Trabajo Práctico Nº 2: Sucesiones. Ecuaciones de Recurrencia

1) Escribir en cada caso, los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones, para $n \in N_0$.

a) $a_n = 3 + (-1)^n$ b) $b_n = \dfrac{n}{1-2.n}$ c) $c_n = \dfrac{n^2}{2^n+1}$ d) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$

2) Dados los primeros términos de las siguientes sucesiones, hallar el término general:

a) $-2,\ 2, -2,\ 2, -2,\ 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $3,\ 2,\ \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19 \ldots\ldots$

d) $2,\ \frac{2}{\sqrt{2}},\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ 1,\ \frac{2}{\sqrt{5}} \ldots\ldots\ldots$

3) En cada uno de los siguientes casos, calcular los 7 primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia. Luego, clasificar y resolver las ecuaciones de recurrencia asociadas.

a) $\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_n = 3a_{n-1} \quad si \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_0 = 13 \\ b_n = 3a_{n-1} \quad si \quad n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_0 = 5, \quad a_1 = 8 \\ a_n = 2.a_{n-1} + 8.a_{n-2} \quad si \quad n \geq 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} b_0 = 6 \quad , b_1 = 8 \\ b_n = 6.b_{n-1} - 9.b_{n-2} \quad si \quad n \geq 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} c_0 = 1, \quad c_1 = 2 \\ c_n = -c_{n-1} + 6.c_{n-2} \quad si \quad n \geq 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} d_0 = 1, \quad d_1 = 1 \\ d_n = 4(d_{n-1} - d_{n-2}) \quad si \quad n \geq 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} a_0 = 2, \quad a_1 = 8, \quad a_2 = 10 \\ a_n = 3.a_{n-1} + a_{n-2} - 3.a_{n-3} \quad si \quad n \geq 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} a_0 = a_1 = a_2 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 5.a_{n-2} + 3.a_{n-3} \quad si \quad n \geq 3 \end{cases}$

4) La sucesión de Fibonacci se define como una relación de recurrencia lineal homogénea de grado 2, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Calcular los 7 primeros términos de la sucesión y luego resolver la ecuación de recurrencia asociada a la misma.

5) Un chico dispone n monedas para comprar golosinas. Le gustan el pochoclo (que cuesta 1 moneda cada bolsa) y dos tipos de alfajores, que cuestan 2 monedas cada uno. ¿De cuántas formas puede gastar las n monedas?

6) Hallar una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

7) Sea a_n el número de palabras de longitud n formadas con los dígitos $\{0,1\}$, que no tienen dos ceros consecutivos. Encontrar una relación de recurrencia para calcular a_n y resolver.

8) Hallar una ecuación de recurrencia que genere la siguiente sucesión: 1; 2; 5; 12; 29; 70; 169…. y resuelve dicha ecuación, obteniendo en función de *n*, el termino general a_n de la sucesión.

9) El número de bacterias de un cultivo de laboratorio se cuadriplica cada hora. Plantear una relación de recurrencia para el número de bacterias que hay en el cultivo después de n horas. Si el número inicial de bacterias es 100, ¿cuántas habrá al cabo de 10 horas?

10) Una población de conejos aumenta anualmente en un 50 %. Si en el momento inicial hay 100 conejos:

a) ¿Cuántos habrá dentro de 8 años?
b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su número sea de 30000?

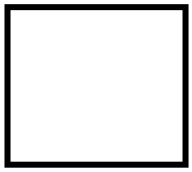
11) Dadas las siguientes ecuaciones de recurrencia:

$$i) \quad \begin{cases} 2 \quad si \quad n=1 \\ a_n = a_{n-1}+3 \quad si \quad n>1 \end{cases} \qquad ii) \quad \begin{cases} 3 \quad si \quad n=1 \\ b_n = b_{n-1}+2 \quad si \quad n>1 \end{cases}$$

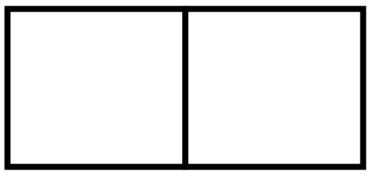
$$iii) \quad \begin{cases} 1 \quad si \quad n=1 \\ c_n = c_{n-1}+2n-1 \quad si \quad n>1 \end{cases}$$

a) Hallar los 10 primeros términos de la sucesión.
b) Clasificarlas.
c) Encontrar una expresión no recursiva de la sucesión.
d) Demostrar por inducción sobre n, la fórmula hallada.

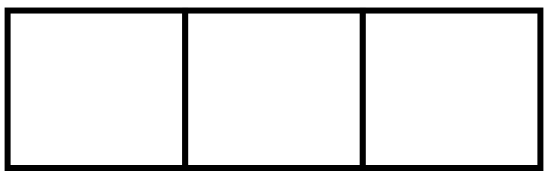
12) Dada la siguiente situación, completar la tabla.
Paso 1: Se forma con fósforos un cuadrado C1.



Paso 2: Agregar los fósforos necesarios para obtener la siguiente figura C2.



Paso 3: Agregar los fósforos necesarios para obtener la siguiente figura C3.



Reiterar el paso anterior para obtener las figuras C4,C5.
¿Cuántos fósforos se usó en total en cada caso?
Si n es un número mayor que 5, suponiendo que se han construido n – 1 cuadrados C1,C2,......C(n-1), para lo cual fue necesario utilizar C_{n-1} fósforos: ¿Cuántos fósforos se utilizarán en total al construir un cuadrado más, Cn?

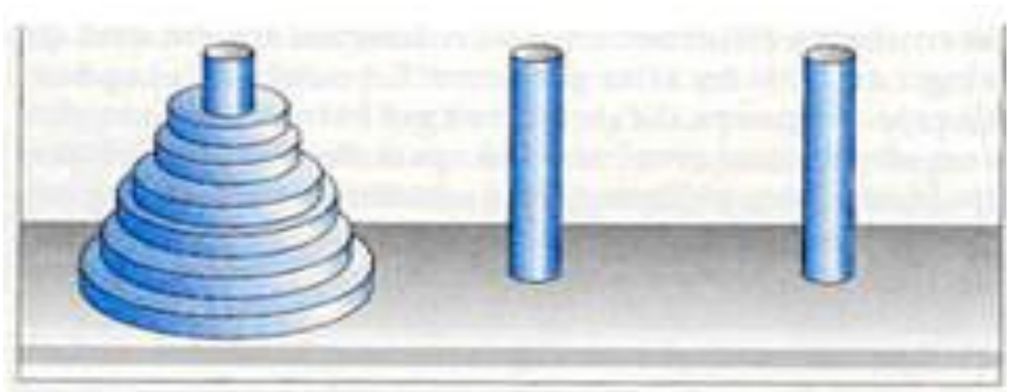
Paso N° K	N° total de fósforos para construir hasta el cuadrado….	
	C_{k-1}	C_k
1	-----	
2		
3		
4		
5		
⋮	⋮	⋮
n	C_{n-1}	$C_n=$

a) Hallar los 10 primeros términos de la sucesión $(c_n)_{n\in N}$.

b) Encontrar una expresión no recursiva de la sucesión $(c_n)_{n\in N}$.

c) Demostrar por inducción sobre n, que la fórmula hallada, es realmente la expresión de $(c_n)_{n\in N}$.

La Torre de Hanoi. En el templo de Benares, en la ciudad de Hanoi, hace muchos, muchos años, se pusieron tres agujas de diamante, en posición vertical. En una de esas agujas se colocaron 64 discos de oro de diferentes diámetros, el mayor en la base y el resto en orden natural con el más pequeño hasta arriba, formando una torre como muestra la figura:



Desde entonces los monjes del templo trabajan día y noche moviendo los discos uno por uno, colocándolos en alguno de los postes, y obedeciendo la regla divina de no colocar un disco sobre uno más pequeño. Según la leyenda, cuando los 64 discos hayan sido movidos para formar una torre en una aguja distinta a la original, el templo y los monjes se convertirán en polvo, y junto con ellos el mundo desaparecerá.

13) La torre de Hanoi es un juego matemático que consiste en tres varillas verticales y un número indeterminado de discos que determinan la complejidad de la solución.

No hay dos discos iguales, están colocados de mayor a menor en una varilla ascendentemente, y no se puede colocar ningún disco mayor sobre uno menor a él en ningún momento.

El juego consiste en pasar todos los discos a otra varilla colocados de mayor a menor ascendentemente.

Para resolver el juego, podemos definir una sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que, a_n es el menor número de movimientos necesarios para resolver una Torre de Hanoi de n discos.

Es evidente que si n = 1, sólo se necesita un movimiento para ganar el juego. Con lo cual la condición inicial de la sucesión por recurrencia es $a_1 = 1$.

Paso N°	A	B	C
0			
1		1	

Si n = 2 , $a_2 = 3$

Paso N°	A	B	C
0			
1		1	
2			2
3			1

Si n = 3 , a_3 = ……

Si n = 4 , a_4 = …….

Si n = 5 , a_5 = ……..

Para el n-ésimo disco se tiene: a_n = ……

Así pues, la sucesión $(a_n)_{n \in N}$, queda definida por: $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$

a) Hallar los 10 primeros términos de la sucesión $(a_n)_{n \in N}$.
b) Encontrar una expresión no recursiva de la sucesión $(a_n)_{n \in N}$.
c) Demostrar por inducción sobre n, que la fórmula hallada, es realmente la expresión de $(a_n)_{n \in N}$.