Variable Compleja I
Tema 1: Números complejos

El cuerpo de los números complejos

El cuerpo $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$$

- Suma: $(x,y)+(u,v) = (x+u, y+v) \quad \forall x,y,u,v \in \mathbb{R}$
- Producto por escalares: $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \forall \lambda, x, y \in \mathbb{R}$
- Producto: $(x,y)(u,v) = (xu - yv, xv + yu) \quad \forall x,y,u,v \in \mathbb{R}$

- $\mathbb{R}^2$ con la operación suma es un grupo abeliano
- El producto es asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- $(x,y)(1,0) = (x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $(x,y)\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

  Por tanto, con las dos operaciones tenemos un cuerpo conmutativo:

El cuerpo de los números complejos, que se denota por $\mathbb{C}$

Como conjuntos: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

Partes real e imaginaria de un número complejo

Inclusión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

- $x \mapsto (x,0)$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, monomorfismo de cuerpos.

  Por tanto, $\mathbb{R} \cong \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$

  Identificamos $\mathbb{R} \ni x \equiv (x,0) \in \mathbb{C}$ con lo que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- El producto por escalares en $\mathbb{R}^2$ es caso particular del producto en $\mathbb{C}$:

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) = (\lambda, 0)(x,y)$$

Partes real e imaginaria de un número complejo

Base usual de $\mathbb{R}^2$: $(1,0) \equiv 1$ y $(0,1) \stackrel{\text{def}}{=} i$

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + yi$$

Cada $z \in \mathbb{C}$ se escribe de manera única como $z = x + iy$ con $x,y \in \mathbb{R}$

- x es la parte real de z: $x = \operatorname{Re} z$
- y es la parte imaginaria de z: $y = \operatorname{Im} z$

Operaciones con parte real e imaginaria

$$z, w \in \mathbb{C} \ , \ z = x + iy \ , \ w = u + iv \ , \ x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

Suma

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$

$\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w$

$\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w$

Producto

Basta tener en cuenta que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu + xiv + iyu + i^2 yv = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

$\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w$

$\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Re} w$

Conjugación

Complejo conjugado

$$\overline{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \overline{z} = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad , \quad \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \overline{z} = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Propiedades de la conjugación

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$
- $\overline{\overline{z}} = z$

Automorfismo involutivo del cuerpo $\mathbb{C}$

Módulo de un número complejo

Módulo de un número complejo

$$|z| = (z\,\overline{z})^{1/2} = \left((\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2\right)^{1/2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Propiedades del módulo

- $|z| \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z \pm w| \leqslant |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$
- $\max\big\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\big\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $|zw| = |z|\,|w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

Argumentos

Argumentos de un número complejo no nulo

$$z \in \mathbb{C}^* \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\operatorname{Arg} z = \Big\{ \theta \in \mathbb{R} \ : \ z = |z| \big(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \big) \Big\}$$

Equivalentemente, para $z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\theta \in \operatorname{Arg} z \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \cos\theta = \operatorname{Re} z \,/\, |z| \\ \operatorname{sen}\theta = \operatorname{Im} z \,/\, |z| \end{cases}$$

Relación entre ellos

$$z \in \mathbb{C}^* \ , \ \theta_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z \implies \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$$

Por tanto:

$$\theta \in \operatorname{Arg} z \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Arg} z = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

El argumento principal

Argumento principal

Para cada $z \in \mathbb{C}^*$, existe un único argumento de z que pertenece al intervalo semiabierto $]-\pi,\pi]$.

Se le llama argumento principal de z y se denota por $\arg z$.

De hecho se tiene:

$$\arg z = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

entendiendo que $\operatorname{sgn}(0) = 1$.

A partir del argumento principal obtenemos los demás:

$$\operatorname{Arg} z = \left\{ \arg z + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Argumento de un producto

Planteamiento algebraico:

$2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$

Considerando el grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, es claro que

$$\operatorname{Arg} z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

luego tenemos una aplicación (sobreyectiva) $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Propiedad clave del conjunto de todos los argumentos

Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \{\theta + \varphi \ : \ \theta \in \operatorname{Arg} z\ ,\ \varphi \in \operatorname{Arg} w\}$$

Así pues, $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es un epimorfismo de grupos

Restringido a $\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es un isomorfismo: $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Argumento de un producto (cont.)

Consecuencias

- $\operatorname{Arg}(z/w) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$
- $\operatorname{Arg}(1/z) = \operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

Inconvenientes de elegir un argumento

- Para $z = w = -1$ se tiene $\arg z + \arg w = 2\pi \neq 0 = \arg(zw)$
- No existe una función $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ que verifique $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$ y $\varphi(zw) = \varphi(z) + \varphi(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$

Argumento de un producto (cont.)

Interpretación geométrica del producto

- Dado $u \in \mathbb{T}$, la aplicación $z \to uz$ es el giro de ángulo $\theta = \arg u$:

$$|uz| = |z| \ , \ \arg u + \arg z \in \operatorname{Arg}(uz) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

- Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$ la aplicación $z \to \rho z$ es la homotecia de razón ρ:

$$|\rho z| = \rho\,|z| \ , \ \arg(\rho z) = \arg z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

- Por tanto, dado $w \in \mathbb{C}^*$, la aplicación $z \to wz$ es composición de la homotecia de razón $\rho = |w|$ con el giro de ángulo $\theta = \arg w$.

Variable Compleja I
Tema 2: Topología del plano

Distancia y topología de $\mathbb{C}$

Distancia de $\mathbb{C}$

$$d(z,w) = |w-z| \quad \forall z,w \in \mathbb{C}$$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad \text{subespacio métrico}$$

Topología de $\mathbb{C}$

- Topología de $\mathbb{C}$: la generada por su distancia. Induce en $\mathbb{R}$ la usual
- Discos abiertos y cerrados: $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$,

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\} \qquad \overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\}$$

- Los abiertos de $\mathbb{C}$ son las uniones (arbitrarias) de discos abiertos
- Interior de un conjunto: $A \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

$$z \in A^\circ \iff \exists r \in \mathbb{R}^+ \; : \; D(z,r) \subset A$$

- Otra descripción de los abiertos: Para $\Omega \subset \mathbb{C}$ se tiene:

$$\Omega \;\; \text{abierto} \iff \Omega = \Omega^\circ \iff \forall z \in \Omega \; \exists r \in \mathbb{R}^+ : D(z,r) \subset \Omega$$

Sucesiones convergentes y conjuntos cerrados

Sucesiones convergentes

- Si $z_n \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\begin{aligned}\{z_n\} \to z \quad &\Longleftrightarrow \quad \big[\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ :\ n \geqslant m\ \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon\big] \\ &\Longleftrightarrow \quad \big\{|z_n - z|\big\} \to 0\end{aligned}$$

- En particular: $\{z_n\} \to 0 \iff \big\{|z_n|\big\} \to 0$

Conjuntos cerrados

- Cierre de un conjunto: $A \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

$$z \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \{z_n\}\ :\ z_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \{z_n\} \to z$$

- Conjuntos cerrados: $A \subset \mathbb{C}$

$$A \ \text{ cerrado} \quad \Longleftrightarrow \quad \big[z_n \in A\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \{z_n\} \to z \in \mathbb{C}\ \Rightarrow\ z \in A\big]$$

Complitud

Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy

$$\left.\begin{array}{c}\max\big\{|\operatorname{Re} w - \operatorname{Re} z|\,,\,|\operatorname{Im} w - \operatorname{Im} z|\big\} \leqslant |w-z| \\ |w-z| \leqslant |\operatorname{Re} w - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} w - \operatorname{Im} z|\end{array}\right\} \quad \forall w,z \in \mathbb{C}$$

$$z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\, z \in \mathbb{C}$$

- $\{z_n\} \to z \iff \begin{cases} \{\operatorname{Re} z_n\} \to \operatorname{Re} z \\ \{\operatorname{Im} z_n\} \to \operatorname{Im} z \end{cases}$
- $\{z_n\}$ sucesión de Cauchy $\iff$ $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ sucesiones de Cauchy

Teorema de complitud

$\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo

Acotación

Conjuntos acotados y sucesiones acotadas

- Conjuntos acotados: $A \subset \mathbb{C}$,

$$A \ \text{ acotado } \iff \exists M \in \mathbb{R} \ : \ |z| \leqslant M \quad \forall z \in A$$

- Sucesiones acotadas: $z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\{z_n\} \ \text{ acotada } \iff \exists M \in \mathbb{R} \ : \ |z_n| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Toda sucesión convergente está acotada
- Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ está acotada si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ está acotadas.

Compacidad

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Toda sucesión acotada de números complejos admite una sucesión parcial convergente

Caracterización de la compacidad

Para un conjunto $K \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:

(a) K es compacto

(b) Toda sucesión de puntos de K admite una sucesión parcial que converge e un punto de K

(c) K es cerrado y acotado

En particular $\mathbb{C}$ es un espacio topológico localmente compacto

Divergencia

Sucesiones divergentes

$z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\{z_n\} \to \infty \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \{|z_n|\} \to +\infty$$

Caracterización

Una sucesión de números complejos es divergente si, y sólo si, no admite ninguna sucesión parcial convergente

Ejemplo

$$z_n = n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $\{z_n\} \to \infty$
- Las sucesiones $\{\text{Re}\, z_n\}$ y $\{\text{Im}\, z_n\}$ no son divergentes

Cálculo de límites

Cálculo de límites

$$z_n, w_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ z, w \in \mathbb{C}$$

- $\{z_n\} \to z \implies \{|z_n|\} \to |z|$
- $\{z_n\} \to z\ ,\ \{w_n\} \to w \implies \{z_n + w_n\} \to z + w$
- $\{z_n\} \to \infty\ ,\ \{w_n\}$ acotada $\implies \{z_n + w_n\} \to \infty$
- $\{z_n\} \to 0\ ,\ \{w_n\}$ acotada $\implies \{z_n w_n\} \to 0$
- $\{z_n\} \to z\ ,\ \{w_n\} \to w \implies \{z_n w_n\} \to zw$
- $\{z_n\} \to z \neq 0\ ,\ \{w_n\} \to \infty \implies \{z_n w_n\} \to \infty$
- $\{z_n\} \to \infty\ ,\ \{w_n\} \to \infty \implies \{z_n w_n\} \to \infty$
- $w_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \{w_n\} \to w \neq 0 \implies \{1/w_n\} \to 1/w$
- Si $w_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces: $\{w_n\} \to 0 \iff \{1/w_n\} \to \infty$

Operaciones con funciones complejas de variable compleja

Si $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(A)$ es el conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{C}$

Estructura algebraica

Para $f, g \in \mathcal{F}(A)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos:

- Suma: $(f+g)(z) = f(z) + g(z) \quad \forall z \in A$
- Producto: $(fg)(z) = f(z)g(z) \quad \forall z \in A$

  Con estas operaciones, $\mathcal{F}(A)$ es un anillo conmutativo con unidad
- Si $g(A) \subset \mathbb{C}^*$ tenemos la función cociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \quad \forall z \in A$$

- Producto por escalares: $(\lambda f)(z) = \lambda f(z) \quad \forall z \in A$

  Con la suma y este producto por escalares, $\mathcal{F}(A)$ es un espacio vectorial complejo

Otras operaciones con funciones

Composición

$f \in \mathcal{F}(A),\ f(A) \subset B \subset \mathbb{C},\ g \in \mathcal{F}(B)$:

$$(g \circ f)(z) = g\big(f(z)\big) \quad \forall z \in A$$

Partes real e imaginaria, conjugada y módulo

Para $f \in \mathcal{F}(A)$ podemos definir:

- $(\operatorname{Re} f)(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $(\operatorname{Im} f)(z) = \operatorname{Im} f(z) \quad \forall z \in A$
- $\overline{f}(z) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in A$
- $|f|(z) = |f(z)| \quad \forall z \in A$
- $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, $\overline{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f$
- $\operatorname{Re} f = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$, $\operatorname{Im} f = \dfrac{f - \overline{f}}{2i}$
- $\big|f\big| = \big|\overline{f}\big| = \big(f\,\overline{f}\big)^{1/2} = \big((\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)\big)^{1/2}$

Continuidad en un punto (I)

Definición y caracterización

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{F}(A)$, $z \in A$. f es continua en z cuando:

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : w \in A, |w - z| < \delta \ \Rightarrow \ |f(w) - f(z)| < \varepsilon$
- $z_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}, \{z_n\} \to z \ \Rightarrow \ \{f(z_n)\} \to f(z)$

Carácter local

$z \in B \subset A$, $f \in \mathcal{F}(A)$:

- Si f es continua en z, entonces $f\big|_B$ es continua en z
- Si $f\big|_B$ es continua en z y existe $\delta > 0$ tal que $D(z,\delta) \cap A \subset B$, entonces f es continua en z

Operaciones algebraicas

$f, g \in \mathcal{F}(A)$ continuas en $z \in A$. Entonces:

- $f + g$ es continua en z
- fg es continua en z
- Si $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces f/g es continua en z

Continuidad en un punto (II)

Composición

$f \in \mathcal{F}(A)$, $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$, $g \in \mathcal{F}(B)$, $z \in A$

$$\left.\begin{array}{r} f \ \text{ continua en } \ z \\ g \ \text{ continua en } \ f(z) \end{array}\right\} \Longrightarrow \ g \circ f \ \text{ continua en } \ z$$

Consecuencias

$f \in \mathcal{F}(A)$, $z \in A$

- f continua en z $\iff$ $\overline{f}$ continua en z
- f continua en z $\iff$ $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ continuas en z
- f continua en z $\Longrightarrow$ $|f|$ continua en z. El recíproco es falso

Continuidad global (I)

Definición y caracterización

$\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{F}(A)$

- f continua en $B \iff f$ continua en z, $\forall z \in B$
- f continua $\iff f$ continua en A
- $\mathcal{C}(A) = \{f \in \mathcal{F}(A) : f \text{ continua}\}$
- Si $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\mathcal{T}$ es la topología de $\mathbb{C}$, entonces:

$$f \in \mathcal{C}(A) \iff \forall V \in \mathcal{T}\ \exists U \in \mathcal{T} : f^{-1}(V) = U \cap A$$

Carácter local

Supongamos $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ donde Λ es un conjunto y A_λ es subconjunto abierto (relativo) de A, para todo $\lambda \in \Lambda$. Entonces, para $f \in \mathcal{F}(A)$ se tiene:

$$f \in \mathcal{C}(A) \iff f\big|_{A_\lambda} \in \mathcal{C}(A_\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Continuidad global (II)

Operaciones con funciones continuas

- $\mathcal{C}(A)$ es subanillo y subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A)$
- $f, g \in \mathcal{C}(A)$, $g(A) \subset \mathbb{C}^* \implies f/g \in \mathcal{C}(A)$
- $f \in \mathcal{C}(A)$, $f(A) \subset B$, $g \in \mathcal{C}(B) \implies g \circ f \in \mathcal{C}(A)$
- Para $f \in \mathcal{F}(A)$ se tiene:

$$f \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \overline{f} \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow |f| \in \mathcal{C}(A)$$

Propiedades de las funciones continuas

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(A)$

- A compacto $\implies f(A)$ compacto y f uniformemente continua
- A conexo $\implies f(A)$ conexo

Continuidad uniforme

Definición

$f \in \mathcal{F}(A)$ es uniformemente continua cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; z, w \in A \, , \, |z - w| < \delta \; \Rightarrow \; |f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

Esto implica que $f \in \mathcal{C}(A)$ pero en general el recíproco es falso

Funciones lipschitzianas

$f \in \mathcal{F}(A)$ es lipschitziana cuando:

$$\exists M \in \mathbb{R}_0^+ \; : \; |f(z) - f(w)| \leqslant M \, |z - w| \quad \forall z, w \in A$$

La mínima M que verifica lo anterior es la constante de Lipschitz de f:

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|} \; : \; z, w \in A \, , \, z \neq w \right\}$$

Toda función lipschitziana es uniformemente continua. El recíproco es falso

Conexión

Subconjuntos conexos de $\mathbb{C}$

$A \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{T}_A =$ topología inducida en A por la usual de $\mathbb{C}$

$$A \text{ conexo}$$

$$\Updownarrow$$

$$U, V \in \mathcal{T}_A, \quad A = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset \quad \Rightarrow \quad U = \emptyset \text{ o bien } V = \emptyset$$

$$\Updownarrow$$

$$U \in \mathcal{T}_A, \; A \setminus U \in \mathcal{T}_A \quad \Rightarrow \quad U = \emptyset \text{ o bien } U = A$$

$$\Updownarrow$$

$$f \in \mathcal{C}(A), \; f(A) \subset \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad f \text{ constante}$$

Límite funcional

Puntos de acumulación

$$A \subset \mathbb{C} \ , \ \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \alpha \in A' \quad &\Longleftrightarrow \quad D(\alpha,\varepsilon) \cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists \ \{z_n\} \ : \ z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{z_n\} \to \alpha \end{aligned}$$

Límite de una función en un punto

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} \ , \ f \in \mathcal{F}(A) \ , \ \alpha \in A' \ , \ L \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = L$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ : \ z \in A, \ 0 < |z - \alpha| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f(z) - L| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{z_n\} \to \alpha \ \ \Rightarrow \ \ \{f(z_n)\} \to L$$

Límite y continuidad

Observaciones inmediatas

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = L \iff \lim_{z\to\alpha} |f(z) - L| = 0$$

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = 0 \iff \lim_{z\to\alpha} |f(z)| = 0$$

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = L \iff \lim_{z\to\alpha} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} L \quad \text{y} \quad \lim_{z\to\alpha} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} L$$

Relación entre límite y continuidad

Para $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\alpha \in A \cup A'$, se pueden dar tres casos:

- $\alpha \in A \setminus A'$. Entonces f es continua en el punto α
- $\alpha \in A \cap A'$. Entonces f es continua en α si, y sólo si, $\lim_{z\to\alpha} f(z) = f(\alpha)$
- $\alpha \in A' \setminus A$. Entonces f tiene límite en α si, y sólo si, existe una función $g \in \mathcal{F}\big(A \cup \{\alpha\}\big)$ que es continua en α y extiende a f, en cuyo caso se tiene $g(\alpha) = \lim_{z\to\alpha} f(z)$.

Divergencia de funciones. Carácter local

Divergencia de funciones

$$f \in \mathcal{F}(A)\ ,\ \alpha \in A'$$

Decimos que f diverge en α y escribimos $f(z) \to \infty \quad (z \to \alpha)$ cuando:

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \ \exists \delta > 0 \ : \ z \in A, \ \ 0 < |z - \alpha| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f(z)| > M$$

Caracterización mediante sucesiones:

$$f(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha) \ \ \Longleftrightarrow \ \ \left[\, z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{z_n\} \to \alpha \ \ \Rightarrow \ \ \{f(z_n)\} \to \infty \,\right]$$

Carácter local

$$f \in \mathcal{F}(A)\ ,\ \alpha \in A'\ ,\ \delta > 0\ ,\ B = A \cap D(\alpha, \delta)\ ,\ g = f\big|_B\ ,\ L \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = L \ \ \Longleftrightarrow \ \ \lim_{z \to \alpha} g(z) = L$$

$$f(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha) \ \ \Longleftrightarrow \ \ g(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha)$$

Cálculo de límites

Reglas para límites y divergencia de funciones

$$f, g \in \mathcal{F}(A) \ , \ \alpha \in A' \ , \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

- $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda \implies \lim_{z \to \alpha} |f(z)| = |\lambda|$
- $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda \ , \ \lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu \implies \lim_{z \to \alpha} \big(f+g\big)(z) = \lambda + \mu$
- $f(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha) \ , \ g$ acotada $\implies \big(f+g\big)(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha)$
- $\lim_{z \to \alpha} f(z) = 0 \ , \ g$ acotada $\implies \lim_{z \to \alpha} \big(f\,g\big)(z) = 0$
- $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda \ , \ \lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu \implies \lim_{z \to \alpha} \big(f\,g\big)(z) = \lambda\mu$
- $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}^* \ , \ g(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha) \implies (f\,g)(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha)$
- $f(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha) \ , \ g(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha) \implies (f\,g)(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha)$
- $g(A) \subset \mathbb{C}^* \ , \ \lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu \in \mathbb{C}^* \implies \lim_{z \to \alpha} (1/g)(z) = 1/\mu$
- Si $\ g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces: $\lim_{z \to \alpha} g(z) = 0 \iff (1/g)(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha)$

Límite o divergencia en el infinito

Límite o divergencia en el infinito

$$A \subset \mathbb{C},\ A \text{ no acotado},\ f \in \mathcal{F}(A)\ ,\ L \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = L \iff \left[\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists R > 0\ :\ z \in A,\ \ |z| > R\ \Rightarrow\ |f(z) - L| < \varepsilon\ \right]$$

$$\iff \left[\ z_n \in A\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \{z_n\} \to \infty\ \Rightarrow\ \{f(z_n)\} \to L\ \right]$$

$$f(z) \to \infty\ (z \to \infty) \iff \left[\forall M \in \mathbb{R}\ \ \exists R > 0\ :\ z \in A,\ \ |z| > R\ \Rightarrow\ |f(z)| > M\right]$$

$$\iff \left[z_n \in A\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \{z_n\} \to \infty\ \Rightarrow\ \{f(z_n)\} \to \infty\right]$$

Reducción a límite o divergencia en un un punto

$$A \subset \mathbb{C}\ ,\ A \text{ no acotado},\ B = \{w \in \mathbb{C}^* : 1/w \in A\}\ \text{ verifica }\ 0 \in B'$$

$$f \in \mathcal{F}(A)\ ,\ g \in \mathcal{F}(B)\ ,\ \ g(w) = f(1/w)\ \ \forall w \in B\ ,\ L \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = L \iff \lim_{w \to 0} g(w) = L \iff \lim_{w \to 0} f(1/w) = L$$

$$f(z) \to \infty\ \ (z \to \infty) \iff g(w) \to \infty\ \ (w \to 0) \iff f(1/w) \to \infty\ \ (w \to 0)$$

Variable Compleja I
Tema 3: Funciones holomorfas

Derivada

Definición de derivada

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{F}(A)$, $a \in A \cap A'$

Definimos $f_a : A \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ por: $f_a(z) = \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \forall z \in A \setminus \{a\}$

Decimos que f es derivable en el punto a cuando f_a tiene límite en a

En tal caso, la derivada de f en a viene dada por:

$$f'(a) = \lim_{z \to a} f_a(z) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Si $\emptyset \neq B \subset A \cap A'$, f es derivable en B cuando lo es en todo punto de B.

Sea ahora $A_1 = \{z \in A \cap A' \ : \ f$ es derivable en $z\}$.

La función $z \to f'(z)$ es la función derivada de f:

$$f' : A_1 \to \mathbb{C} \ , \quad f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \forall z \in A_1$$

Primeras observaciones

Relación con la continuidad

$$f \;\text{ derivable en }\; a \quad\Longrightarrow\quad f \;\text{ continua en }\; a$$

Carácter local

$$B \subset A \;,\; b \in B \cap B'$$

$$f \text{ derivable en } b \quad\Longrightarrow\quad f\big|_B \text{ derivable en } b \text{ con } \left(f\big|_B\right)'(b) = f'(b)$$

$$\left.\begin{array}{r} f\big|_B \text{ derivable en } b \\ \exists\delta > 0 : D(b,\delta) \cap A \subset B \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad f \text{ derivable en } b$$

Funciones de variable real

- Para funciones reales de variable real, la definición de derivada recién introducida coincide con la que ya conocíamos
- Supongamos $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Entonces f es derivable en a si, y sólo si, $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son derivables en a, en cuyo caso:
$$f'(a) = \left(\operatorname{Re} f\right)'(a) + i\left(\operatorname{Im} f\right)'(a)$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Teorema

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} \ (\equiv \mathbb{R}^2) \ , \quad f \in \mathcal{F}(A)$$

Sean $u, v : A \to \mathbb{R}$ las funciones definidas, para todo $(x,y) \in A$, por

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

Para $z_0 = (x_0, y_0) \in A^\circ$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es derivable en el punto z_0

(ii) u y v son diferenciables en el punto (x_0, y_0), verificando que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Caso de que se cumplan (i) y (ii), se tiene:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Observaciones

Observaciones

Las igualdades que aparecen en la afirmación (*ii*) del teorema anterior se conocen como ecuaciones de Cauchy-Riemann. Cuando A es abierto y f es derivable en A, las funciones u y v son soluciones de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Usando dichas ecuaciones, la derivada $f'(z_0)$ puede expresarse de cuatro formas, en términos de las derivadas parciales de u y v. Concretamente:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

entendiendo que todas las derivadas parciales se evalúan en el punto (x_0, y_0).

Ejemplos

Un ejemplo negativo

$$f(z) = \operatorname{Re} z \quad \forall z \in \mathbb{C}\ ; \quad u(x,y) = x \quad \text{y} \quad v(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

¡¡ f no es derivable en ningún punto del plano !!

Un ejemplo positivo

La función exponencial: $\quad f(z) = e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{y} \quad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

u, v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ con $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -v = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

luego f es derivable en $\mathbb{C}$ con $f' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = u + iv = f$

Operaciones algebraicas

Ejemplos obvios

- $\lambda \in \mathbb{C}, f(z) = \lambda \ \ \forall z \in \mathbb{C} \implies f'(z) = 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $f(z) = z \ \ \forall z \in \mathbb{C} \implies f'(z) = 1 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$

Sumas, productos y cocientes

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{F}(A)$, derivables en un punto $a \in A \cap A'$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces:

- $f + g$ es derivable en a con $\big(f+g\big)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $f\,g$ es derivable en a con $\big(f\,g\big)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$
- λf es derivable en a con $\big(\lambda f\big)'(a) = \lambda f'(a)$
- Suponiendo que $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces f/g es derivable en a con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}$$

Polinomios

Potencias de exponente natural

Fijado $n \in \mathbb{N}$ sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ dada por: $f_n(z) = z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Entonces f_n es derivable en $\mathbb{C}$ con: $f_n'(z) = n\, z^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Polinomios

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Decimos que $P \in \mathcal{F}(A)$ es una función polinómica cuando existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k \quad \forall z \in A$$

Entonces P es derivable en $A \cap A'$ y su derivada es la función polinómica dada por

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{n} k\, \alpha_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, \alpha_{k+1} z^k \qquad \forall z \in A \cap A'$$

Funciones racionales y regla de la cadena

Funciones racionales

$f \in \mathcal{F}(A)$ es una función racional cuando existen funciones polinómicas $P, Q \in \mathcal{F}(A)$ tales que:

$$Q(z) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad \forall z \in A$$

Entonces f es derivable en $A \cap A'$ y su derivada $f' : A \cap A' \to \mathbb{C}$ es otra función racional.

Regla de la cadena

Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{F}(A)$ una función derivable en un punto $a \in A \cap A'$.
Supongamos que $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$, que $f(a) \in B'$ y que $g \in \mathcal{F}(B)$ es derivable en el punto $f(a)$.
Entonces $g \circ f$ es derivable en a con

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)\, f'(a)$$

Funciones holomorfas

Definición

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\ ,\quad f \in \mathcal{F}(\Omega)$$

f es holomorfa en Ω cuando es derivable en todo punto de Ω

El conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω se denota por $\mathcal{H}(\Omega)$

Observaciones

- Las funciones holomorfas son continuas, pero el recíproco es falso:

$$\mathcal{H}(\Omega) \subsetneq \mathcal{C}(\Omega) \subsetneq \mathcal{F}(\Omega)$$

- La holomorfía es una propiedad local: Supongamos que $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ donde Λ es un conjunto no vacío arbitrario y U_λ es un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea f_λ la restricción de f a U_λ. Entonces:

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \iff f_\lambda \in \mathcal{H}(U_\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Operaciones con funciones holomorfas

Operaciones algebraicas y regla de la cadena

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$$

$\mathcal{H}(\Omega)$ es un subanillo y un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\Omega)$

$f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^* \implies f/g \in \mathcal{H}(\Omega)$

$\mathcal{P}(\Omega)$ funciones polinómicas en Ω ; $\mathcal{R}(\Omega)$ funciones racionales en Ω

$$\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{R}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega)$$

La restricción a Ω de la exponencial nunca es una función racional, luego

$$\mathcal{R}(\Omega) \subsetneq \mathcal{H}(\Omega)$$

$f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(\Omega) \subset U = U^\circ \subset \mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(U) \implies g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Funciones enteras

Una funci on entera es una función holomorfa en todo el plano. Por tanto $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es el conjunto de todas las funciones enteras.

La exponencial es una función entera no polinómica, luego

$$\mathcal{R}(\mathbb{C}) \overset{!!}{=} \mathcal{P}(\mathbb{C}) \subsetneq \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

¿ Teorema del Valor Medio ?

Ejemplos

Para funciones complejas no hay un teorema de Rolle o del valor medio:

Una función de variable real: $g(y) = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad \forall y \in \mathbb{R}$

- Es derivable en $\mathbb{R}$
- $g(0) = g(2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $g'(y) = ig(y) \forall y \in \mathbb{R}$ luego $|g'(y)| = |g(y)| = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

La exponencial: $f(z) = e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

- $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
- $f(0) = f(2k\pi i) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $|f'(z)| = |f(z)| = e^{\operatorname{Re} z} > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Funciones con derivada nula

Dominios

Un dominio es un subconjunto no vacío, abierto y conexo del plano

Funciones con derivada nula

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Entonces f es constante.

Consecuencias

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

- Si $\operatorname{Re} f$ es constante, entonces f es constante
- Si $\operatorname{Im} f$ es constante, entonces f es constante
- Si $|f|$ es constante, entonces f es constante

Caso de un abierto no conexo

Ejemplo

Supongamos que $\Omega = U \cup V$ donde U, V son abiertos, no vacíos, disjuntos

$$f(z) = 1 + i \quad \forall z \in U \quad \text{y} \quad f(z) = 1 - i \quad \forall z \in V$$

- $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
- $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\operatorname{Re} f$ y $|f|$ son constantes
- Pero f no es constante

Componentes conexas de un abierto

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$$

- Las componentes conexas de Ω son dominios
- El conjunto de las componentes conexas de Ω es numerable

Generalización de los resultados anteriores

Caso de un abierto no conexo

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C} \quad \text{y} \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$

o bien cualquiera de las funciones $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ o $|f|$ es constante,

entonces f es constante en cada componente conexa de Ω

y por tanto $f(\Omega)$ es numerable

Variable Compleja I
Tema 4: Funciones analíticas

Series de números complejos

Definiciones

Serie de números complejos:

$$\sum_{n\geqslant 0} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\sum_{k=0}^{n-1} z_k\right\} = \{S_n\}$$

donde $z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Suma de una serie convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} z_k$$

Término general de una serie convergente:

$$\sum_{n\geqslant 0} z_n \ \text{ convergente } \implies \{z_n\} \to 0$$

Series de números complejos

Notación formalmente más general

Fijado $m \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\sum_{n \geqslant m} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geqslant 0} z_{m+n} = \left\{ \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k \right\}$$

Suma de esta serie, cuando es convergente:

$$\sum_{n=m}^{\infty} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k$$

La convergencia de la serie $\sum_{n \geqslant m} z_n$ equivale a la de $\sum_{n \geqslant 0} z_n$, en cuyo caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{m-1} z_n + \sum_{n=m}^{\infty} z_n$$

Reducción al caso real

Reducción al caso real

$$\operatorname{Re} S_n = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re} z_k \qquad \operatorname{Im} S_n = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im} z_k$$

La serie de números complejos $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ es convergente si, y sólo si, las series de números reales $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Re} z_n$ y $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Im} z_n$ convergen, en cuyo caso se verifica que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$$

Convergencia absoluta

Definición

La serie $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ es absolutamente convergente cuando $\sum_{n\geqslant 0} |z_n|$ converge

Relación con la convergencia

Toda serie de números complejos absolutamente convergente es convergente.
Además, si la serie $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ es absolutamente convergente, entonces:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

Sucesiones de funciones. Convergencia puntual

Sucesiones de funciones

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$$

Una sucesión de funciones definidas en A es una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(A)$.
Escribiendo $f_n = \varphi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión φ se denota por $\{f_n\}$.
En lo que sigue, fijamos una sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en A y un conjunto no vacío $B \subset A$.

Convergencia puntual

$\{f_n\}$ converge puntualmente en B cuando, para cada $z \in B$, la sucesión $\{f_n(z)\}$ es convergente. En tal caso podemos definir $f : B \to \mathbb{C}$ por:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \forall z \in B$$

Se dice que la función f es el límite puntual de $\{f_n\}$ en B, o que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en B. Se tiene entonces:

$$\forall z \in B \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \ \Rightarrow \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

En principio m depende de ε y del punto $z \in B$ considerado.

Convergencia uniforme

Definición

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \;\; \Rightarrow \;\; |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \;\; \forall z \in B$$

Primer criterio

La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B si, y sólo si, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant p$ la función $f_n - f$ está acotada en B y

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\{ |f_n(z) - f(z)| \, : \; z \in B \right\} = 0$$

Segundo criterio

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B
- Para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de B, se tiene que
$$\{f_n(z_n) - f(z_n)\} \to 0$$

Ejemplo de convergencia puntual y uniforme

Ejemplo

$$f_n(z) = z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Convergencia puntual. Para $z \in \mathbb{C}$ se tiene:

- $|z| < 1 \implies \{z^n\} \to 0$
- $|z| > 1 \implies \{z^n\} \to \infty$
- Cuando $|z| = 1$, se tiene: $\{z^n\}$ converge $\iff z = 1$

En resumen: $\{f_n(z)\}$ converge $\iff z \in D(0,1) \cup \{1\}$

Concretamente, $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $D(0,1) \cup \{1\}$, donde

$$f(z) = 0 \quad \forall z \in D(0,1) \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1$$

Convergencia uniforme. Si $\emptyset \neq B \subset D(0,1) \cup \{1\}$, entonces:

$$\{f_n\} \text{ converge uniformemente en } B \iff \sup\Big\{\, |z| \ : \ z \in B \setminus \{1\} \Big\} < 1$$

Convergencia uniforme y complitud

Condición de Cauchy uniforme

$\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones definidas en A

$\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en B cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; p, q \geqslant m \implies |f_p(z) - f_q(z)| < \varepsilon \;\; \forall z \in B$$

Tercer criterio

$\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones definidas en A

$$\{f_n\} \text{ converge uniformemente en } B$$
$$\Updownarrow$$
$$\{f_n\} \text{ es uniformemente de Cauchy en } B$$

Convergencia uniforme y continuidad

Preservación de la continuidad

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}\ ,\ f_n \in \mathcal{F}(A) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en A a una función $f \in \mathcal{F}(A)$

Si, para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n es continua en un punto $z \in A$, entonces f es continua en z

Por tanto: $f_n \in \mathcal{C}(A) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathcal{C}(A)$

Series de funciones. Convergencia puntual

Series de funciones

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Serie de funciones definidas en A:

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_k \right\} \qquad \text{donde} \quad f_n \in \mathcal{F}(A) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Convergencia puntual

$\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge puntualmente en $B \subset A \iff \sum_{n\geqslant 0} f_n(z)$ converge $\forall z \in B$

Entonces, la suma de la serie $f \in \mathcal{F}(B)$ viene dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in B$$

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \ \text{ converge puntualmente en } \ B \implies \{f_n(z)\} \to 0 \quad \forall z \in B$$

La sucesión $\{f_n\}$, término general de la serie, converge puntualmente en B a la función idénticamente nula.

Convergencia uniforme de series de funciones

$$\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{C}\,,\ f_n \in \mathcal{F}(A)\quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Series con otra numeración

$$p \in \mathbb{N}\ \text{ fijo.} \qquad \sum_{n \geqslant p} f_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \geqslant 0} f_{p+n} = \left\{ \sum_{k=p}^{p+n-1} f_k \right\}$$

Esta serie converge puntualmente en B si, y sólo si, lo hace $\sum_{n \geqslant 0} f_n$, en cuyo caso: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{p-1} f_n(z) + \sum_{n=p}^{\infty} f_n(z) \quad \forall z \in B$

Convergencia uniforme

$\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en B cuando:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists m \in \mathbb{N}\ :\ n \geqslant m\ \Rightarrow\ \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon\ \ \forall z \in B$$

$\Longrightarrow$ $\{f_n\}$ converge uniformemente en B a la función idénticamente nula.

Fijado $p \in \mathbb{N}$, la convergencia uniforme de $\sum_{n \geqslant p} f_n$ en B equivale a la de $\sum_{n \geqslant 0} f_n$

Convergencia absoluta

Convergencia absoluta

$$\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{C}\ ,\ f_n \in \mathcal{F}(A) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

La serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge absolutamente en B cuando, para todo $z \in B$, la serie $\sum_{n \geqslant 0} |f_n(z)|$ converge.

Entonces $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge puntualmente en B y se tiene:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)| \qquad \forall z \in B$$

Convergencia absoluta y uniforme

Test de Weierstrass

Sea $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ una serie de funciones complejas, definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, y sea B un subconjunto no vacío de A.

Supongamos que:

- Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe una constante $M_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|f_n(z)| \leqslant M_n \qquad \forall z \in B$$

- La serie de números reales $\sum_{n\geqslant 0} M_n$ es convergente

Entonces la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente en B.

Series de potencias

Series de potencias

Una serie de potencias, centrada en un punto $a \in \mathbb{C}$, es una serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ en la que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ viene dada por

$$f_n(z) = \alpha_n (z-a)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

donde $\alpha_n \in \mathbb{C}$ es constante, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dicha serie se denota simplemente por

$$\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$$

Las sumas parciales son funciones polinómicas:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (z-a)^k \qquad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Radio de convergencia

Lema de Abel

Sea $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que la sucesión $\{|\alpha_n|\rho^n\}$ esté mayorada.

Entonces la serie de potencias $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ converge absolutamente en $D(a,\rho)$ y uniformemente en cada subconjunto compacto de dicho disco.

Radio de convergencia

Para definir el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$, se considera el conjunto

$$\Lambda = \left\{ \rho \in \mathbb{R}^+ \ : \ \{|\alpha_n|\rho^n\} \ \text{mayorada} \right\}$$

y se pueden dar tres casos:

- Si $\Lambda = \emptyset$, entonces $R = 0$
- Si $\Lambda \neq \emptyset$ y Λ no está mayorado, entonces $R = \infty$
- Si $\Lambda \neq \emptyset$ y Λ está mayorado, entonces $R = \sup \Lambda$

Convergencia de las series de potencias

Convergencia de la serie, conociendo el radio

Sea R el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$

- Si $R \in \mathbb{R}^+$, la serie converge absolutamente en $D(a,R)$, converge uniformemente en cada compacto $K \subset D(a,R)$ y no converge en ningún punto de $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,R)$
- Si $R = \infty$, la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$ y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{C}$.
- Si $R = 0$, la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Preguntas que quedan sin resolver

- Cuando $R = \infty$ ¿Hay convergencia uniforme en $\mathbb{C}$?
- Cuando $R \in \mathbb{R}^+$ ¿Hay convergencia uniforme en $D(a,R)$?
- Cuando $R \in \mathbb{R}^+$ ¿Qué ocurre en la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} \ |z-a| = R\}$?

Cálculo del radio de convergencia

Fórmula de Cauchy-Hadamard

Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$

- Si la sucesión $\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\}$ no está mayorada, entonces $R=0$
- Si $\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\} \to 0$, entonces $R=\infty$
- En otro caso:

$$R = \frac{1}{\limsup \left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\}}$$

Corolario

Suponiendo $\alpha_n \in \mathbb{C}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se tiene:

- $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \to \infty \quad \Longrightarrow \quad R=0$
- $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad R=\infty$
- $\{|\alpha_{n+1}/\alpha_n|\} \to \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \Longrightarrow \quad R=1/\lambda$

Algunos ejemplos de series de potencias

Ejemplos

- La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^n}$ tiene radio de convergencia ∞.
  No converge uniformemente en $\mathbb{C}$
- La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^n z^n$ tiene radio de convergencia 0
- La serie geométrica, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$ tiene radio de convergencia 1. Su suma es:
  $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \forall z \in D(0,1)$$
  No converge uniformemente en $D(0,1)$
  No converge en ningún punto de $\mathbb{T}$
- La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ tiene radio de convergencia 1
  Converge uniformemente en $\overline{D}(0,1)$

Suma de una serie de potencias

Dominio de convergencia y suma de la serie

Una serie de potencias es trivial cuando tiene radio de convergencia 0

$\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ serie de potencias no trivial, con radio de convergencia $R \neq 0$

Su dominio de convergencia, Ω, es:

- $\Omega = D(a,R)$ cuando $R \in \mathbb{R}^+$
- $\Omega = \mathbb{C}$ cuando $R = \infty$

La serie converge absolutamente en Ω y uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω.

La suma de la serie es la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega$$

Holomorfía de la suma de una serie de potencias

Lema: radio de convergencia de la serie derivada

Las series $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\alpha_n (z-a)^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\,\alpha_{n+1}\,(z-a)^n$ tienen el mismo radio de convergencia.

Teorema

Sea f la suma de una serie de potencias no trivial, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega$$

donde Ω es el dominio de convergencia de la serie.

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha_{n+1}\,(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha_n\,(z-a)^{n-1} \qquad \forall z \in \Omega$$

Definición de las derivadas sucesivas

Derivadas sucesivas de una función

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}\ , f \in \mathcal{F}(A).\ \text{Convenio habitual}\ \ f^{(0)} = f$$

Etapa base de la inducción ($n = 1$), función derivada primera:

$$A_1 = \{z \in A \cap A' \,:\, f \text{ derivable en } z\}\,, \qquad f^{(1)} = f' : A_1 \to \mathbb{C}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ suponemos definida la función derivada n-ésima $f^{(n)} : A_n \to \mathbb{C}$.

Si $z \in A_n \cap A_n'$, f es $n+1$ veces derivable en z cuando $f^{(n)}$ es derivable en z.
Entonces $f^{(n+1)}(z) = \big(f^{(n)}\big)'(z)$ es la $(n+1)$-ésima derivada de f en z.

Definimos ahora $A_{n+1} = \{z \in A_n \cap A_n' \,:\, f \text{ es } n+1 \text{ veces derivable en } z\}$
Si $A_{n+1} \neq \emptyset$, la función derivada $(n+1)$-ésima de f es

$$f^{(n+1)} = \big(f^{(n)}\big)' : A_{n+1} \to \mathbb{C}$$

Suponiendo $A \subset A'$, si f es n veces derivable en todo punto de A, para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que f es indefinidamente derivable en A y tendremos $f^{(n)} \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Casos particulares de las derivadas sucesivas

Funciones de variable real

- $A \subset \mathbb{R}$ y $f(A) \subset \mathbb{R}$. Hemos repetido la definición de las derivadas sucesivas de una función real de variable real.
- $A \subset \mathbb{R}$ pero f puede tomar valores complejos cualesquiera. Para todo $n \in \mathbb{N}$, f es n veces derivable en un punto $t \in A$ si, y sólo si, lo son las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$, en cuyo caso:

$$f^{(n)}(t) = \big(\operatorname{Re} f\big)^{(n)}(t) + i\,\big(\operatorname{Im} f\big)^{(n)}(t)$$

Cuando $A \subset A'$, f es indefinidamente derivable en A si, y sólo si, lo son $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$, verificándose la igualdad anterior para todo $t \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Derivadas sucesivas de la suma de una serie de potencias

Teorema

Sea $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ una serie de potencias no trivial, Ω su dominio de convergencia y f su suma: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \quad \forall z \in \Omega$

Entonces f es indefinidamente derivable en Ω. De hecho, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant k} \frac{n!}{(n-k)!} \alpha_n (z-a)^{n-k} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+k)!}{n!} \alpha_{n+k} (z-a)^n$$

tiene dominio de convergencia Ω y se verifica que:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \alpha_n (z-a)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} \alpha_{n+k} (z-a)^n \quad \forall z \in \Omega$$

En particular se tiene: $f^{(k)}(a) = k!\, \alpha_k \;\; \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por tanto, la serie de partida es la serie de Taylor de f:

$$\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

Un principio de identidad

Principio de identidad para series de potencias

Sean $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 0} \beta_n (z-a)^n$ series de potencias no triviales, con dominios de convergencia Ω_1 y Ω_2 respectivamente.

Supongamos que existe $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z-a)^n \qquad \forall z \in D(a,\rho)$$

Entonces, ambas series son idénticas, es decir,

$$\alpha_n = \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Funciones analíticas

Concepto de función analítica

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C} \ , \ f \in \mathcal{F}(\Omega)$$

f es analítica en Ω cuando, para cada $a \in \Omega$ se verifica lo siguiente:

Existe $\rho_a \in \mathbb{R}^+$, con $D(a, \rho_a) \subset \Omega$, y una serie de potencias $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n^{(a)} (z-a)^n$, con radio de convergencia mayor o igual que ρ_a, tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(a)} (z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, \rho_a)$$

Holomorfía de las funciones analíticas

Sea f es una función analítica en un abierto Ω del plano. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y f' es analítica en Ω.

Por tanto, f es indefinidamente derivable en Ω y todas sus derivadas son funciones analíticas en Ω.

Definición equivalente de función analítica

Otra forma de entender el concepto de función analítica

Si Ω es un abierto no vacío del plano, una función $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ es analítica en Ω si, y sólo si, es indefinidamente derivable en Ω y, para cada $a \in \Omega$ existe $\rho_a \in \mathbb{R}^+$ con $D(a, \rho_a) \subset \Omega$ tal que, la serie de Taylor de f centrada en a tiene radio de convergencia mayor o igual que ρ_a y se verifica que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, \rho_a)$$

Variable Compleja I
Tema 5: Funciones elementales

La función exponencial compleja

Definición de la exponencial

Función exponencial real: $\exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La serie $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ tiene radio de convergencia ∞

Función exponencial compleja: $\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Primeras propiedades de la exponencial

E.1 La exponencial es una función entera que coincide con su derivada.

E.2 Fórmula de adición: $e^{z+w} = e^z e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

E.3 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f'(z) = f(z) \ \ \forall z \in \mathbb{C} \implies \exists \lambda \in \mathbb{C} \ : \ f(z) = \lambda e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

E.4 Es una función analítica en $\mathbb{C}$: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n \ \ \forall a, z \in \mathbb{C}$

Más propiedades de la exponencial compleja

Fórmula de Euler y consecuencias

E.5 Fórmula de Euler: $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

E.6 Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} e^z &= e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) \\ \operatorname{Im} e^z &= e^z \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z) \\ |e^z| &= e^{\operatorname{Re} z} \\ \operatorname{Arg}(e^z) &= \{\operatorname{Im} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

E.7 La imagen de la exponencial es $\mathbb{C}^*$. De hecho, para todo $w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\{z \in \mathbb{C} : e^z = w\} = \{\ln |w| + i\theta : \theta \in \operatorname{Arg} w\}$$

En particular, para todo $R \in \mathbb{R}^+$ se tiene: $\{e^z : z \in \mathbb{C}, |z| > R\} = \mathbb{C}^*$

Periodicidad de la exponencial

Funciones periódicas

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}\ ,\ f \in \mathcal{F}(A)\ ,\ w \in \mathbb{C}$$

w es un periodo de f cuando:

$$\{z+w : z \in A\} = A \qquad \text{y} \qquad f(z+w) = f(z)\ \ \forall z \in A$$

f es una función función periódica cuando tiene un periodo $w \in \mathbb{C}^*$

El conjunto de todos los periodos de f es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$

Cuando dicho subgrupo está engendrado por un sólo elemento $w \in \mathbb{C}^*$, es decir, tiene la forma $\{kw : k \in \mathbb{Z}\}$, se dice que f es simplemente periódica y que w es un periodo fundamental de f.

Periodicidad de la exponencial

E.8 La exponencial es una función simplemente periódica con periodo fundamental $2\pi i$.

Logaritmos de un número complejo

Conjunto de los logaritmos y logaritmo principal

El conjunto de los logaritmos de $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\operatorname{Log} z = \left\{ w \in \mathbb{C} \ : \ e^w = z \right\} = \left\{ \ln|z| + i\theta \ : \ \theta \in \operatorname{Arg} z \right\}$$

Relación entre logaritmos y argumentos:

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Im}\left(\operatorname{Log} z\right) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

El logaritmo principal de $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\log z = \ln|z| + i \arg z$$

La función $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ también es el logaritmo principal

Extiende al logaritmo real: $\log x = \ln x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Propiedad algebraica de los logaritmos

$$2\pi i\mathbb{Z} \text{ es un subgrupo aditivo de } \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Log} z \in \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

La propiedad clave de los logaritmos

$\operatorname{Log} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos

El logaritmo principal no tiene la propiedad anterior:

$$0 = \log 1 = \log\big((-1)(-1)\big) \neq \log(-1) + \log(-1) = 2\pi i$$

No podemos elegir un logaritmo para tener dicha propiedad:

No existe una función $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ verificando:

$$g(z) \in \operatorname{Log} z \ \ \forall z \in \mathbb{C}^* \qquad \text{y} \qquad g(zw) = g(z) + g(w) \ \ \forall z, w \in \mathbb{C}^*$$

Planteamiento del problema del logaritmo holomorfo

Logaritmos holomorfos en un abierto

$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}^*$. Un logaritmo en Ω es una función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ verificando:

$$g(z) \in \operatorname{Log} z \quad \forall z \in \Omega \qquad \text{es decir,} \quad e^{g(z)} = z \quad \forall z \in \Omega$$

¿Existe un logaritmo holomorfo en Ω?

Logaritmos y argumentos de una función

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} \,, \; f : A \to \mathbb{C}^*$$

- Un logaritmo de f es una función $g : A \to \mathbb{C}$ que verifique:

  $$g(z) \in \operatorname{Log} f(z) \quad \forall z \in A, \text{ es decir, } e^{g(z)} = f(z) \quad \forall z \in A$$

- Un argumento de f es una función $\varphi : A \to \mathbb{R}$ que verifique:

  $$\varphi(z) \in \operatorname{Arg} f(z) \quad \forall z \in A$$

g logaritmo de $f \implies \varphi = \operatorname{Im} g$ argumento de f

φ argumento de $f \implies g = \ln|f| + i\varphi$ logaritmo de f

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C} \,, \; f \in \mathcal{H}(\Omega) \,, \; f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$$

Problema: ¿Tiene f un logaritmo holomorfo?

Observaciones sobre el problema del logaritmo holomorfo

Lema 1: Derivabilidad de un logaritmo continuo

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} \ , \ f : A \to \mathbb{C}^* \ , \ g \ \text{ un logaritmo de } f$$

$$\left.\begin{array}{r} f \ \text{ derivable en } \ a \in A \cap A' \\ g \ \text{ continua en } \ a \end{array}\right\} \Longrightarrow \ g \ \text{ derivable en } \ a \ \text{ con } \ g'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

Lema 2: Logaritmos holomorfos y primitivas

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C} \ , \ f \in \mathcal{H}(\Omega) \ , \ f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$$

Si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica que $g'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$,

entonces existe $\lambda \in \mathcal{H}(\Omega)$, tal que $\lambda + g$ es un logaritmo de f y

λ es constante en cada componente conexa de Ω.

Consecuencia de los lemas anteriores

Primitivas

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\ ,\ h \in \mathcal{F}(\Omega)$$

Una primitiva de h es una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g' = h$

Consecuencia de los resultados anteriores

Para $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, son equivalentes:

- f tiene un argumento continuo
- f tiene un logaritmo continuo
- f tiene un logaritmo holomorfo
- f'/f tiene una primitiva

Ejemplos de logaritmos holomorfos

Holomorfía del logaritmo principal

$$\log \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-\right) \qquad \text{con} \qquad \log'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$$

$\log$ no tiene límite en ningún punto de $\mathbb{R}^-$

Logaritmos análogos al principal

Fijado $\theta \in \mathbb{R}$, definimos un logaritmo en $\mathbb{C}^*$:

$$f_\theta(z) = \log\left(e^{i(\pi-\theta)}z\right) - i(\pi-\theta) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Entonces $\quad f \in \mathcal{H}(\Omega_\theta) \quad$ donde $\quad \Omega_\theta = \mathbb{C}^* \setminus \{\rho\, e^{i\theta} : \rho \in \mathbb{R}^+\}$

Otra forma de construir logaritmos holomorfos

Un ejemplo de función analítica

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$ arbitrario, se tiene:

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

Logaritmo holomorfo en un disco que no contenga al origen

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$, definiendo:

$$g(z) = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, a^n} (z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

se tiene que $g \in \mathcal{H}\big(D(a, |a|)\big)$ y $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in D\big(a, |a|\big)$.

Analiticidad del logaritmo principal

Desarrollos en serie del logaritmo principal

Para $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, sea $\rho_a = \begin{cases} |a| & \text{si} \quad \operatorname{Re} a \geqslant 0 \\ |\operatorname{Im} a| & \text{si} \quad \operatorname{Re} a < 0 \end{cases}$

Entonces:

$$\log z = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, a^n} (z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, \rho_a)$$

En particular, el logaritmo principal es una función analítica en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Potencia de base y exponente complejos

Definición de la potencia

Motivación: $x^y = e^{y \ln x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \, , \, \forall y \in \mathbb{R}$

Potencia de base $z \in \mathbb{C}^*$ y exponente $w \in \mathbb{C}$:

$$\left[z^w \right] = \exp\left(w \operatorname{Log} z \right) = \left\{ \exp(w\lambda) : \lambda \in \operatorname{Log} z \right\}$$

Potencia principal

Calculemos $\exp(w \log z)$ en casos conocidos:

- $z \in \mathbb{C}^* \, , \, w = p \in \mathbb{Z} \implies \exp(p \log z) = z^p$
- $z = x \in \mathbb{R}^+ \, , \, w = y \in \mathbb{R} \implies \exp(y \log x) = x^y$
- $z = e \, , \, w \in \mathbb{C} \implies \exp(w \log e) = e^w$

Potencia principal de base $z \in \mathbb{C}^*$ y exponente $w \in \mathbb{C}$:

$$z^w = \exp(w \log z)$$

$$\left[z^w \right] = \left\{ z^w e^{2k\pi i w} \, : \, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Número de elementos de la potencia

Exponente no racional

Para $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ y $z \in \mathbb{C}^*$

la aplicación $k \mapsto z^w e^{2k\pi i w}$, de $\mathbb{Z}$ en $\left[z^w\right]$, es biyectiva

luego el conjunto $\left[z^w\right]$ es infinito numerable

Raíces n-ésimas

Para cada $n \in \mathbb{N}$, todo $z \in \mathbb{C}^*$ tiene n raíces n-ésimas distintas, que son los elementos de la potencia $\left[z^{1/n}\right]$:

$$\left[z^{1/n}\right] = \left\{v \in \mathbb{C} \, : \, v^n = z\right\} = \left\{z^{1/n} e^{2r\pi i/n} \, : \, r \in \mathbb{Z}, \, 0 \leqslant r < n\right\}$$

Raíz n-ésima principal: $z^{1/n} = \exp\big((1/n)\log z\big) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

En $\mathbb{R}^+$ es la raíz n-ésima positiva: $x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Raíces n-ésimas de la unidad:

$$\left[1^{1/n}\right] = \left\{1, u_n, u_n^2, \ldots, u_n^{n-1}\right\} \text{ donde } u_n = e^{2\pi i/n}$$

$$\left[z^{1/n}\right] = \left\{z^{1/n} u_n^r \, : \, r \in \mathbb{Z}, \, 0 \leqslant r < n\right\} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\left[z^{1/n}\right] = \left\{\sqrt[n]{|z|}\, e^{i(\arg z + 2r\pi)/n} \, : \, r \in \mathbb{Z}, \, 0 \leqslant r < n\right\}$$

Número de elementos de la potencia

Exponente racional

Si $w \in \mathbb{Q}$ y $n = \min\{m \in \mathbb{N} : mw \in \mathbb{Z}\}$, entonces $[z^w]$ tiene exactamente n elementos, para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Concretamente, si $p = nw \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$[z^w] = [z^{p/n}] = \{v^p : v \in [z^{1/n}]\}$$

Funciones exponenciales y funciones potencia

Funciones exponenciales

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$, función exponencial de base a:

$$\exp_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp_a(z) = a^z = e^{z \log a} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Es una función entera y verifica: $a^{z+w} = a^z a^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

En general, $\left[a^{z+w}\right]$ no coincide con $\left[a^z\right]\left[a^w\right]$

Acerca de las funciones potencia

Fijado $\alpha \in \mathbb{C}$, para $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\left[(zw)^\alpha\right] = \left[z^\alpha\right]\left[w^\alpha\right]$$

En general, $(zw)^\alpha$ no coincide con $z^\alpha w^\alpha$

Raíces n-ésimas holomorfas

Raíz n-ésima en un conjunto

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} \ , \ n \in \mathbb{N}$$

Una raíz n-ésima en A es una función $\varphi : A \to \mathbb{C}$ tal que:

$$\varphi(z)^n = z \qquad \forall z \in A$$

Problema: si $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$,

¿Existe una raíz n-ésima holomorfa en Ω?

Relación con el problema del logaritmo

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}^*$$

Si existe un logaritmo holomorfo en Ω, entonces,

existe una raíz n-ésima holomorfa en Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$

Algunas respuestas negativas

Al problema de la raíz cuadrada

Si $r \in \mathbb{R}^+$ y $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$,

¡¡ No existe una raíz cuadrada continua en S !!

Si $0 \in \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$, no existe una raíz cuadrada continua en Ω

Al problema del logaritmo o de la primitiva

- No existe una raíz cuadrada holomorfa en $\mathbb{C}^*$
- No existe un logaritmo holomorfo en $\mathbb{C}^*$
- La función $z \mapsto 1/z$, definida en $\mathbb{C}^*$, no tiene primitiva

El seno y el coseno

Definiciones

Las funciones coseno y seno se definen, para todo $z \in \mathbb{C}$ por:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Primeras propiedades

- Son funciones enteras:

$$\operatorname{sen}' z = \cos z \quad \text{y} \quad \cos'(z) = -\operatorname{sen} z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Son sumas de series de potencias convergentes en todo el plano:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- El coseno es par y el seno es impar:

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

El seno y el coseno

Fórmulas de adición y consecuencias

- Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \qquad \text{y}$$
$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$$

- Consecuencias: para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$ se tiene:
  - $\cos\big(z + (\pi/2)\big) = -\operatorname{sen} z \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\big(z + (\pi/2)\big) = \cos z$
  - $\cos\big(z + k\pi\big) = (-1)^k \cos z \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\big(z + k\pi\big) = (-1)^k \operatorname{sen} z$
  - En particular, 2π es un periodo del seno y del coseno
  - $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

Funciones hiperbólicas

Seno y coseno hiperbólicos

Para $z \in \mathbb{C}$ se define:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Algunas propiedades inmediatas

Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:

- $\operatorname{ch}'(z) = \operatorname{sh} z$, y $\operatorname{sh}'(z) = \operatorname{ch} z$
- $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$
- $\cos z = \operatorname{ch}(iz)$ y $\operatorname{sen} z = -i \operatorname{sh}(iz)$

En particular, para todo $y \in \mathbb{R}$ será:

- $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$ y $\operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{sh} y$

Otras propiedades del seno y el coseno

Partes real e imaginaria y módulo

Para $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\cos z = \cos x \ \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} y$$
$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \ \operatorname{ch} y + i \cos x \ \operatorname{sh} y$$

de donde:

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$
$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

Imagen del seno y el coseno

Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\cos z = w \quad \Longleftrightarrow \quad z \in -i \ \operatorname{Log}\left(w \pm (w^2 - 1)^{1/2}\right)$$

Por tanto, la imagen del coseno y del seno es $\mathbb{C}$

En particular: $\cos z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = (2k+1)\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$

La tangente

Definición

En el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \left\{ (2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z} \right\}$ se define la función tangente:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \forall z \in \Omega$$

Algunas propiedades

- $\operatorname{tg} \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\operatorname{tg}'(z) = 1 + \operatorname{tg}^2 z \ \ \forall z \in \Omega$.
- $\{z+\pi : z \in \Omega\} = \Omega$ y $\operatorname{tg}(z+\pi) = \operatorname{tg} z \ \ \forall z \in \Omega$
  luego π es un periodo de la tangente
- $\operatorname{tg} z \neq \pm i \quad \forall z \in \Omega$
- Para $w \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y $z \in \Omega$ se tiene:

$$\operatorname{tg} z = w \quad \Leftrightarrow \quad z \in \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1+iw}{1-iw} \right)$$

- Por tanto, la imagen de la tangente es $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$

El arco-tangente

El conjunto arco-tangente

Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ definimos el conjunto arco-tangente de z por

$$\operatorname{Arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

El arco-tangente principal

La función arco-tangente principal se define en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ por:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$$

Extiende a la función arco-tangente real, lo que justifica la notación

Propiedades del arco-tangente principal

Algunas propiedades

- La función arco-tangente principal es holomorfa en el dominio:

$$U = \mathbb{C} \setminus \{ iy \;:\; y \in \mathbb{R}\,,\; |y| \geqslant 1 \}$$

  verificando que:

$$\operatorname{arc\,tg}'(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad \forall z \in U$$

- En $D(0,1)$ se expresa como suma de una serie de potencias:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Variable Compleja I
Tema 6: Integral curvilínea

Definición de la integral de Cauchy

Definición

En lo que sigue fijamos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

Integral de una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\int_a^b f(t)\,dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt$$

$$C[a,b] = \{\text{funciones continuas de } [a,b] \text{ en } \mathbb{C}\}$$

espacio de Banach (complejo) con la norma:

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|f(t)| : t \in [a,b]\} \qquad \forall f \in C[a,b]$$

Tenemos un funcional $\Phi : C[a,b] \to \mathbb{C}$ definido por:

$$\Phi(f) = \int_a^b f(t)\,dt \qquad \forall f \in C[a,b]$$

Propiedades de la integral con respecto al integrando

Linealidad

El funcional Φ es lineal, es decir, para $f,g \in C[a,b]$ y $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt + \mu \int_a^b g(t)\, dt$$

Continuidad

El funcional Φ es continuo. Más concretamente, para toda $f \in C[a,b]$ se tiene:

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt \leqslant (b-a)\, \|f\|_\infty$$

Propiedad de la integral con respecto al intervalo

Notación para lo que sigue

Intervalo no trivial: $I \subset \mathbb{R}$

$\mathcal{C}(I)$ espacio vectorial complejo de todas las funciones continuas de I en $\mathbb{C}$

Para $f \in \mathcal{C}(I)$ usamos la integral de f con límites arbitrarios $a, b \in I$ con las definiciones usuales. Concretamente, si $a < b$ definimos:

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

Aditividad

La integral es aditiva: para cualesquiera $f \in \mathcal{C}(I)$ y $a, b, c \in I$ se tiene:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

Teorema Fundamental del Cálculo y consecuencias

Teorema Fundamental del Cálculo

I intervalo no trivial, $f \in \mathcal{C}(I)$ y $a \in I$. La función $F : I \to \mathbb{C}$ dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in I$$

es derivable en I con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Consecuencias

- Regla de Barrow. Si $f \in \mathcal{C}(I)$ y $G : I \to \mathbb{C}$ es una primitiva de f, es decir, G es derivable en I con $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, entonces:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \qquad \forall a, b \in I$$

- Fórmula de cambio de variable. Sean I, J intervalos no triviales, $\varphi : J \to I$ una función de clase C^1 y $f \in \mathcal{C}(I)$. Si $\alpha, \beta \in J$, verifican que $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$, entonces:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(s)\big)\,\varphi'(s)\,ds$$

Curvas en el plano

Primeras nociones sobre curvas

- Curva: función continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ donde $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$
- $\varphi^* = \{\varphi(t) \ : \ t \in [a,b]\}$ es la imagen de la curva φ
- $\varphi(a)$ es el origen de φ y $\varphi(b)$ es el extremo de φ
- La curva φ es cerrada cuando $\varphi(a) = \varphi(b)$

Suma de dos curvas

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ curvas tales que $\varphi(b) = \psi(c)$

La curva suma $\gamma = \varphi + \psi : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}$ viene dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } \ a \leqslant t \leqslant b \\ \psi(c+t-b) & \text{si } \ b \leqslant t \leqslant b+d-c \end{cases}$$

$$\gamma^* = \varphi^* \cup \psi^*; \qquad \gamma(a) = \varphi(a); \qquad \gamma(b+d-c) = \psi(d)$$

Suma de dos curvas

Observaciones sobre la suma de dos curvas

- Sean $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ curvas con $\varphi(b) = \psi(c)$, y sea $\gamma = \varphi + \psi : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}$ la curva suma. Entonces:

$$\gamma\big|_{[a,b]} = \varphi \qquad \text{y} \qquad \gamma\big|_{[b,b+d-c]} = \psi \circ \tau$$

  donde $\tau(t) = c + t - b \quad \forall t \in [b, b+d-c]$
  τ es la traslación que lleva el intervalo $[b, b+d-c]$ al intervalo $[c,d]$

- Caso $b = c$. Tenemos $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\psi : [b,d] \to \mathbb{C}$ con $\varphi(b) = \psi(b)$. La curva suma $\gamma = \varphi + \psi : [a,d] \to \mathbb{C}$ verifica:

$$\gamma\big|_{[a,b]} = \varphi \qquad \text{y} \qquad \gamma\big|_{[b,d]} = \psi$$

- Recíprocamente: $\gamma : [a,d] \to \mathbb{C}$ curva arbitraria y $b \in]a,d[$. Entonces:

$$\gamma = \gamma\big|_{[a,b]} + \gamma\big|_{[b,d]}$$

- Volviendo al caso general, tenemos:

$$\varphi + \psi = \gamma = \gamma\big|_{[a,b]} + \gamma\big|_{[b,b+d-c]} = \varphi + (\psi \circ \tau)$$

Asociatividad de la suma de curvas

Asociatividad

La suma de curvas tiene la propiedad asociativa, es decir: si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ son curvas tales que el extremo de φ_1 es el origen de φ_2 y el extremo de φ_2 es el origen de φ_3, entonces:

$$\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + \varphi_3 = \varphi_1 + \left(\varphi_2 + \varphi_3\right)$$

Esto permitirá usar cómodamente sumas de n curvas con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario

Partición de un intervalo

Partición de un intervalo $[a,b]$: conjunto finito $P \subset [a,b]$ tal que $a,b \in P$

Los puntos de una partición se numeran siempre de menor a mayor: si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a,b]$, se entiende siempre que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Para recordarlo escribimos:

$$P = \left\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\}$$

Sumas finitas de curvas

Observaciones sobre sumas de n curvas con $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$

Para $k = 1, 2, \ldots, n$ sea $\varphi_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{C}$ una curva y supongamos que $\varphi_k(b_k) = \varphi_{k+1}(a_{k+1})$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Tenemos la curva suma:

$$\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$

- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ donde $a = a_1$ y $b = a + \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$
- Tomando $t_0 = a$ y $t_k = a + \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, tenemos una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que, para $k = 1, 2, \ldots, n$ se tiene:

  $$\gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]} = \varphi_k \circ \tau_k$$

  donde τ_k es la traslación que lleva $[t_{k-1}, t_k]$ a $[a_k, b_k]$
- $\gamma^* = \bigcup_{k=1}^{n} \varphi_k^*$; $\gamma(a) = \varphi_1(a_1)$; $\gamma(b) = \varphi_n(b_n)$

Sumas finitas de curvas. Curva opuesta

Descomposición de una curva como suma

Toda partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de un intervalo $[a,b]$ permite expresar cualquier curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ como suma de n curvas:

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$$

Curva opuesta

Dada una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, la curva opuesta de φ es la curva $-\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ definida por

$$(-\varphi)(t) = \varphi(a+b-t) \qquad \forall\, t \in [a,b]$$

$$(-\varphi)^* = \varphi^*; \qquad (-\varphi)(a) = \varphi(b); \qquad (-\varphi)(b) = \varphi(a)$$

Ejemplo: las sumas $\varphi + (-\varphi)$ y $(-\varphi) + \varphi$ tienen sentido y son curvas cerradas, ¡¡ pero son distintas !!

Arcos

Definición de arco

Llamaremos arco a toda curva de clase C^1

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ derivable en $[a,b]$ con $\sigma' \in C[a,b]$

Entonces, la curva opuesta $(-\sigma) : [a,b] \to \mathbb{C}$ también es un arco

Ejemplos de arcos

- Para $z, w \in \mathbb{C}$, el segmento de origen z y extremo w es el arco $[z,w] = \sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definido por

  $$\sigma(t) = (1-t)z + tw \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

  $-[z,w] = [w,z]$

  $[z,w]^* = [w,z]^* \subset \mathbb{C}$ es el "segmento" de extremos z y w
- Para $z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, la circunferencia de centro z y radio r es el arco $C(z,r) = \varphi : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ definido por

  $$\varphi(t) = z + re^{it} \qquad \forall\, t \in [-\pi,\pi]$$

  Su imagen $C(z,r)^* = \{w \in \mathbb{C} : |w-z| = r\} \subset \mathbb{C}$ es la "circunferencia" de centro z y radio r

Caminos

Definición de camino

Un camino es una suma de arcos, es decir,

una curva de la forma $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$, donde, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ son arcos

Toda suma de caminos es un camino

Caracterización

Para una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) γ es un camino

(ii) Existe una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que, para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es una función de clase C^1

Ejemplo de camino

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, llamamos poligonal de vértices $z_0, z_1, \ldots, z_n$ al camino dado por $[z_0, z_1, \ldots, z_n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} [z_{k-1}, z_k]$

Definición de la integral curvilínea

Integral sobre un arco

Sea $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un arco y $f : \sigma^* \to \mathbb{C}$ una función continua.

La integral de f sobre el arco σ viene dada por

$$\int_\sigma f(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f\big(\sigma(t)\big)\,\sigma'(t)\,dt$$

Integral sobre un camino

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Consideremos una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que, para $k = 1,2,\ldots,n$, la función $\gamma_k = \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$ sea de clase C^1.

La integral de f sobre el camino γ viene dada por:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma_k(t)\big)\,\gamma_k'(t)\,dt$$

Esta definición es correcta:
la suma del segundo miembro no depende de la partición P que usemos

Observaciones y notación

Expresión más cómoda para la integral sobre un camino

Sea $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$ un camino expresado como suma de arcos.

Para toda función continua $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ se tiene:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma_k} f(z)\, dz$$

Notación para las propiedades de la integral

Dado un camino γ, consideramos el espacio de Banach $C(\gamma^*)$ de todas las funciones continuas del compacto γ^* en $\mathbb{C}$, con norma

$$\| f \|_\infty = \max \{ | f(z) | : z \in \gamma^* \} \qquad \forall f \in C(\gamma^*)$$

Propiedades de la integral curvilínea (I)

Linealidad

Si γ es un camino, $f, g \in C(\gamma^*)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\int_\gamma \big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)\, dz = \alpha \int_\gamma f(z)\, dz + \beta \int_\gamma g(z)\, dz$$

Longitud de un camino

La longitud de un arco $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ se define por: $l(\sigma) = \int_c^d |\sigma\,'(t)|\, dt$

Por ejemplo, para $z, w \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$ se tiene:

$$l\big([z,w]\big) = |w - z| \qquad \text{y} \qquad l\big(C(z,r)\big) = 2\pi r$$

La longitud de un camino $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$ (suma de arcos), será:

$$l(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} l(\sigma_k)$$

Propiedades de la integral curvilínea (II)

Continuidad

Dado un camino γ, se tiene:

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leqslant l(\gamma)\ \|f\|_\infty \qquad \forall f \in C(\gamma^*)$$

luego la integral sobre γ es un funcional lineal continuo en $C(\gamma^*)$

Consecuencia de la linealidad y la continuidad

Sea γ un camino y $f_n \in C(\gamma^*)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Si la serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en γ^*, entonces:

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz$$

Propiedades de la integral curvilínea (III)

Aditividad

- Si γ, φ son caminos y el extremo de γ es el origen φ, para toda función $f \in C\big((\gamma+\varphi)^*\big) = C\big(\gamma^* \cup \varphi^*\big)$, se tiene:

$$\int_{\gamma+\varphi} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\varphi f(z)\,dz$$

- Para todo camino γ y toda función $f \in C\big(\gamma^*\big) = C\big((-\gamma)^*\big)$ se tiene:

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

Regla de Barrow para la integral curvilínea

Regla de Barrow

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\ , \quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Supongamos que f tiene primitiva, es decir,

$$\exists\ F \in \mathcal{H}(\Omega)\ :\ F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Si un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ verifica que $\gamma^* \subset \Omega$, entonces:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

Nota

Si Ω es un abierto de $\mathbb{C}$ y un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ verifica que $\gamma^* \subset \Omega$, diremos que γ es un camino en Ω.

Existencia de primitiva

Teorema: Caracterización de la existencia de primitiva

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\ , \quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- f tiene primitiva: $\exists\, F \in \mathcal{H}(\Omega)\ :\ F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$
- Para todo camino cerrado γ en Ω se tiene que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Lema de construcción de primitivas

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\ , \quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Sea $F : \Omega \to \mathbb{C}$ una función verificando la siguiente condición: para cada $a \in \Omega$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Entonces $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $F'(z) = f(z)\ \ \forall z \in \Omega$.

Variable Compleja I
Tema 7: Teorema local de Cauchy

Teoremas de Cauchy

Esquema común a todos los teoremas de Cauchy

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \gamma \ \text{camino cerrado en} \ \Omega$$

Hipótesis adicional

$$\Downarrow$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Preliminares

Descomposición de un segmento

$$z_0, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \alpha \in]0,1[, \quad z_1 = (1-\alpha)z_0 + \alpha z_2$$

- $[z_0, z_1, z_2]^* = [z_0, z_2]^*$
- $\displaystyle\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz = \int_{[z_0,z_2]} f(z)\,dz \qquad \forall f \in C\big([z_0,z_2]^*\big)$

Triángulos

- Triángulo de vértices $a,b,c \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\Delta(a,b,c) = \bigcup_{z\in[b,c]^*} [a,z]^*$
- $\Delta(a,b,c) = \big\{ \alpha a + \beta b + \rho c : \alpha, \beta, \rho \in [0,1],\ \alpha+\beta+\rho = 1 \big\}$
- Mínimo conjunto convexo que contiene a a,b,c. También es compacto
- Diámetro de un conjunto. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, A acotado:

$$\operatorname{diam} A = \sup\big\{ |w-z| : z,w \in A \big\}$$

- Caso de un triángulo: $\operatorname{diam} \Delta(a,b,c) = \max\big\{ |b-a|, |c-b|, |a-c| \big\}$

Teorema de Cauchy para el triángulo

Teorema de Cauchy-Goursat

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

$$a, b, c \in \mathbb{C}, \quad \Delta(a,b,c) \subset \Omega$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,dz = 0$$

Observación adicional

El teorema anterior sigue siendo cierto si se supone solamente que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ verifica:

$$\exists z_0 \in \Omega : f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big) \quad \text{y} \quad f \ \text{ es continua en } \ z_0$$

Esta versión del teorema parece más general,
¡¡ pero no lo es !! como se verá más adelante

Teorema local de Cauchy

Dominios estrellados

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ es un dominio estrellado cuando:

$$\exists \alpha \in \Omega \ : \ [\alpha, z]^* \subset \Omega \quad \forall z \in \Omega$$

- Convexo $\implies$ Estrellado
- $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ es un dominio estrellado, pero no es convexo

Teorema de Cauchy para dominios estrellados

Ω dominio estrellado, $\quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Entonces f tiene una primitiva, es decir:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \text{ para todo camino cerrado } \gamma \text{ en } \Omega$$

Observación adicional

Nuevamente basta suponer que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ y f es continua en z_0

Fórmula integral de Cauchy

Lema

Para $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ y $z \in D(a,r)$ se tiene:

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$$

Fórmula de Cauchy para una circunferencia

Sean $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Dados $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Variable Compleja I

Tema 8: Equivalencia entre analiticidad y holomorfía

Analiticidad $\iff$ Holomorfía

Desarrollo en serie de Taylor

Si $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es analítica en Ω, y en particular f es indefinidamente derivable en Ω. Además:

- Si $\Omega = \mathbb{C}$, para todo $a \in \Omega$, la serie de Taylor $\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ tiene radio de convergencia infinito y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, la serie de Taylor $\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que R_a y:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, R_a)$$

Comentarios al teorema: caso $\Omega = \mathbb{C}$

Lo que ya sabíamos

$$\Lambda = \left\{ \alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C} \; : \; \lim_{n\to\infty} \left|\alpha(n)\right|^{1/n} = 0 \right\}$$

Para $\alpha \in \Lambda$ se tiene:

- La serie $\sum_{n\geqslant 0} \alpha(n)\, z^n$ tiene radio de convergencia infinito

  (Fórmula de Cauchy-Hadamard)

- Si $f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n)\, z^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f_\alpha \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

  (Holomorfía de la suma de una serie de potencias)

- $\beta \in \Lambda, \quad f_\beta = f_\alpha \implies \beta = \alpha$

  (Principio de identidad para series de potencias)

Comentarios al teorema: caso $\Omega = \mathbb{C}$

Lo que ahora sabemos

$$\Lambda = \left\{ \alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C} \ : \ \lim_{n\to\infty} |\alpha(n)|^{1/n} = 0 \right\}$$

- Toda función entera es analítica en $\mathbb{C}$: f_α analítica en $\mathbb{C}$ $\forall \alpha \in \Lambda$
- Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\alpha(n) = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces:

$$\alpha \in \Lambda \qquad \text{y} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f_\alpha(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Hemos "parametrizado" el conjunto de todas las funciones enteras:

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}) = \{ f_\alpha : \alpha \in \Lambda \}$$

- $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \implies f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad \forall a, z \in \mathbb{C}$

El desarrollo en serie de Taylor de una función entera, centrado en cualquier punto del plano, es válido en todo el plano

Comentarios al teorema: caso $\Omega = D(a,R)$ con $a \in \mathbb{C}$ y $R \in \mathbb{R}^+$

Lo que ya sabíamos

$$\Lambda_R = \left\{ \alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C} \ : \ \limsup_{n\to\infty} \left| \alpha(n) \right|^{1/n} \leqslant 1/R \right\}$$

Para $\alpha \in \Lambda_R$ se tiene:

- La serie $\sum_{n \geqslant 0} \alpha(n) z^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que R

  (Fórmula de Cauchy-Hadamard)

- $f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n)(z-a)^n \quad \forall z \in D(a,R) \quad \Longrightarrow \quad f_\alpha \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$

  (Holomorfía de la suma de una serie de potencias)

- $\beta \in \Lambda, \quad f_\beta = f_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \beta = \alpha$

  (Principio de identidad para series de potencias)

Comentarios al teorema: caso $\Omega = D(a,R)$ con $a \in \mathbb{C}$ y $R \in \mathbb{R}^+$

Lo que ahora sabemos

$$\Lambda_R = \left\{ \alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C} \ : \ \limsup_{n\to\infty} \left| \alpha(n) \right|^{1/n} \leqslant 1/R \right\}$$

- Toda $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$ es analítica en $D\big(D(a,R)\big)$: f_α analítica en $D(a,R)$ $\forall \alpha \in \Lambda_R$
- Si $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$ y $\alpha(n) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces:

$$\alpha \in \Lambda_R \qquad \text{y} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = f_\alpha(z) \quad \forall z \in D(a,R)$$

  Hemos "parametrizado" el conjunto de todas las funciones holomorfas en cualquier disco abierto: $\mathcal{H}\big(D(a,R)\big) = \{f_\alpha : \alpha \in \Lambda_R\}$
- Si $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$, $b \in D(a,R)$ y $R_b = R - |b-a|$ entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n \qquad \forall z \in D(b, R_b)$$

Comentarios al teorema: caso general $\Omega \neq \mathbb{C}$ y Ω no es un disco abierto

Lo que por ahora sabemos

No tenemos una descripción "global" de cada función holomorfa en Ω como suma de una serie de potencias (no es posible tenerla).

Por tanto no tenemos una "parametrización" de $\mathcal{H}(\Omega)$, es decir, un método que nos permita construir todas las funciones holomorfas en Ω.

El teorema nos da información "local":

- $f \in \mathcal{H}(\Omega) \implies f$ analítica en Ω
- Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, entonces la serie Taylor de f centrada en a tiene radio de convergencia mayor o igual que R_a y se verifica que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, R_a)$$

El desarrollo en serie de Taylor de f en cada punto $a \in \Omega$ es válido en el disco de centro a y cuyo radio es el máximo posible

Fórmula de Cauchy para las derivadas: motivación

Repaso de dos fórmulas conocidas

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad a \in \Omega, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \overline{D}(a,r) \subset \Omega$$

- Fórmula de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \forall z \in D(a,r)$$

- Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ahora sabemos que $f^{(k)} \in \mathcal{H}(\Omega)$, luego

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f^{(k)}(w)}{w-z}\, dw \quad \forall z \in D(a,r)$$

  Esto no es nuevo, no es la fórmula que buscamos.

- En la demostración del desarrollo de Taylor vimos que:

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

  Para $k = 0$ obtenemos la fórmula de Cauchy, ¡¡ pero sólo para $z = a$!!

Fórmula de Cauchy para las derivadas

Teorema

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad a \in \Omega, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \overline{D}(a,r) \subset \Omega$$

Entonces:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw \qquad \forall z \in D(a,r), \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Teorema de extensión de Riemann: motivación

Funciones derivables en un abierto salvo en un punto

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad z_0 \in \Omega, \quad f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$$

Consideremos las siguientes afirmaciones:

(1) $\exists\, g \in \mathcal{H}(\Omega) : g(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}$

(2) $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = w \in \mathbb{C}$

(3) $\exists\, \delta, M \in \mathbb{R}^+ : \quad D(z_0, \delta) \subset \Omega \quad$ y $\quad |f(z)| \leqslant M \quad \forall z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$

(4) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

Es evidente que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4)

Para funciones reales de variable real, ninguna implicación es reversible

Teorema de extensión de Riemann

Teorema

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad z_0 \in \Omega, \quad f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $\exists\, g \in \mathcal{H}(\Omega) : g(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}$

(2) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w \in \mathbb{C}$

(3) $\exists\, \delta, M \in \mathbb{R}^+ : \quad D(z_0, \delta) \subset \Omega \quad$ y $\quad |f(z)| \leqslant M \quad \forall z \in D(z_0, \delta)$

(4) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

Basta obviamente probar que (4) $\Rightarrow$ (1)

Corolario

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad z_0 \in \Omega, \quad f : \Omega \to \mathbb{C}$$

Supongamos que $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ y que f es continua en z_0

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Variable Compleja I
Tema 9: Ceros de las funciones holomorfas

Desigualdades de Cauchy y CONSECUENCIAS

Desigualdades de Cauchy

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad a \in \Omega, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \overline{D}(a,r) \subset \Omega$$

$$M(f,a,r) = \max\left\{ |f(z)| : z \in C(a,r)^* \right\}$$

Entonces se tiene: $\dfrac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leqslant \dfrac{M(f,a,r)}{r^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Teorema de Liouville

Toda función entera y acotada es constante

De hecho, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ no es constante, entonces: $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$

Teorema Fundamental del Álgebra

El cuerpo de los números complejos es algebraicamente cerrado:

$$P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}), \quad P \text{ no constante} \quad \Longrightarrow \quad \exists z_0 \in \mathbb{C} \ : \ P(z_0) = 0$$

Motivación: ceros de polinomios

Ceros de un polinomio y orden de un cero

$$P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}), \quad P \quad \text{no constante:} \quad Z(P) = \{a \in \mathbb{C} : P(a) = 0\}$$

- $Z(P)$ es un conjunto no vacío y finito
- Para cada $a \in Z(P)$ existe un único $m \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$P(z) = (z-a)^m Q(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{donde} \quad Q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad Q(a) \neq 0$$

  Decimos que P tiene en a un cero de orden m
- El orden se caracteriza por: $m = \min\{n \in \mathbb{N} : P^{(n)}(a) \neq 0\}$, es decir,

  $$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad P^{(m)}(a) \neq 0$$

Ceros de funciones holomorfas

Ceros de una función holomorfa y orden de un cero

$$\Omega \text{ dominio}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \text{no idénticamente nula}$$

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

- Orden de un cero: Para cada $a \in Z(f)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(a) \neq 0$.

  El orden del cero de f en a es: $m = \min\{n \in \mathbb{N} : \ f^{(n)}(a) \neq 0\}$

- Caracterización: $a \in \Omega$ es un cero de orden $m \in \mathbb{N}$ si, y sólo si,

$$\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) \ : \ g(a) \neq 0 \quad \text{y} \quad f(z) = (z-a)^m g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

- Principio de los ceros aislados:

$$\forall a \in Z(f) \ \ \exists \delta > 0 \ : \ D(a,\delta) \subset \Omega \quad \text{y} \quad f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$$

  Equivalentemente, $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en Ω:

$$Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$$

Consecuencia

Algunas cuestiones topológicas

- En cualquier espacio métrico X, la distancia a un conjunto no vacío $E \subset X$ es una función no expansiva:

$$d(x,E) = \inf\{d(x,y) : y \in E\} \quad \forall x \in X. \text{ Se tiene:}$$

$$|d(x_1,E) - d(x_2,E)| \leqslant d(x_1,x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in X$$

- Todo abierto Ω de $\mathbb{C}$ es unión numerable de compactos:

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{D}(0,n); \quad \Omega \neq \mathbb{C} \implies \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant n, \quad d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geqslant 1/n\}$$

- Todo subconjunto infinito de un espacio métrico compacto tiene al menos un punto de acumulación.

- $\emptyset \neq A \subset \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad A' \cap \Omega = \emptyset \implies A$ numerable

Corolario

Si Ω es un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es idénticamente nula, entonces $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ es numerable

Principio de identidad

Teorema

$$\Omega \text{ dominio}, \quad f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$$

$$A \subset \Omega, \qquad f(z) = g(z) \quad \forall z \in A$$

$$A' \cap \Omega \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

En particular, A no numerable $\quad \Longrightarrow \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega$

Ejemplo

$$f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \quad f(1/n) = g(1/n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

La exponencial compleja es la única extensión entera de la real

Variable Compleja I
Tema 10: Teorema de Morera y sus consecuencias

Teorema de Morera

Motivación

Recordemos el teorema de Cauchy para el triángulo:

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$$

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = 0 \quad \text{siempre que} \quad \Delta(a,b,c) \subset \Omega$$

¿ Es cierto el recíproco ?

Teorema de Morera

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Supongamos que

$$a,b,c \in \mathbb{C}, \quad \Delta(a,b,c) \subset \Omega \quad \Longrightarrow \quad \int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = 0$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Teorema de convergencia de Weierstrass

Motivación

¿Tipo de convergencia adecuado para sucesiones de funciones holomorfas?

- La convergencia puntual es demasiado débil: se puede demostrar que existe una sucesión $\{P_n\}$ de polinomios tal que:

$$\{P_n(x)\} \to 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \{P_n(z)\} \to 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

- La convergencia uniforme en un abierto es demasiado restrictiva: una serie de potencias no suele converger uniformemente en su dominio de convergencia

Teorema de convergencia de Weierstrass

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \qquad f_n \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f : \Omega \to \mathbb{C}$$

Si $\{f_n\} \to f$ uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω

entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Además, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{f_n^{(k)}\} \to f^{(k)}$ uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω

Comentarios sobre el teorema de convergencia de Weierstrass

No hay nada parecido en el caso real

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- f_n es derivable en $\mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\{f_n\} \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$
- f no es derivable en el origen

Versión para series

Sea $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supongamos que $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω, y sea f su suma: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad \forall z \in \Omega$. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω con: $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad \forall z \in \Omega, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Integrales dependientes de un parámetro: Preliminares

Integral curvilínea dependiente de un parámetro

$$\int_\gamma \Phi(w,z)\,dw$$

- γ es un camino
- Φ es una función, con valores complejos, de dos variables:
  - La variable de integración $w \in \gamma^* \subset \mathbb{C}$
  - El parámetro $z \in A$, donde $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$
- Por tanto $\Phi : \gamma^* \times A \to \mathbb{C}$ debe verificar:

  para cada $z \in A$ la función $w \mapsto \Phi(w,z)$ es continua en γ^*
- Entonces podemos definir una función $f : A \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \qquad \forall z \in A$$

y decimos que f es una integral (curvilínea) dependiente de un parámetro

Integrales dependientes de un parámetro: Resultados previos

Lema 1: Continuidad

γ camino, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$

$\Phi : \gamma^* \times A \to \mathbb{C}$ continua (como función de dos variables)

$$f : A \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \qquad \forall z \in A$$

Entonces f es continua en A

Lema 2: Un teorema del tipo de Fubini para integrales curvilíneas

γ y φ dos caminos, $\Phi : \gamma^* \times \varphi^* \to \mathbb{C}$ continua. Entonces:

$$\int_\varphi \left(\int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \right) dz = \int_\gamma \left(\int_\varphi \Phi(w,z)\,dz \right) dw$$

Holomorfía de la integral dependiente de un parámetro

Teorema

$$\gamma \text{ camino}, \qquad \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \qquad \Phi : \gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}$$

Para cada $w \in \gamma^*$ sea $\Phi_w : \Omega \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$\Phi_w(z) = \Phi(w,z) \qquad \forall z \in \Omega$$

Supongamos que:

- Φ es continua
- $\Phi_w \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \forall w \in \gamma^*$

Entonces, definiendo $f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\, dw$ para todo $z \in \Omega$, se tiene:

- $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
- Para $z \in \Omega$ y $k \in \mathbb{N}$, la función $w \mapsto \Phi_w^{(k)}(z)$, de γ^* en $\mathbb{C}$, es continua y

$$f^{(k)}(z) = \int_\gamma \Phi_w^{(k)}(z)\, dw = \int_\gamma \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}(z,w)\, dw$$

Variable Compleja I

Tema 11: Comportamiento local de una función holomorfa

Propiedad de la media

Motivación

Fórmula de Cauchy: $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$, $\; f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\; \overline{D}(a,r) \subset \Omega$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Conociendo f en $C(a,r)^*$ la conocemos en $D(a,r)$

Usaremos el caso más sencillo: $z = a$

Propiedad de la media

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \overline{D}(a,r) \subset \Omega$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it})\, dt$$

Por tanto,

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{it})|\, dt$$

Principio del módulo máximo

Teorema

$$\Omega \text{ dominio} \qquad \text{y} \qquad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Supongamos que $|f|$ tiene un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, es decir:

$$\exists \delta > 0 \ : \ D(a,\delta) \subset \Omega \qquad \text{y} \qquad |f(z)| \leqslant |f(a)| \ \ \forall z \in D(a,\delta)$$

Entonces f es constante

Corolario 1

Ω dominio acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω, es decir $f \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces:

$$\max \left\{ |f(z)| \ : \ z \in \overline{\Omega} \right\} = \max \left\{ |f(z)| \ : \ z \in \operatorname{Fr}(\Omega) \right\}$$

En particular:

$$f(z) = 0 \ \ \forall z \in \operatorname{Fr}(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) = 0 \ \ \forall z \in \overline{\Omega}$$

Principio del módulo mínimo

Corolario 2

Ω dominio acotado, $f_n \in C\big(\overline{\Omega}\big) \cap \mathcal{H}(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\operatorname{Fr}(\Omega)$

Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\overline{\Omega}$

a una función $f \in C\big(\overline{\Omega}\big) \cap \mathcal{H}(\Omega)$

Principio del módulo mínimo

Ω dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Supongamos que $|f|$ tiene un mínimo relativo en un punto $a \in \Omega$:

$$\exists \delta > 0 \;:\; D(a,\delta) \subset \Omega \quad \text{y} \quad |f(z)| \geqslant |f(a)| \quad \forall z \in D(a,\delta)$$

Entonces, o bien $f(a) = 0$, o bien f es constante

Corolario

Ω dominio acotado, $f \in C\big(\overline{\Omega}\big) \cap \mathcal{H}(\Omega)$, no constante

Si $|f|$ es constante en $\operatorname{Fr}(\Omega)$, entonces existe $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$.

Teorema de la aplicación abierta

Teorema

Ω dominio, $\quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante

Entonces f es una aplicación abierta, es decir:

$$U = U^\circ \subset \Omega \quad \Longrightarrow \quad f(U) = f(U)^\circ$$

Teorema de la función inversa local

Lema

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

La función $\Phi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(w,z) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si} \quad w \neq z \\ f'(w) = f'(z) & \text{si} \quad w = z \end{cases}$$

es continua

Teorema de la función inversa local

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad a \in \Omega \text{ con } f'(a) \neq 0$$

Entonces existe un abierto U, con $a \in U \subset \Omega$ tal que:

- f es inyectiva en U y $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U$
- El conjunto $V = f(U)$ es abierto
- Si $\varphi = f\big|_U$, entonces $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ con $\left(\varphi^{-1}\right)'\big(f(z)\big) = \dfrac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in U$

Logaritmos holomorfos

Ejemplo

$$m \in \mathbb{N}, \quad m \geqslant 2, \qquad f(z) = z^m \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad f'(0) = 0$$

Fijado $\delta \in \mathbb{R}^+$, para cada $w \in D(0, \delta^m) \setminus \{0\}$

la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente m soluciones en $D(0, \delta)$

Logaritmos holomorfos

Ω dominio estrellado, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$. Entonces:

- f admite un logaritmo holomorfo en Ω, es decir,

$$\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) \ : \ f(z) = e^{g(z)} \quad \forall z \in \Omega$$

- Para cada $m \in \mathbb{N}$, f admite una raíz m-ésima holomorfa en Ω, es decir,

$$\exists h \in \mathcal{H}(\Omega) \ : \ f(z) = \big(h(z)\big)^m \quad \forall z \in \Omega$$

Comportamiento local en un cero de la derivada

Teorema

Ω dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante, $a \in \Omega$ tal que $f'(a) = 0$ y $b = f(a)$

Sea $m \in \mathbb{N}$ el orden del cero de la función $z \mapsto f(z) - b$ en el punto a

Entonces existen un abierto U con $a \in U \subset \Omega$ y un $\varepsilon > 0$ tales que:

- $f(U) = D(b, \varepsilon)$
- $z \in U\,, \quad f(z) = b \quad \Longrightarrow \quad z = a$
- Para cada $w \in \mathbb{C}$ con $0 < |w - b| < \varepsilon$ la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente m soluciones distintas en U, es decir, el conjunto $\{z \in U \,:\, f(z) = w\}$ tiene exactamente m elementos.

Caracterización de la inyectividad local

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\,, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)\,, \quad a \in \Omega$$

$$f \text{ inyectiva en un entorno de } a \quad \Longleftrightarrow \quad f'(a) \neq 0$$

Teorema de la función inversa global

Teorema

U dominio, $\quad f \in \mathcal{H}(U)$ inyectiva. Entonces:

- $V = f(U)$ es un dominio
- $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U$
- $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ con: $\quad \left(f^{-1}\right)'\left(f(z)\right) = \dfrac{1}{f'(z)} \qquad \forall z \in U$

Reglas de derivación de la función inversa

f una función inyectiva definida en $A \neq \emptyset \quad a \in A\,, \quad b = f(a)$

Funciones reales de variable real

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in A'$. Entonces $b \in f(A)'$ y:

$$f^{-1} \text{ derivable en } b \iff f^{-1} \text{ continua en } b \ \text{ y } \ f'(a) \neq 0$$

en cuyo caso $\left(f^{-1}\right)'(b) = 1 \,/\, f'(a)$

Funciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$

$A \subset \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^N$ diferenciable en $a \in A^\circ$, con $b \in f(A)^\circ$. Entonces:

$$f^{-1} \text{ diferenciable en } b \iff f^{-1} \text{ continua en } b \ \text{ y } \ |Jf(a)| \neq 0$$

en cuyo caso $Df^{-1}(b) = Df(a)^{-1}$

Funciones complejas de variable compleja

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ derivable en $a \in A'$. Entonces $b \in f(A)'$ y:

$$f^{-1} \text{ derivable en } b \iff f^{-1} \text{ continua en } b \ \text{ y } \ f'(a) \neq 0$$

en cuyo caso $\left(f^{-1}\right)'(b) = 1 \,/\, f'(a)$

Teoremas locales de la función inversa

Funciones reales de variable real

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivable en Ω, con f' continua en $a \in \Omega$.

$$f'(a) \neq 0 \implies \exists U \text{ con } a \in U = U^\circ \subset \Omega \text{ tal que } f \text{ es inyectiva en } U$$

Funciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ diferenciable en Ω, con Df continua en $a \in \Omega$.

$$|Jf(a)| \neq 0 \implies \exists U \text{ con } a \in U = U^\circ \subset \Omega \text{ tal que } f \text{ es inyectiva en } U$$

Funciones complejas de variable compleja

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$.

$$f'(a) \neq 0 \iff \exists U \text{ con } a \in U = U^\circ \subset \Omega \text{ tal que } f \text{ es inyectiva en } U$$

Teoremas globales de la función inversa

Funciones reales de variable real

$\Omega \subset \mathbb{R}$, Ω intervalo abierto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivable en Ω.

Suponemos que $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$. Entonces:

f es inyectiva, $f(\Omega)$ es un intervalo abierto y f^{-1} es derivable en $f(\Omega)$

Funciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Ω dominio, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Suponemos que $|Jf(x)| \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$ y que f es inyectiva. Entonces:

$f(\Omega)$ es un dominio y f^{-1} es diferenciable en $f(\Omega)$

Funciones complejas de variable compleja

$\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Suponemos que f es inyectiva. Entonces:

Entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, $f(\Omega)$ es un dominio y $f^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega)$

Variable Compleja I
Tema 12: El teorema general de Cauchy

Índice de un punto con respecto a un camino cerrado

Motivación

$$a \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad z \in \mathbb{C} \setminus C(a,r)^*$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |z-a| < r \\ 0 & \text{si} \quad |z-a| > r \end{cases}$$

Definición de índice

γ camino cerrado, $\quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$

Índice del punto z con respecto al camino γ:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

Ejemplos aclaratorios

Ejemplos sencillos

- $\gamma = C(a,r) + C(a,r)$:

$$\operatorname{Ind}_{\gamma}(z) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad |z-a| < r \\ 0 & \text{si} \quad |z-a| > r \end{cases}$$

- $\gamma = -C(a,r)$:

$$\operatorname{Ind}_{\gamma}(z) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad |z-a| < r \\ 0 & \text{si} \quad |z-a| > r \end{cases}$$

- $\gamma = C(a,r) - C(a,r)$:

$$\operatorname{Ind}_{\gamma}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

Logaritmo derivable de un arco

Lema

$$a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ \ \sigma : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ un arco}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma^*$$

$$\tau : [a,b] \to \mathbb{C}^*, \quad \tau(t) = \sigma(t) - z \quad \forall t \in [a,b]$$

Entonces τ admite un logaritmo derivable, es decir,

$$\exists \varphi : [a,b] \to \mathbb{C}, \ \text{ derivable, tal que } \quad e^{\varphi(t)} = \tau(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

Como consecuencia, se tiene:

$$\int_\sigma \frac{dw}{w - z} = \varphi(b) - \varphi(a) \in \operatorname{Log}\left(\frac{\sigma(b) - z}{\sigma(a) - z}\right)$$

Propiedades del índice

Propiedades del índice

γ camino cerrado

- $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$
- La función $\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{Z}$ es continua.
  Equivalentemente, es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$
- Si U es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, entonces:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in U$$

Cadenas

Definiciones

- Una cadena es una suma formal de caminos:

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$$

  donde $n \in \mathbb{N}$ y γ_k es un camino, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

- Imagen de una cadena: $\Gamma^* = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k^*$

- Suma de cadenas: $\Sigma = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k$ otra cadena.

$$\Gamma + \Sigma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m$$

- Cadena opuesta: $-\Gamma = (-\gamma_1) + (-\gamma_2) + \ldots (-\gamma_n) = \sum_{k=1}^{n} (-\gamma_k)$

- $(\Gamma + \Sigma)^* = \Gamma^* \cup \Sigma^*$ y $(-\Gamma)^* = \Gamma^*$.

Integral sobre una cadena

Definición

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \quad \text{una cadena}$$

$C(\Gamma^*)$ funciones continuas del compacto Γ^* en $\mathbb{C}$

Espacio de Banach complejo con:

$$\| f \|_\infty = \max \left\{ | f(z) | : z \in \Gamma^* \right\} \quad \forall f \in C(\Gamma^*)$$

Integral sobre una cadena: $\displaystyle \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz \quad \forall f \in C(\Gamma^*)$

Longitud de una cadena: $\displaystyle l(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} l(\gamma_k).$

Propiedades de la integral

Propiedades de la integral sobre una cadena Γ

- Linealidad: $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad f, g \in C(\Gamma^*)$

$$\int_\Gamma \big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)\, dz = \alpha \int_\Gamma f(z)\, dz + \beta \int_\Gamma g(z)\, dz$$

- Continuidad: $f \in C(\Gamma^*)$

$$\left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| \leqslant l(\Gamma)\, \|f\|_\infty$$

- Aditividad: Σ otra cadena, $f \in C\big(\Gamma^* \cup \Sigma^*\big)$

$$\int_{\Gamma+\Sigma} f(z)\, dz = \int_\Gamma f(z)\, dz + \int_\Sigma f(z)\, dz$$

Cadena opuesta: $\displaystyle \int_{-\Gamma} f(z)\, dz = -\int_\Gamma f(z)\, dz \quad \forall f \in C(\Gamma^*)$

Ciclos e índice

Ciclos

Un ciclo es una suma formal de caminos cerrados: $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$, donde $n \in \mathbb{N}$ y γ_k es un camino cerrado, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

- Todo lo dicho sobre cadenas se aplica en particular a los ciclos
- La suma de dos ciclos es un ciclo
- La cadena opuesta de un ciclo también es un ciclo

Índice con respecto a un ciclo

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \ \text{ ciclo, } \ z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$$

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{dw}{w - z} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z)$$

Propiedades del índice con respecto a un ciclo

Propiedades

Γ un ciclo

- $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$
- La función $\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{Z}$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$
- Si U es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, entonces:

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0 \quad \forall z \in U$$

Motivación

Esquema común de los teoremas de Cauchy

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad \Gamma \text{ ciclo en } \Omega, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Hipótesis adicional

$$\Downarrow$$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

- ¿Cuál es la hipótesis más general posible sobre f?
- ¿Cuál es la hipótesis más general posible sobre Γ?
- ¿Cuál es la hipótesis más general posible sobre Ω?

Respuesta a la primera pregunta

Problema 1

Dado un abierto Ω del plano, caracterizar las funciones $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \text{para todo ciclo } \Gamma \text{ en } \Omega$$

Caracterización de la existencia de primitiva

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Son equivalentes:

- $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ para todo ciclo Γ en Ω
- f tiene una primitiva en Ω: $\exists F \in \mathcal{H}(\Omega) : F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$

Respuesta a la segunda pregunta

Problema 2

Dado un abierto Ω del plano, caracterizar los ciclos Γ en Ω tales que

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Condición obviamente necesaria

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad \Gamma \text{ ciclo en } \Omega$$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \int_\Gamma \frac{dz}{z-w} = 0 \ \ \forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

Un ciclo Γ en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω cuando

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

Esta condición, obviamente necesaria, ¡¡también es suficiente!!

Respuesta a la tercera pregunta

Problema 3

Caracterizar los abiertos Ω del plano, tales que

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \forall \Gamma \text{ ciclo en } \Omega$$

Respuestas

Para un abierto Ω del plano, son equivalentes:

- $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para todo ciclo Γ en Ω
- Toda función holomorfa en Ω tiene primitiva
- Todo ciclo en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω

Se dice que un abierto Ω del plano es homológicamente conexo cuando todo ciclo en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω.

El teorema general de Cauchy

Forma general del Teorema de Cauchy y de la fórmula de Cauchy

Sea Ω un abierto del plano, Γ un ciclo en Ω nul-homólogo con respecto a Ω y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces:

- $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$
- $\displaystyle\int_\Gamma f(w)\, dw = 0$

Abiertos homológicamente conexos

Caracterizaciones de los abiertos homológicamente conexos del plano

Para un abierto Ω del plano, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Ω es homológicamente conexo, es decir, para todo ciclo Γ en Ω se tiene:

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

- Para todo ciclo Γ en Ω y toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

- Toda función holomorfa en Ω tiene primitiva, es decir:

$$\forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \;\; \exists F \in \mathcal{H}(\Omega) \; : \; F'(z) = f(z) \;\; \forall z \in \Omega$$

- Toda función holomorfa en Ω, que no se anule, tiene un logaritmo holomorfo, es decir:

$$f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad f(\Omega) \subset \mathbb{C}^* \quad \Longrightarrow \quad \exists g \in \mathcal{H}(\Omega) \; : \; e^{g(z)} = f(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Abiertos sin "agujeros"

Si Ω es un abierto del plano tal que ninguna componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ está acotada, entonces Ω es homológicamente conexo.

Variable Compleja I
Tema 13: Singularidades

Concepto de serie de Laurent

Definición y notación

Serie de Laurent centrada en $a \in \mathbb{C}$: serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ donde, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f_n : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ viene dada, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, por:

$$f_0(z) = c_0 \qquad \text{y} \qquad f_n(z) = c_n (z-a)^n + c_{-n}(z-a)^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si la denotamos por $\{S_n\}$ entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ tenemos:

$$S_{n+1}(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, (z-a)^k$$

La serie de Laurent recién definida se denota por: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \, (z-a)^n$

y cuando converge en un punto $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, su suma es

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, (z-a)^n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k \, (z-a)^k$$

Anillos

Convenios

A partir de ahora: $\rho < \infty \quad \forall \rho \in \mathbb{R}_0^+ \qquad \frac{1}{\infty} = 0 \qquad$ y $\qquad \frac{1}{0} = \infty$

Anillos

$$a \in \mathbb{C}, \qquad 0 \leqslant r < R \leqslant \infty$$

Anillo de centro a con radios r y R:

$$A(a;r,R) = \left\{ z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R \right\}$$

- $r = 0, \quad R \in \mathbb{R}^+$: $\qquad A(a;0,R) = D(a,R) \setminus \{a\}$
- $r \in \mathbb{R}^+, \quad R = \infty$: $\qquad A(a;r,\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,r)$
- $A(a;0,\infty) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$

Anillo de convergencia

Radios de convergencia

Una serie de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,(z-a)^n$ tiene dos radios de convergencia:

- $R^+ \;=\;$ radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$
- $R^- \;=\;$ radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}w^n$

$$R^+ = \frac{1}{\limsup\left\{\sqrt[n]{|\,c_n\,|}\right\}} \quad \text{y} \quad R^- = \frac{1}{\limsup\left\{\sqrt[n]{|\,c_{-n}\,|}\right\}}$$

Anillo de convergencia

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,(z-a)^n$ es una serie de Laurent no trivial cuando: $\dfrac{1}{R^-} < R^+$, lo que, en particular, implica $R^- > 0$ y $R^+ > 0$

$$\text{Anillo de convergencia:}\quad A\left(a;\,\frac{1}{R^-}\,,R^+\right)$$

Construcción de funciones holomorfas en anillos arbitrarios

Convergencia de las series de Laurent

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,(z-a)^n$ serie de Laurent no trivial, Ω su anillo de convergencia

- La serie converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω
- Por tanto, su suma es una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega$$

- De hecho, las series $\sum_{n\geqslant 0} c_n\,(z-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 1} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ convergen absoluta y uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω, y se tiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \qquad \forall z \in \Omega$$

Desarrollo en serie de Laurent

Teorema

$$\Omega = A(a; r, R) \;\text{ anillo arbitrario,} \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

- Existe una única serie de Laurent no trivial $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$, cuyo anillo de convergencia contiene a Ω, que verifica:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega \qquad (*)$$

- De hecho, para cualquier $\rho \in \mathbb{R}^+$ con $r < \rho < R$, se tiene:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Desarrollo de Laurent

Se dice que $(*)$ es el desarrollo de Laurent de f en el anillo Ω
El teorema anterior generaliza al que nos dió el desarrollo de Taylor

Parte regular y parte singular

Notación para todo lo que sigue

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad a \in \Omega, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$$

Pretendemos saber cómo se comporta f en a, una "posible singularidad"

$R \in \mathbb{R}^+$ con $D(a,R) \subset \Omega$. Como $f \in \mathcal{H}\big(A(a;0,R)\big)$, tenemos:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad \forall z \in D(a,R) \setminus \{a\}$$

$$R^+ \geqslant R \qquad \text{y} \qquad \text{¡¡}R^- = \infty\text{!!}$$

Descomposición relativa a una posible singularidad

f tiene una única descomposición: $f(z) = g(z) + h(z) \;\; \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$, donde:

- $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. La llamamos parte regular de f en a
- $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$ viene dada por:

$$h(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \qquad \text{con} \quad \varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \quad \varphi(0) = 0$$

Decimos que h es la parte singular de f en a

Puntos regulares

Definición de punto regular y de singularidad

Cuando $h \equiv 0$, equivalentemente $\varphi \equiv 0$, decimos que a es un punto regular de f, o bien, que f tiene un punto regular en a

En otro caso, decimos que a es una singularidad de f, o bien, que f tiene una singularidad en a.

Caracterización de los puntos regulares

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) a es un punto regular de f

(2) $c_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$

(3) Existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$

(4) f tiene límite en a: $\lim_{z \to a} f(z) = w \in \mathbb{C}$

(5) Existen $M, \delta \in \mathbb{R}^+$ tales que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$

(6) $\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$

Ejemplos de singularidades

Primeros ejemplos

$$k \in \mathbb{N} \text{ fijo.} \qquad f(z) = \frac{1}{z^k} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

- f tiene una singularidad en el origen
- Desarrollo de Laurent en $\mathbb{C}^*$: $c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-k\}, \quad c_{-k} = 1$
- $g(z) = 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \quad$ y $\quad h(z) = f(z) \;\; \forall z \in \mathbb{C}^*$
- $\varphi(w) = w^k \;\; \forall w \in \mathbb{C}$, polinomio de grado k

Ejemplo de otro tipo

$$f(z) = e^{1/z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

- f tiene una singularidad, pero no diverge, en el origen
- Desarrollo de Laurent en $\mathbb{C}^*$: $\quad e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$
- $c_0 = 1$, mientras que $c_n = 0$ y $c_{-n} = \frac{1}{n!}$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- $g(z) = 1 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \quad$ y $\quad h(z) = e^{1/z} - 1 \;\; \forall z \in \mathbb{C}^*$
- $\varphi(w) = e^w - 1 \;\; \forall w \in \mathbb{C}$, función entera no polinómica

Clasificación de las singularidades

Polos y singularidades esenciales

- Cuando φ es un polinomio, decimos que a es un polo de f, o que f tiene un polo en a

  El orden de dicho polo es, por definición, el grado del polinomio φ

  Por ejemplo: para cada $k \in \mathbb{N}$, la función

  $$f(z) = \frac{1}{z^k} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

  tiene un polo de orden k en el origen

- Cuando φ es una función entera no polinómica, decimos que a es una singularidad esencial de f, o que f tiene una singularidad esencial en el punto a

  Por ejemplo: la función

  $$f(z) = e^{1/z} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

  tiene una singularidad esencial en el origen

Polos

Caracterización de los polos, teniendo en cuenta el orden

Dado $k \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) a es un polo de orden k de f

(2) $c_{-k} \neq 0$ y $c_{-n} = 0$ para $n > k$

(3) $\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) = \alpha \in \mathbb{C}^*$

(4) Existe $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$, con $\psi(a) \neq 0$, tal que:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^k} \qquad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$$

Caracterización de los polos sin tener en cuenta el orden

$$f \text{ tiene un polo en } a \iff f(z) \to \infty \ (z \to a)$$

Caracterización de las singularidades esenciales

Teorema de Casorati

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) La función f tiene una singularidad esencial en el punto a

(2) Para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$ con $D(a,\delta) \subset \Omega$, el conjunto $f\big(D(a,\delta) \setminus \{a\}\big)$ es denso en $\mathbb{C}$

(3) Para cada $w \in \mathbb{C}$, existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de $\Omega \setminus \{a\}$ tal que $\{z_n\} \to a$ y $\{f(z_n)\} \to w$. También existe una sucesión $\{u_n\}$ de puntos de $\Omega \setminus \{a\}$ tal que $\{u_n\} \to a$ y $\{f(u_n)\} \to \infty$

Corolario

Si ψ es una función entera no polinómica, entonces:

Para todo $r \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $\big\{\psi(z) : z \in \mathbb{C},\ |z| > r\big\}$ es denso en $\mathbb{C}$

Variable Compleja I
Tema 14: Residuos

1. Teorema de los residuos

2. Cálculo de residuos

Residuo de una función en un punto

Definición de residuo

$$a \in \mathbb{C}, \quad R \in \mathbb{R}^+, \quad f \in \mathcal{H}\big(D(a,R) \setminus \{a\}\big)$$

Desarrollo de Laurent: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad \forall z \in D(a,R) \setminus \{a\}$

Residuo de f en el punto a:

$$\operatorname{Res}\big(f(z), a\big) \stackrel{\text{def}}{=} c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} f(w)\, dw \qquad \forall \rho \in]0, R[$$

Observaciones y ejemplos

(1) a punto regular de $f \implies \operatorname{Res}\big(f(z), a\big) = 0$

(2) $k \in \mathbb{N} \implies \operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z^k}, a\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$

(3) El recíproco de (1) es falso

(4) $\operatorname{Res}\big(e^{1/z}, a\big) = 1$

Teorema de los residuos

Teorema

- $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$
- $A \subset \Omega, \quad A' \cap \Omega = \emptyset$
- $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus A\big)$
- Γ ciclo en $\Omega \setminus A \quad (\Gamma^* \subset \Omega \setminus A)$, nul-homólogo con respecto a Ω

Entonces, el conjunto $\{a \in A : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$ es finito y

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \operatorname{Res}\big(f(z), a\big)$$

Cálculo de residuos

Residuo en un polo

$$a \in \mathbb{C}, \quad R \in \mathbb{R}^+, \quad f \in \mathcal{H}\big(D(a,R) \setminus \{a\}\big)$$

- Si f tiene un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ en el punto a, entonces:

$$\operatorname{Res}\big(f(z), a\big) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{d z^{k-1}} \Big((z-a)^k f(z)\Big)$$

- $\lim\limits_{z \to a} (z-a) f(z) = \alpha \in \mathbb{C} \implies \operatorname{Res}\big(f(z), a\big) = \alpha$

Última observación

Regla de L'Hôpital para funciones holomorfas

$$a \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad f, g \in \mathcal{H}(D(a,r)), \quad g \neq 0 \quad f(a) = g(a) = 0$$

$$(\text{Nótese que: } \quad \exists \delta > 0 : 0 < |z-a| < \delta \implies g(z) \neq 0 \quad \text{y} \quad g'(z) \neq 0)$$

Se verifica una de las dos afirmaciones siguientes:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \alpha \in \mathbb{C} \qquad \text{o bien,}$$

$$\frac{f(z)}{g(z)} \to \infty \quad (z \to a) \qquad \text{y} \qquad \frac{f'(z)}{g'(z)} \to \infty \quad (z \to a)$$

Se suele decir que ambos límites existen y coinciden, pudiendo valer ∞