Trabajo Práctico N° 4: Álgebra de Boole. Funciones Booleanas.

A. Álgebra de Boole

1) Probar que el conjunto B, con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$, una operación unaria ´ y dos elementos distintos 0 y 1, donde el 0 es el elemento neutro para la suma y 1 es el elemento neutro para el producto, es un álgebra de Boole.

+	x	y
x	x	y
y	y	y

·	x	y
x	x	x
y	x	y

	´
0	1
1	0

2) Dado el conjunto B = {1; 3; 5; 15} donde se definen las operaciones: $x+y=mcm(x,y)$ y $x\cdot y=mcd(x,y)\quad \forall x,y\in B$. Probar que (B, +, ·) es un álgebra de Boole.

3) Justificar la validez de las demostraciones dadas, indicando qué axioma o propiedad se ha utilizado. Luego realizar la demostración de la propiedad dual.

a) Complementarios del 0 y del 1:

$$1 \underset{(1)}{=} 1\cdot 1 \underset{(2)}{=} 1\cdot(0+0') \underset{(3)}{=} 1\cdot 0' \underset{(4)}{=} 0'$$

(1)
(2)
(3)
(4)

Probar que: 0 = 1’

b) Idempotencia respecto a la suma y al producto:

$$x \underset{(1)}{=} x+0 \underset{(2)}{=} x+(x'\cdot x) \underset{(3)}{=} (x+x')\cdot(x+x) \underset{(4)}{=} 1\cdot(x+x) \underset{(5)}{=} x+x$$

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)

Probar que: $x=x\cdot x$

c) Identidad de los elementos 0 y 1.

$$x+1 \underset{(1)}{=} x+(x'+x) \underset{(2)}{=} (x+x)+x' \underset{(3)}{=} x+x' \underset{(4)}{=} 1$$

(1)
(2)
(3)
(4)

Probar que: $x\cdot 0=0$

d) Leyes de De Morgan:

$$(x+y).(x'\cdot y') \underset{(1)}{=} x\cdot(x'\cdot y') + y\cdot(x'\cdot y') \underset{(2)}{=} x\cdot(x'\cdot y') + y\cdot(y'\cdot x') \underset{(3)}{=} (x\cdot x')\cdot y' + (y\cdot y')\cdot x' \underset{(4)}{=} 0\cdot y' + 0\cdot x' \underset{(5)}{=} 0+0 \underset{(6)}{=} 0$$

$$(x+y)+(x'\cdot y') \underset{(7)}{=} (x+y+x')\cdot(x+y+y') \underset{(8)}{=} (x+x'+y)\cdot(x+y+y') \underset{(9)}{=} [(x+x')+y]\cdot[x+(y+y')] \underset{(10)}{=}$$

$$(1+y)\cdot(x+1) \underset{(11)}{=} 1\cdot 1 \underset{(12)}{=} 1$$

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(*)

(7)
(8)
(9)
(10)
(11)
(12)
(**)

De (*) y (**), resulta que : $(x+y)' = x'\cdot y'$ por unicidad del complementario.

Probar que: $(x.y)' = x'+y'$

e) Propiedad sin un nombre especial

$$x + x'\cdot y \underset{(1)}{=} (x + x\cdot y) + x'y \underset{(2)}{=} x + (x\cdot y + x'\cdot y) \underset{(3)}{=} x + (x+x')\cdot y \underset{(4)}{=} x + 1\cdot y \underset{(5)}{=} x+y$$

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)

Probar que: $x\cdot(x'+y) = x\cdot y$

4) Sea $(B,+,\cdot)$ un álgebra de Boole. Hallar el complementario de los siguientes elementos de B, justificando cada paso:

a) $[(x'\cdot y')'+z]\cdot(x+z) \quad con \quad x,y,z\in B$

b) $(x+y\cdot z)\cdot x\cdot(x+z) \quad con \quad x,y,z\in B$

c) $[(x+y)\cdot z'+y\cdot w]\cdot(z+w) \quad con \quad x,y,z,w\in B$

B. Funciones Booleanas

1) Dada la siguiente tabla de verdad. Hallar la expresión de la función booleana de $f : B^3 \to \{0,1\}$, en su forma normal disyuntiva (FND) y en su forma normal conjuntiva (FNC).
FND: suma de minitérminos
FNC: producto de maxitérminos.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

2) Encontrar la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de la función Booleana: $f : B^3 \to \{0,1\} / f(x, y, z) = xy + x'z$

3) Una fábrica de gaseosas desea que un sistema automático (f) retire de la banda transportadora aquellas botellas que contengan bebidas que no cumplen con los requisitos mínimos de calidad; para esta operación, el sistema cuenta con cuatro sensores (x, y, z, w) en distintos puntos de la cinta transportadora que emiten señales {0,1}. Si el sistema emite la señal 1, la botella debe ser retirada y si emite 0 puede integrarse a la producción. Hallar la función booleana $f : B^4 \to \{0,1\}$ que permita conocer todos los casos en que la bebida debe ser retirada de la cinta transportadora. Las señales de sensores y sistema posibles están dadas en la siguiente matriz:

x	y	z	w	f
1	1	1	1	0
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0

4) Hallar las expresiones de las funciones booleanas f y g, ambas de $B^3 \rightarrow \{0,1\}$, cuyas tablas de verdad son:

x	y	z	f	g
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

5) Dadas las siguientes funciones booleanas, simplificar utilizando las propiedades de un álgebra de Boole.

a) $f: B^2 \rightarrow \{0,1\} \,/\, f(x,y) = x'.y' + x'.y$

b) $f: B^3 \rightarrow \{0,1\} \,/\, f(x,y,z) = \left[(x+y').(x.y'.z)'\right]'$

c) $f: B^3 \rightarrow \{0,1\} \,/\, f(x,y,z) = \left\{\left[(x'.y')'+z\right].(x+z)\right\}'$

d) $f: B^3 \rightarrow \{0,1\} \,/\, f(x,y,z) = x'.y'.z' + x'.y.z' + x.y'.z$

e) $f: B^3 \rightarrow \{0,1\} \,/\, f(x,y,z) = x'.y'.z' + x'.y.z + x'.y.z' + x.y'.z' + x.y.z'$

6) Dados los siguientes mapas de Karnaugh:

	xy	xy'	x'y'	x'y
z			1	
z'	1	1	1	

	xy	xy'	x'y'	x'y
z		1	1	1
z'	1			1

	xy	xy'	x'y'	x'y
zu			1	1
zu'			1	1
z'u'	1		1	1
z'u			1	

	xy	xy'	x'y'	x'y
zu	1	1		1
zu'	1	1		1
z'u'		1		
z'u		1		

¿Cuál es la función booleana que define cada uno de ellos? Expresarlo en la forma más simple posible.

7) Simplificar las siguientes funciones booleanas usando mapas de Karnaugh.

a) $f: B^2 \rightarrow \{0,1\} \,/\, f(x,y) = x'.y' + x'.y$

b) $f: B^3 \rightarrow \{0,1\} \,/\, f(x,y,z) = x'.y'.z' + x'.y.z' + x'.y.z + x.y'.z' + x.y.z'$

c) $f: B^4 \rightarrow \{0,1\} \,/\, f(x,y,z,u) = x'.y'.z'.u + x'.y'.z.u + x'.y.z'.u' + x'.y.z'.u + x'.y.z.u + x'.y.z.u' + x.y.z.u + x.y'.z.u'$

8) A partir de las siguientes tablas elaborar el correspondiente mapa de Karnaugh y simplificar:

a)

x	y	f
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

b)

x	y	z	f
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

9) Construir el gráfico de compuertas de las siguientes funciones booleanas:

a) $f : B^3 \to \{0,1\} / \ f(x,y,z) = xy' + x'z' + y$

b) $g : B^3 \to \{0,1\} / \ g(x,y,z) = (x+y)' + (y+z').x$

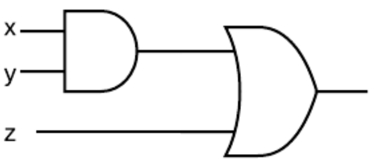
c) $f : B^3 \to \{0,1\} / \ f(x,y,z) = x.y.z + (x+y).z$

d) $f : B^4 \to \{0,1\} / \ f(x,y,z,u) = (x+y).z.(y+u)$

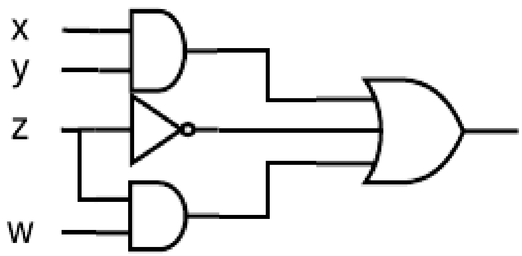
e) $f : B^4 \to \{0,1\} / \ f(x,y,z,u) = \left[(x.y)' + (z.u)'\right]'$

10) Determinar la función booleana correspondiente a los siguientes gráficos de compuertas:

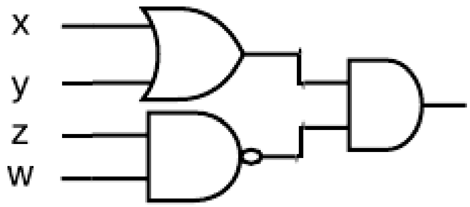
a)



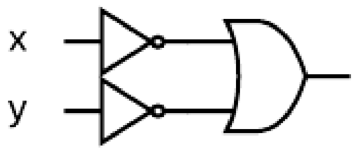
b)



c)



d)



e)