max\big\{\,|\,f(w)\,| \,:\, w \in C_1^*\,\big\}$, tenemos

$$\left| f(w)\,\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{M_1}{|\,z-a\,|}\left(\frac{\rho_1}{|\,z-a\,|}\right)^n \qquad \forall\, w \in C_1^*\,,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

La serie geométrica converge, porque $|\,z-a\,| > \rho_1$, y basta aplicar el test de Weierstrass.

La continuidad de la integral curvilínea, usando (6) con $\rho = \rho_1$, nos da:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{C_1} f(w)\,(w-a)^n\,dw\right)\frac{1}{(z-a)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}\,dw\right)\frac{1}{(z-a)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \end{aligned} \qquad (9)$$

El razonamiento anterior prueba que la serie de potencias $\sum_{n \geqslant 1} c_{-n}\, w^n$ converge en el punto $w = \dfrac{1}{z-a}$, luego $R^- \geqslant \dfrac{1}{|\, z-a\,|}$, o lo que es lo mismo $\dfrac{1}{R^-} \leqslant |\, z-a\,|$. Como esto es válido para todo $z \in \Omega$, se tendrá $\dfrac{1}{R^-} \leqslant r$. Junto con la desigualdad $R^+ \geqslant R$ probada anteriormente, vemos que el anillo de convergencia de la serie de Laurent contiene a Ω:

$$\Omega \,=\, A(a\,;\, r, R) \,\subset\, A(a\,;\, 1/R^-, R^+)$$

Finalmente, teniendo en cuenta (8) y (9), de (7) deducimos la igualdad (5):

$$f(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n \,+\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \,=\, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n \qquad \forall\, z \in \Omega$$

Sólo queda probar la unicidad del desarrollo obtenido. Supongamos por tanto que

$$f(z) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n\,(z-a)^n \qquad \forall\, z \in \Omega$$

donde $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n\,(z-a)^n$ es otra serie de Laurent no trivial, cuyo anillo de convergencia contiene a Ω. Para mayor claridad del razonamiento denotemos por $\{S_n\}$ a esta nueva serie. Fijado $p \in \mathbb{Z}$ debemos probar que $\alpha_p \,=\, c_p$.

Fijado también $\rho \in \mathbb{R}^+$ con $r \,<\, \rho \,<\, R$, escribimos $C \,=\, C(a, \rho)$ y sabemos que $\{S_{n+1}\}$ converge uniformemente a f en la circunferencia C^*, que es un compacto contenido en el anillo de convergencia de la serie de Laurent $\{S_n\}$. Observamos que, para cualesquiera $w \in C^*$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left|\, \frac{S_{n+1}}{(w-a)^{p+1}} \,-\, \frac{f(w)}{(w-a)^{p+1}} \,\right| \,=\, \frac{1}{\rho^{p+1}}\,\big|\, S_{n+1}(w) \,-\, f(w)\,\big|$$

lo que nos permite escribir

$$\frac{f(w)}{(w-a)^{p+1}} \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}(w)}{(w-a)^{p+1}} \qquad \forall\, w \in C^*$$

y esta sucesión converge uniformemente en C^*. La continuidad de la integral curvilínea nos da

$$c_p \,=\, \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{p+1}}\, dw \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_C \frac{S_{n+1}(w)}{(w-a)^{p+1}}\, dw \tag{10}$$

y sólo queda calcular la sucesión de integrales que ha aparecido. Ello es fácil teniendo en cuenta que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\int_C \frac{S_{n+1}(w)}{(w-a)^{p+1}}\, dw \,=\, \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \int_C (w-a)^{k-p-1}\, dw$$

Si $h \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$, la función $w \mapsto (w-a)^h$ tiene en $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ la primitiva $w \mapsto \dfrac{(w-a)^{h+1}}{h+1}$, luego su integral sobre C, un camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, se anula. Por tanto,

$$n \in \mathbb{N}, \ \ n \geqslant |p| \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{S_{n+1}(w)}{(w-a)^{p+1}}\,dw \;=\; \frac{\alpha_p}{2\pi i}\int_C \frac{dw}{w-a} \;=\; \alpha_p$$

En vista de (10) concluimos que $\alpha_p = c_p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$, como queríamos. ■

Así pues, toda función f holomorfa en un anillo Ω de centro $a \in \mathbb{C}$, se expresa como suma de una única serie de Laurent centrada en a, cuyo anillo de convergencia contiene a Ω. Esa expresión, dada por (5) y (6), se conoce como **desarrollo de Laurent de f en el anillo Ω**. En particular, nos da una sucesión de funciones racionales, cuyos denominadores sólo pueden anularse en a, que converge a f uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω.

El teorema anterior generaliza el desarrollo de Taylor: si $0 < R \leqslant \infty$ y $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$, tenemos el desarrollo de Laurent de f en el anillo $A(a\,;0,R)$, pero del teorema de Cauchy deducimos que $c_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego obtenemos f como suma de una serie de potencias, su serie de Taylor centrada en el punto a.

Con respecto a la unicidad del desarrollo de Laurent, conviene hacer una observación. Una función puede ser holomorfa en varios anillos disjuntos, centrados en un mismo punto a, y por tanto admitir varios desarrollos de Laurent centrados en a, que pueden no coincidir. Por ejemplo, la función $z \mapsto (1-z)^{-1}$ tiene un desarrollo de Laurent en el anillo $A(0\,;0,1)$, su desarrollo de Taylor centrado en el origen, y otro desarrollo de Laurent diferente en el anillo $A(0\,;1,\infty)$, ambos bien fáciles de calcular:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \forall\, z \in A(0\,;0,1) \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{z^n} \quad \forall\, z \in A(0\,;1,\infty)$$

13.4. Puntos regulares y singularidades

El desarrollo de Laurent nos va a permitir analizar el comportamiento en un punto $a \in \mathbb{C}$ de una función holomorfa en un entorno reducido de a.

Notación. Para evitar tediosas repeticiones, fijamos la notación que usaremos en el resto de este tema: Ω será un abierto del plano, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{a\}\big)$, de modo que f no es más que una función holomorfa en un entorno reducido de a. Fijado $R \in \mathbb{R}^+$ con $D(a,R) \subset \Omega$, usaremos el desarrollo de Laurent de f en el anillo $A(a\,;0,R)$:

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n \qquad \forall\, z \in D(a,R) \setminus \{a\} \tag{11}$$

Podríamos decir que f tiene en el punto a una *posible singularidad*. El primer objetivo será decidir si tal singularidad se presenta efectivamente.

El anillo de convergencia de la serie (11) contiene a $D(a,R)\setminus\{a\}$, luego $R^+ \geqslant R$ y, lo que es más importante, $\dfrac{1}{R^-} = 0$, es decir, $R^- = \infty$. Por tanto, la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}\, w^n$ tiene radio de convergencia infinito, lo que nos permite definir:

$$\varphi(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\, w^n \qquad \forall\, w \in \mathbb{C}$$

obteniendo una función entera que se anula en el origen: $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\varphi(0) = 0$.

La que realmente nos interesa es la función $h \in \mathcal{H}\big(\mathbb{C}\setminus\{a\}\big)$ definida por

$$h(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{a\}$$

pues con ella, el desarrollo de Laurent (11) toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n + h(z) \qquad \forall\, z \in D(a,R)\setminus\{a\} \tag{12}$$

Esto nos sugiere considerar la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = f(z) - h(z) \quad \forall\, z \in \Omega\setminus\{a\} \qquad \text{y} \qquad g(a) = c_0$$

Obviamente g es holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$, pero (12) nos da

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n \qquad \forall\, z \in D(a,R)$$

así que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Hemos obtenido la siguiente descomposición de f:

- *La función f se descompone, de manera única, como sigue*

  $$f(z) = g(z) + h(z) \qquad \forall\, z \in \Omega\setminus\{a\} \tag{13}$$

  donde $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y la función $h \in \mathcal{H}\big(\mathbb{C}\setminus\{a\}\big)$ viene dada por

  $$h(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{a\}$$

  con $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\varphi(0) = 0$.

Sólo queda probar la unicidad de la descomposición, que se deduce de la unicidad del desarrollo de Laurent, como es fácil adivinar. Supongamos $f(z) = g_1(z) + h_1(z)$ para todo $z \in \Omega\setminus\{a\}$, donde $g_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $h_1(z) = \varphi_1\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$ para todo $z \in \mathbb{C}\setminus\{a\}$, con $\varphi_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\varphi_1(0) = 0$.

Tenemos, por una parte, el desarrollo de Laurent (11), del que obtuvimos las funciones φ, h y g que aparecieron en la descomposición (13).

Por otra parte, tenemos el desarrollo de Taylor de g_1 centrado en a y el de φ_1 centrado en el origen. Usamos para ellos una notación que indica la serie de Laurent que queremos considerar. Concretamente escribimos

$$\alpha_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad \text{y} \qquad \alpha_{-n} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo cual tenemos:

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \quad \forall z \in D(a,R) \qquad \text{y} \qquad \varphi_1(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} w^n \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

La primera serie de potencias tiene radio de convergencia mayor o igual que R mientras que el de la segunda es infinito. Por tanto, la serie de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n (z-a)^n$ no es trivial, $A(a\,;\,0,R)$ está contenido en su anillo de convergencia y tenemos

$$f(z) = g_1(z) + \varphi_1\left(\frac{1}{z-a}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{(z-a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n$$

para todo $z \in A(\,a\,;\,0,R)$.

La unicidad del desarrollo de Laurent nos dice que $\alpha_n = c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En particular tenemos $\alpha_{-n} = c_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde deducimos que $\varphi_1 = \varphi$, luego $h_1 = h$. Pero entonces tenemos también

$$g_1(z) = f(z) - h_1(z) = f(z) - h(z) = g(z) \qquad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$$

de donde concluimos claramente que $g_1 = g$. ■

Aprovechando la unicidad de la descomposición anterior, damos nombre a las dos sumandos que en ella aparecen. Diremos que g es la **parte regular** de f en a, aludiendo al hecho de que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Por tanto, la posible singularidad de f en a ha de proceder de la función h. Por ello decimos que h es la **parte singular** de f en a.

Cuando h es idénticamente nula, o equivalentemente, cuando lo es la función entera φ, decimos que a es un **punto regular** de f, o que f tiene en a un punto regular. En caso contrario decimos que a es una **singularidad** de f, o que f tiene una singularidad en a.

En términos del desarrollo de Laurent, vemos que a es un punto regular de f si, y sólo si, $c_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si preferimos mirar a la descomposición recién probada, vemos que a es un punto regular de f si, y sólo si, dicha descomposición se reduce a $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$. En tal caso, tenemos una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ que extiende a f, pero recíprocamente, si tal extensión existe, la descomposición no puede ser otra que la indicada, luego a es un punto regular de f.

Así pues, en los puntos regulares tenemos una situación que conocemos bien, gracias al teorema de extensión de Riemann. El siguiente enunciado es una revisión de dicho teorema:

Caracterización de los puntos regulares. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) a *es un punto regular de* f
(ii) $c_{-n} = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$
(iii) *Existe* $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $f(z) = g(z)$ *para todo* $z \in \Omega \setminus \{a\}$
(iv) f *tiene límite en* a*:* $\lim\limits_{z \to a} f(z) = w \in \mathbb{C}$
(v) *Existen* M , $\delta \in \mathbb{R}^+$ *tales que* $D(a,\delta) \subset \Omega$ *y* $|f(z)| \leqslant M$ *para todo* $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$
(vi) $\lim\limits_{z \to a}(z-a)f(z) = 0$

Demostración. Las equivalencia entre (i), (ii) y (iii) ya se ha comentado, se trata de tres formas de expresar la definición de punto regular. La equivalencia entre (iii), (iv), (v) y (vi) es el teorema de extensión de Riemann, tal y como se obtuvo en su momento. ■

Leído por la negativa, el teorema anterior nos da una caracterización de las singularidades, o si se quiere, describe el comportamiento de f cerca de una singularidad. Por ejemplo, a es una singularidad de f cuando f no tiene límite en a, o cuando no está acotada en ningún entorno reducido de a.

13.5. Clasificación de las singularidades

Demos algunos ejemplos de singularidades, que anticipan los dos tipos que se nos pueden presentar. En primer lugar, fijado $k \in \mathbb{N}$, sea

$$f(z) = \frac{1}{z^k} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Es claro que f diverge, luego tiene una singularidad, en el origen. El desarrollo de Laurent de f en el anillo $\mathbb{C}^*$ es bien obvio, se tiene $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-k\}$ mientras que $c_{-k} = 1$. Vemos que f coincide con su parte singular en el origen, $f(z) = h(z) = \varphi(1/z)$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, donde la función entera φ viene dada por $\varphi(w) = w^k$ para todo $w \in \mathbb{C}$, de modo que φ es una función polinómica de grado k.

Para tener un ejemplo diferente, consideremos la función f definida por

$$f(z) = e^{1/z} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

De nuevo f no tiene límite, luego tiene una singularidad, en el origen, pero ahora f no diverge en el origen. Su desarrollo de Laurent en $\mathbb{C}^*$ es claro:

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

así que $c_0 = 1$, mientras que $c_n = 0$ y $c_{-n} = 1/n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esta vez la parte regular de f en el origen es constante, $g(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, mientras la parte singular viene dada por $h(z) = e^{1/z} - 1 = \varphi(1/z)$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, donde $\varphi(w) = e^w - 1$ para todo $w \in \mathbb{C}$, una función entera no polinómica.

Volviendo al caso general, las singularidades se clasifican como sigue. Recordamos que la parte singular de f en a viene dada por

$$h(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \qquad \text{donde } \varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ y } \varphi(0) = 0$$

Si a es una singularidad de f, sabemos que φ no es idénticamente nula. Pues bien:

- Cuando φ es una función polinómica, decimos que a es un **polo** de f, o bien que f tiene un polo en el punto a. El **orden** del polo es, por definición, el grado de φ.
- Cuando, por el contrario, φ es una función entera no polinómica, decimos que a es una **singularidad esencial** de f, o que f tiene una singularidad esencial en el punto a.

La utilidad de esta clasificación estriba en que, dependiendo de cuál de los dos casos se presente, habrá información relevante sobre cómo se comporta f en a, pero recíprocamente, de dicho comportamiento podemos deducir en cuál de los dos casos estamos. Por tanto, la información que vamos a obtener consistirá en: dos caracterizaciones de los polos, según esté involucrado el orden o no, y otra caracterización de las singularidades esenciales.

Caracterización de los polos teniendo en cuenta su orden. *Dado $k \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *a es un polo de orden k de f*
(ii) $c_{-k} \neq 0$ *y* $c_{-n} = 0$ *para* $n > k$
(iii) $\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) = \alpha \in \mathbb{C}^*$
(iv) *Existe una función $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\psi(a) \neq 0$ tal que:*

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^k} \qquad \forall z \in \Omega \setminus \{a\} \tag{14}$$

Demostración. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Basta recordar que φ viene dada por:

$$\varphi(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n \qquad \forall w \in \mathbb{C}$$

Es evidente que φ es una función polinómica de grado k si, y sólo si, se cumple (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Si se cumple (ii), el desarrollo de Laurent tiene la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \qquad \forall z \in D(a,R) \setminus \{a\}$$

de donde se deduce claramente que $\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) = c_{-k} \in \mathbb{C}^*$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Definimos $\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ de la única forma posible:

$$\psi(z) = (z-a)^k f(z) \quad \forall\, z \in \Omega \setminus \{a\} \qquad \text{y} \qquad \psi(a) = \alpha$$

Claramente $\psi \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{a\}\big)$, pero también es continua en a , luego el teorema de extensión de Riemann nos dice que $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$. Es claro que $\psi(a) \neq 0$ y que se cumple (14) .

$(iv) \Rightarrow (ii)$. Basta ver que el desarrollo de Taylor de ψ centrado en a nos da un desarrollo de Laurent de f . Concretamente, para todo $z \in A(a\,;\,0, R)$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\psi^{(n)}(a)}{n\,!}(z-a)^{n-k} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(a)}{n\,!}(z-a)^{n-k} \\ &= \sum_{n=1}^{k} \frac{\psi^{(k-n)}(a)}{(k-n)\,!\,(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n+k)}(a)}{(n+k)!}(z-a)^n \end{aligned}$$

La unicidad del desarrollo de Laurent nos dice que $c_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > k$, mientras que $c_{-k} = \psi(a) \neq 0$. ■

La afirmación (iii) es la más cómoda cuando queremos comprobar que f tiene un polo de orden k en a . En cambio (iv) es la que mejor explica cómo se produce tal polo: aunque al definir f podríamos no haberlo observado, estamos dividiendo una función holomorfa en Ω, que no se anula en el punto a , por la función $z \mapsto (z-a)^k$, y eso hace que a sea un polo de orden k de f .

Comparemos la igualdad (14) con la factorización que tendríamos si fuese $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y de hecho f tuviese un cero de orden k en a :

$$f(z) = (z-a)^k\,\psi(z) \quad \forall\, z \in \Omega \qquad \text{donde } \psi \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ y } \psi(a) \neq 0$$

Esta analogía permite muy bien entender los polos como *ceros de orden negativo*. Si olvidamos el orden, los polos se caracterizan de forma bien sencilla, que viene a reincidir en la misma interpretación intuitiva: los polos de f son los ceros de $1/f$, y viceversa:

Caracterización de los polos. *La función f tiene un polo en a si, y sólo si, diverge en a .*

Demostración. Si f tiene un polo en a , que será de orden k con $k \in \mathbb{N}$, la afirmación (iv) del teorema anterior nos dice que f diverge en a . Recíprocamente, supongamos que $f(z) \to \infty \ (z \to a)$, con lo que existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$. Podemos entonces considerar la función $\xi : D(a,\delta) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\xi(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \forall\, z \in D(a,\delta) \setminus \{a\} \qquad \text{y} \qquad \xi(a) = 0$$

Claramente $\xi \in \mathcal{H}\big(D(a,\delta) \setminus \{a\}\big)$ y ξ es continua en a , luego usando de nuevo el teorema de extensión de Riemann, tenemos $\xi \in \mathcal{H}\big(D(a,\delta)\big)$. Puesto que ξ no es idénticamente nula, el cero de χ en a tendrá un orden, digamos $k \in \mathbb{N}$. Deducimos que

$$\lim_{z \to a} \frac{\xi(z)}{(z-a)^k} = \lambda \in \mathbb{C}^*, \qquad \text{de donde} \quad \lim_{z \to a}\,(z-a)^k\,f(z) = \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{C}^*$$

y el teorema anterior nos dice que f tiene un polo de orden k en el punto a . ■

Veamos finalmente la caracterización de las singularidades esenciales, debida al matemático italiano F. Casorati (1835-1890). De momento sabemos que, si a es una singularidad esencial de f, entonces f no puede estar acotada en ningún entorno reducido de a, pero tampoco diverge en a. De hecho el comportamiento de f cerca de una singularidad esencial se puede describir como *caótico*:

Teorema de Casorati. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *La función f tiene una singularidad esencial en el punto a*

(ii) *Para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$ con $D(a,\delta) \subset \Omega$, el conjunto $f\big(D(a,\delta) \setminus \{a\}\big)$ es denso en $\mathbb{C}$*

(iii) *Para cada $w \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de $\Omega \setminus \{a\}$ tal que $\{z_n\} \to a$ y $\{f(z_n)\} \to w$. También existe una sucesión $\{u_n\}$ de puntos de $\Omega \setminus \{a\}$ tal que $\{u_n\} \to a$ y $\{f(u_n)\} \to \infty$*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponiendo que no se verifica (ii), deberemos probar que tampoco se verifica (i), es decir, que a es un punto regular o un polo de f.

Sea pues $\delta \in \mathbb{R}^+$ con $D(a,\delta) \subset \Omega$ tal que, escribiendo para abreviar $V = D(a,\delta) \setminus \{a\}$, el conjunto $f(V)$ no es denso en $\mathbb{C}$, es decir, existen $w \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $|f(z)-w| \geqslant \varepsilon$ para todo $z \in V$. Consideramos entonces la función $\xi \in \mathcal{H}(V)$ dada por

$$\xi(z) = \frac{1}{f(z)-w} \qquad \forall\, z \in V$$

Como ξ está acotada en V, que es un entorno reducido de a, el teorema de extensión de Riemann nos dice que ξ tiene límite en el punto a:

$$\lim_{z \to a} \xi(z) = \alpha \in \mathbb{C}$$

Entonces se pueden dar dos casos:

- Si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, tenemos $\lim\limits_{z\to a} f(z) = w + (1/\alpha)$ y a es un punto regular de f.
- Si, por el contrario, $\alpha = 0$, es claro que f diverge en a, luego a es un polo de f.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, usando (ii) encontramos $z_n, u_n \in D(a,\delta/n) \setminus \{a\}$ tales que $|f(z_n) - w| < 1/n$ y $|f(u_n)| > n$. Está claro que $\{z_n\}$ y $\{u_n\}$ son sucesiones de puntos de $\Omega \setminus \{a\}$ que convergen al punto a, verificando que $\{f(z_n)\} \to w$ y $\{f(u_n)\} \to \infty$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. De (iii) se deduce que f no tiene límite en a, luego a es una singularidad de f, pero no es un polo, pues f tampoco diverge en a, así que se cumple (i): a es una singularidad esencial de f. ■

La correspondencia de ida y vuelta entre singularidades y funciones enteras, en la que los polos se corresponden con polinomios y las singularidades esenciales con funciones enteras no polinómicas, no ha podido pasar desapercibida. Merece la pena resaltar que esta idea permite usar los resultados sobre singularidades para obtener información sobre funciones enteras.

Como ejemplo, veremos un corolario casi evidente del teorema de Casorati. Muestra que cualquier función entera no polinómica, se comporta en el infinito de forma parecida a como lo hace la exponencial compleja.

- *Sea* ψ *una función entera no polinómica. Entonces, para todo* $r \in \mathbb{R}^+$, *el conjunto* $\{\psi(z) : z \in \mathbb{C}, |z| > r\}$ *es denso en* $\mathbb{C}$.

Consideremos la función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ dada por $f(z) = \psi(1/z)$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Es claro que la parte singular de f en el origen es $h(z) = \varphi(1/z)$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, donde φ es la función entera dada por $\varphi(w) = \psi(w) - \psi(0)$ para todo $w \in \mathbb{C}$, que verifica $\varphi(0) = 0$.

Como ψ no es una función polinómica, φ tampoco lo es, así que f tiene una singularidad esencial en el origen. Tomando $\delta = 1/r$, el teorema de Casorati nos dice que el conjunto $f\big(D(0,\delta) \setminus \{0\}\big)$ es denso en $\mathbb{C}$, pero es obvio que

$$f\big(D(0,\delta) \setminus \{0\}\big) = \big\{\psi(1/w) : w \in D(0,\delta) \setminus \{0\}\big\} = \big\{\psi(z) : z \in \mathbb{C}, |z| > r\big\} \qquad \blacksquare$$

Resaltamos finalmente que, en toda la discusión sobre la posible singularidad de una función f en un punto a, es imprescindible que f sea holomorfa en un entorno reducido de a. Existe una noción más general de punto regular o singular para una función holomorfa en un abierto del plano, en la que no vamos a entrar, que puede aplicarse a cualquier punto de la frontera de dicho abierto. En ese contexto, las singularidades aquí estudiadas se denominan *singularidades aisladas*, por razones obvias.

13.6. Ejercicios

1. Dados $a, b \in \mathbb{C}$ con $0 < |a| < |b|$, obtener el desarrollo en serie de Laurent de la función f definida por
$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$$
en cada uno de los anillos siguientes:
$$A\big(0; |a|, |b|\big) , \ A\big(0; |b|, \infty\big) , \ A\big(a; 0, |b-a|\big) , \ A\big(a; |b-a|, \infty\big)$$

2. Obtener el desarrollo en serie de Laurent de la función
$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$$
en los anillos $A(1; 0, 2)$ y $A(1; 2, \infty)$.

3. En cada uno de los siguientes casos, clasificar las singularidades de la función f y determinar la parte singular de f en cada una de sus singularidades.

   (a) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^n} \quad \forall, z \in \mathbb{C}^* \quad (n \in \mathbb{N})$

   (b) $f(z) = z^n \operatorname{sen}(1/z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad (n \in \mathbb{N})$

   (c) $f(z) = \dfrac{\log(1+z)}{z^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$

   (d) $f(z) = \dfrac{1}{z\big(1 - e^{2\pi i z}\big)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

   (e) $f(z) = z \operatorname{tg} \dfrac{2\pi z + \pi}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

4. Sea Ω un abierto del plano, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{a\}\big)$. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en el punto a de las funciones f y f'?

5. Sea Ω un dominio, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{a\}\big)$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en a de las funciones f y $1/f$?

6. Sea Ω un abierto del plano, $a \in \Omega$ y $f, g \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{a\}\big)$. Estudiar el comportamiento en el punto a de las funciones $f + g$ y $f\,g$, supuesto conocido el de f y g.

7. La función f es holomorfa en un entorno del punto a y otra función g tiene un polo de orden m en el punto $f(a)$. ¿Cómo se comporta en a la composición $g \circ f$? ¿Qué ocurre si a es una singularidad esencial en de g?

8. Sea U un entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{C}$ y supongamos que $f \in \mathcal{H}(U)$ tiene un polo en a. Probar que existe $R > 0$ tal que $\mathbb{C} \setminus D(0, R) \subset f(U)$.

9. Sea a una singularidad de una función f. Probar que la función $\mathrm{Re} f$ no puede estar acotada en un entorno reducido de a.

10. Sea Ω un abierto del plano, $a \in \Omega$ y $\{a_n\}$ una sucesión de puntos de $\Omega \setminus \{a\}$ tal que $\{a_n\} \to a$. Consideremos el conjunto $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$, sea $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$ y supongamos que f tiene un polo en a_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que, para todo $\delta \in \mathbb{R}^+$ que verifique $D(a, \delta) \subset \Omega$, el conjunto $f\big(\, D(a, \delta) \setminus K \,\big)$ es denso en $\mathbb{C}$.

Tema 14

Residuos

De la forma general del teorema de Cauchy vamos a deducir fácilmente un regla práctica para calcular integrales, conocida como *teorema de los residuos*. Tiene numerosas aplicaciones fuera del Análisis Complejo, e incluso fuera de la Matemática. En realidad el teorema de los residuos incluye como caso particular a la versión general del teorema de Cauchy, que como vimos, es equivalente a la versión general de la fórmula de Cauchy, así que podríamos hablar de tres versiones equivalentes de un mismo resultado. El teorema de los residuos es la versión más adecuada para aplicarla al cálculo de integrales, de ahí su gran popularidad.

14.1. Residuo de una función en un punto

Para dar la definición de residuo, nos ponemos en la misma situación que al estudiar las singularidades. Fijamos $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ y una función $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R) \setminus \{a\}\big)$, es decir, tenemos una función holomorfa en un entorno reducido de un punto del plano. Consideramos de nuevo el desarrollo de Laurent de f en el anillo $A(a\,;\,0,R)$ dado por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad \forall\, z \in D(a,R) \setminus \{a\} \tag{1}$$

y conviene recordar la expresión de los coeficientes que aparecen en este desarrollo:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}\,, \ \ \forall\, \rho \in]\,0,R\,[$$

Esta expresión es especialmente sencilla en el caso $n = -1$, pues nos aparece solamente la integral de f sobre la circunferencia $C(a,\rho)$. Nuestra estrategia consistirá precisamente en utilizar la igualdad así obtenida para calcular, no ya la integral de f sobre una circunferencia, sino de hecho, su integral sobre ciclos mucho más generales. Ello motiva la siguiente definición.

El **residuo** de la función f en el punto a es el número complejo definido por

$$\text{Res}\,\big(\, f(z)\,,\, a\,\big) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} f(w)\, dw \qquad \forall\, \rho \in]\,0,R\,[\tag{2}$$

Obsérvese que cometemos un ligero abuso de notación, pues en la definición no interviene ningún $z \in \mathbb{C}$, no estamos definiendo ninguna función de la variable z, sino un número complejo que sólo depende de la función f y del punto a. Por tanto, sería formalmente más correcto escribir $\operatorname{Res}(f, a)$, pero esta notación nos obligaría a definir por separado la función f a la que nos estamos refiriendo.

Por el contrario, en la notación $\operatorname{Res}\big(f(z), a\big)$ indicamos explícitamente el valor de f en un punto genérico z, que nos hace pensar en la función $z \mapsto f(z)$, sin necesidad de dar más explicaciones. Además, no hay ambigüedad acerca del conjunto en el que consideremos definida la función f, ya que la definición del residuo sólo involucra los valores de f en una circunferencia de centro a y radio arbitrariamente pequeño, luego podemos considerar que la función f está definida en cualquier entorno reducido de a, el valor del residuo no depende del entorno que usemos. Eso sí, la expresión $f(z)$ deberá tener sentido en algún entorno reducido de a, y la función $z \mapsto f(z)$ deberá ser holomorfa en tal entorno. Por ejemplo, la expresión $\operatorname{Res}(1/z, 0)$ indica claramente el residuo en el origen de la función $z \mapsto 1/z$, que podemos considerar definida en $\mathbb{C}^*$, en $D(0,1) \setminus \{0\}$, o en cualquier otro entorno reducido del origen. Ocurre aquí exactamente lo mismo que con la notación que usamos para las integrales. En el primer miembro de (2) debemos considerar z como una variable “muda”, exactamente igual que lo es la variable de integración w en el último miembro.

Veamos algunos ejemplos sencillos de residuos. La primera observación es evidente: si a es un punto regular de f, se tiene $c_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, en particular, $c_{-1} = 0$:

- *Si a es un punto regular de f, entonces* $\operatorname{Res}\big(f(z), a\big) = 0$.

Este hecho explica, hasta cierto punto, por qué usamos el término *residuo*: sólo puede ser distinto de 0 cuando a es una singularidad de f, luego podemos entender el residuo como el “rastro” o la “huella” que puede dejar una singularidad, pues veremos que no siempre la deja.

Fijado $k \in \mathbb{N}$, es claro que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^k}, a\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

Vemos que el recíproco de nuestra primera observación anterior no es cierto: que se anule el residuo no garantiza que a sea un punto regular, o si se quiere, hay singularidades que no dejan huella. Por el momento son polos, pero enseguida vemos que el residuo en una singularidad esencial también puede ser cero. Concretamente, fijado $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$e^{1/z^k} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^{kn}} \forall\, z \in \mathbb{C}^*$$

de donde deducimos claramente que

$$\operatorname{Res}\left(e^{1/z^k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

14.2. Teorema de los residuos

Ha quedado claro que el residuo no debe entenderse como un indicador de la existencia de una singularidad, conviene profundizar un poco más. Para ello basta mirar a la integral que lo define. Si f tiene una primitiva en un entorno reducido de a, es claro que dicha integral se anula. Pero vamos a ver enseguida que el recíproco también es cierto.

En efecto, si Γ es un ciclo en $D(a,R)\setminus\{a\}$, puesto que la serie de Laurent que aparece en (1) converge uniformemente en el conjunto compacto Γ^*, podemos escribir

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_\Gamma (z-a)^n\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int_\Gamma (z-a)^k\,dz$$

Para $k\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ la función $z\mapsto(z-a)^k$ tiene en $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ la primitiva $z\mapsto\dfrac{(z-a)^{k+1}}{k+1}$ luego su integral sobre Γ se anula y la igualdad anterior se reduce a

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = c_{-1}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i\,\mathrm{Ind}_\Gamma(a)\,\mathrm{Res}\big(f(z),a\big) \tag{3}$$

Si $\mathrm{Res}\big(f(z),a\big)=0$, deducimos que f admite una primitiva en el abierto $D(a,R)\setminus\{a\}$, pues su integral sobre cualquier ciclo en dicho abierto es nula. Por tanto, el residuo, nos dice si f tiene o no una primitiva en un entorno reducido de a.

Observemos ahora que la igualdad (3) generaliza a (2), pues si $\Gamma=C(a,\rho)$ tenemos $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)=1$, luego el residuo permite calcular integrales más generales que la que sirvió para definirlo. Podemos pensar que el residuo produce una "aportación" a la integral que obviamente se ve afectada por el índice. La aportación es nula, cuando se anula el residuo o el índice.

Analicemos la situación que tenemos en (3) para motivar un planteamiento más general. El ciclo Γ es obviamente nul-homólogo con respecto al abierto $\Omega=D(a,R)$, pero puede no serlo con respecto a $\Omega\setminus\{a\}$, que es el abierto en el que sabemos que f es holomorfa. De hecho, está claro que Γ es nul-homólogo con respecto a $\Omega\setminus\{a\}$ si, y sólo si, $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)=0$. No podemos aplicar el teorema de Cauchy en el abierto Ω, porque a puede ser una singularidad de f, pero tampoco podemos aplicarlo en $\Omega\setminus\{a\}$ porque Γ puede no ser nul-homólogo con respecto a $\Omega\setminus\{a\}$. Sin embargo, podemos calcular la integral que aparece en (3) con sólo conocer el índice y el residuo.

El planteamiento general consiste en admitir más singularidades, sustituyendo el punto a por un conjunto A de posibles singularidades. Así pues, dado un abierto Ω, la función f no llegará a ser holomorfa en Ω, debido a sus singularidades. Para que cada $a\in A$ pueda ser una singularidad, es necesario que f sea holomorfa en un entorno reducido a, es decir, debe existir un $\rho\in\mathbb{R}^+$ tal que $D(a,\rho)\subset\Omega$ y $D(a,\rho)\cap A=\{a\}$. Supondremos por tanto que A no tiene puntos de acumulación en Ω, es decir, $A'\cap\Omega=\emptyset$, condición que ya se usó al estudiar los ceros de funciones holomorfas. Esta hipótesis hace que A sea cerrado relativo a Ω, es decir, que $\Omega\setminus A$ sea abierto, con lo que tiene sentido suponer que $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus A)$. Tendremos finalmente un ciclo Γ en $\Omega\setminus A$ que es nul-homólogo con respecto a Ω, pero puede no serlo con respecto a $\Omega\setminus A$. En (3) teníamos un caso muy particular: $\Omega=D(a,R)$ y $A=\{a\}$.

A partir de la interpretación intuitiva de (3), conjeturamos que, en general, la integral de f sobre Γ sea la suma de las "aportaciones" de todas las singularidades. Aparentemente la suma podría ser infinita, pues A puede ser un conjunto infinito. Por ejemplo, la función tangente tiene infinitas singularidades, todas ellas con residuo no nulo. Sin embargo, veremos que el conjunto de los puntos de A con índice no nulo con respecto a Γ es finito, luego de hecho la suma es finita. La conjetura es correcta, como muestra el siguiente teorema, cuyas hipótesis y tesis han quedado ya motivadas.

Teorema de los residuos. *Sea Ω un abierto del plano, A un subconjunto de Ω tal que $A' \cap \Omega = \emptyset$, y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$. Sea Γ un ciclo en $\Omega \setminus A$, nul-homólogo con respecto a Ω. Entonces, el conjunto $\{ a \in A : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0 \}$ es finito y se verifica que*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \operatorname{Res}\big(f(z), a\big) \tag{4}$$

Demostración. Considerando el conjunto $K = \Gamma^* \cup \{ z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \operatorname{Ind}_\Gamma(z) \neq 0 \}$, tenemos claramente que $\{ a \in A : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0 \} = A \cap K$, luego debemos empezar probando que $A \cap K$ es finito.

Observamos que $\mathbb{C} \setminus K = \{ z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0 \}$ es la unión de las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ en las que el índice se anula, luego es abierto, por ser unión de abiertos. Por tanto, K es cerrado y enseguida comprobamos que está acotado.

En efecto, si $R = \max\{|z| : z \in \Gamma^*\}$, como $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R)$ es un subconjunto conexo y no acotado de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, estará contenido en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, en la que el índice se anula, luego no contiene ningún punto de K, o lo que es lo mismo, $K \subset \overline{D}(0,R)$.

Como por hipótesis Γ es nul-homólogo con respecto a Ω, para $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se tiene $w \notin K$, luego $K \subset \Omega$. En resumen, K es un subconjunto compacto de Ω.

Si $A \cap K$ fuese infinito, por ser K compacto, $A \cap K$ tendría un punto de acumulación en K, que por una parte sería punto de acumulación de A, y por otra estaría en Ω, contradiciendo la hipótesis $A' \cap \Omega = \emptyset$. Así pues $A \cap K$ es finito como queríamos.

Nótese que, si $A \cap K = \emptyset$, no hay nada que demostrar, pues entonces Γ es nul-homólogo con respecto a $\Omega \setminus A$, la forma general del teorema de Cauchy nos dice que el primer miembro de (4) se anula, e igual ocurre con todos los sumandos del segundo miembro.

Para probar (4), numeramos los puntos de $A \cap K$, los únicos de A que debemos considerar. Sea pues $A \cap K = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, y abreviando notación, $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Naturalmente evitamos repeticiones, es decir, para $k, j \in I_n$ con $k \neq j$ se tiene $a_k \neq a_j$. Si para cada $k \in I_n$ escribimos $p_k = \operatorname{Ind}_\Gamma(a_k)$, la igualdad (4), excluidos los sumandos que sabemos que son nulos, toma la forma

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} p_k \operatorname{Res}\big(f(z), a_k\big) \tag{5}$$

La idea para probarla es modificar Γ de forma que el nuevo ciclo sea nul-homólogo con respecto a $\Omega \setminus A$, para poder aplicar la forma general del teorema de Cauchy.

Los puntos de $A \cap K$ son precisamente los que hacen que Γ no sea nul-homólogo con respecto a $\Omega \setminus A$ luego por así decirlo, debemos "descontar" las vueltas que da Γ alrededor de cada uno de ellos, pero eso se consigue fácilmente usando pequeñas circunferencias centradas en cada punto, que den las mismas vueltas que Γ pero en sentido contrario.

Para definir con comodidad el nuevo ciclo, si $C = C(a, \rho)$ es una circunferencia y $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $n\,C$ a la suma de C consigo misma n veces y lógicamente $-n\,C$ será la suma de $-C$ consigo misma n veces. Obviamente, para todo $p \in \mathbb{Z}$, se tiene $(p\,C)^* = C^*$ y al pasar de C a $p\,C$ la integral de cualquier función continua en C^* se multiplica por p y, en particular, lo mismo le ocurre al índice de cualquier punto $z \in \mathbb{C} \setminus C^*$.

Pues bien, fijado $k \in I_n$, usamos que a_k es un punto aislado de A para encontrar un radio $r_k > 0$ tal que $D(a_k, r_k) \subset \Omega$ y $D(a_k, r_k) \cap A = \{a_k\}$. Consideramos entonces la circunferencia $C_k = C(a_k, \rho_k)$ con $0 < \rho_k < r_k$, que evidentemente verifica $C_k^* \subset \Omega \setminus A$. Finalmente, el ciclo buscado es

$$\Sigma = \Gamma - \sum_{k=1}^{n} p_k\, C_k$$

Es claro que $\Sigma^* \subset \Omega \setminus A$ y vamos a comprobar que Σ es nul-homólogo con respecto a $\Omega \setminus A$. Fijado $w \in \mathbb{C} \setminus (\Omega \setminus A) = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup A$, se pueden dar tres casos.

(i). Si $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, como Γ es nul-homólogo con respecto a Ω, tenemos $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 0$. Pero además, para todo $k \in I_n$, tenemos $w \notin D(a, \rho_k)$, luego $\operatorname{Ind}_{C_k}(w) = 0$. Deducimos claramente que

$$\operatorname{Ind}_\Sigma(w) = \operatorname{Ind}_\Gamma(w) - \sum_{k=1}^{n} p_k \operatorname{Ind}_{C_k}(w) = 0$$

(ii). Si $w \in A$ con $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 0$, para todo $k \in I_n$ tenemos $w \neq a_k$, luego $w \notin D(a, \rho_k)$, de donde $\operatorname{Ind}_{C_k}(w) = 0$. Concluimos como en el caso anterior que $\operatorname{Ind}_\Sigma(w) = 0$.

(iii). Si $w \in A$ con $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) \neq 0$, existe un único $j \in I_n$ tal que $w = a_j$. Entonces, es claro que $\operatorname{Ind}_{C_j}(w) = 1$ mientras que, para todo $k \in I_n \setminus \{j\}$ se tiene $w \notin D(a_k, \rho_k)$, luego $\operatorname{Ind}_{C_k}(w) = 0$. Concluimos que

$$\operatorname{Ind}_\Sigma(w) = \operatorname{Ind}_\Gamma(w) - \sum_{k=1}^{n} p_k \operatorname{Ind}_{C_k}(w) = p_j - p_j = 0$$

Puesto que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ y Σ nul-homólogo con respecto a $\Omega \setminus A$, la forma general del teorema de Cauchy nos dice que la integral de f sobre Σ es cero, es decir

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{p_k C_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} p_k \int_{C_k} f(z)\,dz$$

Esta es la igualdad buscada, pues para $k \in I_n$, f es holomorfa en $D(a_k, r_k) \setminus \{a_k\} \subset \Omega \setminus A$ y hemos tomado $\rho_k < r_k$, luego por definición de residuo se tiene

$$\int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\big(f(z), a_k\big) \qquad \forall\, k \in I_n$$ ■

Como se ha podido comprobar, salvo cuestiones topológicas y la construcción del ciclo Σ, la demostración anterior es una aplicación directa del teorema de Cauchy. Pero por otra parte, es claro que el teorema anterior generaliza al de Cauchy: si tomamos $A = \emptyset$, obtenemos que la integral de cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sobre cualquier ciclo en Ω que sea nul-homólogo con respecto a Ω es cero. Por tanto, podemos ver el teorema de Cauchy y el de los residuos como dos versiones equivalentes de un mismo resultado. Digamos que el teorema de los residuos es el teorema de Cauchy, preparado para calcular integrales.

14.3. Cálculo de residuos.

El teorema de los residuos reduce el cálculo de integrales muy generales al de residuos e índices. En la práctica los índices de adivinan a simple vista, pues el ciclo Γ suele ser un camino cerrado, al que le ocurre lo mismo que a una circunferencia: $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ tiene dos componentes conexas, la no acotada, en la que el índice se anula, y la acotada, en la que vale 1, porque Γ suele estar orientado positivamente. Sólo queda, por tanto, calcular los residuos.

La definición del residuo como una integral nos lleva en cierto modo a un círculo vicioso, la alternativa es ver el residuo como coeficiente del desarrollo de Laurent. Pero calcular todo el desarrollo parece demasiado trabajo cuando sólo nos interesa uno de los coeficientes. En el caso de un polo, se puede evitar ese trabajo como vamos a ver.

Supongamos pues que a es un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ de una función f, holomorfa en $D(a,R) \setminus \{a\}$ con $R > 0$. La caracterización de los polos permite escribir f en la forma:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^k} \qquad \forall\, z \in D(a,R) \setminus \{a\}$$

donde $\psi \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$ y $\psi(a) \neq 0$. Del desarrollo de Taylor de ψ centrado en a deducimos el de Laurent para f, pues para $z \in D(a,R) \setminus \{a\}$ tenemos

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(a)}{n\,!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(a)}{n\,!}(z-a)^{n-k}$$

y aunque no esté escrito en la forma habitual, éste el desarrollo de Laurent de f en el anillo $A(a\,;0,R)$. El coeficiente c_{-1}, que acompaña a la potencia $(z-a)^{-1}$ en este desarrollo, aparece para $n = k-1$, luego tenemos $c_{-1} = \psi^{(k-1)}(a) \,/\, (k-1)\,!$. Esta igualdad parece de momento poco útil, piénsese que en la práctica ni siquiera conocemos $\psi(a)$. Sin embargo, como $\psi^{(k-1)}$ es continua en el punto a, podemos escribir

$$c_{-1} = \frac{\psi^{(k-1)}(a)}{(k-1)\,!} = \lim_{z \to a} \frac{\psi^{(k-1)}(z)}{(k-1)\,!}$$

Esta sencilla observación resuelve nuestro problema, pues para obtener el límite anterior, sólo trabajamos en $D(a,R) \setminus \{a\}$, donde sabemos que $\psi(z) = (z-a)^k f(z)$. Para enunciar el resultado obtenido, evitamos la función ψ, usando para sus derivadas una notación muy clásica.

- *Sea* $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R) \setminus \{a\}\big)$ *con* $a \in \mathbb{C}$ *y* $R \in \mathbb{R}^+$. *Si* f *tiene un polo de orden* $k \in \mathbb{N}$ *en el punto* a, *se tiene:*

$$\operatorname{Res}\big(f(z), a\big) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{d\,z^{k-1}} \big((z-a)^k f(z)\big) \tag{6}$$

Tenemos pues una regla práctica para calcular el residuo en un polo, luego el teorema de los residuos resulta muy útil cuando todas las singularidades que aparecen son polos. Resaltamos que, al aplicar esta regla debemos previamente asegurarnos de que a es un polo de orden k. La regla es especialmente sencilla en el caso de un polo simple, incluso sin suponer a priori que estamos en ese caso:

- *Sea* $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R) \setminus \{a\}\big)$ *con* $a \in \mathbb{C}$ *y* $R \in \mathbb{R}^+$. *Entonces:*

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \alpha \in \mathbb{C} \implies \operatorname{Res}\big(f(z), a\big) = \alpha \tag{7}$$

Si $\alpha = 0$ el teorema de extensión de Riemann nos dice que a es un punto regular de f, luego el residuo es cero. En otro caso, la caracterización de los polos nos dice que a es un polo simple de f y basta aplicar el resultado anterior en el caso $k = 1$, obteniendo

$$\operatorname{Res}\big(f(z), a\big) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \alpha \qquad \blacksquare$$

A la hora de aplicar (6) o (7) debemos calcular límites que con mucha frecuencia presentan una indeterminación del tipo $0/0$, pues la definición de f no siempre lleva un denominador de la forma $(z-a)^k$ que podamos cancelar, tal denominador está de alguna manera "oculto" y eso produce la indeterminación. En tales casos, es útil la siguiente versión de la regla de L'Hôpital para funciones holomorfas, mucho más clara que la que conocemos para funciones reales de variable real.

- *Sean* $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ *y* $f, g \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$. *Supongamos que* $f(a) = g(a) = 0$ *y que* g *no es idénticamente nula. Entonces existe un* $\delta \in]\,0, R\,[$, *tal que* $g(z) \neq 0$ *y* $g'(z) \neq 0$ *para todo* $z \in D(a, \delta \setminus \{a\}$. *Además, se verifica una de las dos afirmaciones siguientes:*

$$(i) \quad \lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \alpha \in \mathbb{C} \qquad \textit{o bien,}$$

$$(ii) \quad \frac{f(z)}{g(z)} \to \infty \ \ (z \to a) \quad \text{y} \quad \frac{f'(z)}{g'(z)} \to \infty \ \ (z \to a)$$

Comprobamos la existencia de δ, que permite definir las funciones cociente f/g y f'/g' en un entorno reducido de a. Como g no es idénticamente nula en el dominio $D(a, r)$, el cero de g en el punto a es aislado, luego existe $\delta \in]\,0, R\,[$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(0, \delta_1) \setminus \{a\}$. Probando lo mismo para g', es obvio que podemos conseguir un mismo δ para ambas funciones. Observamos que g' no es idénticamente nula, porque g no es constante. Si $g'(a) \neq 0$, usamos la continuidad de g' en a, y si $g'(a) = 0$, razonamos igual que con g.

Descartamos que f sea idénticamente nula, pues entonces se cumple (i) con $\alpha = 0$. Sean m y n los órdenes de los ceros en el punto a de f y g, respectivamente. Existen funciones $\varphi, \psi \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$, con $\varphi(a) \neq 0$ y $\psi(a) \neq 0$, tales que, para todo $z \in D(a,R)$ se tiene

$$f(z) \,=\, (z-a)^m \,\varphi(z) \qquad \text{y} \qquad g(z) \,=\, (z-a)^n \,\psi(z)$$

También para todo $z \in D(a,R)$ se tiene entonces

$$\begin{aligned} f'(z) \,&=\, (z-a)^{m-1} \big(m\,\varphi(z) \,+\, (z-a)\,\varphi'(z) \big) \qquad\qquad \text{y} \\ g'(z) \,&=\, (z-a)^{n-1} \big(n\,\psi(z) \,+\, (z-a)\,\psi'(z) \big) \end{aligned}$$

Para $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$, usando que $g(z) \neq 0$ y $g'(z) \neq 0$ deducimos que

$$\frac{f(z)}{g(z)} \,=\, (z-a)^{m-n}\,\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \quad \text{y} \quad \frac{f'(z)}{g'(z)} \,=\, (z-a)^{m-n}\,\frac{m\,\varphi(z) \,+\, (z-a)\,\varphi'(z)}{n\,\psi(z) \,+\, (z-a)\,\psi'(z)} \tag{8}$$

Para probar que se verifica (i) o (ii), bastará entonces observar que

$$\lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \,=\, \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{z \to a} \frac{m\,\varphi(z) \,+\, (z-a)\,\varphi'(z)}{\psi(z) \,+\, (z-a)\,\psi'(z)} \,=\, \frac{m\,\varphi(a)}{n\,\psi(a)} \neq 0 \tag{9}$$

Usando (8) y (9) resolvemos los tres casos que pueden presentarse. Si $m > n$, está claro que se cumple (i) con $\alpha = 0$. Si $m < n$ es igualmente claro que se cumple (ii). Finalmente, en el caso $m = n$, tenemos (i) con $\alpha \,=\, \varphi(a)\,/\,\psi(a)$. ■

Comentamos finalmente que, en el caso de una singularidad esencial, no hay ninguna regla práctica para calcular el residuo. Sólo queda la opción de calcular el desarrollo de Laurent de nuestra función en un entorno reducido de la singularidad esencial.

14.4. Ejercicios

1. Probar que, para $a \in \,]\,0,1\,[$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\,t)\ dt}{1 \,+\, a^2 \,-\, 2\,a\,\cos(2\,t)} \,=\, \pi\,\frac{a^2 \,-\, a \,+\, 1}{1 \,-\, a}$$

2. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\big(1 \,+\, 2\,\cos t\big)^n\ \cos(n\,t)}{3 \,+\, 2\,\cos t}\,dt \,=\, \frac{2\,\pi}{\sqrt{5}}\,\big(3 \,-\, \sqrt{5}\big)^n$$

3. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\ \cos\big(n\,t \,-\, \operatorname{sen} t\big)\,dt \,=\, \frac{2\,\pi}{n\,!}$$

4. Probar que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)\left(x^2 + b^2\right)^2} = \frac{\pi\,(a + 2b)}{2\,a\,b^3\,(a + b)^2}$$

5. Probar que, para $a \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6\ dx}{\left(x^4 + a^4\right)^2} = \frac{3\,\pi\,\sqrt{2}}{8\,a}$$

6. Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$, integrar una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del sector $D(0, R) \cap \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg z < 2\,\pi/n\}$ con $R \in \mathbb{R}^+$, para probar que:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n}$$

7. Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t\,x)\ dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = \frac{\pi}{2\,a^3}\,(1 + a\,t)\,e^{-a\,t}$$

8. Probar que: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ \operatorname{sen}(\pi\,x)}{x^2 - 5\,x + 6}\,dx = -5\,\pi$

9. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{1 - e^{2\,i\,z}}{z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera de la mitad superior del anillo $A(0\,; \varepsilon, R)$, probar que:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

10. Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a > 1$, integrar la función $z \mapsto \dfrac{z}{a - e^{-i\,z}}$ sobre la poligonal $\big[-\pi\,,\,\pi\,,\,\pi + i\,n\,,\,-\pi + i\,n\,,\,-\pi\big]$, con $n \in \mathbb{N}$, para probar que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\ \operatorname{sen} x\ dx}{1 + a^2 - 2\,a\,\cos x} = \frac{2\,\pi}{a}\,\log\left(\frac{1 + a}{a}\right)$$

11. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0\,; \varepsilon, R)$, probar que, para $\alpha \in\,]-1, 3\,[$, se tiene:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha\,dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi}{4}\,(1 - \alpha)\,\sec\frac{\pi\,\alpha}{2}$$

12. Probar que, para $\alpha \in\,]\,0, 2\,[$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha\,x}\ dx}{1 + e^x + e^{2x}} = \int_{0}^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}\ dt}{1 + t + t^2} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{\operatorname{sen}\big(\pi\,(1-\alpha)/3\big)}{\operatorname{sen}(\pi\,\alpha)}$$

13. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{\log(z+i)}{1+z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, con $R \in \mathbb{R}$ y $R > 1$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1 + x^2}\, dx$$

14. Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R,\ R,\ R+\pi i,\ -R+\pi i,\ -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\ dx}{e^x + e^{-x}}$$

15. Integrando una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg z < \pi/2\}$, con $0 < \varepsilon < 1 < R$, calcular la integral

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\log x}{1 + x^4}\, dx$$

16. Integrando una conveniente función sobre la poligonal $\big[-R,\ R, R+2\pi i, -R+2\pi i, -R\big]$ con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x + 1}\, dx$$