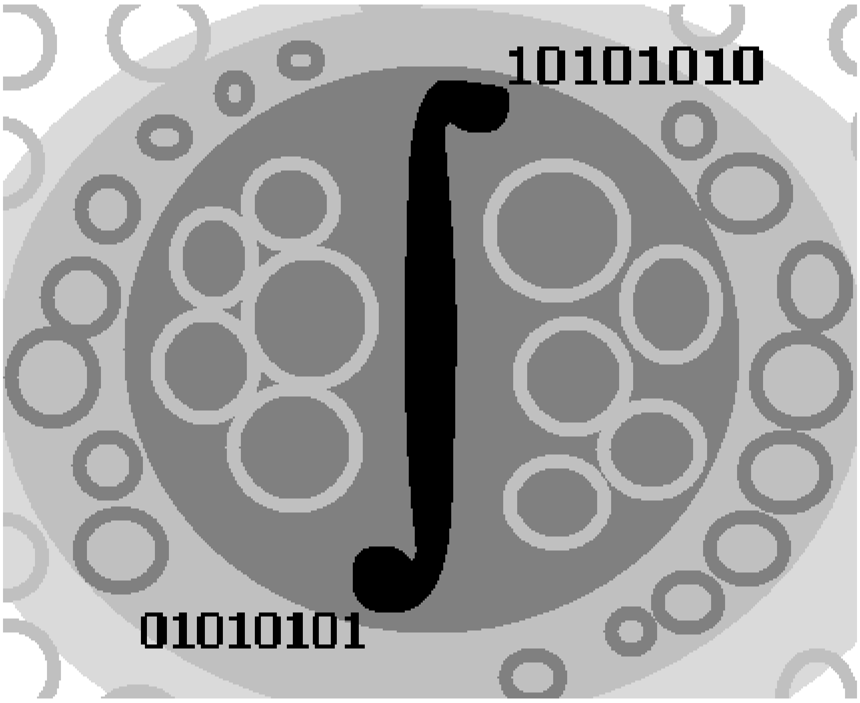



# Práctica de Cálculo Diferencial e Integral

Ing. Julio Acosta, Prof Noemí Bachmann de Rubio – Ing. Ramón Sampayo – Lic. Ricardo Fabián Espinoza – Prof. Itatí Sosa

## TRABAJO PRACTICO Nº 1. FUNCIONES. LIMITES. CONTINUIDAD

Ejercicio Nº 1

a) Hallar y representar en la recta el conjunto de números reales que satisfacen la condición dada en cada caso.
b) Si existen, determinar cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, máximo, mínimo.

a) $x + 2 \leq 2$ b) $| - x + 2| > 1$ c) $D = \{x \in R \,/\, 3x^2 - 3x - 6 \leq 0\}$

d) $x^2 \leq 5$

Ejercicio Nº 2. Determine el subconjunto de R para el cual las siguientes relaciones son funciones (dominio).

a) $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ c) $f(x) = \ln(-2x + 1)$

Ejercicio Nº 3. Dadas las siguientes funciones:

$g_1: D \to R \,/\, g_1(x) = x^2 - 2x - 3$ $g_2: D \to R \,/\, g_2(x) = x^3$ $g_3: D \to R \,/\, g_3(x) = \dfrac{2x - 3}{3x + 2}$

$g_4: D \to R \,/\, g_4(x) = \sqrt{4 - x^2}$ $g_5: D \to R \,/\, g_5(x) = \log2\,(1 + x)$

$g_6: D \to R \,/\, g_6(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $g_7: D \to R \,/\, g_7(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

a) Represéntelas gráficamente
b) Determine dominio, imagen e intersección con los ejes coordenados de las funciones dadas.

Ejercicio Nº 4. Sean las funciones:

i) $g : R \rightarrow R \;/\; g(x) = x^2 + 1$ y $f : R - \{0\} \rightarrow R \;/\; f(x) = 1 / x$

ii) $f : Z \rightarrow Q \;/\; f(x) = ( x^2 / 2 ) + 1$ y $g : Q \rightarrow Z \;/\; g(x) = [\, x \,]$

a) Defina, en cada caso: $g \circ f$ y $f \circ g$

b) Determine: $(g \circ f)(-2)$ y $(f \circ g)(-1/2)$

Ejercicio Nº 5. Demuestre que el límite existe y es el indicado en cada caso, usando la definición correspondiente.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(3x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3 + x - 1} = 8$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{(x^3 + 10)^{1/3}} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{3x^3 + x - 1} = 4$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = 1/2$

Ejercicio Nº 6. Verifique los siguientes límites:

e) $\lim\limits_{x \to 1} \left( \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right) = -1$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{1 - \sqrt{x-1}} = -1$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = 1/2$

h) $\lim\limits_{x \to 0} (1-2x)^{3/x} = e^{-6}$

Ejercicio Nº 7.

a) Dada la fórmula de la función $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

i) Representar f gráficamente (Dominio R)

ii) Calcular:

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

b) Dada la fórmula de la función $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

i) Representar f gráficamente (Dominio R)
ii) Calcular:

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

Ejercicio Nº 8. Para las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación, determinar los puntos de discontinuidad y clasifíquelos:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 3x^2 - x + 3}$

a) $f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x \leq 0 \\ |2 - x| & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x - 3} & \text{si } x \geq 2 \wedge x \neq 3 \end{cases}$

Ejercicio Nº 9. Determinar los valores de c y d para los que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = -3 \\ \dfrac{9 - x^3}{4 - (x^3 + 7)^{1/2}} & \text{si } x < 3 \\ d & \text{si } x = 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = -3 \\ cx + d & \text{si } -1 < x < 2 \\ -5x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

# TRABAJO PRACTICO Nº 2. LA DERIVADA Y SUS APLICACIONES

Ejercicio Nº 1. Sabiendo que la función $f(x) = x^2 + 2x$ es contínua

a) Construya su gráfica.

b) Calcule el incremento $\Delta y$ de la función f(x) cuando $x_0 = 1$ y $x_0 + \Delta x = 0,5$.

c) Calcule el cociente incremental correspondiente para $x_0 = 1$ y $x_0 + \Delta x = 1,5$.

d) Calcule $\lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$. ¿qué se obtiene?.

e) Calcule la derivada de f(x) en $x_0 = 1$.

Ejercicio Nº 2. Determine las derivadas de cada una de las siguientes funciones, en los puntos indicados, utilizando la definición:

a) $f(x) = x^2 - 2x$  $x_0 = \frac{1}{2}$ ;  $x_1 = -1$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$  $x_0 = 1$ ;  $x_1 = -2$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ .  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 2$

Ejercicio Nº 3. Utilizando las fórmulas de derivación, calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7x^3 - 2x^2 + 5x + 1$

b) $f(x) = (x^2 - x)^4$

c) $g(x) = 7x^{1/3} - 2x^{-2} + ex + 1$

d) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

e) $h(x) = 7e^x - 2^x$

f) $y = \sqrt{4x^3 - 3x^2 + 4x + 1}$

g) $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x + 1}$

h) $y = 3^{2x+1}$

i) $g(x) = \text{sen}x$

j) $f(x) = \cos^4 x$

k) $g(x) = (\ln x + 1)\sqrt[3]{x^2 - x}$ l) $y = \operatorname{cotg} x$

m) $f(x) = x \operatorname{sen} x + \sqrt[3]{x^2}$. n) $y = 3 \operatorname{sen} (5x^2 + 1)$

o) $y = \operatorname{sen}^2 x^3$ p) $y = \operatorname{sen} (\cos x)$

q) $y = \operatorname{tg}^2 x$ r) $y = x^2 + e^{\operatorname{sen} x}$

s) $y = 2^{\operatorname{tg} x}$ t) $y = \ln^2 (x^2 + 2)$

u) $y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}$ v) $y = \operatorname{arc\,cos} (1 + x^2)$

Ejercicio Nº 4. Estudie la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x < 0 \\ -x + 1, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 4x + 2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio Nº 5. Calcule las derivadas de las siguientes funciones, aplicando la derivación logarítmica.

a) $y = x^x$ b) $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

c) $y = x^{\sqrt{x}}$. d) $y = (\ln x)^x$

Ejercicio Nº 6.

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el punto de abscisa x = 0

b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de ecuación $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ que son paralelas a la recta de ecuación $y = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

c) Determine la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2$, en el punto de abscisa x = 1.

Ejercicio Nº 7. Dadas las siguientes funciones, determine:

i) $y = x^4 - 2x^2$ ii) $y = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15$
iii) $f(x) = \text{sen } 2x$ en $[0 ; 2\pi]$ iv) $y = x^3 . (x + 2)^2$

a) Máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión.
b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c) Intervalos de concavidad positiva y negativa.
d) Construya un gráfico y represente todo lo trabajado en los puntos anteriores.

Ejercicio N° 8.
a) Determine a y b para que la función $f(x) = x^2 + ax + b$ tenga un mínimo en el punto (3; -1)

b) Determine a, b y c para que la función $/(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo local en el punto (-1;3) y un punto de inflexión en (0;1)

Ejercicio N° 9. Halle dos números cuya suma sea 20 sabiendo que el producto es máximo

Ejercicio N° 10. Verifique los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \ln x}{x \ln x} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left( \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right) = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} (\sec x . \text{cosec } x - \text{cosec } x) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x . \text{tg } x) = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$

h) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x^{\cos x} = 1$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^4} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to \tilde{0}} [(x - \text{sen } x) \ln x] = 0$

Ejercicio Nº 11. Calcule el polinomio de Taylor o Mc – Laurin según corresponda en los siguientes casos.

a) $f(x) = \cos x$, $n = 7$, $c = \frac{\pi}{2}$.

b) $f(x) = e^{-x}$, $n = 4$, $c = 0$

Ejercicio Nº 12. Halle la diferencial de

a) $y = x^3 - 2x$ b) $y = \ln(x + 1)$

Ejercicio Nº 13. Aproxime mediante diferenciales :

a) $\sqrt[3]{124}$ b) sen 60º 1' c) ln 0,9 d) $\sqrt{101}$

# TRABAJO PRACTICO Nº 3. INTEGRALES

Ejercicio Nº1. Calcule las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int x^4 \, dx$ b) $\int \frac{1}{x^3}$ c) $\int 5x^6 \, dx$

d) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \, dx$ e) $\int \frac{1}{x} \, dx$ f) $\int \frac{3}{4} \operatorname{sen} x \, dx$

g) $\int 2 \sec^2 x \, dx$

Ejercicio Nº2. Halle las siguientes integrales por el método de descomposición:

a) $\int \left( \frac{1}{x} + 2e^x - \frac{3}{x^2} \right) dx$ b) $\int \left( \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right)$ c) $\int \left( \frac{3\sqrt{x} + 7}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

Ejercicio Nº3. Para cada caso, determine la ecuación de la curva que pasa por el punto de coordenadas que se indica, si la pendiente de la recta tangente a la misma dicho punto está dada por:

a) $f'(x) = x^3 + 4$ P(0; 1)

b) $f'(x) = 2 \operatorname{sen} x + e^x$ P(0; 0)

Ejercicio Nº4. Resuelva las siguientes integrales por sustitución:

a) $\int e^{-3x} \, dx$ b) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$ c) $\int \cos (5x) \, dx$

d) $\int \frac{dx}{5x - 3}$ e) $\int \left( \frac{2e^x}{6e^x + 7} \right) dx$ f) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 2}}$

g) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$ h) $\int \operatorname{tg} (4x) \, dx$ i) $\int \frac{\ln^4 x}{x} \, dx$

Ejercicio Nº5. Resuelva las siguientes integrales por el método de integración por partes:

a) $\int e^{-3x}\,dx$ b) $\int x\cos x\,dx$ c) $\int x^2 \ln x\,dx$ d) $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

Ejercicio Nº6. Integre las siguientes funciones racionales.

a) $\int \frac{4x}{x^2 - x - 6}\,dx$ b) $\int \frac{3}{(x-1)^2\,(x+2)}\,dx$ c) $\int \frac{x-1}{x^2-4}\,dx$

Ejercicio Nº7. Integre las siguientes funciones circulares.

a) $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$ b) $\int \cos^3 x\,dx$ c) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

## TRABAJO PRACTICO Nº 4. LA INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

Ejercicio Nº1. Resuelva la siguiente cuestión: Suponga que se ha roto una tubería y que t minutos después se pierde agua a razón de la función de cambio $f(t) = 100 + 0{,}5t$ litros por minuto.

a) ¿Cuál es la cantidad de agua perdida al cabo de 3 minutos?
b) ¿Cuánta agua se perderá si no se repara la tubería durante, por ejemplo, la segunda hora?

Ejercicio Nº2.

a) Resuelva la integral $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$

b) Halle el área del recinto limitado por las funciones $f: R \to R \,/\, f(x) = \cos x$ y $f: R \to R \,/\, g(x) = 0$, en el intervalo $[0, 2\pi]$

Ejercicio Nº3.

Las rectas $y = 2x$, $y = -3/2x + 7$ ,e, $y = ¼ x$, determinan un triángulo

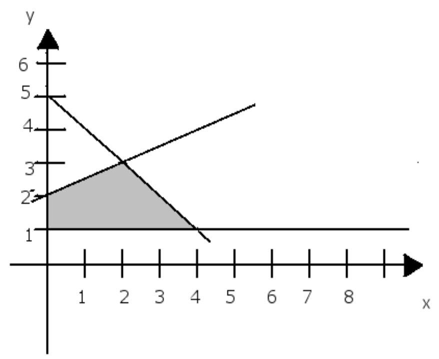
a) Represéntelas gráficamente y halle los vértices del triángulo.
b) Halle el área del triángulo.

Ejercicio Nº4. Calcule al área limitada por cada una de las siguientes curvas y el eje de las abscisas.

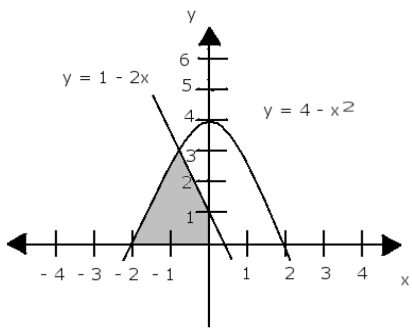
a) $y = x^2 - 4$ b) $y = -x^2 + 1$

Ejercicio Nº5. Calcule el área sombreada en cada caso:

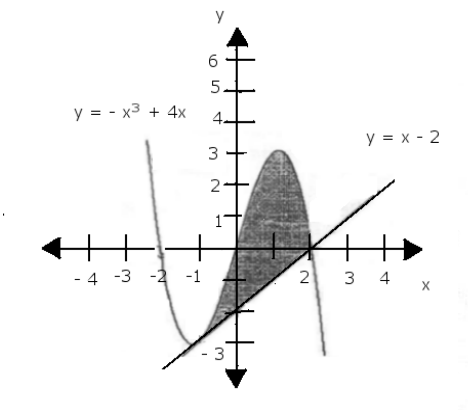
a)



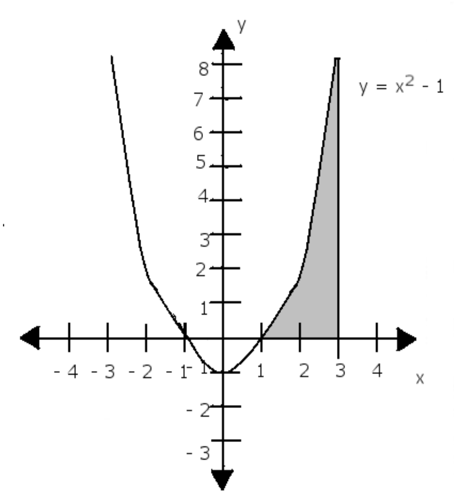

b)



c)




d)




Ejercicio Nº6. Calcule el área encerrada por las curvas f y g en cada caso siguiente:

a) f : $y = x^2 - 2x$ g: $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$

b) f : $y = \frac{1}{x}$ g: $y = 3 - \frac{5}{4}x$

c) f : $y = x^2 - x$ g es una recta que pasa por los puntos (1, 2) y (-3, -6)

d) f: $y^2 = 4x$ g: $4x - 3y = 4$

Ejercicio Nº7.

a) Demuestre que la longitud de una circunferencia de radio r es $L = 2\pi r$
b) Halle la longitud del arco de la curva $f(x) = x^{3/2}$, entre $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$

Ejercicio Nº8.

a) Determine el volumen del cuerpo engendrado por la curva que se indica en cada caso siguiente, cuando gira alrededor del eje coordenado considerando:
   i. $f(x) = x^2 + 3$, entre $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ con respecto al eje x.
   ii. $f(x) = 4x^2$, entre $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ con respecto al eje y.
b) Encuentre el volúmen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = 8x$, alrededor del eje x.

Ejercicio Nº9. De ser posible, halle las siguientes integrales impropias.

a) $\int^{\infty} e^{-x}\, dx$ b) $\int^{-1} xe^{-x^2}\, dx$

## TRABAJO PRACTICO Nº 5. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Ejercicio Nº1. Halle y represente gráficamente el dominio de definición de las siguientes funciones z = f(x, y);

a) $z = \dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{1}{y}$ Dom f = $\{(x, y) \in R^2 / x \neq 1 \wedge y \neq 0\}$

b) $z = 1 + \sqrt{-(x-y)}$ Dom f = $\{(x, y) \in R^2 / x = y\}$

c) $z = \ln(x + y)$ Dom f = $\{(x, y) \in R^2 / y > -x\}$

d) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 + a^2) \cdot (2a^2 + x^2 + y^2)}$ $a > 0$
Dom f = $\{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \geq a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$

e) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ Dom f = R - $\{(0, 0)\}$

f) $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$ Dom f = $\{(x, y) \in R^2 / y > x \wedge x \geq 0\}$

Ejercicio Nº2. Represente gráficamente en $R^3$:

a) $x - y = 0$ b) $y + z = 1$ c) $2x + 3y + z = 1$

Ejercicio Nº3. Represente gráficamente (e identifique) en el espacio tridimensional las siguientes funciones:

a) $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ Rta. Elipsoide b) $y^2 + z^2 = 4x$ Rta. Paraboloide

c) $x^2 - 3y^2 - 2z^2 = 1$ Rta. Hiperboloide de una hoja

d) $2x^2 + 4z^2 - y^2 = 0$ Rta. Cono de sección elíptica

e) $x^2 + 3y^2 - 2z^2 = 0$ Rta. Hiperboloide de una hoja f) $z = x^2 + y^2$ Rta. Paraboloide hiperbólico

Ejercicio Nº4.

a) Halle dos curvas de nivel de cada una de las siguientes funciones:
$z = x^2 - y^2$ Rta. Circulos concentricos ii) $z = \sqrt{x \cdot y}$ Rta. Paraboloide hiperboloide.

b) Halle dos superficies de nivel de cada una de las siguientes funciones

i) $U = x^2 + y^2 - z^2$ Rta. Si $U > 0$ son hiperboloides de 1 hoja alrededor de OZ. Si $U < 0$ son hiperboloides de 2 hojas alrededor de OZ.

ii) $U = x + y + z$ Rta. Planos paralelos.

Ejercicio Nº5. Utilizando la definición de limite funcional demuestre que :

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} (7x - 2y) = 11$ Rta. $0 < \delta < \varepsilon / 9$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (2x - y) = -1$ Rta. $0 < \delta < \varepsilon / 3$

Ejercicio Nº6. Calcule utilizando propiedades:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x + 2x y^2 - 1)$ Rta. 8

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \dfrac{2xy}{3x + y}$ Rta. 4/3

Ejercicio Nº7. Dadas las siguientes funciones, calcule los límites iterados, si existen; y el límite doble en los puntos que se indican. Justifique.

a) $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$ en P (0, 0) Rta. 3; 2;.

b) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^3 - 6$ en P (1, 1) Rta. -1, -1, -1

c) $f(x, y) = \dfrac{2x + 6y + 14}{7x - 5y - 29}$ en P (2, -3) Rta. 2/7; -6/5;.

d) $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ en P (0, 0) Rta. 3; 2;.

e) $f(x, y) = \dfrac{xy - 1}{x^3 - y^2}$ en P (1, 1) Rta. 1/3; -1/2;.

Ejercicio Nº8. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Si es discontinua, clasifique el tipo de discontinuidad.

a) $f(x, y) = \begin{cases} 3xy & \text{si } (x, y) \neq (1, 2) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 2) \end{cases}$ en P(1, 2) Rta. Discontinuidad evitable en P(1,2)

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en P(0, 0) Rta. Discontinuidad esencial en P(0,0)

c) $f(x, y) = \begin{cases} f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 2 & \end{cases}$ en P(0, 0)

Rta. Discontinuidad esencial en P(0,0)

Ejercicio Nº9.

a) Siendo $W = f(x, y) = x^2 + y$, donde $x = 1 - \dfrac{1}{t}$, $y = \dfrac{1}{t^2}$ calcule la función compuesta W(t)

b) Siendo $W = f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, donde:
$x = t \,.\, r$; $y = 2 \,.\, s \,.\, t$; $z = s \,.\, \text{sen}\,(r)$, calcule $W\,(t, r, s)$

# TRABAJO PRACTICO Nº 6. DERIVADAS PARCIALES. DIFERENCIAL TOTAL. DERIVADAS DE FUNCIONES COMPUESTAS. DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Ejercicio Nº1. Calcule aplicando la definición las derivadas parciales de f en el punto indicado:

a) $z = f(x, y) = x^3 + y$ en P(1, 2) Rta: $f'_x(1, 2) = 3$; $f'_y(1, 2) = 1$

b) $z = f(x, y) = 2x^3 y - 3xy + 5$ en P(1, 2) Rta: $f'_x(1, 2) = 3$; $f'_y(1, 2) = 1$

Ejercicio Nº2. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \sqrt{5x - y^2}$ Rta. $f'_x = \dfrac{5}{2\sqrt{5x - y^2}}$ $f'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{5x - y^2}}$

b) $f(x, y) = \ln(x - \sec^2 y)$ Rta. $f'_x = \dfrac{1}{x - \sec^2 y}$ $f'_y = \dfrac{-2\sec^2 y \cdot tg\, y}{x - \sec^2 y}$

c) $f(x, y) = x \cdot e^{xy}$ Rta. $f'_x = e^{xy}(1 + xy)$ $f'_y = x^2 \cdot e^{xy}$

d) $f(x, y) = sen^2(xy - tg\, y)$ Rta. $f'_x = y\, sen[2(xy - tg\, y)]$ $f'_y = (x\, sen^2 y)\, sen[2(xy - tg\, y)]$

e) $f(x, y) = e^{sen(y/x)}$ Rta. $f'_x = -\dfrac{y}{x^2} \cdot e^{sen(y/x)} \cdot \cos\dfrac{y}{x}$ $f'_y = \dfrac{1}{x} \cdot e^{sen(y/x)} \cdot \cos\dfrac{y}{x}$

Ejercicio Nº3. Dadas las siguientes funciones, calcule las derivadas sucesivas que se indican:

a) $f''_{xy}(x, y)$ si $f(x, y) = x\cos y + y\cos x$ Rta. $f''(x, y) = -sen\, y - sen\, x$

b) $f''_{yz}(x, y, z)$ si $f(x, y, z) = e^{xyz}$ Rta. $f''(x, y, z) = e^{xyz}(x^2 yz + x)$

c) $f''_{yz}(1, 1)$ si $f(x, y) = x^2\, arc\, tg\, [y / x]$ Rta. 1

Ejercicio Nº4. Verifique que:

a) $z = x^2 + xy$ satisface: $x Z'_x + Z'_y = 2z$ b) $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ satisface: $x Z'_x + Z'_y = 2$

Ejercicio Nº5. a) Halle: df (1, 1) si $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$ Rta. $df(1, 1) = dx - 2\, dy$

b) Hallar dz en (3, 4) si: $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ Rta. $\dfrac{3}{5}dx + \dfrac{4}{4}dy$

c) Calcular $\Delta z$ y dy siendo $z = f(x, y) = x^2 y - 5y/x$ en (1, -2);
$\Delta x = 10^{-3}$ ; $\Delta y = 10^{-2}$
Rta. $\Delta z = -0,0539$ ; $dz = -0,054$

d) La altura de un cono es h = 30 cm., el radio de su base es r = 10 cm. ¿ Cómo variará el volumen de dicho cono si h aumenta 3 mm y r disminuye 1 mm? (El volumen del cono es: $V = \pi r^3 h/3$) (Utilizar la igualdad aproximada de $\Delta z \cong dz$) Rta. $\Delta V \cong dV = -10\pi$

e) Halle aproximadamente ka variación que experimenta la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm respectivamente, cuando el primero se alarga 1/4 cm y el segundo se acorta 1/8 cm. Rta. 0,05 cm

f) Calcule aproximadamente $\sqrt{4{,}05^2 + 2{,}93^2}$

g) Calcule aproximadamente $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^3$

Ejercicio Nº6.

a) Siendo $U = f(x, y) = x^2 + x\,y + y^2$, donde : $x = 3/t$ ; $y = t^2 - 1$ Halle du / dt.

Rta. $\dfrac{du}{dz} = \dfrac{-81 + 6t^4 + 6t^2}{t^4}$

b) Siendo $Z = f(x, y) = e^{3x + 2y}$, donde: $x = \cos t$; $y = t^2$ Halle dz / dt.

Rta. $\dfrac{dz}{dt} = e^{3\cos t + 2t^2}(4t - 3\,\text{sen}\,t)$

c) Demuestre que si $z = f(x + a\,y)$ ; donde f es una función diferenciable de una sola variable, entonces: $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}$

Ejercicio Nº7. Dadas las ecuaciones

a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ y b) $G(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy = 0$

a) Encuentre por lo menos dos puntos soluciones de las ecuaciones dadas.

b) Verifique la existencia de "y" como función de "x" en un entorno de los puntos hallados.

c) Calcule y' en los puntos hallados

Ejercicio Nº8. Dada la ecuación $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy = 0$

a) Analice la existencia de y = f(x) y x = g(y) en un entorno de P= (1, 1).
b) Calcule las primeras derivadas, si existen, en ese punto.

Ejercicio Nº9. Calcule los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ Rta. (2; 1; -28) mínimo relativo
(-2; -1; 28) máximo relativo

b) $z = 2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1$ Rta. (-2/3; 1/3; 0) mínimo relativo

c) $z = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ Rta. (1; 1; 3) mínimo relativo

d) $z = x^3 + y^3 + \frac{48}{x} + \frac{48}{y}$ Rta. (2; 2; 64) mínimo relativo
Rta. (-2; -2; 64) máximo relativo

e) $z = x^3 + y^2 - 3x$ Rta. (1; 0; -2) mínimo relativo

f) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x + 9y + 2$ Rta. (1; 4; -19) mínimo relativo

g) $z = 5 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ Rta. (0; 0; 5) mínimo relativo

h) $z = 3x^2 + x\,y$ Rta. No hay extremos

i) $z = \frac{4x^3}{3} + \frac{y^2}{3} - 6x^2 + y^2 + 9x + y - 2$ Rta. Caso dudoso

Ejercicio Nº10. Un agricultor planta soja y maíz, se sabe que el beneficio de la producción está dado por la expresión $B(x) = 1600\,x + 2400\,y - 2\,x^2 - 4\,y^2 - 4\,x\,y$ donde “x” es la cantidad de hectáreas plantadas de soja, e “y” es la cantidad de hectáreas plantadas de maíz. Halle cuántas conviene plantar con cada cultivo para maximizar el beneficio.

(Rta: x = 200 ha; y = 200 ha; B = 400000)

## TRABAJO PRACTICO Nº 7. INTEGRALES PARAMÉTRICAS Y MULTIPLES

Ejercicio Nº1. Resolver las siguientes integrales paramétricas:

1) $\int_{1}^{2} \frac{y}{x}\, dx =$

2) $\int_{-1}^{2} (2x^2 y^{-2} + 2y)\, dy$

3) $\int_{0}^{x} (2x - y)\, dy =$

4) $\int_{0}^{2y} 2xy\, dx =$

5) $\int_{0}^{\pi/2} \text{sen } x \cdot \cos y\, dx =$

Ejercicio Nº2. Calcular las siguientes integrales iteradas:

1) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{2} (x + y)\, dx\, dy =$

2) $\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} (x^2 - y^2)\, dy\, dx =$

3) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{1} x\, y\, dx\, dy =$

4) $\int_{1}^{2}\int_{0}^{4} (x^2 + 2y^2 + 1)\, dx\, dy =$

5) $\int_{0}^{3}\int_{0}^{2}\int_{0}^{1} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz =$

6) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 \cdot y^2 \cdot z^2\, dz\, dy\, dx =$

Ejercicio Nº3. Dibujar y calcular el área que corresponde a cada una de las siguientes integrales. Comparar los resultados y dar una conclusión.

a) $\int_{0}^{2}\int_{y^2}^{4} dx\, dy =$

b) $\int_{0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{x}} dy\, dx =$

c) $\int_{1}^{2}\int_{2x}^{3x+1} dy\, dx =$

d) $\int_{-2}^{1}\int_{x+2}^{4-x^2} dy\, dx =$

## TRABAJO PRACTICO Nº 8. ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejercicio Nº1. Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función f, con una o más de las derivadas de la función. Un ejemplo es la ecuación diferencial:

$$y'' = 5y' + 6y = 0$$

Las ecuaciones que estudiaremos se llaman ecuaciones diferenciales ordinarias, lo que quiere decir que involucran una función de una sola variable, así como las derivadas comunes de dicha función.
Ellas se pueden clasificar segun su orden y su grado. ¿Cuáles son los de la ecuación de ejemplo?. Generalizando:

El grado de una ecuación diferencial es:.............................................................................................................................
.
.............................................................................................................................
.
El orden de una ecuación diferencial es:.............................................................................................................................
.
.............................................................................................................................
.

Como en toda ecuación tendremos que encontrar su solución, o sea, resolverla. Cuando resolvemos una ecuación algebraica, buscamos un número o quizás, una colección de números, pero cuando resolvemos una ecuación diferencial, buscamos una o más funciones.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy}$$

¿Cuál es su orden y su grado?

Ejercicio Nº2. Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables: Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si después de algunas operaciones algebraicas elementales, es posible ordenar la ecuación de tal manera que la variable dependiente (que generalmente la nombramos con y) se ubique en uno de los miembros y la variable independiente (que generalmente la nombramos con x) se encuentre en el otro miembro.

a) Encontrar las soluciones generales para las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^5\, y' + y^5 = 0$ b) $\frac{dy}{dx} = 4xy$

b) Dada la ecuación diferencial, encontrar la solución particular

c) $e^x \cos y\; y\, dx + (1 + e^x) \operatorname{sen} y\, dy = 0$ para $P = (0, 0)$
d) $(y^2 + 3)\, dx + (y + xy)\, dy = 0$ para $y(4) = 1$

Ejercicio Nº3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

Se dice que una ecuación diferenciales lineal de primer orden si tiene la forma:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Es decir que una ecuación diferencial es lineal si la variable (y) y sus correspondientes derivadas no se encuentran multiplicándose entre sí o elevadas a potencias y no figuran como argumentos de funciones.

a) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^2y' + xy = x^3$ b) $y - x + xy.\cot g\, x + xy' = 0$

c) $y' - (1/x)y = x^2$. Hallar la solución particular para las condiciones y = 3 , x = 1

Ejercicio Nº4. Ecuaciones diferenciales exactas:

Una gran cantidad de ecuaciones diferenciales se pueden escribir de la forma:

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Si además se cumple que:

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ llamada condición necesaria y suficiente, entonces podemos resolver aplicando el método de ecuaciones exactas.

Comprueba cuales de estas ecuaciones diferenciales son exactas y resuelve aquellas que lo son:

a) $\frac{x}{2\cot y}\frac{dy}{dx} = -1$ b) $y^2\,dx - x^2\,dy = 0$

c) $e^y\,dx + (xe^y + 2y)\,dy = 0$

Ejercicio Nº5. Ecuaciones diferenciales homogéneas:

Una ecuación diferencial es homogénea cuando existe un “equilibrio” de peso entre las diferentes variables, pues resulta que una ecuación diferencial con esta característica de equilibrio entre las variables x e y se le puede hacer un cambio útil de variables para resolverlas.

Definimos entonces que una función g(x,y) de dos variables es homogénea de grado a para cualquier número real de a, si:

$$g(tx,ty) = t^a g(x,y) \text{ para } t > 0$$

Determine el grado de homogeneidad de las siguientes funciones:

a) $g(x,y)=x^2+xy$ b) $g(x,y)=\operatorname{sen}(x/y)$

En el caso de que una ecuación diferencial tenga la forma:

$M(x,y)\,dx + N(x,y)dy = 0$ y M, N tengan el mismo grado de homogeneidad entonces resulta posible llevar a cabo el cambio de variable z = y/x y convertir la ecuación diferencial en una de variables separables.

i) Determina el grado de homogeneidad y resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $xy = 2x + 3y$

b) $(x^{2} - 2y^{2})\, dx - xy\, dy = 0$

## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio Nº1. Ecuaciones diferenciales de primer orden, y de primer grado:

1 ) Variables separables:

a) $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$

b) $(x^2 - a^2)dy - y\, dx = 0$

c) $y' - 3x^2 = 2x + 1$

d) $4y\, dx = -x\, dy$

e) $y' + e^x + ye^x = 0$

f) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x}$

Ejercicio Nº2. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x+1} = (x + 1)^{3/2}$

b) $y' - a\dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}$

c) $dy \cdot \cos x + y \operatorname{sen} x\, dx = dx$

d) $y' + 2y = 2x$ Hallar la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales: $y = -1$ para $x = 0$

Ejercicio Nº3. Ecuaciones diferenciales exactas:
Verificar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y resolver:

a) $(2x + 3y)\, dx + (3x - 2y)\, dy = 0$

b) $xy^2\, dx + x^2\, y\, dy = 0$

c) $y(e + 2x)\, dx + x\,(e + x)\, dy = 0$

d) $\dfrac{2x}{y^3}\, dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\, dy = 0$

Ejercicio Nº4. Ecuaciones diferenciales homogéneas:
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas, verificando previamente el grado:

a) $(x + y)\, dx + (y - x)\, dy = 0$

b) $y^2 + x^2 y' = x\, y\, y'$

c) $(x^3 + y^3)\, dx - 3xy^2\, dy = 0$

## RESOLUCION PRACTICO Nº 1. FUNCIONES. LIMITES. CONTINUIDAD

### Ejercicio Nº 1

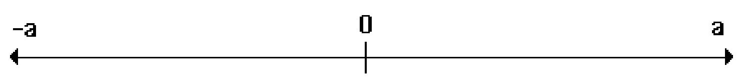
Introducción teórica (No es la teoría completa):
Los números reales son las bases del Cálculo Diferencial e Integral, es decir, que a lo largo de este apunte solo se manejarán los números reales.
Veremos un poco como se conforman los números reales:
Números naturales (N): Sirven para contar objetos por unidad.
Números negativos ($N^-$): Se coloca un guión detrás del número "–a" para distinguir de los naturales puros. Se crearon estos números porque no existe resultado en Naturales cuando se restan dos números y el sustraendo (que se representa comúnmente con la letra "b", sin comillas) es mayor que el minuendo (letra "a"), o sea, que cuando se da el caso de que ($a - b \Rightarrow b > a$) "un primer número a se resta a un segundo b y resulta que el segundo es mayor que el primero".
Números enteros (Z): Son los números naturales, con los negativos y el número 0, se utilizan mucho para calcular cuando uno tiene que recibir una cierta cantidad de objetos o los debe a alguien y tiene que retribuirlos.
Números Racionales (Q): Son números que resultan de dividir dos números naturales a y b, y que no pueden ser representados por los números enteros, porque la división no es exactamente un entero sino un número expresado en una razón, o una porción, en donde se toma de referencia un número entero realmente y se dice cuanto de ese número se representa. Estos números se representan tanto como fracción y con número de coma decimal, que es exactamente lo mismo.
Números Irracionales (I): Son números que no pueden representarse en forma racional, por tener infinitos valores después de la coma. Existen dos clases, los periódicos y los no periódicos.
Números Reales (R): Son todos los números que vimos hasta ahora. Estos pueden ser representados y calculados con facilidad en cualquier dispositivo.

Los reales pueden operar casi todos los números, menos cuando se da la siguiente situación:

$$\sqrt[par]{-x} \, .$$

O sea, cuando es raíz par de un número negativo, y da un número imaginario que ya está fuera de nuestro campo de estudio.

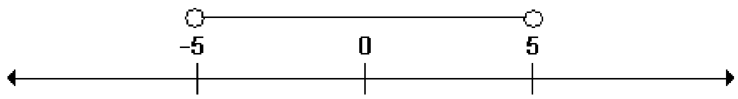
Con respecto a los *valores absolutos* y consecuentemente los intervalos, se puede decir entonces que un intervalo, es la distancia que hay en la recta real desde el cero hacia el número en cuestión, es decir:



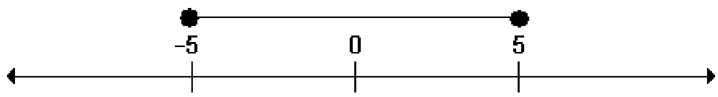

|-a| = a

O sea, el valor absoluto de (-a) es igual a (a), porque estamos hablando de distancia o radio, y como no hay distancia negativa, son números positivos.
Y los intervalos, pueden ser abiertos (-a, a), es decir que va desde el valor (-a) al valor (a) sin tocarlos porque $x > -a$ y $x < a$ o dicho de otro modo $-a < x < a$. Pueden ser cerrados [-a, a] ya que va desde el valor (-a) al valor (a) incluyéndolos porque $x \geq -a$ y $x \leq a$ o dicho de otro modo $-a \leq x \leq a$. Y pueden no ser ni abiertos ni cerrados… por ejemplo $(-\infty; -a] \cup [a;\infty)$ en este caso porque $x \leq -a \vee x \geq a$.

Ejemplo:
Veamos el caso $|x| < a;\ a \in R^+$
$|x| < 5$. El valor absoluto de una distancia, los valores pueden dar resultados infinitos, ya que estamos hablando de los números reales, o sea, ese 5 es real.

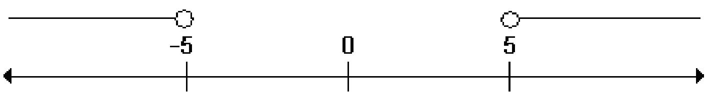



Como x es menor estricto que 5, nunca va a ser 5, es decir, la línea no puede tocar al valor 5, porque el número puede ser un 4,9999999999999999999… con tantos 9 que le queramos agregar, pero no puede ser 5, por eso se dibuja además de la línea esos círculos blancos en sus extremos.
Veamos otro caso: $|x| \leq a;\ a \in R^+$



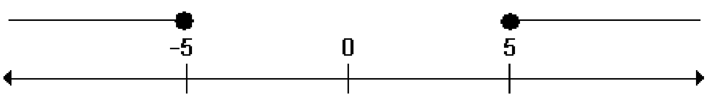

$|x| \leq 5$. Como x es menor o igual que 5, ese 5 queda incluido en el extremo del intervalo, es decir, la línea ahora puede tocar al valor 5, pero no un valor mayor, no puede ser ni siquiera 5,0000000000000000000001 con la cantidad de 0 que se quiera siempre y cuando tenga un 1 al final, por eso se dibuja además de la línea esos círculos negros en sus extremos.

Veamos otro caso más $|x| > a;\ a \in R^+$




$|x| > 5$. Como x es mayor estricto que 5, nunca va a ser 5, es decir, la línea no puede tocar al valor 5, porque el número puede ser hasta 5,0000000000000000000001 con la cantidad de 0 que se quiera siempre y cuando tenga un 1 al final, pero no 5. En este caso las líneas a dibujar vienen desde los infinitos, tanto negativo como positivo y los círculos blancos en cada uno de los extremos correspondientes.

Veamos el último caso $|x| \geq a;\ a \in R^+$




$|x| \geq 5$. . Como x es mayor o igual que 5, ese 5 queda incluido en el extremo del intervalo, es decir, la línea ahora puede tocar al valor 5, pero no un valor menor, no puede ser ni siquiera 4,999999999999 con la cantidad de 9 que se quiera. Está líneas se dibujar desde afuera hacia el 5 porque vienen desde el infinito y paran justo en el 5.

Entonces, hay que tener en cuenta dos cosas PRESTAR ATENCIÓN:

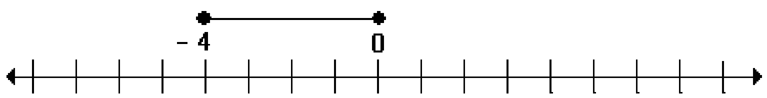
1) Los intervalos son:
- cerrados en ambos lados cuando $x \leq$ numero o sea [-numero, numero]
- son abiertos cuando $x <$ numero (-numero, numero) o $x >$ numero $(-\infty;$ -numero$) \cup$ (numero; $\infty)$
- no son ni abiertos ni cerrados cuando $x \geq$ numero o sea $(-\infty;$ -numero$] \cup$ [numero; $\infty)$
- En realidad hay más casos que estos, pero solo se ven estos para el estudio de los intervalos en la materia.

2) Los intervalos se resuelven usando dos formulas:
- Cuando es x menor o menor igual que un número "a" cualquiera, se usan las siguientes fórmulas: $-a < x < a$ o $-a \leq x \leq a$
- Cuando es x mayor o mayor igual que un número "a" cualquiera, se usan la siguientes fórmulas: $x < -a \vee x > a$. o $x \leq -a \vee x \geq a$

Ahora, con respecto al análisis del intérvalo:
Se dice que es cota superior cuando los valores son mayores o iguales que el extremo superior del intervalo, independientemente que éste pertenezca o no al intérvalo.
Se dice que es cota inferior cuando los valores son menores o iguales que el extremo inferior del intervalo, independientemente que éste pertenezca o no al intérvalo.
Se denomina extremo superior o supremo, a la menor de las cotas superiores.
Se denomina extremo inferior o ínfimo, a la mayor de las cotas inferiores.
Elemento máximo: Es el extremo superior del intérvalo si este pertenece al intérvalo.
Elemento mínimo: Es el extremo inferior del intérvalo si este pertenece al intérvalo.

a) $x + 2 \leq 2$
A) Intervalos

$$-2 \leq x + 2 \leq 2$$
$$-2 -2 \leq x \leq 2 - 2$$
$$-4 \leq x \leq 0$$



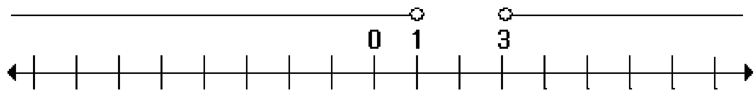

Entonces, $x \in [-4; 0]$

B) Determinación de cotas, supremo, ínfimo, máximos y mínimos

Cota Superior: $[0, \infty)$
Cota Inferior: $(-\infty, -4)$
Extremo Inferior: -4
Extremo Superior: 0
Elemento Mínimo: -4
Elemento Máximo: 0

b) $|-x + 2| > 1$
A) Intervalos

$- x + 2 > 1 \vee - x + 2 < - 1$
$- x > 1 - 2 \vee - x < - 1 – 2$
$- x > - 1 \vee - x < - 3$
$x < 1 \vee x > 3$




Entonces, $x \in \{(-\infty; 1] \cup [3; \infty)\}$

B) Determinación de cotas, supremo, ínfimo, máximos y mínimos

Cota Superior: NO TIENE
Cota Inferior: NO TIENE
Extremo Inferior: NO TIENE
Extremo Superior: NO TIENE
Elemento Mínimo: NO TIENE
Elemento Máximo: NO TIENE

c) $D = \{x \in R / 3x^2 – 3x – 6 \leq 0\}$
A) Intervalos
$3x^2 – 3x – 6$

$3x^2 – 3x – 6 = 0$

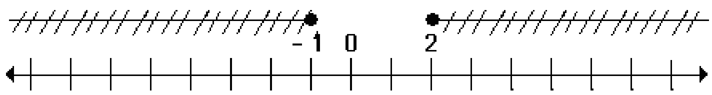
$x^2 – x – 2 = 0$

$$x = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 – 4 a c}}{2} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{1 + 3}}{2 \,.\, 1} = \begin{cases} 2 \\ - 1 \end{cases}$$

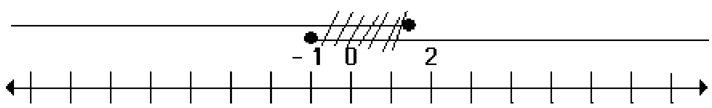
$3 (x - 2) (x + 1)$
$3 (x - 2) (x + 1) \leq 0$
$(x - 2) (x + 1) \leq 0$

Existen dos alternativas de solución y las dos debemos calcular:
Primera alternativa:
$x - 2 \geq 0 \wedge x + 1 \leq 0$
$x \geq 2 \wedge x \leq -1$



$x \in \varnothing$

Segunda alternativa:
$x - 2 \leq 0 \wedge x + 1 \geq 0$
$x \leq 2 \wedge x \geq -1$



$x \in [-1, 2]$

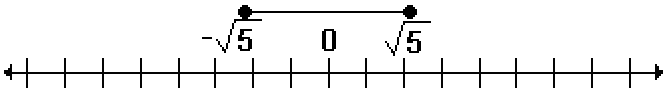
Solución final:

Solucion1 $\cup$ Solucion2 = $\varnothing$ $\cup$ Solucion2 = Solucion2
Solucion1 $\cup$ Solucion2 = $\varnothing \cup x \in [-1, 2]$ =
$x \in [-1, 2]$

B) Determinación de cotas, supremo, ínfimo, máximos y mínimos

Cota Superior: $[2, \infty)$
Cota Inferior: $(-\infty, -1]$
Extremo Inferior: -1
Extremo Superior: 2
Elemento Mínimo: -1
Elemento Máximo: 2

d) $x^2 \leq 5$
A) Intervalos
Por propiedad de valor absoluto $|a^n| = |a|^n$
$|x^2| \leq |5|$
$|x|^2 \leq |5|$
$|x| \leq \sqrt{5}$
$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$




$x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

B) Determinación de cotas, supremo, ínfimo, máximos y mínimos

Cota Superior: $[\sqrt{5}, \infty)$

Cota Inferior: $(-\infty, -\sqrt{5}]$

Extremo Inferior: $-\sqrt{5}$
Extremo Superior: $\sqrt{5}$

Elemento Mínimo: $-\sqrt{5}$
Elemento Máximo: $\sqrt{5}$

<u>Ejercicio Nº 2</u>.
Introducción teórica:
Los dominios de la función son una parte de los números reales, y pueden ser condiciones y desigualdades.
Dominio: Los valores que toma la variable independiente x para que exista una función.

a) $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$

$\exists f \Rightarrow \dfrac{1}{4 - x^2} \Rightarrow 1 - x^2 \neq 0$

$x \neq 2$

$x \neq -2$

Dom f = $\{x \in R \,/\, x \neq 2 \wedge x \neq -2\}$

b) $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$

$\exists f \Rightarrow \sqrt{2 - x - x^2} \Rightarrow 2 - x - x^2 \geq 0$

$-x^2 + x + 2 \geq 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,.\,a} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \, -1 \, 2}}{2 \,.\, (-1)} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$- 1 (x - 2) (x + 1) \geq 0$
$(x - 2) (x + 1) \leq 0$

Dom f = $\{x \in R / x \in [-1, 2]\}$

c) $f(x) = \ln (- 2x + 1)$

$f(x) \Rightarrow \ln (- 2x + 1) \wedge -2x + 1 > 0$

$- 2x > - 1$
$- 2x > - 1$
$2x < 1$
$x < \dfrac{1}{2}$

Dom f = $\{x \in R^- / x \in \frac{1}{2}\}$

$x \in (-\infty, \frac{1}{2})$

Ejercicio Nº 3.

$g_1: D \to R / g_1(x) = x^2 - 2x - 3$

a)

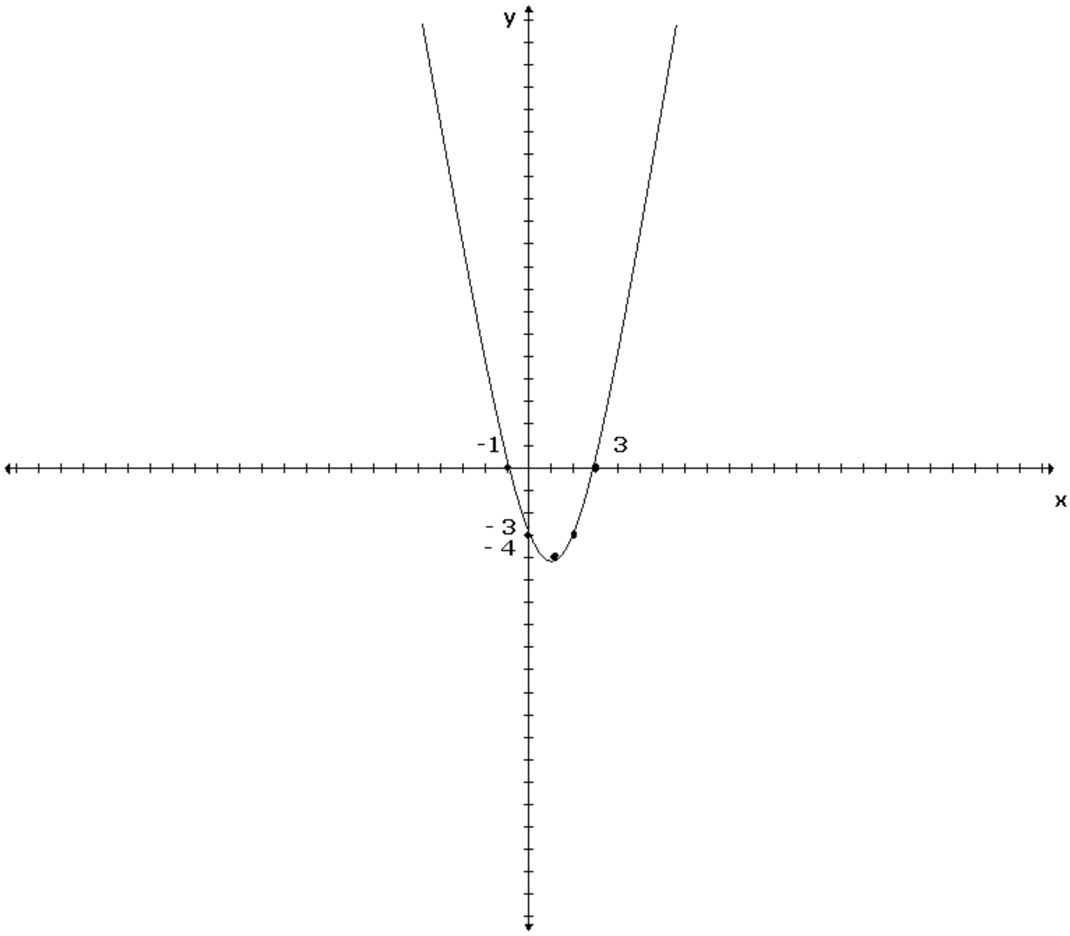
$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2 \,.\, 1} = 1$

$y_v = x^2 - 2x - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

| x | $y = x^2 - 2x - 3$ |
|---|---|
| -2 | 4 + 4 – 3 = 5 |
| -1 | 1 + 2 – 3 = 0 |
| 0 | -3 |
| 1 | 1 – 2 – 3 = -4 |
| 2 | 4 – 4 – 3 = -3 |
| 3 | 9 – 6 – 3 = 0 |

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,.\,a} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-2^2 - 4.1.(-3)}}{2\,.\,a} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$




b)

Dom f = R

Im f = {x ∈ R / x ∈ [-4, ∞)}

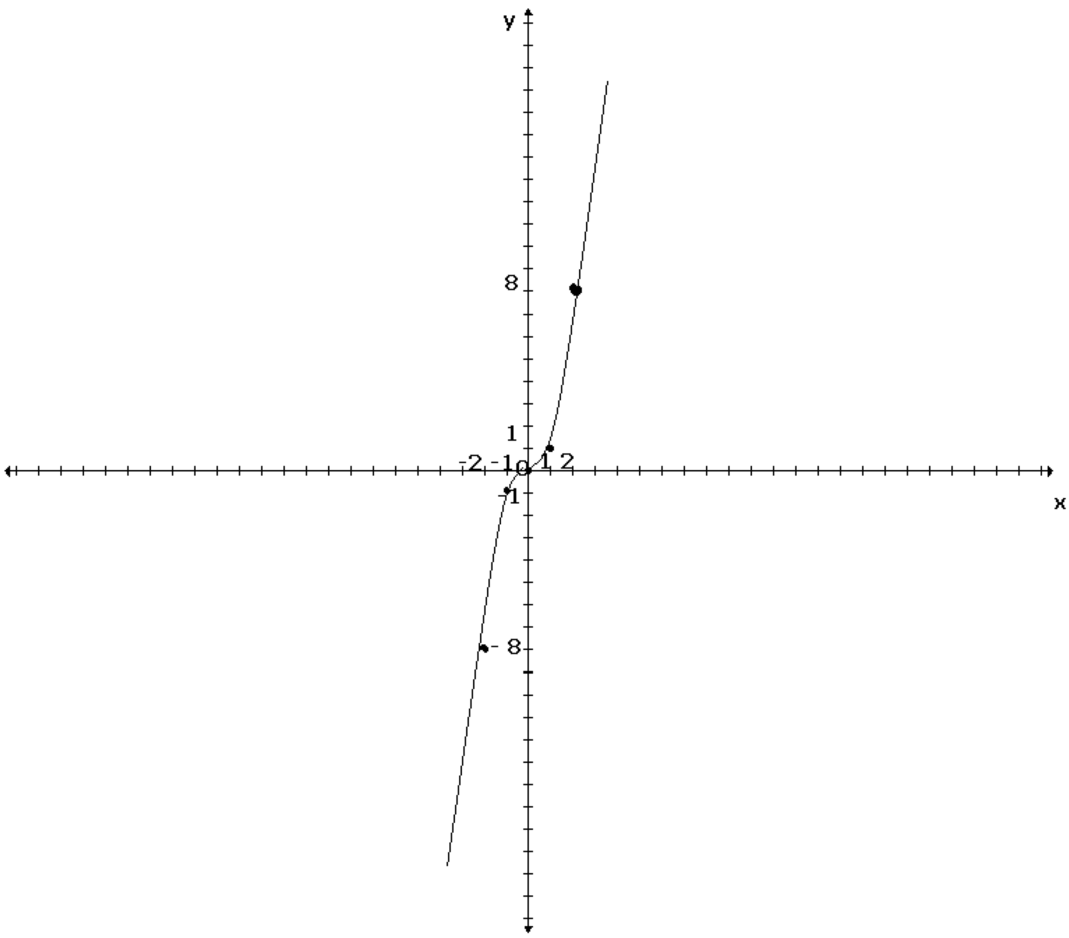
∩x :

$x_1$ = - *1* $x_2$ = *3*

$\cap y$ :
$y = x^2 - 2x - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$

$g_2$: D → R / $g_2(x) = x^3$

| x | $y = x^3$ |
|---|---|
| -2 | $-2^3 = -8$ |
| -1 | $-1^3 = -1$ |
| 0 | $0^3 = 0$ |
| 1 | $1^3 = 1$ |
| 2 | $2^3 = 8$ |



b)

Dom f = R

Im f = R

$\cap x$ :

y = 0

$\frac{p}{q} = \frac{0}{0} = 0$

$\cap y$ :

$x = 0^3 = 0$

$g_3: D \rightarrow R \;/\; g_3(x) = \dfrac{2x - 3}{3x + 2}$

Esta es una nueva función que no se ha visto hasta ahora, se llama *función holográfica o bilineal.*

La ecuación general es:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$a, b, c, d \in R$, $c \neq 0$, $cx + d \neq 0$

como $x \neq \dfrac{-d}{c}$

se puede decir que

$x = \dfrac{-d}{c}$ es la asíntota vertical de la función, es decir, las curvas no pueden tocar esta línea.

y como también

$y \neq \dfrac{-a}{c}$

$y = \dfrac{-a}{c}$ es la asíntota horizontal de la función, es decir, las curvas tampoco pueden tocar esta línea.

Copiamos de nuevo la función para poder resolverla:

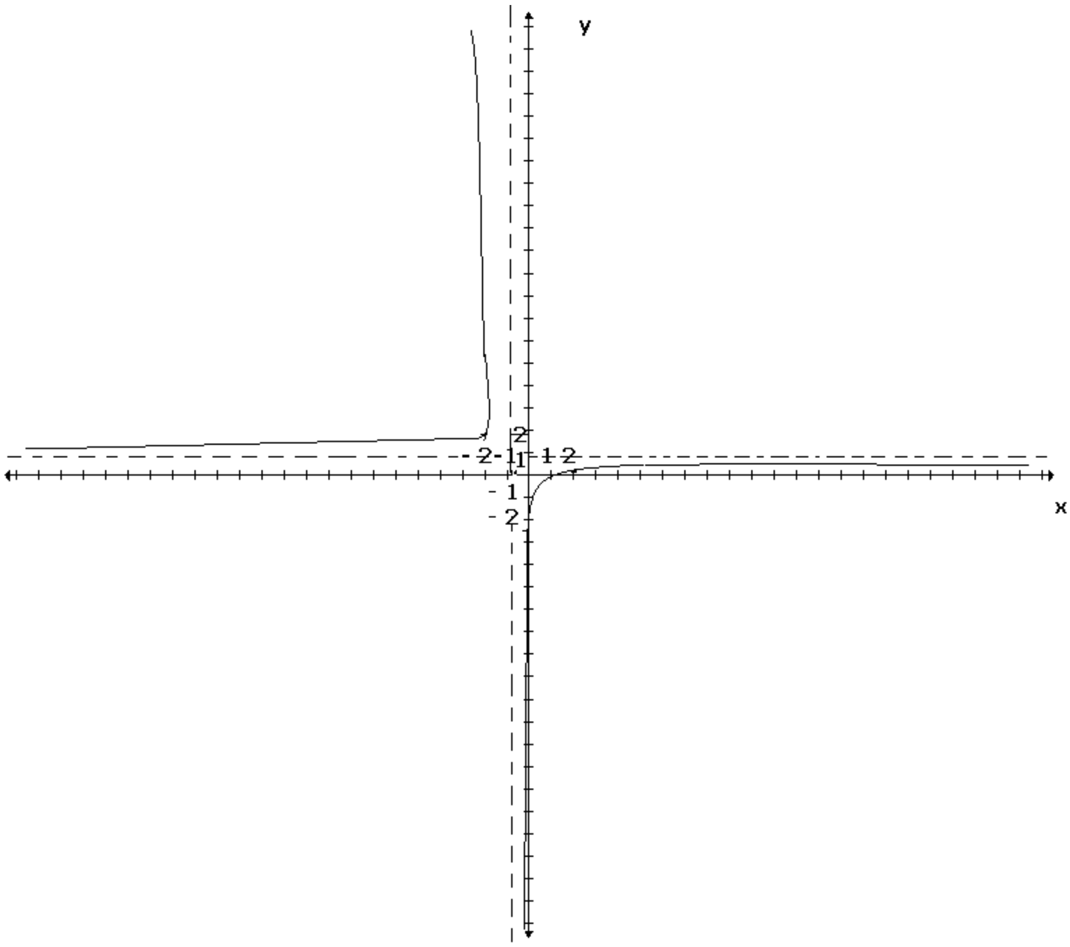
$$g_3(x) = \frac{2x - 3}{3x + 2}$$

a) $3x + 2 \neq 0$ $\qquad x \neq \dfrac{-d}{c}$

$x \neq \dfrac{-2}{3}$

$y \neq \frac{2}{3}$

| X | $y = \frac{2x - 3}{3x + 2}$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{-5}{2}$ |
| - 2 | $\frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$ |
| 2 | $\frac{1}{8}$ |



b)

Dom f = $\{x \in R \,/\, x \neq \frac{-2}{3}\}$ Im f = $\{x \in R \,/\, x \neq \frac{2}{3}\}$

$\cap x$ :

$y = 0$

$$y = \frac{2x - 3}{3x + 2}$$

$2x - 3 = 0$

$$y = \frac{3}{2}$$

$\cap y$ :

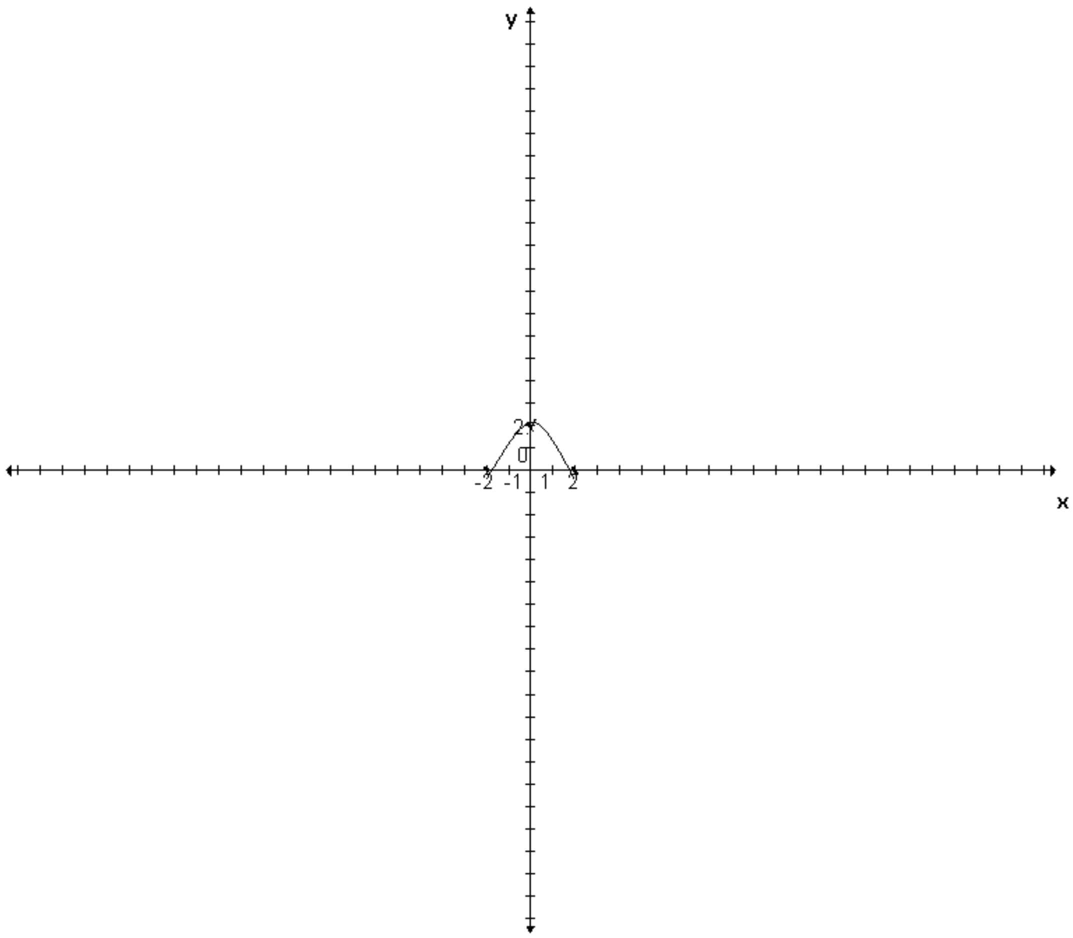
$x = 0$

$$x = \frac{-3}{2}$$

$g_4$: D $\rightarrow$ R / $g_4(x) = \sqrt{4 - x^2}$

a)

| x | $y = \sqrt{-x^2 + 4}$ |
|---|---|
| -2 | $\sqrt{(-2^2 + 4)} = 0$ |
| -1 | $\sqrt{(-1^2 + 4)} = \sqrt{3}$ |
| 0 | 2 |
| 1 | $\sqrt{(-1^2 + 4)} = \sqrt{3}$ |
| 2 | $\sqrt{(-2^2 + 4)} = 0$ |




b)

Explícita cuando despeja x en función de y o sea g4 (x) ($\sqrt{}4 - x^2$) pasa a ser una función donde la $\sqrt{}$ debe ser un solo signo. Una recta, una curva, o una circunferencia puede ser expresada de diferentes maneras.

Ecuación que identifica a esa curva es canónica.

$y = \sqrt{4 - x^2}$ .

$y^2 + x^2 = y$ (Ecuación canónica)

Dm f = $\{x \in R \ / \ -2 \leq x \leq 2\}$

Im f = $\{x \in R \ / \ x \in [0, 2]\}$

$\cap$x :

y = 0

$$\sqrt{4-x^2} = 0$$
$$4 - x^2 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$\cap y$ :

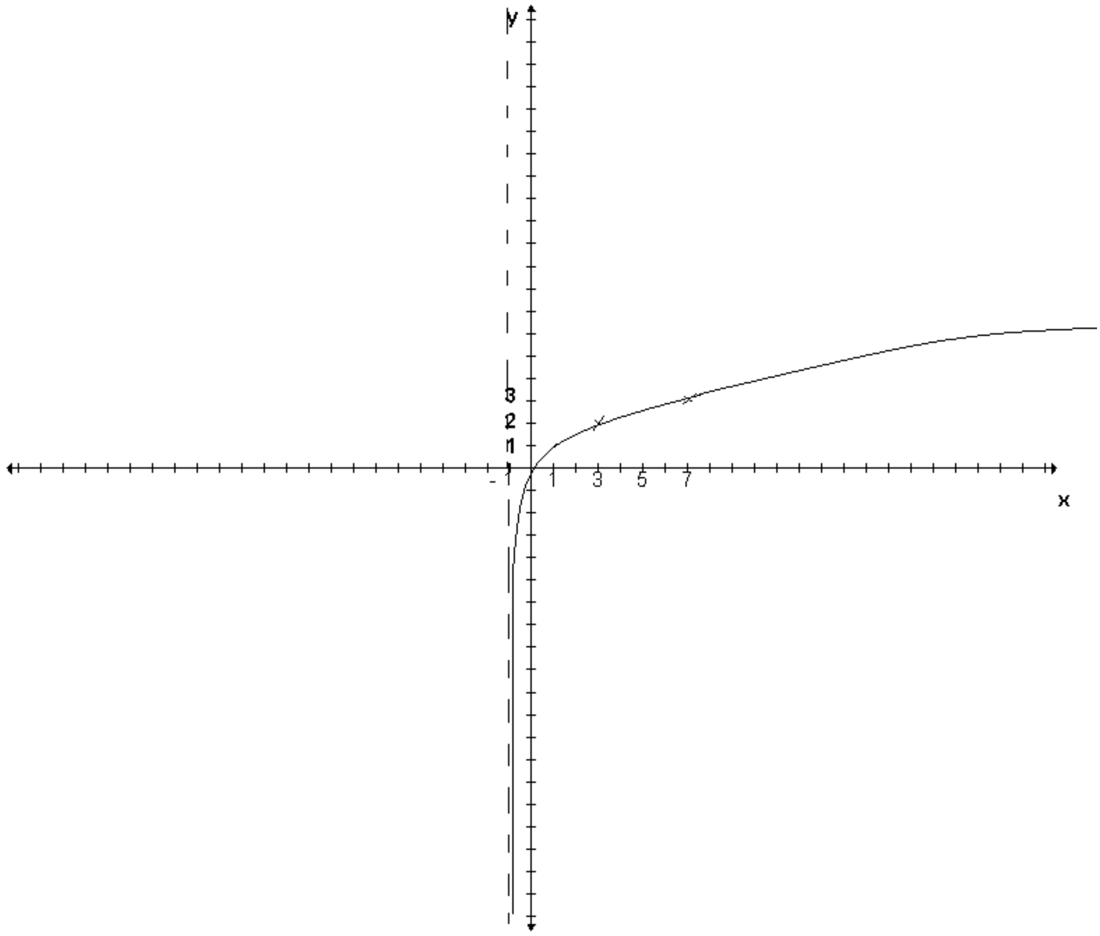
$x = 0$

$\sqrt{4-0} = 2$

$g_5$: D → R / $g_5(x) = \log_2 (1 + x)$

a)

| x | $y = \log_2 (1 + x)$ |
|---|---|
| 0 | $\log_2 1 = 0$ |
| 1 | $\log_2 2 = 1$ |
| 3 | $\log_2 4 = 2$ |
| 7 | $\log_2 8 = 3$ |



b)

Dm f = { $x \in R$ / $x > -1$}

Im f = R

$\cap x$ :

$y = 0$

$\log_2 (1 + x) = 0$

$1 + x = 2^0$

$1 + x = 1$

$x = 0$

$\cap y$ :

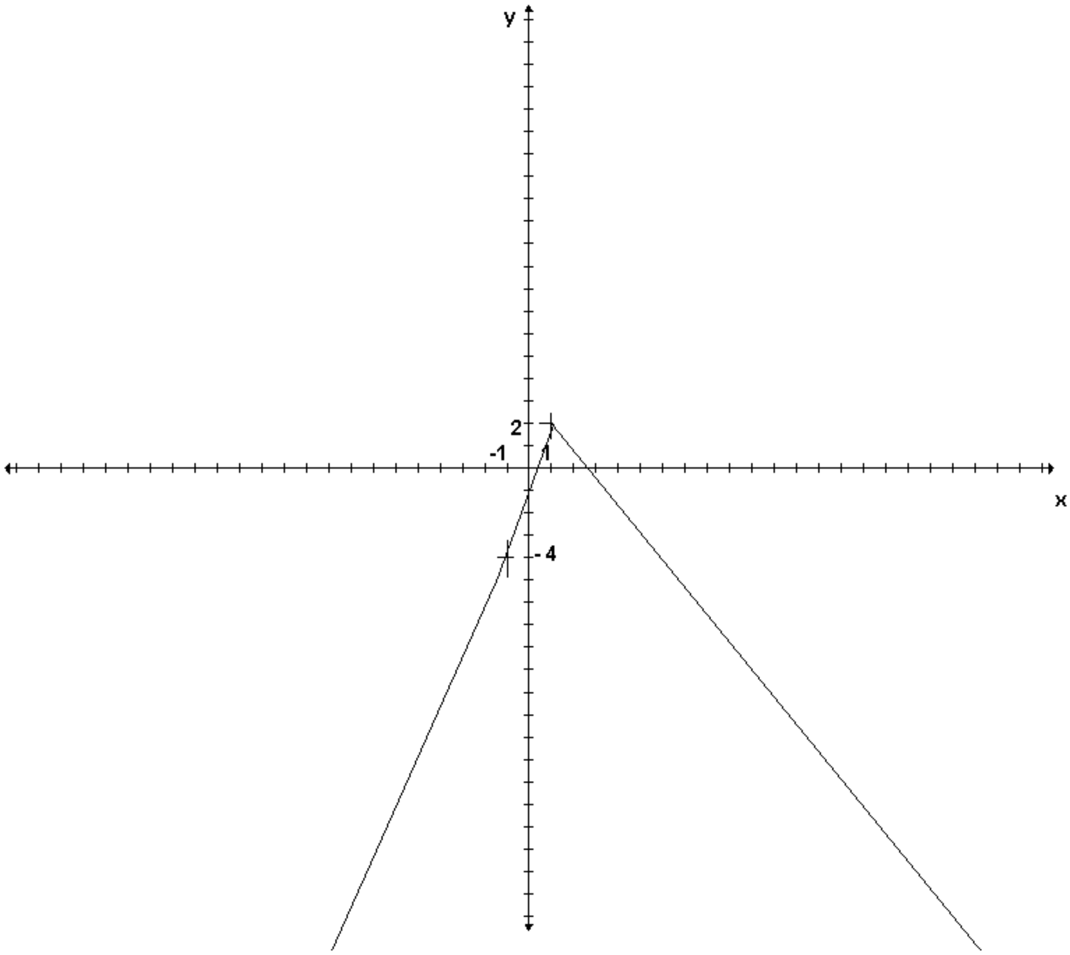
$x = 0$

$\log_2 1 = 0$

$$g_6: D \to R \,/\, g_6(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ si } x \leq 1 \\ 3 - x \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

a)

| x | $3x - 1$ si $x \leq 1$<br>$3 - x$ si $x > 1$ |
|---|---|
| 1 | $3 \,.\, 1 - 1 = 2$ |
| -1 | $3 + 1 = 4$ |




b)

Dm f = R

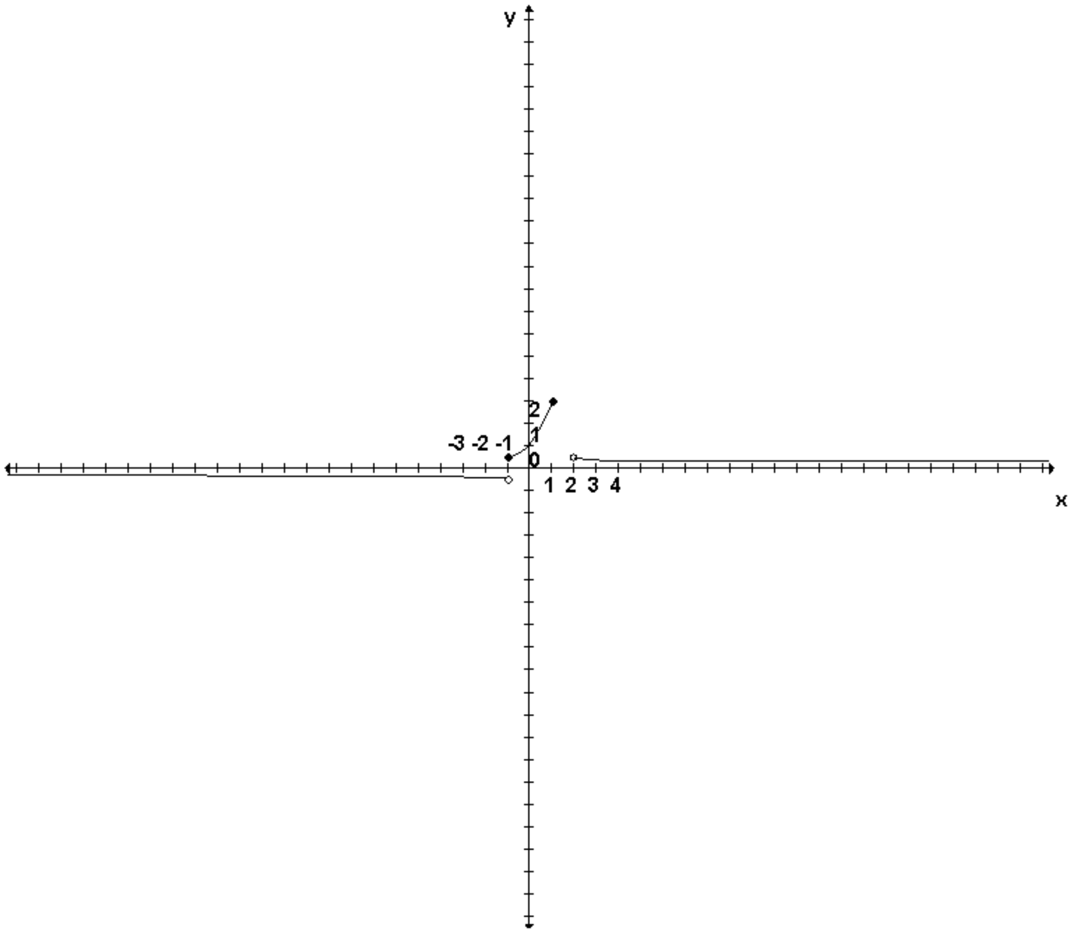
Im f = {x ∈ R / x ∈ (- ∞, 2]}

$$g_7: D \to R \ / \ g_7(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

a)

| x | $y = \begin{cases} 2x \text{ si } \lvert x \rvert \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } \lvert x \rvert > 1 \end{cases}$ |
|---|---|
| -2 | $\frac{-1}{2} = -0.5$ |
| -1 | $2^{-1} = 0.5$ |
| 0 | $2^{0} = 1$ |
| 1 | $2^{1} = 2$ |
| 2 | $\frac{1}{2} = 0,5$ |
| 3 | $\frac{1}{3} = 0.33333333333333333$ |
| 4 | $\frac{1}{4} = 0.25$ |




b)

Dm $\{x \in R \,/\, x \leq 1 \wedge x > 1\}$

Im $\{y \in R \,/\, y \in [-1, -2] \wedge y \neq 0\}$

$\cap x$ :
$y = 0$
$2^x = 0$
$(\log a^n = n \cdot \log a)$
$x \cdot \log 2 = \log 0$
. $-\log 0$
. $\cap x$

$\cap y$ :
$x \neq 0$
$\frac{\cancel{1}}{x} = 0$
$1 = 0 \cdot x$
$1 \neq 0 \cdot x$
$1 \neq 0$

.

Ejercicio Nº 4.
Resolver!

Ejercicio Nº 5.

a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{(3x-3)\,(3x+5)\,(4x-6)}{3x^3 + x - 1} = 8$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(3x-3)\,(3x+5)\,(4x-6)}{3x^3 + x - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(6x^2 + 16 + 9x - 15)\,(4x-6)}{3x^3 + x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{24x^3 - 36x^2 + 4x^2 - 6x + 90}{3x^3 + x - 1} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{24x^3 - 32x^2 - 6x + 90}}{3x^3 + x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{24x^3 - 32x^2 - 6x + 90}{x^3}}{\frac{3x^3 + x - 1}{x^3}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{24x^3 - 32x^2 - 6x + 90}{x^3}}{\frac{\cancel{3x^3 + x - 1}}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{24\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} - \frac{32\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}} - \frac{6\cancel{x}}{x^{\cancel{3}}} + \frac{90}{x^3}}{\frac{3\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} + \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{3}}} - \frac{1}{x^3}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{24 - \frac{32}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{90}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{24 - \overbrace{\frac{32}{x}}^{0} - \overbrace{\frac{6}{x^2}}^{0} + \overbrace{\frac{90}{x^3}}^{0}}{3 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{0}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{24 - 0 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{24}{3}$$

Esto se aplica cuando el límite indeterminado es $\frac{\infty}{\infty}$ y un cociente de dos polinomios del mismo grado, es el cociente del mayor grado.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ ; gr P(x) = gr Q(x) ⇒ Lim
gr P(x) > gr Q(x) ⇒ L = ∞
gr P(x) < gr Q(x) ⇒ L = 0

b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{(x^3 + 10)^{1/3}} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{(x^3 + 10)^{1/3}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^3 + 10)}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}}{\frac{\sqrt[3]{(x^3 + 10)}}{x}} =$$

Para poder introducir x en una raíz debo multiplicar

$$\sqrt[e2]{X^{e1}} \quad e1 \,.\, e2$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} + \frac{\cancel{10}}{x^3}\right)}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{\cancel{10}}{x^3}\right)}} = \frac{1}{1} = 1$$

c) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x^3 + x - 1} = 4$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2^2 - 4}{3.\, 2^3 + 2 - 1} = \frac{0}{0}$$

La indeterminación en este caso se salva por Ruffini, porque es una indeterminación $\frac{0}{0}$ y es un cociente de funciones.

Numerador

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -4 |
| 2 | | 2 | 4 |
| | 1 | 2 | 0 |

Denominador

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | 2 |
| 2 | | 2 | - 2 |
| | 1 | -1 | 0 |

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)} \,.\, (x+2)}{\cancel{(x-2)} \,.\, (x-1)} = \frac{2+2}{2-1} = 4$$

d) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = 1/2$

Numerador

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -3 | 2 |
| 1 | | 1 | 1 | -2 |
| | 1 | 1 | -2 | 0 |

Denominador

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | - 4 | 3 |
| 1 | | 1 | 1 | 1 | -3 |
| | 1 | 1 | 1 | -3 | 0 |

d) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-1)(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x-1)(x-1)(x+3)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x-1)(x+3)} =$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x-1)(x+3)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x^2 + x - 2)}{(x^3 + x^2 + x - 3)} =$

Numerador

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | - 2 |
| 1 | | 1 | 2 |
| | 1 | 2 | 0 |

Denominador

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | - 3 |
| 1 | | 1 | 2 | 3 |
| | 1 | 2 | 3 | 0 |

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)}{(x^2 + 2x + 3)} =$$

$$\frac{1+2}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio Nº 6.

e) $$\lim_{x \to 1} \left( \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) = -1$$

$$\lim_{x \to 1} \left( \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) = \frac{1}{0} - \frac{3}{0} = \infty - \infty$$

Se usará el MCM:

$1 - x = 1 - x$

$1 - x^3 = 1 - x$

$1 - x^3 = (1 - x)\,(1^2\ x^0 + 1\ x + 1\ x^2)$

Si es negativo es decir a – b, la expresión es todo suma.

Si es a + b, la expresión es +, - , +, -.

$= (1 - x)\,(1 + x + x^2)$ (Expresiones comunes y no comunes)

$$\lim_{x \to 1} \frac{(1 + x + x^2) - 3}{(1 - x)\,(1 + x + x^2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{(1 - x)\,(1 + x + x^2)} = \frac{0}{0}$$

La indeterminación $\infty - \infty$ no se resuelve en el %90, de los casos y en efecto provoca otra indeterminación que se puede resolver directamente.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 1 & -2 \\
1 & & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0
\end{array}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\,(x + 2)}{(1 - x)\,(1 + x + x^2)} = \frac{-\cancel{(1 - x)}\,(1 + 2)}{\cancel{(1 - x)}\,(1 + 1 + 1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

f) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{1 - x} - 1} = -1$$

$$\lim \sqrt{1 + x} - 1 = 0$$

$$x \to 0 \qquad \sqrt{1 - x} - 1 \qquad \overline{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{1 - x} - 1} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{1 - x} - 1}\right] . \left[\frac{\sqrt{1 + x} + 1}{\sqrt{1 + x} + 1}\right] . \left[\frac{\sqrt{1 - x} + 1}{\sqrt{1 - x} + 1}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(\sqrt{1 - x})^2 - 1^2}{(\sqrt{1 - x})^2 - 1^2}\right] \left[\frac{\sqrt{1 + x} + 1}{\sqrt{1 + x} + 1}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\ [(1 + x)^2 - 1^2]}{-x\ [(1 - x)^2 - 1^2]} = \frac{-2}{-2} = -1$$

g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x - \text{sen } x}{\text{sen}^2 x} = 1 / 2$

Resolver!

Algunos casos de límites para tener en cuenta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1$$

Deben ser iguales

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } 2x^2}{2x^2} = 1$$

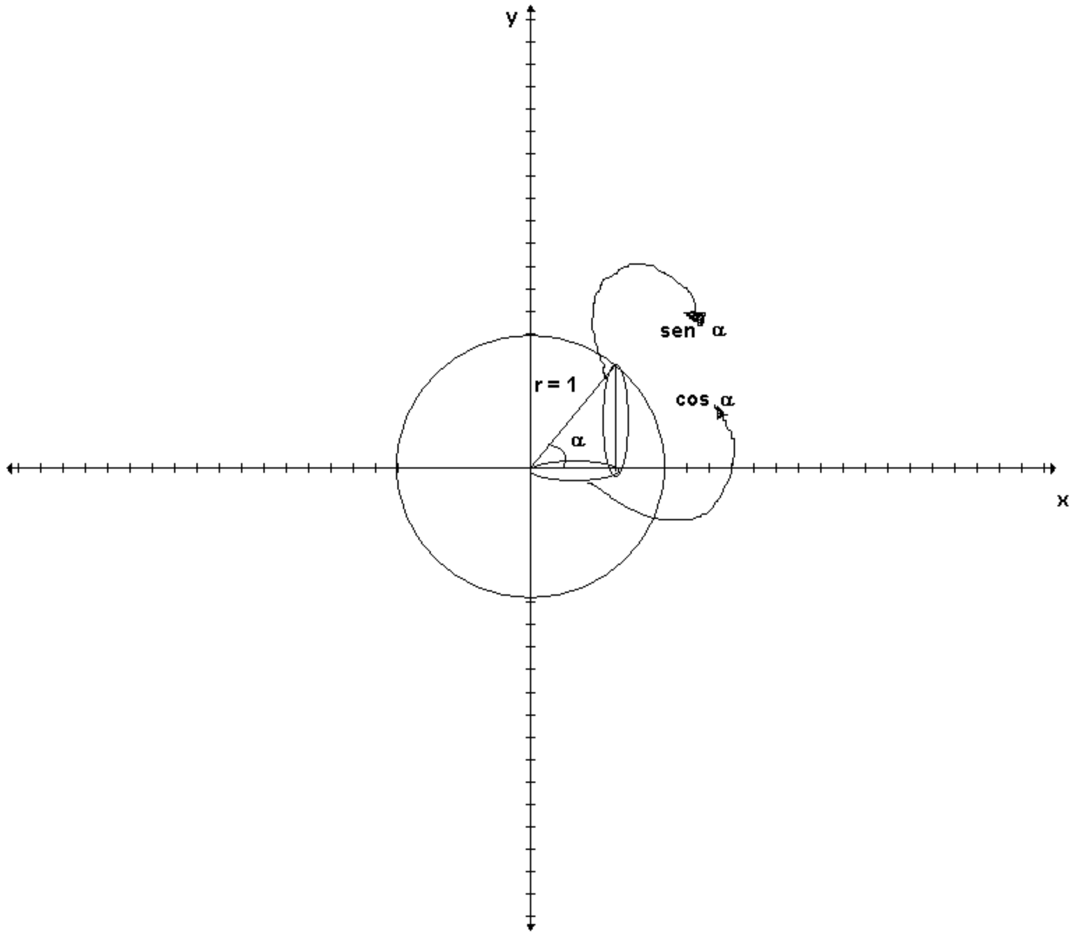
$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 2x} = \frac{5\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{5}{2}$$

Teorema de Pitágoras:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\text{sen}^2 x = (1 + \text{sen } x)\ (1 - \cos x)$




h) $\lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{3/x} = e^{-6}$

$\lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{3/x} = 1^{\infty}$

En este caso cuando la indeterminación es $1^{4}$, se usa la definición del número e.

$$e = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} \quad . \quad \lim_{t \to e} \left(1 + t\right)^{1/t}$$

Hay que analizar:

$$-2x = \frac{1}{t} \qquad x \to 0$$

$$x = \frac{-1}{2t} \qquad -\frac{1}{2t} \to 0 \qquad \text{tiene } t \to \infty$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3/(-1/2t)} = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-6t} = \lim_{t \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-6} = e^{-6}$$

Ejercicio Nº 7.

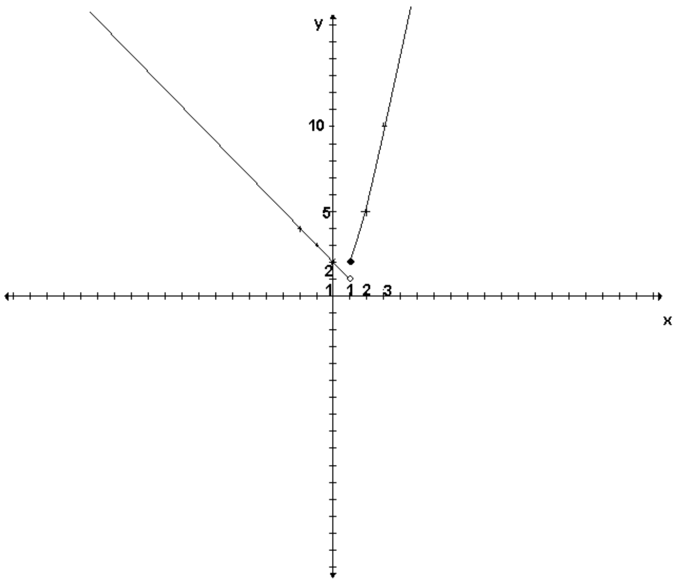
a) Dada la fórmula de la función f(x) = $\begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

i) Representar f gráficamente (Dominio R)
ii) Calcular:

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

i)
Dm f = R
Im f = $\{x \in R \,/\, x \in (1, 4)\}$

| x | $2 - x$ si $x < 1$<br>$x^2 + 1$ si $x \geq 1$ |
|---|---|
| -2 | $2 - (-2) = 4$ |
| -1 | $2 - (-1) = 3$ |
| 0 | $2 - 0 = 2$ |
| 1 | $1^2 + 1 = 2$ |
| 2 | $2^2 + 1 = 5$ |
| 3 | $3^2 + 1 = 10$ |




Se puede notar la gráfica cambia, cuando el límite viene por la derecha o por la izquierda.

ii)

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2 - x = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

Cuando los límites laterales por izquierda y por derecha, son distintos, en el entorno reducido del punto, no existe límite.

$$\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$

El ejercicio no lo pide pero se adelantará con la continuidad de la función:

$$\text{Una función } f(x) \text{ es contínua en un punto } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1).\quad f(x_0) = R \\ 2).\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L \\ 3)\ f(x_0) = L \end{cases}$$

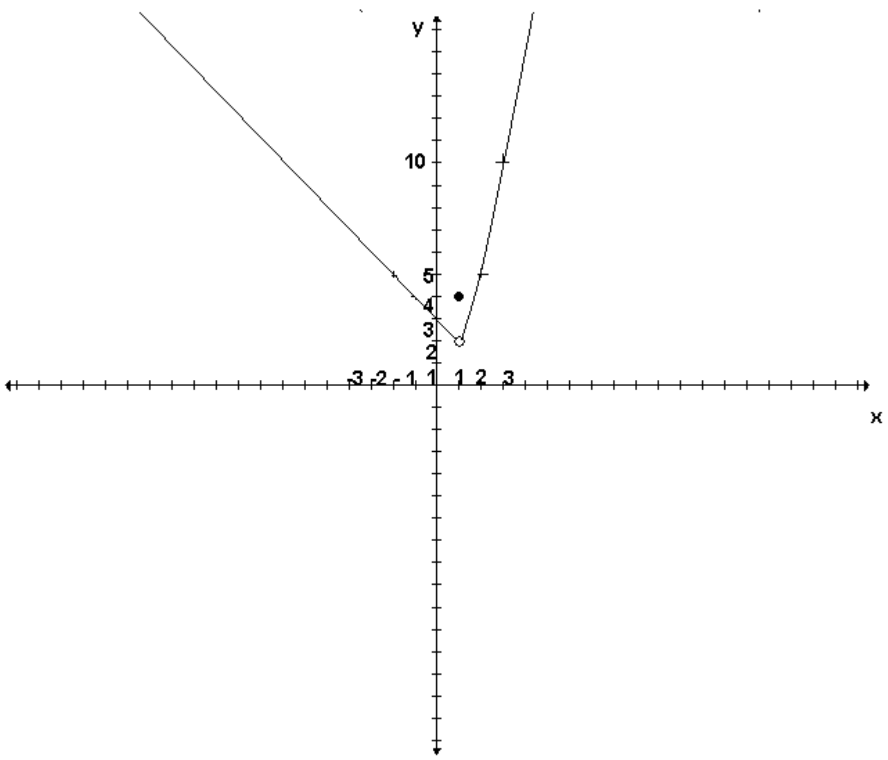
b) Dada la fórmula de la función $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

i)

Dm f = R

Im f = $\{x \in R \,/\, x \in (2, 4)\}$

| x | $3 - x$ si $x < 1$<br>$4$ si $x = 1$<br>$x^2 + 1$ si $x > 1$ |
|---|---|
| -2 | $3 - (-2) = 5$ |
| -1 | $3 - (-1) = 4$ |
| 0 | $3 - 0 = 3$ |
| 1 | 4 |
| 2 | $2^2 + 1 = 5$ |
| 3 | $3^2 + 1 = 10$ |




ii)

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 4$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3 - x = 3 - 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$f(x) \begin{cases} 1). \quad f(1) = 4 \\ 2). \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 2 \\ 3)\ f(1) \neq L \\ \quad 4 \neq 2 \end{cases}$$

Cuando el punto 2) recién nombrado no es válido, es decir, que no existe el límite de la función en ese punto, la discontinuidad es inevitable.
Cuando existe límite, pero no función o no igualdad es evitable. Modifico el valor de la función en el punto.

<u>Ejercicio Nº 8</u>.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 3x^2 - x + 3}$

Igualar el denominador a 0, para encontrar los valores que anulen la ecuación.

$x^3 + 3x^2 - x + 3 = 0$
Aplicando Gauss:

$\frac{p}{q} \in Q$

p y q coprimos (Son números divisibles por si mismos y por la unidad o sea 1 y -1)

$\left.\begin{array}{l} \frac{p}{q} = \pm 1 \,;\, \pm 3 \\ \phantom{\frac{p}{q}} \pm 1 \end{array}\right\} \frac{p}{q} = \pm 1 \,;\, \pm 3$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -3 | -1 | 3 |
| 1 | | 1 | -2 | -3 |
| | 1 | -2 | -3 | 0 |

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 3$
$\exists f(1) \qquad \exists f(-1) \qquad \exists f(3)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 3x^2 - x + 3} = \frac{1 + 2 - 3}{(-3 - 1 + 3)} = \frac{0}{0}$$

Ruffini para el numerador

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | -3 |
| 1 | | 1 | 3 |
| | 1 | 3 | 0 |

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x^2 - 2x - 3)} = \frac{4}{1 - 2 - 3} = -1$$

f(x) es discontinua y es evitable en x = 1

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 3x^2 - x + 3} = \frac{-4}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 3x^2 - x + 3} = \frac{12}{0} = \infty$$

La función es discontinua inevitable.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x \leq 0 \\ |2 - x| & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x - 3} & \text{si } x \geq 2 \wedge x \neq 3 \end{cases}$$

Practicar!

<u>Ejercicio Nº 9</u>. Determinar los valores de c y d para los que las siguientes funciones sean continuas:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = -3 \\ \dfrac{9 - x^3}{4 - (x^3 + 7)^{1/2}} & \text{si } x < 3 \\ d & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Practicar!

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = -3 \\ cx + d & \text{si } -1 < x < 2 \\ -5x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

x = -1 x = 2

Si es continua debe verificarse que

1). $f(x_0) = R$

2). $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

3) $f(x_0) = L$

x = -1

f(-1) = 4 . (- 1) = - 4

L1 $\lim_{x \to -1^-} 4x = -4$

$-c + d = -4$

L1 $\lim_{x \to -1^+} (cx + d) = -c + d$

x = 2

f(2) = - 5 . x = - 5 . 2 = 10

L1 $\lim_{x \to 2^-} (cx + d) = 2c + d$

2 c + d = -10

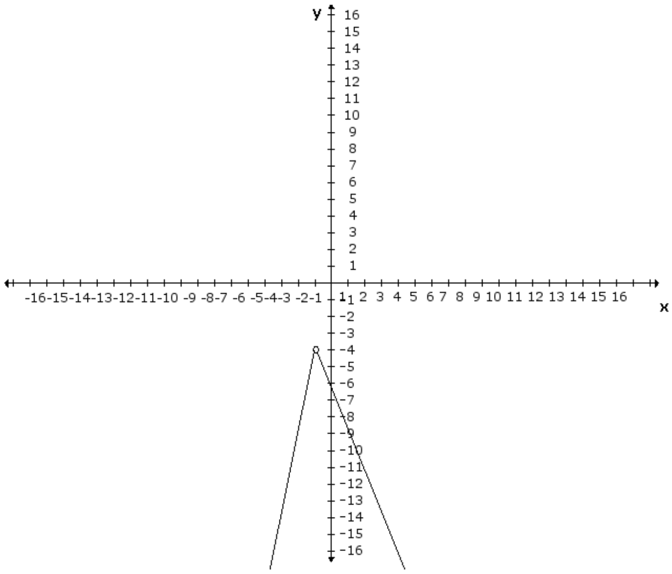
L1 $\lim_{x \to 2^+} (-5x) = -10$

Se hace un sistema de ecuaciones por tener 2 ecuaciones con 2 incógnitas:
Reducción por resto.

$$\begin{cases} -c + d = -4 \\ 2c + d = -10 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} -(-2) + d &= -4 \\ d &= -4 - 2 \\ d &= -6 \end{aligned}$$

$$-3c = 6$$
$$c = -2$$

Se encontró c y d por las leyes de la continuidad.

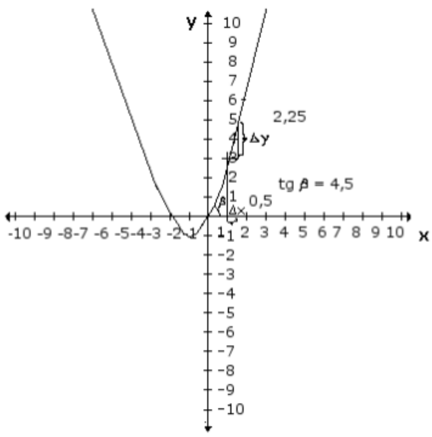

y
x

RESOLUCION PRACTICO Nº 2. LA DERIVADA Y SUS APLICACIONES

Ejercicio Nº 1.

Sabiendo que la función $f(x) = x^2 + 2x$ es contínua

a) Construya su gráfica.




b) Calcule el incremento $\Delta y$ de la función $f(x)$ cuando $x_0 = 1$ y $x_0 + \Delta x = 0{,}5$.

$y = f(x) = x^2 + 2x$

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)$

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - y$

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - x^2 - 2x$

$\Delta y = (x + \Delta x)(x + \Delta x) + 2(x + \Delta x) - x^2 - 2x$

$\Delta y = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x - x^2 - 2x$

$\Delta y = \cancel{x^2} + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 \cancel{+ 2x} + 2\Delta x \cancel{- x^2} \cancel{- 2x}$

$\Delta y = 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x$

$x = 1$

$\Delta x = 0,5$

$\Delta y = 2 \,.\, 1 \,.\, 0,5 + 0,5^2 + 2 \,.\, 0,5$

$\Delta y = 1 + 0,25 + 1 = 2,25$

c) Calcule el cociente incremental correspondiente para $x_0 = 1$ y $x_0 + \Delta x = 1,5$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\,(2x + \Delta x + 2)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (2x + \Delta x + 2)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (2 \,.\, 1 + 0,5 + 2) = 4,5$$

$\beta = 79º\ 47'\ 11''$

d) Calcule $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$. ¿Qué se obtiene?

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x + 2 = 2x + 2$$

e) Calcule la derivada de f(x) en $x_0 = 1$.

$y' = 2.\ 1 + 2 = 4 = p_T$

tg $\theta$

$\theta = 75º\ 57'\ 49''$

Ejercicio Nº 2. Determine las derivadas de cada una de las siguientes funciones, en los puntos indicados, utilizando la definición:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ $\qquad x_0 = \frac{1}{2}$ ; $\qquad x_1 = -1$

1

b) $f(x) = \frac{}{x}$ $\qquad x_0 = 1 \quad ; \quad x_1 = -2$

$y' = \frac{1}{x^2}$

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

$$\Delta y = \frac{x - (x + \Delta x)}{x\,(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{x - (x + \Delta x)}{x\,(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{x - x - \Delta x}{x\,(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{x - x - \Delta x}{x\,(x + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\cancel{\Delta x}}{x\,(x + \Delta x)\ \cancel{\Delta x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x\,(x + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x\,(x + \Delta x)} = \frac{-1}{x2}$$

$$y'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$$

$$y'(2) = \frac{-1}{-2^2} = \frac{-1}{4}$$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad x_0 = 0 \quad ; \quad x_1 = 2$

$$\mathbf{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\sqrt{\quad}$$

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{x+\Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\Delta y = \frac{x + \Delta x - x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)\cancel{\Delta x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$y'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ejercicio Nº 3.

Fórmulas de derivación:

PRESTAR ATENCION

- Derivada de una constante:

$y = k$ ; $y' = 0$

La derivada de una constante es cero.

- Derivada de una variable:

$y = x$ ; $y' = 1$

La derivada de una variable es uno.

- Derivada de una potencia:

$y = k \cdot x^n$ ; $y' = kn \cdot x^{n-1} \cdot x'$

La derivada de la potencia es el valor de la potencia multiplicado a la variable, disminuyendo en uno la potencia de ésta y se multiplica a la derivada de la variable.

- Derivada de una suma de funciones:

Derivada de una suma de funciones.

$y = u + v - w$ ; $y' = u' + v' - w'$

La derivada de una suma de funciones es derivar término a término cada una de esas funciones.

- Derivada del producto:

$y = u \cdot v$ donde u y v son funciones. ; $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

La derivada del producto de dos elementos es igual a la derivada del primer elemento, por el segundo sin derivar más el primero sin derivar por el segundo derivado.

- Derivada del cociente:

$$y = \frac{u}{v} \quad ; \quad y' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

La derivada del cociente es igual al primero derivado por el segundo sin derivar menos el primero sin derivar por el segundo derivado, todo sobre el segundo al cuadrado.

- Derivada de función de función:

$y = f(u)$ ; $u = f(x)$ ; $y' = f'(u) \cdot u'(x)$

La derivada de una función de función es, la función de afuera derivada con su argumento sin derivar por la función argumento derivado con su argumento sin derivar.

- Derivada de funciones trigonométricas:
- Derivada del seno:

$y = \text{sen } x$ ; $y' = \cos x$

La derivada del seno es el coseno.

- Derivada del seno de una función:

$y = \text{sen } u$ ; $y' = \cos u \cdot u'$

La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la función derivada.

- Derivada del coseno de una función:

$y = \cos u$ ; $y' = \text{sen } u \cdot u'$

La derivada del coseno de una función es el seno de la misma función por la función derivada.

- Derivada de la tangente de una función:

$y = \text{tg } u$ ; $y' = \sec^2 u \cdot u'$

La derivada de la tangente de una función es el secante cuadrado de la misma función por la función derivada.

- Derivada de la cotangente de una función.

$y = \text{cotg } u$ ; $y' = -\text{cosec}^2 u \cdot u'$

La derivada de la cotangente de la función es: menos cosecante cuadrado de la misma función por la función derivada.

- Derivada de la secante de una función

$y = \sec u$ ; $y' = \sec u \cdot tg\, u \cdot u'$

La derivada de la secante de una función, es la secante de la misma función por la tangente de la función por la función derivada.

- Derivada de la cosecante de una función

$y = cosec\, u$ ; $y' = -\cos u \cdot cotg\, u \cdot u'$

La derivada de la cosecante de la función es, menos coseno de la función por la cotangente de la función como está por la función derivada.

- Derivada de las funciones exponenciales:

$y = a^u$, $a \in R^+$, $u = f(x)$ ; $y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

La derivada de una función exponencial es la misma función exponencial por el logaritmo de la constante por la función derivada.

- Derivada del numero e elevado a una función

$y = e^u$ ; $y' = e^u \cdot u'$

La derivada del numero e elevado a una función, es igual a al número e elevado a una función por la función derivada.

- Derivada del número e elevado a una variable

$y = e^x$ ; $y' = e^x$

Este es el único caso en donde la derivada de una función devuelve lo mismo.

- Derivada de la función logarítmica

$y = \log_a u$ ; $u = f(x)$ ; $y' = \dfrac{u'}{u} \cdot \log_a e$

La derivada de la función logarítmica es igual al argumento derivado sobre el mismo argumento sin derivar por el logaritmo en base a del número e.

- Derivada de la función logarítmica neperiana

$y = \ln u$ , $u = f(x)$ ; $y' = \dfrac{u'}{u}$

La derivada de la función logarítmica neperiana es igual al argumento derivado sobre el argumento sin derivar.

- Derivada de la función logarítmica neperiana de una variable

$y = \ln x$ ; $y' = \dfrac{1}{x}$

La derivada de la función logarítmica neperiana con un argumento variable es igual a uno sobre el argumento sin derivar.

- <u>Derivadas de las funciones circulares inversas</u>:
- Derivada del arco seno de una función:

y = arc sen u , u = f(x) ; $y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - 4^2}}$.

La derivada del arco seno de una función es igual a la función derivada sobre la raíz de 1 menos 4 al cuadrado.

- Derivada del arco coseno de una función:

y = arc cos u , u = f(x) ; $y' = \dfrac{-u}{\sqrt{1 - 4^2}}$.

La derivada del arco coseno de una función es, menos la función sobre la raíz de 1 menos 4 al cuadrado.

- Derivada del arco tangente de una función;

y = arc tg u ; u = f(x) $y' = \dfrac{u'}{1 + 4^2}$

La derivada del arco tangente de una función es la función derivada sobre 1 más 4 al cuadrado.

a) $y = 7x^3 – 2x^2 + 5x + 1$

**$y' = 21\, x^2 – 4x + 5$**

b) $f(x) = (x^2 - x)^4$
**$f(x)' = 4(x^2 - x)^3$**

c) $g(x) = 7x^{1/3} – 2x^{-2} + ex + 1$
**$g'(x) = 7x^{-2/3} – 2x^{-3} + ex + 1$**

d) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} = 2x^{-3}$
**$f'(x) = -6x^{-4}$**

e) $h(x) = 7e^x – 2^x$
Resolver!

f) $y = \sqrt{4x^3 – 3x^2 + 4x + 1} = (4x^3 – 3x^2 + 4x + 1)^{1/2} =$

**$y' = \dfrac{1}{2}\,(4x^3 – 3x^2 + 4x + 1)^{-1/2} . (12x^2 - 6x + 4)$**

g) $f(x) = \dfrac{x^3 – 2}{x + 1} =$

$$= \mathbf{f'(x) = \frac{3x^2 (x + 1) - (x^3 - 2) \,.\, 1}{(x + 1)^2}}$$

h) $y = 3^{2x+1}$

$\mathbf{y' = 3^{2x+1} \ln 3 \,.\, 2}$

i)g(x) = sen x

**g'(x) = cos x**

j) $f(x) = \cos^4 x$

$\mathbf{f'(x) = (\cos x)^4 = 4 \,.\, \cos^3 x \,.\, (- \operatorname{sen} x) = - 4 \cos^3 x \,.\, \operatorname{sen} x}$

Aquí lo primero que se deriva es la potencia [$\cos^4 x = (\cos x)^4$ mientras que $\cos^4 x \neq \cos x^4$]

Si fuese el caso así: $y = \cos x^4$

$\mathbf{y' = - \operatorname{sen} x^2 (4x^3)}$

k) $g(x) = (\ln x + 1) \sqrt[3]{x^2 - x} = (\ln x + 1)\ (x^2 - x)^{1/3}$

$\mathbf{y' = \frac{1}{x}\ (x^2 - x)^{1/3} \,.}$

l) y = cotg x

y ' = $\mathbf{cosec^2\ x}$

m) $f(x) = x \operatorname{sen} x + \sqrt[3]{x^2} \,. = x \,.\, \operatorname{sen} x + x^{2/3}$

$\mathbf{f'(x) = \operatorname{sen} x + x \,.\, \cos x + \frac{2}{3}\ x^{-1/3}}$

n) $y = 3 \operatorname{sen} (5x^2 + 1)$

$\mathbf{y' = \cos (5x^2 + 1) \,.\, 10x}$

o) $y = \operatorname{sen}^2 x^3$

$\mathbf{y' = 2 \,.\, \operatorname{sen} x^3 \,.\, \cos x^3 \,.\, 3x^2}$

p) y = sen (cos x)

**y' = cos . (cos x) . (- sen x)**

q) $y = tg^2\ x$

$\mathbf{y' = 2\ tg\ x \,.\, sec^2\ x}$

r) $y = x^2 + e^{\operatorname{sen} x}$

$\mathbf{y' = 2x + e^{\operatorname{sen} x} + \cos x}$

s) $y = 2^{\ tg\ x}$

**$y' = 2^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 2 \cdot \sec^2 x$**

t) $y = \ln^2 (x^2 + 2)$

**$$y' = 2 \ln (x^2 + 2) \cdot \frac{2x}{x^2 + 2}$$**

u) $y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x} \quad = \quad \operatorname{arc\,sen} x^{1/2}$

**$$y' = \frac{\frac{1}{2} \; x^{-1/2}}{1 - (x^{1/2})^2}$$**

v) $y = \arccos (1 + x^2)$

**$$y' = \frac{-\,2x}{1 - (1 + x^2)^2}$$**

<u>Ejercicio Nº 4</u>.

Partiendo de la continuidad de la función, si es derivable, entonces es contínua.

Si es continua entonces, no siempre es derivable.

Además de probar la continuidad:

1). $f(x_0) = R$
2). $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$
3) $f(x_0) = L$

Hay que probar la derivabilidad en un punto cualquiera por izquierda y derecha.

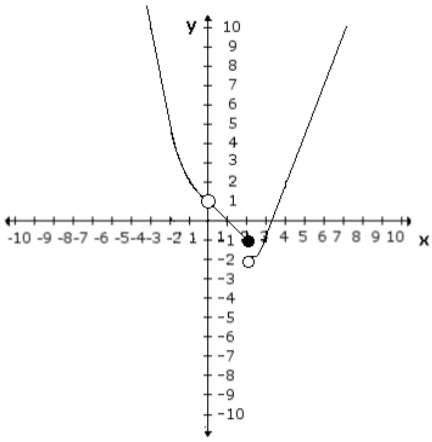
$$D^- \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$D^+ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ si } x < 0 \\ -\,x + 1, \text{ si } 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 4x + 2, \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

| x | $x^2 + 1$, si $x < 0$ <br> $-\,x + 1$, si $0 \le x \le 2$ <br> $x^2 - 4x + 2$, si $x > 2$ |
|---|---|
| -3 <br> -2 | $(-3)^2 + 1 = 10$ <br> $(-2)^2 + 1 = 5$ |

| | |
|---|---|
| -1 | $(-1)^2 + 1 = 2$ |
| 0 | $-0 + 1 = 1$ |
| 1 | $-1 + 1 = 0$ |
| 2 | $-2 + 1 = -1$ |
| 3 | $3^2 - 4 \,.\, 3 + 2 = -1$ |
| 4 | $4^2 - 4 \,.\, 4 + 2 = 2$ |




Para el punto 0:

$$D^- \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + 1 - 0^2 - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$D^- \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x + 1 + 0^2 - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{-x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0^+} -1 = -1$$

Para el punto 2:

$$D^- \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 0} = \frac{-x + 1 + 2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\cancel{-x + 2}}{\cancel{x - 2}} = \lim_{x \to 2^-} - 1 = -1$$

$$D^- \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 0} = \frac{x^2 - 4x + 2 - 2^2 - 4.2 + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\cancel{-x}}{\cancel{-x}} = \frac{x^2 - 4x + 2 + 1}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = \frac{2^2 - 4.2 + 3}{2 - 2} = \frac{4 - 8 + 3}{0} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

<u>Ejercicio N° 5</u>. Calcule las derivadas de las siguientes funciones, aplicando la derivación logarítmica.

u —— f(x)

y = u    v

$\ln y = \ln u^{v}$

$\ln y = v \ln u$

$$\frac{y'}{y} = v' \,.\, \ln u + v \,\frac{u'}{u}$$

$$y' = \left[ v' \,.\, \ln u + v \,\frac{u'}{u} \right] u$$

$$y' = \left[ v' \,.\, \ln u + v \,\frac{u'}{u} \right] u^{v}$$

$$y' = v' \,.\, \ln u \;.\; uv + v \,.\, u \,.\, \frac{u'}{u^{v}}$$

$$\boxed{y' = v' \,.\, \ln u \;.\; u^{v} + v \,.\, u' \,.\, u^{v-1}}$$

a) $y = x x$

b) $y = (\text{sen } x)^{\text{sen } x}$

$\ln \; y = \text{sen } x \,.\, \ln (\text{sen } x)$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \,.\, \ln (\text{sen } x) + \cancel{\text{sen } x} \,.\, \frac{\cos x}{\textbf{sen x}}$$

$y' = [\cos x \,.\, \ln (\text{sen } x) + \cos x] .\ \text{sen } x^{\text{ sen } x}$

c) $y = \sqrt[i]{x.}^{\;x}$

d) $y = (\ln x)^{x}$

$\ln y = x \,.\, \ln \; (\ln x)^{x}$

$$\frac{y'}{y} = 1 .\ \ln (\ln x) + \cancel{x} \,.\, \frac{1/\cancel{x}}{\ln x}$$

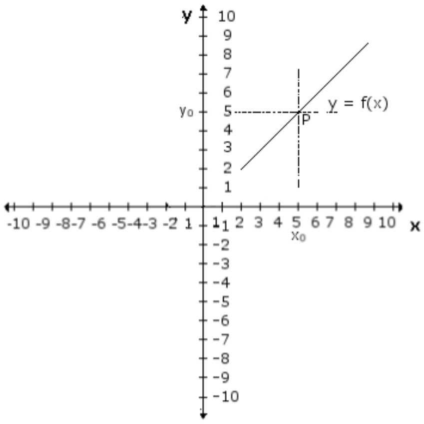
$$y' = \left[ \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right] .\ y$$

$$\mathbf{y' = \left[ \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right] \;.\; (\ln x)^{x}}$$

<u>Ejercicio N° 6</u>.

Por la regla de la geometría plana, por un punto pasan 4 recta.

Ecuación de la recta $y - y_0 = m\,(x - x_0)$



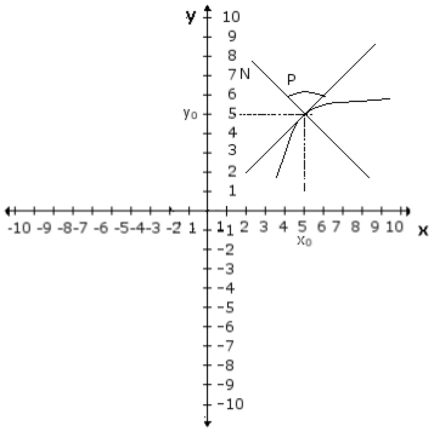

Ecuación de la recta tangente: $y - y_0 = m_T\,(x - x_0)$

$m_T = y'_{(x0)}$

Lo cual reemplazamos en la fórmula:

$y - y_0 = y'_{(x0)}\,(x - x_0)$

Esta es la expresión que me va a permitir calcular la recta tangente en cualquier punto.




La recta normal N es una recta perpendicular a la recta tangente en el punto de la tangencia

Recta Normal:

$y - y_0 = M_N\,(x - x_0)$ ⇨ La ecuación de la recta es:

$y - y_0 = \frac{1}{g'(x_0)}\,(x - x_0)$ $\quad T \perp N \Leftrightarrow m_N = \frac{-1}{m_T} = \frac{1}{y'_{(x0)}}$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \frac{x+1}{c}$ en el punto de abscisa x = 0

$y = \frac{x+1}{x^2+1}$ ; x = 0

0 + 1 P(0, 1), punto de tangencia en donde va a pasar la pendiente.

$y_0 = \frac{\phantom{0}}{0^2 + 1} = 1$

$m_T = y'_{(x0)}$

$$y' = \frac{x^2 + 1 - (x + 1)\ .\ 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Una vez que encontré esa derivada hay que calcular esa expresión en el punto dado.

$y'_{(0)} = 1$

La ecuación de la recta tangente es la siguiente:

$y - y_0 = M_N (x - x_0)$

$y - 1 = 1\,x$

$y = x + 1$

b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de ecuación $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ que son paralelas a la recta de ecuación $y = \frac{-1}{2} x + \frac{1}{2}$

$y = \frac{x + 1}{x - 1}$ **r:** $y = \frac{-1}{2} x + \frac{1}{2}$

$T // r \Rightarrow m_T = m_r$

Si la recta tangente es paralela a la recta r, tanto la recta tangente como la recta r tienen la misma pendiente.

$$y'_{(x0)} = \frac{-1}{2}$$

$$y' = \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}$$ **Derivada de la función principal**

$$\frac{-2}{(x - 1)^2} = \frac{1}{2}$$

$4 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\ .\ 1\ .\ 3}}{2\ .\ 1} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Para la abscisa:

$P/x_0 = 3$

$y_0 = \frac{3 + 1}{\phantom{0}} = 2$ $P_1\ (3, 2)$

3 - 1

$P/x_0 = -1$

$y_0 = \frac{-1+1}{-1-1} = 0$ $P_1\ (-1, 0)$

$y - y_0 = m_T\,(x - x_0)$

$P_1)\ y - 2 = \frac{-1}{2}\,(x - 3)$

$y = \frac{-1}{2}\,x + \frac{3}{2} + 2$

$y = \frac{-1}{2}\,x + \frac{7}{2}$

$P_2)\ y - y_0 = m_T\,(x - x_0)$

$y - 0 = \frac{-1}{2}\,x\,(x + 1)$

$y = \frac{-1}{2}\,x - \frac{1}{2}$

c) Determine la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2$, en el punto de abscisa $x = 1$.

Si $y = x^3 - 3x^2 + 2$ ; $x_0 = 1$

Ecuación de la recta normal:

$y - y_0 = \frac{1}{g'(x_0)}\,(x - x_0)$

Reemplazo por $x_0 = 1$

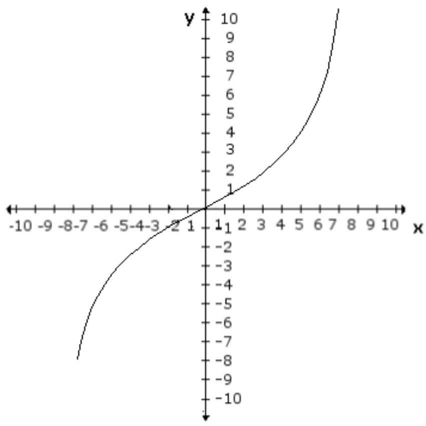
$y_0 = 1^3 - 3\,.\,1^2 + 2 = 0$ P (1, 0)

$y' - 0 = \frac{1}{-3}\,(x - 1)$

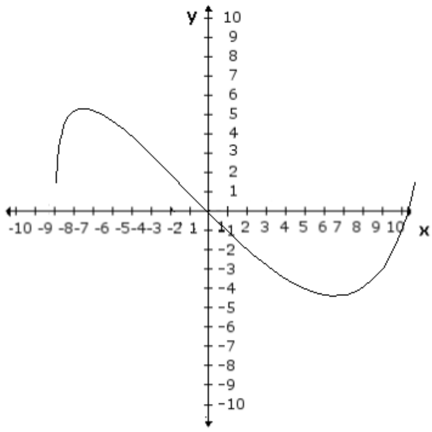
$$\boxed{y = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3}}$$

Ejercicio N° 7.

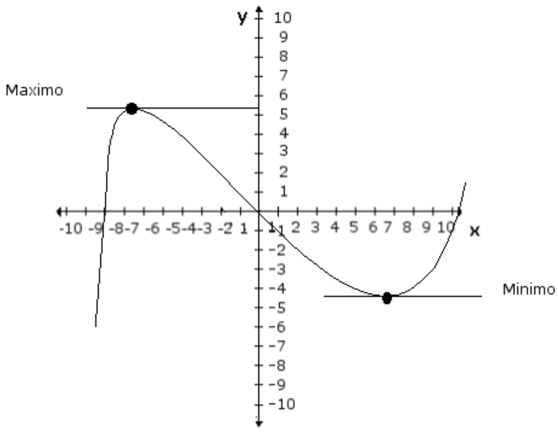
Una función polinómica es una S vertical, solo si tiene una $x^3$ + constante.




Y si ya viene acompañada con $x^2 + x$ o sea $x^3 + x^2 + x + C$, ya es una S horizontal.



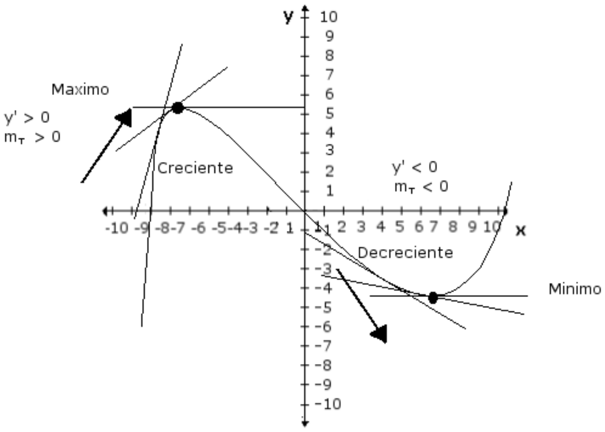

Existen formulas que permiten una adecuada forma de dibujar las funciones polinómicas y que nos ahorran muchos problemas, estas son las de los puntos críticos, máximos y mínimos, intervalos y concavidades.




Puntos críticos:
Condición necesaria: y' = 0
Que la derivada primera sea igual a 0.
(En esos puntos la pendiente es igual a 0)
Aunque se anule la primera derivada, no me garantiza que existan máximos y mínimos.

Condición suficiente:
Criterio de la derivada primera
Criterio de la derivada segunda

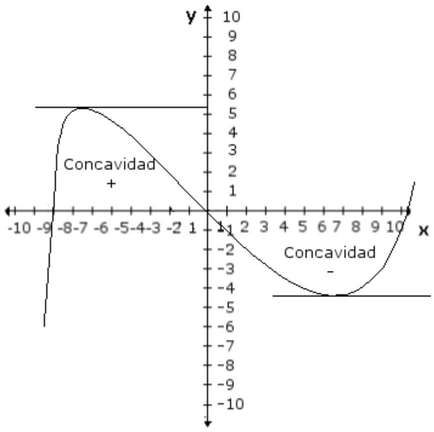
El criterio de la primera derivada me dice que la derivada en ese punto debe ser igual a 0.
El criterio de la segunda derivada me dice que:
$y''_{(x0)} > 0$ (+) O sea es un número positivo $\Rightarrow \exists$ un mínimo
$y''_{(x0)} < 0$ (-) O sea es un número negativo $\Rightarrow \exists$ un máximo
Con respecto a las concavidades, y con respecto a la derivada primera de la función completa:
Si $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$ f(x) sea creciente.
Si $f'(x) < 0 \Leftrightarrow$ f(x) sea decreciente.




Si f(x) es creciente a izquierda de $x_0$ } es 1 Máximo
Si f(x) es decreciente a derecha de $x_0$ .

Si f(x) es decreciente a izquierda de $x_0$ } es 1 Mínimo
Si f(x) es creciente a derecha de $x_0$ .

Puntos de inflexión
Concavidades:




El punto de inflexión es el punto de concavidad nula, o es el que marca el cambio de signo en la definición de la concavidad.

Concavidad positiva: y'' > 0
Concavidad negativa: y'' < 0

Condición necesaria: y'' = 0.
Condición suficiente:
Debe existir una derivada superior a la segunda en la abscisa en el posible punto de inflexión distinto de 0. Ejemplo $y''' \neq 0$.

Ejercicios de cada problema:

a) Máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión.
b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c) Intervalos de concavidad positiva y negativa.
d) Construya un gráfico y represente todo lo trabajado en los puntos anteriores.

El punto

i) $y = x^4 - 2x^2$

ii) $y = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15$

Criterio de la primer derivada.
**La primer derivada se iguala a 0.**
Condición necesaria y ' = 0.
Derivada:
$y' = 6x^2 - 48x + 72$
Dividimos cada miembro por 6 para arreglar la expresión:

$$y' = \frac{6x^2}{6} - \frac{48x}{6} + \frac{72}{6}$$

$$y' = \frac{6x^2}{\cancel{6}} - \frac{48x}{\cancel{6}} + \frac{72}{\cancel{6}}$$

$$y' = x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 + 4}{2} \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$$

Se reemplazan los valores de $x_1$ y $x_2$ en la función principal:
$p/x_1 = 2 \cdot 6^3 - 24 \cdot 6^2 + 72 \cdot 6 - 15 = -15$
$p/x_2 = 2 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2^2 + 72 \cdot 2 - 15 = 49$

$P_1 (6; -15)$ $P_2 (2; 49)$

Criterio de la segunda derivada
$y' = 6x^2 - 48x + 72$
$y'' = 12x - 48$

Reemplazamos $x_1$ y $x_2$ en la segunda derivada:
y'' ($x_1$ = 6) = 12. 6 – 48 = 72 – 48 = 24 > 0 (+) ⇨ $P_1$ (6; -15) es un mínimo.
y'' ($x_2$ = 2) = 12. 2 – 48 = 24 – 48 = -24 < 0 (-) ⇨ $P_1$ (2; 49) es un máximo.
El crecimiento o decrecimiento tiene relación con la pr**imera derivada.**

| x < 2 | x = 2 | 2 < x < 6 | x = 6 | x > 6 |
|---|---|---|---|---|
| x = 0<br><br>y' (0)= 6 . $0^2$ - 48 . 0 + 72 = 72<br>f'(x) > 0 (+)<br>f'(x) es creciente | -----------<br>-----------<br>-----------<br>-----------<br>-----------<br>----------- | x = 3<br><br>y' (3)= 6 . $3^2$ - 48 . 3 + 72 = - 18<br>f'(x) < 0 (-)<br>f'(x) es decreciente | ----------<br>----------<br>----------<br>----------<br>----------<br>---------- | x = 7<br><br>y' (7)= 6 . $7^2$ - 48 . 7 + 72 = 30<br>f'(x) > 0 (+)<br>f'(x) es creciente |

Intervalos de crecimiento y decrecimiento:
f(x) es creciente ∀ x ∈ {(- ∞; 2) ∪ (6; ∞)}
f(x) es decreciente ∀ x ∈ (2; 6)

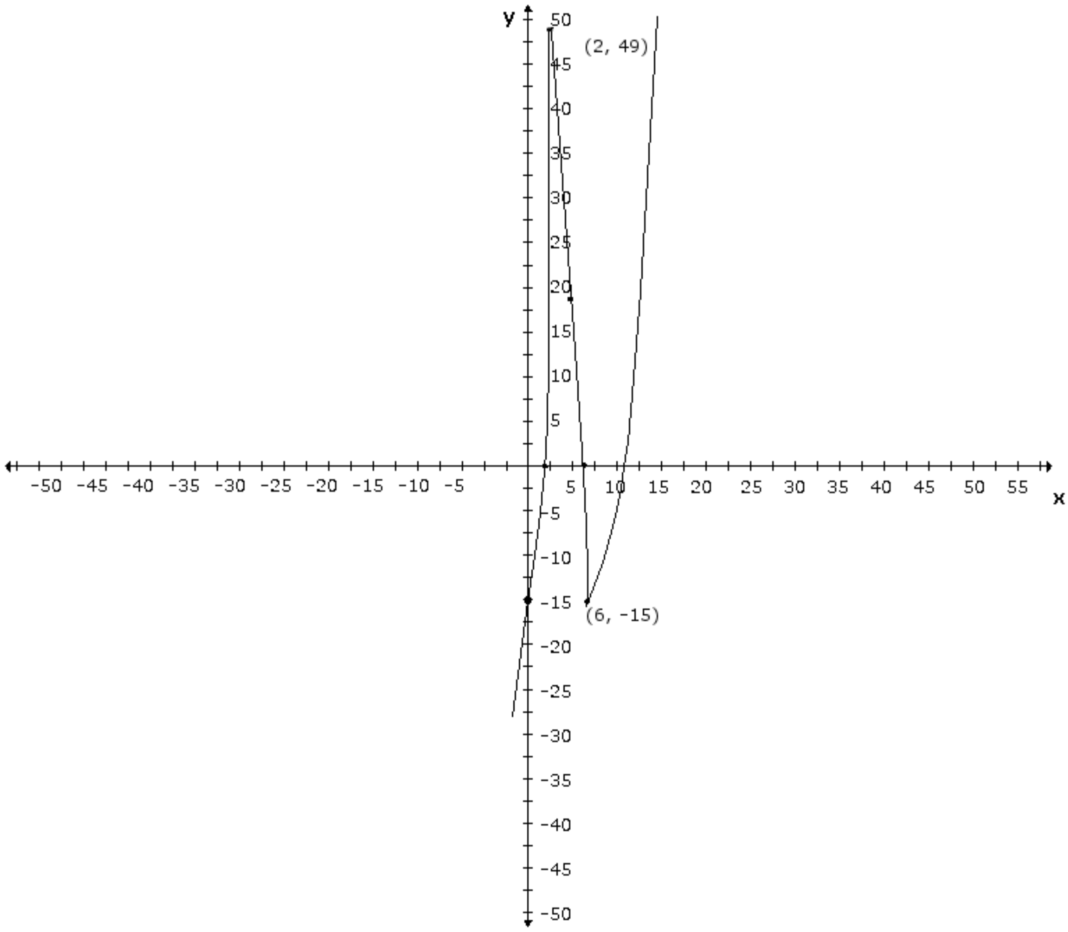
Máximos y mínimos:
A la izquierda de 2 ⇨ f(x) crece
A la derecha de 2 ⇨ f(x) decrece
} x = 2 un Máximo

A la izquierda de 6 ⇨ f(x) decrece
A la derecha de 6 ⇨ f(x) crece
} x = 1 un Mínimo

Intervalos de concavidad positiva y negativa:
Punto de inflexión.
**Se observa en la gráfica:**

Reemplazamos $x_1$ en la función principal.
$y_1$ = 2 . $4^{3-}$ 24 . $4^2$ + 72 . 4 – 15 = 128 – 384 + 288 – 15 = 17
Condición suficiente:
**La tercera derivada debe dar distinto de 0.**
y''' ≠ 0
y''' = 12 ≠ 0
∴ $P_I$(4, 17)
Concavidad + :
y'' > 0
12x – 48 > 0
$x > \frac{48}{12} = \quad x > 4$
∀ x ∈ (4; ∞) ⇨ La f(x) es cóncava positiva.
Concavidad - :
y'' < 0
12x – 48 < 0
$x < \frac{48}{12} = \quad x < 4$
∀ x ∈ (-∞; 4) ⇨ La f(x) es cóncava negativa.

Gráfica:




iii) $f(x) = \text{sen } 2x$ en $[0; 2\pi]$

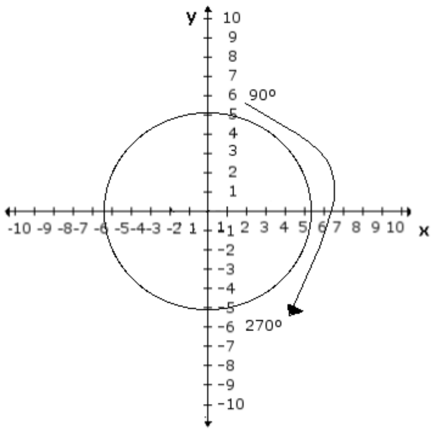
$y' = f'(x) = 2 \cos 2x = 0$

$\cos 2x = 0$

$$2x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \; k \in Z_I$$

Esto significa que todos los k van a ser impares.

$k_I \, \pi_2$ ; $k \in Z$




$$2x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \; k \in Z_I$$

$$x = k \cdot \frac{\pi}{4} \;,\; k \in \mathbb{Z}$$

Hay que dar valores representativos al problema.

k = 1 $\quad x = \frac{\pi}{4}$

k = 3 $\quad x = \frac{3}{4}\pi$

k = 5 $\quad x = \frac{5}{4}\pi$

k = 7 $\quad x = \frac{7}{4}\pi$

~~k = 9~~ $\quad \cancel{x = \frac{9}{4}\pi}$

(Como 9/4 pasa del valor 2π que tenía como restricción el dominio del problema, se ha eliminado esta ultima operación)

Criterio de la primer derivada.

**La primer derivada se iguala a 0.**

Condición necesaria y ' = 0.

Derivada:

$y' = 2 \cos 2x$

Se despeja de tal forma que queda:

$\cos 2x = 0$

$$2x = k \cdot \frac{\pi}{2} \;,\; k \in \mathbb{Z}$$

Y ahora tenemos cuatro puntos que reemplazar por las operaciones anteriores.

Se reemplazan los valores de $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ y $x_4$ en la función principal:

p/$x_1$ = $\operatorname{sen} 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1 \qquad P_1 = \left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$

p/$x_2$ = $\operatorname{sen} 2 \cdot \frac{3}{4}\pi = -1 \qquad P_2 = \left(\frac{3}{4}\pi,\ -1\right)$

p/$x_3$ = $\operatorname{sen} 2 \cdot \frac{5}{4}\pi = 1 \qquad P_3 = \left(\frac{5}{4}\pi,\ 1\right)$

p/$x_4$ = $\operatorname{sen} 2 \cdot \frac{7}{4}\pi = -1 \qquad P_4 = \left(\frac{7}{4}\pi,\ -1\right)$

Criterio de la segunda derivada

$y' = 2 \cos 2x$

$y'' = -4 \operatorname{sen} 2x$

Reemplazamos $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ y $x_4$ en la segunda derivada:

$y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cdot \operatorname{sen} 2 \cdot \frac{\pi}{4} = -4 < 0\ (-) \Rightarrow \quad P_1 = \left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$ es un máximo.

$y''\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -4 \cdot \operatorname{sen} 2 \cdot \frac{3}{4}\pi = 4 > 0\ (+) \Rightarrow \quad P_2 = \left(\frac{3}{4}\pi,\ -1\right)$ es un mínimo.

$y''\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -4 \cdot \operatorname{sen} 2 \cdot \frac{5}{4}\pi = -4 < 0\ (-) \Rightarrow \quad P_3 = \left(\frac{5}{4}\pi,\ 1\right)$ es un máximo.

$y''\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -4 \cdot \operatorname{sen} 2 \cdot \frac{7}{4}\pi = 4 > 0\ (+) \Rightarrow \quad P_4 = \left(\frac{7}{4}\pi,\ -1\right)$ es un mínimo.

El crecimiento o decrecimiento tiene relación con la pr**imera derivada.**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x < \frac{\pi}{4}$ | $x = \frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ | $x = \frac{3}{4}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi < x < \frac{5}{4}\pi$ | $x = \frac{5}{4}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$ | $x = \frac{7}{4}\pi$ | $x > \frac{7}{4}\pi$ |
| Creciente | ----------- | Decreciente | ----------- | Creciente | ----------- | Decreciente | ----------- | Creciente |

Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

f(x) es creciente $\forall\ x \in \{(0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3}{4}\pi ; \frac{5}{4}\pi) \cup (\frac{7}{4}\pi; 2\pi)\}$

f(x) es decreciente $\forall\ x \in \{(\frac{\pi}{4} ; \frac{3}{4}\pi) \cup (\frac{5}{4}\pi ; \frac{7}{4}\pi)\}$

Máximos y mínimos:

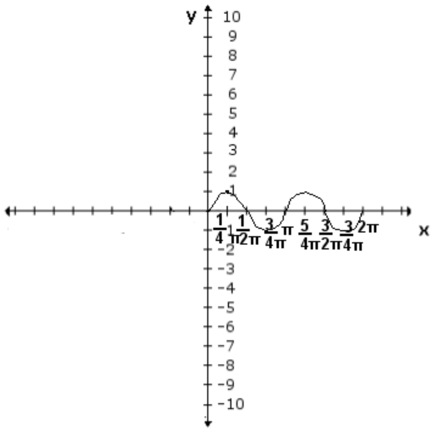
$$\left.\begin{array}{l}\text{A la izquierda de } \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{f(x) crece}\\ \text{A la derecha de } \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{f(x) decrece}\end{array}\right\} x = \frac{\pi}{4} \text{ un Máximo}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{A la izquierda de } \frac{3}{4}\pi \Rightarrow \text{f(x) decrece}\\ \text{A la derecha de } \frac{3}{4}\pi \Rightarrow \text{f(x) crece}\end{array}\right\} x = \frac{3}{4}\pi \text{ un Mínimo}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{A la izquierda de } \frac{5}{4}\pi \Rightarrow \text{f(x) crece}\\ \text{A la derecha de } \frac{5}{4}\pi \Rightarrow \text{f(x) decrece}\end{array}\right\} x = \frac{5}{4}\pi \text{ un Máximo}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{A la izquierda de } \frac{7}{4}\pi \Rightarrow \text{f(x) decrece}\\ \text{A la derecha de } \frac{7}{4}\pi \Rightarrow \text{f(x) crece}\end{array}\right\} x = \frac{7}{4}\pi \text{ un Mínimo}$$

Intervalos de concavidad positiva y negativa:
Punto de inflexión.
**Se observa de la gráfica:**




Puntos de inflexión: $(0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3}{2}\pi; 2\pi)$

Condición suficiente:

**La tercera derivada debe dar distinto de 0.**

$y''' \neq 0$

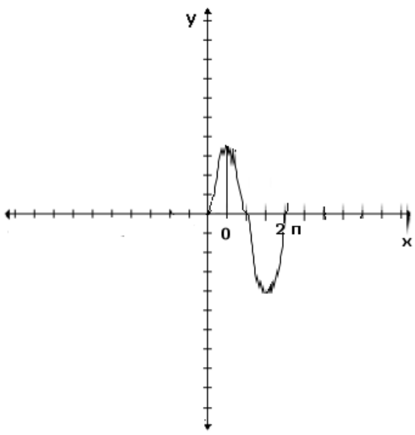
$y''' = -8 \cdot \cos(2x) \neq 0$

Concavidad positiva:

$\forall\ x \in \{(\frac{\pi}{2}; \pi) \cup (\frac{3}{2}\pi; 2\pi\}$

Concavidad negativa:

$\forall\ x \in \{(0; \frac{\pi}{2}) \cup (\pi; \frac{3}{2}\pi\}$




Estudio de la función sinusoidal

y = A sen (Bx + C)

Acá A vale 1 porque tiene los puntos en 1 y -1 y es la amplitud.

B es la frecuencia de la sinusoide, acá es B = 2, por eso tiene dos sinusoides en el intervalo [0; 2π ].

C es la constante de fase en donde comienza la onda pero con signo cambiado.
Tiene que ver con la serie de Fourier.

iv) $y = x^3 \cdot (x + 2)^2$
Resolver!

Ejercicio N° 8.
a) Determine a y b para que la función $f(x) = x^2 + ax + b$ tenga un mínimo en el punto (3; -1)

$f(x) = x^2 + ax + b$
$f'(x) = 2x + a$
Si $x = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$.
$2 \cdot 3 + a = 0$
$a = -6$

$f(x) = x^2 + ax + b$
Para que se dé en el punto que se requiere, la x vale 3 y la función me tiene que dar -1.
$f(x) = 3^2 - 6 \cdot 3 + b = -1$
$9 - 18 + b = -1$
$b = -8$

$$\boxed{f(x) = x^2 - 6x + 8}$$

b) Determine a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo local en el punto (-1;3) y un punto de inflexión en (0;1)

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
Si $x = -1 \Rightarrow f'(x) = 0$
$3(-1)^2 + 2 \cdot a \cdot (-1) + b = 0$
$2a + b = -3$
$b = -3$

$f''(x) = 6x + 2a$
Si $x = 0 \Rightarrow f''(x) = 0$
$6 \cdot 0 + 2 \cdot a$
$a = 0$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + c$
$f(0) = 1 = c$

$$\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 1}$$

Ejercicio N° 9. Halle dos números cuya suma sea 20 sabiendo que el producto es máximo
Resolver!

Regla de L'Hopital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación } \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}} = \frac{\dfrac{1}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

Ambas derivaciones se hacen independientemente.

Ejercicio N° 10. Verifique los siguientes límites:

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\text{sen } x)'}{(x)'} = 1$$

$$\mathbf{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen } x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

Volvemos a derivar...

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{6x} = \frac{0}{0}$$

Volvemos a derivar...

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\text{sen } x)'}{(6x)'} = \frac{0}{0}$$

$$\mathbf{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}}$$

c) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x} = 1$$

$$\frac{1}{1 + x}$$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\overline{\phantom{xx}}\ \dfrac{1}{\phantom{x}}}{\ln x \ + x \,.\, x} =$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{1}{1+x}}{\ln x \ + \ 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left( \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right) = \dfrac{1}{2}$

Resolver!

e) $\lim\limits_{x \to 0} (\sec x \,.\, \operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} x) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{\cos x} \,.\, \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(\operatorname{sen} x \,.\, \cos x\,)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x^2 - \operatorname{sen} x^2} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \ (\ln x \,.\, \operatorname{tg} x) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{tg}^2 x}{x \sec^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x \sec^2 x} = \frac{0}{1} = 0$$

g) $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$

Por el teorema de L'Hopital las indeterminaciones $0^0$ ,$0^\infty$, $\infty^0$, $\infty^\infty$ , se resulven de la misma forma:

$\lim\limits_{x \to 0} x^x = 0^0$

$y = x^x$

$\ln\ y = \ln x^x$

$\ln\ y = x \,.\, \ln x$

$y = e^{\,x \,.\, \ln x}$

$$e^{\lim\limits_{x \to 0} x \,.\, \ln x} =$$

$$e^{\lim\limits_{x \to 0} (x \,.\, \ln x)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0$$

h) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x^{\cos x} = 1$

$\cos \pi/2^{\cos \pi/2} = 0^0$

Por el teorema de L'Hopital las indeterminaciones $0^0$ ,$0^\infty$, $\infty^0$, $\infty^\infty$ , se resulven de la misma forma:

$y = \cos x^{\cos x}$

$\ln y = \ln (\cos x)^{\cos x}$

$\ln y = \cos x \,.\, \ln (\cos x)$

$y = e^{\cos x \,.\, \ln (\cos x)}$

$\lim\limits_{x \to \pi/2} e^{\cos x \,.\, \ln (\cos x)} =$

$$e^{\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x \,.\, \ln (\cos x)} =$$

$$e^{\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\ln (\cos x)}{\frac{1}{\cos x}}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{-(-\operatorname{sen} x)}} =$$

$\overline{\cos x}$

$$e^{\lim\limits_{x \to \pi/2} - \cos x} = -\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$e^0 = 1$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^4} = 0$

Resolver!

j) $\lim\limits_{x \to 0} [(x - \text{sen } x) \ln x] = 0$

Resolver!

Ejercicio Nº 11. Calcule el polinomio de Taylor o Mc – Laurin según corresponda en los siguientes casos.

Polinomio de Taylor:

$a = x_0$

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + T_n$$

$T_n$ = Término complementario del polinomio de Taylor.

La suma de los términos que se desechó al contar los términos, es un error que se comete en el cáculo.

a) $f(x) = \cos x$, $n = 7$, $c = \frac{\pi}{2}$.

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f^{i}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{1!} + f^{ii}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + f^{iii}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + f^{iv}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} + f^{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + f^{vi}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!}$$

$$f^{vii}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7}{7!} + T_n$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$f^{i}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen } x = -\text{sen } \frac{\pi}{2} = -1$

$f^{ii}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x = -\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$f^{iii}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

$f^{iv}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$f^{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen } x = -\text{sen } \frac{\pi}{2} = -1$

$f^{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen } x = -\text{sen } \frac{\pi}{2} = -1$

$f^{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x = -\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$f^{vi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } x = -\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

Conclusión:
Las derivadas de orden par me dan 0, y los de orden impar me alterna entre 1 y -1.

$$f(x) = -1 \,.\, \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^7}{7!} + T_n$$

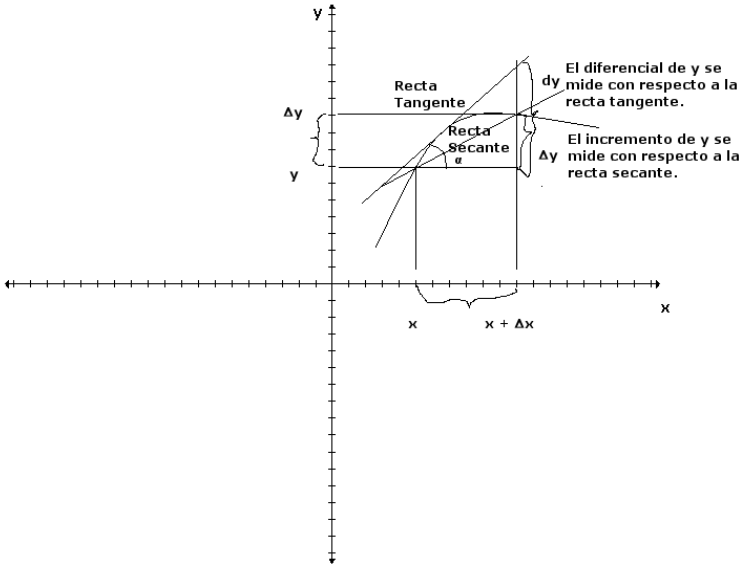
Lo que hace taylor es transformar una expresión no polinomica en polinómica.

b) $f(x) = e^{-x}$, $n = 4$, $c = 0$

$f(0) = e^0 = 1$
$f^{i}(0) = -e^{-x} = -e^0 = 1$
$f^{ii}(0) = e^{-x} = e^0 = 1$
$f^{iii}(0) = -e^{-x} = -e^0 = -1$
$f^{iv}(0) = e^{-x} = e^0 = 1$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{1 \,.\, x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + T_n$$

Ejercicio Nº 12. Halle la diferencial de




$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y\,' = PT = tg\ \alpha$$

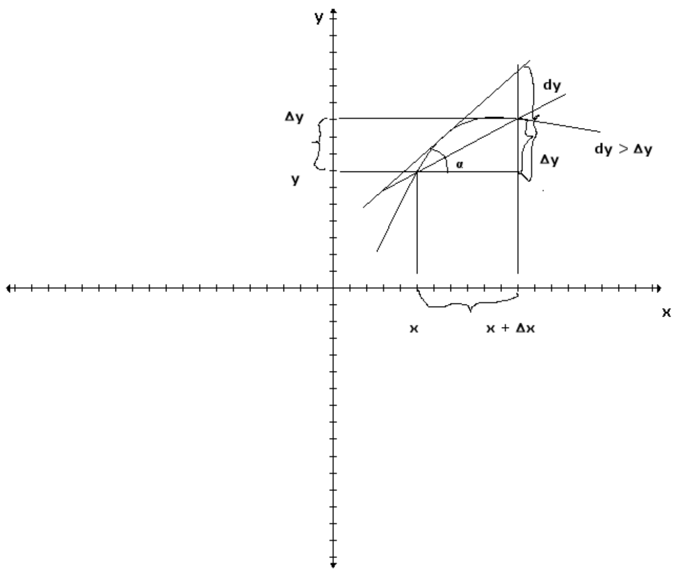
$$tg\ \alpha = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta x} = y'$$

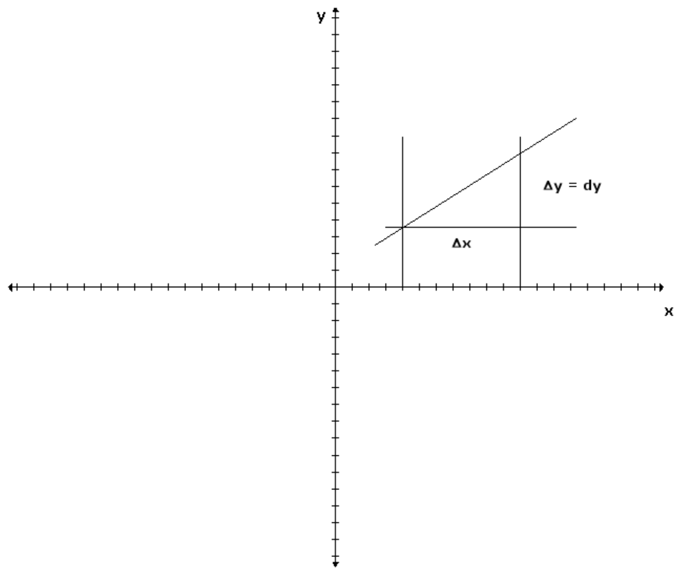
| |
|---|
| $dy = y'\,dx$ |
| $y' = \dfrac{dy}{dx}$ |

$\overrightarrow{AB} = y'\ .\ \Delta x$

$dy = y'\ .\ \Delta x$

$\Delta x = dx$






a) $y = x^3 - 2x$

$dy = y' \,.\, dx$

$dy = (3x^2 - 2)\, dx$

b) $y = \ln (x + 1)$

$dy = \dfrac{1}{x + 1} \,.\, dx$

Ejercicio Nº 13. Aproxime mediante diferenciales :

a) $\sqrt[3]{124}$

Hay que definir una función similar al del ejercicio de la siguiente forma:

$y = \sqrt[3]{x}$ .

$y + dy = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \,.\, dx$

$y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$dy = \dfrac{1}{2\, x^{-2/3}}$

x = 123

Es el número que tiene raíz exacta y es más próxima a 124.

La diferencial es la diferencia entre el valor dado y el valor tomado.

$dx = 124 - 125 = -1$

Reemplazo los valores y me queda:

$$y + dy = \sqrt[3]{125} + \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} \cdot (-1)$$

$$= 5 - \frac{1}{75} = 4{,}986...$$

b) sen 60º 1'

Resolver!

c) ln 0,9

x = 1

dx = 0,9 – 1 = - 0,1

y = ln x

$$y + dy = \ln x + \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln 0.9 = \ln 1 + \frac{1}{1}\,(-0{,}1) = -0{,}1$$

d) $\sqrt{101}$

RESOLUCION PRACTICO Nº 3. INTEGRALES

Ejercicio Nº1. Calcule las siguientes integrales inmediatas:

Una integral es:

$$\int f(x)\, dx = F(x)$$

Resolver una integral es encontrar una primitiva, una función que está debajo del signo de la integral, que es su dervida.
Como resultado obtengo infinitas primitivas sumadas a una constante.

$$\int \text{Cos } x\, dx = \text{sen } x + C$$

$$= \text{sen } x + 4$$

= sen x - 2
= sen x + cos a
= sen x - $\frac{1}{4}$
= sen x + ...
= sen x + C con C = $\infty$

Las integrales inmediatas son aquellas integrales que no tienen la necesidad de métodos extras a las derivaciones.

Propiedades de la integral:

1) $\int k\ f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx,\ k \in$ 

Toda constante puede salir fuera de la integral.

2) $\int dx = x + C$

3) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

a) $\int x^4\,dx$

$$\frac{\mathbf{x5}}{\mathbf{5}} \mathbf{+ C}$$

b) $\int \frac{1}{x^3}$

$$\int x^{-3}\,dx = \frac{\mathbf{x^{-2}}}{\mathbf{-2}} \mathbf{+ C}$$

$$\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2\,x^2}} \mathbf{+ C}$$

c) $\int 5x^6\,dx$

$$5\int x^6\,dx = 5\,.\,\frac{x^7}{\cancel{7}\,.\,\cancel{7}} + C \quad = \mathbf{5x^7 + C}$$

d) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

Resolver!

$\int \frac{1}{\ }$

e) x dx

Resolver!

f) $4\int \frac{3}{\text{sen } x}\, dx$

Resolver!

g) $\int 2 \sec^2 x \, dx$

Resolver!

Ejercicio Nº2. Halle las siguientes integrales por el método de descomposición:
La integral es distributiva en la resta y la suma.

$$\int (u + v - w)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx - \int w\, dx$$

Porque son derivadas bajo el signo integral.

a) $\int \left( \frac{1}{x} + 2e^x - \frac{3}{x^2} \right) dx$

$= \int \frac{1}{x}\, dx + 2\int e^x\, dx + 3\int x^{-2}\, dx =$

$= \ln x + 2\, e^x - 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C =$

$$\mathbf{= - \ln x + 2\, e^x + \frac{3}{x} + C}$$

b) $\int \left( \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$

$\int \frac{3}{x^{1/2}}\, dx - \int \frac{x \cdot x^{1/2}}{4}\, dx =$

Hay que llevar $x^{1/2}$ al numerador para poder resolver.

$= 3\int x^{1/2}\, dx - \frac{1}{4}\int x^{3/2}\, dx =$

$\mathbf{\frac{x^{1/2}}{\phantom{x}} \quad 1 \ \frac{x^{5/2}}{\phantom{x}}}$

$$= \mathbf{3 \quad \frac{1}{2}\, dx - \overline{4}\ \frac{5}{2} + C =}$$

O ésta puede ser otra solución mas “arreglada”...

$$= \mathbf{6\sqrt{x} - \frac{1}{10}\sqrt{x^5} + C}$$

c) $\int \left( \frac{3\sqrt{x} + 7}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

$$= \int \frac{3x^{1/2}}{x^{1/3}}\, dx + \int \frac{7}{x^{1/3}}\, dx =$$

$$= 3\int x^{1/3}\, dx + 7\int x^{-1/3}\, dx =$$

$$\mathbf{= 3\ \frac{x^{7/6}}{\frac{7}{6}} + 7\ \frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}}}$$

Ejercicio Nº3. Para cada caso, determine la ecuación de la curva que pasa por el punto de coordenadas que se indica, si la pendiente de la recta tangente a la misma dicho punto está dada por:

a) $f'(x) = x^3 + 4$ P(0; 1)

$$\int (x^3 + 4)\, dx = \int x^3\, dx + \int 4\, dx =$$

$$\mathbf{F(x) = \frac{x^4}{4} + 4x + C}$$

Hablamos de curvas infinitas que solo tienen como pendiente la ecuación $x^3 + 4$ .
Las x valen 0, por el punto que corta al eje x.

$y = f(x) = 0 + 0 + c$
$1 = 0 + 0 + c$
$c = 1$

Entonces:

$$\mathbf{F(x) = \frac{x^4}{4} + 4x + 1}$$

b) $f'(x) = 2 \text{ sen } x + e^x$ P(0; 0)

$\int$

$f(x) = \quad 2 \text{ sen } x + e^x \, dx$

$= 2 \int \text{sen } x \, dx + \int e^x \, dx$

$f(x) = -2 \cos x + e^x + C$

$0 = -2 \cos 0 + e^0 + C$

$\quad -2 \cdot 1 + 1 + C$

$0 = \quad -1 + C$

$C = 1$

Entonces:

$\mathbf{f(x) = -2 \cos x + e^x + 1}$

<u>Ejercicio Nº4</u>. Resuelva las siguientes integrales por sustitución:
Ahora hay que cambiar la variable de integración dada (x o lo que sea) por otra nueva variable, para que se pueda resolver en forma inmediata.

Aplicamos sustitución cuando:
a) En un producto de funciones, una de ellas es la derivada de la otra sin interesarme las potencias o constantes de las otras.
b) En un cociente de funciones, cuando el numerador es la derivada del denominador sin interesarme las potencias interiores, ni las constantes.
c) Cuando en un producto de funciones una de ellas es exponencial y la otra es la derivada del exponente de la función exponencial dada.

a) $\int e^{-3x} \, dx$

$\mathbf{\dfrac{-e^{3x}}{3} + C}$

ej) $\int e^{5x} \, dx =$

$u = 5x$

$du = 5 \, dx$

$\dfrac{du}{5} = dx$

$\dfrac{1}{5} \int e^u \, du =$

$= \dfrac{1}{5} e^u + C =$

$= \dfrac{1}{5} e^{5x} + C =$

$$\frac{1}{5}\int e^u\,du = \frac{e^u}{u} + C$$

Para que pueda aplicar esta propiedad u debe ser una función lineal en x.
Sirve para la función coseno y seno en una función lineal en x.

b) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\,dx$

u = sen x
du = u' dx
du = cos x . dx

Lo cual me queda:

$$\int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C =$$

$$\mathbf{\frac{sen^4 x}{4} + C}$$

c) $\int \cos(5x)\,dx$

$$\mathbf{\frac{sen\,(5x)}{5} + C}$$

d) $\int \frac{dx}{5x-3}$

$$\int \frac{x}{5x-3}\,dx =$$

Cuando el denominador es de grado uno, es el ln de ese denominador.
La nueva variable es todo lo que está en el numerador.
u = 5x – 3
du = 5 dx

$\frac{du}{5} = dx$

No me interesan las constantes porque pueden aplicarse distintos artificios sobre ella.

$$= \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln u + C =$$

$$\frac{1}{5}\ln u + C =$$

$$\mathbf{\frac{1}{5}\ln(5x-3) + C}$$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{2e^x}{6e^x + 7}\right) dx$

$u = 6e^x + 7$
$du = 6e^x\, dx$
$\dfrac{du}{6} = e^x\, dx$

$= 2\displaystyle\int \frac{e^x\, dx}{6e^x + 7} =$

$\dfrac{2}{6}\displaystyle\int \frac{du}{u} =$

$\dfrac{1}{3} \ln u + C =$

$\dfrac{1}{3}$ **$\ln (6e^x + 7) + C$**

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 2}}$

$\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3 + 2)^{1/2}}\, dx$

No se toma la potencia de 1/2, porque no va a dar que sea la derivada del denominador $x^3 + 2$ con $3x^2$ y elimino el tres quedando como el ejercicio $x^2$, porque tampoco me importa la constante.

$u = x^3 + 2$
$du = 3x^2\, dx$
$\dfrac{du}{3} = x^2\, dx$

$\dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{du}{u^{1/2}}\, dx = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int u^{-1/2}\, du =$

$\dfrac{1}{3}\,\dfrac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C =$

$\dfrac{2}{3}\sqrt{(x^3 + 2)} + C$

g) $\int \frac{\text{sen } x}{\cos^3 x}$

u = cos x

du = -sen x dx

$\frac{du}{-1} = \text{sen } x \, dx$

$- \int \frac{du}{u^3} = - \int u^{-3} \,.\, du =$

$= \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2 u^2} + C =$

$= \mathbf{\frac{1}{2 \cos^2 x} + C = \frac{1}{2} \sec^2 x} + C =$

Porque $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

Ejemplo)

$\int \cos \left(\frac{1}{2} x\right) dx =$

$u = \frac{1}{2} x$

$du = \frac{1}{2} dx$

2du = dx

$\frac{1}{2} x$ es una función lineal

$\mathbf{\frac{\text{sen } \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2}} + C}$

h) $\int \text{tg } (4x) \, dx$

$\int \frac{\text{sen } (4x)}{\cos (4x)} \, dx$

$= \mathbf{\frac{1}{4} \, [\ln (\cos 4x)] + C}$

i) $\displaystyle \frac{\ln^4 x}{x}\, dx$

Siempre que aparezca el ln, acompañada o sola, tengo que resolver por partes a excepción de este caso:

$$\int \ln^4 x \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

Porque está acompañada de su derivada.

$u = \ln x$

$du = \dfrac{1}{x}\, dx$

$$\int u^4 \cdot du =$$

$= \dfrac{u5}{5} + C =$

$= \mathbf{\dfrac{1}{5} \ln^5 x + C}$

<u>Ejercicio Nº5</u>. Resuelva las siguientes integrales por el método de integración por partes:

La integración por partes se aplica en:

a) En un producto de funciones ninguna de ellas es derivada de la otra.

b) Siempre se resuelven por partes la función logarítmica en cualquier base, sola o acompañada, excepto cuando la función logarítmica está acompañada de su derivada.

c) Se resuelven siempre por partes las funciones circulares inversas arc sen x, arc cos x.

POR PARTES.

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du =$$

Puedo ir en orden sino por conveniencia de a que llamarle u, y a que llamarle dv.

a) $\displaystyle \int e^{3x}\, dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{3x}\, dx \Rightarrow \square = \displaystyle \int e^{3x}\, dx$

$\square = \dfrac{e^{3x}}{3} + C$

$$\int e^{3x}\, dx =$$

$\underline{e^{3x}}$ 1 $\underline{e^{3x}}$

□ . 3 - 3 . 3 + □ =

$$\square \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{3x}}{3} + C =$$

$$\mathbf{\frac{e^{3x}}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C}$$

b) $\int x \cos x \, dx$

Cuando el integrando tenga el producto de:

a) Una función polinómica por trigonométrica. Llamo u a la trigonométrica.
b) Polinómica por exponencial, llamo u a la polinómica.
c) Exponencial por trigonométrica. Elijo indistintamente.
d) Siempre que está la función logarítmica, llamo u a la función logarítmica.

Un paso intermedio:

u = x

dv = cos x . dx ⇨ v = $\int \cos x \, . \, dx = \text{sen } x$

= x. sen x + cos x + C

Esto me puede quedar como inmediata, por sustitución u otra vez por partes:

u = cos x ⇨ du = - sen x dx

dv = x dx ⇨ v = $\int x \, dx = \frac{x^2}{2}$

$$\int x \cos x \, dx = \cos x . \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2}{2} \text{sen } x \, dx$$

Esta mal hecha la elección porque se puede observar el resultado que me da es más complejo que el mismo enunciado del cual se partió, por eso la resolución del ejercicio es la siguiente:

$$\mathbf{\int x \cos x \, dx = x \, . \, \text{sen } x - \int \text{sen } x \, . \, dx}$$

c) $\int x^2 \ln x \, dx$

1

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x^2 . \ln x\, dx \Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} . \frac{1}{x}\, dx =$

$= \frac{1}{3} \int x^3 . \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{3} \int x^2\, dx =$

$= \ln x . \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} . \int x^2\, dx =$

$= \ln x . \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} . \frac{x^3}{3} + C =$

$$\mathbf{= \frac{x^3}{3} (\ln x - \frac{1}{3}) + C}$$

d) $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\, dx$

$dv = \operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen} x\, dx$

$v = - \cos x + C$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = \int \cos x\, dx$

$v = \operatorname{sen} x + C$

$= -x^2 \cos x + 2 [x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx] =$

$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 . \cos x + C$

Ejercicio Nº6. Integre las siguientes funciones racionales.

Tengo que resolver un cociente entre dos funciones polinómicas.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} . dx$$

Si no ocurre que el numerador es la derivada del denominador, entonces, aparece el método para resolver determinantes:

1) gr P(x) < Q(x)
2) Expresar a Q(x) en función de sus raices.
3) Calcular los coeficientes que permiten resolver la integral.

a) $\int \frac{4x}{x^2 - x - 6}\, dx$

1) OK. El grado del numerador es menor al denominador.
2) $x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} \nearrow x_1 \\ \searrow x_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-1^2 - 4 . 1 : (-6)}}{2 . 1} = \begin{cases} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \end{cases} = 1. (x - 3)(x + 2)$$

3) Calcular el cociente:

$$\frac{4x}{x^2 - x - 6} = \frac{4x}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{(x - 3)} + \frac{B}{(x + 2)} =$$

Esta función es la suma dependiendo cuantos términos tenga el denominador.

$$4x = \left[\frac{A}{(x - 3)} + \frac{B}{(x + 2)}\right] (x - 3)(x + 2) =$$

$= 4x = A(x + 2) + B(x - 3)$

Voy a dar valores convenientes a estos polinomios que son las raices.

Si doy 3:

$12 = A (3 + 2) + B \underbrace{(\cancel{3 - 3})}_{0}$

$A = \frac{12}{5}$

Si x = -2:

$-8 = A \underbrace{(\cancel{-2 + 2})}_{0} + B (-2 - 3)$

$$A = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{4x}{(x-3)(x+2)} = \frac{\frac{12}{5}}{x-3} + \frac{\frac{8}{5}}{x+2} =$$

$$\int \frac{4x}{(x-3)(x+2)}\,dx = \frac{12}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{8}{5}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$\mathbf{\frac{12}{5}\ \ln(x-3) + \frac{8}{5}\ \ln(x+2) + C}$$

b) $\displaystyle\int \frac{3}{(x-1)^2\ (x+2)}\ dx$

Resolver!

c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-4}\ dx$

1) OK. El grado del numerador es menor al denominador.
2) $X^2 - 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\,.\,1\,.\,0}}{2\,.\,1} = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases} = (x-2)\,(x+2)$$

3) Calcular el cociente:

$$\frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x-1}{(x-2)\,(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} = \frac{B}{(x+2)}$$

Esta función es la suma dependiendo cuantos términos tenga el denominador.

$$x - 1 = \left[\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}\right] (x-2)(x+2) =$$

$= x - 1 = A(x + 2) + B(x - 2)$

Voy a dar valores convenientes a estos polinomios que son las raices.

Si doy 2:

$$1 = A(2 + 2) + B(\underbrace{\cancel{2-2}}_{0v})$$

$$A = \frac{1}{4}$$

Si x = -2:

$$-3 = A(\underbrace{\cancel{-2+2}}_{0}) + B(-2 - 2)$$

$$A = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{\frac{1}{4}}{x-2} - \frac{\frac{3}{4}}{x+2} =$$

$$\int \frac{x-1}{(x+2)(x-2)}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$\mathbf{\frac{1}{4} \ln (x-2) + \frac{3}{4} \ln (x+2) + C}$$

$$= \mathbf{\ln [ (x-2)^{1/4} + (x+2)^{3/4}] + C}$$

Ejercicio Nº7. Integre las siguientes funciones circulares.

a) $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$

La aplicación de las formulas siguientes, van tanto para el seno, como para el coseno:

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \,.\, \cos x \,.\, dx =$$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$$= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \,.\, dx =$$

Hago este procedimiento para hacer el método de sustitución.

U = sen x

du = cos x . dx

$$= \int (1 - u^2)\, du = \int du - \int u^2\, du =$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + C =$$

$$\mathbf{= sen\,x - \frac{sen^3 x}{3} + C}$$

Esto sirve para operaciones mucho más complejas:

$$\int sen^3 x \,.\, cos^2 x \; dx$$

$$\int \frac{cosec^4 x \; dx}{sec^3 x \; dx}$$

Si el coseno se eleva a la 5ta potencia:

*) $\int cos^5 x \; dx = \int cos^4 x \,.\, cos\, x \,.\, dx =$

$$= \int (1 - sen^2 x)^2 \cos x \, dx =$$

$$= \int (1 - u^2)^2 \, du =$$

Porque $(cos^2 x)^2 = (1 - sen^2 x)^2$

$$\mathbf{= \int (1 - 2u^2 + u^4)\, du}$$

b) $\int cos^3 x \; dx$

Resolver!

c) $\int sen^2 x \; dx$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int \text{sen}^2 x \; dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \, . \, dx = \quad \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{2}\,\frac{\text{sen } 2x}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\,(x - \frac{\text{sen } 2x}{2}) + C =$$

Si se da tal caso de que el seno sea de potencia 4ta...

$$\text{sen}^4 x = (\text{sen}^2 x)^2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)^2$$

## RESOLUCION PRACTICO Nº 4. LA INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

Ejercicio Nº1. Resuelva la siguiente cuestión: Suponga que se ha roto una tubería y que t minutos después se pierde agua a razón de la función de cambio f(t) = 100 + 0,5t litros por minuto.

a) ¿Cuál es la cantidad de agua perdida al cabo de 3 minutos?
b) ¿Cuánta agua se perderá si no se repara la tubería durante, por ejemplo, la segunda hora?

Ejercicio Nº2.

a)Resuelva la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x \; dx$

En una integral definida las x se reemplazan por Regla de Barrow, extremo superior menos extremo inferior.

$$\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \Big|_0^{2\pi} =$$

**$= \operatorname{sen} 2\pi - \operatorname{sen} 0 = \quad 0 - 0 = 0$**

b) Halle el área del recinto limitado por las funciones f: R →R / f(x) = cos x y f: R →R / g(x) = 0, en el intervalo [0, 2π]

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} =$$

**$= \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = \quad 1 - 0 = 1$**

**El área es 4 . A = A * a = 4**

<u>Ejercicio Nº3</u>.

Las rectas y = 2x, y = -3/2x + 7 ,e, y = ¼ x, determinan un triángulo

c) Represéntelas gráficamente y halle los vértices del triángulo.

$r_1 = y = 2x$

$r_2 = y = \frac{-3}{2} x + 7$

$r_3 = y = \frac{1}{4} x$

Igualamos las rectas de a pares.

1) $r_1 \cap r_2$

$2x = \frac{-3}{2} x + 7$

$2x + \frac{3}{2} x - 7 = 0$

$\frac{7}{2} x - 7 = 0$ $P_1 = (2, 4)$

$x_1 = 2$ $y_1 = 2 . 2 = 4$

2) $r_2 \cap r_3$

$-\frac{1}{2} x + 7 = \frac{1}{4} x$

$-\frac{1}{2} x + 7 - \frac{1}{4} x = 0$

$-\frac{7}{4} x + 7 = 0$

$x_2 = 4$ $y_2 = \frac{1}{4} . 4 = 1$

$P_2 = (4, 1)$

3)$r_1 \cap r_3$

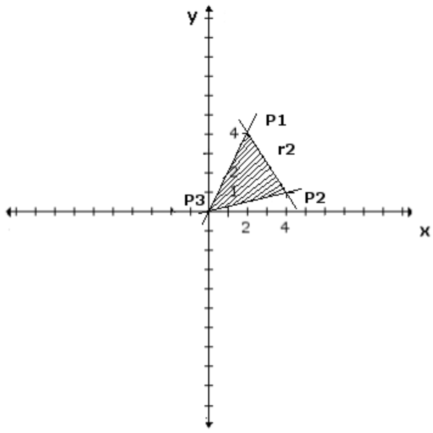
$2x - \frac{1}{4}x$

$2x - \frac{1}{4}x = 0$

$\frac{7}{4}x = 0$

$x_2 = 0 \quad y_2 = 2 \cdot 0 = 0$

$P_2 = (0, 0)$




d) Halle el área del triángulo.

$$A_1 = \int_0^2 \left(2x - \frac{1}{4}x\right) dx = \int_0^2 \frac{7}{4}x\, dx = \frac{7}{4} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2$$

$$\frac{7}{8}\left(2^2 - 0^2\right) = \frac{7}{8} \cdot 4 = \mathbf{\frac{7}{2}}$$

$$A_2 = \int_2^4 \left(-\frac{3}{2}x + 7\ \frac{1}{4}x\right) dx = \int_2^4 -\frac{3}{2}x + 7 - \frac{1}{4}\, dx = \int_2^4 \frac{-7}{2}x + 7\, dx = \frac{-7}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + 7x \Bigg|_2^4$$

$$\frac{-7}{8}\left(4^2 - 2^2\right) + 7\,(4 - 2) =$$

$$\frac{-7}{8} \cdot 12 + 7 \cdot 2 = \frac{-21}{2} + 14 = \frac{7}{2}$$

$A_T = A_1 + A_2 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$ u. a. = unidades de área (km, cm, etc.).

Ejercicio Nº4. Calcule al área limitada por cada una de las siguientes curvas y el eje de las abscisas.

a) $y = x^2 - 4$ b) $y = -x^2 + 1$

Se debe aplicar la Regla de Barrow:

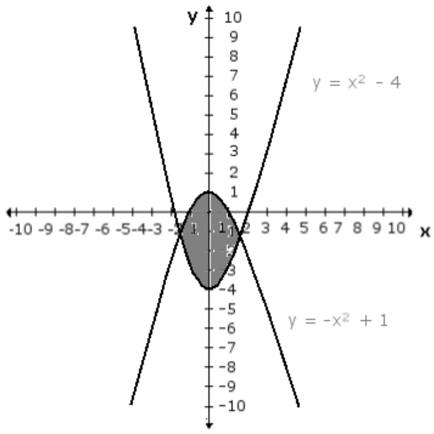
$$\int (\text{Función Techo} - \text{Función Piso}) = 0$$

$x^2 - 4 = -x^2 + 1$

$x^2 - 4 + x^2 - 1 = 0$

$2x^2 - 5 = 0$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \rightarrow \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{5}{2}}$$




$$\int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} (\text{Función Techo} - \text{Función Piso})\ dx$$

$$\int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} [(-x^2 + 1) - (x^2 - 4)]\ dx =$$

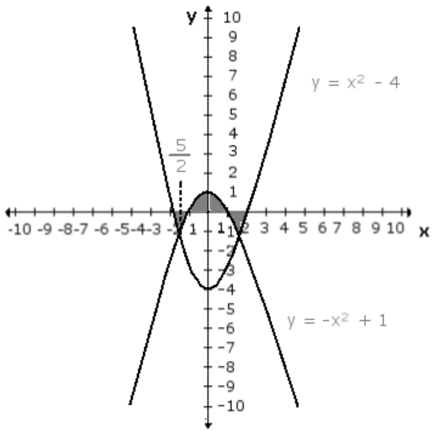
$$= \int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} (-x^2 + 1 - x^2 + 4)\ dx \quad = \int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} (-2x^2 + 5)\ dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} (-x^2 + 1 - x^2 + 4)\ dx \quad = \int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} (-2x^2 + 5)\ dx =$$

$$= -2\ \frac{x^2}{3} + 5x \Big|_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

Las x se reemplazan por el extremo superior, menos el extremo inferior.

$$= -2\ \frac{x^2}{3} + 5x \Big|_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{\frac{5}{2}}}$$



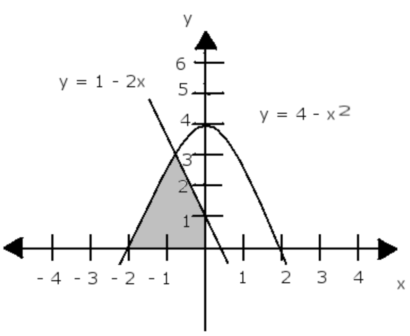

Tengo que partir la porción en donde se cortan las dos funciones.
eje "x", y = 0
eje "y", x = 0

$$\int_{-2}^{-\sqrt{\frac{5}{2}}} 0 - (x^2 - 4)\ dx \qquad \int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{-1} 0 - (-x^2 + 1)\ dx$$

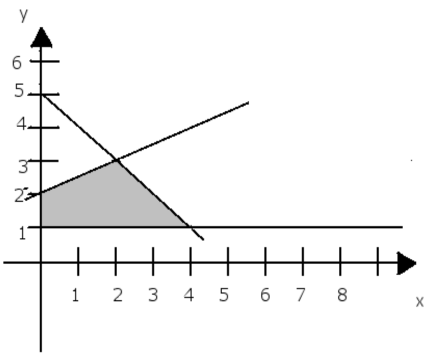
El resultado de estas dos integrales sumadas y multiplicadas por 2 es el área del otro lado.

Ejercicio Nº5. Calcule el área sombreada en cada caso:

a)



b)




Se deben calcular las dos áreas particionadas
No se la ecuación de la recta, pero el piso se que es x = 1
Tengo que hacer la ecuación de la recta que pasan por 2 puntos.

$P_1\,(0;\,2)$ $\qquad\qquad$ $P_2\,(4;\,3)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{3 - 2}{4 - 0}\,(x - 0)$$

$$\mathbf{y = \frac{1}{4}\,x + 2}$$

$P_1\,(4;\,3)$ $\qquad\qquad$ $P_2\,(8;\,1)$

$$y - 3 = \frac{1 - 3}{x - 4}\,(x - 4)$$

$$y - 3 = \frac{3}{4}\,(x - 4)$$

$$y = -\frac{1}{2}\,x + 2 + 3$$

$$\mathbf{y = -\frac{1}{2}\,x + 5}$$

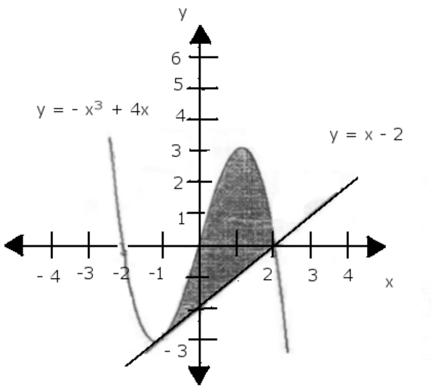
$$\int^{4} 1 \qquad\qquad \int^{0} 1$$

$A_1$ $\overline{4}$ x + 2 dx $A_2$ $\overline{4}$ x + 2 dx

0 4

$A_T = A_1 + A_2$

c)




$$\int_{-1}^{2} [(-x^3 + 2x) - (x - 2)]\, dx$$

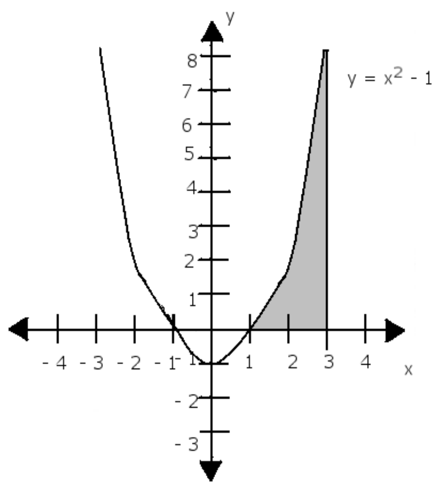
$$\int_{-1}^{2} (-x^3 + 4x - x + 2)\, dx$$

$$\int^{2} (-x^3 + 3x + 2)\, dx =$$

- 1

$= \dfrac{-x^4}{4} + \dfrac{3x}{2} + 2x \Big|_4^2 = \left[\dfrac{\cancel{16}}{\cancel{4}} + 3.\dfrac{\cancel{4}}{\cancel{2}} + 4\right] - \left[-\dfrac{1}{4} + 6 - 2\right] = \dfrac{6}{2} + \dfrac{3}{2} = 16$

1 1



d)

$A = A_1 + A_2$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} [0 - (x^2 - 1)]\ dx \quad + \quad A_2 = \int_{1}^{3} (x^2 - 1)\ dx$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} -x^2 + 1\ dx \quad + \quad A_2 = \int_{1}^{3} (x^2 - 1)\ dx$$

$$= \left.\frac{-x^3}{3} + x\right|_{-1}^{1} - \left.\frac{x^3}{3} - x\right|_{1}^{3} = \underbrace{\left[\frac{1}{3} + 1\right] - \left[\frac{1}{3} - 1\right]}_{\frac{4}{3}} + \left[\frac{27}{3} - 3\right] - \left[\frac{1}{3} - 1\right]$$

$$\frac{4}{3} + 6 + \frac{2}{3} = 8 \text{ u. a}$$

Ejercicio Nº6. Calcule el área encerrada por las curvas f y g en cada caso siguiente:

a) $f : y = x^2 - 2x$ $\qquad g: y = -\frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{3} x + 4$

Para hacer la gráfica hay que buscar los puntos en donde se intersectan las dos curvas. Tenemos que igualar las expresiones.

$$x^2 - 2x = -\frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{3} x + 4$$

1 2

$$x^2 - 2x + \overline{3}\; x^2 + \overline{3}\; x - 4 = 0$$

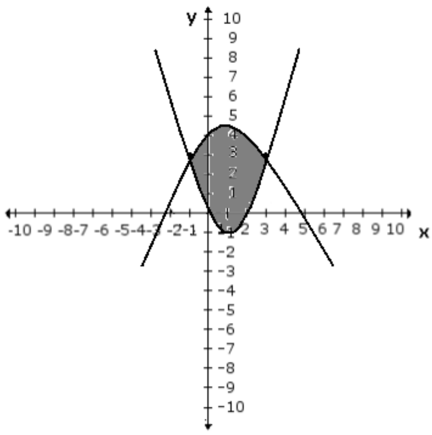
$$\frac{1}{3}\, x^2 + \frac{8}{3}\, x - 4 = 0$$

Multiplico por 3, (factor común), una solución equivalente para hacer más sencillo el cálculo:

$$4x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 192}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{8 \pm 16}{2} \begin{cases} 3,\ 3 \\ -1,\ 3 \end{cases}$$




a) $f : y = x^2 - 2x$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1$$

$$y_v = x^2 - 2x = 1 - 2 = -1$$

- 1 2

g: $y = \frac{-1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{2}{3}}{2\cdot -\frac{1}{3}} = 1$$

$$y_v = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4 = -\frac{1}{3}(-1)^2 + \frac{2}{3}(-1) + 4 = 3$$

$$A = \int_{-1}^{3} \left[\left(\frac{-1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4\right) - \left(x^2 + 2x\right)\right] dx =$$

$$A = \int_{-1}^{3} \left(\frac{-1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4 - x^2 - 2x\right) dx =$$

$$A = \int_{-1}^{3} \left(\frac{-4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 4\right) dx =$$

$$A = \int_{-1}^{3} \left(\frac{-4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 4\right) dx = \frac{-4}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{8}{3}\frac{x^2}{2} + 4x \Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{-4}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + 4x \Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \left(\frac{-4}{9}3^3 + \frac{4}{3}3^2 + 4.3\right) - \left(\frac{-4}{3}(-1)^3 + \frac{4}{3}(-1)^2 + 4(-1)\right) =$$

$$= \left(-12 + 12 + 12\right) - \left(\frac{-4}{9} + \frac{4}{3} - 4\right) =$$

$$= 12 + \frac{20}{9} = \mathbf{\frac{128}{9}}\ \textbf{u. a.}$$

b) f : $y = \frac{1}{x}$ g: $y = 3 - \frac{5}{4}x$

c) f : $y = x^2 - x$ g es una recta que pasa por los puntos (1, 2) y (-3, -6)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$P_1 = (\overset{x_1}{1}, \overset{y_1}{2}) \text{ y } P_2 = (\overset{x_2}{-3}, \overset{y_2}{-6})$$

Reemplazamos:

$$y - 2 = \frac{-6 - 2}{-3 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2 + 2$$

$$y = 2x$$

Hallar el área sobre la parábola y la recta 2x

$$x^2 - x = 2x$$

$$x^2 - x - 2x = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

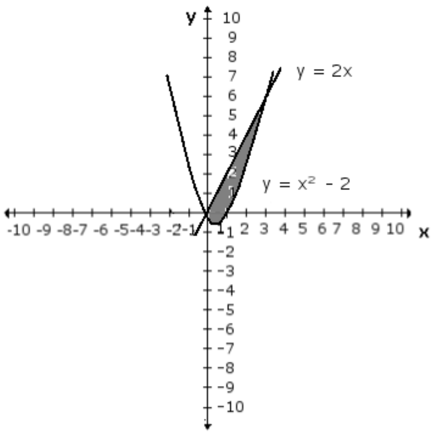
$$x(x - 3) = 0$$

$$\mathbf{x_1 = 0}$$

$$x - 3 = 0$$

$$\mathbf{x_2 = 3}$$

Se reemplazan $x_1$ y $x_2$ en la ecuación de la función.




$$x_v = \frac{-1}{2}$$

$$\int_0^3 (2x - x^2 + x)\, dx =$$

$$\int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx =$$

$$\underline{-x^3} + 3\,\underline{x^2} \Big|^{3}$$

3 x $_0$ =

$- 9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$ **u. a**

d) f: $y^2 = 4x = \sqrt{4x} = (4x)^{1/2}$

g: $4x - 3y = 4 \Rightarrow \frac{4 - 4x}{3} \Rightarrow (4 - 4x)^{-3}$

$(4x)^{1/2} = (4 - 4x)^{-3}$

$\sqrt{4x} = \left(\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\right)^2$

$4x = \frac{16}{9}x^2 - \frac{32}{9}x + \frac{16}{9}$

Multiplico todo por 9

$36x = 16x^2 - 32x + 16$

$16x^2 - 32x + 16 - 36x = 0$

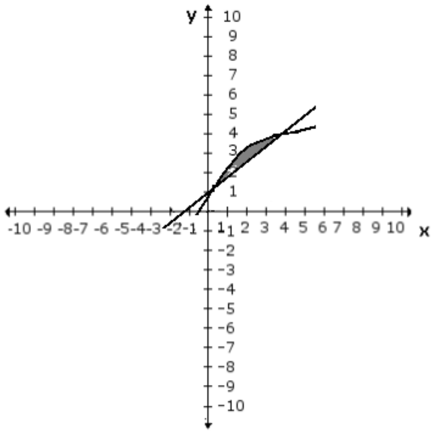
$\frac{16}{4}x^2 - \frac{68}{4}x + \frac{16}{4} = 0$

$\frac{4}{2}x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{4}{2} = 0$

$4x^2 - \frac{17x}{2} + 2 = 0$

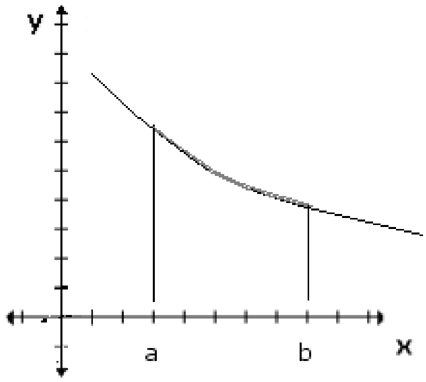
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{\frac{17}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-17}{2}\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{1}{4,1} \\ 4,4 \end{cases}$$




Ejercicio Nº7.

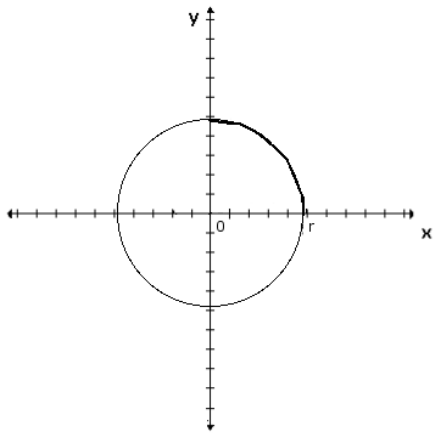
Longitud de un arco:




$$L_C = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx =$$

Se lo puede demostrar por el teorema de arco o de lagrange

a) Demuestre que la longitud de una circunferencia de radio r es $L = 2\pi r$




Debo conocer la función o sea la ecuación de la recta.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \sqrt{r^2 + x^2}$$

Puedo considerar la longitud de una curva en un cuadrante y al resultado lo multiplico por 4.

$$y = (r^2 + x^2)^{1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2\,(r^2 + x^2)^{1/2}}\,(-\,2x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{-\,x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$L_C = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{-\,x}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right)^2}\;dx =$$

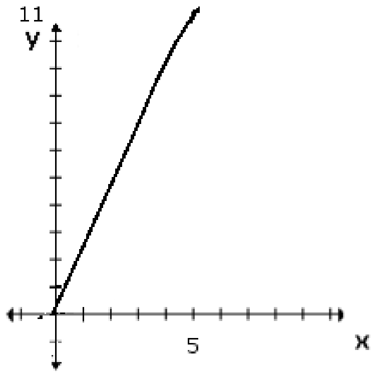
$$L_C = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 + x^2}}\;dx =$$

1 – Se puede simplificar después de sacar factor común.

2 – La integral es el resultado que está debajo del signo integral.

b) Halle la longitud del arco de la curva $f(x) = x^{3/2}$, entre $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$

$$y = f(x) = x^{3/2} \qquad x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 5$$




$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$L_C = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{2}\right)^{2}}\, dx =$$

$$L_C = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx =$$

$$L_C = \int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx =$$

Se resuelve por sustitución porque una es la derivada de la otra.

$$m = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$dm = \frac{9}{4}\, dx$$

$$\frac{4}{9}\, dm = dx$$

$$L_C = \int_0^5 m^{1/2}\, dm = \frac{4}{9}\,\frac{m^{3/2}}{\frac{3}{2}}$$

Hay que reemplazar primero m, por la ecuación a la que se iguala.

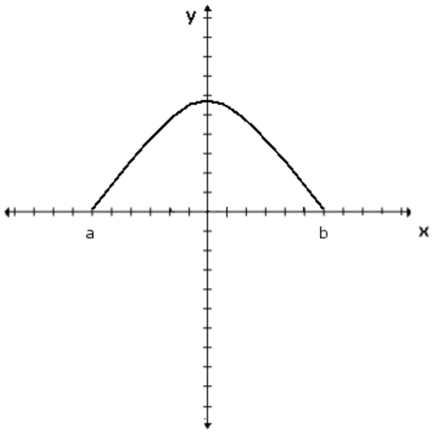
$$= \frac{8}{27}\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3}}\,\Bigg|_0^3 =$$

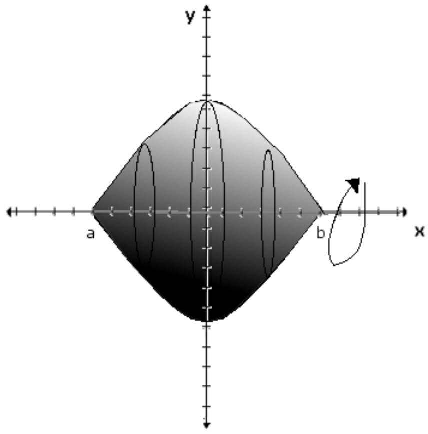
$$= \frac{8}{27}\left[\left(\sqrt{\frac{49}{4}}\right)^3 - 1\right] = \frac{8}{27}\left(\frac{343}{8} - 1\right) = \frac{\cancel{8}}{27} \cdot \frac{335}{\cancel{8}} = \mathbf{\frac{335}{27}\ u.\ a.}$$

Ejercicio Nº8.

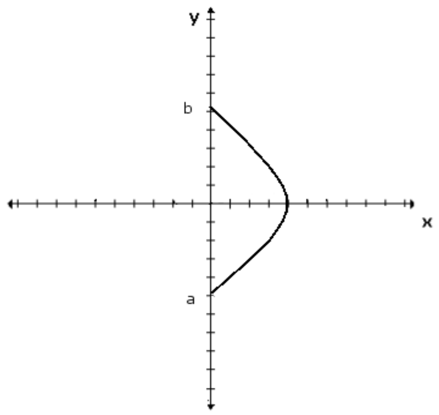
Cuando un plano gira alrededor de una eje, forma un cuerpo.
Sólido de revolución: Es una curva que gira alrededor de cualquiera de los ejes.

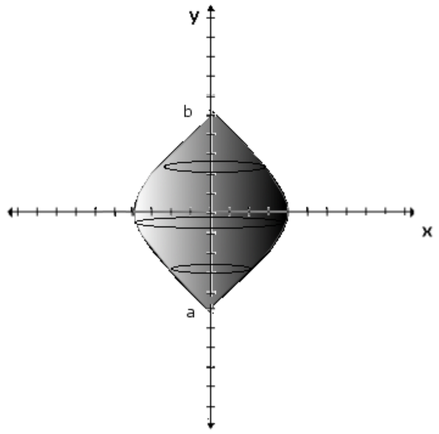
$$Vol = \pi \int_a^b \sqrt{1 + [\,f\,(x)]^2}\ dx =$$




a y b son los extremos de la curva que gira alrededor del eje x o del eje y.




$$Vol = \pi \int_a^b [\, f(x)]^2 \; dx =$$

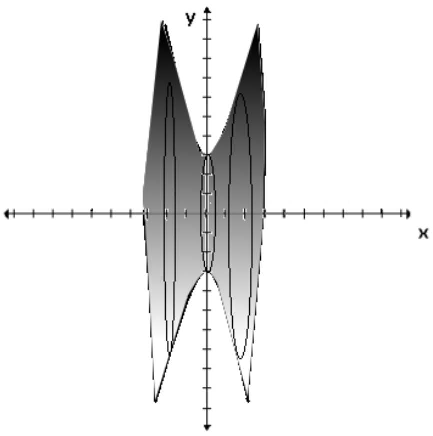
$$Vol = \pi \int_c^d [\, f(y)]^2 \; dy =$$

a) Determine el volumen del cuerpo engendrado por la curva que se indica en cada caso siguiente, cuando gira alrededor del eje coordenado considerando:

   i. $f(x) = x^2 + 3$, entre $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ con respecto al eje x.

$$Vol = \pi \int_{-2}^{2} (x^2 + 3)^2 \; dx = \pi \int_{-2}^{2} (x^4 + 6x^2 + 9)\; dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{6\,x^3}{3} + 9x \right]_{-2}^{2} =$$

$$\left[ \left( \frac{32}{5} + 16 + 18 \right) - \left( \frac{-32}{5} - 16 - 18 \right) \right] = \frac{\mathbf{484}}{\mathbf{5}}\,\pi$$




ii. $f(x) = 4x^2$, entre $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ con respecto al eje y.

$$\sqrt{\frac{y}{4}} = x \qquad x = \frac{\sqrt{y}}{2}$$

$$Vol = \pi \int_0^{36} \frac{y}{2}\, dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{36} y^{1/2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, \frac{2}{3}\, y^{3/2} \Big|_0^{36} = \frac{\pi}{3}\, 216 = \mathbf{\frac{216}{3}\, \pi}$$

b) Encuentre el volúmen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = 8x$, alrededor del eje x.

Para encontrar la región común a ambas, hay que buscar los puntos de intersección.

$y = x^2$

$y^2 = 8x$

$y = \sqrt{8x}$

Igualo las ecuaciones.

$x^2 = \sqrt{8x}$

$x^4 = 8x$

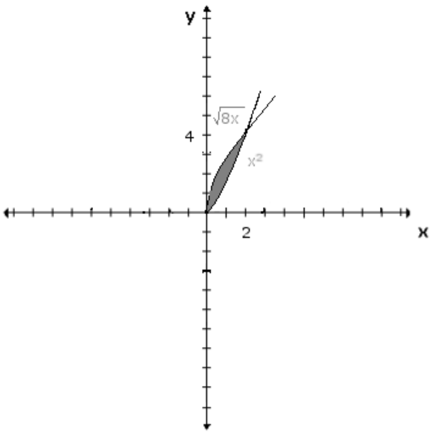
$x^4 - 8x = 0$

Se resuelve por factor común al ser $x^4$ incompleta

$x\,(x^3 - 8x) = 0$

$x_1 = 0$ (probando por tanteo)

$x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x_2 = 2$

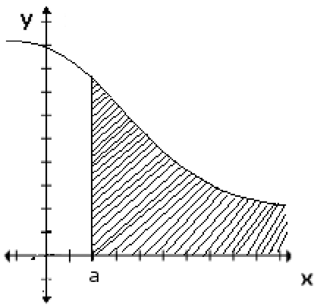


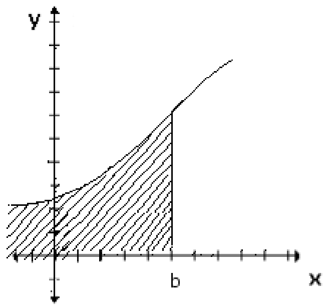

$$v = \pi \int_0^2 \left(\sqrt{8x} - x^2\right) dx = \pi \int_0^2 \sqrt{8x}\, dx - \int_0^2 x^2\, dx = = \pi \left[\sqrt{8}\cdot \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi \left[\frac{2}{3}\sqrt{8}\cdot\sqrt{8} - \frac{8}{3}\right] =$$

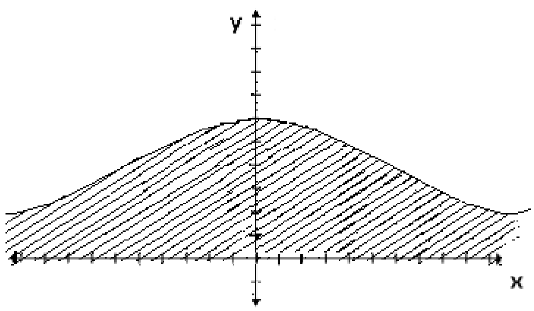
$$= \pi\ \frac{2}{3}\sqrt{8^2} = 2\cdot\frac{8}{3} - \frac{8}{3} = \mathbf{\frac{8}{3}\ \pi}$$

<u>Ejercicio Nº9</u>. De ser posible, halle las siguientes integrales impropias.
Hay dos especies de integrales impropias.
Cuando un extremo es infinito, ∞ o -∞. Cuando los dos extremos son infinitos, cuando uno o ambos hacen que la función esté indefinida.




$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx \qquad\qquad \int_{\infty}^{b} f(x)\, dx$$



$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x\, dx}$$

Para cuando la integral tome 0, no estará definida. Hay que trabajarlo como si fuera un límite.

$$\int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{3} f(x)\, dx =$$

$$\lim_{t \to \infty} \int_{a}^{t} f(x)\, dx$$

Resuelvo primero la integral por Barrow (Extremo superior – Extremo inferior)
Si tiene un valor Real, es convergente.
Si tiene un valor $\infty$, es divergente (Imposible calcular el valor indefinido).

a) $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx$

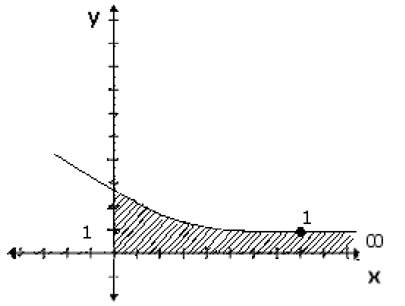
$$\lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} e^{-x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \left. \frac{e^{-x}}{-1} \right|_{0}^{t} =$$

Se resuelve como el límite de t, tendiendo hacia ese valor donde la función no está definida. Reemplazo t, en ese extremo.

Aplico Barrow.

$$\lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} \left. \frac{e^{-x}}{-1\, dx} \right|_{0}^{t} = \lim_{t \to \infty} [\, - e^{-t} - (-1)] = \frac{-1}{e^{\infty}} + 1 = 1$$

Solo se cambió el infinito por una t.
Converge hacia el valor 1.




b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx =$$

Se resuelve por sustitución

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{u}\,dx$$

$u = -x^2$

$du = -2x\,.\,dx \quad = \frac{1}{2\;e^{u}}$

$-\frac{du}{2} = x\,.\,du \;=\; \frac{-1}{2\;e^{-x^2}}$

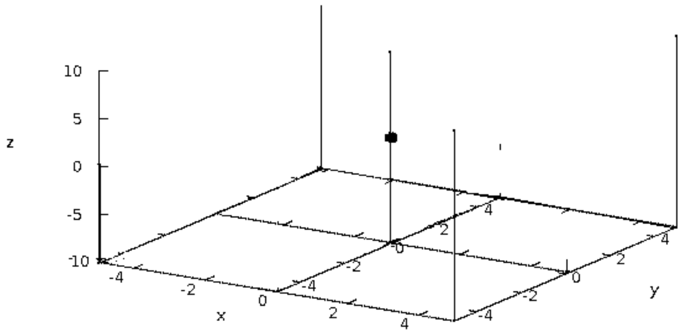
$$\lim_{t\to-\infty}\left.\frac{-1}{2\;e^{-x^2}}\right|_{t}^{-1} = \lim_{t\to-\infty}\frac{-1}{2}\left[e^{-1} - e^{-t^2}\right] = \frac{-1}{2e} + \frac{1}{2e^{\infty}} = \frac{-1}{2e}$$

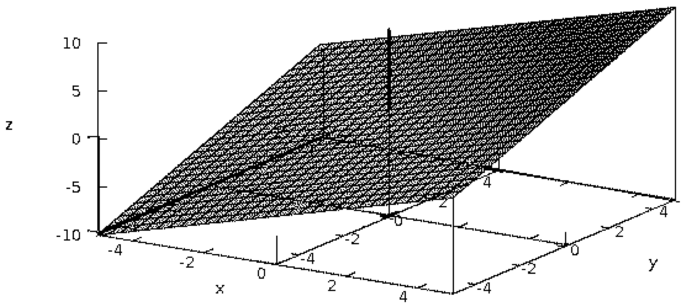
- $(-\infty)^2$ $-\infty$ y lo paso abajo de la fracción por eso es $\infty$

La integral converge al resultado 0.

## RESOLUCION PRACTICO Nº 5. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Ejercicio Nº1.



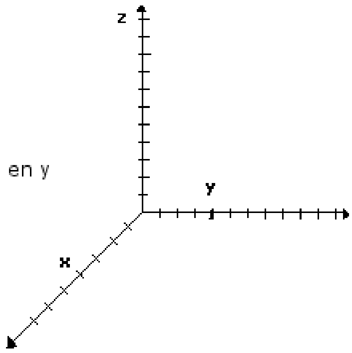



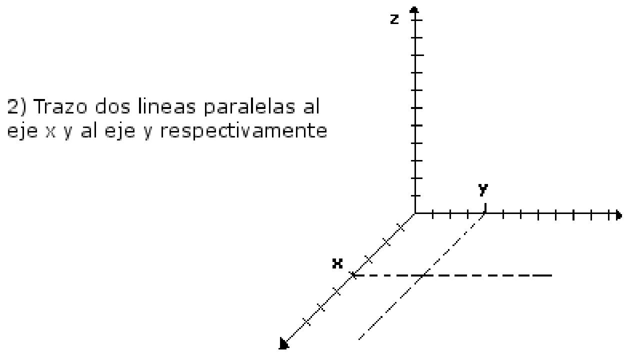

Para cada par ordenado (x, y) se va a tener una referencia al eje z.
El dominio: $D_2 = \{(x, y) \in R^2$ / se dan valores a x, a y para que exista z$\}$
Para dibujar una función de 3 dimensiones primeramente hay que hacer una tabla:

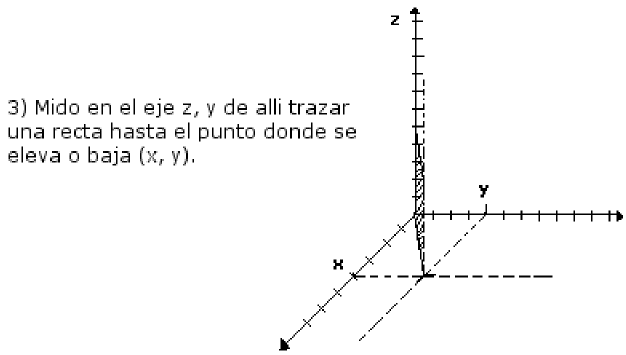
| x | y | z |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

1)

Busco los puntos en x y en y



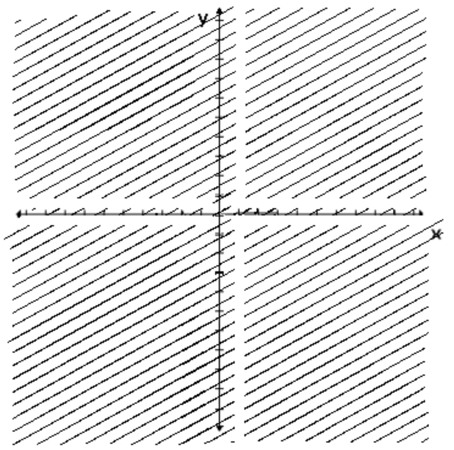



Halle y represente gráficamente el dominio de definición de las siguientes funciones z = f(x, y);

a) $z = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{y}$  Dom f = $\{(x, y) \in R^2 / x \neq 1 \wedge y \neq 0\}$

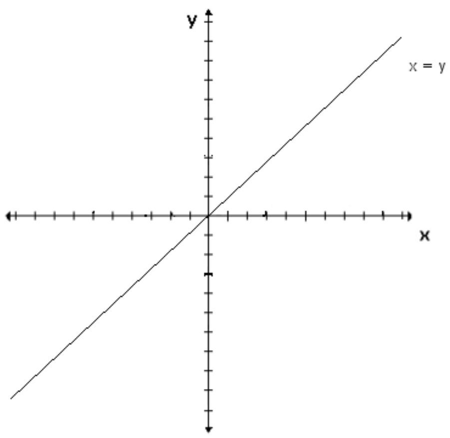
Para que exista el sumando $y \neq 0$ y x debe ser distinto de 1.




El dominio va a ser todos puntos que quedan en todo el plano excepto los que quedan en $x = 1 \vee y = 0$.
Hay que dejar en claro que se está graficando el dominio (x, y) no la función tridimensional.

b) $z = 1 + \sqrt{-(x - y)}$ . Dom f = $\{(x, y) \in R^2 / x = y\}$

En este caso para que exista la función el radicando tiene que ser 0 o psitivo.
La única posibilidad de que exista la función en este caso es que.
$(x - y)^2 = 0$ porque está afectado por el signo negativo.



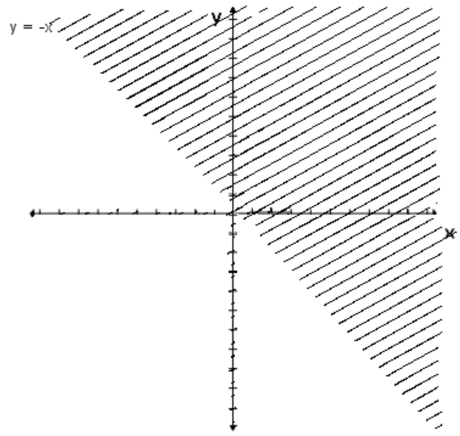

El dominio está conformado por todos los puntos de esa recta.
Dom z = $\{(x, y) \in R^2 / x = y\}$

c) $z = \ln (x + y)$ Dom f = $\{(x, y) \in R^2 / y > - x\}$

$\exists z \Rightarrow \exists \ln \Rightarrow x + y > 0$

$y > - x$

Dom = $\{(x, y) \in R^2 / y > -x\}$




Cuando se dan estos signos, > o < entonces se divide en 2 semiplanos, en este caso, se da la situación de que los puntos están por encima de la recta y no en ella.

d) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 + a^2) \cdot (2a^2 + x^2 + y^2)}$ $a > 0$

Dom f = $\{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \geq a^2 \ \wedge \ x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$

Tengo dos posibilidades los términos son o negativos o positivos.

1º Alternativa

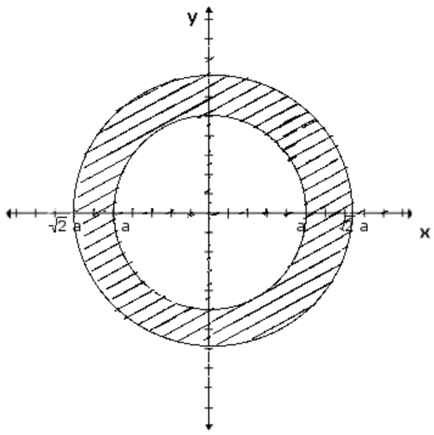
La solución final es la unión de las soluciones, es decir solucion1 ∪ solucion2

$x^2 + y^2 - a^2 > 0 \Rightarrow \mathbf{x^2 + y^2 > a^2}$

Representa una circunferencia con el centro en el origen radio y radio a. C = (0, a)

$2a^2 + x^2 - y^2 \Rightarrow - x^2 - y^2 \geq - 2a^2 \Rightarrow \mathbf{x^2 + y^2 \leq 2a^2}$

Representa una circunferencia con el centro en el origen y radio $\sqrt{2}$ a.
C = (0, $\sqrt{2}$ a).




2º Alternativa

$x^2 + y^2 - a^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq a^2$ $\quad$ C = (0, a)

$2a^2 + x^2 - y^2 \leq 0$ $\quad \varnothing$

$- x^2 - y^2 \leq - 2a^2$

$x^2 + y^2 \geq 2a^2$

C = $(0, \sqrt{2}\,a)$.

1º Alt. $\cup$ 2º Alt.

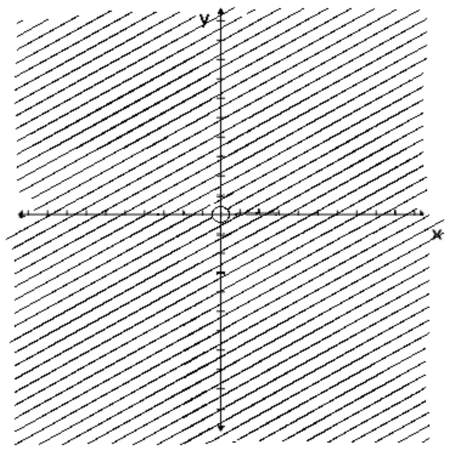
1º Alt. $\cup$ $\varnothing$

$D_z = \{ (x, y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 \geq a^2 \;\wedge\; x^2 + y^2 \leq 2a^2 \}$

e) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ $\qquad$ Dom f = R - {(0, 0)}

$\exists\, z \Rightarrow x^2 + y^2 \neq 0$

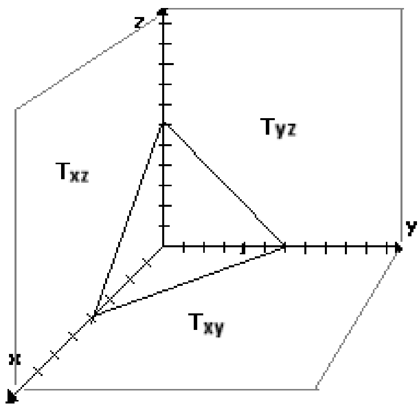
Entonces lo único que queda excluido es el centro (0, 0).




1

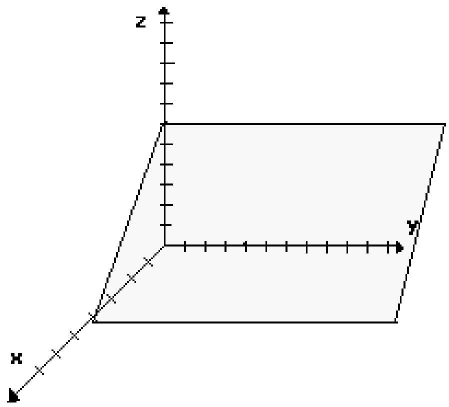
f) $z = \sqrt{y - \sqrt{x}}$ Dom f = $\{(x, y) \in R^2 / y > x \wedge x \geq 0\}$

Ejercicio Nº2.
Ecuación general del plano.
$Ax + By + Cz + D = 0$
A, B, C y D $\in R$
Cuando todos los coeficientes son distintos de 0, es decir, $A \neq B \neq C \neq D \neq 0$. El plano va

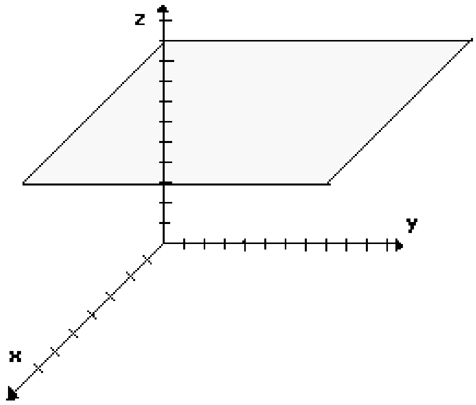



a cortar a todos los ejes coordenados.

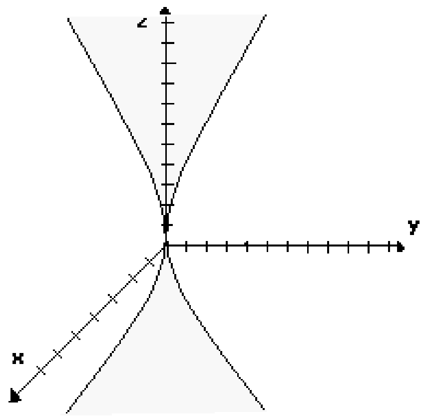
La recta $T_{yz}$ se encuentra únicamente en el plano (yz).
$T_{nn}$ son las trazas son las reales de intersección del plano, con el plano con los ejes coordenados.
Cuando B = 0
$Ax + Cz + D = 0$
Será paralelo al eje perteneciente a la letra es decir, y.




Cuando A = B = 0
$Cz + D = 0$
Es paralelo a todo el plano (x, y) porque corta al eje z.

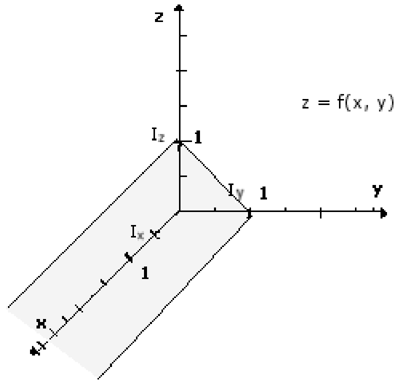



Cuando es D = 0



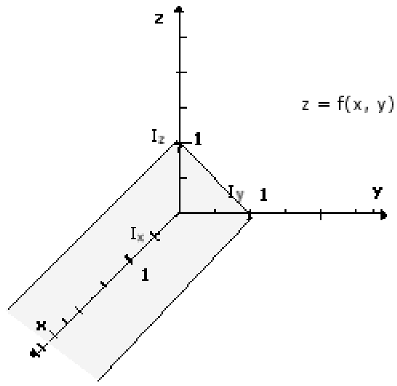

Represente gráficamente en $R^3$:

a) x - y = 0
y = x
Plano bisector.




b) y + z = 1

Es una “pared” paralela al eje x porque no está definido en la función.




c) 2x + 3y + z = 1

$\cap x \Rightarrow y = x^2 = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow I_x = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$

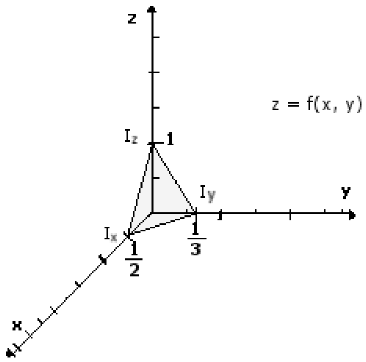
$\cap y \Rightarrow$ □ $= z = 0$

$3y = 1$

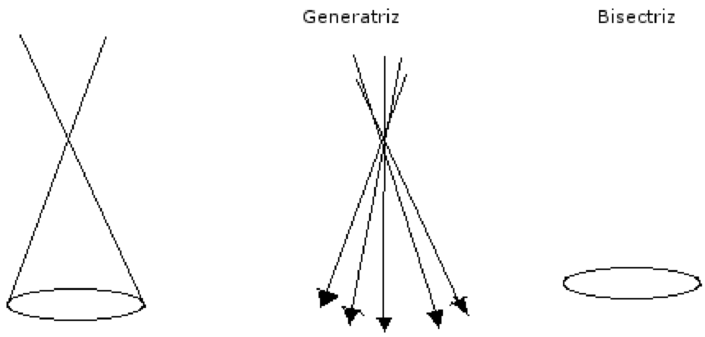
$y = \frac{1}{3} \Rightarrow I_y = \left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$

$\cap z \Rightarrow$ □ $= y = 0$

$z = 1 \Rightarrow I_z = (0, 0, 1)$

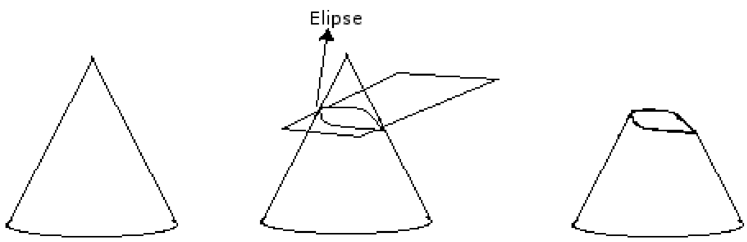


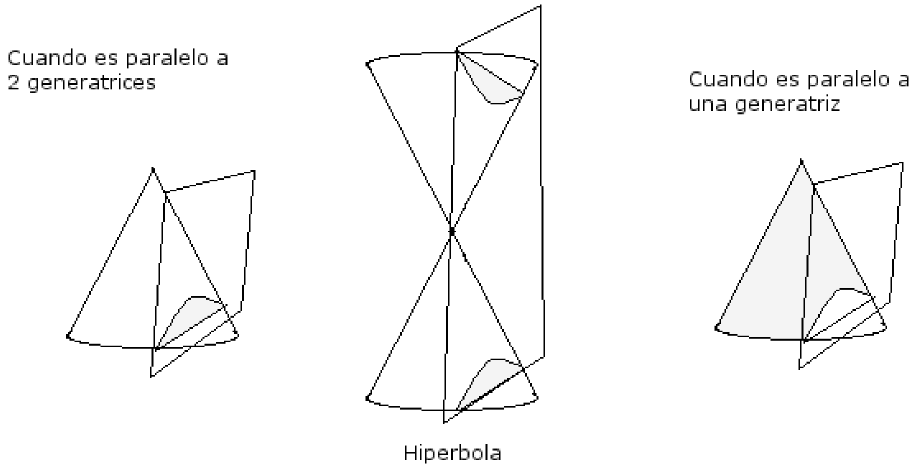

Ejercicio Nº3. Represente gráficamente (e identifique) en el espacio tridimensional las siguientes funciones:
Introducción a la geometría analítica.
Son las ecuaciones de las curvas planas, rectas, curvas, etcétera y también las cónicas.




Las cónicas se generan por medio de dos curvas.
Generatriz: Es la que genera el cuerpo de una cónica.

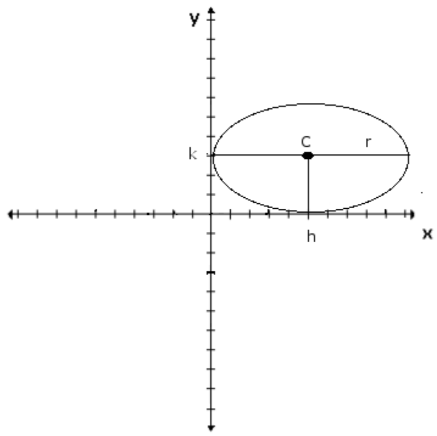
Bisectriz: Da la dirección de la parte del cono.
Estas dos rectas se pueden mover en el espacio.






Ecuación de la circunferencia canónica:

$x^2 + y^2 = r^2$ C(0, r)



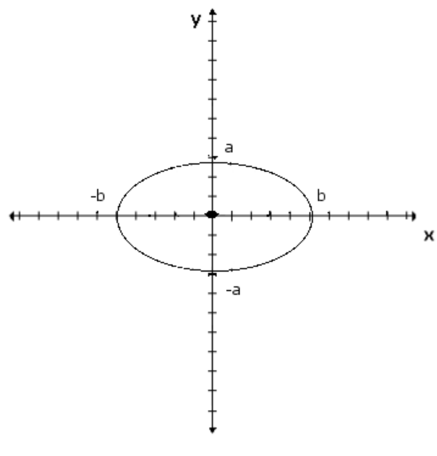

Si el origen no es en el centro de coordenadas se aplica la fórmula.

$(x - h)^2 - (y - k)^2 = r^2$

Elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Son reales cualquiera siempre que se cumpla a $>$ b.



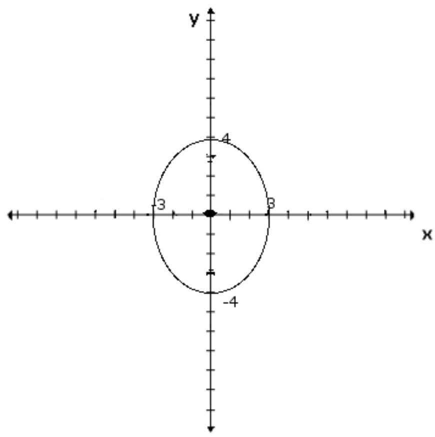
A es una semilongitud, porque $a^2 = \sqrt{a^2} = a$

Si digo...

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

b = 3  a = 4



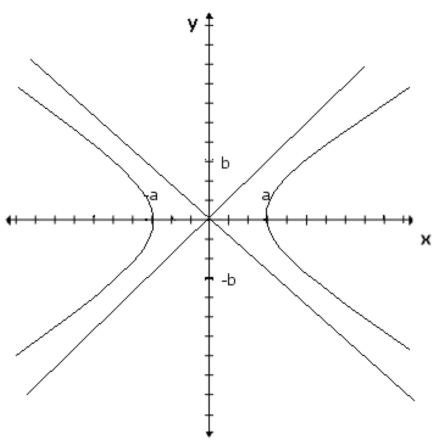

Hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ya no me interesa saber si a > b ni nada por el estilo, solo saber cual es el negativo.

Tengo que calcular las asíntotas.




Las asíntotas están cortando al origen porque no existen ni h ni k como si lo habíamos visto en la elipse.

Las curvas que chocan con a y -a son las hipérbolas de las que estamos hablando.

Si x no era positivo las asíntotas estarían cortando alguna parte de los ejes y no en el centro.

Hipérbola

$x^2 = 2\,p\,y$

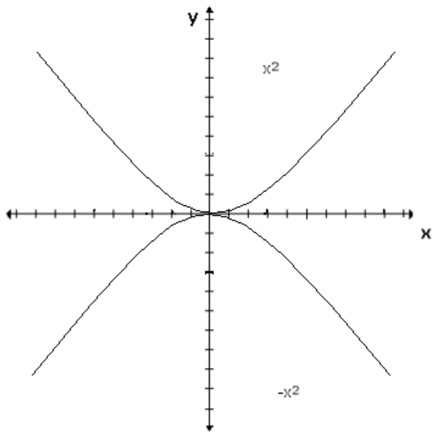
$y^2 = 2\,p\,x$

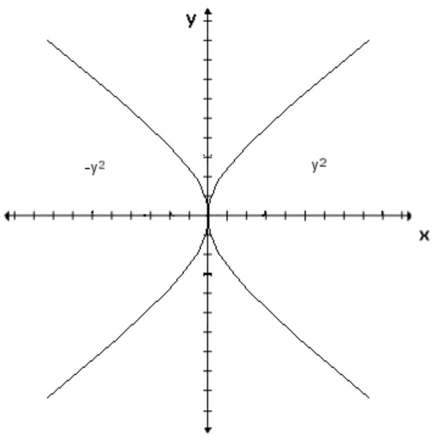
Si el valor es positivo la función se desarrollará sobre el eje +.

Si el valor es negativo la función se desarrollará sobre el eje -.

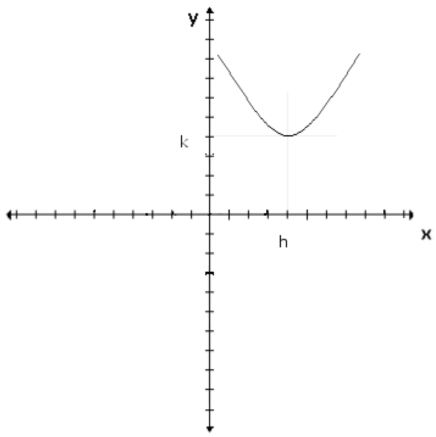
Si es $x^2$ , va a tener como eje de simetría al eje y.

Si es $y^2$, va a tener como eje de simetría al eje x.

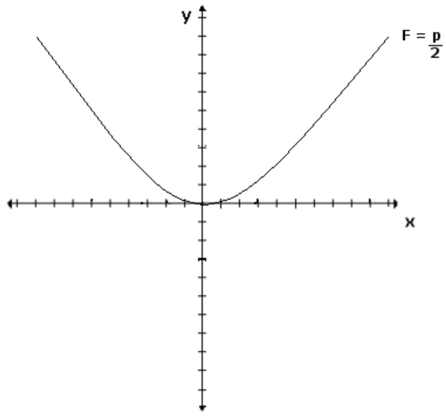


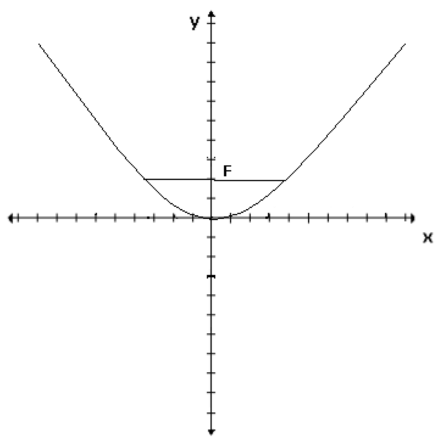




$(x - h)^2 = 2p(y - k)$




p se llama paso de la parábola y me marca la posición de la directriz.



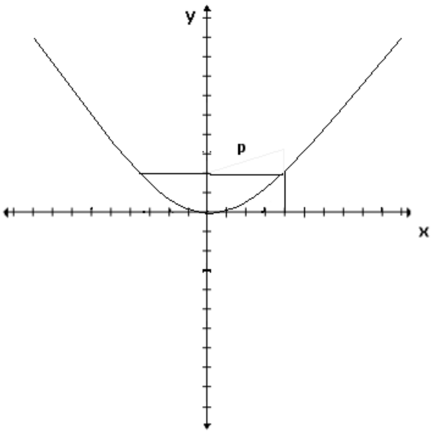

$(x - h)^2 = 2p(y - k)$

$x^2 = 8y$

$2p = 8$

$p = 4$

$\frac{p}{2} = 2$




Las cuádricas son superficies que pueden ser con centro o sin centro.

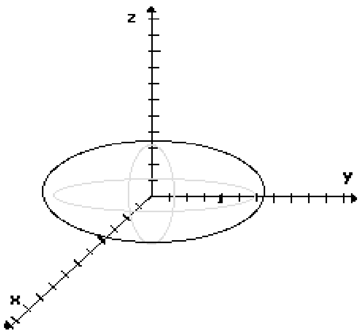
Cuádricas: - Con centro
- Sin centro

Con centro:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Todas las variables tienen cuadrados por eso son con centro.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Elipsoide

Todas esas ecuaciones tienen marcos en forma de elipse por eso en un entorno tridimensional entre los ejes x, y, z forman una elipse.

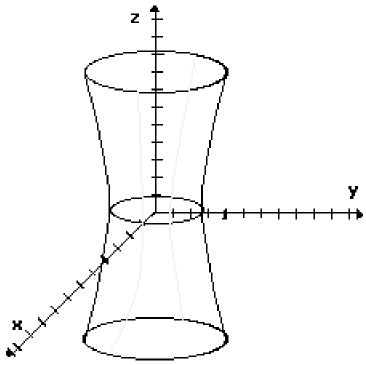



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$ En el plano “x y” hay una elipse

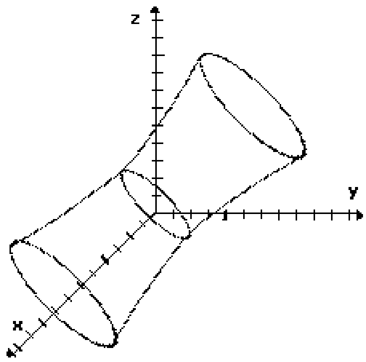
Esto llega a formar un hiperboloide de una hoja. La cantidad de hojas la dan la cantidad de negativos que posee la ecuación.

En el plano “x z” hay una hipérbola

En el plano “y z” hay una hipérbola




$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Si alguno de los ejes es negativo, el “tacho” va por ese eje.

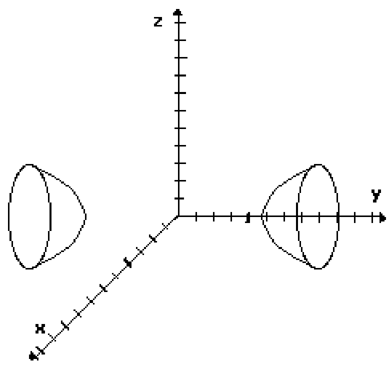



$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Hiperboloide de dos hojas.

En el plano “x y” hay una hipérbola
En el plano “x z” hay una elipse imaginaria
En el plano “y z” hay una hipérbola

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Elipse imaginaria.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$



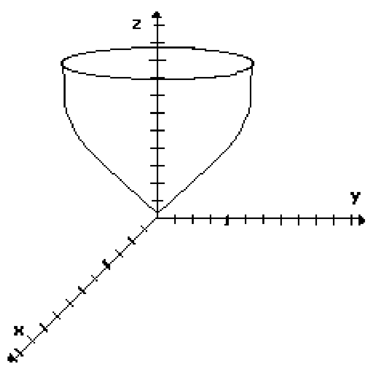

Si todas son negativas no es NADA.
Esas copas quedan en el eje que sea positivo.

Cuádricas sin centro.

$$z = \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En el plano “x y” hay una parábola
En el plano “x z” hay una parábola
En el plano “y z” hay una vértice




$a^2 \neq b^2$ ⇨ Paraboloide Elíptico.
$a^2 = b^2$ ⇨ Paraboloide de Revolución.

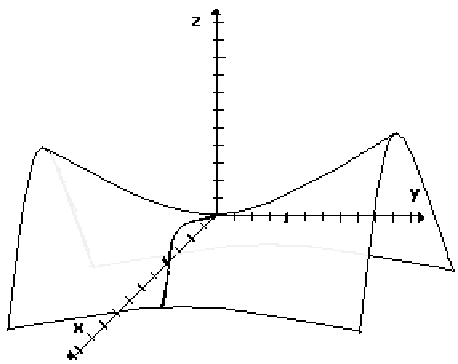
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$ Paraboloide hiperbólico

En el plano “x y” hay una parábola
En el plano “x z” hay una parábola
En el plano “y z” hay rectas que pasan por el orígen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

$$\frac{y^2}{y^2} = b^2 \; . \; x^2$$




a) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ **Rta. Elipsoide**

$$\frac{x^2}{} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$$

$$y^2 + z^2 = 9$$

En el plano “x y” hay una parábola
En el plano “x z” hay una parábola
En el plano “y z” hay rectas que pasan por el orígen

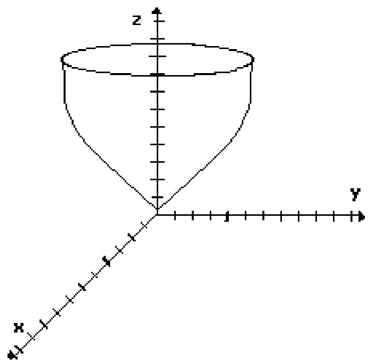
b) $y^2 + z^2 = 4x$ **Rta. Paraboloide de revolución**

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = x$$

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$$

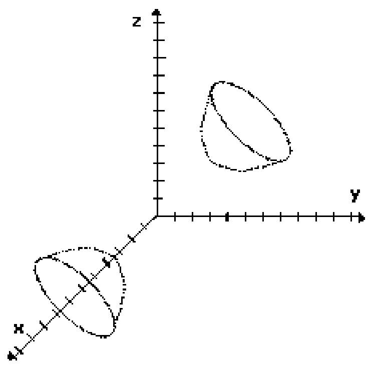
$$y^2 + z^2 = 9$$

En el plano “x y” hay una parábola
En el plano “x z” hay una parábola
En el plano “y z” hay una vértice




c) $x^2 - 3y^2 - 2z^2 = 1$ Rta. Hiperboloide de una hoja

$$x - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} + \frac{z^2}{\frac{1}{2}} = 1$$




En el plano “x y” hay una hipérbola
En el plano “x z” hay una hipérbola
En el plano “y z” hay una elipse imaginaria

**d)** $2x^2 + 4z^2 - y^2 = 0$ **Rta. Cono de sección elíptica**

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} - y^2 - \frac{z^2}{\frac{1}{4}} = 0$$

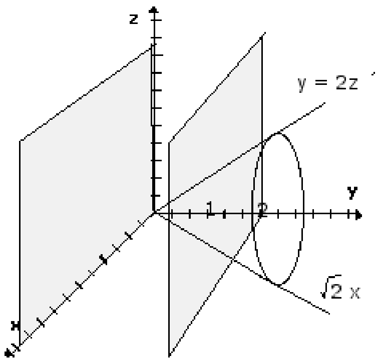
En el plano “x y” ⇨ $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} - y^2 = 0$ ⇨ $y^2 = \frac{x^2}{\frac{1}{2}}$ ⇨ $y = \sqrt{2x^2}$ ⇨ $y = \sqrt{2x}$ ⇨ $y = \pm\sqrt{2x}$

En el plano “x z” ⇨ $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{4}} = 0$ Es el punto (0, 0)

En el plano “y z” ⇨ $-y^2 + \frac{z^2}{\frac{1}{4}} = 0$ ⇨ $\frac{z^2}{\frac{1}{4}} = y^2$ ⇨ $y = \sqrt{4z}$ ⇨ $y = \pm\ 2$

Superficie cónica.

A la variable negativa se le va a dar un valor, en este caso 2.




$y = 2$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} - (2^2) - \frac{z^2}{\frac{1}{4}} = 0$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{4}} = 4$$

Puedo dividir todo por 4.

$$\frac{\frac{x^2}{\frac{1}{2}}}{4} + \frac{\frac{z^2}{\frac{1}{4}}}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{x^2}{2} + z^2 = 1$$

$y = 2$ es un plano que corta a 2 en el eje y.

e) $x^2 + 3y^2 - 2z^2 = 0$ **Rta. Hiperboloide de una hoja**

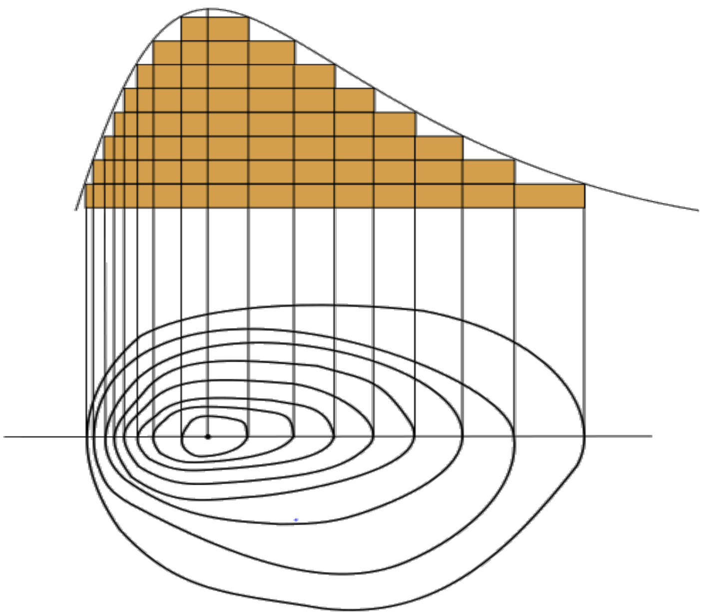
$$x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} + \frac{z^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

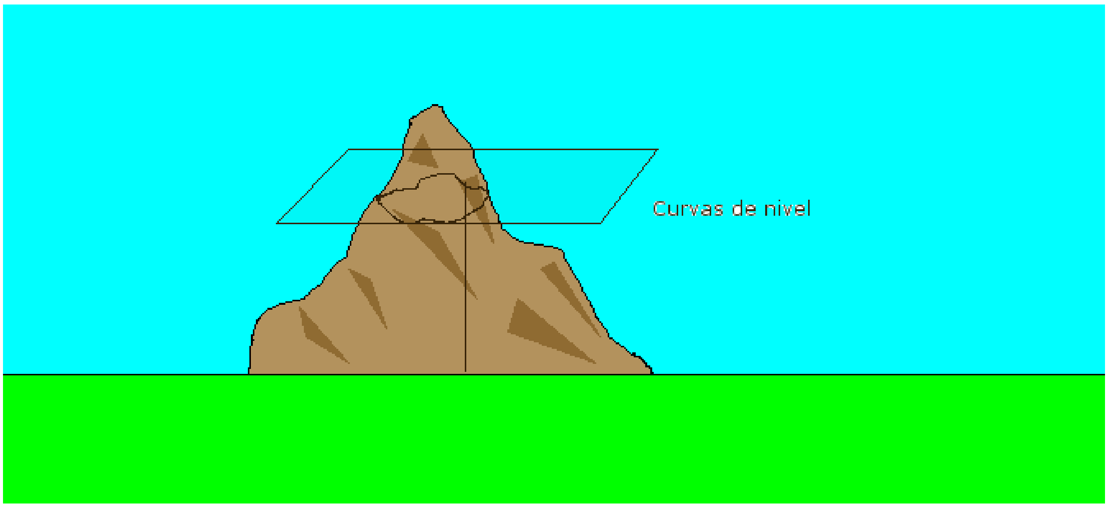
En el plano "x y" hay una parábola
En el plano "x z" hay una parábola
En el plano "y z" hay rectas que pasan por el orígen

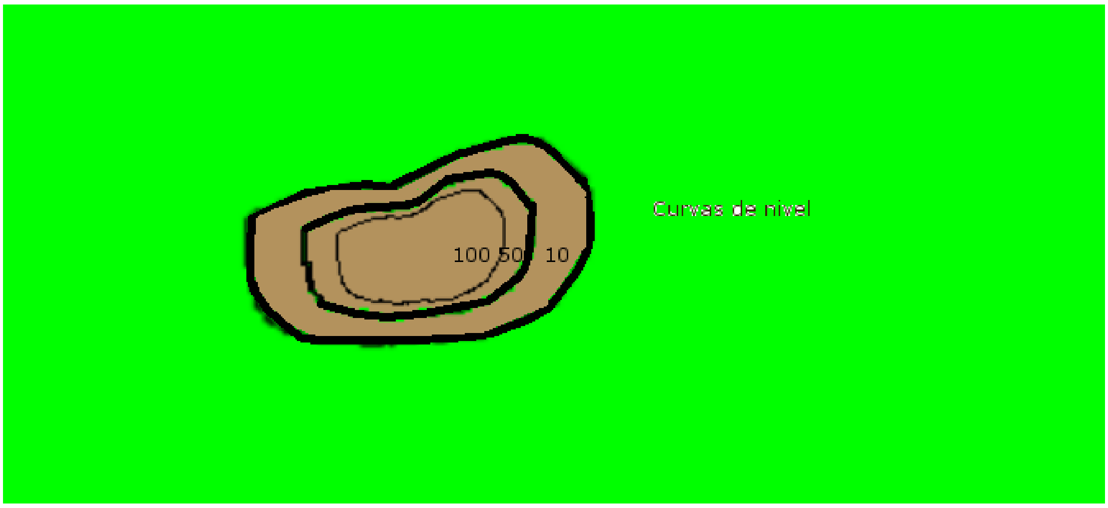
f) $z = x^2 - y^2$ Rta. Paraboloide hiperbólico

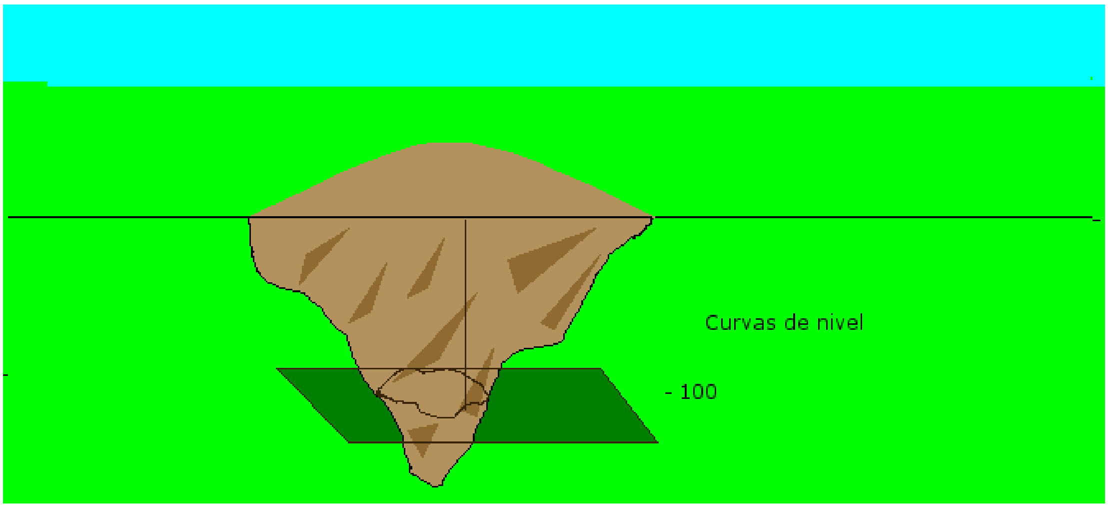
Ejercicio Nº4.

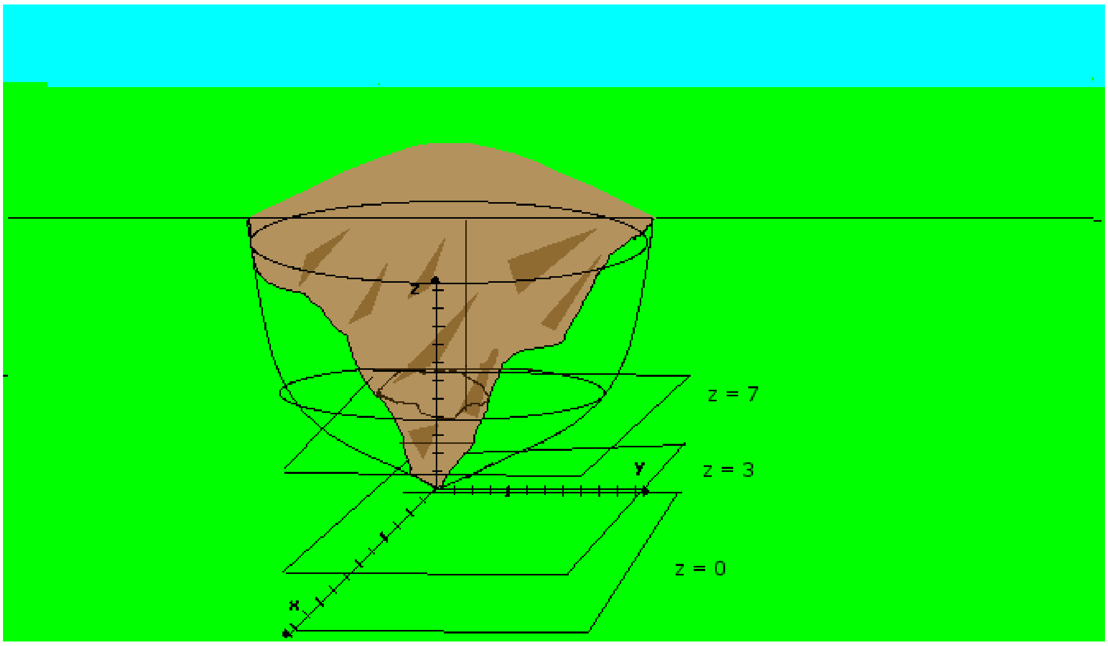
Una curva de nivel es una serie de puntos que se unen en una misma altura.
Una **curva de nivel** es aquella línea que en un mapa une todos los puntos que tienen igualdad de condiciones y de altura. Las curvas de nivel suelen imprimirse en los mapas en color siena para el terreno y en azul para los glaciares y las profundidades marinas. La impresión del relieve suele acentuarse dando un*sombreado* que simule las sombras que produciría el relieve con una iluminación procedente del Norte o del Noroeste. En los mapas murales, las superficies comprendidas entre dos curvas de nivel convenidas se imprimen con determinadas tintas convencionales (tintas hipsométricas). Por ejemplo: verde oscuro para las depresiones situadas por debajo del nivel del mar, verdes cada vez más claros para las altitudes medias, y sienas cada vez más intensos para las grandes altitudes, reservando el rojo o violeta para las mayores cumbres de la tierra.

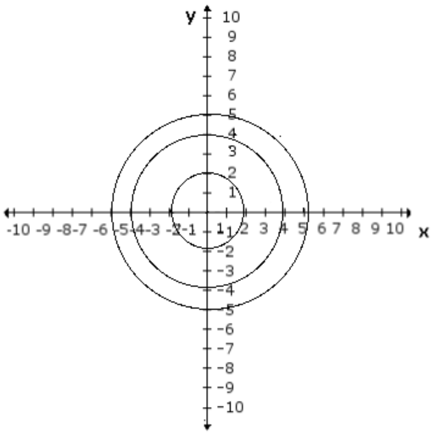



Curvas de nivel


Curvas de nivel
100 50 10


Curvas de nivel
- 100




Son puntos de una misma altura con z = 0.

a) Halle dos curvas de nivel de cada una de las siguientes funciones:

i) $z = x^2 - y^2$ Rta. Circulos concentricos ii) $z = \sqrt{x \cdot y}$ Rta. Paraboloide hiperboloide.

$z = x^2 - y^2$

$z = 4$ C = (0, 0) r = 2

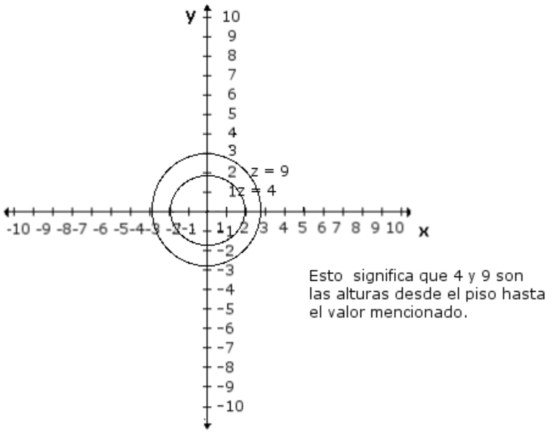
$x^2 - y^2 = 4$

El radio es la raíz cuadrada del resultado de z.

$z = x^2 - y^2$

$z = 9$ C = (0, 0) r = 3

$x^2 - y^2 = 9$




$z = \sqrt{x \cdot y}$

$x \cdot y = z^2$

Hay que darle valores ahora a z.

$x \cdot y = z^2$

x. y = 9

z = 2

**x . y = 4**

z = -3

**x . y = 9**

x . y = 4

$y = \frac{4}{x}$

Función Homográfica.

Asíntota Vertical:

$x \neq 0$, eje y.

Asíntota Horizontal:

$y = \frac{a}{c} = \frac{0}{1} = 0$ , y = 0, eje x.

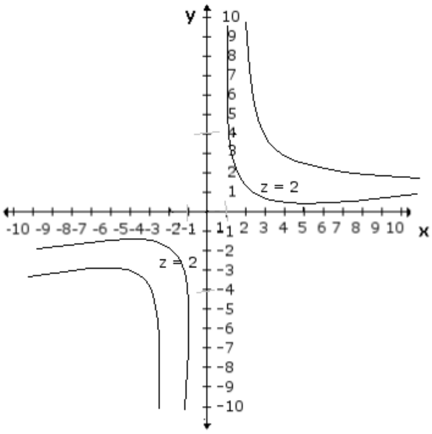
x . y = 9

$y = \frac{9}{x}$

$z = \frac{y}{x^2 - 1}$ z = 9 ; z = 4

$\frac{y}{x^2 - 1} = 9$

y = $9 (x^2 - 1)$
y = $9 x^2 - 9$




b) Halle dos superficies de nivel de cada una de las siguientes funciones

i) $U = x^2 + y^2 - z^2$ Rta. Si $U > 0$ son hiperboloides de 1 hoja alrededor de OZ. Si $U < 0$ son hiperboloides de 2 hojas alrededor de OZ.

U = 1
$x^2 + y^2 - z^2 = 1$ Hiperboloide de 1 hoja

U = 4
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$$
A medida que u le de valores más grandes, tendré hiperboloides más grandes.

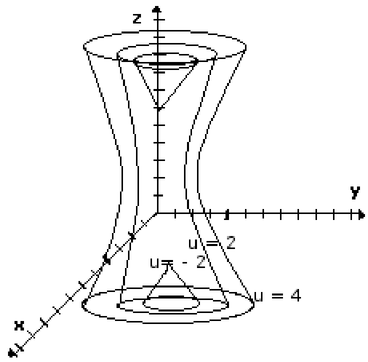
U = -2
$x^2 + y^2 - z^2 = -2$

$$\frac{x^2}{-2} + \frac{y^2}{-2} - \frac{z^2}{-2} = -1$$

$$-\frac{x^2}{-2} - \frac{y^2}{-2} + \frac{z^2}{-2} = 1$$ Hiperboloide de 2 hojas

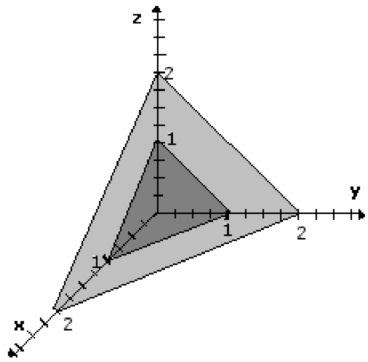
U = 0
$x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Lo que pasa es que es como si en el medio del hiperboloide, es decir, desde el centro hacia arriba y abajo, fuera a presionarse y llegar hasta el punto 0 antes mencionado, se cortaran las rectas y se formaran luego dos pequeñas hiperboloides, (doble hoja).




ii) $U = x + y + z$ Rta. Planos paralelos.

$U = 2$
$x + y + z = 2$




Ejercicio Nº5. Utilizando la definición de limite funcional demuestre que :

Recordemos que el cálculo del límite para una variable era:

$\lim\limits_{x \to x0} f(x) = L$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \delta = \varphi(\varepsilon)$
$\forall \varepsilon \in D_f \wedge 0 < | x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Para varias variables ahora es:
$\lim\limits_{\substack{x \to x0 \\ y \to y0}} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \delta = \varphi(\varepsilon)$

$\forall$ (x, y) $\in D_f \wedge 0 < | x - x_0| \wedge | y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon$

a) $\lim\limits_{(x, y) \to (2, -1)} (7x - 2y) = 11$ Rta. $0 < \delta < \varepsilon / 9$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to -1}} (7x - 2y) = 11$

$| y - 2| < \delta$

$\wedge \qquad \Rightarrow | 7x - 2y - 16| < \varepsilon$

$| y + 1| < \delta$

$- \delta < | x - 2| < \delta$

$2 - \delta < x < 2 + \delta$ -> Esta es mi expresión en x

$- \delta < | y + 1| < \delta$

$-1 - \delta < y < \delta - 1$ -> Esta es mi expresión en y

Multiplico mi expresión en x por 7. $7. (2 - \delta) < 7x < 7. (2 + \delta)$

Multiplico mi expresión en x por -2. $-2. (2 - \delta) < -2y < -2. (2 + \delta)$

Cambio los operadores por los negativos $2. (2 - \delta) > -2y > 2. (2 + \delta)$

$\mathbf{14 - 7\delta < 7x < 14 + 7\delta}$

$+$

$\mathbf{2 + 2\delta > -2y > - 2\delta + 2}$

$\mathbf{14 - 7\delta < 7x < 14 + 7\delta}$ junto menos delta con más delta.

$+$

$\mathbf{2 - 2\delta > -2y > 2 + 2\delta}$

$$\begin{array}{r} 14 - 7\delta \qquad\qquad 14 + 7\delta \\ + \quad 2 - 2\delta < 7x - 2y < 2 + 2\delta \\ \hline 16 - 9\delta < 7x - 2y < 16 + 9\delta \end{array}$$

$16 - 9\delta < 7x - 2y < 16 + 9\delta$

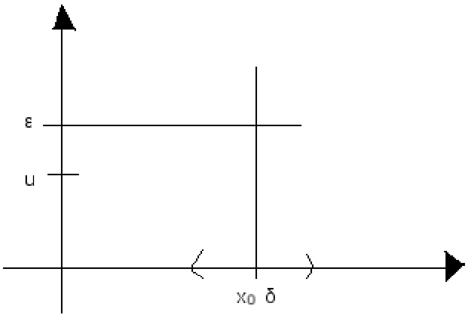
Hay que traer al centro al 16

$- 9\delta < 7x - 2y - 16 < 9\delta$

$|7x - 2y - 16| < 9\delta$ $\varepsilon = 9\delta$

Esto es parecido a $\Rightarrow$ $\delta = \frac{\varepsilon}{9}$

$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{9}$




b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (2x - y) = -1$ Rta. $0 < \delta < \varepsilon / 3$

<u>Ejercicio Nº6</u>. Calcule utilizando propiedades:

$$\lim_{\substack{x \to x0 \\ y \to y0}} f(x, y) = L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ límites iterados , es decir Limite 1 = Limite 2} \\ \\ \exists \text{ límite doble } = D \end{array} \right\} \text{Limite 1 = Limite 2 = LD}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x + 2x\,y^2 - 1)$ Rta. 8

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \dfrac{2xy}{3x + y}$ Rta. 4/3

<u>Ejercicio Nº7</u>. Dadas las siguientes funciones, calcule los límites iterados, si existen; y el límite doble en los puntos que se indican. Justifique.

a) $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$ en P (0, 0) Rta. 3; 2;.

En el primer límite "y" va adentro y "x" va afuera. O sea "y" se realiza primero.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} = \frac{3x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} = L_1 = \lim_{x \to 0} \left[ \underbrace{\lim_{y \to 0} \frac{3x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}}_{L(x)} \right] =$$

En el primer límite "x" va adentro y "y" va afuera. O sea "x" se realiza primero.

$$L_2 = \lim_{y \to 0} \left[ \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}}_{L(y)} \right] =$$

$$\left. \begin{array}{l} L_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 3 \\ \\ L_2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 2 \end{array} \right\} \left. \text{Como estos dos límites son distintos.} \right\} \nexists \lim_{\substack{x \to x0 \\ y \to y0}} f(x, y) = L$$

$$LD = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} = \frac{3x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} \not\exists$$

b) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^3 - 6$ en P (1, 1) Rta. -1, -1, -1

c) $f(x, y) = \dfrac{2x + 6y + 14}{7x - 5y - 29}$ en P (2, -3) Rta. 2/7; -6/5;

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to -3}} = \frac{2x + 6y + 14}{7x - 5y - 29} = L_1 = \lim_{x \to 2} \left[ \lim_{y \to -3} \underbrace{\frac{2x + 6y + 14}{7x - 5y - 29}}_{L(x)} \right] =$$

En el primer límite "x" va adentro y "y" va afuera. O sea "x" se realiza primero.

$$L_2 = \lim_{y \to -3} \left[ \lim_{x \to 2} \underbrace{\frac{2x + 6y + 14}{7x - 5y - 29}}_{L(y)} \right] =$$

$$L_1 = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 4}{7x - 14} = \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hopital

$$L_1 = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 4}{7x - 14} = \lim_{x \to 2} \frac{2}{7}$$

$$L_1 = \lim_{y \to -3} \frac{6y + 18}{-5y - 15y} = \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hopital

$$L_1 = \lim_{y \to -3} \frac{6y + 18}{-5y - 15y} = \lim_{x \to -3} -\frac{6}{5}$$

Como estos dos límites son distintos.

$$\not\exists \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to -5}} f(x, y)$$

$$LD = \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to -3}} = \frac{2x + 6y + 14}{7x - 5y - 29} = \frac{0}{0} \not\exists \lim$$

d) $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ en P (0, 0) Rta. 3; 2;

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \left[ \lim_{y \to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right] = \frac{0}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \left[ \lim_{y \to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right] = \frac{0}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Limite 1 = Limite 2

$$LD = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} = \frac{3x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} \not\exists \text{ porque es una indeterminación}$$

e) $f(x, y) = \dfrac{xy - 1}{x^3 - y^2}$ en P (1, 1) Rta. 1/3; -1/2;.

Ejercicio Nº8.

f(x, y) es continua en $(x_0, y_0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \exists\ f(x_0, y_0) \\ 2)\ \lim f(x, y) = L \\ 3)\ f(x_0, y_0) = L \end{cases}$$

Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Si es discontinua, clasifique el tipo de discontinuidad.

a) $f(x, y) = \begin{cases} 3xy & \text{si } (x, y) \neq (1, 2) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 2) \end{cases}$ en P(1, 2)

Rta. Discontinuidad evitable en P(1,2)

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en P(0, 0)

Rta. Discontinuidad esencial en P(0,0)

P(0, 0)

Analizamos las condiciones:

1) $\exists\ f(0, 0) = 0$

2) $$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0}\left[\lim_{y \to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2}\right] = \lim_{y \to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \\ &\lim_{y \to 0}\left[\lim_{x \to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2}\right] = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} 2 \neq 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) \end{matrix}$$

f(x, y) es discontinua en (0, 0).

c) $f(x, y) = \begin{cases} f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 2 \end{cases}$ en P(0, 0)

Rta. Discontinuidad esencial en P(0,0)

Ejercicio Nº9.

c) Siendo $W = f(x, y) = x^2 + y$, donde $x = 1 - \dfrac{1}{t}$, $y = \dfrac{1}{t^2}$ calcule la función compuesta W(t)

$w = f(x, y) = x^2 + y$

$x = 1 - \frac{1}{t}$

$x = \frac{1}{t^2}$

$w(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{t^2} = 1 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2}$

$w(t) = 1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2} =$

$w'(t) = \frac{2}{t^2} - \frac{4t}{t^3}$

d) Siendo $W = f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, donde:
$x = t \cdot r$; $y = 2 \cdot s \cdot t$; $z = s \cdot \text{sen}(r)$, calcule W (t, r, s)

$x = t \cdot r$
$y = 2. st$
$z = s. \text{sen}(r)$

$w(t, r, s) = \ln(t^2. r^2 + 4. s^2 r^2 + s^2. \text{sen}^2 r)$
Como $\text{sen}^2$ no depende de t vale 0

$w(t) = \dfrac{2 + r^2 + 8 . s^2 t}{t^2. r^2 + 4. s^2 r^2 + s^2. \text{sen}^2 r} =$

$w(r) = \dfrac{2rt^2 + 2s^2 + \text{sen } r + \cos r}{t^2. r^2 + 4. s^2 + s^2. \text{sen}^2 r} =$

$w(s) = \dfrac{8rt^2 + 2s^2 + \text{sen}^2 r}{t^2. r^2 + 4. s^2 + s^2. \text{sen}^2 r} =$

TRABAJO PRACTICO Nº 6. DERIVADAS PARCIALES. DIFERENCIAL TOTAL. DERIVADAS DE FUNCIONES COMPUESTAS. DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Ejercicio Nº1.

$$Y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

z = f(x, y) son derivadas parciales.
Puedo derivar una variable por vez, no puedo derivar todas a la vez.
Las demás variables quedan como constantes tienen tantas derivadas como variables tenga.

$$Zx = f_x = \frac{\delta z}{\delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x Z}{\Delta x}$$

$$Zy = f_y = \frac{\delta z}{\delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y Z}{\Delta y}$$

Calcule aplicando la definición las derivadas parciales de f en el punto indicado:

a) $z = f(x, y) = x^3 + y$ en P(1, 2) Rta: $f'_x(1, 2) = 3$; $f'_y(1, 2) = 1$

$$z + \Delta x Z = (x + \Delta x)^3 + y \quad .$$

$$\Delta x Z = \cancel{x^3} + 3x^3 \Delta x + 3x \Delta^2 x + \Delta^3 x \cancel{+ y} \underbrace{\cancel{- x^3 - y}}_{-z}$$

$$\frac{\Delta x Z}{\Delta x} = \frac{3x^3 \Delta x + 3x \Delta^2 x + \Delta^3 x}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta x Z}{\Delta z} = \frac{\cancel{\Delta x} (3x^3 + 3x \Delta x + \Delta^2 x)}{\Delta x} =$$

$$Zx = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^3 + 3x \Delta x + \Delta^2 x) = 3x^2$$

$3x^2$

Zx' (1, 2) = 3 . 1 = 3

$z + \Delta y Z = x^3 + (y + \Delta y)$

$$\frac{\Delta y Z}{\Delta y} = \frac{\cancel{x^3} \cancel{+ y} + \Delta y \cancel{- x^3} \cancel{- y}}{\Delta y}$$

$$\frac{\Delta y Z}{\Delta y} = \frac{\cancel{\Delta y}}{\cancel{\Delta y}} = 1 \qquad Zy = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Las reglas de derivación son las mismas que en una variable, nada más que hay que dejar fija una variable, dependiendo la función con respecto a que variable deriva.

| | |
|---|---|
| $Z = x^3 + yx$ | $z = x^3 + y$ |
| $Z'x = 3x^2 + y$ | $Zx = 3x^2$ |

$Z'y = x$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $Zy = 1$

b) $z = f(x, y) = 2x^3\ y - 3\,x\,y + 5$ $\qquad$ en P(1, 2) $\qquad$ Rta: $f\,'_x\,(1, 2) = 3$; $\quad f\,'_y\,(1, 2) = 1$

<u>Ejercicio Nº2</u>. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \sqrt{5x - y^2}$ $\qquad$ Rta. $\quad f\,'_x = \dfrac{5}{2\sqrt{5x - y^2}}$ $\qquad f\,'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{5x - y^2}}$

$f(x, y) = \sqrt{5x - y^2} = (5x - y)^{1/2} \,.\, 5$

$Z'x = \dfrac{1}{2}\,(5x - y^2)^{-1/2} \,.\, 5$

$Z'y = \dfrac{1}{2}\,(5x - y^2)^{-1/2} \,.\, (-2y)$

b) $f(x, y) = \ln\,(x - \sec^2 y)$ $\qquad$ Rta. $\quad f\,'_x = \dfrac{1}{x - \sec^2 y}$ $\qquad f\,'_y = \dfrac{-2\sec^2 y \,.\, \mathrm{tg}\, y}{x - \sec^2 y}$

$Z'x = \dfrac{1}{x - \sec^2 y}$

$2 \,.\, \sec y \,.\, \sec y \,.\, \mathrm{tg}\, y$

$Z'y = \dfrac{-2\sec^2 y \,.\, \mathrm{tg}\, y}{x - \sec^2 y}$

c) $f(x, y) = x \,.\, e^{xy}$ $\qquad\qquad$ Rta. $\quad f\,'_x = e^{xy}\,(1 + xy)$ $\qquad f\,'_y = x^2 \,.\, e^{xy}$

$Zx = e^{xy} + xy\, e^{xy}$

$Zy = x \,.\, e^{xy} \,.\, x = x^2 \,.\, e^{xy}$

d) $f(x, y) = \mathrm{sen}^2\,(x\,y - \mathrm{tg}\, y)$ Rta. $f\,'_x = y\ \mathrm{sen}\,[2\,(x\,y - \mathrm{tg}\, y)]$ $\quad f\,'_y = (x\ \mathrm{sen}^2\ y)\ \mathrm{sen}\,[2\,(x\,y - \mathrm{tg}\, y)]$

e) $f(x, y) = e^{\mathrm{sen}(y/x)}$ $\qquad$ Rta. $\quad f\,'_x = -\dfrac{y}{x^2} \,.\, e^{\mathrm{sen}(y/x)} \,.\, \cos\dfrac{y}{x}$ $\qquad f\,'_y = \dfrac{1}{x} \,.\, e^{\mathrm{sen}(y/x)} \,.\, \cos\dfrac{y}{x}$

$Zx = e^{\mathrm{sen}(y/x)} \,.\, \cos\dfrac{y}{x}\ - yx^{-2}$

$Zy = e^{\mathrm{sen}(y/x)} \,.\, \cos\dfrac{y}{x} \,.\, \dfrac{1}{x}$

$z = f(x, y)$

Esto es el teorema de la derivación cruzada o de Schuwartz

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & Zxxx \\
 & Zxx \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
Zx = \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & Zxxy \\
 & & Zxyx \\
 & Zxy \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & Zxyy
\end{tikzcd}$$

Zyxx
Zyx
Zy =                Zyxy
                    Zyyx
Zyy
Zyyy

z = (x, y, q)
Cantidad de variables. $3^3 = 27$

Ejercicio Nº3. Dadas las siguientes funciones, calcule las derivadas sucesivas que se indican:

a) $f''_{xy}(x, y)$ si $f(x, y) = x \cos y + y \cos x$ Rta. $f''(x, y) = - \text{sen } y – \text{sen } x$
$Zx = \cos y - y \text{ sen } x$
$Zxy = - \text{sen } y - \text{sen } x$

b) $f''_{yz}(x, y, z)$ si $f(x, y, z) = e^{xyz}$ Rta. $f''(x, y, z) = e^{xyz} (x^2 y z + x)$
$Zx = e^{xyz} . x . z$
$Zxy = x. e^{xyz} + x . z . x . y . e^{xyz}$
$x. e^{xyz} + x^2 . zy . e^{xyz}$

c) $f''_{yz}(1, 1)$ si $f(x, y) = x^2 \text{ arc tg } [y / x]$ Rta. 1

Ejercicio Nº4. Verifique que:

a) $z = x^2 + x y$ satisface: $x Z'_x + Z'_y = 2z$

$x Z'_x + Z'_y = 2z$
$x (2x + y) + y (x) = 2 (x^2 + xy)$
$2x^2 + xy + xy = 2x^2 + 2xy$
$2x^2 + 2xy = 2x^2 + 2xy$

b) $z = \ln ( x^2 + x y + y^2)$ satisface: $x Z'_x + Z'_y = 2$

$\ln u = \dfrac{u'}{u}$
$x Z'_x + Z'_y = 2$

$x = \dfrac{1}{x + xy + y^2}$

$z' = x . \dfrac{(2x + y)}{x^2 + xy + y^2} + y . \dfrac{(x - 2y)}{x^2 + xy + y^2} =$

$$\frac{2x^2 + xy + xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} =$$

$$\frac{2\cancel{(x^2 + xy + y^2)}}{\cancel{x^2 + xy + y^2}} = 2$$

Ejercicio Nº5. a) Halle: df (1, 1) si $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$ Rta. df (1, 1) = dx – 2 dy

b) Hallar dz en (3, 4) si: $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ Rta. $\frac{3}{5}\,dx + \frac{4}{4}\,dy$

c) Calcular $\Delta z$ y dy siendo $z = f(x, y) = x^2 y - 5y / x$ en (1, -2);

$\Delta x = 10^{-3}$ ; $\Delta y = 10^{-2}$

Rta. $\Delta z = -0,0539$ ; $dz = -0,054$

d) La altura de un cono es h = 30 cm., el radio de su base es r = 10 cm. ¿ Cómo variará el volumen de dicho cono si h aumenta 3 mm y r disminuye 1 mm? (El volumen del cono es: $V = \pi r^3 h/3$) (Utilizar la igualdad aproximada de $\Delta z \cong dz$) Rta. $\Delta V \cong dV = -10\pi$

e) Halle aproximadamente ka variación que experimenta la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm respectivamente, cuando el primero se alarga 1/4 cm y el segundo se acorta 1/8 cm. Rta. 0,05 cm

f) Calcule aproximadamente $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$

g) Calcule aproximadamente $(1,02)^3 \cdot (0,97)^3$

Ejercicio Nº6.

d) Siendo $U = f(x, y) = x^2 + x y + y^2$ , donde : $x = 3 / t$ ; $y = t^2 - 1$ Halle du / dt.

Rta. $\dfrac{du}{dz} = \dfrac{-81 + 6t^4 + 6t^2}{t^4}$

$u = x^2 - 2xy$ $\quad x = \dfrac{3}{t}$

$y = t^2 - 1$

du = u' (t)

$$u(t) = \frac{9}{t^2} - 2\,\frac{3}{t}\,(t^2 - 1)$$

$$u(t) = \frac{9}{t^2} - 6\,t + \frac{6}{t^2}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{18\,\cancel{t}}{t^{\cancel{4}\;3}} - 6 - \frac{6}{t^2}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{18}{t^3} - \frac{6}{t^2} - 6$$

$$z = f(x, y) = e^{3x+2y} \qquad \begin{cases} x = \cos t \\ y = t^2 \end{cases}$$

$$z(t) = e^{3\cos t + 2t^2}$$

$$\mathbf{\frac{dz}{dt} = e^{3\cos t + 2t^2} \,.\, (-\,3\ \mathrm{sen}\ t + 4t)}$$

e) Siendo $Z = f(x, y) = e^{3x + 2y}$ , donde: $x = \cos t$; $y = t^2$ Halle $dz / dt$.

Rta. $\frac{dz}{dt} = e^{3\cos t + 2t^2}\,(4t - 3\ \mathrm{sen}\ t)$

f) Demuestre que si $z = f(x + a\,y)$ ; donde f es una función diferenciable de una sola variable, entonces: $\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x}$

Ejercicio Nº7. Dadas las ecuaciones

b) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ y b) $G(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy = 0$

a) Encuentre por lo menos dos puntos soluciones de las ecuaciones dadas.

b) Verifique la existencia de "y" como función de "x" en un entorno de los puntos hallados.

c) Calcule y' en los puntos hallados

Ejercicio Nº8. Dada la ecuación $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy = 0$

c) Analice la existencia de $y = f(x)$ y $x = g(y)$ en un entorno de P= (1, 1).

d) Calcule las primeras derivadas, si existen, en ese punto.

Ejercicio Nº9.

Extremos relativos.

$Z = f(x, y)$

Condición Necesaria.

$$\left.\begin{array}{l} Zx = 0 \\ Zy = 0 \end{array}\right\} Pc$$

Pueden cada uno depender de su variable, o las dos pueden depender ambas de la misma variable, y hay que resolver con sistemas de ecuaciones de 2 variables.

Hay que calcular un Hessiano.

H = Hessiano

Hay un número de 3 tipos

$$H = \begin{vmatrix} Zxx & Zxy \\ Zyx & Zyy \end{vmatrix} = \text{Nº}$$

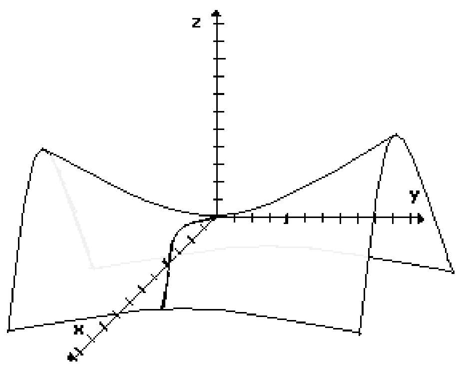
Da un número

+ (> 0)

= 0

- (< 0)

Si (< 0) es un punto de ensilladura. Es decir que marca un cambio de concavidad, el cambio de curvas.




Si (= 0) no sirve. Para clasificarlo tengo que estudiar los signos.

Si (> 0) entonces el punto puede ser un máximo o un mínimo.

Zxx =

< 0 (-) ⇨ Punto Máximo

> 0 (+) ⇨ Punto Mínimo

Calcule los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ Rta. (2; 1; -28) mínimo relativo

(-2; -1; 28) máximo relativo

1) Hallo las derivadas.

$Zx = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$

$Zy = 6xy - 12 = 0$

2) Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

No puedo aplicar determinantes. Aplico Sustitución.

Me conviene trabajar sobre $6xy - 12 = 0$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{12}{6x} = \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

$$3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 - 15 = 0$$

3) Arreglamos la ecuación

$$3x^2 + \frac{12}{x^2} - 15 = 0$$

Multiplico todo por $x^2$

$3x^4 + 12 - 15x^2 = 0$

$3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$

Divido todo por 3

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

4) Resolvemos por el método de la resolvente, previa transformación.

Cuando los exponentes de la función principal son reales.

$t = x^2$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} t_1 \\ t_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{-5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$t_1 = 4 =$

$\sqrt{4} = x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 1$

$- \sqrt{4} = x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -1$

$t_2 = 1 =$

$\sqrt{1} = x_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 2$

$- \sqrt{1}\ x_4 = 1 \Rightarrow y_4 = 2$

$P_1 (2, 1, z_1)$
$P_2 (- 2, - 1, z_2)$
$P_3 (1, 2, z_3)$
$P_4 (- 1, - 2, z_4)$
Reemplazamos x e y en la función y obtenemos los puntos en Z.

$P_1 (2, 1, - 28)$
$P_2 (- 2, - 1, 28)$
$P_3 (1, 2, -26)$
$P_4 (- 1, - 2, 26)$

5) Calculamos el Hessiano.

Zxx = 6x
Zxy = 6y
Zyx = 6y } Estos dos resultados deben ser iguales, los demás si son iguales es pura casualidad
Zyy = 6x

$$H = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2$$

No me dio un número porque tengo 4 puntos que encontré con la resolvente.

6) Reemplazo los puntos x, y en el resultado del Hessiano.

$(2, 1, z_1)$
$Hp_1 = 36.\ 2^2 - 36.\ 1^2 = 144 - 36 = 108 > 0\ (+) \Rightarrow$ **Máximo o mínimo.**
Hacemos la segunda derivada para saber si es un máximo o un mínimo.
$Zxx\ (p_1) = 6 . 2 = 12 > 0\ (+) \Rightarrow p_1$ es **un mínimo.**

$Hp_2 = 36.\ (-2)^2 - 36.\ (-1)^2 = 144 - 36 = 108 > 0\ (+) \Rightarrow$ **Máximo o mínimo.**
$Zxx\ (p_2) = 6 . (-2) = - 12 > 0\ (-) \Rightarrow p_2$ es **un mínimo.**
Se hace la derivada segunda en x, porque dan el mismo resultado hacer xx o yy, no interesa.

$Hp_3 = 36.\ 1^2 - 36.\ 2^2 = 36 - 144 = - 108 < 0\ (-) \Rightarrow$ **$p_3$ es un punto de ensilladura.**

$Hp_4 = 36. (-1)^2 - 36. (-2)^2 = 36 - 144 = -108 < 0$ (-) ⇨ **$p_4$ es un punto de ensilladura.**

b) $z = 2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1$ Rta. (-2/3; 1/3; 0) mínimo relativo

c) $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ Rta. (1; 1; 3) mínimo relativo

d) $z = x^3 + y^3 + \frac{48}{x} + \frac{48}{y}$ Rta. (2; 2; 64) mínimo relativo
Rta. (-2; -2; 64) máximo relativo

1) Hallo las derivadas.

$Zx = 3x^2 - \frac{48}{x^2} = 0$

$Zy = 3y^2 - \frac{48}{y^2} = 0$

2) Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x^2 - \frac{48}{x^2} = 0 \\ 6xy - \frac{12}{x2} = 0 \end{cases}$$

Me conviene trabajar sobre $3x^2 - \frac{48}{x^2} = 0$

$$\begin{cases} 3x^2 - \frac{48}{x^2} = 0 \\ 6xy - \frac{12}{x2} = 0 \end{cases}$$

$3x^4 - 48 = 0$ ⇨ $x = \sqrt[4]{16} =$ 2 = x1
- 2 = $x_2$

$3y^4 - 48 = 0$ ⇨ $x = \sqrt[4]{16} =$ 2 = y1
- 2 = $y_2$

3) Los puntos serán las distintas combinaciones de los cuatro puntos anteriores:

$x_1\ y_1$
$x_2\ y_2$
$y_1\ x_1$
$y_2\ x_2$

O sea:

$P_1$ (2, 2, $z_1$)
$P_2$ (2, - 2, $z_2$)
$P_3$ (-2, 2, $z_3$)
$P_4$ (- 2, - 2, $z_4$)
Reemplazamos x e y en la función y obtenemos los puntos en Z.

$P_1$ (2, 1, - 28)
$P_2$ (- 2, - 1, 28)
$P_3$ (1, 2, -26)
$P_4$ (- 1, - 2, 26)

4) Calculamos el Hessiano.

$Zxx = 6x + \frac{96}{x^3}$

$\left.\begin{array}{l} Zxy = 0 \\ Zyx = 0 \end{array}\right\}$ Estos dos resultados deben ser iguales.

$Zxx = 6x + \frac{96}{x^3}$

$$H = \begin{vmatrix} 6x + \frac{96}{x^3} & 0 \\ 0 & 6x + \frac{96}{x^3} \end{vmatrix} = \left(6x + \frac{96}{x^3}\right)\left(6y + \frac{96}{y^3}\right)$$

5) Reemplazo los puntos x, y en el resultado del Hessiano.

$P_1$ (2, 2, $z_1$)
$Hp_1 = \; > 0$ (+) ⇨ **Máximo o mínimo.**
Se puede afirmar que $p_1$ es mayor que 0 porque los puntos son positivos, los operadores son positivos y encima es una suma.
Lo único que calculo es la derivada.
$Zxx\,(p_1) = 6 \,.\, 2 + \frac{96}{x^3} = 12 > 0$ (+) ⇨ $p_1$ **es un mínimo.**
Se hace la derivada segunda en x, porque dan el mismo resultado hacer xx o yy, no interesa.
$Hp_2 = \; < 0$ (-) ⇨ **$p_2$ es un punto de ensilladura.**
$Hp_3 = \; < 0$ (-) ⇨ **$p_3$ es un punto de ensilladura.**

$Hp_4 = \; > 0 \; (+) \Rightarrow$ **Máximo o mínimo.**
$Zxx\ (p_4) = 6 \,.\, -2 + \frac{\cancel{96}}{-2^3} = -24 < 0 \; (+) \Rightarrow p_1$ **es un máximo.**

e) $z = x^3 + y^2 - 3x$ Rta. (1; 0; -2) mínimo relativo

1) Hallo las derivadas.

$Zx = 3x^2 - 3$
$Zy = 2y$

2) Resolver las ecuaciones

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \; = \pm\sqrt{1} & \begin{matrix} 1 = x_1 \\ -1 = x_2 \end{matrix} \\ 2y = 0 \Rightarrow \; = 0 \end{cases}$$

3) Los puntos serán las distintas combinaciones de los puntos anteriores:
$x_1$ y
$x_2$ y

O sea:

$P_1$ (1, 0, $z_1$)
$P_2$ (-1, 0, $z_2$)

Reemplazamos x e y en la función y obtenemos los puntos en Z.

$P_1$ (2, 1, - 28)
$P_2$ (- 2, - 1, 28)
$P_3$ (1, 2, -26)
$P_4$ (- 1, - 2, 26)

4) Calculamos el Hessiano.

$Zxx = 6x$
$\left.\begin{matrix} Zxy = 0 \\ Zyx = 0 \end{matrix}\right\}$ Estos dos resultados deben ser iguales.
$Zxx = 2$

$$H = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12x$$

No me dio un número porque tengo 2 puntos

5) Reemplazo los puntos x, y en el resultado del Hessiano.

$P_1\ (2, 2, z_1)$
$Hp_1 = 12.\ 1 = 12 > 0\ (+)$ $\Rightarrow$ **Máximo o mínimo.**

$Zxx\ (p_1) = 6\ .\ 1 > 0\ (+)$ $\Rightarrow$ **$p_1$ es un mínimo.**

$Hp_2 = 12.\ (-\ 1) = -\ 12 < 0\ (-)$ $\Rightarrow$ **$p_2$ es un punto de ensilladura.**

f) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x + 9y + 2$ Rta. (1; 4; -19) mínimo relativo

g) $z = 5 - \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$ Rta. (0; 0; 5) mínimo relativo

h) $z = 3x^2 + x\,y$ Rta. No hay extremos

i) $z = \dfrac{4x^3}{3} + \dfrac{y^2}{3} - 6x^2 + y^2 + 9x + y - 2$ Rta. Caso dudoso

Ejercicio Nº10. Un agricultor planta soja y maíz, se sabe que el beneficio de la producción está dado por la expresión $B(x) = 1600\ x + 2400\ y - 2\ x^2 - 4\ y^2 - 4\ x\ y$ donde "x" es la cantidad de hectáreas plantadas de soja, e "y" es la cantidad de hectáreas plantadas de maíz. Halle cuántas conviene plantar con cada cultivo para maximizar el beneficio.

(Rta: x = 200 ha; y = 200 ha; B = 400000)

## REPASO DE ALGUNOS TEMAS

## DERIVADAS PARCIALES

a)

$$z = \ln \underbrace{(sen^2\ x\ y)}_{u}$$

$$Z'x = \frac{2\ .\ sen\ (x\ y)\ .\ cos\ (x\ y)\ .\ y}{(sen^2\ x\ y)} = 2y\ cotg\ (x\ y) \longrightarrow \frac{sen\ (xy)}{cos\ (xy)}$$

$$Z'y = \frac{2\ .\ \cancel{sen\ (x\ y)}\ .\ cos\ (x\ y)\ .\ x}{(sen^2\ x\ y)} = 2x\ cotg\ (x\ y)$$

b)

$$z = \sqrt[4]{\frac{tg\ x\ .\ sec\ y}{xy}} = \left(\frac{tg\ x\ .\ sec\ y}{xy}\right)^{1/4}$$

$$Z'x = \frac{1}{4}\left(\frac{tg\ x\ .\ sec\ y}{xy}\right)^{-3/4} . \left(\frac{sec^2\ x.\ sec\ y\ .\ x\ y\ -\ tg\ sec\ y\ .\ y}{x^2\ y^2}\right) =$$

## INTEGRALES IMPROPIAS

a) $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+3}$$

$$\lim_{t \to \infty} \int_2^t \frac{dx}{x+3} = \lim_{t \to \infty} \ln\ (x+3) \Big|_0^t =$$

Uno o ambos extremos no están definidos, o ciertos números que hacen la integral indefinida.

Aplico Barrow.

$$\lim_{t \to \infty} \left[ \ln\ (t+3) - \ln 5 \right] = \infty$$

b) $$\int_{\infty}^{\infty} \frac{dx}{x+3} =$$

$$\lim_{t \to \infty} \left[ \ln\ (t+3) - \ln\ (-t+3) \right] = \infty$$

b) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x}{x^2 - 4} =$

Un valor compredido entre 1 y 4, la función no está definida.

$$\int_{1}^{2} \frac{x}{x^2 - 4} + \int_{2}^{4} \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{t \to 2} \int_{1}^{2} \frac{x}{x^2 - 4} + \lim_{t \to 2} \int_{2}^{4} \frac{x}{x^2 - 4}$$

## TRABAJO PRACTICO Nº 7. INTEGRALES PARAMÉTRICAS Y MULTIPLES

Ejercicio Nº1. Resolver las siguientes integrales paramétricas:

$$\int f(x, y)\ dx =$$

Solo se puede integral lo que indique la diferencial, en este caso, todas las x.
La o las otras variables actúan como constante y forman parte del resultado.

$$1)\ \int_1^2 \frac{y}{x}\ dx = \quad y\int_1^2 \frac{1}{x}\ dx$$

$$= \ y \ln x \Big|_1^2 =$$

$$= \ y\,[\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0}] =$$

$$= \ y = \ln 2$$

$$2)\ \int_{-1}^{2} (2\,x^2 y^{-2} + 2y)\ dy$$

.Cumplimos primero todas las reglas de la integración. Aquí la integral de la suma es la suma de las integrales.

$$\int_{-1}^{2} 2\,x^2 y^{-2}\ dy + \int_{-1}^{2} 2y\ dy \ =$$

$$2\,x^2 \int_{-1}^{2} y^{-2}\ dy + \quad 2\int_{-1}^{2} y\ \ dy \ =$$

$$2\,x^2\ \frac{y^{-1}}{-1}\Big|_{-1}^{2} \quad + \quad \frac{\cancel{2}\ y^2}{\cancel{2}}\Big|_{-1}^{2} =$$

El $y^{-1}$ va al denominador o sea:

$$= \quad \frac{-\ 2\,x^2}{-2-(-1)} \quad + \quad 4\ -1\ =$$

$$= \quad \boldsymbol{-\frac{2\,x^2}{3} + 3}$$

$$\int^{x} \qquad\qquad \int^{2y}$$

3) $\int_{0} (2x - y)\, dy =$ 4) $\int_{0} 2xy\, dx =$

5) $\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \,.\, \cos y \; dx =$

Ejercicio Nº2. Calcular las siguientes integrales iteradas:

1) $$\int_{0}^{1}\int_{0}^{2} (x + y)\, dx\, dy =$$

Cuando los extremos son números, se resuelve en el orden que aparecen los diferenciales. Tomo desde el centro hacia afuera.

$$\int_{0}^{2} (x + y)\, dx = \int_{0}^{2} x\, dx + \int_{0}^{2} y\, dx =$$

$$\frac{x^2}{2} + y\,x \Big|_{0}^{2} =$$

$$= 2 + 2y$$

$$\int_{0}^{1} (2 + 2y)\, dy = 2\int_{0}^{1} x\, dy + \int_{0}^{1} y\, dy =$$

$$2\,y + \frac{\cancel{2}\,y^2}{\cancel{2}}\Big|_{0}^{1} =$$

$= \quad 2 + 1 = 3$

2) $$\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} (x^2 - y^2)\, dy\, dx =$$

Método de resolución de integrales sucesivas:

$$\int_{-1}^{1}\int_{x}^{x^2} (x^2 - y^2)\, dy\, dx =$$

Tengo que integrar x en principio y tomar entonces la diferencial de y. Siempre integro desde adentro hacia afuera.

$$\int_{-1}^{1}\int_{y}^{y^2} (x^2 - y^2)\, dy\, dx =$$

En este caso en donde las variables indican a y, entonces tomo la diferencial de x.

$$\int_{-1}^{1}\int_{x}^{x^2} (x^2 - y^2)\, dy\, dx =$$

$$\int_{x}^{x^2} (x^2 - y^2)\, dy =$$

$$\int_{x}^{x^2} x^2\, dy - \int_{x}^{x^2} y^2\, dy =$$

$$x^2 \int_{x}^{x^2} dy - \int_{x}^{x^2} y^2\, dy =$$

$$x^2 \,.\, x \Big|_{x}^{x^2} - \frac{y^3}{3}\Big|_{x}^{x^2} =$$

$$x^2 \,.\, (x^2 - x) \Big|_{x}^{x^2} - \frac{1}{3}(x^6 - x^3)\Big|_{x}^{x^2} =$$

$$x^2 - x^4 - \frac{1}{3} x^6 + \frac{1}{3} x^3 =$$

$$x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{3} x^6$$ = Resultado de la primera integral.

$$\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{3} x^6 \quad dx =$$

$$\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}\frac{x^7}{7}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^7}{21}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{21}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{21}\right) = \frac{2}{5} - \frac{2}{21} = \frac{42-10}{105} = \mathbf{\frac{32}{105}}$$

Si tengo un ejercicio como este...

$$\int_{x}^{x^2}\int_{-1}^{1} (x^2 - y^2)\, dx\, dy =$$

Antes de resolver debo ordenar mi ejercicio. Cambio el orden de los diferenciales y también el orden de los signos integrales para que corcuerde con la regla de resolver lo de adentro primero.

$$\int_{-1}^{1}\int_{x}^{x^2} (x^2 - y^2)\, dy\, dx =$$

3) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{1} x\, y\, dx\, dy =$

4) $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{0}^{4} (x^2 + 2y^2 + 1)\, dx\, dy =$

5) $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{2}\int_{0}^{1} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz =$

6) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 .\, y^2 .\, z^2\, dz\, dy\, dx=$

Ejercicio Nº3. Dibujar y calcular el área que corresponde a cada una de las siguientes integrales. Comparar los resultados y dar una conclusión.

a) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{y^2}^{4} dx\, dy =$

$$\int_{0}^{2}\int_{y^2}^{4} dx\, dy =$$

$$\int_{y^2}^{4} dx = x \Big|_{y^2}^{4}$$

$$\int_{0}^{2} (4 - y^2)\, dy =$$

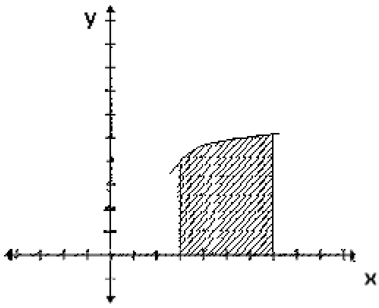
$$4\,y \; + \; \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^2 =$$

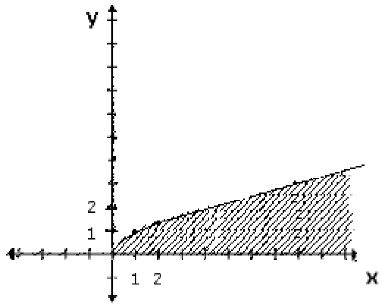
$$8 \; - \; \frac{8^3}{5} \; = \; \frac{16}{3}$$

$$A = \int_{x2}^{x1} (F_T - F_P)\, dx =$$

$x_1$ y $x_2$ son puntos de intersección.

$$A = \int_{a}^{b} f(x)\, dx =$$






El área que nos dió es una intersección entre 0 y 2.

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\, dy =$$

$$\int_0^2 (4 - y^2)\ dx =$$

Para resolver esto tengo que reemplazar $y^2 = x$; $y = \sqrt{x}$

$$\int_0^2 (4 - \sqrt{x})\ dx =$$

$$A = \int\int dx\, dy$$

$$\int_0^2 (4 - \sqrt{x})\ dx = 4x - \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^2 = x - \frac{2}{3}\sqrt{8}$$

b) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx =$

c) $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy\, dx =$

d) $\int_{-2}^1 \int_{x+2}^{4-x^2} dy\, dx =$